UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Simulação numérica de um escoamento transicional sobre uma superfície côncava de curvatura variável com transferência de calor

Larissa Ferreira Marques

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Larissa Ferreira Marques

**Simulação numérica de um escoamento transicional sobre
uma superfície côncava de curvatura variável com
transferência de calor**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

**USP – São Carlos
Outubro de 2018**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M357s Marques, Larissa Ferreira
 Simulação numérica de um escoamento transicional
 sobre uma superfície côncava de curvatura variável
 com transferência de calor / Larissa Ferreira
 Marques; orientador Leandro Franco de Souza. -- São
 Carlos, 2018.
 111 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2018.

 1. Simulação Numérica. 2. Transição laminar-
 turbulenta. 3. Vórtices de Görtler. 4. Curvatura
 variável. 5. Transferência de calor. I. Souza,
 Leandro Franco de, orient. II. Título.

Larissa Ferreira Marques

**Numerical simulation of a transitional flow on a concave
surface of variable curvature with heat transfer**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Computer Science and
Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and
Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Franco de Souza

**USP – São Carlos
October 2018**

À Deus:

*“Tudo é do Pai, toda honra e toda glória,
é Dele a vitória, alcançada em minha vida”,
e aos meu pais, Fátima e Felício,
com amor, dedico.*

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço ao Professor Dr. Leandro pela oportunidade de desenvolver este trabalho, através do qual pude adquirir experiências profissionais e pessoais, que levarei por toda vida. Obrigada pela forma como conduziu esta orientação. Em um meio acadêmico, onde muitos agem com soberania, eu tive a sorte de ter sido orientada por uma pessoa cuja humildade e gentileza estão em primeiro lugar.

À minha Família: Mãe, Pai, Cadu, Natália, e Maria Júlia. Meu alicerce! Agradeço por tê-los ao meu lado, mesmo à 500 quilômetros de distância, neste longo, e ao mesmo tempo tão curto período de nossas vidas. Todo amor, paciência, e confiança que vocês dedicaram à mim, eu hoje retribuo com lágrimas de felicidade.

Ao meu Amor, Lucas! Tudo o que você fez ou deixou de fazer para que a realização deste trabalho fosse possível, hoje me fez pensar o quanto sou grata à você.

Aos meus amigos, que não são poucos, e por isso eu deixarei que cada um de vocês sintam a minha gratidão com a seguinte reflexão: “... às vezes por terem me dado um minuto de sua atenção, e me ouvido falar de minhas angústias, medos, vitórias, derrotas, ou até mesmo dividido um café (vamos tomar um cafezinho, Dra?!), ou uma cerveja ... Isso é ser amigo: é ouvir, é confiar, é amar. E amigos de verdade ficam para sempre em nossos corações, assim como as pegadas na alma, que são eternas.”

Ao Josuel, que talvez não concorde com o meu agradecimento, mas à quem eu não poderia deixar de agradecer. Além da amizade, compartilhou comigo de sua grandiosa sabedoria.

À Laurie, à Carolina, ao Wilson, e à Ana, por terem sido minha família durante o período de intercâmbio no Canadá.

Agradeço ainda aos meus professores, aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, ao Léo e ao Marcelo, pela atenção e apoio oferecido, e ao suporte financeiro disponibilizado pela CAPES.

Finalmente, e acima de tudo, a Deus, por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar o caminho nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades. Minha gratidão à Nossa Senhora, pelas inúmeras vezes que intercedeu por mim.

“A única forma de chegar ao impossível é acreditar que é possível.”
(Lewis Carroll)

RESUMO

MARQUES, L. F. **Simulação numérica de um escoamento transicional sobre uma superfície côncava de curvatura variável com transferência de calor**. 2018. 111 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Nos escoamentos em turbomáquinas temos como principais características a tridimensionalidade, possível ocorrência de separação da camada limite, relaminarização, transição laminar-turbulenta, dentre outros efeitos físicos. De acordo com alguns estudos experimentais em turbinas observou-se que a transição laminar-turbulenta pode se estender por até 60% da corda de uma pá de turbina. Uma boa estimativa para se prever corretamente o local da transição é indispensável para que seja obtida uma melhoria na eficiência das turbinas. Escoamentos sobre superfícies côncavas estão sujeitos à instabilidade centrífuga, podendo dar origem a vórtices longitudinais, conhecidos como vórtices de Görtler. Esses vórtices são responsáveis por gerar distorções fortes nos perfis de velocidade e consequentemente nos perfis de temperatura. O presente estudo tem por objetivo estudar a influência da variação da curvatura de uma superfície côncava, e os efeitos do comprimento de onda transversal no processo de transição, e sua influência nas taxas de transferência de calor. Para tal, um código de simulação numérica paralelizado, com alta ordem de precisão, foi utilizado para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes. Este código é validado através de comparações entre resultados obtidos com uso da teoria de estabilidade linear, e com resultados de simulações numéricas não lineares. Resultados obtidos evidenciam a influência da variação da curvatura, e os efeitos causados pelo comprimento de onda transversal nas instabilidades de Görtler, e secundária. Tais evidências comprovam que a variação da curvatura pode ser útil no controle do processo de transição laminar-turbulenta, e que as taxas de transferência de calor de um escoamento de Görtler desenvolvido em superfícies de curvatura variável podem ser intensificadas, atingindo valores superiores aos obtidos em escoamentos turbulentos.

Palavras-chave: Simulação numérica, Transição laminar-turbulenta, Vórtices de Görtler, Curvatura variável, Transferência de calor.

ABSTRACT

MARQUES, L. F. **Numerical simulation of a transitional flow on a concave surface of variable curvature with heat transfer.** 2018. 111 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Some characteristics of flows in turbomachinery are the three-dimensionality, possible occurrence of separation of the boundary layer, relaminarization, laminar-turbulent transition, among other physical effects. According to some experimental observations in turbines, it has been observed that the laminar-turbulent transition can extend over 60% chord of a turbine blade. A good estimate to correctly predict the location of the transition is essential for an improvement in the efficiency of turbines. Flow over concave surfaces is subjected to centrifugal instability, which may lead to formation of longitudinal vortices, known as the Görtler vortices. These vortices are responsible for generating strong distortions in the velocity profiles and hence the temperature profiles. The current goal aims to study the influence of the curvature variation of a concave surface and the effects of spanwise wavelength on the transition process and its influence on the heat transfer rates. For this, a parallel numerical simulation code, with a high order of precision, was used to numerically solve the Navier-Stokes equations. This code is validated through comparisons between results obtained using linear stability theory, and nonlinear numerical simulations results. Results obtained show the influence of the curvature variation, and the effects caused by the spanwise wavelength on the Görtler and secondary instabilities. This evidence proves that the curvature variation can be useful in the control of the laminar-turbulent transition process, and that heat transfer rates of a Görtler flow developed on variable curvature surfaces can be intensified, and reach values higher than these achieved in turbulent flows.

Keywords: Numerical simulation, Laminar-turbulent transition, Görtler vortices, Variable curvature, Heat transfer.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Taxa de transferência de calor em uma pá de turbina baseada nos estudos de Turner (1971). A distribuição de velocidade em ambos os lados da pá é apresentada na imagem superior. Logo abaixo o coeficiente de transferência de calor local é apresentado para diferentes níveis de turbulência	30
Figura 2 – Ilustração do experimento de Reynolds	35
Figura 3 – Ilustração dos vórtices de Taylor	36
Figura 4 – Ilustração dos vórtices de Görtler	37
Figura 5 – Padrões de estabilidade de sistemas mecânicos	38
Figura 6 – O caminho da receptividade para a transição laminar-turbulenta	39
Figura 7 – escoamentos com efeitos centrífugos relevantes	40
Figura 8 – Diagramas de estabilidade para escoamentos sobre placa côncava definidos por Görtler (1940)	42
Figura 9 – Distribuição do componente principal de velocidade na direção do escoamento	43
Figura 10 – Ilustração das regiões descendente e ascendente, geradas a partir dos efeitos dos vórtices de Görtler	43
Figura 11 – Domínio computacional representado por um sistema de coordenadas curvilíneas	46
Figura 12 – Ilustração de uma camada limite bidimensional	49
Figura 13 – Estiramento na vizinhança de um ponto j do domínio discreto	55
Figura 14 – Geometria do modelo de pá de turbina adotada por Wang <i>et al.</i> (1997)	64
Figura 15 – Parâmetros geométricos e físicos relacionados aos dois casos de curvatura em análise	65
Figura 16 – Parâmetros da teoria de estabilidade linear considerando quatro comprimentos de onda transversais	66
Figura 17 – Taxa de amplificação local α para vórtices com diferentes comprimentos de onda transversais. Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia), e teoria de estabilidade linear (linha tracejada)	67
Figura 18 – Casos de distribuição de curvatura da parede analisados	68
Figura 19 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal. Comparativo entre resultados obtidos através de simulações numéricas: resultados do presente estudo (linha cheia) e resultados de Benmalek e Saric (1994) (quadrados pretos)	69

Figura 20 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 9$. Parede côncava. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de Benmalek e Saric (1994), item (b)	70
Figura 21 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 16$. Parede côncava-convexa. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de Benmalek e Saric (1994), item (b)	70
Figura 22 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 10, 24$. Parede côncava-plana. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de Benmalek e Saric (1994), item (b)	71
Figura 23 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 12, 02$. Parede periódica. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de Benmalek e Saric (1994), item (b)	71
Figura 24 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal .	74
Figura 25 – Campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$, e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, no plano $z \times y$ em $x = 13, 86$	75
Figura 26 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal .	76
Figura 27 – Campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$, e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, no plano $z \times y$ em $x = 10, 18$	77
Figura 28 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal .	78
Figura 29 – Campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$, e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, no plano $z \times y$ em $x = 20, 36$	79
Figura 30 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal .	80
Figura 31 – Campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$, e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1 no plano $z \times y$ em $x = 13, 25$	81
Figura 32 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal. Superfície de curvatura variável	84
Figura 33 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal. Superfície de curvatura constante	85
Figura 34 – Contornos de isovelocidade (linhas sólidas) e de isotermodura (linhas tracejadas) plotados no plano $z \times y$ em $x = 10$. $Pr = 0,72$. Lado esquerdo exibe resultados para uma superfície de curvatura variável. Lado direito representa os resultados para uma parede de curvatura constante	87

Figura 35 – Contornos de isovelocidade (linhas sólidas) e de isotemperatura (linhas tracejadas) plotados no plano $z \times y$ em $x = 10$. $Pr = 7,07$. Lado esquerdo exibe resultados para uma superfície de curvatura variável. Lado direito representa os resultados para uma parede de curvatura constante	88
Figura 36 – Evolução longitudinal da média do número de Stanton na direção transversal, como uma função do número de Reynolds. $Pr = 0,72$	89
Figura 37 – Evolução longitudinal da média do número de Stanton na direção transversal, como uma função do número de Reynolds. $Pr = 7,07$	90
Figura 38 – Relações entre perturbações estacionárias e não estacionárias na instabilidade secundária	94
Figura 39 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler, em que as perturbações foram inseridas em fase com o escoamento base	95
Figura 40 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler, em que as perturbações foram inseridas em defasagem de 90° com o escoamento base	95
Figura 41 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas em fase com os vórtices de Görtler. Superfície de curvatura variável	97
Figura 42 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler. Superfície de curvatura variável	98
Figura 43 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas em fase com os vórtices de Görtler. Superfície de curvatura constante	99
Figura 44 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler. Superfície de curvatura constante	100
Figura 45 – Visualização das estruturas vorticais do escoamento através de isosuperfícies $Q = 0,1$, associadas à perturbações não estacionárias em fase com os vórtices de Görtler	101

Figura 46 – Visualização das estruturas vorticais do escoamento através de isosuperfícies $Q = 0, 1$, associadas à perturbações não estacionárias em defasagem de 90° com os vórtices de Görtler 101

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede côncava	82
Tabela 2	– Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede côncava-convexa	82
Tabela 3	– Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede côncava-plana	82
Tabela 4	– Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede periódica	82
Tabela 5	– Λ , λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Superfície de curvatura variável	86
Tabela 6	– Λ , λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Superfície de curvatura constante	86
Tabela 7	– Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 0,72$. Superfície de curvatura variável	90
Tabela 8	– Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 0,72$. Superfície de curvatura constante	90
Tabela 9	– Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 7,07$. Superfície de curvatura variável	91
Tabela 10	– Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 7,07$. Superfície de curvatura constante	92

LISTA DE SÍMBOLOS

ν^* — viscosidade cinemática

β — número de onda local na direção transversal

Go — número de Görtler

Λ — comprimento de onda característico

U_∞^* — velocidade do escoamento fora da camada limite

δ^* — constante proporcional à espessura da camada limite

R^* — raio de curvatura da superfície

x^* — distância do bordo de ataque da placa côncava

λ_z^* — comprimento de onda transversal

Re — número de Reynolds

L^* — comprimento de referência

Pr — número de Prandtl

σ^* — difusividade térmica

x_0, x_{max} — planos representando o início e o término do domínio de integração na direção principal do escoamento

x_1, x_2 — planos representando o início e o término da região de inserção de perturbação

x_3, x_4 — planos representando o início e o término da região de relaminarização do escoamento

x — componente do vetor posição associado à direção do escoamento

y — componente do vetor posição associado à direção normal à parede

z — componente do vetor posição associado à direção transversal ao escoamento

$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ — componentes do vetor velocidade

$(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)$ — componentes do vetor vorticidade

$\tilde{\theta}$ — temperatura

T_0^* — temperatura na parede

T_∞^* — temperatura fora da camada limite

ρ_b — função genérica que representa o escoamento base

ρ — função genérica representando perturbações de ρ_b

i — unidade imaginária

k — modo de Fourier

Δ_x — espaçamento de malha na direção principal do escoamento

Δ_{y_j} — j -ésimo espaçamento de malha na direção normal à parede

N_x — número máximo de pontos discretizados na direção x

N_y — número máximo de pontos discretizados na direção y

Δ_t — passo temporal

str — fator de estiramento de malha na direção normal à parede

$\mathcal{A}$ — amplitude máxima de perturbações estacionárias

$\mathcal{A}_s$ — amplitude de perturbação relacionada a instabilidade secundária

cv — curvatura variável

cc — curvatura constante

St — número de Stanton

Nu — número de Nusselt

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Estado da arte	26
1.1.1	<i>Vórtices de Görtler & transferência de calor</i>	26
1.1.2	<i>Transição laminar-turbulenta & pá de turbina</i>	29
1.2	O escopo e a estrutura da presente investigação	31
2	ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA E O PROCESSO DE TRANSIÇÃO	35
2.1	O processo de transição laminar-turbulenta	38
2.2	Instabilidade centrífuga	39
2.2.1	<i>Escoamento de Görtler</i>	41
3	FORMULAÇÃO: EQUAÇÕES GOVERNANTES	45
3.1	Equações governantes em um sistema de coordenadas curvilíneas	45
3.2	Formulação perturbação e o escoamento base	48
3.2.1	<i>O escoamento base</i>	48
3.2.2	<i>O escoamento perturbado</i>	49
3.3	Condições de contorno	50
3.3.1	<i>Condições de contorno para o escoamento base</i>	50
3.3.2	<i>Condições de contorno para o escoamento perturbado</i>	51
4	METODOLOGIA NUMÉRICA	53
4.1	Método espectral	53
4.2	A discretização das equações	54
4.2.1	<i>Derivadas temporais</i>	55
4.2.2	<i>Derivadas espaciais</i>	55
4.2.2.1	<i>Cálculo da primeira derivada</i>	55
4.2.2.2	<i>Cálculo da segunda derivada</i>	57
4.2.2.3	<i>Cálculo da equação de Poisson</i>	58
4.3	Inserção das perturbações	58
4.3.1	<i>A inserção de perturbações não estacionárias</i>	59
4.4	Amortecimento das perturbações na entrada e relaminarização do escoamento na saída	60
4.5	O cálculo da vorticidade na parede	60

4.6	O filtro e as altas frequências	61
5	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO	63
5.1	Comparativo entre simulação numérica e teoria de estabilidade linear	64
5.2	Comparativo entre códigos de simulação numérica	67
6	RESULTADOS	73
6.1	A influência do comprimento de onda transversal sobre a evolução não linear dos vórtices de Görtler	73
6.1.1	<i>Parede côncava</i>	74
6.1.2	<i>Parede côncava-convexa</i>	76
6.1.3	<i>Parede côncava-plana</i>	78
6.1.4	<i>Parede periódica</i>	80
6.2	A evolução não linear dos vórtices de Görtler no intradorso de uma pá de turbina	83
6.2.1	<i>O efeito da curvatura nas taxas de transferência de calor</i>	86
6.2.2	<i>A influência da curvatura na instabilidade secundária</i>	92
6.2.2.1	<i>A evolução dos modos varicoso e sinuoso</i>	93
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
	REFERÊNCIAS	105

INTRODUÇÃO

O fenômeno de transição de um regime laminar para turbulento em camada limite embora tenha sido estudado há mais de um século, ainda hoje representa um dos principais problemas não resolvido em mecânica dos fluidos. A matemática apresentada em problemas envolvendo esse fenômeno é bastante complexa, e essa complexidade diminui as chances de que este processo seja algum dia completamente compreendido. No entanto, muitos pesquisadores motivados pelos inúmeros benefícios teóricos e práticos decorrentes do entendimento do fenômeno físico em questão, têm se dedicado arduamente em seus estudos e algumas de suas principais características e fases já podem ser identificadas. Tais benefícios são naturalmente justificados, pois grande parte dos escoamentos presentes em aplicações práticas são classificados como turbulentos.

Uma compreensão completa da física subjacente ao fenômeno de transição laminar-turbulenta é de grande importância, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista prático. As características de tensão de cisalhamento e transferência de calor na parede, por exemplo, podem mudar drasticamente dependendo do regime em que um determinado escoamento se encontra, sendo este laminar, transicional ou turbulento. Portanto, a previsão quantitativa e o controle deste fenômeno podem ser úteis, por exemplo, na determinação das condições operacionais e do desempenho de um escoamento ao redor de uma pá de turbina de alta velocidade em uma variedade de aplicações industriais.

Uma das principais características da transição à turbulência identificada por Reynolds no ano de 1883 é a origem de instabilidade em um escoamento inicialmente estável (denominado laminar). Essa instabilidade se multiplica através de um processo não linear, degenerando-se em um regime turbulento. De modo geral, o processo de transição é o resultado da amplificação de perturbações em um escoamento, que podem ser geradas por diferentes fontes. A transição em camada limite pode ser significativamente influenciada por estas perturbações, que consistem de flutuações acústicas (pressão), cinemática (vortical) ou entropia (temperatura), e podem existir independentemente uma da outra quando elas são de amplitude suficientemente pequena.

A seção a seguir tem por objetivo apresentar alguns dos trabalhos presentes na literatura sobre estudos relacionados a escoamentos em camada limite contendo vórtices de Görtler.

1.1 Estado da arte

A literatura direcionada à investigação dos mecanismos de instabilidade de Görtler é hoje contemplada por pesquisas de alto nível que perduram a mais de um século. Tanto os trabalhos experimentais, quanto os trabalhos realizados através de simulações numéricas diretas (DNS - do inglês *Direct Numerical Simulation*), trazem importantes resultados que possibilitam uma melhor compreensão do fenômeno de transição laminar-turbulenta ocasionado por este tipo de instabilidade. Grandes nomes no meio científico, como H. Görtler, S.W. Saric, A. M. O. Smith, A. H. Nayfeh, J. M. Floryan e P. Hall, são considerados referências fundamentais no cenário de investigação dos mecanismos de instabilidade de Görtler. Há uma ampla gama de estudos que abordam o assunto a ser investigado no presente trabalho. MacCormack, Welker e Kellerher (1970), Floryan e Saric (1983), Floryan (1985), Floryan (1986), Hall (1990), Malik e Hussaini (1990), Floryan (1991), Lee e Liu (1992), Benmalek e Saric (1994), Bottaro, Klingmann e Zebib (1996), Lin e Hwang (1999), Girgis e Liu (2002), Momayez, Dupont e Peerhossaini (2004), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2004), Souza *et al.* (2004), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2006), Liu (2008), são algumas das principais referências que hoje podem ser encontradas na literatura.

Os resultados experimentais de Swearingen e Blackwelder (1987) são bastante referenciados na validação de modelos relacionados às instabilidades primária, e secundária. Os experimentos apresentados em Ito (1980), Ito (1985) e Ito (1988) também ganham destaque na investigação da evolução não linear dos vórtices de Görtler. Trabalhos mais recentes foram realizados através dos experimentos de Tandiono, Winoto e Shah (2009a) e Tandiono, Winoto e Shah (2009b).

1.1.1 Vórtices de Görtler & transferência de calor

O estudo de transferência de calor em camada limite também se faz relevante, principalmente do ponto de vista prático, visto que é frequentemente encontrado em diversas aplicações relacionadas a processos industriais de alto desempenho, tais como planadores e aeronaves comerciais, em que grande parte da qualidade do produto final está diretamente relacionada ao controle da taxa de transferência de calor.

Os vórtices de Görtler podem causar efeitos significativos na transferência de calor. Investigações vêm sendo realizadas há décadas, de modo a avaliar a influência destes vórtices na intensificação da transferência de calor em superfícies côncavas. O interesse prático em intensificar as taxas de transferência de calor da superfície com o mínimo de penalidade implica na necessidade de reduzir o consumo de energia através de sistemas mais eficientes (LIU, 2008).

MacCormack, Welker e Kellerher (1970) foram pioneiros nesta área, demonstrando que os vórtices de Görtler aparecem nas paredes côncavas para escoamentos com Go_δ^1 no intervalo entre 16 e 240, e que a presença destes vórtices causa um aumento de 110% no número de Nusselt, ao comparar um duto curvado com um duto retangular plano. Além disso, uma análise de estabilidade linear do fenômeno em questão foi apresentada nesse trabalho.

