Extensões em problemas de corte: padrões
compartimentados e problemas acoplados

Aline Aparecida de Souza Leão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Extensões em problemas de corte: padrões compartimentados e problemas acoplados¹

Aline Aparecida de Souza Leão

***Orientador:* Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação - ICMC-USP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em
Ciências - Ciências de Computação e Matemática
Computacional. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Março de 2013

¹ Este trabalho foi financiado pela FAPESP

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L437e Leão, Aline Aparecida de Souza
 Extensões em problemas de corte: padrões
 compartimentados e problemas acoplados / Aline
 Aparecida de Souza Leão; orientador Marcos Nereu
 Arenales. -- São Carlos, 2013.
 178 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
 Universidade de São Paulo, 2013.

 1. problema de corte unidimensional. 2. problema
 de corte bidimensional. 3. mochila compartimentada.
 4. dimensionamento de lotes. I. Arenales, Marcos
 Nereu, orient. II. Título.

Dedico este trabalho a pessoa que mais amo,
Devanira (minha mãe).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado e abençoado em todas as etapas necessárias deste trabalho e em todos os momentos da minha vida.

A minha mãe, a quem eu amo muito, pelo carinho, paciência e pela preocupação.

A minha irmã Carla pelo apoio e paciência e carinho.

Ao meu pai pela torcida.

Ao professor Arenales pela orientação, amizade e paciência, um exemplo como profissional.

À Selma pelo carinho e cuidado em um momento importante de minha vida.

Ao professor Zeger Degraeve pela orientação no meu doutorado sanduíche.

A minha avó Maria, ao tio Hélio e madrinha Cida pela preocupação e pelas orações.

Aos meus amigos Giseli, Josi, Josuel, Laís e Letrícia pela companhia muito agradável.

Aos meus colegas e amigos de laboratório: Ana Paula (minha amiga e vizinha); Andreza (que tive o prazer de conviver neste último ano de doutorado); Cherri (sempre disposto a ajudar, até leu alguns capítulos desta tese quando pedi); Léo (sempre brincalhão); Marcos (que sempre que dava algum problema no código ou no computador tentava me ajudar); Pamela (meio doidinha e sempre prestativa); Victor (que registrou momentos inusitados nas histórias em quadinhos); Claudia; Douglas; Márcio; Mayron; Pedro; Tamara. Todos vocês proporcionaram bons momentos no LOt.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para este trabalho.

Resumo

Nesta tese é abordado o problema da mochila compartimentada e o problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao problema dimensionamento de lotes. Para o problema da mochila compartimentada é apresentada a versão unidimensional e proposta a versão bidimensional, denominados como problema da mochila compartimentada unidimensional e problema da mochila compartimentada bidimensional, respectivamente. Para o problema de corte de estoque acoplado ao dimensionamento de lotes são apresentadas três variações: uma máquina para produzir um tipo de objeto; uma máquina para produzir vários tipos de objetos; múltiplas máquinas para produzir vários tipos de objetos. Algumas formulações matemáticas de programação inteira e inteira-mista, decomposições dos problemas em problema mestre e subproblemas e heurísticas baseadas no método geração de colunas são propostas para os problemas da mochila compartimentada e o problema acoplado. Em específico, para o problema acoplado são aplicadas decomposições Dantzig-Wolfe, que podem ser por período, por máquina ou por período e máquina. Além disso, uma heurística baseada em grafo E/OU é proposta para o problema da mochila compartimentada bidimensional.

Palavras-chave: problema da mochila compartimentada; problemas de corte unidimensional; problemas de corte bidimensional; problema de dimensionamento de lotes.

Abstract

In this thesis we present the constrained compartmentalized knapsack problem and the one dimensional cutting stock problem integrated with the capacitated lot sizing problem. For the constrained compartmentalized knapsack problem, the one dimensional version is presented and the two dimensional version is proposed, called one-dimensional compartmentalized knapsack problem and two-dimensional compartmentalized knapsack problem, respectively. For the cutting stock problem integrated with the capacitated lot sizing problem three variations are considered: one machine to produce one type of object; one machine to produce multiple types of objects; multiple machines to produce multiple types of objects. Some integer and mixed programming formulations, decompositions of the problems in master problem and subproblems and heuristics based on column generation method are proposed for the compartmentalized knapsack problem and the cutting stock problem integrated with the capacitated lot sizing problem. In particular, the period, the machine, and the period and machine Dantzig-Wolfe decompositions are applied for the integrated problem. Moreover, a heuristic based on the graph AND/OR is proposed for the two-dimensional compartmentalized knapsack problem. Computational results show that these mathematical formulations and methods provide good solutions.

