Influência do gradiente de pressão na transição em escoamentos sobre superfícies côncavas

Josuel Kruppa Rogenski

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Josuel Kruppa Rogenski

Influência do gradiente de pressão na transição em escoamentos sobre superfícies côncavas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
Dezembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R721i

Rogenski, Josuel Kruppa

Influência do gradiente de pressão na transição
em escoamentos sobre superfícies côncavas / Josuel
Kruppa Rogenski; orientador Leandro Franco de Souza.
- São Carlos - SP, 2015.
110 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional)
- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2015.

1. vórtices de Görtler. 2. simulação numérica.
3. camada limite. 4. gradiente de pressão.
5. instabilidade secundária. I. Souza, Leandro Franco
de, orient. II. Título.

Josuel Kruppa Rogenski

**Influence of the pressure gradient in transition flows over
concave surfaces**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
in partial fulfillment of the requirements for the degree
of the Doctorate Program in Computer Science and
Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

USP – São Carlos
December 2015

A meus pais Sueli e Joel e a meu irmão Marcos.

AGRADECIMENTOS

Gratidão a Deus,

à família, aos amigos, aos que me são caros e aos nossos laços...

Grato ao professor, orientador e amigo Leandro Franco de Souza.

Grato aos professores Márcio Teixeira de Mendonça e Jerzy Maciej Floryan.

Agradeço ainda aos meus professores, aos meus colegas e aos funcionários da Universidade de São Paulo. Reconhecimento à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro disponibilizado por meio dos projetos de pesquisa 2011/08010-0 e 2013/00553-0 e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior por meio de apoio vinculado ao projeto DS-6713329/D.

“Kruppa, vamos tomar café?”
(Giseli Aparecida Braz de Lima)

RESUMO

ROGENSKI, J. K.. **Influência do gradiente de pressão na transição em escoamentos sobre superfícies côncavas**. 2015. 110 f. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Escoamentos sobre superfícies côncavas, como os que ocorrem no intradorso de uma pá de turbina, estão sujeitos à instabilidade centrífuga. A esse tipo de configuração atribui-se possibilidade de transição à turbulência devido a formação dos vórtices de Görtler. Estudos são propostos no sentido de identificar possível influência do gradiente de pressão nos mecanismos de desenvolvimento desses vórtices e sua interação com outras perturbações na transição. O processo de investigação dá-se numericamente por meio do desenvolvimento e uso de um código numérico paralelizado e de alta ordem de precisão. Resultados obtidos caracterizam o gradiente de pressão adverso como mais instável se comparado ao caso neutro ou favorável. Variações no gradiente de pressão não se mostram eficientes no processo de controle da instabilidade. Ao gradiente adverso atribui-se antecipação da região de saturação dos vórtices. Ressalta-se ainda a natureza desestabilizadora do gradiente adverso quanto aos mecanismos de amplificação dos modos varicoso e sinuoso associados à instabilidade secundária.

Palavras-chave: vórtices de Görtler, simulação numérica, camada limite, gradiente de pressão, instabilidade secundária.

ABSTRACT

ROGENSKI, J. K.. **Influence of the pressure gradient in transition flows over concave surfaces**. 2015. 110 f. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Flows over concave surfaces are subjected to centrifugal instability and may transition to turbulence. Studies are conducted to identify the role of the external pressure gradient on the development of the Görtler vortices and their interaction with other flow disturbances. Numerical simulations are carried out by the development and use of an in-house parallel code with high-order of accuracy. Adverse pressure gradient configurations are observed to be more unstable than the neutral and favourable ones. Pressure gradient variations do not prove to be an efficient way to control the centrifugal instability. The destabilizing behaviour that is observed by the adverse pressure gradient justifies its influence on the anticipation of the saturation of the primary vortices and growth of the sinuous and varicose secondary modes.

Key-words: Görtler vortices, numerical simulation, boundary layer, pressure gradient, secondary instability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Vórtices de Görtler.	33
Figura 2 – Curvas de taxa de amplificação constante em função do número de Görtler e do número de onda na direção transversal	34
Figura 3 – Curvas de taxa de amplificação constante em função do número de Görtler e do comprimento de onda característico	35
Figura 4 – Distribuição do componente principal de velocidade na direção do escoamento	36
Figura 5 – Esboço do domínio de integração. Zonas de amortecimento são inseridas em regiões próximas ao contornos de entrada e saída. Região de inserção de perturbações é também esquematizada.	41
Figura 6 – Taxa de amplificação local (α) para $m = 0,05$ e $\Lambda = 210$. Dados gerados por meio da Teoria de Estabilidade Linear (FLORYAN; SARIC, 1982; MENDONÇA, 2012). Símbolos representam dados obtidos por Goulpié, Klingmann e Bottaro (1996).	54
Figura 7 – Taxa de amplificação local (α) para $\Lambda = 100$ com $\gamma = -0,15, \gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$. Demais parâmetros físicos são considerados em acordo com Swearingen e Blackwelder (1987). Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia) e Teoria de Estabilidade Linear (linha tracejada).	55
Figura 8 – Taxa de amplificação local (α) para $\Lambda = 250$ com $\gamma = -0,15, \gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$. Demais parâmetros físicos são considerados em acordo com Swearingen e Blackwelder (1987). Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia) e Teoria de Estabilidade Linear (linha tracejada).	56
Figura 9 – Taxa de amplificação local (α) para $\Lambda = 400$ com $\gamma = -0,15, \gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$. Demais parâmetros físicos são considerados em acordo com Swearingen e Blackwelder (1987). Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia) e Teoria de Estabilidade Linear (linha tracejada).	56
Figura 10 – Máximo na direção normal ao escoamento da média quadrática em z para os componentes de velocidade u, v e w em função do número de Görtler local. Caso linear em que $\gamma = 0,0$ e $\Lambda = 250$. Símbolos representam dados obtidos por Schrader, Brandt e Zaki (2011).	57

Figura 11 – Máximo na direção normal ao escoamento da média quadrática em z para os componentes de velocidade u, v e w em função do número de Görtler local. Caso não linear em que $\gamma = 0,0$ e $\Lambda = 250$. Símbolos representam dados obtidos por Schrader, Brandt e Zaki (2011).	58
Figura 12 – Características dos escoamentos base: (a) distribuição do gradiente de pressão do escoamento potencial, (b) distribuição de velocidade do escoamento potencial e (c) fator de forma da camada limite. Linhas cheias denotam casos onde o parâmetro de Hartree é constante e linhas tracejadas representam casos em que o gradiente de pressão é constante.	63
Figura 13 – Identificação da influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler para $\gamma = 0,0$. (a) evolução de $\max(u_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).	64
Figura 14 – Identificação da influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler para $\gamma = 0,0$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).	64
Figura 15 – Identificação da influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler para $\gamma = 0,0$. (a) evolução de $\max(w_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).	65
Figura 16 – Identificação da influência do parâmetro de Hartree na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 250$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a). . .	65
Figura 17 – Identificação da influência do gradiente de pressão constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 250$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a). . .	66
Figura 18 – Identificação da influência do parâmetro de Hartree constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 100$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a). .	67
Figura 19 – Identificação da influência do gradiente de pressão constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 100$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a). . .	67
Figura 20 – Identificação da influência do parâmetro de Hartree constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 450$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a). .	68
Figura 21 – Identificação da influência do gradiente de pressão constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 450$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a). . .	68

Figura 22 – Características dos escoamentos base para casos em que há variação linear do gradiente de pressão: (a) distribuição do gradiente de pressão do escoamento potencial, (b) distribuição de velocidade do escoamento potencial e (c) fator de forma H_{12} da camada limite.	69
Figura 23 – Identificação da influência de variações lineares do gradiente de pressão na evolução dos vórtices de Görtler por meio da métrica $\max(v_{RMS})^*$ nos casos em que: (a) $\Lambda = 100$, (b) $\Lambda = 250$ e (c) $\Lambda = 450$	70
Figura 24 – Taxa de amplificação dos vórtices para os casos em que o gradiente de pressão varia linearmente de um estado (a) adverso para favorável (A2F) e (b) favorável para adverso (F2A)	70
Figura 25 – Características do escoamento base para três distribuições do gradiente de pressão externo.	72
Figura 26 – A evolução de $\Lambda = 160$ vórtices em um regime favorável de escoamento em camada limite ($dp/dx = -0.02$). A energia para os modos de Fourier $k = 0, \dots, 10$ é apresentada.	73
Figura 27 – Interseção entre os modos $k = 0$ e $k = 1$ para os casos adverso, neutro e favorável considerando-se $\Lambda = 160$	73
Figura 28 – Interseção entre os modos $k = 0$ e $k = 1$ para os casos adverso, neutro e favorável considerando-se (a) $\Lambda = 305$ e (b) $\Lambda = 450$	74
Figura 29 – Perfis de isovelocidade $\tilde{u}$ em planos $z \times y$, para diferentes comprimentos de onda característicos. À esquerda tem-se $dp/dx = -0,02$; coluna central representa casos em que $dp/dx = 0,0$; à direita tem-se $dp/dx = 0,008$. Os cortes em x concordam com as posições x apresentadas na Tab. 1.	75
Figura 30 – Média em z de tensão de cisalhamento no contorno rígido para os casos em que (a) $\Lambda = 160$, (b) $\Lambda = 305$ e (c) $\Lambda = 450$. Linhas cheias representam valores associados ao escoamento base	77
Figura 31 – A natureza convectiva da instabilidade secundária. A ausência da fonte de geração de perturbações não estacionárias implica o decaimento da máxima amplitude dos modos temporais. Análises temporais realizadas (a) após 2 períodos (b) após 6 períodos e (c) após 10 períodos da interrupção do gerador de perturbações	80
Figura 32 – Relações entre perturbações estacionárias e não estacionárias na instabilidade secundária	81
Figura 33 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler em regime neutro ($dp/dx = 0,0$). Em (a) perturbações não estacionárias estão defasadas em 90° em relação ao escoamento base e em (b) perturbações estão em fase em relação ao escoamento base.	82

Figura 34 – Distribuição de amplitude dos modos temporais no plano $x = 7,52$ para o caso em que perturbações são inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görter em regime neutro ($dp/dx = 0,0$).	84
Figura 35 – Distribuição de amplitude dos modos temporais no plano $x = 8,0$ para o caso em que perturbações são inseridas em fase com os vórtices de Görter em regime neutro ($dp/dx = 0,0$).	85
Figura 36 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa (a) e varicosa (b). Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime neutro.	86
Figura 37 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler em regime favorável ($dp/dx = -0,02$). Em (a) perturbações não estacionárias estão defasadas em 90° em relação ao escoamento base e em (b) perturbações estão em fase em relação ao escoamento base.	86
Figura 38 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler em regime adverso ($dp/dx = 0,008$). Em (a) perturbações não estacionárias estão defasadas em 90° em relação ao escoamento base e em (b) perturbações estão em fase com o escoamento base.	87
Figura 39 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa (a) e varicosa (b). Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime favorável.	87
Figura 40 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa (a) e varicosa (b). Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime adverso.	88
Figura 41 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa ao longo de um ciclo completo de período T . Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime desfavorável.	89
Figura 42 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo varicosa ao longo de um ciclo completo de período T . Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime desfavorável.	90
Figura 43 – Competição entre os modos sinuoso e varicoso na instabilidade secundária em casos onde (a) $dp/dx = 0,008$, (b) $dp/dx = 0,0$ e (c) $dp/dx = -0,02$	91

Figura 44 – Visualização das estruturas vorticiais associadas à instabilidade secundária para casos em que há competição entre os modos sinuoso e varicoso. Em (a) $dp/dx = 0,008$, (b) $dp/dx = 0,0$ e (c) $dp/dx = -0,02$	91
Figura 45 – Estiramento na vizinhança de um ponto j do domínio discreto.	101
Figura 46 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.1 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' . 105	
Figura 47 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.9 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' . 106	
Figura 48 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.3 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' . 107	
Figura 49 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.7 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' . 107	
Figura 50 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.4 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' . 108	
Figura 51 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.8 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' . 108	

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Interseção entre os modos fundamental e correção do escoamento base para casos adverso, neutro e favorável tendo $\Lambda = 160, 305$ e 450	74
Tabela 2	– Valores máximos de $\sqrt{Re}\partial\tilde{u}/\partial y$ em planos x definidos pela Tab. 1. Os casos adverso, neutro e favorável com variações de $\Lambda = 160, 305$ e 450 são considerados.	76
Tabela 3	– Valores máximos de $\partial\tilde{u}/\partial z$ em planos x definidos pela Tab. 1. Os casos adverso, neutro e favorável tendo $\Lambda = 160, 305$ e 450 são considerados. . . .	76
Tabela 4	– Valores relativos da máxima diferença entre valores médios de tensão de cisalhamento no contorno rígido. Compara-se casos não lineares com respectivos estados não perturbados.	78

LISTA DE SÍMBOLOS

- λ^* — comprimento de onda transversal (m)
- Go — número de Görtler
- U_∞^* — velocidade do escoamento fora da camada limite ($m.s^{-1}$)
- ν^* — viscosidade cinemática ($m^2.s^{-1}$)
- R^* — raio de curvatura da superfície (m)
- δ^* — constante proporcional à espessura da camada limite (m)
- x^* — distância do bordo de ataque da placa côncava (m)
- β — número de onda local na direção transversal
- σ — taxa de amplificação
- Λ — comprimento de onda característico
- $(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)^t$ — componentes do vetor vorticidade
- $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^t$ — componentes do vetor velocidade
- x — componente do vetor posição associado à direção do escoamento
- y — componente do vetor posição associado à direção normal à superfície rígida
- z — componente do vetor posição associado à direção transversal ao escoamento
- L^* — comprimento de referência (m)
- Re — número de Reynolds
- g_b — função genérica que representa um estado base
- g — função genérica representando perturbações de g_b
- x_0, x_{max} — planos representando o início e término do domínio de integração na direção principal do escoamento
- x_1, x_2 — planos representando o início e término da região de amortecimento de perturbações
- x_5, x_6 — planos representando o início e término da região de relaminarização do escoamento
- x_3, x_4 — planos representando o início e término da região de inserção de perturbações
- U_e — componente principal do vetor velocidade para o escoamento potencial

m — expoente de uma função que aproxima o escoamento potencial

γ — parâmetro de Hartree

i — unidade imaginária

λ — comprimento de onda transversal adimensional

k — modo de Fourier

Δx — espaçamento de malha na direção principal do escoamento

Δy_j — j -ésimo espaçamento de malha na direção normal ao contorno rígido

N_x, N_y — número máximo de pontos discretizados nas direções principal e normal ao contorno rígido, respectivamente

Δt — passo temporal

sf — razão de estiramento de malha na direção normal ao contorno rígido

A — amplitude máxima de perturbações estacionárias

A_s — amplitude de perturbação relacionada à instabilidade secundária

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Transição à turbulência em escoamentos sobre geometrias curvas .	28
1.2	O controle do processo de transição à turbulência	28
1.3	Escopo da presente investigação	29
2	O CONCEITO DE INSTABILIDADE, OS VÓRTICES DE GÖRTLER E O PROCESSO DE TRANSIÇÃO	31
2.1	Mecanismos da instabilidade	31
2.2	A instabilidade centrífuga e os vórtices de Görtler	32
2.2.1	<i>Sobre a não linearidade e saturação dos vórtices</i>	36
2.2.2	<i>A instabilidade secundária</i>	37
3	AS EQUAÇÕES GOVERNANTES	39
3.1	A evolução de perturbações de baixa amplitude	40
3.1.1	<i>As condições de contorno para a evolução de perturbações</i>	41
3.2	O escoamento base	42
3.2.1	<i>Condições de contorno para o escoamento base</i>	43
4	MÉTODO NUMÉRICO	45
4.1	A discretização do domínio de integração	46
4.1.1	<i>O avanço temporal</i>	47
4.1.2	<i>O uso de esquemas de diferenças finitas compactas para o cálculo de derivadas espaciais</i>	47
4.1.3	<i>A solução numérica da equação de Poisson</i>	47
4.1.4	<i>Inserção e amortecimento de perturbações</i>	48
4.1.5	<i>A instabilidade secundária e a inserção de perturbações não estacionárias</i>	48
4.1.6	<i>O cálculo da vorticidade no contorno rígido</i>	49
4.1.7	<i>O filtro e as altas frequências</i>	50
5	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO	53
5.1	Teoria de estabilidade linear	53
5.2	Parâmetros físicos e numéricos para verificação e validação do código	53

5.3	Comparativo entre códigos em simulação numérica e Teoria de Estabilidade Linear	54
5.4	Comparativo entre códigos de simulação numérica	57
5.5	Sobre a evolução não linear dos vórtices de Görtler	58
6	ASPECTOS LINEARES À EVOLUÇÃO DOS VÓRTICES DE GÖRTLER	61
6.1	A evolução linear dos vórtices de Görtler	61
6.1.1	<i>Distribuições de gradiente de pressão constante e Hartree constante</i>	62
6.1.2	<i>Distribuições lineares do gradiente de pressão</i>	67
7	O EFEITO NÃO LINEAR NA INSTABILIDADE CENTRÍFUGA . .	71
8	A INSTABILIDADE SECUNDÁRIA	79
8.1	A natureza convectiva da instabilidade secundária	80
8.2	O gradiente de pressão na evolução dos modos sinuoso e varicoso .	80
9	CONCLUSÕES	93
	REFERÊNCIAS	95
APÊNDICE A	O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE DIFERENÇAS FINITAS COMPACTAS EM MALHAS ESTIRADAS .	101
A.1	O cálculo dos coeficientes para derivadas de primeira e segunda ordens	101
A.2	A influência do estiramento na resolução espectral de aproximações compactas	104
A.3	O estiramento de malha e a equação de Poisson	106
A.4	O processo de integração em uma malha estirada	109

INTRODUÇÃO

Seja pela ampla aplicabilidade industrial ou mesmo visando avanços puramente teóricos, o fenômeno de turbulência em fluidos vem sendo objeto de frequente estudo pela comunidade científica. Sob certos aspectos, a origem desse fenômeno está relacionada à resposta de um escoamento frente a perturbações. Ao estudo do processo de (de)crescimento dessas perturbações em relação a um estado base atribui-se principal objetivo de estudo na área de estabilidade.