Em Eibeck (1987), Eibeck (1986), os efeitos sobre a transferência de calor na presença dos vórtices de Görtler em uma camada limite turbulenta foram investigados experimentalmente. Esta análise apresenta uma distorção do escoamento principal causada pela camada limite turbulenta, provocando um aumento no coeficiente de atrito.

Um pouco mais tarde, Torii e Yanagihara (1989), Yanagihara e Torii (1992), Torii e Yanagihara (1997), mostraram através de seus experimentos a importância de se intensificar a transferência de calor. Esses pesquisadores investigaram os vórtices longitudinais contra-rotativos, e os corrotativos, originados por aletas, para intensificar a transferência de calor em camadas limites. De acordo com os resultados obtidos, ao se considerar o mesmo ângulo de ataque, os vórtices contra-rotativos causam um aumento mais significativo na transferência de calor do que os vórtices corrotativos.

Fiebig (1997) também buscou analisar em seus experimentos a influência dos vórtices na transferência de calor. Ele observou que os geradores de vórtices do tipo *winglet* podem causar uma grande perda no sistema, pois, apesar de poder dobrar a taxa de transferência de calor, quase que quadruplica o arrasto. O autor ainda concluiu em suas análises que os vórtices longitudinais são mais eficazes do que os transversais para a intensificação da transferência de calor.

No ano de 1999, resultados experimentais foram publicados no trabalho de Umur e Karagöz (1999). A variação transversal do número de Stanton em paredes planas e côncavas aquecidas com três diferentes gradientes de pressão favoráveis na direção principal do escoamento, considerando número Mach 0,015, foi investigada. Os resultados obtidos apresentaram um aumento de até 110% do número de Stanton, devido à presença dos vórtices de Görtler.

Investigações relacionadas a transferência de calor de um escoamento em uma parede côncava uniformemente aquecida foram apresentadas no trabalho de Toe, Ajakh e Peerhossaini (2002). Eles identificaram três zonas na direção longitudinal, com diferentes médias do número de Stanton. A primeira zona, localizada em uma região próxima ao bordo de ataque, foi caracterizada por um escoamento laminar. Na sequência foi identificada uma segunda zona, também em regime laminar, sobre a qual os vórtices de Görtler estão sobrepostos. A presença destes vórtices nesta região faz com que o número Stanton seja quase que constante. Na terceira zona do escoamento, os vórtices de Görtler tornam-se turbulentos, intensificando o aumento do número de Stanton durante esta transição.

Dois anos mais tarde, foram realizados experimentos conduzidos por Momayez, Dupont

¹ Número de Görtler baseado na espessura da camada limite.

e Peerhossaini (2004) sobre condições bem controladas em uma parede côncava aquecida, com a finalidade de compreender os efeitos da instabilidade de Görtler e sua transição para turbulência nas taxas de transferência de calor. De acordo com os resultados obtidos, em um escoamento contendo vórtices de Görtler, a taxa de transferência de calor parte de valores equivalentes aos encontrados em um escoamento laminar, e a montante, na região onde os efeitos dos vórtices já estão fortes, estes valores são ainda maiores do que os valores observados em escoamentos turbulentos. Análises dos efeitos dos vórtices de Görtler e o comprimento de onda da perturbação, mostraram que os vórtices com o comprimento de onda menor são os mais rápidos na transição para turbulência. Resultados experimentais relacionados a este mesmo assunto podem ser encontrados em (KOTTKE, 1986; CRANE, 1991).

No estudo de transferência de calor (OZALP; UMUR, 2006), a variação do número de Stanton em escoamentos sobre placas côncavas, planas e convexas foi analisada. A maior taxa de crescimento do número de Stanton foi observada na placa côncava.

O trabalho de Liu (2008) teve por principal objetivo explicar teoricamente a taxa de transferência de calor em uma superfície côncava. Os resultados obtidos neste trabalho levaram a conclusão de que pode-se aumentar consideravelmente a transferência de calor, porém tal decisão resulta em um aumento de quase um para um no arrasto.

Em um estudo mais recente conduzido por Tandiono, Winoto e Shah (2009a), foi analisado o desenvolvimento da tensão de cisalhamento na parede em uma camada limite de uma superfície côncava contendo vórtices de Görtler. Com os resultados obtidos neste experimento os autores concluíram que o coeficiente de tensão de cisalhamento médio na direção transversal (cf), que inicialmente corresponde a curva de Blasius, tem um aumento significativo superando o valor obtido em uma camada limite turbulenta. Isso é justificado pelos efeitos não lineares da instabilidade de Görtler e a existência de instabilidade secundária.

Malatesta, Souza e Liu (2013) utilizaram simulação numérica espacial considerando uma camada limite sobre uma superfície côncava, para investigar a influência do comprimento de onda dos vórtices de Görtler no aumento da transferência de calor sem a presença de instabilidade secundária. Um pouco mais tarde, os resultados apresentados no trabalho de Malatesta, Rogenski e Souza (2017) comprovaram que a técnica de simulação numérica adotada nesse estudo pode ser uma alternativa bastante eficaz para investigar as propriedades de transferência de calor em escoamentos transicionais sobre superfícies côncavas. O uso de aproximações de diferenças finitas de alta ordem mostrou ser uma alternativa confiável para reduzir o número de pontos em uma discretização, e preservar a resolução da malha na região de camada limite.

O trabalho de Lyes *et al.* (2014) apresenta um estudo da intensificação da taxa de transferência de calor na presença dos vórtices de Görtler usando uma análise fracamente não linear. Em um estudo mais recente, Malatesta *et al.* (2015) utilizaram simulação numérica direta espacial considerando os mesmos parâmetros físicos adotados nos trabalhos de Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2004), Mitsudharmadi, Winoto e Shah (2005), para mostrar que o modo varicoso

é a instabilidade secundária dominante para o número de onda transversal estudado. Além disso, puderam concluir em suas análises que a taxa de transferência de calor do escoamento transicional investigado pode atingir valores ainda mais altos do que a taxa de transferência de calor apresentada em um escoamento turbulento.

1.1.2 Transição laminar-turbulenta & pá de turbina

Embora inúmeras turbinas a gás tenham sido utilizadas em todo o mundo há mais de meio século, o escoamento em pás de turbina ainda não está completamente compreendido. Em uma primeira aproximação, a transferência de calor depende do regime da camada limite. Seu cálculo é um dos principais objetivos de um designer de turbina, e deve ser preciso para atingir motores com altos valores de eficiência. Atualmente é possível calcular camada limite laminar ou turbulenta com boa precisão (exceto em casos particulares, como a separação da camada limite). No entanto, o estudo do fenômeno de transição laminar-turbulenta ainda apresenta muitas limitações. Todos os métodos de cálculo utilizados no estudo deste fenômeno fazem uso de modelos ou correlações que foram deduzidos a partir de experimentos. Nesses experimentos, os critérios que definem o início e o término da transição geralmente são dados de diferentes maneiras, o que pode acarretar na dispersão dos resultados. Um segundo motivo está relacionado aos muitos fatores que influenciam no processo de transição, por exemplo, gradientes de pressão, número de Reynolds, curvatura, nível e escala de turbulência e rugosidade, que às vezes agem juntos, dificultando a identificação dos efeitos governantes (BARIO; BERAL, 1998).

A literatura traz hoje muitos artigos que abordam estudos relacionados às pás de turbina, todavia, grande parte destes trabalhos apresentam medidas globais e apenas alguns fornecem medidas detalhadas úteis para turbulência ou modelagem de transferência de calor. Isso está relacionado ao fato de que é muito difícil obter camadas limite suficientemente espessas para medidas detalhadas tanto do lado de sucção, quanto do lado de pressão de uma pá de turbina. Os resultados mais detalhados geralmente são obtidos considerando uma placa plana, com um gradiente de pressão imposto pela parede externa (BLAIR, 1982; KELLER; WANG, 1994), ou com gradiente de pressão negativo (KESTORAS; SIMON, 1993), ou ainda, considerando superfícies côncavas para estudos relacionados aos vórtices de Görtler (PEERHOSSAINI; WESFREID, 1988).

A Figura 1 apresenta o coeficiente de transferência de calor em ambos os lados de uma pá de turbina (NARASIMHA, 1985), com diferentes níveis de turbulência, baseado no estudo de Turner (1971). Observe que existem extensas regiões de gradiente de pressão favorável em ambas as superfícies. A maior taxa de transferência de calor que ocorre na superfície convexa é sensivelmente maior do que seria esperado para um escoamento turbulento no bordo de ataque.

A literatura direcionada aos estudos de escoamentos transicionais em turbinas a gás não é hoje tão abrangente. A seguir será apresentada uma breve revisão bibliográfica de alguns dos principais trabalhos experimentais e computacionais relacionados à investigação da influência

Figura 1 – Taxa de transferência de calor em uma pá de turbina baseada nos estudos de [Turner \(1971\)](#). A distribuição de velocidade em ambos os lados da pá é apresentada na imagem superior. Logo abaixo o coeficiente de transferência de calor local é apresentado para diferentes níveis de turbulência

Fonte: [Narasimha \(1985\)](#).

do fenômeno de transição laminar-turbulenta em escoamentos sobre pás de turbina, realizados até o momento.

[Wang et al. \(1997\)](#) utilizaram múltiplos fios de fumaça e uma lâmina de luz a laser para investigar o escoamento secundário em uma pá de turbina de alto desempenho. Através deste experimento puderam observar vórtices do tipo ferradura próximo ao bordo de ataque da pá.

Dois anos mais tarde, [Wang, Olson e Goldstein \(1998\)](#) investigaram a influência da turbulência de alto nível em escoamento livre com grande escala de comprimento na transferência de calor de uma pá de turbina altamente acelerada. Neste trabalho os autores consideraram o número de Reynolds variando de $2,4 \times 10^5$ a $7,8 \times 10^5$. Os resultados mostraram que na superfície de sucção da pá, a taxa de transferência de calor aumenta significativamente devido a uma transição da camada limite inicial.

Em um trabalho um pouco mais recente, [Wang, Olson e Goldstein \(2005\)](#) observaram vórtices de Taylor-Görtler na superfície de pressão de uma pá de turbina utilizando sublimação de naftaleno. O estudo experimental ([RHEE; CHO, 2008](#)) foi realizado para investigar o efeito da posição relativa de uma pá estacionária na transferência de calor e de massa. Os coeficientes de transferência de calor e de massa foram obtidos utilizando um método de sublimação de naf-

taleno. Para esta análise foram consideradas seis posições diferentes da pá. As características de transferência de calor e de massa na superfície da pá são fortemente afetadas pelas características do escoamento local.

Saindo de um contexto de trabalhos experimentais, [Wissink e Hodson \(2006\)](#) utilizaram uma discretização de segunda ordem de precisão com volumes finitos e um código DNS para estudar um escoamento sobre uma pá de turbina. Através dos resultados foi possível concluir que o código utilizado não foi capaz de capturar os vórtices de Görtler.

[Papa, Goldstein e Gori \(2007\)](#) apresentam resultados experimentais com resultados obtidos a partir de um estudo numérico utilizando um pacote comercial, onde os efeitos turbulentos foram considerados através de modelagem do tipo RANS (do inglês *Reynolds Avarage Navier-Stokes equations*). Neste trabalho, os vórtices de Görtler observados no estudo experimental não foram capturados na investigação numérica.

Em 2009, [Zaki, Wissink e Redi \(2009\)](#) realizaram um estudo de simulação numérica direta tridimensional em ambos os lados de uma pá de turbina de baixa pressão. Do lado da pressão, observou-se que a camada limite permaneceu achatada. Inicialmente, as perturbações desencadearam estruturas longitudinais que se tornaram instáveis, e conseqüentemente não houve separação da camada limite. No mesmo ano, [Sethuraman e Acharya \(2009\)](#) ao estudarem experimentalmente a transferência de calor e massa em um escoamento sobre uma pá de turbina à gás, observaram indícios de que existe uma curvatura ótima da parede de um canal para a qual a transferência de calor é mais alta.

Em um contexto numérico, o trabalho ([XUN; WANG; YEE, 2011](#)) foi desenvolvido utilizando a técnica LES (do inglês *Large Eddy simulation*) para analisar a convecção realizada pelo calor em pás de turbina. As simulações não foram capazes de capturar os vórtices de Görtler. Tal fator foi justificado pelo fato de que esses vórtices não são não estacionários.

Em um trabalho um pouco mais recente conduzido por [Gostelow et al. \(2012\)](#), foi utilizado um túnel de vento com capacidade de estudar escoamentos transônicos para observar a formação de vórtices de Görtler e a transição à turbulência através de instabilidade secundária do tipo varicosa, onde são formados vórtices do tipo ferradura.

1.2 O escopo e a estrutura da presente investigação

Em mecânica dos fluidos há muitos problemas em aberto relacionados ao processo de transição laminar-turbulenta. É consideravelmente grande o número de aplicações científicas e industriais nas quais a estabilidade do escoamento e o fenômeno de transição se fazem relevantes. Muitos destes problemas são tratados utilizando Simulação Numérica Direta.

Neste sentido, o presente trabalho, intitulado “Simulação numérica de um escoamento transicional sobre uma superfície côncava de curvatura variável com transferência de calor”,

tem por principal objetivo estudar o processo de transição laminar-turbulenta de um escoamento sobre uma superfície côncava de curvatura variável. Pretende-se estudar a física do problema não somente na geração e desenvolvimento dos vórtices de Görtler, mas também o fenômeno de transferência de calor associado a esses vórtices. Espera-se que essa investigação seja capaz de analisar a influência da curvatura na formação dos vórtices longitudinais contra-rotativos e, posteriormente, a influência desse parâmetro na transferência de calor. Os resultados obtidos são comparados a outros resultados numéricos para a verificação do código. Análise dessa natureza ainda não foi documentada em revistas especializadas, caracterizando a pesquisa como original. Não se conhece estudo através de simulação numérica destes fenômenos físicos. Portanto, tem-se como meta a publicação dos resultados obtidos em revistas especializadas com alto fator de impacto.

Para expor a proposta deste trabalho esta monografia encontra-se estruturada da maneira descrita abaixo.

Capítulo 2 [*Estabilidade hidrodinâmica e o processo de transição*]: apresenta aspectos teóricos relevantes aos estudos direcionados ao fenômeno de transição laminar-turbulenta, dando ênfase na teoria de instabilidade centrífuga.

Capítulo 3 [*Formulação: Equações Governantes*]: descreve a formulação matemática utilizada para modelar o estudo do fenômeno de instabilidade de escoamentos em camada limite sobre uma superfície côncava de curvatura variável. Essa descrição engloba as equações de conservação de momento linear, a equação da continuidade e a equação da energia, considerando a formulação vorticidade-velocidade.

Capítulo 4 [*Metodologia Numérica*]: abrange os métodos numéricos utilizados para a solução numérica da formulação descrita no capítulo anterior. Essa metodologia é composta basicamente de um integrador temporal do tipo Runge-Kutta, de um método de diferenças finitas compactas de alta ordem de precisão nas direções x e y , e de um método espectral na direção z . Além disso, há também um método multi-malha com a formulação FAS (do inglês *Full Approximation Scheme*).

Capítulo 5 [*Verificação e Validação*]: traz uma breve revisão bibliográfica do processo de verificação e validação de um código numérico, e apresenta uma comparação dos resultados obtidos nesta pesquisa, com resultados numéricos e experimentais presentes na literatura, cuja finalidade é validar o código de simulação numérica aqui utilizado.

Capítulo 6 [*Resultados*]: Inicialmente apresenta resultados de simulações numéricas não lineares de um escoamento sobre uma superfície côncava de curvatura variável. Na sequência, a instabilidade de Görtler é investigada ao se considerar o lado de pressão de uma pá de turbina, com a finalidade de investigar a influência da curvatura presente nesta geometria sobre a taxa de transferência de calor. Por fim, traz resultados relacionados ao desenvolvimento da estabilidade secundária decorrente da amplificação dos modos varicoso e sinuoso.

Capítulo 7 [*Considerações finais*]: Sumariza as conclusões extraídas das discussões apresentadas no **Capítulo 6**, e expõe algumas sugestões para trabalhos futuros.

ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA E O PROCESSO DE TRANSIÇÃO

A teoria clássica da instabilidade de escoamentos tem sido de fundamental importância em mecânica dos fluidos por mais de um século. Os primeiros estudos relacionados a este tema foram realizados pelo físico Osborne Reynolds e, pelo físico e matemático Lord Rayleigh, no final do século XIX. No ano de 1883, Osborne Reynolds (1842 – 1912) publicou o clássico experimento do escoamento em tubos de vidro. Nesse experimento Reynolds provou que um parâmetro adimensional, posteriormente identificado como número de Reynolds, poderia definir a importância da relação entre forças inerciais e forças viscosas no escoamento. Em outras palavras, a partir desse experimento foi possível definir um limitante entre um escoamento laminar e um escoamento turbulento para um canal fechado.

Figura 2 – Ilustração do experimento de Reynolds

Fonte: Adaptada de [Reynolds \(1983\)](#).

A [Figura 2](#) ilustra o experimento realizado por Reynolds, onde é possível observar um

escoamento em regime laminar (Figura 2a), um escoamento em regime turbulento (Figura 2b), e uma foto com iluminação estroboscópica do escoamento turbulento que permite a visualização das estruturas da turbulência (Figura 2c). O número de Reynolds, interpretado como a razão entre os efeitos advectivos (efeitos altamente não lineares que amplificam as perturbações) e os efeitos difusivos (efeitos que tendem a amortecer as instabilidades), tem sido amplamente aplicado como um parâmetro de medida da sensibilidade de um escoamento a perturbações.

Assim como Reynolds, o físico Lord Rayleigh deixou grandes contribuições para a investigação da instabilidade em escoamentos paralelos de fluidos não viscosos. Em 1880, ao estudar a equação não viscosa para escoamento em um canal, Rayleigh demonstrou um teorema que define como condição necessária à instabilidade em um escoamento paralelo, a existência de um ponto de inflexão no seu perfil de velocidade. Além disso, foi Rayleigh o primeiro pesquisador a definir um critério de instabilidade considerando a influência de forças de curvatura. A relevância do critério de circulação de Rayleigh foi marcada pelos estudos de Taylor (1923), Dean (1928), e Görtler (1940).

No ano de 1923, Geoffrey Ingram Taylor realizou investigações teóricas e experimentais relacionadas ao comportamento de escoamentos entre cilindros concêntricos rotativos. Seus estudos comprovaram que as instabilidades geradas por efeitos centrífugos transicionavam o escoamento para um novo regime laminar, cuja principal característica é o movimento secundário transversal ao escoamento em regime inicial (TAYLOR, 1923). As estruturas vorticais observadas nesse escoamento apresentam-se na forma toroidal contra-rotativa, conforme pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Ilustração dos vórtices de Taylor

Fonte: Schlichting (1979).

Dando continuidade às investigações relacionadas à teoria sobre instabilidade com a presença de forças de curvatura, em 1928, William Dean estudou o escoamento em um duto curvo, e demonstrou a existência de vórtices contra-rotativos (DEAN, 1928).

No ano de 1940, Görtler investigou teoricamente uma camada limite sobre superfícies côncavas. Em suas investigações, Görtler mostrou que esse tipo de escoamento pode levar a uma instabilidade que culminava no aparecimento de vórtices longitudinais, contra-rotativos,

conhecidos na literatura como vórtices de Görtler. A [Figura 4](#) traz uma representação para este tipo de vórtice.

Figura 4 – Ilustração dos vórtices de Görtler

Fonte: [Görtler \(1940\)](#).

O processo de transição para turbulência está diretamente ligado à estabilidade hidrodinâmica. A existência de uma perturbação crescente implica que o escoamento é instável, enquanto a ausência de quaisquer perturbações crescentes pode definir um escoamento como sendo estável. No entanto, o escoamento instável não conduz necessariamente à transição para a turbulência, pois podem existir novos regimes complexos antes do escoamento se tornar turbulento. Neste sentido, a estabilidade hidrodinâmica desempenha papel determinante nos processos relacionados ao transporte de fluidos.

O conceito de estabilidade de um regime de um sistema físico ou matemático foi inicialmente compreendido no século XVIII. Seus principais problemas foram reconhecidos no século XIX por Helmholtz, Kelvin, Rayleigh e Reynolds. A origem desses problemas está relacionada a classificação de padrões de escoamentos estáveis, neutros e instáveis. De acordo com [Kundu e Cohen \(2002\)](#), é possível observar os padrões de estabilidade através de um exemplo prático, no qual uma esfera é colocada sobre uma superfície lisa. Conforme ilustrado na [Figura 5](#), a esfera tanto pode se deslocar da posição original e retornar à mesma, como se afastar ainda mais, ou ser indiferente à mudança de posição. Nesta figura encontram-se ilustrados os possíveis regimes de operação para o exemplo considerado anteriormente, onde os itens (a), (b), (c) e (d) referem-se respectivamente a um sistema:

- (a) incondicionalmente estável - retorna ao equilíbrio independente da amplitude da perturbação;
- (b) instável - por menor que seja a amplitude da perturbação, ele se torna instável, sem retorno à posição inicial;
- (c) condicionalmente estável - dependendo da amplitude da perturbação, poderá ou não retornar à posição inicial;
- (d) neutralmente estável - sempre encontrará uma nova posição de equilíbrio.

Figura 5 – Padrões de estabilidade de sistemas mecânicos

Fonte: Adaptada de [Kundu e Cohen \(2002\)](#).

Como já mencionado neste capítulo, a teoria de estabilidade hidrodinâmica tem por principal objetivo estudar o comportamento de perturbações em um escoamento, ou seja, investigar se essas perturbações são amplificadas ou amortecidas. Além disso, busca-se a partir dessa teoria uma relação entre a evolução dessas perturbações e o fenômeno de transição para o escoamento turbulento.