Keywords: compartmentalized knapsack problem; one-dimensional cutting stock problem; two-dimensional cutting stock problem; lot sizing problem.

Sumário

1	Considerações iniciais	1
I	Problema da mochila compartimentada: casos unidimensional e bi-dimensional	3
2	Introdução	5
2.1	Padrões de corte clássicos	7
2.2	Problema da mochila compartimentada	8
2.3	Objetivos	9
2.4	Organização do texto	9
3	Revisão da literatura	11
3.1	Problemas de corte unidimensional estagiados	11
3.2	Problemas de corte bidimensional estagiados	16
4	Mochila compartimentada unidimensional	23
4.1	Formulações matemáticas	23
4.1.1	Formulação não-linear inteira	24
4.1.2	Problema reformulado	25
4.1.3	Formulação linear inteira	26
4.2	Limitantes superiores	27
4.2.1	Super compartimentos	27
4.2.2	Problema mestre relaxado: método geração de colunas	28
4.3	Métodos de solução	29
4.3.1	Problema mestre restrito: geração de colunas estática	29
4.3.2	Problema mestre restrito: geração de colunas dinâmica	30
4.4	Resultados computacionais	31
4.4.1	Exemplos gerados	31
4.4.2	Limitantes superiores: problema mestre relaxado e super compartimentos	32
4.4.3	Formulação linear inteira	33

4.4.4	Formulação não linear inteira	33
4.4.5	Geração de colunas estática e dinâmica	33
4.5	Conclusões	38
5	Mochila compartimentada bidimensional	39
5.1	Definição	39
5.2	Formulações matemáticas para o segundo estágio de corte na placa realizado na horizontal	43
5.2.1	Modelo compartimentado horizontal	43
5.2.2	Modelo compartimentado das prateleiras	46
5.3	Formulações matemáticas para o segundo estágio de corte na placa realizado na vertical	50
5.3.1	Modelo compartimentado vertical	50
5.3.2	Modelo compartimentado das colunas	52
5.4	Formulação generalizada: segundo estágio de corte na placa realizado na vertical ou horizontal	54
6	Métodos de solução	57
6.1	Geração de colunas	58
6.2	Subproblema (6.1) - (6.2)	59
6.2.1	Formulação de Furini et al.	60
6.2.2	Formulação de Lodi & Monaci	62
6.2.3	Heurística	64
6.2.4	Grafo E/OU	68
6.3	Grafo E/OU: mochila compartimentada bidimensional	71
6.3.1	Busca em grafo E/OU	72
6.3.2	Cálculo do limitante superior	73
6.3.3	Critério de seleção	74
6.3.4	Algoritmo	74
6.4	Limitante superior para o problema da mochila compartimentada bidimensional	75
6.4.1	Geração de colunas	76
6.4.2	Programação linear inteira : super compartimentos bidimensionais . . .	77
6.4.3	Programação linear	77
7	Resultados Computacionais	79
7.1	Gerador de dados para o problema da mochila compartimentada bidimensional	79
7.2	Segundo estágio de corte na placa realizado na horizontal	81
7.2.1	Limitantes superiores	81
7.2.2	Soluções factíveis	82
7.3	Segundo estágio de corte na placa realizado na vertical	87

7.3.1	Limitantes superiores	87
7.3.2	Soluções factíveis	88
7.4	Segundo estágio de cortes na placa realizado na vertical ou horizontal	91
7.4.1	Limitantes superiores	91
7.4.2	Soluções factíveis	92
8	Conclusões	95
II	Problema de corte de estoque acoplado ao dimensionamento de lotes	98
9	Introdução	99
10	Revisão da Literatura	103
10.1	Problema de dimensionamento de lotes combinado com corte de estoque	103
10.2	Programação da produção em indústrias de papel	106
11	Problema acoplado com uma máquina e um tipo de objeto	109
11.1	Formulação compacta	110
11.2	Formulação estendida	112
11.3	Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe	115
11.4	Limitantes inferiores e geração de colunas	116
11.4.1	Geração de colunas para o problema acoplado com a formulação estendida	117
11.4.2	Geração de colunas para o problema acoplado com a formulação estendida e decomposição Dantzig-Wolfe	118
11.5	Resultados computacionais	119
11.5.1	Dados	119
11.5.2	Limitantes inferiores	120
11.5.3	Soluções factíveis	122
11.6	Conclusões	124
12	Problema acoplado com uma máquina e múltiplos tipos de objetos	125
12.1	Formulação compacta	126
12.2	Formulação estendida	128
12.3	Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe	130
12.4	Limitantes inferiores e geração de colunas	132
12.4.1	Geração de colunas para a formulação estendida	133
12.4.2	Geração de colunas para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe	133
12.5	Resultados computacionais	134