Estudos na área de estabilidade foram iniciados pelas ideias de Osborne Reynolds e Lord Rayleigh, ao final do século XIX. Reynolds obteve os primeiros resultados experimentais voltados ao estudo de estabilidade com a clássica investigação da evolução de traçadores em escoamentos em dutos de vidro. Seus resultados possibilitaram a identificação de um adimensional, posteriormente conhecido como número de Reynolds. O número de Reynolds, interpretado como o quociente entre forças inerciais e viscosas, vem sendo amplamente utilizado como parâmetro de mensuração da susceptibilidade do escoamento a perturbações. Reynolds ainda forneceu contribuições importantes na identificação de regiões turbulentas intermitentes e no desenvolvimento das equações médias para escoamentos turbulentos (SILVEIRANETO, 2002).

Paralelamente as propostas de Reynolds, Lord Rayleigh desenvolveu estudos teóricos relacionados à investigação da instabilidade em escoamentos paralelos de fluidos não viscosos. Sua maior contribuição talvez seja a demonstração de que uma condição necessária à instabilidade em um escoamento paralelo é a existência de um ponto de inflexão no campo de velocidade¹. Além disso, Rayleigh foi o primeiro pesquisador a desenvolver um critério de instabilidade - conhecido como critério de circulação de Rayleigh - que contemplasse a influência de forças de curvatura. A notoriedade do critério de circulação de Rayleigh fica evidenciada pelos trabalhos propostos por Taylor (1923), Dean (1928) e Görtler (1940).

¹ Posteriormente, Tollmien demonstrou a suficiência do teorema para a amplificação de perturbações (SCHLICHTING, 1979).

1.1 Transição à turbulência em escoamentos sobre geometrias curvas

Classicamente, escoamentos onde o efeito centrífugo é relevante podem ser categorizados em três grupos: (a) escoamento entre cilindros concêntricos; (b) escoamento em dutos curvos; e (c) escoamento em camada limite sobre superfícies curvas. A presente classificação é tomada em função do escoamento ser ou não paralelo e do sistema ser aberto ou fechado.

Independentemente da categoria na qual um escoamento se encontre, o critério de instabilidade centrífuga é não viscoso² e tem como cerne os estudos de Lord Rayleigh. De forma geral, o processo de transição à turbulência em superfícies curvas tem como origem uma situação na qual o gradiente de pressão na direção radial não é capaz de suprimir pequenas perturbações, quando as mesmas encontram-se em regiões onde a força centrífuga atuante é grande.

Taylor (1923) investigou teórica e experimentalmente o processo de transição em um escoamento de Couette para uma configuração em que o cilindro interno gira e o cilindro externo permanece em repouso. Instabilidades na forma de vórtices toroidais contrarrotativos podem ser formadas caso, por exemplo, um valor crítico da velocidade de rotação do cilindro interno seja atingido. Essas estruturas vorticais, denominadas vórtices de Taylor, são geradas em um escoamento base que é paralelo e fechado.

Estruturas semelhantes aos vórtices de Taylor também são geradas em dutos curvos (DEAN, 1928). Para esse tipo de configuração, o escoamento é paralelo e aberto, e a instabilidade leva o nome de Dean. Por fim, a aplicação das ideias de Rayleigh a escoamentos sobre superfícies curvas, conduzida teoricamente por Görtler (1940), resulta na existência de estruturas vorticais de natureza semelhante àquelas indicadas por Taylor e Dean.

A semelhança entre estruturas vorticais que compartilham o mecanismo físico dado por Rayleigh poderia desmerecer os trabalhos posteriores a Taylor. No entanto, Saric (1994) afirma que as características espaciais e não paralelas de escoamentos abertos susceptíveis a instabilidade centrífuga tornam o problema de Görtler praticamente único³.

1.2 O controle do processo de transição à turbulência

Os efeitos decorrentes da instabilidade podem, ou não, ser desejados. Um escoamento turbulento favorece, por exemplo, processos de mistura e fornece aumentos na taxa de transfe-

² Uma discussão sobre a natureza invíscida da instabilidade em um escoamento em camada limite sobre superfícies curvas pode ser encontrada em Hall e Horseman (1991).

³ Dentre as características apresentadas por Saric (1994), ressalta-se o fato de que os vórtices de Görtler ocorrem em camada limite. O conceito de camada limite, criado por Prandtl em 1904, possibilita o alcance de altos graus de correlação entre campos analíticos e experimentais da dinâmica dos fluidos. Em função da teoria de camada limite de Prandtl, uma parte significativa da investigação do processo de transição à turbulência torna-se bem fundamentada teoricamente.

rência de calor e quantidade de movimento, se comparados com escoamento não perturbado (laminar). Por outro lado, a conservação de um estado laminar implica a manutenção de baixos fatores de atrito e a redução do consumo de combustíveis em aeronaves (MARXEN, 2005).

De uma forma ou de outra, uma correta predição da instabilidade é almejada. Todavia, os mecanismos que levam à instabilidade são complexos uma vez que estão vinculados à interação entre uma grande quantidade de fatores como, por exemplo, gradientes de pressão, número de Reynolds, curvatura, nível de turbulência do escoamento externo, som e distribuição de rugosidade (BARIO; BERAL, 1998).

Em meio a essa dificuldade, Marxen (2005) ressalta a importância do uso da experimentação e a classifica em dois contextos principais: um contexto clássico, onde a investigação ocorre por meio de um experimento real e um contexto virtual, delimitado pela presença de modelos e métodos numéricos.

1.3 Escopo da presente investigação

O escopo do presente trabalho volta-se para a identificação da influência do gradiente de pressão externo a uma camada limite laminar em superfície côncava nos mecanismos que regem o processo de transição a turbulência. A investigação dá-se por meio do uso de simulação numérica espacial. Objetiva-se o estudo da evolução linear e não linear dos vórtices de Görtler em casos onde o gradiente de pressão externo é constante, varie linearmente ou seja representado pelo parâmetro de Hartree. Aspectos ligados ao fenômeno de saturação dos vórtices e a interação dos mesmos no que se refere aos mecanismos ligados à instabilidade secundária são também discutidos.

O CONCEITO DE INSTABILIDADE, OS VÓRTICES DE GÖRTLER E O PROCESSO DE TRANSIÇÃO

O conceito de instabilidade em um escoamento associa-se ao comportamento apresentado por um estado base frente a pequenas e moderadas perturbações. A investigação desse comportamento pode ser melhor conduzida por meio do uso da hipótese de Reynolds. Por meio dessa hipótese, um escoamento é visto como uma sobreposição de um escoamento base e perturbações. Nesse sentido, um escoamento base é dito ser instável a determinadas perturbações em casos onde essas crescem temporal e/ou espacialmente.

Todavia, segundo Kundu e Cohen (2002), há situações em que a interação entre o escoamento base e perturbações instáveis faz com que o escoamento atinja um estágio de equilíbrio diferente do inicial. A esse estágio de equilíbrio associa-se um novo escoamento base. A natureza desse novo escoamento base pode caracterizá-lo como instável a outro conjunto de perturbações. É nessa recursividade, objeto de estudo da área de transição, que se faz meio para um melhor entendimento dos mecanismos que regem a turbulência.

2.1 Mecanismos da instabilidade

O processo de transição laminar-turbulento, mesmo que aparentemente abrupto¹, é teoricamente composto por um conjunto de estágios. Esses estágios, didaticamente discutidos por Marxen (2005), são: (a) a receptividade, (b) evolução transiente, (c) a instabilidade primária, (d) a saturação ou a instabilidade secundária, (e) o desenvolvimento e interação entre estruturas coerentes e (f) a turbulência.

¹ O processo “abrupto” de transição é denominado, em inglês, como *bypass transition*.

- (a) A receptividade é caracterizada pela conversão de fontes externas de perturbação² em perturbações dentro do escoamento e normalmente está associada com propriedades do escoamento base. Já que um escoamento é sujeito a um conjunto de perturbações de natureza diversa, o produto da fase de receptividade é dado como um espectro de perturbações³;
- (b) a região de evolução transiente é caracterizada, normalmente, por um aumento de apenas um componente do vetor velocidade. O estágio pode ou não se manter por uma grande extensão do escoamento⁴. Há situações em que perturbações já aparecem na forma de modos normais. Regiões pequenas de evolução são normalmente consideradas parte da região de receptividade;
- (c) o estágio relacionado à instabilidade primária pode ser definido como a fase inicial do processo de transição e depende unicamente do escoamento base laminar. O estágio é normalmente linear e a amplitude das perturbações não ultrapassa a ordem de 1% da velocidade característica do escoamento. Vórtices de Görtler e ondas de Tollmien-Schlichting pertencem a esse conjunto.
- (d) a estabilidade secundária associa-se a um estágio em que efeitos não lineares começam a ser significativos. A presença de efeitos não lineares significativos torna a região de instabilidade secundária dependente, além de propriedades do escoamento base, da interação entre perturbações de diferentes naturezas. Estudos voltados à instabilidade secundária são normalmente realizados em um cenário fixo de instabilidade primária. A saturação marca o fim do processo de amplificação das perturbações;
- (e) a região de formação e interação das estruturas coerentes é caracterizada por um aumento da sensibilidade do escoamento. Perturbações e seus respectivos harmônicos apresentam um comportamento sincronizado. A região fica caracterizada por instabilidades de alta ordem e há forte influência de efeitos não lineares. Há ainda perda da característica de onda e tratamentos teóricos tornam-se difíceis.

Marxen (2005) afirma que um estágio turbulento só é atingido em regiões posteriores à região de formação e interação das estruturas coerentes.

2.2 A instabilidade centrífuga e os vórtices de Görtler

Em uma camada limite sobre uma superfície côncava, o mecanismo de instabilidade não viscoso apresentado por Rayleigh resulta no desenvolvimento de um escoamento secundário

² Uma perturbação ao escoamento pode ser exemplificada pela presença de imperfeições na geometria e/ou por fatores externos ao escoamento como o som ou a turbulência do escoamento livre.

³ Um espectro de perturbações é aqui definido como um conjunto de perturbações com uma ampla faixa de frequências.

⁴ Conceituação vista em um sentido espacial.

perpendicular à superfície. O escoamento secundário em questão toma a forma de estruturas vorticais contrarrotativas. Os vórtices em questão, explicitados pela Fig. 1, desenvolvem-se na direção do escoamento e possuem comprimento de onda constante λ^* .

Figura 1 – Vórtices de Görtler.

Fonte: Görtler (1940).

A investigação dos processos que levam a geração dessas estruturas vorticais em camada limite teve origem pelos trabalhos teóricos de Görtler (1940). Görtler mostra a existência de instabilidade centrífuga sobre superfícies côncavas ao assumir o escoamento como a sobreposição entre um escoamento médio paralelo à parede e pares de vórtices contra-rotativos gerados por meio de perturbações infinitesimais. Em seus estudos, o autor define um parâmetro adimensional, o qual historicamente leva o seu nome. O número de Görtler é definido como

$$Go = \frac{U_{\infty}^* \delta^*}{\nu^*} \sqrt{\frac{\delta^*}{R^*}}, \quad (2.1)$$

em que U_{∞}^* é a velocidade do escoamento fora da camada limite, ν^* é a viscosidade cinemática, R^* é o raio de curvatura da superfície e δ^* é uma constante proporcional à espessura da camada limite definida por

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu^* x^*}{U_{\infty}^*}}, \quad (2.2)$$

tendo x^* como uma distância do bordo de ataque da placa côncava.

A análise local por modos normais, realizada por Görtler, tem como produto um diagrama de estabilidade como o apresentado pela Fig. 2. Nele, relações entre Go , número de onda local na direção transversal β e taxa de amplificação σ podem ser identificadas.

Assumindo variações do número de Go e número de onda β apenas em função da espessura da camada limite, uma dada perturbação interceptará uma família de curvas com diferentes taxas de amplificação ao deslocar-se espacialmente.

Figura 2 – Curvas de taxa de amplificação constante em função do número de Görtler e do número de onda na direção transversal

Fonte: Saric (1994).

Görtler (1940) ainda define um adimensional conhecido como comprimento de onda característico Λ , dado por

$$\Lambda = \frac{U_{\infty}^* \lambda^*}{v^*} \sqrt{\frac{\lambda^*}{R^*}}. \quad (2.3)$$

O diagrama de estabilidade - Fig. 2 - explicita valores para o número de Görtler em função do comprimento de onda característico Λ e de taxa de amplificação espacial σ .

Valores de Λ no intervalo entre 200 e 270 garantem as maiores taxas de amplificação devido a uma proximidade em relação à curva de máxima amplificação (BOTTARO; KLINGMANN; ZEBIB, 1996; MITSUDHARMADI; WINOTO; SHAH, 2006). A curva de máxima amplificação é definida em função do conjunto formado pelos pontos de mínimo de cada curva com taxa de amplificação positiva.

Vale ressaltar que taxas positivas de amplificação são definidas como instáveis e taxas negativas, como estáveis. A curva cuja taxa de amplificação é nula, definida como curva neutra, limita a região de instabilidade dos diagramas 2 e 3. Diversas análises locais de estabilidade e caracterização da curva neutra são estendidas a partir das ideias propostas por Görtler (SMITH, 1955; RAGAB; NAYFEH, 1981; FLORYAN; SARIC, 1983). A modificação dos graus de aproximação de cada análise realizada resulta na obtenção de não uma, mas de um conjunto de curvas neutras (SARIC, 1994; GOULPIÉ; KLINGMANN; BOTTARO, 1996).

Motivado pela não uniformidade destes resultados, Hall (1983) demonstra a não unicidade da curva neutra e a dependência dessa em função de perturbações iniciais e suas localizações.

Figura 3 – Curvas de taxa de amplificação constante em função do número de Görtler e do comprimento de onda característico

Fonte: Saric (1994).

O autor ressalta o uso de um modelo parabólico como único meio de investigação da instabilidade para baixos números de onda e ainda mostra a validade do uso da Teoria de Estabilidade Linear (LST, do inglês *Linear Stability Theory*) apenas em um sentido assintótico, quando $\beta \gg 1$ (HALL, 1982; HALL, 1983). Day, Herbert e Saric (1990) concorda com os resultados de (HALL, 1982; HALL, 1983) ao realizar um comparativo entre o uso da análise por modos normais e o uso do modelo parabólico (SARIC, 1994).

A influência do gradiente de pressão é investigada numericamente por Ragab e Nayfeh (1981) e Goulpié, Klingmann e Bottaro (1996). Ragab e Nayfeh (1981) concluem que o número de Görtler crítico aumenta em casos onde há presença de um gradiente de pressão favorável e diminui, na presença de um gradiente adverso. Goulpié, Klingmann e Bottaro (1996) discutem a influência do gradiente de pressão por meio do uso de técnicas fundamentadas na teoria linear. O escoamento base adotado pelos autores é descrito pela solução da equação de Falkner-Skan. Há concordância entre as técnicas utilizadas e os resultados obtidos com investigação da propagação de ondas de Tollmien-Schlichting no sentido de que um gradiente de pressão adverso tende a desestabilizar o escoamento. Os autores ainda ressaltam a sensibilidade dos resultados frente a condições iniciais.

Experimentos voltados à investigação da influência do gradiente de pressão na formação dos vórtices de Görtler são encontrados nos trabalhos de Finnis e Brown (1997). Os autores observam que um gradiente de pressão favorável reduz as taxas de crescimento de vórtices.

O uso de Simulação Numérica Direta em escoamentos de Görtler é empregado por Liu e Domaradzki (1993), Zhang e Fasel (1999), Souza (2003) e Schrader, Brandt e Zaki (2011) apenas em casos onde o gradiente de pressão externo à camada limite é representado pelo gradiente neutro.

2.2.1 Sobre a não linearidade e saturação dos vórtices

Os vórtices modificam a estrutura da camada limite e geram duas regiões bem características: uma região ascendente (do inglês, *upwash*), em que fluido de baixa velocidade é impelido para longe do contorno rígido e uma região descendente (do inglês, *downwash*), em que o fluido de alta velocidade é impelido em direção à parede. Na região onde a amplitude dos vórtices é grande, a distribuição do componente principal de velocidade apresenta em um plano transversal a típica estrutura de cogumelo, explicitada pela Fig. 4.

Figura 4 – Distribuição do componente principal de velocidade na direção do escoamento

Fonte: Souza (2003).

Nesta figura, o escoamento desloca-se da esquerda para direita, e cada linha representa um nível de velocidade, variando de 0,1 - mais próximo à parede, a 0,9 - mais distante da parede. Pode-se observar que a estrutura do escoamento se modifica à medida que os vórtices vão se desenvolvendo. Convém salientar que o último perfil de velocidade já é bastante distorcido e que nas laterais a camada limite está mais achatada.

Ao atingir uma dada amplitude (10% da velocidade do escoamento potencial na fronteira da camada limite), a taxa de amplificação dos vórtices de Görtler sofre um decrescimento decorrente de efeitos não lineares. A esse decrescimento associa-se o início da região de saturação dos vórtices.

2.2.2 A instabilidade secundária

A natureza fraca da instabilidade centrífuga em camada limite explicita a relevância da interação entre os vórtices de Görtler e outras perturbações no processo que leva o escoamento à turbulência.

Na região próxima à saturação dos vórtices, efeitos não lineares são responsáveis pela distorção do escoamento base e consequente formação da clássica estrutura do tipo cogumelo. À essa estrutura fica atribuída um perfil inflexional do componente longitudinal da velocidade. O escoamento - aqui já entendido como a sobreposição entre o perfil de camada limite e os vórtices de Görtler - passa a ser potencialmente instável a perturbações não estacionárias.

Aos resultados experimentais de Swearingen e Blackwelder (1987) atribui-se evidência concreta do processo de transição via instabilidade secundária e sua associação aos altos gradientes observados nas direções normal e transversal ao escoamento (SARIC, 1994). Ao gradiente na direção normal relaciona-se o modo secundário varicoso. O modo secundário sinuoso é representado pelo gradiente transversal do componente de velocidade.

A importância dos resultados obtidos por Swearingen e Blackwelder (1987) fica evidente pela ampla produção científica deles decorrente. Investigações teóricas e experimentais propostas por Hall e Horseman (1991), Li e Malik (1995), Schrader, Brandt e Zaki (2011), Sescu e Thompson (2015). Hall e Horseman (1991) suportam a relevância dos modos harmônicos de instabilidade observados experimentalmente e Li e Malik (1995) ainda identificam a existência de modos subharmônicos instáveis ligados ao processo de transição. Li e Malik (1995) também confirmam existência de uma relação de dependência entre o mecanismo de seleção do modo dominante e o comprimento de onda característico. O modo sinuoso e os modos subharmônicos tendem a ser mais instáveis em casos onde o comprimento de onda dos vórtices é pequeno.