2.1 O processo de transição laminar-turbulenta

Sendo um processo bastante complexo, a transição não acontece de forma repentina. A transição para a turbulência em camada limite pode ocorrer através de uma série de caminhos. A direção pela qual este processo será realizado fisicamente depende de condições iniciais, tais como a amplitude da perturbação e a rugosidade da superfície. De acordo com [Saric, Reed e Kerschen \(2002\)](#) o processo de transição laminar turbulenta para camadas limite em escoamentos externos pode ser descrito de forma qualitativa através da [Figura 6](#), em que:

- (a) Receptividade: estágio inicial do processo de transição natural, o qual consiste na transformação de perturbações, tanto acústicas (som) quanto vorticais (turbulência), em pequenas perturbações dentro da camada limite;
- (b) Crescimento do modo primário: nesse estágio as perturbações iniciais crescem (ou decrescem) de uma maneira descrita pela teoria da estabilidade linear. As instabilidades dependem da geometria do problema, e também da amplitude das perturbações iniciais. Os vórtices de Görtler e as ondas de Tollmien-Schlichting são dois importantes tipos de perturbações que se enquadram neste tipo de instabilidade;

- (c) Instabilidades secundárias: à medida que os modos primários crescem e distorcem o escoamento médio, eles começam a exibir não-linearidades e a teoria linear não se aplica mais. A presença dos efeitos não lineares se faz significativa e torna a região de instabilidade secundária dependente de propriedades do escoamento base e, da interação entre perturbações de diferentes naturezas.

Figura 6 – O caminho da receptividade para a transição laminar-turbulenta

Fonte: Adaptada de [Markovin \(1994\)](#).

2.2 Instabilidade centrífuga

Na teoria de análise de estabilidade hidrodinâmica há três classificações distintas para os escoamentos nos quais os efeitos centrífugos se fazem relevantes - escoamento de Couette, escoamento de Poiseuille circular, e camada limite sobre superfícies curvas, em que ([DRAZIN; REID, 1981](#)):

- (a) o escoamento de Couette é um escoamento onde o desenvolvimento do fluido ocorre em um sistema fechado entre dois cilindros rotativos concêntricos, resultando em um escoamento paralelo;
- (b) o escoamento de Poiseuille circular é caracterizado pela força do gradiente de pressão ao redor do canal, resultando em um escoamento também paralelo, desenvolvido em um sistema aberto;

- (c) o escoamento em camada limite sobre superfícies curvas, também conhecido como escoamento de Görtler, refere-se a um escoamento não paralelo em um sistema aberto, onde os efeitos da viscosidade são significativos na camada de fluido muito próxima a parede.

É possível observar que os escoamentos descritos anteriormente são bastante semelhantes. No entanto, as características que definem a instabilidade dos mesmos pode mudar significativamente dependendo do sistema ser aberto ou fechado, paralelo ou não paralelo. O escoamento resultante em cada um deles é caracterizado pelo desenvolvimento de vórtices contra-rotativos, definidos na literatura como vórtices de Taylor, vórtices de Dean, e vórtices de Görtler, respectivamente.

Figura 7 – Escoamentos com efeitos centrífugos relevantes

Fonte: Elaborada pelo autor.

A origem da instabilidade centrífuga está diretamente relacionada ao desequilíbrio entre o gradiente de pressão na direção normal às linhas de corrente, e a força centrífuga que age sobre uma partícula do fluido (LI; MALIK, 1995). Os primeiros estudos sobre o mecanismo não viscoso deste tipo de instabilidade foram realizados por Rayleigh no ano de 1917. Considerando uma geometria circular definida por (r, θ, z) , com um vetor velocidade $V = (u, v, w)$, em que $u = 0$, $v = v(r)$ e $w = 0$ representam os componentes de velocidade nas direções radial, tangencial

e axial, Rayleigh determinou uma condição necessária e suficiente para a existência de uma instabilidade não viscosa e axissimétrica. Essa condição é dada por

$$\frac{\partial(\Gamma)^2}{\partial r} < 0,$$

em qualquer parte do escoamento, em que Γ representa a circulação definida como $\Gamma = rv$.

Clauser e Clauser (1937) foi a primeira publicação científica que apresentou a relevância dos efeitos de curvatura na transição em camada limite. Este estudo traz uma análise de dados experimentais dos efeitos de curvatura côncava e convexa na transição laminar-turbulenta. Através desta análise foi comprovado que escoamentos sobre superfícies côncavas são mais instáveis do que escoamentos sobre superfícies convexas.

O caso considerado no presente estudo é uma camada limite sobre uma superfície côncava com variação no raio de curvatura. Neste sentido, a análise de instabilidade centrífuga abordada neste trabalho será direcionada para escoamentos desta natureza.

2.2.1 Escoamento de Görtler

No ano de 1940, baseado em uma análise teórica, Görtler mostrou a existência de instabilidade centrífuga sobre superfícies côncavas assumindo o escoamento como sendo uma sobreposição entre um escoamento médio paralelo à parede e pares de vórtices contra-rotativos providos de perturbações infinitesimais (GÖRTLER, 1940). Substituindo essas simplificações nas equações de Navier–Stokes, Görtler deduziu o seguinte sistema acoplado de duas equações para componente velocidade

$$\begin{aligned} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\alpha_i + v\beta^2) u &= v \frac{\partial u_b}{\partial y}, \\ v \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - (\alpha_i + 2v\beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta^2 (\alpha_i + v\beta^2) v &= -\frac{2\beta^2 u_b}{R} u, \end{aligned}$$

em que u e v são componentes de perturbação de velocidade das direções longitudinal (eixo- x) e normal à parede (eixo- y), respectivamente. A velocidade média na direção longitudinal é denotada por u_b , v representa a viscosidade cinemática, β é o número de onda na direção transversal, α_i é a taxa de amplificação da perturbação, e R é o raio de curvatura da parede. Ao resolver este sistema Görtler definiu os diagramas de estabilidade para escoamentos sobre placas côncavas, ilustrados na Figura 8.

O gráfico ilustrado na Figura 8a apresenta relações entre o número de Görtler (Go), e o número de onda na direção transversal (β). Variando Go e β em função da espessura da camada limite, é possível observar que uma perturbação intercepta um conjunto de curvas com taxas de amplificação distintas. Os dois adimensionais definidos por Görtler em suas investigações são dados respectivamente por:

$$Go = \frac{U_\infty^* \delta^*}{v^*} \sqrt{\frac{\delta^*}{R^*}}, \text{ onde } \delta^* = \sqrt{\frac{v^* x^*}{U_\infty^*}},$$

e

$$\Lambda = \frac{U_{\infty}^* \lambda_z^*}{v^*} \sqrt{\frac{\lambda_z^*}{R^*}},$$

em que Λ é um número adimensional que denota um comprimento de onda característico, U_{∞}^* é a velocidade do escoamento fora da camada limite, δ^* é proporcional a espessura da camada limite, R^* é o raio de curvatura da placa, x^* uma distância do bordo de ataque da placa côncava e, λ_z^* um comprimento de onda na direção transversal ao escoamento. O diagrama de estabilidade ilustrado na [Figura 8b](#) explicita valores para Go em função de Λ . Os vórtices com maior taxa de amplificação são os que apresentam um comprimento de onda característico (Λ) no intervalo entre 200 e 270 ([BOTTARO; KLINGMANN; ZEBIB, 1996](#); [MITSUDHARMADI; WINOTO; SHAH, 2006](#)). Nesses diagramas é possível observar que as taxas de amplificação positivas

Figura 8 – Diagramas de estabilidade para escoamentos sobre placa côncava definidos por [Görtler \(1940\)](#)

Fonte: Adaptada de [Saric \(1994\)](#).

são definidas como instáveis, e as taxas negativas como estáveis. Além disso, a curva em que a taxa de amplificação é nula, definida na literatura como curva neutra, limita a região entre a amplificação e o amortecimento de vórtices.

O mecanismo de instabilidade não viscoso apresentado por Rayleigh resulta no desenvolvimento de um escoamento médio. Nesse escoamento são gerados vórtices longitudinais contra-rotativos, cujo desenvolvimento acontece na direção do escoamento. Como pode ser observado na [Figura 9](#), esses vórtices causam um efeito distorcivo na distribuição do componente de velocidade na direção longitudinal, o que modifica o perfil de velocidade do escoamento médio. Inicialmente os vórtices de Görtler se amplificam de forma linear. Após um dado tempo, essa amplitude aumenta de modo que a região de desenvolvimento desses vórtices torna-se não

Figura 9 – Distribuição do componente principal de velocidade na direção do escoamento

Fonte: Souza (2003).

linear. Nesse estágio do processo de transição, a distribuição de velocidade na direção principal do escoamento toma forma de uma estrutura do tipo cogumelo, como pode ser observado na Figura 9. Nesta figura, o escoamento desloca-se da esquerda para direita, e cada linha na direção longitudinal representa um nível de velocidade, que varia de 0,1, que seria uma região mais próxima à parede, a 0,9, sendo esta uma localização mais distante da parede. Observe que a estrutura do escoamento é modificada a medida que os vórtices vão se desenvolvendo. Essa

Figura 10 – Ilustração das regiões descendente e ascendente, geradas a partir dos efeitos dos vórtices de Görtler

Fonte: Adaptada de Souza *et al.* (2004).

distorção ocorre através da formação de duas regiões distintas. Em um dos casos, o fluido com baixa quantidade de movimento é bombeado para longe da parede, dando origem a uma região ascendente, muitas vezes citada na literatura como região de *upwash*. Por outro lado, fluido com alta quantidade de movimento é bombeado na direção da parede, resultando no achatamento da camada limite. Esse processo é responsável pela formação da região descendente, também conhecida como região de *downwash*. Essa análise, originalmente apresentada por Floryan (1991), encontra-se ilustrada na Figura 10.

FORMULAÇÃO: EQUAÇÕES GOVERNANTES

Este capítulo tem por finalidade apresentar a formulação matemática utilizada para modelar o estudo do fenômeno de instabilidade de escoamentos na camada limite sobre superfícies curvas de raio variável.

Para o estudo do movimento de fluidos adota-se o modelo governado pelas equações de Navier-Stokes considerando fluido incompressível, com viscosidade constante. Inicialmente são apresentadas as equações governantes utilizando variáveis primitivas. Na sequência, as equações de conservação de momento linear, a equação da continuidade, e a equação da energia são apresentadas na formulação vorticidade-velocidade.

A forma adimensional das equações governantes apresentadas no decorrer deste capítulo foi utilizada para apresentar os resultados obtidos no presente trabalho. Neste contexto, todos os dados específicos dos escoamentos estão relacionados aos parâmetros adimensionais conhecidos na literatura como número de Reynolds, número de Görtler, e o número de Prandtl, definidos respectivamente como:

$$Re = \frac{U_{\infty}^* L^*}{\nu^*}, \quad Go = Re^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{L^*}{R^*}}, \quad e \quad Pr = \frac{\nu^*}{\sigma^*},$$

em que os parâmetros L^* e σ^* representam, respectivamente, um comprimento de referência, tomado no presente estudo como uma distância do bordo de ataque, e a difusividade térmica.

3.1 Equações governantes em um sistema de coordenadas curvilíneas

O sistema de coordenadas curvilíneas adotado no presente estudo pode ser visto com maiores detalhes em (FLORYAN, 1982). Através deste sistema de coordenadas é possível caracterizar os efeitos relevantes de raio de curvatura (FLORYAN, 1991; SOUZA, 2003).

Figura 11 – Domínio computacional representado por um sistema de coordenadas curvilíneas

Fonte: Adaptada de Souza (2003).

A Figura 11 representa o domínio computacional considerado neste trabalho para o estudo do fenômeno de instabilidade em um escoamento em camada limite sobre uma superfície côncava, com variação no raio de curvatura. Nessa representação, o bordo de ataque da placa côncava de raio R^* é definido como a origem do eixo coordenado x . A variável y define a direção normal à placa, com $y = 0$ em toda superfície do contorno rígido. A direção transversal, definida de forma perpendicular à direção normal, está relacionada a variável z . Os componentes do vetor velocidade $\tilde{\mathbf{v}}$ nas direções x , y e z são denotados respectivamente pelas variáveis $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$. O vetor vorticidade $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ é definido em termos do rotacional do vetor velocidade $\tilde{\mathbf{v}}$, isto é,

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\nabla \times \tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.1)$$

cujos componentes nas direções x , y e z , são denotados respectivamente por $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$ e $\tilde{\omega}_z$.

Através de um sofisticado algebrismo apresentado por Floryan (1982), em que os termos de curvatura de ordem elevada são descartados, obtém-se o sistema de equações diferenciais composto pelas equações de Navier-Stokes e pela equação da continuidade para o sistema de coordenadas curvilíneas. O sistema de equações referido anteriormente, já na forma adimensional, é dado por:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{u}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \tilde{u}^2 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{v}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{w}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (3.5)$$

em que $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

A adimensionalização do sistema definido pelas equações (3.2) - (3.5) está relacionada com as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L^*}, y = \frac{y^*}{L^*}, z = \frac{z^*}{L^*}, t = \frac{U_\infty^* t^*}{L^*}, \\ \tilde{u} &= \frac{\tilde{u}^*}{U_\infty^*}, \tilde{v} = \frac{\tilde{v}^*}{U_\infty^*}, \tilde{w} = \frac{\tilde{w}^*}{U_\infty^*}, \\ \tilde{\omega}_x &= \frac{\tilde{\omega}_x^* L^*}{U_\infty^*}, \tilde{\omega}_y = \frac{\tilde{\omega}_y^* L^*}{U_\infty^*}, \tilde{\omega}_z = \frac{\tilde{\omega}_z^* L^*}{U_\infty^*}, \end{aligned}$$

onde t denota o tempo, e a notação sobrescrita $*$ representa quantidades dimensionais.

Utilizando a definição dada pela equação (3.1), obtém-se os componentes de vorticidade nas direções x , y , e z , definidos por:

$$\tilde{\omega}_x = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\omega}_y = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\omega}_z = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}. \quad (3.8)$$

De acordo com o estudo proposto por Souza (2003), considerando o rotacional da equação de quantidade de movimento na forma vetorial, utilizando a equação da continuidade (3.5), e aplicando os componentes do vetor vorticidade definidos pelas equações (3.6) - (3.8), é possível determinar o sistema de equações de Navier-Stokes reescrito na formulação vorticidade-velocidade. Neste contexto, as equações de transporte dos componentes de vorticidade nas três direções, x , y , e z , são dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{d}}{\partial z} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\omega}_x, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\omega}_y, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Go^2 \tilde{d}}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\omega}_z, \quad (3.11)$$

em que $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, e $\tilde{d}$ são produtos não lineares, definidos por:

$$\tilde{a} = \tilde{\omega}_x \tilde{v} - \tilde{\omega}_y \tilde{u},$$

$$\tilde{b} = \tilde{\omega}_z \tilde{u} - \tilde{\omega}_x \tilde{w},$$

$$\tilde{c} = \tilde{\omega}_y \tilde{w} - \tilde{\omega}_z \tilde{v},$$

$$\tilde{d} = \tilde{u}^2.$$

Usando de algumas manipulações algébricas, [Souza \(2003\)](#) deduz as equações de Poisson para os componentes do vetor velocidade $\tilde{\mathbf{v}}$. As equações elípticas referidas anteriormente são:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial z}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} = \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z}. \quad (3.14)$$

Para as investigações relacionadas a transferência de calor considera-se a equação de transporte de temperatura

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u} \tilde{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w} \tilde{\theta}}{\partial z} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \tilde{\theta}, \quad (3.15)$$

em que $\tilde{\theta}$ representa a temperatura adimensional definida como:

$$\tilde{\theta} = \frac{T^* - T_0^*}{T_\infty^* - T_0^*},$$

onde T^* é a temperatura, T_0^* e T_∞^* são os valores da temperatura na parede, e fora da camada limite, respectivamente.

3.2 Formulação perturbação e o escoamento base

Para a investigação do processo de instabilidade hidrodinâmica são introduzidas perturbações no escoamento através de sucção e injeção de massa, especificamente na região localizada entre x_1 e x_2 , cuja representação pode ser vista na [Figura 11](#). No presente estudo as perturbações de velocidade são pequenas se comparadas com a velocidade total. Deste modo, uma formulação caracterizada pela decomposição de variáveis dependentes em um componente base e uma pequena perturbação é adotada.

Considera-se uma função genérica $\tilde{\rho}$ tal que $\tilde{\rho} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \tilde{\theta})$ corresponde aos valores totais das grandezas relacionadas à velocidade, vorticidade e temperatura. As variáveis dependentes são decompostas da seguinte maneira:

$$\tilde{\rho} = \rho_b + \rho, \quad (3.16)$$

em que ρ_b denota a parcela base do escoamento (escoamento base) e ρ a perturbação.

3.2.1 O escoamento base

Considerando a hipótese de que o escoamento base é invariante na direção transversal, resulta que somente as velocidades u_b e v_b , a vorticidade ω_{z_b} , e a temperatura θ_b devem ser

consideradas nas equações que modelam este escoamento. Em outras palavras isso significa que o escoamento base deve ser uma camada limite bidimensional, cuja ilustração encontra-se na Figura 12.

Figura 12 – Ilustração de uma camada limite bidimensional

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na presente investigação o escoamento base é representado pelo sistema de equações composto pela equação de transporte de vorticidade

$$\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial t} + \frac{\partial u_b \omega_{zb}}{\partial x} + \frac{\partial v_b \omega_{zb}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_{zb}}{\partial y^2} \right), \quad (3.17)$$

pela equação de Poisson para o componente velocidade v_b

$$\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x}, \quad (3.18)$$

pela equação de conservação de massa

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v_b}{\partial x \partial y}, \quad (3.19)$$

e pela equação de transporte de temperatura

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u \theta}{\partial x} + \frac{\partial v \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta. \quad (3.20)$$

3.2.2 O escoamento perturbado

De acordo com Souza (2003), substituindo a definição dada na equação (3.16) no sistema definido pelas equações (3.9) - (3.14), e (3.15), e subtraindo as equações que dão origem ao escoamento base (Eqs. (3.17) - (3.20)), obtém-se a formulação perturbação.

O sistema de equações de transporte de vorticidade nas três direções

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial d}{\partial z} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_x, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_y, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Go^2 d}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z, \quad (3.23)$$

as equações de Poisson para os componentes de velocidade

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad (3.26)$$

a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.27)$$

e a equação de transporte de temperatura

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta, \quad (3.28)$$

onde a, b, c, d, e, f , e g são termos não lineares, definidos por:

$$a = \omega_x(v_b + v) - \omega_y(u_b + u),$$

$$b = \omega_{z_b} u + \omega_z(u_b + u) - \omega_x w,$$

$$c = \omega_y w - \omega_{z_b} v - \omega_z(v_b + v),$$

$$d = 2u_b u + u^2,$$

$$e = u_b \theta + u \theta_b + u \theta,$$

$$f = v_b \theta + v \theta_b + v \theta,$$

$$g = w(\theta_b + \theta),$$

definem o escoamento perturbado.

3.3 Condições de contorno

As condições de contorno encontram-se descritas em duas partes. As condições de contorno adotadas para a solução do escoamento base são apresentadas seguida das condições de contorno para o escoamento perturbado.

3.3.1 Condições de contorno para o escoamento base

As condições de contorno impostas para o cálculo do escoamento base são adotadas de acordo com [KLOKER, KONZELMANN e FASEL \(1993\)](#), em que:

- (i) No contorno de entrada ($x = x_0$) adota-se o perfil de Blasius. Portanto, os valores dos componentes de velocidade u e v , e do componente de vorticidade ω_z são fixos, ou seja

$$v_b = v_{Bl}, u_b = u_{Bl}, \omega_{zb} = \omega_{zBl}, \text{ e } \theta_b = \theta_{Bl},$$

em que u_{Bl} , v_{Bl} , ω_{zBl} e θ_{Bl} denotam o perfil gerado pela equação de Blasius ([SCHLICHTING, 1979](#)).

- (ii) No contorno rígido ($y = 0$) as condições de não deslizamento e de impermeabilidade são consideradas de modo que $u_b = v_b = 0$. Para o cálculo da vorticidade ω_{zb} na parede, impõe-se a seguinte condição:

$$\frac{\partial \omega_{zb}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v_b}{\partial y^2}.$$

Na parede considera-se que $\theta_b = 0$.

- (iii) No contorno superior ($y = y_{max}$) o escoamento potencial é considerado como irrotacional. Assim, $\omega_{zb} = 0$. A velocidade u_b é fixa sendo $u_b = u_{Bl}$, em que u_{Bl} denota a velocidade do escoamento potencial gerado pela solução da equação de Blasius, e a velocidade normal à parede v_b é calculada através da equação da continuidade. Para o contorno superior a temperatura θ_b é obtida através da equação de transporte de temperatura (Eq. (3.20)).

- (iv) Na saída do domínio ($x = x_{max}$) assume-se a condição:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0,$$

em que $\rho = (u_b, v_b, \omega_{zb}, \theta_b)$.

3.3.2 Condições de contorno para o escoamento perturbado

Para o escoamento perturbado as seguintes condições de contorno são consideradas:

- (i) No contorno de entrada ($x = x_0$) impõe-se a ausência de perturbações, ou seja, assume-se que os valores dos componentes de velocidade, de vorticidade e de temperatura permanecem inalterados. Para garantir que não haja reflexão das perturbações, define-se uma região de amortecimento em uma região próxima a entrada do domínio. Maiores detalhes podem ser vistos na [Seção 4.4](#).
- (ii) No contorno rígido ($y = 0$) adota-se a condição de não deslizamento para as velocidades u e w ($u = w = 0$). Em regiões onde as perturbações não são introduzidas $]x_1, x_2[$, a condição

de impermeabilidade para a velocidade v é considerada ($v = 0$). Os componentes de vorticidade na parede são calculados através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y}, \\ \omega_y &= 0, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}.\end{aligned}$$

Na parede considera-se que $\theta = 0$.