12.5.1	Limitantes inferiores	135
12.5.2	Soluções factíveis	136
12.6	Conclusões	138
13	Problema acoplado com múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas	141
13.1	Formulação compacta	143
13.2	Formulação estendida	144
13.3	Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe	146
13.3.1	Decomposição por período	147
13.3.2	Decomposição por máquina	149
13.3.3	Decomposição por período e máquina	150
13.4	Heurísticas de Poltronieri et al. (2008)	152
13.5	Limitantes inferiores e geração de colunas	155
13.5.1	Geração de colunas para a formulação estendida	156
13.5.2	Geração de colunas para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe	156
13.6	Resultados computacionais	160
13.6.1	Limitantes inferiores	161
13.6.2	Soluções factíveis	162
13.7	Conclusões	164
14	Conclusões	167
15	Considerações finais	169

Lista de Figuras

3.1	Corte de rolos de papel para a produção de caixas de papelão.	17
3.2	Processo de perda em um padrão de corte (Vanderbeck, 2001).	18
3.3	Padrão formato T (Cui, 2004).	19
3.4	Subplaca (Puchinger & Raidl, 2007).	20
3.5	Representação de um <i>Bin</i> (<i>Bin</i> 1) (Puchinger & Raidl, 2007).	20
3.6	Padrão TX (Cui & Liu, 2008).	22
4.1	Perfil de desempenho do gap para $Z = 1$	35
4.2	Perfil de desempenho do gap para $Z = 5$	36
4.3	Perfil de desempenho do gap para $Z = 7$	37
5.1	Divisão da placa em compartimentos.	40
5.2	Padrão compartimentado bidimensional: compartimentos com o primeiro estágio de corte na horizontal.	40
5.3	Padrão compartimentado bidimensional: compartimentos com o primeiro estágio de corte na vertical.	41
5.4	Padrão compartimentado: primeiro compartimento com o primeiro estágio de corte na vertical, segundo e terceiro compartimentos com primeiro estágio de corte na horizontal.	41
5.5	Representação dos itens do tipo 1, 2 e 3.	48
5.6	Representação de como deve ser composição dos primeiros itens nas prateleiras.	50
6.1	Ilustração de uma faixa.	65
6.2	Divisão do compartimento em faixas.	65
6.3	Ilustração de uma coluna.	67
6.4	Divisão do compartimento em colunas.	67
6.5	Representação de um padrão de corte pela sequência de cortes em objetos intermediários.	68
6.6	Padrão de corte obtidos pela sequência de cortes c_1, c_2, c_3	69
6.7	Grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada bidimensional.	73
9.1	Uma máquina para a produção de bobinas.	101

9.2	Várias máquinas para a produção de bobinas.	101
-----	---	-----

Lista de Tabelas

3.1	Classificação dos artigos de acordo com o nome dado a problemas compartimentados	16
4.1	Estrutura matricial do problema mestre.	26
4.2	Características dos problemas.	32
4.3	Gap médio dos limitantes superiores.	32
4.4	Tempo computacional médio (segundos) das heurísticas.	35
4.5	Gap: heurísticas com $Z = 1$	35
4.6	Gap: heurísticas com $Z = 5$	36
4.7	Gap: heurísticas com $Z = 7$	37
7.1	Característica de cada grupo de exemplares.	80
7.2	Resultados dos limitantes superiores - segundo estágio de corte na horizontal. .	81
7.3	Resultados das formulações matemáticas - segundo estágio de corte na horizontal.	83
7.4	Resultados das heurísticas com $Z = 1$ - segundo estágio de corte na horizontal.	84
7.5	Resultados das heurísticas com $Z = 5$ - segundo estágio de corte na horizontal.	85
7.6	Resultados das heurísticas com $Z = 7$ - segundo estágio de corte na horizontal.	86
7.7	Resultados dos limitantes superiores - segundo estagio de corte na vertical. . .	88
7.8	Resultados das formulações matemáticas - segundo estagio de corte na vertical.	89
7.9	Resultados das heurísticas - segundo estagio de corte na vertical.	90
7.10	Resultados dos limitantes superiores - segundo estágio de cortes na vertical ou horizontal.	92
7.11	Resultado das heurísticas - segundo estágio de cortes na vertical ou horizontal. .	93
11.1	Estrutura matricial do problema (11.14) - (11.25).	114
11.2	Características de diferentes tipos de bobinas de papel.	120
11.3	Resultados da formulação compacta relaxada - um tipo de objeto e uma máquina.	121
11.4	Resultados dos métodos geração de colunas - um tipo de objeto e uma máquina.	122
11.5	Resultados da formulação compacta - um tipo de objeto e uma máquina. . . .	122
11.6	Resultados da formulação estendida - um tipo de objeto e uma máquina. . . .	123
11.7	Resultados da formulação estendida + DW - um tipo de objeto e uma máquina.	123