Experimentos recentes voltados à visualização dos vórtices de Görtler são apresentados por Winoto, Mitsudharmadi e Shah (2005), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2005a), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2006), Tandiono, Winoto e Shah (2009a), Tandiono, Winoto e Shah (2009b). Winoto, Mitsudharmadi e Shah (2005) obtêm êxito no processo de geração e visualização dos vórtices de Görtler impondo-se experimentalmente um dado comprimento de onda e identificam crescimento de um modo de instabilidade secundária. No mesmo ano, Winoto, Mitsudharmadi e Shah (2005) observam e discutem o efeito de não linearidades no processo que leva pares de vórtices de Görtler a se aglomerarem e a se dividirem.

Em continuidade, Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2006) reiteram o fato de vórtices com tamanho característico de 250 serem mais instáveis e observam uma região de transição coerente com valores de Görtler observáveis em transição natural. Tandiono, Winoto e Shah (2009a), Tandiono, Winoto e Shah (2009b) explicitam a presença da instabilidade secundária decorrente dos vórtices de Görtler como justificativa ao aumento dos valores de tensão de cisalhamento quando comparados com valores observados em regime turbulento.

Experimentos dedicados à investigação da influência do gradiente de pressão na estabilidade secundária são documentados em Aihara e Sonoda (1981) e Bahri *et al.* (1999). Estudos numéricos apresentados por Schrader, Brandt e Zaki (2011) e Sescu e Thompson (2015) ressaltam a importância da receptividade no desenvolvimento dos vórtices de Görtler e turbulência.

AS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Definindo-se o vetor vorticidade $\vec{\omega}$ em função do vetor velocidade $\vec{v}$ como

$$\vec{\omega} = -\nabla \times \vec{v},$$

um sistema de equações governantes o qual representa o movimento de um escoamento incompressível de um fluido newtoniano sobre superfícies de raio constante pode ser expresso em termos adimensionais como (SOUZA *et al.*, 2004; MALATESTA; SOUZA; LIU, 2013)

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{\omega}_x \tilde{v} - \tilde{\omega}_y \tilde{u})}{\partial y} - \frac{\partial (\tilde{\omega}_z \tilde{u} - \tilde{\omega}_x \tilde{w})}{\partial z} + \frac{Go^2}{Re} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial z} = \nabla^2 \tilde{\omega}_x, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{\omega}_y \tilde{w} - \tilde{\omega}_z \tilde{v})}{\partial z} - \frac{\partial (\tilde{\omega}_x \tilde{v} - \tilde{\omega}_y \tilde{u})}{\partial x} = \nabla^2 \tilde{\omega}_y, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{\omega}_z \tilde{u} - \tilde{\omega}_x \tilde{w})}{\partial x} - \frac{\partial (\tilde{\omega}_y \tilde{w} - \tilde{\omega}_z \tilde{v})}{\partial y} - \frac{Go^2}{Re} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} = \nabla^2 \tilde{\omega}_z, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y}, \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} = \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (3.7)$$

em que $(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)^t$ e $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^t$ são os vetores vorticidade e velocidade associado a um sistema de coordenadas ortogonal de ordem zero (FLORYAN; SARIC, 1982) tendo x como componente associado à direção do escoamento, y sendo relacionado à direção normal à superfície rígida e z , à transversal. O operador ∇^2 é aqui definido como $\nabla^2 = \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

O número de Reynolds é dado por $Re = U_\infty^* L^* / \nu^*$, em que L^* representa um comprimento de referência. Identificando-se quantidades dimensionais pelo sobrescrito (*), emprega-se as

seguintes relações de adimensionalização:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L^*}, \quad y = \frac{y^*}{L^*} \sqrt{Re}, \quad z = \frac{z^*}{L^*}, \\ \tilde{u} &= \frac{\tilde{u}^*}{U_\infty^*}, \quad \tilde{v} = \frac{\tilde{v}^*}{U_\infty^*} \sqrt{Re}, \quad \tilde{w} = \frac{\tilde{w}^*}{U_\infty^*}, \\ \tilde{\omega}_x &= \frac{\tilde{\omega}_x^* L^*}{U_\infty^* \sqrt{Re}}, \quad \tilde{\omega}_y = \frac{\tilde{\omega}_y^* L^*}{U_\infty^*}, \quad \tilde{\omega}_z = \frac{\tilde{\omega}_z^* L^*}{U_\infty^* \sqrt{Re}}. \end{aligned}$$

3.1 A evolução de perturbações de baixa amplitude

Uma análise de estabilidade do sistema de equações (3.1)-(3.7) frente a uma solução bidimensional (a ser definida) é realizada assumindo-se que $g = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z\}$ possa ser decomposta em parcelas base e perturbação, de forma que

$$\tilde{g} = g_b + g, \quad (3.8)$$

em que g_b representa um estado base definido pela solução bidimensional do sistema e g caracteriza perturbações desse estado. A substituição da relação (3.8) em (3.1)-(3.7) fornece

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial d}{\partial z} = \nabla^2 \omega_x, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} = \nabla^2 \omega_y, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial x} = \nabla^2 \omega_z, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 v = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.15)$$

tendo em a, b, c e d produtos definidos por

$$a = \omega_x(v_b + v) - \omega_y(u_b + u), \quad (3.16)$$

$$b = \omega_{zb}u + \omega_z(u_b + u) - \omega_x w, \quad (3.17)$$

$$c = \omega_y w - \omega_{zb}v - \omega_z(v_b + v), \quad (3.18)$$

$$d = \frac{Go^2}{Re} (2u_b u + u^2). \quad (3.19)$$

O sistema de equações (3.9) - (3.15) pode ser utilizado para descrever a evolução de perturbações em uma geometria ilustrada pela Fig. 5.

Figura 5 – Esboço do domínio de integração. Zonas de amortecimento são inseridas em regiões próximas ao contornos de entrada e saída. Região de inserção de perturbações é também esquematizada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Identifica-se a região de entrada do domínio pelo plano x_0 . A região de saída do escoamento é representada por x_{max} . Regiões de amortecimento de perturbações são localizadas entre as posições x_1 e x_2 e entre x_5 e x_6 . Perturbações são geradas por meio de inserção e sucção de massa em uma região compreendida entre x_3 e x_4 .

Condições de contorno são adotadas em função do escoamento base considerado, do uso de regiões de amortecimento e da técnica de geração de perturbações.

3.1.1 As condições de contorno para a evolução de perturbações

No contorno rígido a condição de não deslizamento é adotada. Assim, os componentes u e w de velocidade são iguais a zero. Assume-se impermeabilidade ($v = 0$) em todo contorno rígido exceto na região de inserção de perturbações ($x_3 \leq x \leq x_4$). Nessa região, fluido é injetado e succionado tendo como referência uma função senoidal (a ser definida). Componentes de vorticidade na parede são calculados respeitando-se as equações

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 v - \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y}, \quad (3.20)$$

$$\omega_y = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = -\nabla^2 v + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}. \quad (3.22)$$

Na entrada do domínio de integração assume-se que velocidade e vorticidade são nulos.

Assume-se ainda que a derivada segunda da velocidade e da vorticidade na direção principal do escoamento são zero no contorno de saída do domínio de integração. O tratamento simplificado da evolução de perturbações nos contornos de entrada e saída é justificado pela presença das regiões de amortecimento. Considera-se que a altura do domínio em questão é grande o suficiente para que a hipótese de decaimento exponencial de perturbações seja aplicável. Assume-se periodicidade na direção transversal ao escoamento a ser investigado.

3.2 O escoamento base

Ao considerar um escoamento base sujeito a variações de gradiente de pressão, assume-se que o escoamento potencial seja aproximado (localmente) pela função

$$U_e = x^m, \quad (3.23)$$

onde x representa uma distância do bordo de ataque e m representa um parâmetro associado ao parâmetro de Hartree (γ) pela relação

$$\gamma = \frac{2m}{m+1}. \quad (3.24)$$

Tendo como referência simplificações inerentes à teoria de camada limite, a equação de Falkner-Skan¹

$$f''' + ff'' + \gamma(1 - f'^2) = 0 \quad (3.25)$$

pode ser derivada, em que f é função de uma variável similar η e

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U_e Re}{x}}. \quad (3.26)$$

Condições de contorno para a equação de Falkner-Skan são definidas por $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(\eta \rightarrow \infty) = 1$.

Visando reduzir inconsistências geradas ao se assumir a solução da equação de Falkner-Skan como solução para o escoamento base, é possível obter uma solução bidimensional das equações de Navier-Stokes por meio da solução numérica do sistema de equações composto pela equação de transporte de vorticidade

$$\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial t} + \frac{\partial u_b \omega_{zb}}{\partial x} + \frac{\partial v_b \omega_{zb}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial y^2}, \quad (3.27)$$

pela equação de conservação da massa

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} = 0 \quad (3.28)$$

e pela equação de Poisson

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x}. \quad (3.29)$$

¹ Ao leitor uma discussão a respeito da equação de Falkner-Skan pode ser encontrada em (SCHLICHTING, 1979).

3.2.1 Condições de contorno para o escoamento base

Condições de contorno para o sistema bidimensional são adotadas em acordo com (KLOKER; KONZELMANN; FASEL, 1993), em que:

- (i) na entrada do domínio bidimensional, o perfil de Falkner-Skan é especificado como uma condição de contorno de Dirichlet para todas as variáveis $u_b(x = x_0, y)$, $v_b(x = x_0, y)$ e $\omega_{zb}(x = x_0, y)$;
- (ii) no contorno rígido, as condições de não deslizamento e impermeabilidade são adotadas. Continuidade é também garantida assumindo $\frac{\partial v_b}{\partial y} \big|_{x,y=0} = 0$. Vorticidade é calculada por meio da equação $\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x} \big|_{x,y=0} = -\frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} \big|_{x,y=0}$;
- (iii) no contorno superior, $u_b(x, y = y_{max})$ é imposto. O componente de velocidade v_b é calculado utilizando-se a equação da continuidade. Além disso, o escoamento potencial é tomado como irrotacional, onde $\omega_{zb}(x, y_{max}) = 0$;
- (iv) na saída do domínio, $\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} \big|_{x=x_{max},y} = \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \big|_{x=x_{max},y} = \frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial x^2} \big|_{x=x_{max},y} = 0$.

MÉTODO NUMÉRICO

Evidências experimentais sugerem uma periodicidade dos vórtices de Görtler na direção transversal ao escoamento (ITO, 1980; SWEARINGEN; BLACKWELDER, 1987; MOMAYEZ; DUPONT; PEERHOSSAINI, 2004). Ao assumir-se tal periodicidade, quantidades adimensionais $g = \{u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, a, b, c, d\}$ podem ser aproximadas pela combinação linear de $K + 1$ modos de Fourier de forma que

$$g(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^K g_k(x, y, t) e^{-\iota k \beta z}, \quad (4.1)$$

onde ι representa a unidade imaginária. Além disso, β é definido como o número de onda na direção transversal, expresso como

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.2)$$

λ caracterizando o comprimento de onda fundamental adimensional de um par de vórtices de Görtler.

Neste sentido, o sistema de equações (3.9) - (3.15) pode ser expresso, para cada modo de

Fourier $k = 0, \dots, K$, como

$$\frac{\partial \omega_{xk}}{\partial t} + \frac{\partial a_k}{\partial y} + \imath k \beta b_k - \imath k \beta d_k = \nabla_k^2 \omega_{xk} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \omega_{yk}}{\partial t} - \imath k \beta c_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} = \nabla_k^2 \omega_{yk} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \omega_{zk}}{\partial t} + \frac{\partial b_k}{\partial x} - \frac{\partial c_k}{\partial y} - \frac{\partial d_k}{\partial x} = \nabla_k^2 \omega_{zk} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} - k^2 \beta^2 u_k = \imath k \beta \omega_{yk} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y} \quad (4.6)$$

$$\nabla_k^2 v_k = -\frac{\partial \omega_{zk}}{\partial x} - \imath \beta \omega_{xk} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - k^2 \beta^2 w_k = \frac{\partial \omega_{yk}}{\partial x} + \imath k \beta \frac{\partial v_k}{\partial y}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} - \imath k \beta w_k = 0, \quad (4.9)$$

onde o operador $\nabla_k^2 = \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{Re} k^2 \beta^2 \right)$.

Perturbações dos componentes de velocidade e vorticidade e suas derivadas pertencem ao corpo dos complexos. Todas as operações são realizadas utilizando aritmética complexa a exceção dos produtos não lineares a, b, c e d . Nesses casos, os componentes de velocidade e vorticidade são primeiramente transformados do espaço de Fourier para o espaço físico. Os produtos são então calculados utilizando-se aritmética real e posteriormente convertidos para o espaço de Fourier. Pelo processo de se realizar parte da computação no espaços físico fica caracterizado o uso de um método dito pseudo-espectral.

4.1 A discretização do domínio de integração

Para cada modo de Fourier k e para o escoamento base bidimensional, o domínio de integração é discretizado por meio de retângulos de lados Δx e Δy_j . Os índices i e j são números naturais que representam posições da malha computacional nas direções x e y , respectivamente. O número máximo de pontos discretizados em cada direção é aqui definido como N_x e N_y . O passo temporal é representado por Δt .

A busca por uma melhor resolução de malha na região de camada limite implica um aumento do custo computacional associado ao refinamento. Visando uma possível redução do número de pontos de discretização fora da região de interesse opta-se pelo uso de uma estratégia de estiramento de malha na direção normal à superfície rígida. O estiramento é representado por uma progressão geométrica de razão sf .

4.1.1 O avanço temporal

A integração das equações de transporte de vorticidade - Eqs. (4.3) - (4.5) - dá-se pela aplicação do método explícito do tipo Runge-Kutta de 4ª ordem de precisão. Um estudo sobre a influência do uso de integradores temporais de alta ordem aplicados a problemas envolvendo vórtices de Görtler é apresentado por Souza (2005).

4.1.2 O uso de esquemas de diferenças finitas compactas para o cálculo de derivadas espaciais

Mesmo exigindo um custo computacional mais elevado em relação a métodos clássicos, o uso de aproximações por diferenças compactas é atrativo devido a características de baixa dispersão e dissipação numéricas¹, redução de estêncils computacionais e alta resolução (HIRSH, 1975; LELE, 1992; WRAY; HUSSAINI, 1994; KLOKER, 1998; MAHESH, 1998; SOUZA; MENDONÇA; MEDEIROS, 2005).

Buscando a redução do custo computacional aliada a uma melhor resolução numérica próxima a regiões de interesse, uma estratégia de estiramento de malha é implementada. A integração numérica é realizada diretamente sobre a malha estirada, ao invés de relacioná-la a uma malha uniforme por meio de uma transformação de coordenadas. Dessa forma, a variação dos espaçamentos entre pontos do domínio discreto implica a variação dos coeficientes das aproximações para as derivadas. O cálculo desses coeficientes leva em consideração as ideias propostas por Lele (1992) e Linnick e Fasel (2005).

As moléculas computacionais utilizadas concordam com as apresentadas por Souza, Mendonça e Medeiros (2005). No entanto, vale novamente ressaltar que os coeficientes de cada uma das aproximações na direção y varia em função da constante de estiramento sf utilizada. Sistemas lineares decorrentes do uso de aproximações compactas aqui adotadas são tridiagonais. A descrição do processo de cálculo dos coeficientes em diferenças finitas é apresentada no Apêndice A.

4.1.3 A solução numérica da equação de Poisson

A resolução numérica das equações de Poisson (3.29) e (4.7) exige a discretização da segunda derivada das funções em questão nas direções paralela e normal ao escoamento. Como não há estiramento na direção x , as aproximações utilizadas são idênticas as apresentadas por Souza (2003). No entanto, o estiramento na direção normal exige o cálculo dos coeficientes das aproximações compactas em função dos espaçamentos em progressão geométrica. Observações associadas ao cálculo dos coeficientes da aproximação compacta em questão são apresentadas no Apêndice A.

¹ De forma simplificada, esquemas dissipativos tendem a suavizar a solução numérica e esquemas dispersivos apresentam uma característica oscilatória.

Equações de Poisson como as descritas pelas Eq. (3.29) e (4.7) podem ser resolvidas utilizando-se métodos multimalhas. Métodos multimalha caracterizam-se pelas suas propriedades de alta convergência. Sua eficiência é justificada pela possibilidade de se obter soluções de sistemas discretizados com N pontos em função de uma complexidade da ordem de N (GUPTA; KOUATCHOU; ZHANG, 1997; SPITALERI, 2000).

Para o presente estudo, aplica-se um método multimalha do tipo FAS (do inglês, *Full Approximation Scheme*) (STUBEN; TROTTENBERG, 1981) em uma estrutura de ciclo V composta por quatro níveis de engrossamento. Uma melhor descrição do uso de métodos do tipo multimalha pode ser obtida pelos trabalhos de Souza (2003), Rogenski (2011) e Rogenski, Petri e Souza (2015).

4.1.4 Inserção e amortecimento de perturbações

O processo de inserção de perturbações é efetuado por meio de uma técnica de injeção e sucção de massa na parede. Uma excitação estacionária do modo $k = 1$, expressa por

$$v_1(x, 0, t) = \begin{cases} A p(x), & \text{para } x_3 \leq x \leq x_4 \text{ e } t > 0, \\ 0, & \text{para } x < x_3 \text{ e } t > 0 \text{ ou } x > x_4 \text{ e } t > 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

pode gerar vórtices de Görtler. Na Eq. (4.10), A representa a amplitude máxima da perturbação e

$$p(x) = \text{sen}^3 \left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \pi \right). \quad (4.11)$$

A função $v_1(x, 0, t)$ e suas primeira e segunda derivadas são contínuas em todo o domínio.

Em regiões próximas ao contorno de entrada e saída do domínio computacional, adota-se uma técnica de amortecimento e relaminarização do escoamento (SOUZA, 2003). A técnica consiste em multiplicar os componentes de vorticidade por uma função $h(x)$ definida por partes,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1, \\ 6\varepsilon_a(x)^5 - 15\varepsilon_a(x)^4 + 10\varepsilon_a(x)^3 & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1 & \text{se } x_2 < x < x_5, \\ (1 - \varepsilon_r(x)^{50})^4 e^{-\frac{\varepsilon_r(x)^4}{10}} & \text{se } x_5 \leq x \leq x_6, \\ 0 & \text{se } x > x_6, \end{cases} \quad (4.12)$$

a qual apresenta um comportamento do tipo rampa nas regiões de amortecimento $x_1 \leq x \leq x_2$ e relaminarização $x_5 \leq x \leq x_6$. Na Eq. (4.12),

$$\varepsilon_a(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ e } \varepsilon_r(x) = \frac{x - x_5}{x_6 - x_5}. \quad (4.13)$$

4.1.5 A instabilidade secundária e a inserção de perturbações não estacionárias

Os mecanismos de interação entre a instabilidade primária e perturbações não estacionárias podem levar o escoamento a um novo estágio conhecido como instabilidade secundária.