- (iii) Tomando como base evidências experimentais relacionadas a existência de periodicidade na direção transversal, para os contornos definidos nesta direção impõe-se

$$\left. \frac{\partial^n \rho(x, y, 0, t)}{\partial z^n} \right|_{x, y, 0, t} = \left. \frac{\partial^n \rho(x, y, \lambda_z, t)}{\partial z^n} \right|_{x, y, \lambda_z, t}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

em que $z = 0$ e $z = \lambda_z$ são definidos como os extremos do domínio, e $\rho = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \theta)$.

- (iv) Considera-se que a altura do domínio de integração em questão seja grande o suficiente de modo que a vorticidade seja nula no contorno superior, ou seja, em $y = y_{max}$, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Para os componentes de perturbação da velocidade assume-se que há um decaimento exponencial ao afastar-se da parede, isso implica em $u = 0$.

No contorno superior a temperatura θ é obtida através da equação de transporte de temperatura (Eq. (3.28)).

- (v) Próximo a saída do domínio foi definida uma região de relaminarização do escoamento, onde todas as perturbações são dissipadas. Toma-se essa condição para evitar a existência de reflexões de perturbações para o interior do domínio. Essa técnica viabiliza o uso da condição:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0,$$

em que $\rho = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \theta)$.

O próximo capítulo refere-se a descrição do conjunto de métodos numéricos utilizados para a discretização das equações governantes aqui apresentadas.

METODOLOGIA NUMÉRICA

A investigação do processo de transição, de modo particular, do caso investigado no presente estudo, transição em camada limite, apresenta uma multiplicidade de escalas temporais e espaciais. Devido a estes fatores, em uma região próxima à parede deve-se ter uma boa resolução de malha. Neste contexto, o presente capítulo consiste em apresentar estratégias numéricas que capturem de forma eficaz todas as escalas relevantes ao fenômeno em estudo.

Para a solução numérica da formulação apresentada no [Capítulo 3](#) foi implementada uma metodologia numérica composta por um integrador temporal do tipo Runge-Kutta com quarta ordem de precisão, um método de diferenças finitas compactas para o cálculo das derivadas parciais nas direções x e y , um método espectral na direção transversal z , e um método multi-malha com a formulação FAS para a solução numérica da equação de Poisson.

4.1 Método espectral

De acordo com estudos experimentais contendo vórtices de Görtler, a direção transversal ao escoamento é periódica ([ITO, 1980](#); [SWEARINGEN; BLACKWELDER, 1987](#); [MOMAYEZ; DUPONT; PEERHOSSAINI, 2004](#)). Considerando essa hipótese, para a direção z optou-se em utilizar um método espectral, de forma que todas as variáveis de interesse do escoamento são expandidas em séries de Fourier, com $K + 1$ modos nesta direção, ou seja,

$$\rho(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^K \rho_k(x, y, t) e^{-i\beta_k z}, \quad (4.1)$$

em que $i = \sqrt{-1}$ representa a unidade imaginária, k denota cada um dos modos de Fourier, $\rho = \{u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \theta, a, b, c, d, e, f, g\}$ representa as variáveis no espaço físico, $\rho_k = \{u_k, v_k, w_k, \omega_{xk}, \omega_{yk}, \omega_{zk}, \theta_k, a_k, b_k, c_k, d_k, e_k, f_k, g_k\}$ representa as variáveis no espaço de Fourier, e β_k é o número de onda na direção transversal, cuja definição é $\beta_k = \frac{2\pi k}{\lambda_z}$, em que λ_z caracteriza o comprimento de onda na direção z de um par de vórtices de Görtler.

Utilizando estas transformadas a solução numérica do código é simplificada, de forma que a alta ordem de precisão no cálculo das derivadas é mantida. [Canuto et al. \(1988\)](#) e [Zang, Krist e Hussaini \(1989\)](#) apresentam em seus estudos comparações de ordem de precisão entre métodos espectrais e métodos de diferenças finitas.

Substituindo as transformadas de Fourier resultantes da equação (4.1) em cada uma das variáveis apresentadas nas equações de transporte de vorticidade (Eqs. (3.21) - (3.23)), de Poisson para os componentes de velocidade (Eqs. (3.24) - (3.26)), de transporte de temperatura (Eq. (3.28)), e da continuidade (Eq. 3.27), obtém-se o sistema de equações governantes no espaço de Fourier para cada modo k , definido como:

$$\frac{\partial \omega_{x_k}}{\partial t} + \frac{\partial a_k}{\partial y} + \imath \beta_k b_k - \frac{Go^2}{\sqrt{Re}} \imath \beta_k d_k = \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \omega_{x_k}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \omega_{y_k}}{\partial t} - \imath \beta_k c_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \omega_{y_k}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \omega_{z_k}}{\partial t} + \frac{\partial b_k}{\partial x} - \frac{\partial c_k}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Go^2 d_k}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \omega_{z_k}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} - \beta_k^2 u_k = \imath \beta_k \omega_{y_k} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - \beta_k^2 v_k = -\frac{\partial \omega_{z_k}}{\partial x} - \imath \beta_k \omega_{x_k}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - \beta_k^2 w_k = \frac{\partial \omega_{y_k}}{\partial x} + \imath \beta_k \frac{\partial v_k}{\partial y}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial t} + \frac{\partial e_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial x} - \imath \beta_k g_k = \frac{1}{Re Pr} \nabla_k^2 \theta_k, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} - \imath \beta_k w_k = 0, \quad (4.9)$$

onde $\nabla_k^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_k^2 \right)$.

Os produtos não lineares $a_k, b_k, c_k, d_k, e_k, f_k$, e g_k são inicialmente obtidos a partir da transformação dos componentes de velocidade, de vorticidade, e de temperatura, do espaço de Fourier para o espaço físico. Os produtos não lineares a, b, c, d, e, f , e g são então calculados neste espaço, e posteriormente convertidos para o espaço de Fourier. Esta sequência de procedimentos representa um esforço computacional menor do que se os produtos fossem realizados no espaço de Fourier.

4.2 A discretização das equações

O domínio de integração é discretizado através de retângulos definido por $\Delta_{x_i} \times \Delta_{y_j}$, em que os índices i e j são números naturais que representam posições da malha computacional nas

direções x e y , respectivamente. N_x e N_y representam o número máximo de pontos discretizados em cada uma dessas direções, e o tamanho do passo temporal é denotado por Δ_t .

4.2.1 Derivadas temporais

No presente estudo a integração temporal das equações de transporte de vorticidade (Eqs. (4.2) - (4.4)), e de temperatura (Eq. (4.8)) é calculada aplicando-se um método explícito do tipo Runge-Kutta de quarta ordem de precisão. Maiores detalhes sobre a influência do uso de integradores temporais de alta ordem aplicados a problemas envolvendo vórtices de Görtler, podem ser vistos em (SOUZA; MENDONÇA; MEDEIROS, 2005).

4.2.2 Derivadas espaciais

De acordo com Kloker (1998), Souza, Mendonça e Medeiros (2005), apesar de exigir um maior custo computacional, o método de diferenças finitas compactas apresenta vantagens como baixa dissipação e dispersão numérica, redução de estêncil computacional, alta resolução, e boa acurácia. Considerando essas vantagens, para o cálculo das derivadas espaciais nas direções x e y , adotou-se o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem de precisão para pontos internos ao contorno, e de 5ª ordem de precisão para pontos do contorno. As aproximações compactas adotadas na implementação do código computacional são construídas de forma a apresentarem uma estrutura tridiagonal.

Considerando que a região de interesse na direção y está próxima ao contorno rígido, busca-se reduzir o custo computacional e uma melhor resolução numérica nesta região através de uma estratégia de estiramento de malha na direção normal à superfície rígida. Esse estiramento é representado por uma progressão geométrica de razão str .

4.2.2.1 Cálculo da primeira derivada

Figura 13 – Estiramento na vizinhança de um ponto j do domínio discreto

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 13 representa o estêncil computacional adotado no desenvolvimento dos esquemas de diferenças finitas compactas centrados em j , utilizados para aproximar a primeira e a segunda derivada de uma função ρ na direção y , em que str denota o fator de estiramento utilizado, e $h = \Delta_{y_j}$ o j -ésimo espaçamento de malha considerado. Para uma aproximação nos pontos centrais do domínio computacional considera-se a expressão

$$\alpha_{j-1}\rho'_{j-1} + \alpha_j\rho'_j + \alpha_{j+1}\rho'_{j+1} \approx a_{j-2}\rho_{j-2} + a_{j-1}\rho_{j-1} + a_j\rho_j + a_{j+1}\rho_{j+1} + a_{j+2}\rho_{j+2}, \quad (4.10)$$

onde os coeficientes $\alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, a_{j-2}, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}$ e a_{j+2} deverão ser calculados de acordo com a variação do str . Ao determinar as constantes que satisfaçam a equação (4.10) identifica-se através de um estêncil de cinco pontos, uma relação entre o valor de ρ' em três pontos consecutivos do domínio discreto.

Seja $h_{1-} = hstr$, $h_{2-} = h(1 + str)$, $h_{1+} = hstr^2$, e $h_{2+} = hstr^2(1 + str)$, a distância entre os pontos $j - 1$ e j , $j - 2$ e j , $j + 1$ e j , e $j + 2$ e j . Ao expandir cada termo da equação (4.10) em série de Taylor, centrada no ponto j , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \rho'_{j-1} &= \rho'_j - h_{1-}\rho''_j + \frac{h_{1-}^2}{2!}\rho'''_j - \frac{h_{1-}^3}{3!}\rho^{iv}_j + \frac{h_{1-}^4}{4!}\rho^v_j - \frac{h_{1-}^5}{5!}\rho^{vi}_j + \frac{h_{1-}^6}{6!}\rho^{vii}_j + \dots \\
 \rho'_j &= \rho'_j \\
 \rho'_{j+1} &= \rho'_j + h_{1+}\rho''_j + \frac{h_{1+}^2}{2!}\rho'''_j + \frac{h_{1+}^3}{3!}\rho^{iv}_j + \frac{h_{1+}^4}{4!}\rho^v_j + \frac{h_{1+}^5}{5!}\rho^{vi}_j + \frac{h_{1+}^6}{6!}\rho^{vii}_j + \dots \\
 \rho_{j-2} &= \rho_j - h_{2-}\rho'_j + \frac{h_{2-}^2}{2!}\rho''_j - \frac{h_{2-}^3}{3!}\rho'''_j + \frac{h_{2-}^4}{4!}\rho^{iv}_j - \frac{h_{2-}^5}{5!}\rho^v_j + \frac{h_{2-}^6}{6!}\rho^{vi}_j - \frac{h_{2-}^7}{7!}\rho^{vii}_j + \dots \\
 \rho_{j-1} &= \rho_j - h_{1-}\rho'_j + \frac{h_{1-}^2}{2!}\rho''_j - \frac{h_{1-}^3}{3!}\rho'''_j + \frac{h_{1-}^4}{4!}\rho^{iv}_j - \frac{h_{1-}^5}{5!}\rho^v_j + \frac{h_{1-}^6}{6!}\rho^{vi}_j - \frac{h_{1-}^7}{7!}\rho^{vii}_j + \dots \\
 \rho_j &= \rho_j \\
 \rho_{j+1} &= \rho_j + h_{1+}\rho'_j + \frac{h_{1+}^2}{2!}\rho''_j + \frac{h_{1+}^3}{3!}\rho'''_j + \frac{h_{1+}^4}{4!}\rho^{iv}_j + \frac{h_{1+}^5}{5!}\rho^v_j + \frac{h_{1+}^6}{6!}\rho^{vi}_j + \frac{h_{1+}^7}{7!}\rho^{vii}_j + \dots \\
 \rho_{j+2} &= \rho_j + h_{2+}\rho'_j + \frac{h_{2+}^2}{2!}\rho''_j + \frac{h_{2+}^3}{3!}\rho'''_j + \frac{h_{2+}^4}{4!}\rho^{iv}_j + \frac{h_{2+}^5}{5!}\rho^v_j + \frac{h_{2+}^6}{6!}\rho^{vi}_j + \frac{h_{2+}^7}{7!}\rho^{vii}_j + \dots
 \end{aligned}$$

Substituindo cada termo apresentado na equação (4.10) pela sua respectiva série de Taylor, e colocando em evidência a equação resultante em termos de ρ_j e suas derivadas, obtém-se um sistema linear definido na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & -h_{2-} & -h_{1-} & 0 & h_{1+} & h_{2+} \\
 -h_{1-} & 0 & h_{1+} & \frac{h_{2-}^2}{2!} & \frac{h_{1-}^2}{2!} & 0 & \frac{h_{1+}^2}{2!} & \frac{h_{2+}^2}{2!} \\
 \frac{h_{1-}^2}{2!} & 0 & \frac{h_{1+}^2}{2!} & -\frac{h_{2-}^3}{3!} & -\frac{h_{1-}^3}{3!} & 0 & \frac{h_{1+}^3}{3!} & \frac{h_{2+}^3}{3!} \\
 -\frac{h_{1-}^3}{3!} & 0 & \frac{h_{1+}^3}{3!} & \frac{h_{2-}^4}{4!} & \frac{h_{1-}^4}{4!} & 0 & \frac{h_{1+}^4}{4!} & \frac{h_{2+}^4}{4!} \\
 \frac{h_{1-}^4}{4!} & 0 & \frac{h_{1+}^4}{4!} & -\frac{h_{2-}^5}{5!} & -\frac{h_{1-}^5}{5!} & 0 & \frac{h_{1+}^5}{5!} & \frac{h_{2+}^5}{5!} \\
 -\frac{h_{1-}^5}{5!} & 0 & \frac{h_{1+}^5}{5!} & \frac{h_{2-}^6}{6!} & \frac{h_{1-}^6}{6!} & 0 & \frac{h_{1+}^6}{6!} & \frac{h_{2+}^6}{6!} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_{j-1} \\
 \alpha_j \\
 \alpha_{j+1} \\
 -a_{j-2} \\
 -a_{j-1} \\
 -a_j \\
 -a_{j+1} \\
 -a_{j+2}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{bmatrix},$$

cujas solução é o conjunto de coeficientes $\{\alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, a_{j-2}, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, a_{j+2}\}$, o qual define a aproximação compacta procurada.

Seguindo este raciocínio deriva-se os esquemas numéricos compactos para a aproximar a primeira e a segunda derivada de ρ . Os estêncils apresentados a seguir foram definidos por Souza (2003), onde pt_1 , pt_2 , pt_p , e pt_u denotam, respectivamente, o primeiro, o segundo, o penúltimo, e o último ponto.

(i) Para o primeiro ponto:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(pt_1)} \rho'_1 + \alpha_2^{(pt_1)} \rho'_2 \approx \\ a_1^{(pt_1)} \rho_1 + a_2^{(pt_1)} \rho_2 + a_3^{(pt_1)} \rho_3 + a_4^{(pt_1)} \rho_4 + a_5^{(pt_1)} \rho_5; \end{aligned} \quad (4.11)$$

(ii) Para o segundo ponto:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(pt_2)} \rho'_1 + \alpha_2^{(pt_2)} \rho'_2 + \alpha_3^{(pt_2)} \rho'_3 \approx \\ a_1^{(pt_2)} \rho_1 + a_2^{(pt_2)} \rho_2 + a_3^{(pt_2)} \rho_3 + a_4^{(pt_2)} \rho_4 + a_5^{(pt_2)} \rho_5 + a_6^{(pt_2)} \rho_6; \end{aligned} \quad (4.12)$$

(iii) Para o penúltimo ponto:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(pt_p)} \rho'_N + \alpha_2^{(pt_p)} \rho'_{N-1} + \alpha_3^{(pt_p)} \rho'_{N-2} \approx \\ a_1^{(pt_p)} \rho_N + a_2^{(pt_p)} \rho_{N-1} + a_3^{(pt_p)} \rho_{N-2} + a_4^{(pt_p)} \rho_{N-3} + a_5^{(pt_p)} \rho_{N-4} + a_6^{(pt_p)} \rho_{N-5}; \end{aligned} \quad (4.13)$$

(iv) Para o último ponto:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(pt_u)} \rho'_N + \alpha_2^{(pt_u)} \rho'_{N-1} \approx \\ a_1^{(pt_u)} \rho_N + a_2^{(pt_u)} \rho_{N-1} + a_3^{(pt_u)} \rho_{N-2} + a_4^{(pt_u)} \rho_{N-3} + a_5^{(pt_u)} \rho_{N-4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A equação (4.10) e o sistema definido pelas equações (4.11) - (4.14) determinam um sistema tridiagonal. Resolvendo este sistema determina-se o valor das derivadas primeiras de ρ .

4.2.2.2 Cálculo da segunda derivada

O processo para calcular as aproximações compactas para a segunda derivada de uma função ρ é análogo ao que foi apresentado na Subsubseção 4.2.2.1. Os estêncils propostos, também definidos por Souza (2003), são:

(i) Para o primeiro ponto:

$$\begin{aligned} \beta_1^{(pt_1)} \rho''_1 + \beta_2^{(pt_1)} \rho''_2 \approx \\ b_1^{(pt_1)} \rho_1 + b_2^{(pt_1)} \rho_2 + b_3^{(pt_1)} \rho_3 + b_4^{(pt_1)} \rho_4 + b_5^{(pt_1)} \rho_5 + b_6^{(pt_1)} \rho_6; \end{aligned} \quad (4.15)$$

(ii) Para o segundo ponto:

$$\begin{aligned} \beta_1^{(pt_2)} \rho''_1 + \beta_2^{(pt_2)} \rho''_2 + \beta_3^{(pt_2)} \rho''_3 \approx \\ b_1^{(pt_2)} \rho_1 + b_2^{(pt_2)} \rho_2 + b_3^{(pt_2)} \rho_3 + b_4^{(pt_2)} \rho_4 + b_5^{(pt_2)} \rho_5 + b_6^{(pt_2)} \rho_6 + b_7^{(pt_2)} \rho_7; \end{aligned} \quad (4.16)$$

(iii) Para os pontos centrais:

$$\begin{aligned} \beta_{j-1} \rho''_{j-1} + \beta_j \rho''_j + \beta_{j+1} \rho''_{j+1} \approx \\ b_{j-2} \rho_{j-2} + b_{j-1} \rho_{j-1} + b_j \rho_j + b_{j+1} \rho_{j+1} + b_{j+2} \rho_{j+2}; \end{aligned} \quad (4.17)$$

(iv) Para o penúltimo ponto:

$$\begin{aligned} & \beta_1^{(pt_p)} \rho_N'' + \beta_2^{(pt_p)} \rho_{N-1}'' + \beta_3^{(pt_p)} \rho_{N-2}'' \approx \\ & b_1^{(pt_p)} \rho_N + b_2^{(pt_p)} \rho_{N-1} + b_3^{(pt_p)} \rho_{N-2} + b_4^{(pt_p)} \rho_{N-3} + \\ & b_5^{(pt_p)} \rho_{N-4} + b_6^{(pt_p)} \rho_{N-5} + b_7^{(pt_p)} \rho_{N-6}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

(v) Para o último ponto:

$$\begin{aligned} & \beta_1^{(pt_u)} \rho_N'' + \beta_2^{(pt_u)} \rho_{N-1}'' \approx \\ & b_1^{(pt_u)} \rho_N + b_2^{(pt_u)} \rho_{N-1} + b_3^{(pt_u)} \rho_{N-2} + b_4^{(pt_u)} \rho_{N-3} + b_5^{(pt_u)} \rho_{N-4} + b_6^{(pt_u)} \rho_{N-5}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

O conjunto de equações (4.15) - (4.19) também resulta em um sistema tridiagonal que determina o cálculo da segunda derivada de ρ em todos os pontos do domínio discreto.

4.2.2.3 Cálculo da equação de Poisson

De acordo com [Souza \(2003\)](#), a subrotina a qual demanda maior custo computacional para resolver a formulação apresentada no [Capítulo 3](#), é a solução numérica da equação de Poisson (Eq. (4.6)). Para solucionar essa equação é necessário discretizar a segunda derivada da função em estudo tanto na direção x , quanto na direção y . A presença do estiramento na direção normal ao escoamento torna necessário uma generalização para as aproximações compactas. Com essa finalidade, o mesmo processo utilizado na [Subsubseção 4.2.2.1](#) é adotado. O cálculo dos coeficientes da aproximação compacta em questão pode ser visto no estudo de [Rogenski \(2015\)](#).

Para resolver numericamente a equação elíptica em discussão, o método multi-malhas do tipo FAS foi adotado, no qual optou-se em utilizar um ciclo de integração V composto por 4 malhas. O processo de implementação deste método na solução de uma equação de Poisson para escoamentos incompressíveis encontra-se descrito nos trabalhos de [Rogenski \(2011\)](#), e de [Petri \(2015\)](#).

4.3 Inserção das perturbações

As perturbações são introduzidas no escoamento através de injeção e sucção de massa na parede. Para a implementação deste método assume-se que para o tempo inicial $t = 0$, o escoamento não contém perturbação. Em outras palavras, o escoamento é composto apenas de camada limite não perturbada sobre a superfície. No presente estudo optou-se em utilizar perturbações estacionárias com comprimento de onda transversal λ_z^* . A introdução das perturbações estacionárias ocorre na região definida entre os pontos x_1 e x_2 , conforme pode ser observado na [Figura 11](#).

Os vórtices de Görtler são gerados a partir da inserção de uma perturbação estacionária no modo $k = 1$. A função adotada para a velocidade neste modo é dada por:

$$v_1(x, 0, t) = \begin{cases} \mathcal{A}q(x), & \text{para } x_1 \leq x \leq x_2, \text{ e } t > 0 \\ 0, & \text{para } x < x_1, \text{ e } t > 0 \text{ ou } x > x_2, \text{ e } t > 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Na equação (4.20) $\mathcal{A}$ denota a altura máxima da perturbação. Esse parâmetro é utilizado para ajustar a amplitude da perturbação. A função $q(x)$ é definida como:

$$q(x) = \text{sen}^3 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \pi \right),$$

em que x_1 e x_2 correspondem aos pontos limitantes que definem a região de sucção e injeção de massa na direção x .