12.1	Estrutura matricial das restrições (12.17).	129
12.2	Estrutura matricial das restrições (12.18).	129
12.3	Resultados da formulação compacta relaxada - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.	135
12.4	Resultados do método de geração de colunas - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.	136
12.5	Resultados da formulação compacta - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.	137
12.6	Resultados da formulação estendida - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.	137
12.7	Resultados da formulação estendida + DW - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.	138
13.1	Estrutura matricial das restrições (13.17).	145
13.2	Estrutura matricial das restrições (13.18).	146
13.3	Resultados da formulação compacta relaxada - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.	161
13.4	Resultados dos métodos de geração de colunas - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.	162
13.5	Resultados dos métodos de geração de colunas - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.	162
13.6	Resultados das heurísticas de Poltroniere et al. (2008).	163
13.7	Resultados da formulação compacta - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.	164
13.8	Resultados das formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.	164
13.9	Resultados das formulações estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e período - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.	164

Capítulo 1

Considerações iniciais

Esta tese aborda dois problemas que são apresentados independentemente, assim o trabalho está dividido em duas partes. A primeira parte apresenta problemas da mochila compartimentada e a segunda parte apresenta problemas de corte de estoque unidimensional acoplados ao dimensionamento de lotes. Apesar dos problemas serem tratados independentemente, eles têm duas abordagens em comum. A primeira é que ambos os problemas envolvem problemas de corte de estoque e a segunda é o método geração de colunas utilizado na resolução de ambos os problemas.

Em problemas de corte um dos principais critérios de classificação é a dimensão do problema: unidimensional (apenas uma dimensão relevante); bidimensional (duas dimensões relevantes); tridimensional (três dimensões relevantes). O problema da mochila compartimentada é principalmente utilizado para gerar padrões de corte. Este trabalho apresenta alguns métodos e formulações matemáticas para o caso unidimensional e propõe o caso bidimensional da mochila compartimentada. O problema acoplado consiste em integrar decisões de corte ao problema de dimensionamento de lotes. Neste trabalho, consideramos o problema de corte de estoque unidimensional, em que a decisão no problema acoplado relativa ao corte é a definição de padrões de corte de modo que atenda a demanda dos itens em um horizonte do período de planejamento.

O método geração de colunas é utilizado para resolver problemas de programação linear. Em problemas de corte devido ao grande número de padrões de corte o método geração de colunas é uma alternativa eficiente para resolver sua relaxação linear. Nesta tese, o método geração de colunas é utilizado para determinar limitantes superiores para os problemas da mochila compartimentada unidimensional e bidimensional (problema de maximização) e, também, para determinar limitantes inferiores para os problemas acoplados (problema de minimização). Para obter soluções factíveis inteiras é utilizada uma estratégia heurística. Maiores detalhes de problemas de corte e métodos geração de colunas são dados na Introdução da Parte I.

Deste modo, a Parte I do trabalho apresenta o problema da mochila compartimentada unidimensional e bidimensional. Para o problema da mochila compartimentada unidimensional

existem diversos estudos na literatura. Neste trabalho foi proposta uma nova heurística, bem como, realizado uma análise computacional dos métodos existentes e da heurística proposta. Na primeira parte também é proposto o problema da mochila compartimentado bidimensional, na literatura não encontramos nenhum estudo para este problema. Para o problema da mochila compartimentada bidimensional é apresentada uma definição, diversos modelos matemáticos e heurísticas, bem como a análise computacional entre todas as metodologias propostas.