Nesse estágio, o efeito não linear começa a desempenhar papel significativo no processo de transição e a instabilidade fica condicionada não somente ao escoamento base como também a natureza das perturbações não estacionárias.

Técnicas numéricas ligadas a geração dessas perturbações são diversas. É comum o uso, por exemplo, de rugosidades no contorno rígido ou a adoção de hipótese de escoamento externo turbulento (ver Schrader, Brandt e Zaki (2011)). No entanto, o emprego de uma técnica de injeção e sucção de massa no contorno rígido, evidenciado por Wassermann e Kloker (2002), é aqui considerado.

Um pacote de onda representado por uma frequência fundamental ω_t e respectivos harmônicos é inserido em uma região próxima a saturação dos vórtices de Görtler. Considerando-se um intervalo definido por S , o pacote de perturbações fica representado pela expressão

$$v_1(x, 0, t) = A_s q(x) \sum_{m=1}^M \text{sen} \left(\frac{m\omega_t t}{2\pi} \right), \quad (4.14)$$

em que $q(x)$ é um polinômio de 8º grau que assume valor nulo nos extremos do intervalo S e valor máximo (e igual a um). M representa o número máximo de harmônicos a serem considerados. A amplitude A_s é um número complexo e desempenha importante influência no processo de identificação do tipo de instabilidade secundária a ser investigado (SOUZA, 2003).

4.1.6 O cálculo da vorticidade no contorno rígido

A atualização do vetor vorticidade no contorno rígido é efetuada em concordância com Souza (2003). Tendo conhecido o campo de velocidade em todo o domínio discreto de integração, calcula-se o laplaciano do componente normal de velocidade $\nabla_k^2 v_k$ na parede. A derivada de v_k na direção longitudinal pode ser calculada analiticamente (ver Eq. (4.10)). Na direção y , uma aproximação descentrada de alta ordem é empregada. A aproximação é gerada em concordância com o fator de estiramento de malha sf e possui um estêncil computacional composto por 7 pontos. O componente longitudinal de vorticidade é calculado por meio da solução numérica da expressão

$$\frac{\partial^2 \omega_{x_k}}{\partial x^2} - k^2 \beta^2 \omega_{x_k} = -\iota k \beta \nabla_k^2 v_k - \frac{\partial^2 \omega_{y_k}}{\partial x \partial y}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (4.15)$$

tendo já calculadas quantidades relacionadas ao lado direito da equação.

Nota-se que o valor do componente normal de vorticidade, no contorno rígido, é zero. O fato é justificado pela adoção da condição de não deslizamento $u = w = 0$.

O cálculo do componente transversal, para cada modo de Fourier k , pode ser obtido pela integração da equação

$$\frac{\partial \omega_{z_k}}{\partial x} = -\nabla_k^2 v_k - \iota k \beta \omega_{x_k}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.16)$$

4.1.7 O filtro e as altas frequências

Uma possível fonte de instabilidade numérica deve-se à adoção de estêncils computacionais centrados de alta ordem. Esquemas centrados de diferenças finitas apresentam uma característica dispersiva, a qual pode implicar o aparecimento de perturbações numéricas de alta frequência em casos onde há também marcha temporal.

Visando o amortecimento dessas altas frequências, um filtro numérico tridiagonal - proposto por Lele (1992) - é aplicado sempre que o último subpasso do integrador temporal for calculado. Convém salientar que o filtro é aplicado aos componentes de vorticidade e age apenas na direção longitudinal.

Fixando-se a variável t em concordância com o último subpasso do integrador temporal e o índice j com $1 \leq j \leq N_y$, o filtro numérico é expresso por um sistema tridiagonal.

- para $i = 1$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{15}{16}\omega_{i,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i+1,j,k} - \frac{6}{16}\omega_{i+2,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i+3,j,k} - \frac{1}{16}\omega_{i+4,j,k}; \quad (4.17)$$

- para $i = 2$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = \frac{1}{16}\omega_{i-1,j,k} + \frac{12}{16}\omega_{i,j,k} + \frac{6}{16}\omega_{i+1,j,k} - \frac{4}{16}\omega_{i+2,j,k} + \frac{1}{16}\omega_{i+3,j,k}; \quad (4.18)$$

- para $i = 3$:

$$\hat{\omega}_{i,j,k} = -\frac{1}{16}\omega_{i-2,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i-1,j,k} + \frac{10}{16}\omega_{i,j,k} + \frac{4}{16}\omega_{i+1,j,k} - \frac{1}{16}\omega_{i+2,j,k}; \quad (4.19)$$

- para $i = 4, \dots, N_x - 3$:

$$\alpha_f \hat{\omega}_{i-1,j,k} + \hat{\omega}_{i,j,k} + \alpha_f \hat{\omega}_{i+1,j,k} = a_f \omega_{i,j,k} + b_f(\omega_{i-1,j,k} + \omega_{i+1,j,k}) + c_f(\omega_{i-2,j,k} + \omega_{i+2,j,k}) + d_f(\omega_{i-3,j,k} + \omega_{i+3,j,k}); \quad (4.20)$$

em que α_f, a_f, b_f, c_f e d_f são constantes.

- para $i = N_x - 2, N_x - 1$ e N_x as mesmas aproximações apresentadas para os pontos $i = 1, 2$ e 3 são utilizadas, respeitando-se distâncias em relação ao ponto de malha de interesse.

Quantidades identificadas com o símbolo $\wedge$ representam variáveis já filtradas. Para o presente estudo, o conjunto de constantes utilizado é expresso por

$$\alpha_f = 0,48, \quad (4.21)$$

$$a_f = \frac{11 + 10\alpha_f}{16}, \quad (4.22)$$

$$b_f = \frac{15 + 34\alpha_f}{64}, \quad (4.23)$$

$$c_f = \frac{-3 + 6\alpha_f}{32}, \quad (4.24)$$

$$d_f = \frac{1 - 2\alpha_f}{64}. \quad (4.25)$$

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

O processo de verificação do código de simulação numérica parte, inicialmente, de um comparativo tomado em relação a resultados obtidos por meio do uso de teoria de estabilidade linear.

5.1 Teoria de estabilidade linear

Soluções do problema de autovalor associado à Teoria de Estabilidade Linear são obtidas por meio de uma versão modificada de um código gentilmente disponibilizado pelo Prof. M. T. de Mendonça (MENDONÇA, 2012). Em sua versão original, o código é capaz de gerar um conjunto de autovalores para uma situação em que o gradiente de pressão é neutro. Algumas modificações visando a inclusão do gradiente de pressão são realizadas.

O código modificado é verificado em processo de comparação com dados da literatura (GOULPIÉ; KLINGMANN; BOTTARO, 1996). Para tanto, a taxa de amplificação local (α) para um gradiente de pressão representado por $m = 0,05$, comprimento de onda característico $\Lambda = 210$ e $Go_0 = 0,5$ é apresentada em função do número de Görtler local na Fig. 6. Uma boa concordância entre resultados pode ser observada.

5.2 Parâmetros físicos e numéricos para verificação e validação do código

Os parâmetros físicos aqui adotados estão em acordo com os utilizados nos experimentos de Swearingen e Blackwelder (1987). O comprimento de referência L^* é tomado como sendo igual a $0,1\text{ m}$. Assume-se o raio de curvatura como $R^* = 3,2\text{ m}$. A velocidade do escoamento potencial em L^* é considerada $U_\infty^* = 5\text{ m.s}^{-1}$. A viscosidade cinemática é dada por $\nu^* = 1,5 \times 10^{-5}\text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

Figura 6 – Taxa de amplificação local (α) para $m = 0,05$ e $\Lambda = 210$. Dados gerados por meio da Teoria de Estabilidade Linear (FLORYAN; SARIC, 1982; MENDONÇA, 2012). Símbolos representam dados obtidos por Goulpié, Klingmann e Bottaro (1996).

Fonte: Elaborada pelo autor.

O comprimento de onda dos vórtices de Görtler é definido em função do comprimento de onda característico em L^* , dado pela Eq. 2.3.

Em simulações lineares, apenas o modo fundamental ($k = 1$) é utilizado. Para um modo de Fourier, emprega-se $N_x = 569$ e $N_y = 225$. Além disso, $\Delta x = 2 \times 10^{-2}$ e $\Delta y_1 = 8 \times 10^{-2}$ com um fator de estiramento de 1%. O passo temporal aqui utilizado é igual a $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$. Soluções são assumidas ser estacionárias em uma situação onde a maior diferença absoluta entre o componente transversal de vorticidade em dois passos de tempo consecutivos é menor que 5×10^{-9} .

Zonas de amortecimento e relaminarização são delimitadas pelos pares de pontos 15 e 25 e 534 e 554. Perturbações são inseridas na região compreendida pelos pontos 25 e 45. Adota-se amplitude máxima de perturbação $A = 1 \times 10^{-2}$.

5.3 Comparativo entre códigos em simulação numérica e Teoria de Estabilidade Linear

Um comparativo entre resultados obtidos por meio da Teoria de Estabilidade Linear e pelo código de simulação numérica linear pode ser realizado em função da análise da taxa de amplificação local α dos vórtices de Görtler. Considerando-se variações entre as escalas adotadas (GOULPIÉ; KLINGMANN; BOTTARO, 1996), a taxa de amplificação local é dada

por $\alpha = \alpha_{NS}x$. Além disso,

$$\alpha_{NS} = \frac{dE(x)}{dx} \frac{1}{E(x)}, \quad (5.1)$$

em que $E(x)$ representa uma métrica associada à evolução dos vórtices. Aqui, $E(x)$ é definida como o máximo valor absoluto em y da média quadrática em z (RMS, do inglês *root mean square*) dos componentes de velocidade u e v . Por exemplo, para o componente de velocidade na direção x , tem-se:

$$E(x) = \max_y(u_{RMS_z}(x, y)). \quad (5.2)$$

Parâmetros físicos e numéricos estão em acordo com os apresentados na seção anterior. A evolução dos vórtices para casos representados por $\gamma = -0,15$, $\gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$ é ilustrada para diferentes valores de Λ . Na Fig. 7, a taxa de amplificação local para vórtices com número de onda característico $\Lambda = 100$ é apresentada em função de x . Linhas cheias representam resultado obtido através de simulação numérica e as linhas tracejadas, resultados obtidos por meio da Teoria de Estabilidade Linear. Variações entre resultados são previsíveis e explicitam certa sensibilidade à

Figura 7 – Taxa de amplificação local (α) para $\Lambda = 100$ com $\gamma = -0,15$, $\gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$. Demais parâmetros físicos são considerados em acordo com Swearingen e Blackwelder (1987). Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia) e Teoria de Estabilidade Linear (linha tracejada).

Fonte: Elaborada pelo autor.

métrica utilizada (GOULPIÉ; KLINGMANN; BOTTARO, 1996). Possíveis discrepâncias podem ser justificadas pela hipótese de paralelismo necessária a luz da Teoria de Estabilidade Linear. Da mesma forma, o caso $\Lambda = 250$ é apresentado pela Fig. 8. A Fig. 9 ilustra o comportamento de α para $\Lambda = 400$.

Figura 8 – Taxa de amplificação local (α) para $\Lambda = 250$ com $\gamma = -0,15$, $\gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$. Demais parâmetros físicos são considerados em acordo com Swearingen e Blackwelder (1987). Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia) e Teoria de Estabilidade Linear (linha tracejada).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Taxa de amplificação local (α) para $\Lambda = 400$ com $\gamma = -0,15$, $\gamma = 0$ e $\gamma = 0,25$. Demais parâmetros físicos são considerados em acordo com Swearingen e Blackwelder (1987). Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia) e Teoria de Estabilidade Linear (linha tracejada).

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Comparativo entre códigos de simulação numérica

Compara-se ainda a evolução dos vórtices de Görtler com resultados recentes em simulação numérica apresentados por Schrader, Brandt e Zaki (2011). O comparativo é realizado apenas para $\gamma = 0,0$ e $\Lambda = 250$ uma vez que se desconhece resultados associados a um gradiente de pressão diferente do neutro. Expressa-se a variação espacial em termos do número de Görtler local, uma vez que os referidos autores adotam parâmetros físicos em concordância com os trabalhos de Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2005a), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2005b), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2006).

A evolução linear dos vórtices fica também representada em função da média quadrática em z para os três componentes de velocidade. O comportamento da métrica para cada componente é evidenciado na Fig. 10. Símbolos representam dados da literatura. Na Fig. 10, o comportamento de decaimento apresentado pelas métricas nos extremos no gráfico evidencia o efeito de amortecimento de perturbações e relaminarização do escoamento base. É possível ainda observar o comportamento apresentado pelas métricas frente à região de inserção de perturbações.

Ao analisar-se a Fig. 10, concordância com resultados de literatura pode ser observada na região de interesse ($8 < Go_\delta < 17$).

Figura 10 – Máximo na direção normal ao escoamento da média quadrática em z para os componentes de velocidade u, v e w em função do número de Görtler local. Caso linear em que $\gamma = 0,0$ e $\Lambda = 250$. Símbolos representam dados obtidos por Schrader, Brandt e Zaki (2011).

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5 Sobre a evolução não linear dos vórtices de Görtler

No processo de verificação da evolução não linear dos vórtices de Görtler adota-se $K + 1 = 21$ modos de Fourier e 64 pontos no espaço físico. Para cada modo de Fourier, emprega-se $N_x = 2201$ e $N_y = 225$. O espaçamento de malha na direção x é $\Delta x = 7,5 \times 10^{-3}$. Na direção y , o primeiro espaçamento é $\Delta y_1 = 8 \times 10^{-2}$. O estiramento de malha nessa direção é de 1%. O espaçamento temporal aqui utilizado é igual a $\Delta t = 2,5 \times 10^{-3}$. Soluções são assumidas ser estacionárias em uma situação onde a maior diferença absoluta entre vorticidade em dois passos de tempo consecutivos é menor que 5×10^{-9} .

Zonas de amortecimento próximas ao contorno de entrada são delimitadas pelos pares de pontos 1 e 37 para o modo fundamental e pelos pontos 1 e 227 para os demais modos. Na região próxima ao contorno de saída uma zona de relaminarização fica delimitada pelos pontos 2021 e 2111. Perturbações são inseridas na região compreendida pelos pontos 67 e 147.

Figura 11 – Máximo na direção normal ao escoamento da média quadrática em z para os componentes de velocidade u, v e w em função do número de Görtler local. Caso não linear em que $\gamma = 0,0$ e $\Lambda = 250$. Símbolos representam dados obtidos por Schrader, Brandt e Zaki (2011).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por meio da Fig. 11, concordância quantitativa pode ser observada no que se refere à média quadrática para os três componentes de velocidade u, v e w . Faz-se fundamental aqui destacar a representatividade do adimensional Go_δ , uma vez que os parâmetros físicos adotados para a simulação diferem daqueles utilizados por Schrader, Brandt e Zaki (2011). Observa-se que o adimensional é representativo mesmo em região dominada por efeitos não lineares.

Ressalta-se, de forma complementar, que uma versão do presente código numérico foi verificada e validada por meio da aplicação da técnica de Soluções Manufaturadas e comparação

com dados experimentais. O procedimento é descrito em Petri *et al.* (2015).

Simulações são realizadas utilizando-se oito elementos de processamento. Tempo de processamento é provido pelos *clusters* de computadores Orca, Saw e Hound do consórcio canadense Sharcnet, pelo *cluster* de computadores do Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo e pelo *cluster* Euler do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria. De forma geral, o tempo de simulação de casos lineares geralmente decorre em média de oito horas para os casos aqui considerados. Uma simulação não linear atinge um estado dito estacionário após uma semana de simulação. Resultados relacionados à instabilidade secundária são obtidos entre uma e duas semanas de computação.

ASPECTOS LINEARES À EVOLUÇÃO DOS VÓRTICES DE GÖRTLER

O presente capítulo volta-se para a investigação da influência do gradiente de pressão do escoamento base no desenvolvimento dos vórtices de Görtler à luz da hipótese de linearidade. São apresentados estudos em que o gradiente de pressão é constante, varia linearmente ou é globalmente representado pelo parâmetro de Hartree.

6.1 A evolução linear dos vórtices de Görtler

Os parâmetros físicos adotados para simulações lineares estão em acordo com as quantidades apresentadas no capítulo anterior. Tendo fixos velocidade do escoamento externo, viscosidade cinemática e raio de curvatura na posição longitudinal L^* , o comprimento de onda dimensional de um par de vórtices de Görtler é constante e independente da distribuição do gradiente de pressão externo à camada limite. Para um dado comprimento de onda dos vórtices, variações na distribuição do gradiente de pressão podem ser sistematicamente investigadas.

Para tanto, considera-se casos em que o gradiente de pressão é constante, varia linearmente e em que o parâmetro de Hartree γ (ver Eq. 3.24) é constante. Para cada simulação, o comprimento de onda característico do par de vórtices é também modificado e varia no intervalo de $\Lambda = [100, 450]$.

Para o conjunto de testes lineares apresentados, o sistema de equações para o modo fundamental de Fourier é resolvido em uma malha contendo 633 e 225 pontos na direção principal e normal à parede, respectivamente. O espaçamento de malha na direção x é $\Delta x = 1,0 \times 10^{-2}$. Na direção y , o primeiro espaçamento de malha é $\Delta y_1 = 8,0 \times 10^{-2}$. O estiramento de malha nessa direção é de 1%. O passo temporal é $\Delta t = 1,0 \times 10^{-2}$. Além disso, $[x_0; x_1; \dots; x_{max}] = [2, 5; 2, 5; 2, 61; 2, 67; 2, 97; 8, 42; 8, 62; 8, 82]$. Resultados são apresentados em um intervalo em

que $x \in [5, 8]$.

6.1.1 Distribuições de gradiente de pressão constante e Hartree constante

Casos com gradiente de pressão favorável e adverso são aqui representados por:

- caso neutro: $\gamma = dp/dx = 0, 0$;
- casos favoráveis com parâmetro de Hartree constante: $\gamma = 0, 25$ e $\gamma = 0, 125$;
- casos favoráveis com gradiente de pressão constante: $dp/dx = -0, 02$ e $dp/dx = -0, 01$;
- casos adversos: $\gamma = -0, 15$ e $\gamma = -0, 075$;
- casos adversos: $dp/dx = 0, 01$ e $dp/dx = 0, 005$.