De acordo com Souza (2003), a propriedade de suavidade da função $v_1(x, 0, t)$ assegura que a perturbação seja introduzida de forma suave. Além disso, garante que os valores da função e da sua segunda derivada aplicados aos limitantes x_1 e x_2 , sejam nulos.

4.3.1 A inserção de perturbações não estacionárias

A interação entre a instabilidade de Görtler e perturbações não estacionárias pode levar o escoamento a um novo estágio no processo de transição à turbulência, conhecido na literatura como instabilidade secundária. Nesse estágio os efeitos não lineares desempenham papel significativo, e a instabilidade fica condicionada não somente ao escoamento base, mas também à natureza das perturbações não estacionárias (ROGENSKI, 2015).

São inúmeras as técnicas numéricas utilizadas para a geração dessas perturbações. De forma análoga ao que foi feito para a inserção de perturbações estacionárias, optou-se em utilizar uma técnica de injeção e sucção de massa no contorno rígido. Com essa finalidade, um pacote de onda representado por uma frequência fundamental ω_t , e seus respectivos harmônicos, são inseridos em uma região próxima a saturação dos vórtices de Görtler. O pacote de perturbações é definido pela expressão (WASSERMANN; KLOKER, 2002)

$$v_1(x, 0, t) = \mathcal{A}_s l(x) \sum_{m=1}^M \text{sen} \left(\frac{m\omega_t t}{2\pi} \right), \quad (4.21)$$

em que $l(x)$ é um polinômio de grau 8, o qual assume valor nulo nos extremos de um intervalo S , e valor máximo igual a 1 para o restante deste intervalo. O número máximo de harmônicos a serem considerados é denotado por M , e o número complexo $\mathcal{A}_s$ representa a amplitude. Essa amplitude desempenha importante influência no processo de identificação do tipo de instabilidade secundária a ser investigado (SOUZA, 2003).

4.4 Amortecimento das perturbações na entrada e relaminarização do escoamento na saída

A presença de perturbações no escoamento possibilita a geração de reflexões. Tais reflexões podem ocorrer tanto na entrada, como também na saída do domínio de interesse. Com o propósito de evitar estas reflexões, [Souza \(2003\)](#) adota uma técnica de amortecimento para a entrada, e de relaminarização para saída do domínio computacional. Essa técnica consiste em multiplicar os componentes de vorticidade por uma função $\zeta(x)$, definida por partes da seguinte maneira:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_0, \\ 6\epsilon_a(x)^5 - 15\epsilon_a(x)^4 + 10\epsilon_a(x)^3, & \text{se } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 1, & \text{se } x_2 < x < x_3, \\ (1 - \epsilon_r(x)^{50})^4 e^{-\frac{\epsilon_r(x)^4}{10}}, & \text{se } x_3 \leq x \leq x_4, \\ 0, & \text{se } x > x_4, \end{cases}$$

em que $\epsilon_a(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ e $\epsilon_r(x) = \frac{x-x_3}{x_4-x_3}$. O comportamento apresentado por essa função nas regiões de amortecimento, $x_0 \leq x \leq x_1$, é do tipo rampa. Por outro lado, na região definida por x tal que $x_3 \leq x \leq x_4$, essa função comporta-se como uma relaminarização.

4.5 O cálculo da vorticidade na parede

Para determinar os componentes de vorticidade na parede é necessário ter calculado os componentes de velocidade. Deste modo, conhecendo o campo de velocidade em todo domínio discreto de integração, calcula-se o Laplaciano do componente normal de velocidade utilizando a seguinte expressão:

$$\nabla_k^2 v_k = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - k^2 \beta^2 v_k.$$

Na direção longitudinal a derivada de v_k pode ser calculada de forma analítica (vide equação (4.20)). Na direção y essa derivada é calculada através de uma aproximação descentrada de alta ordem. Tal aproximação é obtida de acordo com o fator de estiramento de malha str , e possui um estêncil computacional de 7 pontos.

Para calcular o componente de vorticidade na direção x utiliza-se a solução da equação elíptica definida por:

$$\frac{\partial^2 \omega_{xk}}{\partial x^2} - k^2 \beta^2 \omega_{xk} = -ik\beta \nabla_k^2 v_k - \frac{\partial^2 \omega_{yk}}{\partial x \partial y}, \quad k = 0, \dots, K.$$

Considerando a hipótese de não deslizamento na parede, tem-se que o componente normal de vorticidade no contorno rígido é nulo. Na direção z o componente de vorticidade deve ser

calculado para cada modo de Fourier, integrando a equação

$$\frac{\partial \omega_{zk}}{\partial x} = -\nabla_k^2 v_k - \iota k \beta \omega_{zk}, \quad k = 0, \dots, K.$$

Maiores detalhes relacionados aos cálculos relatados nesta seção podem ser consultados no trabalho de [Souza \(2003\)](#).

4.6 O filtro e as altas frequências

Sabe-se que esquemas centrados de diferenças finitas possuem característica dispersiva que podem originar perturbações numéricas de alta frequência. A utilização deste tipo de estêncil computacional pode gerar instabilidade numérica nos resultados. Neste contexto, visando o amortecimento destas altas frequências, um filtro numérico tridiagonal de 6ª ordem de precisão foi adotado na implementação do código utilizado neste trabalho. Este filtro é aplicado ao componente de vorticidade, agindo somente na direção longitudinal a cada passo de tempo, ou seja, aplica-se este filtro somente após o último passo do método Runge-Kutta. Fixando o parâmetro t em conformidade com o último subpasso do integrador temporal, e o índice j , tal que $1 \leq j \leq N_y$, o sistema tridiagonal é definido da seguinte maneira ([LELE, 1992](#)):

(i) Para $1 \leq i \leq 3$ e $N_x - 2 \leq i \leq N_x$:

$$\widehat{\omega}_{i,j,k} = \omega_{i,j,k};$$

(ii) Para $i = 4, \dots, N_x - 3$:

$$\begin{aligned} \alpha_f \widehat{\omega}_{i-1,j,k} + \widehat{\omega}_{i,j,k} + \alpha_f \widehat{\omega}_{i+1,j,k} &= a_f \widehat{\omega}_{i,j,k} + b_f (\widehat{\omega}_{i-1,j,k} + \widehat{\omega}_{i+1,j,k}) \\ &+ c_f (\widehat{\omega}_{i-2,j,k} + \widehat{\omega}_{i+2,j,k}) + d_f (\widehat{\omega}_{i-3,j,k} + \widehat{\omega}_{i+3,j,k}), \end{aligned}$$

em que $\alpha_f, a_f, b_f, c_f, d_f$ são constantes, e o símbolo $\wedge$ indica que a variável já sofreu o processo de filtragem. As constantes utilizadas neste processo são definidas por:

$$\alpha_f = 0,48;$$

$$a_f = \frac{11 + 10\alpha_f}{16};$$

$$b_f = \frac{15 + 34\alpha_f}{64};$$

$$c_f = \frac{-3 + 6\alpha_f}{32};$$

$$d_f = \frac{1 - 2\alpha_f}{64}.$$

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Este capítulo tem por finalidade avaliar o código computacional de simulação numérica implementado para o estudo de um escoamento transicional em camada limite sobre uma superfície côncava de curvatura variável.

Segundo [Oberkampf e Trucano \(2002\)](#), a verificação de um código computacional está relacionada à implementação correta do modelo que está sendo estudado, já a validação refere-se à adequabilidade do mesmo em representar o problema físico que se deseja estudar. O processo de validação busca uma estimativa para avaliar quão bem um modelo matemático representa um problema físico ([ROY; OBERKAMPF, 2011](#)). De acordo com [Roache \(1997\)](#) um código numérico só pode ser validado para a classe de problemas que satisfaça as hipóteses do modelo adotado. De maneira geral, a validação é realizada a partir de comparações gráficas de resultados computacionais com dados experimentais.

Diante do contexto exposto no parágrafo anterior, a verificação do código computacional utilizado para a obtenção dos resultados do [Capítulo 6](#), parte inicialmente de um comparativo entre os resultados obtidos através deste código, com os resultados alcançados através de um código computacional baseado na teoria de estabilidade linear, implementado e disponibilizado pelo Prof. M. T. de Mendonça ([MENDONÇA, 2012](#)). Dando continuidade no processo de verificação, consideramos os mesmos parâmetros físicos abordados por [Benmalek e Saric \(1994\)](#), com o intuito de comparar a distribuição de energia para os primeiros modos de Fourier de um escoamento transicional em camada limite sobre uma placa côncava de curvatura variável.

Para finalizar a avaliação do código adotado foram realizadas pesquisas bibliográficas de trabalhos experimentais, cujas hipóteses consideradas tivessem relação com o modelo abordado no presente estudo. No entanto, até o presente momento não foi possível encontrar na literatura um trabalho experimental que representasse fisicamente o problema aqui investigado. Contudo, o código computacional utilizado para o estudo de um escoamento em camada limite sobre uma superfície côncava, o qual é considerado como a base do código adotado para o presente estudo,

foi validado por [Malatesta \(2014\)](#).

5.1 Comparativo entre simulação numérica e teoria de estabilidade linear

Nessa seção será apresentada uma análise comparativa entre os resultados obtidos a partir de um código cuja implementação está relacionada a soluções do problema de autovalor associado à teoria de estabilidade linear, com os resultados gerados pelo código de simulação numérica - HOPE (do inglês *High-Order Parallel code*).

A análise da taxa de amplificação local dos vórtices de Görtler é definida por ([GOULPIÉ; KLINGMANN; BOTTARO, 1996](#))

$$\alpha = \frac{dE(x)}{dx} \frac{1}{E(x)},$$

onde $E(x)$ representa a métrica associada à evolução desses vórtices. Para o presente estudo considera-se uma métrica para aproximar a energia cinética de cada modo de Fourier, definida pela integral ([BENMALEK; SARIC, 1994](#))

$$E_k(x) = \int_0^\infty |u_k|^2 dy, \quad 0 \leq k \leq K - 1. \quad (5.1)$$

Figura 14 – Geometria do modelo de pá de turbina adotada por [Wang et al. \(1997\)](#)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os parâmetros físicos considerados nas simulações numéricas realizadas para a análise apresentada nesta seção estão de acordo com os experimentos de [Wang et al. \(1997\)](#) e [Wang, Olson e Goldstein \(2005\)](#). As geometrias adotadas para este estudo trata-se do intradorso da pá de turbina representada na [Figura 14](#), cujo raio mínimo corresponde a $4,085 \times 10^{-2} m$. Fixando

este raio, uma superfície côncava com raio de curvatura constante também foi definida para esta análise. A velocidade característica do escoamento em $L^* = 0,01\text{ m}$ é $U_\infty^* = 41,806\text{ ms}^{-1}$, e a viscosidade cinemática corresponde a $\nu^* = 1,509 \times 10^{-5}\text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Em simulações numéricas lineares apenas o modo fundamental ($k = 1$) é utilizado. Para este modo de Fourier os cálculos são realizados em uma malha bidimensional com estiramento de 1% na direção y , constituída de 1305 e 257 pontos nas direções x e y , respectivamente. O tamanho do passo na direção x é $\Delta_x = 1,08 \times 10^{-2}$, e o primeiro passo na direção y corresponde a $\Delta_{y_1} = 5 \times 10^{-4}$. O passo temporal considerado para essas simulações corresponde a $\Delta_t = 2 \times 10^{-1} \Delta_x$. Além disso, assume-se que as soluções são estacionárias quando a maior diferença absoluta entre o componente transversal de vorticidade em dois passos de tempo consecutivos é menor que 5×10^{-9} . Com relação a inserção das perturbações, o escoamento é perturbado na região definida pelo intervalo $1,53 \leq x \leq 1,99$, com uma amplitude correspondente a $\mathcal{A} = 1 \times 10^{-6}$. Os casos de comprimentos de onda transversais analisados são definidos pelo conjunto $\lambda_z^* = \{8,674, 10,631, 13,059, 16,414\} \times 10^{-4}\text{ m}$.

Figura 15 – Parâmetros geométricos e físicos relacionados aos dois casos de curvatura em análise

(a) Distribuição do raio de curvatura e do número de Görtler de superfícies de curvatura variável (cv), e de curvatura constante (cc)

(b) Energia do modo fundamental de Fourier de quatro λ_z^* considerando superfícies de curvatura variável, e de curvatura constante

Fonte: Elaborada pelo autor.

A distribuição do raio de curvatura e do número de Görtler local das superfícies em análise encontram-se ilustradas na Figura 15a, onde cv e cc representam o caso em que a curvatura é variável e o caso de curvatura constante, respectivamente. Para a curvatura variável o número de Görtler local atinge um valor máximo de 18,13 em $x = 5,88$, e decresce com o aumento do raio da curvatura da superfície. Na Figura 15b exibe-se a evolução da perturbação na direção do escoamento, caracterizada pela métrica da energia do modo fundamental de Fourier (ver Equação 5.1), para os quatro comprimentos de onda transversais em estudo, considerando duas

distribuições de curvatura. Na entrada do escoamento, onde o raio da curvatura é constante para ambos os casos analisados, a energia dos vórtices cresce exponencialmente. Com a mudança no raio da curvatura de uma das paredes, nota-se que esse crescimento torna-se menor se comparado com a energia dos vórtices do escoamento sobre a superfície em que o raio se mantém constante.

Figura 16 – Parâmetros da teoria de estabilidade linear considerando quatro comprimentos de onda transversais

(a) Curvas de comprimento de onda característico Λ (b) Curvas do número de Görtler em função de Λ

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 16a mostra a distribuição do comprimento de onda característico Λ na direção x para quatro comprimentos de onda transversais, considerando a superfície de curvatura variável. Quadrados pretos representam os vórtices com maior taxa de amplificação, correspondendo a $\Lambda = 210$. As curvas do número de Görtler local associadas a esses comprimentos de onda transversais encontram-se ilustradas na Figura 16b. Nesta figura quadrados pretos ilustram a curva de amplificação máxima.

A taxa de amplificação local α em função de x para o conjunto de comprimentos de onda transversais $\lambda_z^* = \{8,674, 10,631, 13,059, 16,414\} \times 10^{-4} m$ é apresentada na Figura 17. Linhas cheias representam os resultados obtidos através de simulação numérica, e as linhas tracejadas, os resultados alcançados com um código embasado na teoria de estabilidade linear. Ao analisar esta figura é possível observar uma boa concordância entre os resultados. Nota-se que ao considerar uma curvatura com raio variável há uma pequena discrepância entre as curvas de taxa de amplificação resultantes do código HOPE (linhas cheias) e do código baseado na teoria de estabilidade linear (linhas tracejadas). Para a superfície com curvatura de raio constante essa discrepância torna-se mais evidente. De acordo com Goulpié, Klingmann e Bottaro (1996), as variações entre os resultados são esperadas e explicitam certa sensibilidade à métrica utilizada. Além disso, há possibilidade de discrepâncias que podem ser justificadas pela hipótese de paralelismo necessária à luz da teoria de estabilidade linear.

Figura 17 – Taxa de amplificação local α para vórtices com diferentes comprimentos de onda transversais. Comparativo entre resultados obtidos por meio de simulação numérica (linha cheia), e teoria de estabilidade linear (linha tracejada)

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Comparativo entre códigos de simulação numérica

Dando continuidade no processo de verificação do código de simulação numérica adotado para o presente estudo, esta seção tem a finalidade de apresentar resultados comparativos entre códigos de simulação numérica relacionados a evolução não linear dos vórtices de Görtler. Os parâmetros físicos utilizados nas simulações provém do trabalho de [Swearingen e Blackwelder \(1987\)](#), e os parâmetros numéricos estão de acordo com os parâmetros considerados por [Benma-](#)

lek e Saric (1994). Para o processo de verificação da evolução não linear das perturbações foram realizadas simulações numéricas considerando 11 modos de Fourier, e 32 pontos no espaço físico. A malha computacional utilizada para essas simulações foi definida a partir de 1305 pontos igualmente espaçados por uma distância dada por $\Delta_x = 1,84 \times 10^{-2}$ na direção x , e 257 pontos na direção y , na qual o primeiro espaçamento é definido por $\Delta_{y_1} = 5 \times 10^{-4}$. O estiramento de malha nessa direção é de 1%. O espaçamento temporal aqui utilizado é igual a $\Delta_t = 2 \times 10^{-1} \times \Delta_x$. Soluções são assumidas ser estacionárias em uma situação onde a maior diferença absoluta entre vorticidade em dois passos de tempo consecutivos é menor que 5×10^{-9} . Próximo ao contorno de entrada, em uma região delimitada pelo intervalo $1 \leq x \leq 1,35$, considera-se uma zona de amortecimento. Ajustante a esta região, $1,75 \leq x \leq 2,36$, as perturbações são inseridas através de sucção e injeção de massa na parede, com uma amplitude máxima equivalente a $\mathcal{A} = 5 \times 10^{-3}$. O intervalo $23,01 \leq x \leq 24,02$ define uma zona de relaminarização próxima ao contorno de saída. Assim como no experimento de Swearingen e Blackwelder (1987), o comprimento de referência L^* é tomado como sendo igual a $0,1 \text{ m}$, e o raio de curvatura como $R^* = 3,2 \text{ m}$. A velocidade do escoamento potencial em L^* é definida por $U_\infty^* = 5 \text{ ms}^{-1}$, e a viscosidade cinemática por $\nu^* = 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Para o comprimento de onda transversal dos vórtices de Görtler considera-se $\lambda_z^* = 1,57 \times 10^{-2} \text{ m}$.

Figura 18 – Casos de distribuição de curvatura da parede analisados

Fonte: Adaptada de Benmalek e Saric (1994).

A distribuição de curvatura constante, e as distribuições de curvatura variável adotadas por Benmalek e Saric (1994), são definidas pela função $\frac{\kappa}{\kappa_0}$, em que κ_0 e κ representam a curvatura nas posições $x = 1$ e x , respectivamente. No caso em que a parede é côncava com raio constante, a curvatura é definida por $\frac{\kappa}{\kappa_0} = 1$, e as funções $\frac{\kappa}{\kappa_0} = -\tanh[3(x-8)]$, $\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{2}[1 - \tanh(3(x-10,24))]$, e $\frac{\kappa}{\kappa_0} = 2\sin[(5x+3)\pi/48]$, definem as paredes côncava-convexa, côncava-plana, e côncava-convexa-côncava, respectivamente. Na Figura 18 encontram-se ilustradas as distribuições de curvatura descritas anteriormente.

Figura 19 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal. Comparativo entre resultados obtidos através de simulações numéricas: resultados do presente estudo (linha cheia) e resultados de Benmalek e Saric (1994) (quadrados pretos)

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 19 apresenta resultados comparativos da evolução das amplitudes dos vórtices longitudinais, caracterizada pela métrica E_k , $0 \leq k \leq 10$ (ver Equação 5.1), considerando quatro casos de distribuição de curvatura. Linhas cheias e quadrados pretos correspondem, respectivamente, aos resultados obtidos através do código adotado para o presente estudo, e do trabalho de Benmalek e Saric (1994), embasado nas equações de estabilidade parabolizadas (PSE - do inglês *parabolized stability equations*). Na Figura 19a a região definida por $4 \leq x \leq 9$ ($1,33 \times 10^5 \leq Re_x \leq 2,98 \times 10^5$) é caracterizada pelo crescimento exponencial dos vórtices

de Görtler. Esse crescimento pode ser observado para os casos em que a curvatura é variável apenas na região em que a parede da superfície investigada é côncava. Ao analisar os modos de distorção do escoamento médio ($k = 0$), fundamental ($k = 1$), e subharmônicos ($k = 2$) e ($k = 3$), apresentados na [Figura 19](#), é possível afirmar que o comportamento da energia para os primeiros modos de Fourier apresenta padrões similares aos documentados por [Benmalek e Saric \(1994\)](#).

Figura 20 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 9$. Parede côncava. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de [Benmalek e Saric \(1994\)](#), item (b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 16$. Parede côncava-convexa. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de [Benmalek e Saric \(1994\)](#), item (b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 10, 24$. Parede côncava-plana. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de [Benmalek e Saric \(1994\)](#), item (b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Contornos de isovelocidade na posição longitudinal $x = 12, 02$. Parede periódica. Comparação entre resultados do presente estudo, item (a), e de [Benmalek e Saric \(1994\)](#), item (b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar o processo de verificação do código numérico HOPE, a distribuição do componente de velocidade total ($\tilde{u} = u_b + u$), na direção longitudinal do plano (η, z), em que $\eta = \frac{y}{\sqrt{x}}$, foi calculada em posições do escoamento definidas de acordo com [Benmalek e Saric \(1994\)](#). Uma análise comparativa do perfil de velocidade descrito acima é apresentada nas Figs. 20 - 23. O lado esquerdo apresenta os resultados do código HOPE e, no lado direito estão os resultados do código PSE. Os resultados apresentados nesta figura evidenciam a distorção que os vórtices contra-rotativos causam no perfil de velocidade à medida que se propagam e

aumentam de amplitude na direção longitudinal.

Nesta seção o modelo numérico utilizado foi testado quanto à capacidade de simular escoamentos sobre superfícies de curvatura variável. Diante dos resultados apresentados nas Figs. 19 - 23 foi possível verificar uma boa concordância entre os resultados do presente estudo com os resultados discutidos por Benmalek e Saric (1994). Portanto, considera-se que o código foi verificado, e que as equações adotadas representam de forma eficaz o modelo de um escoamento em camada limite com variação no raio da curvatura.

RESULTADOS

O presente capítulo volta-se para uma investigação da influência de não linearidades no desenvolvimento dos vórtices de Görtler em escoamentos em camada limite sobre superfícies côncavas com variação no raio de curvatura.

6.1 A influência do comprimento de onda transversal sobre a evolução não linear dos vórtices de Görtler

Esta seção tem a finalidade de analisar a influência do comprimento de onda transversal sobre a evolução não linear dos vórtices de Görtler, considerando escoamentos em camada limite sobre superfícies côncavas de curvatura variável. Para tal, adotamos os parâmetros físicos utilizados no trabalho de [Swearingen e Blackwelder \(1987\)](#), e os parâmetros numéricos considerados por [Benmalek e Saric \(1994\)](#), descritos na [Seção 5.2 do Capítulo 5](#). Além de $\lambda_z^* = 15,7 \times 10^{-3} \text{ m}$, definimos dois novos comprimentos de onda na direção z , sendo $\lambda_z^* = 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}$ a metade, e $\lambda_z^* = 31,4 \times 10^{-3} \text{ m}$ o dobro do comprimento de onda já investigado. As quatro distribuições de curvatura adotadas nesta análise são análogas aos casos investigados na [Seção 5.2](#).

Para analisar o comportamento dos vórtices de Görtler utilizamos a métrica $E_k(x)$, definida pela [Equação 5.1](#), responsável por quantificar a energia dos k modos de Fourier. A análise da influência do comprimento de onda na direção transversal no processo de transição à turbulência pode ser exemplificada em função de uma caracterização da região de saturação dos vórtices de Görtler. De acordo com [Rogenski \(2015\)](#), essa região associa-se ao ponto de interseção entre os dois principais modos de Fourier, o modo fundamental ($k = 1$) e o modo de distorção do escoamento médio ($k = 0$). Este ponto é identificado pelo quadrado preto nas Figs. [24](#), [26](#), [28](#), e [30](#).

6.1.1 Parede côncava

A Figura 24 apresenta a distribuição de energia na direção longitudinal para 11 modos de Fourier, para vórtices com $\Lambda = 129$ ($\lambda_z^* = 7,85 \times 10^{-3} m$), $\Lambda = 364$ ($\lambda_z^* = 15,7 \times 10^{-3} m$), e $\Lambda = 1030$ ($\lambda_z^* = 31,4 \times 10^{-3} m$). Para esta primeira análise, a superfície de raio $R^* = 3,2 m$ sob a qual a camada limite está sendo desenvolvida é côncava de curvatura constante.

Figura 24 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um crescimento exponencial de todos os modos de Fourier pode ser identificado em uma região próxima à entrada do escoamento, definida por $x \leq 9$ (ver Figura 24a), $x \leq 8,5$ (ver Figura 24b), $x \leq 10,5$ (ver Figura 24c), para $\lambda_z^* = 7,85 \times 10^{-3} m$, $\lambda_z^* = 15,7 \times 10^{-3} m$ e $\lambda_z^* = 31,4 \times 10^{-3}$, respectivamente, onde o maior valor de energia está relacionado ao modo fundamental ($k = 1$). A ação dos vórtices contra-rotativos torna-se evidente à medida que

se desenvolvem na direção do escoamento. Os efeitos não lineares tornam-se cada vez mais significativos, levando à saturação dos vórtices. Note que após a saturação, a energia é quase que constante para todos os modos. Como pode ser observado na Figura 24, o comprimento de onda transversal pode influenciar na saturação dos vórtices. Nessa figura é possível observar que a saturação ocorre primeiro para $\lambda_z^* = 15,7 \times 10^{-3} m$, caso em que os vórtices apresentam maiores valores de energia na região de crescimento exponencial. Isso justifica a extensão desta região para o caso ilustrado na Figura 24b ser menor dentre todos os casos investigados. Além disso, a energia dos modos subharmônicos também recebe influência de λ_z^* , em que os maiores valores de energia para estes modos na região de saturação são atingidos para o maior comprimento de onda transversal (ver Figura 24c).

Figura 25 – Campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$, e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, no plano $z \times y$ em $x = 13,86$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 25 mostra o campo vetorial $(\tilde{w}, \tilde{v})$ e o isocontorno do componente de velocidade $\tilde{u}$, plotados no plano $z \times y$ em $x = 13,86$. Nesta posição, os vórtices já estão saturados, e a presença de oscilações na distribuição do perfil de $\tilde{u}$ se torna mais evidente devido à amplificação das perturbações geradas. Fluido com baixa velocidade se afasta da parede, resultando em uma camada limite mais espessa, enquanto que fluido com alta velocidade se move em direção à parede, resultando em uma camada limite mais fina.

6.1.2 Parede côncava-convexa

O modelo de distribuição de curvatura desta geometria representa uma parede côncava-convexa, definido pela função $\frac{\kappa}{\kappa_0} = -\tanh[3(x-8)]$ (BENMALEK; SARIC, 1994).

Figura 26 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal

Fonte: Elaborada pelo autor.

A evolução da energia dos 11 modos de Fourier para os vórtices desenvolvidos sobre uma parede côncava-convexa encontra-se ilustrada na [Figura 26](#). Nesta figura o quadrado preto representa a posição onde a energia dos modos $k = 0$ e $k = 1$ são iguais, e a linha tracejada representa a posição $x = 8$, onde ocorre a mudança de curvatura. Para esta geometria, λ_z^* afeta a amplificação de energia dos modos de Fourier, onde a perda de energia é mais abrupta para o menor comprimento de onda. Para $\lambda_z^* = 31,4 \times 10^{-3} m$, apesar da energia do modo de distorção de escoamento médio ($k = 0$) não atingir a energia do modo fundamental ($k = 1$), a perda de energia dos modos subharmônicos é mais lenta quando comparada com o caso apresentado na [Figura 26a](#). Este fato pode ser justificado pela mudança de curvatura de côncava para convexa. Com essa troca, há uma perda significativa de energia em todos os modos, evidenciando que a parede convexa tem efeito estabilizador sobre os vórtices de Görtler.

Figura 27 – Campo vetorial de velocidade ($\tilde{w}, \tilde{v}$), e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, no plano $z \times y$ em $x = 10,18$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 27 ilustra o campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$ e os isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados no plano $z \times y$ em $x = 10, 18$, onde a parede é convexa. Nesta figura é possível identificar pares de vórtices recirculando em forma de redemoinhos perto da parede. De acordo com Benmalek e Saric (1994) esses vórtices são muito fracos para afetar o escoamento, o que justifica o fato do perfil de velocidade $\tilde{u}$ não assumir a forma de cogumelo, característica dos vórtices de Görtler, em nenhum dos casos de comprimentos de onda transversais investigados.

6.1.3 Parede côncava-plana

A Figura 28 ilustra o comportamento da métrica $E_k(x)$ de três comprimentos de onda transversais, para o caso em que a parede investigada é côncava-plana. O modelo matemático desta geometria é dado por $\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{2}[1 - \tanh(3(x - 10,24))]$ (BENMALEK; SARIC, 1994).

Figura 28 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta distribuição de curvatura a placa deixa de ser côncava para ser plana em $x = 10,24$. Essa localização encontra-se representada pela linha tracejada na [Figura 28](#). Para esta distribuição de curvatura, os efeitos do comprimento de onda transversal também são significativos na saturação dos vórtices de Görtler. Nesta figura é possível identificar a saturação desses vórtices, cuja localização é representada pelo quadrado preto. Na [Figura 28c](#) nota-se que após a saturação dos vórtices, a energia dos modos maiores permanece quase que constante, e a perda de energia dos modos subharmônicos é muito menor quando comparada aos demais casos de comprimento de onda transversal em estudo. Este fato evidencia que para esta distribuição de curvatura de parede, $\lambda_z^* = 31,4 \times 10^{-3} m$ torna o escoamento mais instável.

Figura 29 – Campo vetorial de velocidade ($\tilde{w}, \tilde{v}$), e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, no plano $z \times y$ em $x = 20,36$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A [Figura 29](#) representa o campo vetorial de velocidade ($\tilde{w}, \tilde{v}$) e os isocontornos do

componente velocidade $\tilde{u}$, plotados no plano $z \times y$ em $x = 20, 36$. Os resultados apresentados nesta figura evidenciam a distorção que os vórtices contra-rotativos causam no perfil de velocidade à medida que se propagam e aumentam em amplitude na direção longitudinal. Essa distorção ocorre através da formação de duas regiões distintas. Em um caso, onde o fluido com alta quantidade de movimento é impulsionado em direção da parede, resultando no achatamento da camada limite, há uma região descendente. Por outro lado, há a região ascendente, originada do processo em que o fluido com baixa velocidade é bombeado para longe da parede. Os resultados mostram que as distorções causadas pelos vórtices de Görtler podem ser observadas em todos os casos, se mostrando mais significativas para o maior comprimento de onda transversal, justificando a identificação da forma de cogumelo do perfil de velocidade $\tilde{u}$ apenas para este caso.

6.1.4 Parede periódica

Figura 30 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal

Fonte: Elaborada pelo autor.

No último caso analisado, a parede consiste de seções côncavas e convexas alternadas, definindo uma parede de curvatura periódica. Esta configuração de curvatura é definida pela função trigonométrica $\frac{\kappa}{\kappa_0} = 2\sin[(5x+3)\pi/48]$ (BENMALEK; SARIC, 1994), em que a parede deixa de ser côncava e passa a ser convexa em $x = 9$, passando a ser côncava novamente em $x = 18,6$. As mudanças de curvatura de parede descritas anteriormente são identificadas pela linha tracejada na Figura 30.

Figura 31 – Campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$, e isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1 no plano $z \times y$ em $x = 13,25$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O desenvolvimento do escoamento de Görtler, caracterizado em termos de variações da energia E_k de 11 modos de Fourier é mostrado na Figura 30. Para esta distribuição de curvatura a influência de λ_z^* no processo de transição também pode ser identificada. Nota-se um crescimento exponencial de todos os modos de Fourier próximo à entrada do escoamento, onde a superfície é

caracterizada por uma parede côncava. Em $x = 9$ esta superfície torna-se convexa e os efeitos centrífugos são então desligados. Consequentemente, há uma perda de energia das perturbações, especialmente no caso com $\lambda_z^* = 7,85 \times 10^{-3} m$. Em uma região próxima à saída do escoamento, $x \geq 18,6$, há uma nova troca de curvatura, onde a parede passa a ser côncava novamente, e consequentemente os efeitos centrífugos são religados, resultando no aumento da energia de todos os modos de Fourier.

A Figura 31 apresenta o campo vetorial de velocidade $(\tilde{w}, \tilde{v})$ e os isocontornos do componente velocidade $\tilde{u}$, plotados no plano $z \times y$ em $x = 13,25$, onde a parede é convexa. Nesta figura nota-se que a parte superior do perfil de velocidade $\tilde{u}$ apresenta uma forma achatada. Isso acontece pois os vórtices contra-rotativos originados na superfície côncava se afastam da parede, e um novo par de vórtices surge rotacionando em sentido oposto na parede convexa.

Tabela 1 – Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede côncava

$\lambda_z^* \times 10^{-3} m$	x	$E_k(x) \times 10^{-1}$
7,85	10,81	5,6
15,7	10,75	9,6
31,4	13,41	11,3

Tabela 2 – Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede côncava-convexa

$\lambda_z^* \times 10^{-3} m$	x	$E_k(x) \times 10^{-3}$
7,85	13,24	2,1
15,7	17,84	3,1
31,4	—	—

Tabela 3 – Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede côncava-plana

$\lambda_z^* \times 10^{-3} m$	x	$E_k \times 10^{-1}$
7,85	8,95	1,4
15,7	9,02	3,0
31,4	11,87	3,4

Tabela 4 – Valores de λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Parede periódica

$\lambda_z^* \times 10^{-3} m$	x	$E_k \times 10^{-1}$
7,85	6,75	1,3
15,7	7,39	2,5
31,4	—	—

Nas Tabs. 1 - 4, x representa a posição na direção longitudinal onde a energia do modo fundamental ($k = 1$) e a energia do modo de distorção do escoamento médio ($k = 0$) são iguais, sendo $E_k(x)$ o valor da energia correspondente a estes modos nesta posição. Os dados apresentados nestas tabelas referem-se aos casos em que a parede é côncava, côncava-convexa, côncava-plana, e periódica, respectivamente. Esses dados demonstram que a saturação dos vórtices em camada limite sobre superfícies de curvatura constante, e de curvatura variável recebe influência do comprimento de onda transversal. Além disso, nota-se que este parâmetro causa efeito sobre a energia dos vórtices relacionados aos modos subharmônicos, em que os vórtices com $\lambda_z^* = 31,4 \times 10^{-3} m$ carregam mais energia do que os vórtices com $\lambda_z^* = 7,85 \times 10^{-3} m$ e $\lambda_z^* = 15,7 \times 10^{-3} m$, independente do tipo de distribuição de curvatura da parede. Note que os maiores valores de energia dos modos de Fourier foram identificados para o caso em que

a curvatura é côncava com raio de curvatura constante. Esta observação suporta a conclusão de que para os casos de distribuição de curvatura de parede investigados no presente estudo, o escoamento em camada limite sobre a parede de curvatura côncava com raio de curvatura constante se mostrou mais instável no processo de transição à turbulência.

6.2 A evolução não linear dos vórtices de Görtler no intradorso de uma pá de turbina

Esta seção consiste em investigar a influência da curvatura para quatro comprimentos de onda transversais na instabilidade de Görtler, e posteriormente nas taxas de transferência de calor. Além disso, analisar os efeitos da curvatura sobre a instabilidade secundária. Para esta investigação considera-se um escoamento sobre o lado de pressão de uma pá de turbina, cujo modelo foi adaptado do trabalho de Wang *et al.* (1997), e encontra-se ilustrado na Figura 14. Conforme já explicitado no Capítulo 5, fixamos o raio mínimo desta geometria para definir uma superfície côncava de raio constante. A distribuição do raio de curvatura e o número de Görtler local das geometrias em estudo encontram-se ilustrados na Figura 15a.

Para o conjunto de testes não lineares são adotados os mesmos parâmetros físicos e numéricos descritos na Seção 5.1 do Capítulo 5, exceto o número de pontos na direção x , e o espaçamento entre dois pontos consecutivos nesta direção, que foram aqui definidos por $N_x = 2265$, e $\Delta x = 6,23 \times 10^{-3}$, respectivamente. A evolução dos vórtices de Görtler para cada comprimento de onda transversal definido no conjunto $\lambda_z^* = \{8,674, 10,631, 13,059, 16,414\} \times 10^{-4} m$, será quantificada através da métrica de energia E_k , definida pela Equação 5.1. Para esta análise foram realizadas simulações numéricas considerando 11 modos de Fourier, e 32 pontos no espaço físico.

A Figura 32 e a Figura 33 apresentam a distribuição de energia na direção longitudinal para os 11 modos de Fourier, para cada comprimento de onda transversal definido no conjunto λ_z^* . Os resultados mostrados na Figura 32 estão relacionados a um escoamento em camada limite sobre o lado de pressão de uma pá de turbina, ou seja, uma superfície de curvatura variável. A Figura 33 apresenta a evolução dos vórtices longitudinais de um escoamento em camada limite sobre uma superfície côncava com curvatura de raio constante. Nestas figuras o quadrado preto identifica a posição longitudinal onde a energia do modo 1 e do modo 0 são iguais.

Ao analisar a evolução dos vórtices de Görtler para cada um dos λ_z^* apresentada na Figura 32, nota-se que há uma variação na região de crescimento exponencial destes vórtices. Os casos ilustrados na Figura 32a e na Figura 32b apresentam um crescimento exponencial da energia nas regiões definidas pelos intervalos, $2 \leq x \leq 7,4$ e $2 \leq x \leq 8$, respectivamente. Para $\lambda_z^* = 13,059 \times 10^{-4} m$, a região de crescimento exponencial é definida por $2 \leq x \leq 8,65$, e para o caso ilustrado na Figura 32d, essa região é ainda maior, onde esse comportamento da energia pode ser identificado em $2 \leq x \leq 9,4$. Nesta figura é possível observar que após a região de

Figura 32 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal. Superfície de curvatura variável

Fonte: Elaborada pelo autor.

saturação, há uma perda de energia dos modos de Fourier. Isso evidencia que a variação no raio da curvatura torna os efeitos centrífugos menos significativos. Note que o decaimento da energia dos modos subharmônicos de Fourier para o menor comprimento de onda transversal investigado ocorre de forma mais abrupta quando comparado ao comportamento desses modos para $\lambda_z^* = 16,414 \times 10^{-4} m$.

Na distribuição de energia dos vórtices de Görtler apresentada na [Figura 33](#) é possível observar que o crescimento exponencial da energia ocorre em regiões bastante próximas nos quatro casos de λ_z^* investigados, onde a saturação dos vórtices com $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$, $\lambda_z^* = 10,631 \times 10^{-4} m$, $\lambda_z^* = 13,059 \times 10^{-4} m$, e com $\lambda_z^* = 16,414 \times 10^{-4} m$, é identificada em $x = 7,03$, $x = 7,28$, $x = 7,66$, e $x = 8,24$, respectivamente. A região a jusante a saturação

Figura 33 – Distribuição de energia para cada modo de Fourier na direção longitudinal. Superfície de curvatura constante

Fonte: Elaborada pelo autor.

dos vórtices de Görtler é caracterizada por um plato na energia de todos os modos de Fourier. Nota-se que a energia da perturbação deixa de ser amplificada e se mantém quase que constante para todos os modos, exceto para o caso em que $\lambda_z^* = 16,414 \times 10^{-4} m$, onde há uma grande oscilação da energia dos modos em uma região próxima a saída do escoamento. Estas análises suportam a conclusão de que dentre os comprimentos de onda transversais analisados neste estudo, $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$ é o mais perigoso no processo de transição laminar-turbulenta, visto que a saturação dos vórtices relacionados a este valor de λ_z^* antecede os demais casos investigados.

Nas Tabs. 5 e 6 Λ denota o comprimento de onda característico relacionado ao comprimento de onda transversal λ_z^* , e x representa a posição longitudinal onde a energia do modo 1 e

a energia do modo 0 são iguais, sendo $E_k(x)$ o valor da energia correspondente a estes modos nesta posição. Para a [Tabela 6](#) Λ corresponde ao raio relacionado a posição x para a qual os vórtices saturaram.

Tabela 5 – Λ , λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Superfície de curvatura variável

Λ	$\lambda_z^* \times 10^{-4} m$	x	$E_k(x) \times 10^{-3}$
160	8,674	8,56	4,33
191	10,631	9,06	5,14
201	13,059	10,11	5,87
174	16,414	12,61	6,66

Tabela 6 – Λ , λ_z^* , x e E_k , $k = 0, 1$. Superfície de curvatura constante

Λ	$\lambda_z^* \times 10^{-4} m$	x	$E_k(x) \times 10^{-3}$
350	8,674	7,03	4,6
475	10,631	7,28	5,4
647	13,059	7,66	6,2
912	16,414	8,24	7,0

6.2.1 O efeito da curvatura nas taxas de transferência de calor

A taxa de transferência de calor será analisada através da evolução na direção longitudinal da média do número de Stanton na direção transversal (maiores detalhes podem ser encontrados em ([SCHLICHTING, 1979](#))). O número de Stanton é um coeficiente adimensional definido pelo quociente

$$St_x = \frac{Nu_x}{PrRe_x}, \text{ com } Nu_x = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{wall} \frac{x^*}{T_\infty^* - T_0^*},$$

em que Nu_x denota uma medida do coeficiente de transferência de calor por convecção, denominado número de Nusselt, T_∞^* e T_0^* representam os valores da temperatura do fluido fora da camada limite, e na parede, respectivamente. Com a finalidade de investigar o comportamento da taxa de transferência de calor com diferentes propriedades do fluido, considera-se dois valores diferentes para o número de Prandtl, $Pr = 0,72$ e $Pr = 7,07$. Para estas análises são apresentadas duas curvas teóricas da média do número de Stanton, em que St_{lam} denota o caso em que o escoamento é laminar, e para St_{tur} , tem-se que o escoamento é turbulento, definidas respectivamente por:

$$St_{lam} = 0,332Pr^{-0,66}Re_x^{-0,5} \text{ e } St_{tur} = 0,0287Pr^{-0,4}Re_x^{-0,2}.$$

As geometrias adotadas para esta investigação, já mencionadas no início desta seção, são caracterizadas por uma superfície de curvatura variável, cujo modelo é o lado de pressão de uma pá de turbina, e por uma superfície de curvatura constante.

A [Figura 34](#) e a [Figura 35](#) mostram os perfis de velocidade $\tilde{u}$ e de temperatura $\tilde{\theta}$, de 0,05 a 0,95, com incremento de 0,1, plotados no plano $z \times y$ em $x = 10$. Para os resultados apresentados na [Figura 34](#) foi considerado o número de Prandtl igual a 0,72, enquanto que os resultados relacionados a Prandtl igual a 7,07 encontram-se ilustrados na [Figura 35](#).

Figura 34 – Contornos de isovelocidade (linhas sólidas) e de isotemperatura (linhas tracejadas) plotados no plano $z \times y$ em $x = 10$. $Pr = 0,72$. Lado esquerdo exibe resultados para uma superfície de curvatura variável. Lado direito representa os resultados para uma parede de curvatura constante

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Contornos de isovelocidade (linhas sólidas) e de isotemperatura (linhas tracejadas) plotados no plano $z \times y$ em $x = 10$. $Pr = 7,07$. Lado esquerdo exibe resultados para uma superfície de curvatura variável. Lado direito representa os resultados para uma parede de curvatura constante

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na [Figura 34](#) e na [Figura 35](#) o lado esquerdo exibe resultados obtidos para uma distribuição de curvatura variável, e o lado direito para uma superfície de curvatura constante. A escolha da posição $x = 10$ para a qual definimos o corte no plano $z \times y$, justifica-se por caracterizar uma região onde a amplitude dos vórtices já atingiu seu estado máximo, e os efeitos não lineares já se tornaram bastante significativos. Os vórtices da Görtler são responsáveis por gerar fortes distorções nos perfis de velocidade na direção longitudinal. Conforme pode ser observado na [Figura 34](#) e na [Figura 35](#), em uma região de desenvolvimento não linear desses vórtices, na qual a amplitude é alta, duas regiões são formadas, caracterizando uma forma de cogumelo nas distribuições da velocidade e da temperatura. Esta nova distribuição de velocidade difere da camada limite de Blasius, e portanto, ao considerar a camada limite térmica, observa-se um aumento nas taxas de transferência de calor.