Para cada um dos casos apresentados, a distribuição do gradiente de pressão e os perfis de velocidade potencial são apresentados em função da posição x . Na região fora da camada limite, a velocidade e o gradiente de pressão ficam relacionados por meio da equação de Bernoulli

$$U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0, \quad (6.1)$$

tendo $U_e(x = x_0) = 1$.

Nas Figs. 12(a-b) são apresentados perfis do gradiente de pressão e velocidade dos escoamentos base aqui investigados. Em cada gráfico, linhas cheias representam casos em que o parâmetro de Hartree é constante para toda posição x e linhas tracejadas representam perfis de gradiente de pressão constante.

Além disso, a camada limite para cada um dos casos apresentados pode ser caracterizada por meio da métrica fator de forma (H_{12}). O fator de forma H_{12} é definido como sendo o quociente entre as métricas espessura de deslocamento (δ_1) e de quantidade de movimento (δ_2) (SCHLICHTING, 1979). Para cada conjunto de casos, H_{12} é expresso em função de x na Fig. 12(c).

Observa-se, por meio das Figs. 12(a,b), que um escoamento base representado por um parâmetro de Hartree constante e diferente de zero não é representado por um escoamento potencial com gradiente de pressão constante. Ressalta-se ainda que quanto maior o fator de forma H_{12} , mais adverso é o gradiente de pressão do escoamento base (ver Fig. 12(c)).

Seguindo Schrader, Brandt e Zaki (2011), a evolução de perturbações fica inicialmente descrita em termos da média quadrática dos componentes de velocidade. Independentemente do componente de velocidade utilizado, observa-se um decaimento da métrica na região de inserção de perturbações. A esse decaimento atribui-se um transiente necessário para que as

Figura 12 – Características dos escoamentos base: (a) distribuição do gradiente de pressão do escoamento potencial, (b) distribuição de velocidade do escoamento potencial e (c) fator de forma da camada limite. Linhas cheias denotam casos onde o parâmetro de Hartree é constante e linhas tracejadas representam casos em que o gradiente de pressão é constante.

Fonte: Elaborada pelo autor.

perturbações geradas/decorrentes da aplicação da técnica de sucção e injeção de massa na parede sejam convertidas em um campo de velocidade consistente com o sistema de equações governantes. Evidencia-se ainda a existência de uma região onde esse campo consistente de perturbações é convertido em vórtices de Görtler. Ao processo em questão associa-se o problema de receptividade. Ao distanciar-se da origem do domínio, a evolução dos vórtices tende a assumir um crescimento linear.

Visando uma redução da influência da técnica de geração de perturbações na interpretação dos dados obtidos, resultados são normalizados em função da posição $x = 5$. Evidencia-se normalização em casos onde a métrica aparece acompanhada de um asterisco. A taxa de amplificação local dos vórtices é também adotada como métrica de comparação.

Na Fig. 13 exibe-se o comportamento de perturbações para o escoamento base caracterizado por $\gamma = 0,0$. Figuras 13 (a) e (b) representam, respectivamente, o máximo da média quadrática da perturbação da velocidade na direção x ($\max(u_{RMS})^*$) e a taxa de amplificação α das perturbações para Λ próximos ao comprimento dos vórtices mais instável segundo a Teoria de Estabilidade Linear. As Fig. 14 e 15 representam o comportamento dos vórtices em relação aos demais componentes de velocidade $\max(v_{RMS})^*$ e $\max(w_{RMS})^*$, respectivamente.

Há certa dependência dos resultados obtidos em função da escolha do componente de velocidade, como já explicitado na seção de verificação e validação dos resultados. No entanto, os resultados obtidos para cada componente de velocidade concordam ao explicitar casos em que Λ é próximo a 250 como sendo os associados às maiores taxas de amplificação (FLORYAN,

Figura 13 – Identificação da influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler para $\gamma = 0,0$. (a) evolução de $\max(u_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Identificação da influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler para $\gamma = 0,0$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

1991).

A evolução em x de $\max(v_{RMS})^*$ para os casos representados por parâmetros de Hartree constantes e $\Lambda = 250$ é apresentada pela Fig. 16. Justifica-se a escolha pelo componente normal de velocidade como métrica de comparação dada a uniformidade apresentada pela mesma no que se refere à taxa de amplificação dos vórtices (ver Fig. 14(b)).

Figura 15 – Identificação da influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler para $\gamma = 0,0$. (a) evolução de $\max(w_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Identificação da influência do parâmetro de Hartree na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 250$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também fica descrita a evolução em x de $\max(v_{RMS})^*$ para os casos representados por um gradiente de pressão constante e $\Lambda = 250$. (ver Fig. 17).

Por meio das Figs. 16(a) e 17(a) é possível perceber que, para $\Lambda = 250$, a variação do gradiente de pressão não impõe mudanças drásticas nos perfis de $\max(v_{RMS})^*$. Diferenças são melhor observadas ao se analisar a taxa de amplificação calculada a partir da métrica em questão.

Figura 17 – Identificação da influência do gradiente de pressão constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 250$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se comparados com o caso neutro ($\gamma = 0,0$), a natureza favorável do gradiente de pressão reduz a taxa de amplificação dos vórtices. Para os casos aqui considerados, quanto mais favorável o gradiente de pressão menor a taxa de amplificação observada.

O gradiente de pressão adverso tende a desestabilizar o escoamento. No entanto, ao se analisar os casos representados pelo parâmetro de Hartree constante (Fig. 16(b)), é possível notar que em uma dada região do escoamento, $\gamma = -0,075$ é mais instável que $\gamma = -0,15$. O comportamento observado evidencia a dependência espacial entre o gradiente de pressão do escoamento potencial e o comprimento de onda característico que apresenta comportamento mais instável.

Por essa razão é também apresentada a evolução de $\max(v_{RMS})^*$ para os casos em que $\Lambda = 100$ e 450. Considerando $\Lambda = 100$, casos representados por γ constante são representados pela Fig. 18 e os representados por dp/dx constante, pela Fig. 19. Para $\Lambda = 450$, Figs. 20 e 21 representam casos γ constante e dp/dx constante, respectivamente.

Os casos $\gamma = 0,25$ e $dp/dx = -0,02$ apresentam as maiores taxas de amplificação para $\Lambda = 100$. Um gradiente de pressão favorável pode, nesse sentido, apresentar uma característica mais desestabilizante se comparado com os casos neutro e adversos. Tal fato ainda explicita a dependência do gradiente de pressão com o comprimento de onda dos vórtices.

Ao observar-se as taxas de amplificação para os casos onde $\Lambda = 450$ (Figs. 20 e 21) um padrão similar ao apresentado pelo caso $\Lambda = 250$ é observado. Os casos $\gamma = -0,15$ e $dp/dx = 0,01$ mostram-se ser os mais instáveis dentre os investigados.

Figura 18 – Identificação da influência do parâmetro de Hartree constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 100$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Identificação da influência do gradiente de pressão constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 100$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.1.2 Distribuições lineares do gradiente de pressão

Casos em que a distribuição do gradiente de pressão varia linearmente em função de x são aqui descritos. Para tanto, considera-se os casos em que:

- caso A2F: o gradiente de pressão varia de $dp/dx = 0,01$ a $dp/dx = -0,02$;

Figura 20 – Identificação da influência do parâmetro de Hartree constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 450$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Identificação da influência do gradiente de pressão constante na evolução dos vórtices de Görtler para $\Lambda = 450$. (a) evolução de $\max(v_{RMS})^*$ na direção do escoamento. (b) taxa de amplificação considerando-se a métrica em (a).

Fonte: Elaborada pelo autor.

- caso F2A: o gradiente de pressão varia de $dp/dx = -0.02$ a $dp/dx = 0.01$;

Os casos em que o gradiente de pressão é constante e igual a $dp/dx = 0.01$ ou $dp/dx = -0.02$ são também apresentados, visando comparação.

Na Fig. 22 são apresentadas as distribuições do gradiente de pressão do escoamento base (a) e velocidade do escoamento externo (b) para os casos investigados. Além disso, o fator de forma fica evidenciado por meio da Fig. 22(c)

Figura 22 – Características dos escoamentos base para casos em que há variação linear do gradiente de pressão: (a) distribuição do gradiente de pressão do escoamento potencial, (b) distribuição de velocidade do escoamento potencial e (c) fator de forma H_{12} da camada limite.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Fig. 23(a-c) são apresentados resultados considerando a evolução do $\max(v_{RMS})^*$ para os casos em que o escoamento base fica representado por uma variação linear do gradiente de pressão. Análises são realizadas considerando-se os mesmos três comprimentos de onda característicos anteriormente utilizados: (a) $\Lambda = 100$, (b) $\Lambda = 250$ e (c) $\Lambda = 450$. De maneira complementar, valores associados à taxa de amplificação são apresentados pelas Fig. 24(a-b). Em (a) considera-se configurações em que o gradiente de pressão decresce em função da posição x (A2F) e em (b) configurações onde o gradiente cresce em função de x (F2A).

Por meio da Fig. 23, nota-se que a configuração (A2F) é a que apresenta o menor crescimento para casos em que $\Lambda = 100$ ou $\Lambda = 250$. No caso $\Lambda = 450$, a variação linear do gradiente de pressão (A2F) exerce menor influência no processo de controle do crescimento dos vórtices. Ao caso (F2A) atribui-se comportamento similar ao apresentado para o caso em que $dp/dx = -0,02$. Ao comportamento infere-se que a redução gradativa da espessura da camada limite tende a limitar o crescimento dos vórtices de Görtler mas o seu aumento não apresenta efeito direto desestabilizante.

Analisando-se valores de taxa de amplificação pode-se perceber que vórtices com comprimento $\Lambda = 250$ mostram-se ser mais instáveis que os representados por $\Lambda = 100$ e 450 para ambas as configurações analisadas (ver Fig. 24). Além disso, observa-se que a taxa de amplificação dos vórtices aumenta a medida que se aumenta o gradiente de pressão.

Figura 23 – Identificação da influência de variações lineares do gradiente de pressão na evolução dos vórtices de Görtler por meio da métrica $\max(v_{RMS})^*$ nos casos em que: (a) $\Lambda = 100$, (b) $\Lambda = 250$ e (c) $\Lambda = 450$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Taxa de amplificação dos vórtices para os casos em que o gradiente de pressão varia linearmente de um estado (a) adverso para favorável (A2F) e (b) favorável para adverso (F2A)

Fonte: Elaborada pelo autor.

O EFEITO NÃO LINEAR NA INSTABILIDADE CENTRÍFUGA

O presente capítulo volta-se para uma investigação da influência de não linearidades no desenvolvimento dos vórtices de Görtler em escoamentos aqui caracterizados por gradientes de pressão externos diferentes do neutro.

Os parâmetros físicos utilizados estão em acordo com os apresentados na Seção 5.2. Os casos sob investigação são:

- (a) caso favorável, $dp/dx = -0,02$ constante em todo domínio de integração;
- (b) caso neutro, $dp/dx = 0,0$ constante em todo domínio de integração;
- (c) caso adverso, $dp/dx = 0,008$ constante em todo domínio de integração.

Para o conjunto de testes não lineares, são adotados 21 modos de Fourier com 64 pontos no espaço físico. A todo modo k de Fourier associa-se uma malha contendo 2201 e 225 pontos nas direções longitudinal e normal à parede, respectivamente. O espaçamento de malha na direção x é $\Delta x = 5,0 \times 10^{-3}$. Na direção y , o primeiro espaçamento de malha é $\Delta y_1 = 8,0 \times 10^{-2}$. O estiramento de malha nessa direção é de 1%. O passo temporal é $\Delta t = 2,5 \times 10^{-3}$. Além disso, $[x_0; x_1; \dots; x_{max}] = [1,00; 1,00; 1,28; 1,48; 1,88; 11,00; 11,75; 12,00]$. A amplitude máxima de perturbações na região de injeção e sucção de massa é 1,5. Assume-se estado estacionário quando a máxima diferença entre ω_{z1} em dois passos de tempo consecutivos for menor que $5,0 \times 10^{-9}$.

A natureza da camada limite associada a cada um dos casos aqui considerados fica evidenciada por meio da distribuição de U_e e fator de forma H_{12} , apresentados respectivamente pelas Figs. 25(a) e 25(b).

Figura 25 – Características do escoamento base para três distribuições do gradiente de pressão externo.

(a) componente longitudinal U_e do escoamento potencial(b) fator de forma H_{12}

Fonte: Elaborada pelo autor.

A evolução dos vórtices em casos onde $\Lambda = 160$, $\Lambda = 305$ e $\Lambda = 450$ é investigada para as distribuições do gradiente de pressão anteriormente apresentadas. Essa evolução pode ser quantificada por meio de uma métrica de energia (BENMALEK; SARIC, 1994), definida como

$$E_k(x) = \int_0^\infty |u_k|^2 dy, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (7.1)$$

Na Fig. 26, pode-se observar o comportamento da métrica $E_k(x)$ para o caso em que vórtices com $\Lambda = 160$ desenvolvem-se em um escoamento base caracterizado pelo gradiente de pressão favorável $dp/dx = -0,02$. O comportamento da energia para um dado modo de Fourier k apresenta padrões bem similares aos documentados em casos onde o gradiente de pressão externo é neutro (LI; MALIK, 1995). Aos modos de correção do escoamento base ($k = 0$), fundamental ($k = 1$) e subharmônico ($k = 2$) atribui-se uma maior importância no processo de análise de resultados. Na Fig. 26 o modo fundamental ($k = 1$) é o que apresenta a maior energia na região linear. Um crescimento exponencial de cada um dos modos pode ser observado para $x < 6$. Ao deslocar-se longitudinalmente, efeitos não lineares tornam-se cada vez mais significativos e a saturação pode ser observada.

A análise da influência do gradiente de pressão no processo de transição a turbulência pode ser exemplificada em função de uma caracterização da região de saturação dos vórtices de Görtler. Assumindo-se casos em que $\Lambda = 160$, a energia dos modos $k = 0$ e $k = 1$ em uma região de saturação de vórtices é apresentada na Fig. 27. À essa região de saturação associa-se ponto de interseção entre os dois principais modos de Fourier.

A posição x referente à interseção dos modos para cada caso é quantificada na Tab. 1. Na

Figura 26 – A evolução de $\Lambda = 160$ vórtices em um regime favorável de escoamento em camada limite ($dp/dx = -0.02$). A energia para os modos de Fourier $k = 0, \dots, 10$ é apresentada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tab. 1 explicita-se posições de interseção também para os comprimentos $\Lambda = 305$ e $\Lambda = 450$ em acordo com os gráficos de energia apresentados pela Fig. 28.

Figura 27 – Interseção entre os modos $k = 0$ e $k = 1$ para os casos adverso, neutro e favorável considerando-se $\Lambda = 160$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por meio das Fig. 27 e 28 e da Tab. 1, e baseando-se no critério de saturação aqui proposto, nota-se que a saturação é antecipada em função de um aumento do gradiente de pressão. Pelo

Tabela 1 – Interseção entre os modos fundamental e correção do escoamento base para casos adverso, neutro e favorável tendo $\Lambda = 160, 305$ e 450 .

	$dp/dx = 0,008$	$dp/dx = 0,0$	$dp/dx = -0,02$
$\Lambda = 160$	(7,80; 0,84)	(8,18; 0,78)	(8,92; 0,75)
$\Lambda = 305$	(7,84; 1,17)	(8,31; 1,02)	(9,31; 0,85)
$\Lambda = 450$	(8,22; 1,33)	(8,75; 1,09)	(9,92; 0,82)

Figura 28 – Interseção entre os modos $k = 0$ e $k = 1$ para os casos adverso, neutro e favorável considerando-se (a) $\Lambda = 305$ e (b) $\Lambda = 450$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

critério, saturação ocorre primeiramente no caso adverso, seguido dos casos neutro e favorável. O comportamento mostra-se ser independente do comprimento de onda característico dos vórtices. De forma geral, a uma antecipação da região de saturação atribui-se característica instável.

Isolinhas do componente longitudinal de velocidade $\tilde{u}$ em planos $z \times y$ são geradas em concordância com cada posição x apresentada na Tab. 1. Na Fig. 29, a primeira isolinha denota $\tilde{u} = 0,1$ com incremento de $0,1$. Os casos favorável ($dp/dx = -0,02$), neutro ($dp/dx = 0,0$) e adverso ($dp/dx = 0,008$) são apresentados da esquerda para a direita, respectivamente. Na primeira linha são considerados casos em que $\Lambda = 160$. Na segunda e terceira explicita-se casos em que $\Lambda = 305$ e $\Lambda = 450$, respectivamente.

Na Fig. 29 observa-se que, independentemente do escoamento base adotado, o perfil do componente de velocidade $\tilde{u}$ possui a clássica distribuição não linear de cogumelo. Aos isocontornos em questão ainda atribui-se uma tendência da camada limite com gradiente de

Figura 29 – Perfis de isovelocidade $\tilde{u}$ em planos $z \times y$, para diferentes comprimentos de onda característicos. À esquerda tem-se $dp/dx = -0,02$; coluna central representa casos em que $dp/dx = 0,0$; à direita tem-se $dp/dx = 0,008$. Os cortes em x concordam com as posições x apresentadas na Tab. 1.

(a) $dp/dx = -0,02$ e $\Lambda = 160$

(b) $dp/dx = 0,0$ e $\Lambda = 160$

(c) $dp/dx = 0,008$ e $\Lambda = 160$

(d) $dp/dx = -0,02$ e $\Lambda = 305$

(e) $dp/dx = 0,0$ e $\Lambda = 305$

(f) $dp/dx = 0,008$ e $\Lambda = 305$

(f) $dp/dx = -0,02$ e $\Lambda = 450$

(g) $dp/dx = 0,0$ e $\Lambda = 450$

(h) $dp/dx = 0,008$ e $\Lambda = 450$

Fonte: Elaborada pelo autor.

pressão favorável em apresentar estruturas vorticais mais próximas ao contorno rígido.

As estruturas de cogumelo apresentadas na Fig. 29 claramente evidenciam pontos de inflexão no perfil do componente principal de velocidade. Devido ao critério de estabilidade de Rayleigh, esses pontos de inflexão desempenham importante papel no desenvolvimento de um cenário de instabilidade secundária e provável transição à turbulência.

Os perfis inflexionais associados a cada um dos casos aqui descritos podem ser caracterizados pelas derivadas do componente principal de velocidade nas direções normal e transversal ao escoamento. Valores máximos de $\partial\tilde{u}/\partial y$ nos planos x que representam a região de saturação são apresentados na Tab. 2. De maneira análoga, na Tab. 3 apresenta-se máximos valores relacionados à derivada $\partial\tilde{u}/\partial z$. Ressalta-se que os cortes em x são considerados em acordo com posições apresentadas pela Tab. 1. Máximos são procurados em regiões próximas às estruturas na forma de cogumelo.

Tabela 2 – Valores máximos de $\sqrt{Re}\partial\tilde{u}/\partial y$ em planos x definidos pela Tab. 1. Os casos adverso, neutro e favorável com variações de $\Lambda = 160, 305$ e 450 são considerados.

	$dp/dx = 0,008$	$dp/dx = 0,0$	$dp/dx = -0,02$
$\Lambda = 160$	34,1754	31,2006	30,3321
$\Lambda = 305$	37,2547	36,0182	35,6481
$\Lambda = 450$	37,9028	37,3248	37,2281

Por meio da Tab. 2 é possível perceber que a influência do gradiente de pressão nos valores máximos da derivada reduz-se a medida que há aumento no comprimento de onda transversal. A maior variação observada fica representada pelo caso $\Lambda = 160$ e é igual a 3,8433. A diferença representa 12% do valor observado para o caso adverso. Tendo fixado o estado base, mudanças no tamanho dos vórtices também implicam variações nos máximos observados. A variação mais significativa é exibida para o caso em que $dp/dx = -0,02$ e é igual a 6,8960. Ao valor atribui-se aumento na ordem de 23%.

Tabela 3 – Valores máximos de $\partial\tilde{u}/\partial z$ em planos x definidos pela Tab. 1. Os casos adverso, neutro e favorável tendo $\Lambda = 160, 305$ e 450 são considerados.

	$dp/dx = 0,008$	$dp/dx = 0,0$	$dp/dx = -0,02$
$\Lambda = 160$	42,8297	33,5795	29,7880
$\Lambda = 305$	42,4614	34,1471	30,3577
$\Lambda = 450$	41,9185	33,0419	29,0689

Já na Tab. 3 observa-se que variações no tamanho característico dos vórtices não implicam diferenças nos máximos valores de $\partial\tilde{u}/\partial z$ se comparadas com valores apresentados para a derivada em y . Diferenças observadas são no mínimo cinco vezes menores que para

Figura 30 – Média em z de tensão de cisalhamento no contorno rígido para os casos em que (a) $\Lambda = 160$, (b) $\Lambda = 305$ e (c) $\Lambda = 450$. Linhas cheias representam valores associados ao escoamento base

Fonte: Elaborada pelo autor.

o caso anterior. Por outro lado, diferenças existentes entre os casos favorável e adverso são aproximadamente 12 e representam 50% dos valores observados para o caso adverso.

Analisando-se ambas as Tab. 2 e 3 fica caracterizado que os valores máximos da derivada de $\tilde{u}$ nas direções y e z aumentam em função do aumento no gradiente de pressão para um comprimento de onda fixo. Os máximos em questão estão relacionados ao crescimento dos modos sinuoso e varicoso de instabilidade secundária (LI; MALIK, 1995). Variações entre valores das derivadas para um mesmo caso são mais visíveis para o caso adverso. Às tabelas exibe-se tendência da derivada na direção y em assumir os maiores valores em decorrência do aumento do tamanho dos vórtices e aumento no gradiente de pressão.

Tendo como referência os isocontornos apresentados na Fig. 29, a característica não linear apresentada pelos casos aqui considerados faz com que a clássica região de *downwash* seja visualmente maior que a região de *upwash*. É provável que as diferenças aqui explicitadas modifiquem os valores médios de tensão de cisalhamento em relação aos respectivos estados base. Quantitativamente, a influência dos vórtices nos valores de tensão de cisalhamento é apresentada na Fig. 30. Na figura, a média aritmética na direção z dos valores da tensão em função de x é apresentada para $\Lambda = 160$ (coluna da esquerda), $\Lambda = 305$ (centro) e $\Lambda = 450$ (coluna da direita). Linhas cheias representam valores de tensão associados ao escoamento base.

Para todos os casos aqui considerados, os valores de tensão de cisalhamento observáveis nos escoamentos transicionais são maiores que os respectivos bases na região onde não linearidades fazem-se significativas (por exemplo, $x > 3$). No intervalo em que vórtices são representados por $\Lambda = [160, 450]$, o caso favorável atinge as maiores variações.

Na Tab. 4, diferenças relativas entre valores de tensão para os casos transicional e base são explicitadas considerando-se a posição $x = 9,5$ como referência. Na posição escolhida, os

perfis de velocidade são altamente inflexionais. Um aumento de até 5 vezes em relação ao estado base pode ser observado para o caso representado por $\Lambda = 160$ em regime favorável. A menor variação fica aqui representada pelo caso $\Lambda = 450$ em regime adverso.

Tabela 4 – Valores relativos da máxima diferença entre valores médios de tensão de cisalhamento no contorno rígido. Compara-se casos não lineares com respectivos estados não perturbados.

	$dp/dx = 0,008$	$dp/dx = 0,0$	$dp/dx = -0,02$
$\Lambda = 160$	537%	263%	145%
$\Lambda = 305$	537%	243%	129%
$\Lambda = 450$	480%	212%	100%

A INSTABILIDADE SECUNDÁRIA

Seguindo Wassermann e Kloker (2002), a evolução temporal da instabilidade secundária no processo de transição à turbulência é considerada periódica no tempo. A interpretação dos resultados, nesse sentido, pode ser realizada por meio de uma análise do comportamento da amplitude temporal de cada modo de Fourier relevante à investigação.

De forma geral, resultados são descritos através de gráficos de amplitude máxima dos modos de Fourier temporais de uma determinada função $g(x, y, z, t)$ em planos perpendiculares à direção principal do escoamento ($\max_{y,z}\{g_m(x, y, z)\}$). A função g é usualmente considerada como o componente principal da parcela perturbação do vetor velocidade.

Além disso, a visualização das estruturas vorticais fica evidenciada pelo uso do critério Q . O critério Q pode ser definido como

$$Q = 0,5(|\Omega|^2 - |S|^2),$$

em que S e Ω são os tensores taxa de deformação e vorticidade. A norma de um tensor G genérico é adotada como sendo $\|G\| = \sqrt{\text{tr}(GG^T)}$.

Os casos aqui investigados consideram vórtices caracterizados pelo comprimento de onda $\Lambda = 450$. A influência do gradiente de pressão fica explicitada pelos casos em que o gradiente de pressão é constante e igual a (a) $dp/dx = 0,008$, (b) $dp/dx = 0,0$ e (c) $dp/dx = -0,02$. Assume-se a inserção de pacotes de onda tendo $M = 16$ e $\omega_t = 20 \text{ Hz}$ como frequência fundamental (ver Eq. 4.14).

Numericamente, o conjunto de parâmetros aqui utilizados concorda com o definido no capítulo anterior. Além disso, o número de passos por período considerado é igual a 2048. Análises temporais são realizadas utilizando-se 64 intervalos de tempo.

8.1 A natureza convectiva da instabilidade secundária

A natureza convectiva da instabilidade secundária é explicitada apenas para o caso adverso representado por $dp/dx = 0,008$. Pacotes de perturbações são inseridos à montante da região de saturação dos vórtices. A amplitude dos pacotes fica aqui definida por $A_s = 0 + 1,5 \times 10^{-2} \iota$. Os pacotes são inseridos nos intervalos entre $[3, 3,5]$, $[4, 4,5]$ e $[5, 5,5]$.

Posteriormente ao transiente decorrente da aplicação da técnica de injeção e sucção de massa no contorno rígido, os geradores de perturbação (não estacionários) são desligados. Eliminadas fontes externas de perturbações, a característica convectiva da instabilidade fica explicitada em casos onde a amplitude dos modos temporais decai em função do tempo. Na Fig. 31, a análise dos modos temporais da velocidade u em planos $y \times z$ é realizada (a) após 2 períodos (b) 6 períodos e (c) 10 períodos do instante em que houve interrupção na geração de perturbações. Fica evidente o comportamento de decaimento da amplitude dos modos em função do tempo de simulação.

Figura 31 – A natureza convectiva da instabilidade secundária. A ausência da fonte de geração de perturbações não estacionárias implica o decaimento da máxima amplitude dos modos temporais. Análises temporais realizadas (a) após 2 períodos (b) após 6 períodos e (c) após 10 períodos da interrupção do gerador de perturbações

Fonte: Elaborada pelo autor.

8.2 O gradiente de pressão na evolução dos modos sinuoso e varicoso

Em escoamentos com a presença de vórtices de Görtler e sob a influência do gradiente de pressão neutro, o processo de transição a turbulência via instabilidade secundária decorre normalmente da amplificação dos modos sinuoso e varicoso.

A discussão aqui apresentada objetiva verificar se há também influência desses modos na transição para casos onde há variação da pressão. Três pacotes de perturbações são inseridos em posições próximas à região de saturação dos vórtices de Görtler. O critério aqui adotado sugere que o segundo pacote de perturbações localize-se em uma região onde a energia do modo fundamental seja 80% o valor de referência de saturação para o escoamento base em questão (ver Tab. 1). Geradores de perturbação não estacionárias possuem comprimento na direção x fixo e igual a 0,25.

Inicialmente, a evolução dos modos varicoso e sinuoso (e sua relação com a fase em que perturbações são inseridas) é exemplificada para um caso neutro. Seguindo estratégia similar à apresentada por Souza (2011), o modo sinuoso pode ser gerado se os pacotes de perturbações não estacionárias forem inseridos com um defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler. Além disso, o modo varicoso tende a ser gerado em casos onde os pacotes de perturbações são inseridos em fase com os vórtices.

Na Fig. 32 esquematiza-se relações entre as perturbações estacionárias (representadas por linhas cheias) e não estacionárias (representadas por linhas tracejadas) para os casos (a) em fase (b) em defasagem de fase de 90° e (c) em defasagem de fase de 45° . Para o caso (a)

Figura 32 – Relações entre perturbações estacionárias e não estacionárias na instabilidade secundária

Fonte: Souza (2011).

ambas as perturbações - estacionárias e não estacionárias - são números reais. A natureza real das perturbações favorece a geração do modo varicoso de instabilidade secundária. Para essa configuração, quantidades máximas de injeção e sucção de massa coincidem com a região de *upwash* dos vórtices de Görtler. Para o caso em (b), perturbações não estacionárias são números imaginários puros e, por esse motivo, não há injeção e sucção de massa na região de *upwash* dos vórtices. Há favorecimento ao crescimento do modo sinuoso para essa configuração. O caso (c) representa uma combinação dos casos anteriormente citados.

Para o conjunto de resultados posteriormente apresentados, perturbações defasadas em 90° são representadas por $A_s = 0 + 1,5 \times 10^{-2} \iota$. Casos em fase são representados por $A_s = 1,5 \times 10^{-2} + 0 \iota$. No caso neutro, os três pacotes de onda são inseridos nos intervalos em x : $[5,4, 5,65]$, $[5,9, 6,15]$ e $[6,4, 6,65]$.

Na Fig. 33(a) a máxima amplitude de cada frequência $m = 1, \dots, 16$ é apresentada para o

caso com ângulo de fase de 90° . Resultados obtidos para o caso em que as perturbações estão em fase com o escoamento base são ilustrados pela Fig. 33(b). Em concordância com Wassermann e Kloker (2002), a análise de Fourier temporal da instabilidade secundária é conduzida de duas formas e valores são apresentados em decorrência da magnitude das perturbações. Interrupções nos gráficos de amplitude explicitam a troca no processo de análise dos resultados. À parte esquerda atribui-se análise realizada por meio do uso da segunda derivada temporal da velocidade u e à parte direita, a velocidade u em si. O uso da segunda derivada fica justificado por uma redução nos níveis de ruído apresentados pela análise temporal, redução essa decorrente do fato de altas frequências serem efetivamente bem escaladas por ω_t^2 (WASSERMANN; KLOKER, 2002). Assim, em casos onde valores de amplitude não são altos (região próxima aos geradores de perturbação), a divisão por ω_t^2 age efetivamente como um filtro.

Figura 33 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler em regime neutro ($dp/dx = 0,0$). Em (a) perturbações não estacionárias estão defasadas em 90° em relação ao escoamento base e em (b) perturbações estão em fase em relação ao escoamento base.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando-se as Fig. 33(a-b), é possível perceber a existência de interação entre os pacotes de onda e o escoamento base para ambos os casos considerados. Na região próxima aos geradores, uma perturbação de baixa frequência decai/cresce mais lentamente se comparada a uma perturbação de alta frequência. Nesse sentido, o processo que leva o escoamento de um estágio primário a um estágio secundário para ambos os casos é conduzido pela amplificação de altas frequências.

A amplificação de altas frequências ocorre mais abruptamente no caso (a) do que no caso (b). Altas frequências começam a ser exponencialmente amplificadas em $x \geq 6,5$ para o caso em (a) e em $x \geq 7,5$ para o caso em (b). Ao fato sugere-se que o caso ilustrado em (a) é mais instável que o caso (b). Para todos os casos aqui considerados, a região de interesse ao estudo da instabilidade secundária fica delimitada pelo intervalo em que os modos temporais apresentam crescimento linear em escala logarítmica.

A natureza da instabilidade secundária para cada um dos casos é caracterizada por meio da identificação das posições nos planos $y \times z$ onde os máximos de cada modo temporal estão localizados em relação à estrutura cogumelo apresentada pelo escoamento base.

Para o caso ilustrado pela Fig. 33(a), contornos da distribuição da amplitude de cada modo temporal são aqui apresentados para o plano $x = 7,52$. As distribuições de amplitude para cada modo temporal são normalizadas pelo respectivos máximos nesse plano e ficam documentadas na Fig. 34. Já no caso em 33(b), a posição escolhida é $x = 8,0$. Gráficos normalizados de amplitude dos modos para o caso em fase são apresentados pela Fig. 35.

Os isocontornos de amplitude apresentados pela Fig. 34 sugerem que os valores máximos dos modos temporais localizam-se nas regiões laterais dos vórtices e na região central de haste dos mesmos. Essa regularidade é atribuída à instabilidade secundária do tipo sinuoso (SOUZA, 2011).

Ao analisar-se o comportamento dos isocontornos de amplitude para o caso apresentado pela Fig. 35, é possível observar que os máximos de cada modo temporal localizam-se na parte central superior das estruturas em forma de cogumelo. A esse padrão atribui-se a instabilidade do tipo varicoso.

De maneira complementar, uma análise qualitativa das estruturas é útil e faz-se representada por isosuperfícies de $Q = 0,5$. Na Fig. 36, as colunas (a) e (b) representam respectivamente a evolução da instabilidade secundária com um regime de gradiente de pressão nulo para os casos sinuoso e varicoso. As estruturas vorticais são apresentadas para o instante de tempo inicial associado à periodicidade da instabilidade secundária.

A análise de resultados volta-se para o caso representado pelo gradiente de pressão favorável. O mesmo procedimento adotado para o caso neutro é aqui aplicado e a evolução de perturbações fica caracterizada pela evolução da amplitude máxima dos modos temporais. Na Fig. 37(a-b), perturbações não estacionárias são inseridas: (a) com defasagem de 90° em relação aos vórtices de Görtler e (b) em fase com os vórtices de Görtler. Os pacotes de onda para o caso favorável são inseridos nos intervalos entre $[5,95, 6,2]$, $[6,45, 6,7]$ e $[6,95, 7,2]$. Já na Fig. 38(a-b) considera-se casos representados pelo gradiente de pressão adverso. Os pacotes de onda para esse caso são inseridos nos intervalos entre $[4,35, 4,6]$, $[4,85, 5,1]$ e $[5,35, 5,6]$.

Ao comparar-se a evolução da amplitude dos modos temporais para o caso favorável fica evidenciado comportamento similar ao apresentado pelo caso neutro. O caso representado em (a)

Figura 34 – Distribuição de amplitude dos modos temporais no plano $x = 7,52$ para o caso em que perturbações são inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler em regime neutro ($dp/dx = 0,0$).

Fonte: Elaborada pelo autor.

mostra-se ser mais instável que o caso em (b). Para o caso sinuoso, o crescimento exponencial de altas frequências ocorre já em um região próxima à $x = 7$. No caso varicoso, o crescimento só fica evidenciado a partir de $x = 8$. Assim como no caso neutro, amplitudes associadas às baixas frequências tem decrescimento lento e tendem a dominar o processo de transição.

Ao caso adverso atribui-se comportamento mais instável entre os casos investigados. Gráficos de amplitude dos modos temporais que evidenciam tal fato são apresentados na Fig. 38.

Figura 35 – Distribuição de amplitude dos modos temporais no plano $x = 8,0$ para o caso em que perturbações são inseridas em fase com os vórtices de Görter em regime neutro ($dp/dx = 0,0$).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em (a) apresenta-se o comportamento referente ao modo sinuoso e em (b) atribui-se característica varicosa. Nota-se crescimento da amplitude dos modos temporais em uma região onde $x > 6$ para o caso sinuoso e $x > 6,5$ para o caso varicoso.

Qualitativamente, as estruturas vorticiais associadas à instabilidade secundária são apresentadas para os casos favorável (ver Fig. 39(a-b)) e desfavorável (ver Fig. 40(a-b)). Como ocorre para o caso neutro, os vórtices são caracterizados por meio do critério Q , com $Q = 0,5$.

Figura 36 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa (a) e varicosa (b). Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime neutro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler em regime favorável ($dp/dx = -0,02$). Em (a) perturbações não estacionárias estão defasadas em 90° em relação ao escoamento base e em (b) perturbações estão em fase em relação ao escoamento base.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Torna-se interessante ressaltar que as estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária não são estacionárias embora possuam característica periódica. Evidencia-se a evolução dos vórtices ao longo de um período T para o caso representado pelo gradiente de pressão adverso. Na Fig. 41 apresenta-se a evolução do modo sinuoso. O modo varicoso fica representado por meio da Fig. 42.