Na [Figura 34](#) é possível identificar tanto para o caso em que a curvatura é variável, quanto para o caso em que a curvatura é constante, que a camada limite térmica (linhas tracejadas) é um pouco mais espessa do que a camada limite hidrodinâmica. Esse fato é justificado por se tratar de uma análise em que o número de Prandtl, interpretado fisicamente como a razão entre a difusividade de momento e a difusividade térmica dentro do fluido, é igual a 0,72. Um comportamento oposto pode ser observado na [Figura 35](#), em que o número de Prandtl é definido por 7,07. Para este tipo de fluido o campo de velocidade desenvolve-se mais rapidamente. Além disso, nota-se que a região descendente ocupa uma região transversal maior do que a região ascendente. Essa diferença é ainda mais significativa para os casos em que a superfície em estudo apresenta uma curvatura constante. Como consequência, essa geometria apresenta maior intensificação nas taxas de transferência de calor, quando comparada com os resultados obtidos para o intradorso de uma pá de turbina.

Figura 36 – Evolução longitudinal da média do número de Stanton na direção transversal, como uma função do número de Reynolds. $Pr = 0,72$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A [Figura 36](#) e a [Figura 37](#) ilustram a evolução longitudinal da média do número de

Stanton na direção transversal, como uma função do número de Reynolds para $Pr = 0,72$ e $Pr = 7,07$, respectivamente. Nestas figuras, o lado esquerdo apresenta os resultados relacionados a uma superfície de curvatura variável, e o lado direito refere-se ao caso em que a superfície tem curvatura constante.

Figura 37 – Evolução longitudinal da média do número de Stanton na direção transversal, como uma função do número de Reynolds. $Pr = 7,07$

Fonte: Elaborada pelo autor.

As Tabs. 7 - 10 mostram o comprimento de onda transversal, a posição x em que o valor máximo do número de Stanton no escoamento de Görtler é alcançado, onde $St_{Go}(x)$ denota este valor, e os valores do número de Stanton nesta posição para um escoamento laminar $St_{lam}(x)$, e para um escoamento turbulento $St_{tur}(x)$.

Tabela 7 – Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 0,72$. Superfície de curvatura variável

$\lambda_z^* \times 10^{-4} \text{ m}$	x	$St_{Go}(x) \times 10^{-3}$	$St_{lam}(x) \times 10^{-3}$	$St_{tur}(x) \times 10^{-3}$
8,674	8,75	3,00	0,84	2,74
10,631	9,26	2,90	0,82	2,71
13,059	9,96	2,61	0,79	2,67
16,414	11,65	2,11	0,73	2,59

Tabela 8 – Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 0,72$. Superfície de curvatura constante

$\lambda_z^* \times 10^{-4} \text{ m}$	x	$St_{Go}(x) \times 10^{-3}$	$St_{lam}(x) \times 10^{-3}$	$St_{tur}(x) \times 10^{-3}$
8,674	8,85	5,45	0,84	2,74
10,631	9,93	5,56	0,79	2,67
13,059	11,3	5,52	0,74	2,60
16,414	12,65	5,63	0,70	2,55

Os resultados apresentados na Tabela 7 referem-se ao caso em que a superfície tem curvatura variável. Na Tabela 8 encontram-se os dados obtidos para uma superfície de curvatura

constante. Para estas análises o número de Prandtl adotado é 0,72. Considerando o comportamento do número de Stanton ilustrado na [Figura 36a](#), e os dados mostrados na [Tabela 7](#), é possível observar que a taxa de transferência de calor do escoamento de Görtler desenvolvido sobre uma superfície de curvatura variável é intensificada em todos os comprimentos de onda transversais em estudo, atingindo valores superiores a taxa de transferência de calor de um escoamento laminar. Nota-se ainda que ao considerar $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$ e $\lambda_z^* = 10,631 \times 10^{-4} m$, os valores de St_{Go} atingem um percentual de 8,67% e de 6,55%, respectivamente, acima dos valores obtidos através da fórmula para escoamentos turbulentos.

Ao analisar [Figura 36b](#) e a [Tabela 8](#), nota-se que a taxa de transferência de calor de um escoamento transicional desenvolvido sobre uma superfície côncava de curvatura constante é significativamente intensificada para todos os λ_z^* investigados. O St_{Go} para $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$ é 84,59% maior do que o St_{lam} , e 49,72% maior do que St_{tur} . A taxa de transferência de calor do escoamento transicional caracterizado por vórtices com $\lambda_z^* = 10,631 \times 10^{-4} m$ também são intensificadas, atingindo valores superiores a taxa de transferência de calor de um escoamento laminar em 85,8%, e de um escoamento turbulento em 51,98%. Os vórtices de comprimento de onda transversal igual a $13,059 \times 10^{-4} m$ levam as taxas de transferência de calor a superarem os valores alcançados em um escoamento laminar em $x = 7,17$, atingindo uma intensificação máxima em $x = 11,3$, cujas taxas de transferência de calor são 86,6% e 52,9% maiores do que as taxas obtidas em escoamentos laminar e turbulento, respectivamente. Ainda na [Figura 36b](#) nota-se um comportamento bastante interessante da curva St_{Go} para vórtices com número de onda característico $\lambda_z^* = 16,414$. Há uma perda de transferência de calor na região definida pelo intervalo $11,14 \leq x \leq 12$, onde St_{Go} assume valores menores do que St_{tur} . Isso ocorre pois nesta região o modo fundamental ($k = 1$) perde energia, conforme apresentado na [Figura 33d](#). Próximo a saída do escoamento, há uma nova intensificação das taxas de transferência de calor do escoamento transicional, em que a maior taxa de transferência de calor dentre os quatro escoamentos de Görtler analisados é atingida (ver [Figura 36b](#)).

Tabela 9 – Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 7,07$. Superfície de curvatura variável

$\lambda_z^* \times 10^{-4} m$	x	$St_{Go}(x) \times 10^{-3}$	$St_{lam}(x) \times 10^{-3}$	$St_{tur}(x) \times 10^{-3}$
8,674	8,11	0,99	0,19	1,12
10,631	8,47	0,93	0,19	1,11
13,059	9,22	0,82	0,18	1,09
16,414	10,79	0,66	0,16	1,05

A [Tabela 9](#) e a [Tabela 10](#) mostram os resultados relacionados às taxas de transferência de calor, quantificadas através da média do número de Stanton. Na [Tabela 9](#) encontram-se os dados obtidos através de um escoamento no intradorso de uma pá de turbina. Os resultados para o caso em que a curvatura é constante são mostrados na [Tabela 10](#). Para estas análises foi considerado $Pr = 7,07$. De acordo com a teoria de camada limite, fluido caracterizado pelo

número de Prandtl 7,07 tem uma camada limite hidrodinâmica mais espessa do que a camada limite térmica. Isso reflete na intensificação das taxas de transferência de calor. Neste contexto, as análises com $Pr = 7,07$ apresentam uma menor intensificação nas taxas de transferência de calor no escoamento de Görtler, tanto para o caso em que a superfície apresenta curvatura com raio variável, quanto para o caso em que a superfície é côncava com raio de curvatura constante.

Tabela 10 – Valores de λ_z^* , x , $St_{Go}(x)$, $St_{lam}(x)$ e $St_{tur}(x)$. $Pr = 7,07$. Superfície de curvatura constante

$\lambda_z^* \times 10^{-4} m$	x	$St_{Go}(x) \times 10^{-3}$	$St_{lam}(x) \times 10^{-3}$	$St_{tur}(x) \times 10^{-3}$
8,674	7,0	1,37	0,20	1,15
10,631	7,24	1,31	0,20	1,14
13,059	7,64	1,24	0,20	1,13
16,414	13,54	1,35	0,15	1,01

Para o caso apresentado na [Figura 37a](#), a intensificação ocorre para todos os λ_z^* investigados, no entanto em nenhum dos casos o número de Stanton atinge valores iguais ou superiores as taxas de transferência de calor obtidas em um escoamento turbulento. A maior taxa de transferência de calor foi obtida para o escoamento transicional com $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$, onde St_{Go} atingiu o percentual de 80,8% acima do St_{lam} .

O último caso investigado trata-se de escoamentos sobre uma superfície côncava de curvatura constante. Na [Figura 37b](#) nota-se que os quatro escoamentos de Görtler em estudo atingiram as taxas de transferência de calor de um escoamento turbulento. Para os comprimentos de onda transversais $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$ e $\lambda_z^* = 10,631 \times 10^{-4} m$, o St_{Go} supera o St_{tur} em 16,28% e 12,9%, respectivamente, mantendo-se superior em todo domínio. Para $\lambda_z^* = 13,059 \times 10^{-4} m$, a curva St_{Go} apresenta um comportamento similar aos dois primeiros casos estudados na região limitada por $x = 8,1$. No intervalo $8,2 \leq x \leq 10,7$, as taxas de transferência de calor deste escoamento é menor do que as taxas encontradas em um escoamento turbulento. Na sequência, há um aumento do St_{Go} , resultando em valores maiores do que St_{tur} . Nesta figura é possível observar uma variação bastante significativa na curva St_{Go} para vórtices com $16,414 \times 10^{-4} m$. Inicialmente as taxas de transferência de calor deste escoamento são intensificadas, atingindo St_{tur} . Em seguida identifica-se duas variações de crescimento e decrescimento da curva de St_{Go} . Na saída do escoamento as taxas de transferência de calor são novamente intensificadas, atingindo percentuais de 89,1% e 25,2% maiores do que as taxas de transferência de calor de escoamentos laminar e turbulento, respectivamente.

6.2.2 A influência da curvatura na instabilidade secundária

Uma vez que os vórtices de Görtler atingem uma amplitude suficientemente grande, os efeitos não lineares tornam-se cada vez mais significativos, causando a distorção do escoamento base, o que resulta na formação da clássica estrutura do tipo cogumelo. Esta distribuição

de velocidade causa inflexões nas direções normal à parede (y) e transversal ao escoamento (z). Estas inflexões são instáveis a perturbações não estacionárias, podendo acarretar em uma instabilidade do tipo secundária. A instabilidade secundária é frequentemente usada para explicar os fenômenos de instabilidade induzidos por perturbações tridimensionais em camada limite, o que é de grande importância para o controle do processo de transição laminar-turbulenta. Essa instabilidade em transição dominada por vórtices longitudinais, pode amplificar e alterar o escoamento formando estruturas que podem ser do tipo varicoso, ou sinuoso. O que caracteriza cada um desses tipos de instabilidade é a amplificação de perturbações na direção de inflexão do escoamento. Para o caso em que as perturbações se amplificam em uma direção normal à parede, a instabilidade secundária é dita do tipo varicoso, e o caso em que as perturbações se amplificam na direção longitudinal, a instabilidade secundária é caracterizada pelo modo sinuoso. Neste contexto, optou-se por investigar a influência da curvatura na instabilidade secundária de um escoamento de Görtler, considerando as geometrias caracterizadas pela distribuição de raio de curvatura, representada na [Figura 15a](#), para o comprimento de onda transversal $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$.

Para determinar o carácter não linear da instabilidade secundária, foram realizadas simulações numéricas não lineares, para as quais adotou-se o conjunto de parâmetros físicos e numéricos já mencionado na [Seção 6.2](#) deste capítulo. As perturbações não estacionárias foram introduzidas em três regiões distintas, onde a amplitude dos vórtices de Görtler já apresentavam um valor consideravelmente elevado, com a mesma modulação na direção transversal e com o mesmo comprimento de onda das perturbações que geraram os vórtices de Görtler.

De acordo com [WASSERMANN e KLOKER \(2002\)](#), a evolução temporal da instabilidade secundária no processo de transição laminar-turbulenta é periódica no tempo. Neste sentido, buscou-se interpretar os resultados através de uma análise temporal do comportamento da amplitude de cada modo de Fourier relevante a esta investigação. Além disso, para a apresentação das estruturas vorticais, utilizou-se o critério Q , definido como $Q = 0,5 (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2)$, em que S e Ω são os tensores da taxa de deformação e vorticidade, respectivamente. A norma de um tensor G genérico é adotada como sendo $\|G\| = \sqrt{\text{tr}(GG^T)}$. Assume-se a inserção de pacotes de onda tendo $M = 16$ e $\omega_t = 200Hz$ como frequência fundamental (vide [Equação 4.21](#)).

6.2.2.1 A evolução dos modos varicoso e sinuoso

Em escoamentos com a presença de vórtices de Görtler, o processo de transição laminar-turbulenta através da instabilidade secundária decorre normalmente da amplificação de perturbações que podem gerar os modos varicoso e sinuoso. A fim de verificar se há influência desses modos no processo de transição à turbulência para escoamentos em camada limite sobre superfícies com diferentes distribuições de curvatura, as geometrias descritas no início desta seção foram adotadas.

Na [Figura 38](#) encontra-se ilustrado um esquema das relações entre as perturbações

estacionárias (linhas sólidas) e não estacionárias (linhas tracejadas) para o caso em que a perturbação encontra-se em fase com os vórtices de Görtler (Figura 38a), e em defasagem de fase de 90° com estes vórtices (Figura 38b), apresentado no trabalho de Souza (2017). Nesse esquema, o caso representado pela Figura 38a é caracterizado por perturbações estacionárias e não estacionárias definidas por números reais. A natureza real dessas perturbações favorece a geração do modo varicoso de instabilidade secundária. Para essa configuração, quantidades máximas de injeção e sucção de massa coincidem com as perturbações que geraram os vórtices de Görtler (ROGENSKI, 2015). Para o caso apresentado na Figura 38b, as perturbações não estacionárias são números imaginários puros e, conseqüentemente, as perturbações são inseridas com uma defasagem de 90° na direção transversal. Esse esquema favorece a evolução do modo sinuoso.

Figura 38 – Relações entre perturbações estacionárias e não estacionárias na instabilidade secundária

Fonte: Adaptada de Souza (2017).

Para a inserção das perturbações não estacionárias, utiliza-se a técnica de injeção e sucção de massa na parede. Três pacotes de perturbações de 200 a 3200 Hertz foram inseridos nas regiões definidas por $[5, 88; 6, 14]$, $[6, 38; 6, 64]$, e $[6, 84; 7, 09]$. As perturbações não estacionárias em fase com as perturbações que geraram os vórtices de Görtler (esquema mostrado na Figura 38a), são definidas por $\mathcal{A}_s = 1 \times 10^{-5} + 0 \, i$. Para inserir as perturbações não estacionárias defasadas de 90° da fase que as perturbações que originaram a instabilidade primária na direção z , considera-se $\mathcal{A}_s = 0 + 1 \times 10^{-5} \, i$ (caso apresentado Figura 38b).

Em conformidade com o trabalho de WASSERMANN e KLOKER (2002), o processo da análise de Fourier temporal da instabilidade secundária será apresentado de duas formas e valores em decorrência da magnitude das perturbações. Na Figura 39 é possível identificar uma quebra nos gráficos de amplitude, explicitando uma mudança no processo de análise dos resultados. À esquerda encontra-se uma análise realizada por meio do uso da segunda derivada temporal da velocidade u , e à direita a velocidade u . Ao utilizar a segunda derivada tem-se uma redução nos níveis de ruído apresentados pela análise temporal. Isso ocorre pois altas frequências são efetivamente bem escaladas por ω_t^2 (WASSERMANN; KLOKER, 2002).

A Figura 39 e a Figura 40 apresentam a distribuição da amplitude máxima da velocidade longitudinal u de cada uma das m frequências, onde $m = 1, \dots, 16$. Nessas figuras são apresentadas as frequências de 200 a 3200 Hertz, com incremento de 200 Hertz.

Figura 39 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler, em que as perturbações foram inseridas em fase com o escoamento base

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – A evolução de perturbações não estacionárias em um escoamento base representado por vórtices de Görtler, em que as perturbações foram inseridas em defasagem de 90° com o escoamento base

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o caso ilustrado na [Figura 39](#), as perturbações não estacionárias foram introduzidas em fase com as perturbações estacionárias que geraram os vórtices de Görtler. Já nos casos apresentados na [Figura 40](#), a inserção dessas perturbações ocorreu em fase de defasagem de 90° com os vórtices de Görtler. Nestas figuras, o lado esquerdo ([Figura 39a](#) e [Figura 40a](#))

representa o caso em que a superfície apresenta variação no raio da curvatura, e no lado direito (Figura 39b e Figura 40b) encontra-se o caso em que a superfície adotada apresenta uma curvatura de raio constante. Ao analisar os casos apresentados na Figura 39 e na Figura 40, é possível identificar a existência de interação entre os pacotes de onda e o escoamento base para ambos os casos considerados. Na região onde foram inseridos os pacotes de perturbações nota-se que o comportamento das perturbações de baixa e de alta frequência apresenta uma pequena diferença, onde uma perturbação de baixa frequência decai/cresce mais lentamente se comparada com uma perturbação de alta frequência. Esse comportamento evidencia que o processo que leva o escoamento de um estágio primário para um estágio secundário tanto para o caso em que a curvatura da parede é variável, quanto para o caso representado pela superfície côncava de curvatura constante, é conduzido pela amplificação de altas frequências.

Na Figura 39, o comportamento observado em uma região próxima aos geradores de perturbação não estacionária é estável. Nota-se em ambos os casos analisados um decaimento mais significativo dos modos de baixa frequência, em que esta queda é mais abrupta ao se considerar um escoamento sobre uma superfície de curvatura constante. Para este caso, as mais altas frequências não apresentam um crescimento significativo. Numa região próxima a saída do escoamento, $x \geq 10,2$, há uma mudança de comportamento dos modos de baixa frequência, onde esses modos apresentam uma amplificação abrupta, passando a concorrer com os modos de alta frequência. Este comportamento é identificado em uma região dominada pela instabilidade secundária. Pode-se observar ainda que o modo que apresenta uma maior taxa de crescimento corresponde a 3000 Hertz. Isso não ocorre no caso em que há variação na curvatura da superfície. Na Figura 39a nota-se que houve um pequeno aumento na taxa de crescimento das perturbações numa região próxima a saída do escoamento, onde a maior taxa observada está relacionada a frequência de 3200 Hertz.

Ao analisar a evolução da amplitude dos modos temporais para o caso em que a inserção de perturbações não estacionárias ocorreu em defasagem de 90° com o escoamento base, identifica-se um comportamento mais instável do que nos casos analisados na Figura 39. Na Figura 40 é possível observar que a amplificação de todos os modos ocorre em ambos os casos investigados. No entanto, esse crescimento é mais significativo para os modos do caso apresentado na Figura 40b, onde todas frequências começam a ser exponencialmente amplificadas em $x \geq 8$. A taxa de crescimento dos modos temporais ilustrada na Figura 40a apresenta um comportamento exponencial, onde a amplificação das mais altas frequências se mantém maior do que a amplificação dos modos de baixa frequência em todo o domínio. Por outro lado, para a superfície de curvatura constante há uma maior amplificação de todas as frequências, identificando-se ainda uma competição entre os modos temporais de mais alta e de mais baixa frequência em uma região próxima a saída do escoamento. Este fato evidencia que dentre os quatro casos investigados, este é o mais instável.

As Figs. 41 - 44 apresentam os isocontornos das perturbações não estacionárias da

Figura 41 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas em fase com os vórtices de Görtler. Superfície de curvatura variável

Fonte: Elaborada pelo autor.

velocidade longitudinal u , para as frequências 200 Hz , 400 Hz , 3000 Hz , e 3200 Hz , e as isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, plotadas em $x = 10$. Para as análises ilustradas na [Figura 41](#) (superfície de curvatura variável) e na [Figura 43](#) (superfície de curvatura constante), as perturbações não estacionárias foram inseridas em fase com os vórtices de Görtler. Os casos em que essas perturbações foram inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler são mostrados na [Figura 42](#) (superfície de curvatura variável), e na [Figura 44](#) (superfície de curvatura constante).

Os isocontornos das perturbações representados pela [Figura 41](#) e pela [Figura 43](#) mostram que os valores máximos dos modos temporais são identificados na parte central superior das estruturas em forma de cogumelo. Esse padrão caracteriza a instabilidade do tipo varicoso. Para

o comportamento dos isocontornos de amplitude ilustrados na Figura 42 e na Figura 44 nota-se que os máximos de cada modo temporal localizam-se nas regiões laterais dos vórtices e na região central de haste dos mesmos. Essa regularidade é atribuída à instabilidade secundária do tipo sinuoso (SOUZA, 2017).

Figura 42 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler. Superfície de curvatura variável

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dando continuidade às investigações voltadas à instabilidade secundária, uma análise qualitativa das estruturas vorticais é representada por isosuperfícies de $Q = 0,1$ na Figura 45 e na Figura 46. A Figura 45a e a Figura 46a representam a evolução da instabilidade secundária para um escoamento em camada limite sobre uma superfície de curvatura variável, onde perturbações não estacionárias foram inseridas em fase com os vórtices de Görtler, e com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler, respectivamente. Por outro lado, a evolução da

Figura 43 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas em fase com os vórtices de Görtler. Superfície de curvatura constante

Fonte: Elaborada pelo autor.

instabilidade secundária do tipo varicoso e sinuoso, em um escoamento desenvolvido sobre uma superfície côncava com curvatura de raio constante, encontra-se ilustrada na [Figura 45b](#) e na [Figura 46b](#), respectivamente. As estruturas vorticais são apresentadas para o instante de tempo inicial associado à periodicidade da instabilidade secundária. Os resultados ilustrados nestas figuras trazem evidências de que o modo de instabilidade secundária do tipo sinuoso domina o processo de transição laminar-turbulenta ao se considerar um escoamento sobre uma parede côncava devido à sua maior eficácia de receptividade. Ao analisar a [Figura 45a](#) e a [Figura 46a](#) nota-se a ausência das estruturas vorticais, evidenciando que escoamentos desenvolvidos sobre superfícies com variação no raio de curvatura são mais estáveis para o comprimento de onda transversal investigado, $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$.