Figura 38 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler em regime adverso ($dp/dx = 0,008$). Em (a) perturbações não estacionárias estão defasadas em 90° em relação ao escoamento base e em (b) perturbações estão em fase com o escoamento base.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 39 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa (a) e varicosa (b). Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime favorável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Fig. 41 fica evidenciada a periodicidade das estruturas vorticais da instabilidade secundária. As estruturas do tipo sinuoso ficam bem caracterizadas no intervalo de $x \in [6,5,7,5]$. Para a região em que $x > 7,5$, o processo de visualização do escoamento torna-se cada vez mais difícil devido a complexidade das estruturas vorticais associadas. Vale-se destacar que o regime do escoamento em questão não pode ser dito turbulento, uma vez que a faixa de frequências de

Figura 40 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa (a) e varicosa (b). Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime adverso.

Fonte: Elaborada pelo autor.

perturbações adotada para o estudo não é ampla.

Na Fig. 42, o comportamento periódico das estruturas vorticais também é evidenciado. As estruturas do tipo varicoso podem ser observadas em uma região posterior ao caso discutido na Fig. 41. Os vórtices apresentam estrutura em forma de ferradura no intervalo de $7,5 < x < 8,5$. Para a região à jusante de 8,5, há também dificuldade no processo de visualização das estruturas vorticais.

Por fim, objetiva-se uma comparação direta entre os modos sinuoso e varicoso no processo de competição entre modos. Para todos os casos representados na Fig. 43, $A_s = 0.75\sqrt{2} \times 10^{-2}(1,0 + 1,0 \iota)$. Da esquerda para a direita, a amplitude dos modos é considerada em casos onde (a) $dp/dx = 0,008$, (b) $dp/dx = 0,0$ e (c) $dp/dx = -0,02$. O mesmo padrão é observado e explicita ao gradiente de pressão adverso característica mais instável. Dominância do modo sinuoso é observada por meio das isosuperfícies na Fig. 44.

Figura 41 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo sinuosa ao longo de um ciclo completo de período T . Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime desfavorável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária do tipo varicosa ao longo de um ciclo completo de período T . Estruturas são aqui representadas através do critério Q com $Q = 0,5$. O escoamento base em questão é considerado como sendo os vórtices de Görtler desenvolvidos no regime desfavorável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 43 – Competição entre os modos sinuoso e varicoso na instabilidade secundária em casos onde (a) $dp/dx = 0,008$, (b) $dp/dx = 0,0$ e (c) $dp/dx = -0,02$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 44 – Visualização das estruturas vorticais associadas à instabilidade secundária para casos em que há competição entre os modos sinuoso e varicoso. Em (a) $dp/dx = 0,008$, (b) $dp/dx = 0,0$ e (c) $dp/dx = -0,02$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

CONCLUSÕES

Assumindo-se hipótese de linearidade, a evolução dos vórtices de Görtler em regimes representados pelo parâmetro de Hartree (casos favoráveis e adversos) concorda com resultados obtidos por meio do uso da Teoria de Estabilidade Linear. Destaca-se a investigação do processo de transição em camada limite sujeita a variações lineares da pressão e variações lineares do gradiente de pressão. Por meio dos casos contemplados na presente investigação, fica evidenciado o fato de que o gradiente de pressão adverso tende a tornar o escoamento mais instável a perturbações. No entanto, variações observadas entre casos são pequenas. Assim, em um contexto linear, vale-se a afirmação de que uma vez estabilizados os vórtices de Görtler, o gradiente de pressão do escoamento potencial não contribui efetivamente ao controle da instabilidade centrífuga.

À não linearidade atribui-se o fenômeno de saturação dos vórtices de Görtler. Observa-se antecipação da região de saturação em função do aumento do gradiente de pressão. Assim como ocorre em casos neutros, a presença de vórtices em escoamentos sujeitos a variações de pressão do escoamento potencial implica aumento nos valores médios de tensão de cisalhamento.

Evidencia-se o processo de transição via instabilidade secundária e explicita-se sua característica convectiva. Ambos os modos sinuoso e varicoso são identificados como potencialmente responsáveis pela transição também em casos onde o gradiente de pressão é diferente de zero. Para a configuração adotada o modo sinuoso mostra-se ser mais instável. A antecipação da região de saturação observada em casos com característica adversa implica antecipação da região onde efeitos não lineares tornam-se significativos. Ao fato permite-se afirmar que o gradiente de pressão adverso favorece o escoamento à transição a turbulência.

De forma geral também atribui-se mérito e originalidade ao produto final do presente trabalho de doutoramento: um código paralelizado e de alta ordem de precisão capaz de fornecer meios de investigação do processo de transição laminar-turbulento em camada limite sobre uma superfície côncava sujeita a variações do gradiente de pressão.

No que se refere à continuidade do projeto de pesquisa, sugere-se:

- extensão dos estudos aqui apresentados visando o processo de transferência de calor;
- investigação da influência de outros fatores na transição, como variações no raio de curvatura e a presença de rugosidades;
- controle da instabilidade por meio de técnicas de injeção e sucção de massa;
- caracterização dos modos subharmônicos no processo que leva à transição em escoamentos sujeitos à variação do gradiente de pressão;
- estudo referente ao uso de aproximações de ordem mais elevada para o escoamento base;
- estudos detalhados do processo de receptividade;
- extensão do código visando estudos relacionados diretamente à turbulência por meio do uso de estratégias como a de simulação de grandes escalas.

REFERÊNCIAS

- AIHARA, Y.; SONODA, T. Effects of pressure gradient on the secondary instability of Görtler vortices. In: **AIAA 19th Aerospace Sciences Meeting**. [S.l.: s.n.], 1981. Citado na página 38.
- BAHRI, F.; KOYAMA, Y.; IINO, J.; AOTA. Effect of the pressure gradients on the secondary instability of Görtler flow. In: **IUTAM Symposium on Laminar-turbulent transition**. [S.l.: s.n.], 1999. Citado na página 38.
- BARIO, F.; BERAL, C. Boundary layer measurements on the pressure and suction sides of a turbine inlet guide vane. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 17, p. 1–9, 1998. Citado na página 29.
- BENMALEK, A.; SARIC, W. S. Effects of curvature variation on the nonlinear evolution of Goertler vortices. **Physics of Fluids**, v. 6, p. 3353–3367, 1994. Citado na página 72.
- BOTTARO, A.; KLINGMANN, B. G. B.; ZEBIB, A. Görtler vortices with system rotation. **Theoretical and computational fluid dynamics**, v. 8, p. 325–347, 1996. Citado na página 34.
- DAY, H. P.; HERBERT, T.; SARIC, W. S. Comparing local and marching analyses of Görtler instability. **AIAA J.**, v. 28(6), p. 1010–1015, 1990. Citado na página 35.
- DEAN, W. R. Fluid motion in a curved channel. **Proc. R. Soc. London Ser. A**, v. 15, p. 623–631, 1928. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- FINNIS, M. V.; BROWN, A. The linear growth of Görtler vortices. **Int. J. Heat and Fluid Flow**, v. 18, p. 389–399, 1997. Citado na página 35.
- FLORYAN, J. M. On the Görtler instability of boundary layers. **Prog. Aerospace Sci.**, v. 28, p. 235–271, 1991. Citado na página 64.
- FLORYAN, J. M.; SARIC, W. S. Stability of Görtler vortices in boundary layers. **AIAA Journal**, v. 20, n. 3, p. 316–324, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 15, 39 e 54.
- _____. Effects of suction on the Görtler instability of boundary layers. **AIAA J.**, v. 21, n. 12, p. 1635–1639, 1983. Citado na página 34.
- GAMET, L.; DUCROS, F.; NICOUD, F.; POINSOT, T. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. application to direct numerical simulations of compressible flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 29, p. 159–191, 1999. Citado na página 104.
- GOULPIÉ, P.; KLINGMANN, B. G. B.; BOTTARO, A. Görtler vortices in boundary layers with streamwise pressure gradient. **Physics of Fluids**, v. 8, p. 451–459, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 15, 34, 35, 53, 54 e 55.
- GUPTA, M. M.; KOUATCHOU, J.; ZHANG, J. Comparison of second- and fourth-order discretizations for multigrid poisson solvers. **J. Computational Physics**, v. 132, p. 226–232, 1997. Citado na página 48.

- GÖRTLER, H. **On the three-dimensional instability of laminar boundary layer on concave walls**. [S.l.], 1940. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 33 e 34.
- HALL, P. Taylor-Görtler vortices in fully developed or boundary layer flows: linear theory. **J. Fluid Mech.**, v. 124, p. 475–494, 1982. Citado na página 35.
- _____. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers. **J. Fluid Mech.**, v. 130, n. 74, p. 41–58, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- HALL, P.; HORSEMAN, N. J. The linear inviscid secondary instability of longitudinal vortex structures in boundary layers. **J. Fluid Mech.**, v. 232, p. 357–375, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 37.
- HIRSH, R. S. High order accurate difference solutions of fluid mechanics problem by a compact differencing technique. **Journal of Computational Physics**, v. 19, p. 90–109, 1975. Citado na página 47.
- ITO, A. The generation and breakdown of longitudinal vortices along a concave wall. **J. Japan Soc. Aero. Space Sci.**, v. 28, p. 327–333, 1980. Citado na página 45.
- KLOKER, M. A robust high-resolution split-type compact FD scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. **Applied Scientific Research**, v. 59, p. 353–377, 1998. Citado na página 47.
- KLOKER, M.; KONZELMANN, U.; FASEL, H. F. Outflow boundary conditions for spatial Navier-Stokes simulations in transition boundary layers. **AIAA Journal**, v. 31, n. 4, p. 620–628, 1993. Citado na página 43.
- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. [S.l.]: Academic Press, 2002. Citado na página 31.
- LELE, S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of Computational Physics**, v. 103, p. 16–42, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 47, 50, 104 e 105.
- LI, F.; MALIK, M. R. Fundamental and subharmonic secondary instability of Görtler vortices. **J. Fluid Mech.**, v. 297, p. 77–100, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 37, 72 e 77.
- LINNICK, M. N.; FASEL, H. F. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. **Journal of Computational Physics**, v. 204, p. 157–192, 2005. Citado na página 47.
- LIU, W.; DOMARADZKI, J. Direct numerical simulation of transition to turbulence in Görtler flow. **J. Fluid Mech.**, v. 246, p. 267–295, 1993. Citado na página 36.
- MAHESH, K. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution. **J. Computational Physics**, v. 145, p. 332–358, 1998. Citado na página 47.
- MALATESTA, V.; ROGENSKI, J. K.; SOUZA, L. F. de. Heat transfer enhancement via gortler flow with spatial numerical simulation. **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, 2015. Manuscrito submetido para avaliação. Citado na página 106.
- MALATESTA, V.; SOUZA, L. F.; LIU, J. T. C. Influence of Goertler vortices spanwise wavelength on heat transfer rates. **Computation Thermal Sciences: An International Journal**, v. 5, n. 5, p. 389–400, 2013. Citado na página 39.

MARXEN, O. **Numerical studies of physical effects related to the controlled transition process in laminar separation bubbles**. Tese (Doutorado) — Universität Stuttgart, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 32.

MENDONÇA, M. T. Código numérico: Teoria de estabilidade linear de vórtices de görtler em placa plana. Código numérico gentilmente disponibilizado pelo Prof. Dr. Márcio T. de Mendonça. 2012. Citado 3 vezes nas páginas 15, 53 e 54.

MITSUDHARMADI, H.; WINOTO, S. H.; SHAH, D. A. Secondary instability in forced wavelength Görtler vortices. **Physics of Fluids**, v. 17, p. 1–8, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 57.

_____. Splitting and merging of Görtler vortices. **Physics of Fluids**, v. 17, p. 1–12, 2005. Citado na página 57.

_____. Development of most amplified wavelength Görtler. **Physics of Fluids**, v. 18, p. 1–12, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 34, 37 e 57.

MOMAYEZ, L.; DUPONT, P.; PEERHOSSAINI, H. Some unexpected effects of wavelength and perturbations strength on heat transfer enhancement by Görtler instability. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 47, p. 3783–3795, 2004. Citado na página 45.

PETRI, L. A.; SARTORI, P.; ROGENSKI, J. K.; SOUZA, L. F. de. Verification and validation of a direct numerical simulation code. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 291, p. 266–279, 2015. Citado na página 59.

RAGAB, S. A.; NAYFEH, A. H. Görtler instability. **Physics of Fluids**, v. 24(8), p. 1405–1417, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

ROGENSKI, J. K. **Desenvolvimento e otimização de um código paralelizado para simulação de escoamentos incompressíveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado na página 48.

ROGENSKI, J. K.; FLORYAN, J. M.; SOUZA, L. F. The role of linear pressure variations on the Görtler instability. **Physics of Fluids**, 2015. Manuscrito em elaboração. Nenhuma citação no texto.

ROGENSKI, J. K.; SOUZA, L. F.; FLORYAN, J. M. On the influence of pressure gradients on the evolution of the Görtler instability. **AIAA J.**, 2015. Manuscrito submetido para avaliação. Nenhuma citação no texto.

ROGENSKI, J. K.; PETRI, L. A.; SOUZA, L. F. Effects of parallel strategies in the transitional flow investigation. **J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.**, v. 37, p. 861–872, 2015. Citado na página 48.

SARIC, W. S. Görtler vortices. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 26, p. 379–409, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 28, 34, 35 e 37.

SCHLICHTING, H. **Boundary layer theory**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 27, 42 e 62.

SCHRADER, L.; BRANDT, L.; ZAKI, T. A. Receptivity, instability and breakdown of Görtler flow. **J. Fluid Mech.**, v. 682, p. 362–396, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 15, 16, 36, 37, 38, 49, 57, 58 e 62.

- SESCU, A.; THOMPSON, D. On the excitation of Görtler vortices by distributed roughness elements. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, v. 29, p. 67–92, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- SILVEIRANETO, A. d. Transição e turbulência. In: _____. [S.l.]: UFSC, 2002. cap. Fundamentos da turbulência nos fluidos, p. 1–52. Citado na página 27.
- SMITH, A. M. O. On the growth of Taylor-Görtler vortices along highly concave walls. **Quart. J. Math.**, v. 13, p. 233–62, 1955. Citado na página 34.
- SOUZA, L. F. **Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies côncavas**. Tese (Doutorado) — Instituto tecnológico de aeronáutica, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 36, 47, 48, 49, 102, 103 e 107.
- SOUZA, L. F. Numerical evaluation of time integration schemes in a disturbed flow simulation. In: **Proceedings of COBEM 2005**. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 47.
- SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. de; KLOKER, M. Seeding of Görtler vortices through a suction and blowing strip. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, XXVI, p. 269–279, 2004. Citado na página 39.
- SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar–turbulent transition studies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 48, p. 565–592, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 104.
- SOUZA, L. F. de. **Estudo numérico de instabilidade secundária em escoamentos de Görtler**. [S.l.], 2011. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 83.
- SPITALERI, R. M. Full-fas multigrid grid generation algorithms. **Applied Numerical Math.**, v. 32, p. 483–494, 2000. Citado na página 48.
- STUBEN, K.; TROTTEBERG, U. Nonlinear multigrid methods, the full approximation scheme. In: **Lecture Notes in Mathematics**. [S.l.]: ., 1981. Citado na página 48.
- SWEARINGEN, J. D.; BLACKWELDER, R. F. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 182, p. 255–290, 1987. Citado 6 vezes nas páginas 15, 37, 45, 53, 55 e 56.
- TANDIONO; WINOTO, S. H.; SHAH, D. A. Visualizing shear stress in Görtler vortex flow. **Journal of Visualization**, v. 12(3), p. 195–202, 2009. Citado na página 37.
- _____. Wall shear stress in Görtler vortex boundary layer flow. **Physics of Fluids**, v. 21, p. 1–9, 2009. Citado na página 37.
- TAYLOR, G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. **Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A**, v. 223, p. 289–343, 1923. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- WASSERMANN, P.; KLOKER, M. Mechanisms and passive control of crossflow-vortex-induced transition in a three-dimensional boundary layer. **J. Fluid Mech.**, v. 456, p. 49–84, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 49, 79 e 82.
- WINOTO, S. H.; MITSUDHARMADI, H.; SHAH, D. A. Visualizing Görtler vortices. **Journal of Visualization**, v. 8(4), p. 315–322, 2005. Citado na página 37.

WRAY, A.; HUSSAINI, M. Y. Highly accurate compact methods and boundary conditions. **Proc. Royal Soc. London**, A 392, p. 373–389, 1994. Citado na página 47.

ZHANG, H.; FASEL, H. F. Spatial direct numerical simulation of Görtler vortices. In: **AIAA Fluid Dynamics Conference**. Norfolk, USA: [s.n.], 1999. Citado na página 36.

O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE DIFERENÇAS FINITAS COMPACTAS EM MALHAS ESTIRADAS

Por simplicidade, assume-se o fator de estiramento (sf) como constante. Assim, o espaçamento entre dois pontos de malha é facilmente obtido por meio de propriedades de uma progressão geométrica (PG) finita de razão sf .

A Fig. 45 esquematiza a relação de espaçamentos da malha em torno da vizinhança de um ponto j .

Figura 45 – Estiramento na vizinhança de um ponto j do domínio discreto.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A.1 O cálculo dos coeficientes para derivadas de primeira e segunda ordens

O estêncil definido pela Fig. 45 permite exemplificar o procedimento utilizado para o desenvolvimento de um esquema compacto, centrado em j , para aproximar a primeira derivada de uma função f . Para tanto, considera-se a expressão

$$\alpha_{j-1}f'_{j-1} + \alpha_j f'_j + \alpha_{j+1}f'_{j+1} \approx a_{j-2}f_{j-2} + a_{j-1}f_{j-1} + a_j f_j + a_{j+1}f_{j+1} + a_{j+2}f_{j+2}, \quad (\text{A.1})$$

em que α_{j-1} , α_j , α_{j+1} , a_{j-2} , a_{j-1} , a_j , a_{j+1} e a_{j+2} são constantes a serem determinadas.

A obtenção de um conjunto válido de constantes, que satisfaça a Eq. (A.1), implica a identificação de uma relação entre o valor da primeira derivada em três pontos consecutivos de malha, tendo como base um estêncil computacional de cinco pontos. Nota-se que a obtenção deste conjunto relaciona-se com a ordem de precisão da aproximação a ser considerada. Obviamente, a solução identicamente nula é válida, porém não interessante no contexto em questão.

Visando uma maior concordância com as aproximações apresentadas por Souza (2003), expande-se cada termo da Eq. (A.1) em séries de Taylor centradas no ponto i . Define-se $h_{1-} = h sf$ como a distância entre os pontos $j-1$ e j e $h_{2-} = h(1+sf)$ como a distância entre $j-2$ e j . Analogamente, $h_{1+} = h sf^2$ e $h_{2+} = h sf^2(1+sf)$ representam a distância dos pontos $j+1$ e $j+2$ em relação ao ponto j , respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
 f'_{j-1} &= f'_j - h_{1-} f''_j + \frac{h_{1-}^2}{2!} f'''_j - \frac{h_{1-}^3}{3!} f^{iv}_j + \frac{h_{1-}^4}{4!} f^v_j - \frac{h_{1-}^5}{5!} f^{vi}_j + \frac{h_{1-}^6}{6!} f^{vii}_j + \dots \\
 f'_j &= f'_j \\
 f'_{j+1} &= f'_j + h_{1+} f''_j + \frac{h_{1+}^2}{2!} f'''_j + \frac{h_{1+}^3}{3!} f^{iv}_j + \frac{h_{1+}^4}{4!} f^v_j + \frac{h_{1+}^5}{5!} f^{vi}_j + \frac{h_{1+}^6}{6!} f^{vii}_j + \dots \\
 f_{j-2} &= f_j - h_{2-} f'_j + \frac{h_{2-}^2}{2!} f''_j - \frac{h_{2-}^3}{3!} f'''_j + \frac{h_{2-}^4}{4!} f^{iv}_j - \frac{h_{2-}^5}{5!} f^v_j + \frac{h_{2-}^6}{6!} f^{vi}_j - \frac{h_{2-}^7}{7!} f^{vii}_j + \dots \\
 f_{j-1} &= f_j - h_{1-} f'_j + \frac{h_{1-}^2}{2!} f''_j - \frac{h_{1-}^3}{3!} f'''_j + \frac{h_{1-}^4}{4!} f^{iv}_j - \frac{h_{1-}^5}{5!} f^v_j + \frac{h_{1-}^6}{6!} f^{vi}_j - \frac{h_{1-}^7}{7!} f^{vii}_j + \dots \\
 f_j &= f_j \\
 f_{j+1} &= f_j + h_{1+} f'_j + \frac{h_{1+}^2}{2!} f''_j + \frac{h_{1+}^3}{3!} f'''_j + \frac{h_{1+}^4}{4!} f^{iv}_j + \frac{h_{1+}^5}{5!} f^v_j + \frac{h_{1+}^6}{6!} f^{vi}_j + \frac{h_{1+}^7}{7!} f^{vii}_j + \dots \\
 f_{j+2} &= f_j + h_{2+} f'_j + \frac{h_{2+}^2}{2!} f''_j + \frac{h_{2+}^3}{3!} f'''_j + \frac{h_{2+}^4}{4!} f^{iv}_j + \frac{h_{2+}^5}{5!} f^v_j + \frac{h_{2+}^6}{6!} f^{vi}_j + \frac{h_{2+}^7}{7!} f^{vii}_j + \dots
 \end{aligned}$$

Substituindo os termos indicados na Eq. (A.1) pelas respectivas expansões em série de Taylor, e evidenciando a equação resultante em termos de f_i e suas derivadas, um sistema linear

é gerado. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -h_{2-} & -h_{1-} & 0 & h_{1+} & h_{2+} \\ -h_{1-} & 0 & h_{1+} & \frac{h_{2-}^2}{2!} & \frac{h_{1-}^2}{2!} & 0 & \frac{h_{1+}^2}{2!} & \frac{h_{2+}^2}{2!} \\ \frac{h_{1-}^2}{2!} & 0 & \frac{h_{1+}^2}{2!} & -\frac{h_{2-}^3}{3!} & -\frac{h_{1-}^3}{3!} & 0 & \frac{h_{1+}^3}{3!} & \frac{h_{2+}^3}{3!} \\ -\frac{h_{1-}^3}{3!} & 0 & \frac{h_{1+}^3}{3!} & \frac{h_{2-}^4}{4!} & \frac{h_{1-}^4}{4!} & 0 & \frac{h_{1+}^4}{4!} & \frac{h_{2+}^4}{4!} \\ \frac{h_{1-}^4}{4!} & 0 & \frac{h_{1+}^4}{4!} & -\frac{h_{2-}^5}{5!} & -\frac{h_{1-}^5}{5!} & 0 & \frac{h_{1+}^5}{5!} & \frac{h_{2+}^5}{5!} \\ -\frac{h_{1-}^5}{5!} & 0 & \frac{h_{1+}^5}{5!} & \frac{h_{2-}^6}{6!} & \frac{h_{1-}^6}{6!} & 0 & \frac{h_{1+}^6}{6!} & \frac{h_{2+}^6}{6!} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{j-1} \\ \alpha_j \\ \alpha_{j+1} \\ -a_{j-2} \\ -a_{j-1} \\ -a_j \\ -a_{j+1} \\ -a_{j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A primeira linha do sistema linear (A.2) relaciona-se com o fator comum f_j . A segunda relaciona-se com o fator comum f'_j . Analogamente, as linhas 3-7 relacionam-se com as derivadas $f''_j - f_j^{vi}$. A última linha do sistema fornece um grau de liberdade ao sistema e possibilita a existência e unicidade de uma solução não nula.

A solução do sistema (A.2) representa o conjunto de constantes que compõem a aproximação compacta procurada. Por meio deste processo, são derivados esquemas compactos para as derivadas de primeira e segunda ordem. Os estêncils propostos para a derivada primeira estão de acordo com o trabalho de Souza (2003), e são expressos por:

1. primeiro ponto:

$$\alpha_1^{(fp)} f'_1 + \alpha_2^{(fp)} f'_2 \approx a_1^{(fp)} f_1 + a_2^{(fp)} f_2 + a_3^{(fp)} f_3 + a_4^{(fp)} f_4 + a_5^{(fp)} f_5, \quad (\text{A.3})$$

2. segundo ponto:

$$\alpha_1^{(sp)} f'_1 + \alpha_2^{(sp)} f'_2 + \alpha_3^{(sp)} f'_3 \approx a_1^{(sp)} f_1 + a_2^{(sp)} f_2 + a_3^{(sp)} f_3 + a_4^{(sp)} f_4 + a_5^{(sp)} f_5 + a_6^{(sp)} f_6, \quad (\text{A.4})$$

3. penúltimo ponto:

$$\alpha_1^{(pp)} f'_N + \alpha_2^{(pp)} f'_{N-1} + \alpha_3^{(pp)} f'_{N-2} \approx a_1^{(pp)} f_N + a_2^{(pp)} f_{N-1} + a_3^{(pp)} f_{N-2} + a_4^{(pp)} f_{N-3} + a_5^{(pp)} f_{N-4} + a_6^{(pp)} f_{N-5}, \quad (\text{A.5})$$

4. último ponto:

$$\alpha_1^{(lp)} f'_N + \alpha_2^{(lp)} f'_{N-1} \approx a_1^{(lp)} f_N + a_2^{(lp)} f_{N-1} + a_3^{(lp)} f_{N-2} + a_4^{(lp)} f_{N-3} + a_5^{(lp)} f_{N-4}. \quad (\text{A.6})$$

O conjunto composto pelas Eq. (A.1) e (A.3) a (A.6) é um sistema tridiagonal. Trata-se de uma generalização da aproximação compacta proposta por Souza, Mendonça e Medeiros (2005).

A obtenção de aproximações compactas para a derivada segunda de uma função f é realizada de forma análoga aos casos anteriores. Os estêncils propostos são

1. primeiro ponto:

$$\beta_1^{(fp)} f_1'' + \beta_2^{(fp)} f_2'' \approx b_1^{(fp)} f_1 + b_2^{(fp)} f_2 + b_3^{(fp)} f_3 + b_4^{(fp)} f_4 + b_5^{(fp)} f_5 + b_6^{(fp)} f_6, \quad (\text{A.7})$$

2. segundo ponto:

$$\beta_1^{(sp)} f_1'' + \beta_2^{(sp)} f_2'' + \beta_3^{(sp)} f_3'' \approx b_1^{(sp)} f_1 + b_2^{(sp)} f_2 + b_3^{(sp)} f_3 + b_4^{(sp)} f_4 + b_5^{(sp)} f_5 + b_6^{(sp)} f_6 + b_7^{(sp)} f_7, \quad (\text{A.8})$$

3. pontos centrais:

$$\beta_{j-1} f_{j-1}'' + \beta_j f_j'' + \beta_{j+1} f_{j+1}'' \approx b_{j-2} f_{j-2} + b_{j-1} f_{j-1} + b_j f_j + b_{j+1} f_{j+1} + b_{j+2} f_{j+2}, \quad (\text{A.9})$$

4. penúltimo ponto:

$$\beta_1^{(pp)} f_N'' + \beta_2^{(pp)} f_{N-1}'' + \beta_3^{(pp)} f_{N-2}'' \approx b_1^{(pp)} f_N + b_2^{(pp)} f_{N-1} + b_3^{(pp)} f_{N-2} + b_4^{(pp)} f_{N-3} + b_5^{(pp)} f_{N-4} + b_6^{(pp)} f_{N-5} + b_7^{(pp)} f_{N-6}, \quad (\text{A.10})$$

5. último ponto:

$$\beta_1^{(lp)} f_N'' + \beta_2^{(lp)} f_{N-1}'' \approx b_1^{(lp)} f_N + b_2^{(lp)} f_{N-1} + b_3^{(lp)} f_{N-2} + b_4^{(lp)} f_{N-3} + b_5^{(lp)} f_{N-4} + b_6^{(lp)} f_{N-5}, \quad (\text{A.11})$$

O conjunto de equações apresentado também gera um sistema tridiagonal para o cálculo da derivada derivada.

A.2 A influência do estiramento na resolução espectral de aproximações compactas

Seguindo estudos de Lele (1992) e Gamet *et al.* (1999), uma análise espectral de cada uma das aproximações em diferenças finitas é conduzida para um modo de Fourier $f(x) = e^{i\tau s}$,

onde τ é o número de onda normalizado. Derivadas de primeira e segunda ordens desse modo de Fourier em função de s são dadas analiticamente pelas expressões $f' = \imath \tau f$ e $f'' = -\tau^2 f$.

A análise espectral de um esquema de diferenças finitas gerado a fim de aproximar a primeira derivada de um modo de Fourier pode ser expressa por $f'_d = \imath \tau'(\tau) f$. Nessa equação, a função τ' representa o número de onda modificado. A relação $\tau'(\tau) = \tau$ implica diferenciação exata. Da mesma forma, considerando-se $f''_d = -\tau''(\tau) f$, a resolução de um esquema numérico relacionado ao cálculo da derivada segunda pode ser estimado por meio da comparação entre τ^2 e τ'' .

Assumindo-se uma discretização uniforme $sf = 1,00$, a análise espectral da aproximação compacta representada pela Eq. A.1 fica descrita em Lele (1992). Uma análise da influência do fator de estiramento no comportamento da função que representa o número de onda modificado fica evidenciada pela Fig. 46 nos casos em que $sf = 1,02$ e $sf = 1,05$. Na Fig. 46, a coluna à esquerda (a) e à direita (b) representam a parte real e a parte imaginária do número de onda modificado, respectivamente.

De forma geral vale-se ressaltar que a parte real do número de onda modificado relaciona-se com a natureza dispersiva da aproximação numérica e a parte imaginária evidencia a relação da aproximação com efeitos de dissipação (LELE, 1992). Aproximações centradas não apresentam efeito de dissipação.

Figura 46 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.1 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A análise do comportamento da parte real de τ' demonstra certa suavidade entre variações do fator de estiramento de malha e variações na forma da parte real do número de onda modificado

(ver Fig. 46(a)). Naturalmente, ao aumento no fator de estiramento de malha atribui-se uma menor resolução do esquema em relação a altas frequências. Por meio da Fig. 46(b), observa-se ainda que o fator de estiramento insere efeitos de dissipação numérica ao esquema em questão.

Da mesma forma, explicita-se a análise espectral para o esquema central em diferenças finitas que aproxima a derivada de segunda ordem de uma dada função. O estêncil da aproximação fica representado pela Eq. A.9. Fatores de estiramento de 2% e 5% são também aqui considerados. A parte real(a) e a parte imaginária do número de onda modificado para o estêncil central são ilustradas por meio da Fig. 47. Salienta-se que o uso de fatores de estiramento próximos ou menores que 2% não implica grandes modificações no comportamento das partes real e imaginária de τ' quando comparado com caso em que $sf = 1,00$.

Figura 47 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.9 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A análise espectral dos esquemas completamente descentrados, definidos pelas Eq. A.3 e Eq. A.7, fica representada por meio das Figs. 48 e 49, respectivamente. Para aproximações representadas pelas Eq. A.4 e A.8, a análise é ilustrada nas Figs. 50 e 51.

Parte do presente estudo fica evidenciada em manuscrito submetido a pares (MALAS-TESTA; ROGENSKI; SOUZA, 2015).

A.3 O estiramento de malha e a equação de Poisson

A resolução numérica das equações de Poisson (3.29) e (4.7) exige a discretização da segunda derivada da função em questão nas direções paralela e normal ao escoamento. Como

Figura 48 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.3 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.7 (a) parte real da função τ'' (b) parte imaginária da função τ'' .

Fonte: Elaborada pelo autor.

não há estiramento na direção x , as aproximações utilizadas concordam com Souza (2003).

No entanto, o estiramento na direção normal exige a generalização das aproximações compactas. O processo de generalização é similar aos casos anteriores, tendo como diferencial a inclusão/uso de informações de condições de contorno e o uso da equação da continuidade na

Figura 50 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.4 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 51 – Análise do número de onda modificado para o estêncil compacto representado pela equação A.8 (a) parte real da função τ' (b) parte imaginária da função τ' .

Fonte: Elaborada pelo autor.

derivação dos esquemas. Tem-se assim, considerando por exemplo a função v_b , os estêncils para:

1. segundo ponto:

$$\gamma_1^{(sp)} v'_{b_1} + \gamma_2^{(sp)} v''_{b_2} + \gamma_3^{(sp)} v''_{b_3} \approx c_1^{(sp)} v_{b_1} + c_2^{(sp)} v_{b_2} + c_3^{(sp)} v_{b_3} + c_4^{(sp)} v_{b_4}, \quad (\text{A.12})$$

em que o símbolo ' representa derivação da função em relação a y . Observa-se que a condição de não deslizamento para a velocidade u_b e o uso da equação da continuidade implicam

$$\frac{\partial v_b}{\partial y} = 0.$$

2. pontos centrais: a mesma aproximação referenciada pela Eq. (A.9) é utilizada.

3. penúltimo ponto:

$$\gamma_1^{(pp)} v_{b_{N-1}}'' \approx c_1^{(pp)} v_{b_N} + c_2^{(pp)} v_{b_{N-1}} + c_3^{(pp)} v_{b_{N-2}}. \quad (\text{A.13})$$

4. último ponto:

$$\gamma_1^{(lp)} v_{b_N}' + \gamma_2^{(lp)} v_{b_N}'' \approx c_1^{(lp)} v_{b_N} + c_2^{(lp)} v_{b_{N-1}} + c_3^{(lp)} v_{b_{N-2}}. \quad (\text{A.14})$$

A.4 O processo de integração em uma malha estirada

O processo de integração na direção normal ao escoamento é gerado considerando a informação da derivada da função em uma vizinhança do ponto de interesse e do valor da função em pontos já determinados (seja por cálculo ou condição de contorno). Por exemplo, é possível propor uma aproximação para a função no ponto i da forma

$$f_j = d_1 f_{j-1} + \psi_1 f_{j-1}' + \psi_2 f_j' + \psi_3 f_{j+1}' + \psi_4 f_{j+2}' + \psi_5 f_{j+3}', \quad (\text{A.15})$$

em que $d_1, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ e ψ_5 são constantes a serem determinadas. Aproximações descentradas desta forma fazem-se necessárias em regiões próximas a contornos.

Analisando a Eq. (A.15), fica evidenciada a necessidade de se obter seis equações para que o sistema admita solução única. Relações que envolvam a derivada da função em uma molécula computacional descentrada em i podem ser obtidas. Assim, seguindo as ideias anteriormente apresentadas,

$$\begin{aligned} f_{j-1}' &\approx e_{1,j-1} f_{j-1} + e_{2,j-1} f_j + e_{3,j-1} f_{j+1} + e_{4,j-1} f_{j+2} + e_{5,j-1} f_{j+3} + e_{6,j-1} f_{j+4}; \\ f_j' &\approx e_{1,j} f_{j-1} + e_{2,j} f_j + e_{3,j} f_{j+1} + e_{4,j} f_{j+2} + e_{5,j} f_{j+3} + e_{6,j} f_{j+4}; \\ f_{j+1}' &\approx e_{1,j+1} f_{j-1} + e_{2,j+1} f_j + e_{3,j+1} f_{j+1} + e_{4,j+1} f_{j+2} + e_{5,j+1} f_{j+3} + e_{6,j+1} f_{j+4}; \\ f_{j+2}' &\approx e_{1,j+2} f_{j-1} + e_{2,j+2} f_j + e_{3,j+2} f_{j+1} + e_{4,j+2} f_{j+2} + e_{5,j+2} f_{j+3} + e_{6,j+2} f_{j+4}; \\ f_{j+3}' &\approx e_{1,j+3} f_{j-1} + e_{2,j+3} f_j + e_{3,j+3} f_{j+1} + e_{4,j+3} f_{j+2} + e_{5,j+3} f_{j+3} + e_{6,j+3} f_{j+4}, \end{aligned}$$

em que e_{κ_1, κ_2} representa uma constante, com $\kappa_1 = 1, 2, \dots, 6$ e $\kappa_2 = j-1, j, \dots, j+3$.

Em concordância com a Eq. (A.15), multiplica-se cada expansão por sua respectiva constante ψ_j , $j = 1, \dots, 5$. Para que não haja dependência direta dos termos f_{j+1} a f_{j+4} ,

$$\begin{bmatrix} e_{3,j-1} & e_{3,j} & e_{3,j+1} & e_{3,j+2} & e_{3,j+3} \\ e_{4,j-1} & e_{4,j} & e_{4,j+1} & e_{4,j+2} & e_{4,j+3} \\ e_{5,j-1} & e_{5,j} & e_{5,j+1} & e_{5,j+2} & e_{5,j+3} \\ e_{6,j-1} & e_{6,j} & e_{6,j+1} & e_{6,j+2} & e_{6,j+3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O coeficiente d_1 é então calculado por meio da expressão

$$d_1 = \psi_1 e_{1,j-1} + \psi_2 e_{1,j} + \psi_3 e_{1,j+1} + \psi_4 e_{1,j+2} + \psi_5 e_{1,j+3}.$$

—