Figura 44 – Isocontornos das perturbações não estacionárias da velocidade longitudinal u . Isolinhas de velocidade longitudinal do escoamento de Görtler, de $u = 0,1$ a $u = 0,9$, são plotadas em $x = 10$ para referência. Perturbações não estacionárias foram inseridas com uma defasagem de fase de 90° em relação aos vórtices de Görtler. Superfície de curvatura constante

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 45 – Visualização das estruturas vorticais do escoamento através de isosuperfícies $Q = 0, 1$, associadas à perturbações não estacionárias em fase com os vórtices de Görtler

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Visualização das estruturas vorticais do escoamento através de isosuperfícies $Q = 0, 1$, associadas à perturbações não estacionárias em defasagem de 90° com os vórtices de Görtler

Fonte: Elaborada pelo autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese a evolução de perturbações estacionárias e não estacionárias em uma camada limite laminar desenvolvida sobre diferentes distribuições de curvatura, foi investigada numericamente. Para esta investigação foi utilizado um código de simulação numérica paralelizado, com alta ordem de precisão - HOPE.

Inicialmente foram realizados estudos para analisar a influência da variação da curvatura e os efeitos do comprimento de onda transversal sobre a evolução dos vórtices de Görtler. Para este estudo foram adotadas as distribuições de curvatura côncava, côncava-convexa, côncava-plana, e periódica, e o conjunto de comprimentos de onda na direção transversal $\lambda_z^* = \{7, 85, 15, 7, 31, 4\} \times 10^{-3} m$. Esta investigação mostra que camada limite em superfícies de curvatura constante são mais instáveis à vórtices de Görtler. Os resultados deste estudo suportam a conclusão de que o raio de curvatura e o comprimento de onda transversal são parâmetros importantes no processo de transição laminar-turbulenta causada por vórtices de Görtler. Ao desativar os efeitos centrífugos devido às variações de curvatura da parede, a perda de energia de um vórtice bem estabelecido depende apenas da viscosidade. Como a estabilidade viscosa é mais eficaz na região da camada limite, quanto maior o comprimento de onda na direção z menos maleável um vórtice de Görtler se torna. Este fato mostra que, se o interesse é no controle de escoamento laminar, deve-se considerar os valores de comprimento de onda transversal mais baixos.

Na sequência mantém-se a hipótese de não linearidade para estudar o desenvolvimento não linear dos vórtices de Görtler sobre o intradorso de uma pá de turbina. Para esta investigação considera-se duas geometrias, onde uma delas é caracterizada por uma superfície de curvatura variável, e a outra por uma superfície de curvatura constante. Com a finalidade de investigar os efeitos do comprimento de onda transversal na instabilidade primária, e nas taxas de transferência de calor, foram investigados quatro comprimentos de onda na direção z , definidos pelo conjunto $\lambda_z^* = \{8, 674, 10, 631, 13, 059, 16, 414\} \times 10^{-4} m$. A evolução dos vórtices de Görtler observada

para $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$ mostrou que este é o comprimento de onda transversal mais perigoso no processo de transição laminar-turbulenta para ambos os casos de distribuição de curvatura.

Ao estudar as taxas de transferência de calor em um escoamento de Görtler verificou-se que essas taxas podem ser intensificadas de modo a superar as taxas de transferência de calor em um escoamento turbulento para ambos os casos de distribuição de curvatura investigados. No entanto, os efeitos centrífugos presentes em paredes côncavas com curvatura de raio constante causam uma maior intensificação nas taxas de transferência de calor, levando o número de Stanton de um escoamento transicional a percentuais de 89,1% e de 25,2% maiores do que as taxas de transferência de calor obtidas nos escoamentos laminar e turbulento, respectivamente.

Para finalizar as investigações propostas por esta tese, foram analisados os efeitos da variação da curvatura na instabilidade secundária. Com a finalidade de identificar o carácter não linear da instabilidade secundária, considera-se o comprimento de onda transversal $\lambda_z^* = 8,674 \times 10^{-4} m$, e as distribuições de curvatura descritas anteriormente. As perturbações não estacionárias foram introduzidas em três regiões distintas, onde a amplitude dos vórtices de Görtler já apresentavam um valor consideravelmente elevado, com a mesma modulação na direção transversal e com o mesmo comprimento de onda das perturbações que geraram os vórtices de Görtler. Ambos os modos, sinuoso e varicoso, são identificados nestas análises. No entanto as estruturas vorticais observadas no escoamento em camada limite para a superfície de curvatura constante traz evidências de que o modo de instabilidade secundária do tipo sinuoso domina o processo de transição laminar-turbulenta devido à sua maior eficácia de receptividade para este comprimento de onda transversal analisado.

Como sugestões para continuidade deste projeto de pesquisa, têm-se:

- Investigação da influência de outros fatores no processo de transição laminar turbulenta, como a presença de gradiente de pressão;
- Adaptação do código computacional para inclusão de escoamento base tridimensional, possibilitando o estudo de outras instabilidades, como por exemplo o vórtice cruzado;
- Estudo de novas distribuições de curvatura da parede, como por exemplo, o lado de sucção da pá de turbina;
- Análise de métodos de controle de escoamento para retardar a transição para a turbulência.

REFERÊNCIAS

- BARIO, F.; BERAL, C. Boundary layer measurements on the pressure and suction sides of a turbine inlet guide vane. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 17, p. 1–9, 1998. Citado na página 29.
- BENMALEK, A.; SARIC, W. S. Effects of curvature variations on the nonlinear evolution of Goertler vortices. **Physics of Fluids**, v. 6, n. 10, p. 3353–3367, 1994. Citado nas páginas 15, 16, 26, 63, 64, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 76, 78 e 81.
- BLAIR, M. F. Influence of free-stream turbulence on boundary layer transition in favorable pressure gradients. **ASME J. Eng. Power**, v. 104, n. 4, p. 743–750, 1982. Citado na página 29.
- BOTTARO, A.; KLINGMANN, B. G. B.; ZEBIB, A. Görtler vortices with system rotation. **Theoretical and computational fluid dynamics**, v. 8, p. 325–347, 1996. Citado nas páginas 26 e 42.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUATERONI, A.; ZANG, T. **Spectral methods in fluid dynamics**. [S.l.]: Springer Verlag, 1988. Citado na página 54.
- CLAUSER, M.; CLAUSER, F. **The effect of Curvature on the Transition from Laminar to Turbulent Boundary Layer**. Pasadena, California, 1937. Citado na página 41.
- CRANE, R. Boundary layers and transition on concave surfaces. **Boundary Layer in Turbomachines**, v. 6, 1991. Citado na página 28.
- DEAN, W. R. Fluid motion in a curved channel. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 121, n. 787, p. 623–631, 1928. Citado na página 36.
- DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic Stability**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1981. Citado na página 39.
- EIBECK, P. A. Heat transfer effects on a longitudinal vortex embedded in a turbulent boundary layer. **Heat Transfer**, v. 3, p. 1115–1120, 1986. Citado na página 27.
- _____. The effects of longitudinal vortices embedded in a turbulent boundary layer on momentum and thermal transport. **ASME Journal of Heat Transfer**, v. 33, p. 166–173, 1987. Citado na página 27.
- FIEBIG, M. Vortices and Heat Transfer. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 77, p. 3–18, 1997. Citado na página 27.
- FLORYAN, J. M. Stability of Görtler Vortices in Boundary Layers. **AIAA J.**, v. 20, n. 3, p. 316–324, 1982. Citado nas páginas 45 e 46.
- _____. Effects of blowing on the Görtler instability of boundary layers. **AIAA Journal**, v. 23, n. 8, p. 1287–1288, 1985. Citado na página 26.

_____. Görtler instability of boundary layers over concave and convex walls. **Physics of Fluids**, v. 29, n. 8, p. 2380–2387, 1986. Citado na página 26.

_____. On the Görtler instability of boundary layers. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 28, n. 3, p. 235–271, 1991. Citado nas páginas 26, 43 e 45.

FLORYAN, J. M.; SARIC, W. S. Effects of Suction on the Görtler Instability of Boundary Layers. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 21, n. 12, p. 1635–1639, 1983. Citado na página 26.

GIRGIS, I. G.; LIU, J. T. C. Mixing enhancement via the release of strongly nonlinear longitudinal Görtler vortices and their secondary instabilities into the mixing region. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 468, p. 29–75, 2002. Citado na página 26.

GÖRTLER, H. **On the three-dimensional instability of laminar boundary layer on concave walls**. [S.l.], 1940. Citado nas páginas 15, 36, 37, 41 e 42.

GOSTELOW, J. P.; MAHALLATI, A.; CARSCALLEN, W. E.; RONA, A. Encounters with vortices in a turbine nozzle passage. **International Journal of Rotating Machinery**, v. 2012, 2012. Citado na página 31.

GOULPIÉ, P.; KLINGMANN, B. G. B.; BOTTARO, A. Görtler vortices in boundary layers with streamwise pressure gradient. **Physics of Fluids**, v. 8, p. 451–459, 1996. Citado nas páginas 64 e 66.

HALL, P. Görtler vortices in growing boundary layers: The leading edge receptivity problem, linear growth and the nonlinear breakdown stage. **Mathematika**, London Mathematical Society, v. 37, n. 2, p. 151–189, 1990. Citado na página 26.

ITO, A. The generation and breakdown of longitudinal vortices along a concave wall. **J. Japan Soc. Aero. Space Sci.**, v. 28, p. 327–333, 1980. Citado nas páginas 26 e 53.

_____. Breakdown structure of longitudinal vortices along a concave wall. **J. Japan Soc. Aero. Space Sci.**, v. 33, p. 166–173, 1985. Citado na página 26.

_____. The generation and breakdown of longitudinal vortices along a concave wall: on the relation of horseshoe-type vortices and fluctuating flows. **J. Japan Soc. Aero. Space Sci.**, v. 36, p. 274–279, 1988. Citado na página 26.

KELLER, F. J.; WANG, T. W. Flow and heat transfer behavior in transitional boundary layers with streamwise acceleration. In: **Heat Transfer; Electric Power; Industrial and Cogeneration**. [S.l.: s.n.], 1994. v. 4. Citado na página 29.

KESTORAS, M.; SIMON, T. Effect of free-stream turbulence intensity on a boundary layer recovering from concave curvature effects. In: **Combustion and Fuels; Oil and Gas Applications; Cycle Innovations; Heat Transfer; Electric Power; Industrial and Cogeneration; Ceramics; Structures and Dynamics; Controls, Diagnostics and Instrumentation; IGTI Scholar Award**. [S.l.: s.n.], 1993. v. 2. Citado na página 29.

KLOKER, M. A robust high-resolution split-type compact FD scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. **Applied Scientific Research**, v. 59, p. 353–377, 1998. Citado na página 55.

KLOKER, M.; KONZELMANN, U.; FASEL, H. F. Outflow boundary conditions for spatial navier-stokes simulations in transition boundary layers. **AIAA journal**, v. 31, p. 620–628, 1993. Citado na página 50.

KOTTKE, V. Taylor–Görtler vortices and their effect on heat and mass transfer. In: **8th Int. Heat Transfer Conf.** Washington DC: [s.n.], 1986. p. 1139–1144. Citado na página 28.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. [S.l.]: Academic Press, 2002. Citado nas páginas 37 e 38.

LEE, K.; LIU, J. T. C. On the growth of the mushroomlike structures in nonlinear spatially developing Goertler vortex flow. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, v. 4, n. 1, p. 95–103, 1992. Citado na página 26.

LELE, S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of Computational Physics**, v. 103, p. 16–42, 1992. Citado na página 61.

LI, F.; MALIK, M. R. Fundamental and subharmonic secondary instabilities of Görtler vortices. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 297, p. 77–100, 1995. Citado na página 40.

LIN, M. H.; HWANG, G. J. Numerical prediction of the formation of Görtler vortices on a concave surface with suction and blowing. **Int. J. for Numerical Methods in Fluids**, v. 31, p. 1281–1295, 1999. Citado na página 26.

LIU, J. T. C. Nonlinear instability of developing streamwise vortices with applications to boundary layer heat transfer intensification through an extended Reynolds analogy. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, v. 366, p. 2699–2716, 2008. Citado nas páginas 26 e 28.

LYES, K.; HARUNORI, Y.; JORGE, P.; INNOCENT, M. Heat transfer by Görtler vortices developed on a wall with finite conductivity. In: **Rencontre du non-linéaire**. [S.l.: s.n.], 2014. Citado na página 28.

MACCORMACK, P.; WELKER, H.; KELLERHER, M. Taylor-Görtler Vortices and Their Effect on Heat Transfer. **AME J. Heat Transfer**, v. 92, n. 1, p. 101–112, 1970. Citado nas páginas 26 e 27.

MALATESTA, V. **Simulação numérica direta de escoamentos sobre superfícies côncavas com transferência de calor**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2014. Citado na página 64.

MALATESTA, V.; ROGENSKI, J. K.; SOUZA, L. F. de. Heat transfer enhancement via Görtler flow with spatial numerical simulation. **International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow**, Emerald Publishing Limited, v. 27, n. 1, p. 189–209, 2017. Citado na página 28.

MALATESTA, V.; SOUZA, L. F.; LIU, J. T. C. Influence of goertler of vortices spanwise wavelength on the heat transfer rates. **Computational Thermal Sciences**, v. 5, p. 389–400, 2013. Citado na página 28.

MALATESTA, V.; SOUZA, L. F.; LIU, J. T. C.; KLOKER, M. J. Heat transfer analysis in a flow over concave wall with primary and secondary instabilities. In: **IUTAM-ABCM Symposium on Laminar Turbulent Transition**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 487–495. Citado na página 28.

MALIK, M. R.; HUSSAINI, M. Y. Numerical simulation of interactions between Görtler vortices and Tollmien-Schlichting waves. **J. Fluid Mech.**, v. 210, p. 183–199, 1990. Citado na página 26.

MARKOVIN, M. V. Transition in open flow systems-a reassessment. **Bull. Am. Phys. Soc.**, v. 39, p. 1882, 1994. Citado na página 39.

MENDONÇA, M. T. **Código numérico: Teoria de estabilidade linear de vórtices de Görtler em placa plana**. 2012. Citado na página 63.

MITSUDHARMADI, H.; WINOTO, S. H.; SHAH, D. A. Development of boundary layer flow in the presence of forced wavelength Görtler vortices. **Physics of Fluids**, v. 16, n. 11, p. 3983–3996, 2004. Citado nas páginas 26 e 28.

_____. Splitting and merging of Görtler vortices. **Physics of Fluids**, v. 17, p. 1–12, 2005. Citado na página 28.

_____. Development of most amplified wavelength Görtler. **Physics of Fluids**, v. 18, p. 1–12, 2006. Citado nas páginas 26 e 42.

MOMAYEZ, L.; DUPONT, P.; PEERHOSSAINI, H. Some unexpected effects of wavelength and perturbations strength on heat transfer enhancement by Görtler instability. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 47, n. 17, p. 3783–3795, 2004. Citado nas páginas 26, 28 e 53.

NARASIMHA, R. The laminar-turbulent transition zone in the boundary layer. **Prog. Aerospace Sci.**, v. 22, p. 29–80, 1985. Citado nas páginas 29 e 30.

OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G. Verification and validation in computational fluid dynamics. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 38, p. 209–272, 2002. Citado na página 63.

OZALP, A. A.; UMUR, H. Fluid flow and heat transfer in transitional boundary layers: effects of surface curvature and free stream velocity. **Heat Mass Transfer**, v. 43, p. 7–15, 2006. Citado na página 28.

PAPA, M.; GOLDSTEIN, R. J.; GORI, F. Numerical heat transfer predictions and mass/heat transfer measurements in a linear turbine cascade. **Applied Thermal Engineering**, v. 27, p. 771–778, 2007. Citado na página 31.

PEERHOSSAINI, H.; WESFREID, J. E. Experimental study of the Taylor–Görtler instability. In: WESFREID, J. E.; BRAND, H. R.; MANNEVILLE, P.; ALBINET, G.; BOCCARA, N. (Ed.). **Propagation in Systems Far from Equilibrium**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1988. p. 399–412. Citado na página 29.

PETRI, L. A. **Simulação numérica direta de escoamento transicional sobre uma superfície contendo rugosidade**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2015. Citado na página 58.

REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A**, v. 174, p. 935–982, 1983. Citado na página 35.

RHEE, D.; CHO, H. H. Effect of vane/blade relative position on heat transfer characteristics in a stationary turbine blade: Part 2. blade surface. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 47, p. 1544–1554, 2008. Citado na página 30.

ROACHE, P. J. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. annual review of fluid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 29, p. 123–160, 1997. Citado na página 63.

ROGENSKI, J. K. **Desenvolvimento e otimização de um código paralelizado para simulação de escoamentos incompressíveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado na página 58.

ROGENSKI, J. K. **Influência do gradiente de pressão na transição em escoamentos sobre superfícies côncavas**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2015. Citado nas páginas 58, 59, 73 e 94.

ROY, C. J.; OBERKAMPF, W. L. A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 2131–2144, 2011. Citado na página 63.

SARIC, W. S. Görtler vortices. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 26, p. 379–409, 1994. Citado na página 42.

SARIC, W. S.; REED, H. L.; KERSCHEN, E. J. Boundary-layer receptivity to freestream disturbances. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 34, n. 1, p. 291–319, 2002. Citado na página 38.

SCHLICHTING, H. **Boundary layer theory**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1979. Citado nas páginas 36, 51 e 86.

SETHURAMAN, E.; ACHARYA, S. Mass heat transfer in rotating, smooth, high-aspect ratio (4:1) coolant channels with curved walls. **Journal of Turbomachinery**, v. 131, p. 1–9, 2009. Citado na página 31.

SOUZA, L. F. **Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies côncavas**. Tese (Doutorado) — Instituto tecnológico de aeronáutica, 2003. Citado nas páginas 43, 45, 46, 47, 48, 49, 56, 57, 58, 59, 60 e 61.

SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar–turbulent transition studies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 48, p. 565–592, 2005. Citado na página 55.

SOUZA, L. F. de. On the odd and even secondary instabilities of görtler vortices. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, v. 31, n. 4, p. 405–425, 2017. Citado nas páginas 94 e 98.

SOUZA, L. F. de; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. de; KLOKER, M. Seeding of Görtler vortices through a suction and blowing strip. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, XXVI, p. 269–279, 2004. Citado nas páginas 26 e 43.

SWEARINGEN, J.; BLACKWELDER, R. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 182, p. 255–290, 1987. Citado nas páginas 26, 53, 67, 68 e 73.

TANDIONO; WINOTO, S. H.; SHAH, D. A. Visualizing shear stress in Görtler vortex flow. **Journal of Visualization**, v. 12, n. 3, p. 195–202, 2009. Citado nas páginas 26 e 28.

_____. Wall shear stress in Görtler vortex boundary layer flow. **Physics of Fluids**, v. 21, p. 1–9, 2009. Citado na página 26.

TAYLOR, G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 223, p. 289–343, 1923. Citado na página 36.

TOE, R.; AJAKH, A.; PEERHOSSAINI, H. Heat transfer enhancement by Görtler instability. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 23, n. 2, p. 194–204, 2002. Citado na página 27.

TORII, K.; YANAGIHARA, J. I. The effects of longitudinal vortices on heat transfer of laminar boundary layer. **The Japan Society of Mechanical Engineers**, v. 32, p. 395–402, 1989. Citado na página 27.

_____. A review on heat transfer enhancement by longitudinal vortices. **Journal of the Heat Transfer Society of Japan**, v. 36, p. 73–86, 1997. Citado na página 27.

TURNER, A. B. Local heat transfer measurements on a gas turbine blade. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 13, n. 1, p. 1–12, 1971. Citado nas páginas 15, 29 e 30.

UMUR, H.; KARAGÖZ, I. An investigation of external flows with various pressures and surfaces. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 23, n. 3, p. 411–419, 1999. Citado na página 27.

WANG, H. P.; OLSON, S. J.; GOLDSTEIN, R. J. Effect of High Free-Stream Turbulence With Large Length Scale on Blade Heat/Mass Transfer. In: **Heat Transfer; Electric Power; Industrial and Cogeneration**: International gas turbine and aeroengine congress and exhibition. [S.l.: s.n.], 1998. v. 4. Citado na página 30.

_____. Development of Taylor-Görtler Vortices Over the Pressure Surface of a Turbine Blade. **Journal of Heat Transfer**, v. 127, n. 5, p. 540–543, 2005. Citado nas páginas 30 e 64.

WANG, H. P.; OLSON, S. J.; GOLDSTEIN, R. J.; ECKERT, E. R. G. Flow Visualization in Linear Turbine Cascade of High Performance Turbine Blades. **ASME J. Turbomach.**, v. 119, n. 1, p. 1–8, 1997. Citado nas páginas 15, 30, 64 e 83.

WASSERMANN, P.; KLOKER, M. Mechanisms and passive control of crossflow-vortex-induced transition in a three-dimensional boundary layer. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 456, p. 49–84, 2002. Citado nas páginas 59, 93 e 94.

WISSINK, W. R. J. G.; HODSON, H. P. The influence of disturbances carried by periodically incoming wakes on the separating flow around a turbine blade. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 27, p. 721–729, 2006. Citado na página 31.

XUN, Q.; WANG, B.; YEE, E. Large-eddy simulation of turbulent heat convection in a spanwise rotating channel flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 54, p. 698–716, 2011. Citado na página 31.

YANAGIHARA, J. I.; TORII, K. Enhancement of laminar boundary layer heat transfer by a vortex generator. **JSME International Journal**, v. 35, p. 400–405, 1992. Citado na página 27.

ZAKI, T. A.; WISSINK, P. A. D. J. G.; REDI, W. Direct computations of boundary layers distorted by migrating wakes in a linear compressor cascade. **Flow Turbulence Combustion**, v. 83, n. 3, p. 307–322, 2009. Citado na página [31](#).

ZANG, T. A.; KRIST, S. E.; HUSSAINI, M. Y. Resolution requirements for numerical simulations of transition. **J. of Scientific Computing**, v. 4, p. 197–217, 1989. Citado na página [54](#).