Na Parte II são discutidos cinco tipos de formulações matemáticas para problemas acoplados, dentre estas abordagens apenas uma é utilizada na literatura. Além disso, analisamos outros tipos de problemas acoplados que são simplificações de uma aplicação industrial. Estas simplificações são analisadas sequencialmente, até obterem-se formulações matemáticas para o problema prático. Testes computacionais foram realizados comparando as vantagens de cada uma das modelagens matemáticas.

Parte I

Problema da mochila compartimentada: casos unidimensional e bidimensional

Capítulo 2

Introdução

Problemas de corte e empacotamento são bastante estudados na literatura devido a sua importância em contextos da prática industrial. Estes problemas são encontrados em diversas indústrias como de papel, móveis, vidros, metalúrgicas, plásticos, tecidos, entre outras. Basicamente, os problemas de corte e empacotamento consistem em cortar (ou empacotar) um conjunto de itens a partir de (ou em) objetos grandes disponíveis. Assim, surge a necessidade de planejar os padrões de cortes, combinar os itens a serem cortados de (ou empacotados em) objetos, para minimizar os efeitos negativos gerados, como por exemplo, custos de produção ou perda de material, ou maximizar benefícios, como o lucro.

Existem diversas características que são utilizadas para classificar os problemas de corte e empacotamento, conforme a tipologia de Dyckhoff & Finke (1992) revisada por Wäscher et al. (2007). Um critério fundamental de classificação é a dimensão do problema, denotada como: unidimensional, bidimensional e tridimensional.

De modo geral, as abordagens utilizadas para resolver problemas de corte e empacotamento consistem em determinar um conjunto de padrões de corte e utilizá-los de modo que atenda a demanda. Um método bastante utilizado para resolver problemas de corte e empacotamento é o método geração de colunas, que foi utilizado inicialmente para problemas de corte unidimensional em Gilmore & Gomory (1961) e estendido para problemas de corte bidimensional em Gilmore & Gomory (1965). Para a modelagem matemática é necessário construir os padrões de cortes e um problema de programação inteira para selecionar esses padrões de corte, denominado problema mestre. A formulação matemática geral para problemas de corte, na estrutura do problema mestre, pode ser descrita como segue.

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^p x_j, \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \geq d_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \text{ inteiro}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.3)$$

p representa o número total de padrões de corte, a_{ij} representa o número de itens do tipo i no padrão de corte j , x_j o número de vezes que o padrão de corte j é utilizado e d_i é a demanda do item do tipo i , $i = 1, \dots, n$. Neste caso, o objetivo do problema (2.1) é minimizar o número total de objetos a serem cortados. As restrições (2.2) consistem em selecionar os padrões de modo que a demanda seja atendida. Note que, uma coluna da formulação (2.1) - (2.3) representa um padrão de corte que é denotado pelo vetor $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$.

Enumerar todos os possíveis p padrões de corte pode ser computacionalmente inviável, assim o método geração de colunas é uma alternativa eficiente para resolver o problema. O método resolve a relaxação linear do problema mestre (2.1) - (2.3). As colunas são consideradas implicitamente, exceto um conjunto de $\bar{p}$ colunas ($\bar{p} < p$) que viabiliza a resolução de (2.1) - (2.3). O problema mestre com um número reduzido de colunas é chamado problema mestre restrito. O cálculo do custo reduzido de uma coluna genérica de (2.1) - (2.3) define o subproblema (*pricing problem*):

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{j=1}^n \pi_j a_j, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &\text{sujeito a :} && (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ corresponde a um padrão} \\ &&& \text{de corte sobre um objeto de tamanho definido.} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Uma ou mais colunas são adicionadas ao problema mestre (2.1) - (2.3) (o número de colunas $\bar{p}$ é incrementado) se seus custos reduzidos forem negativos, caso contrário, uma solução ótima da relaxação linear do problema mestre foi encontrada.

Determinar padrões de corte pode não ser uma tarefa trivial e, em geral, esses problemas são chamados de problemas da mochila. Métodos de solução e formulações matemáticas para os subproblemas dependem intrinsecamente da dimensão do problema de corte de estoque, bem como das características dos padrões considerados, devido às condições operacionais.

Esta primeira parte do trabalho aborda problemas da mochila que podem ser utilizados como gerador de padrões de corte para problemas de corte unidimensional e bidimensional. A principal característica desses padrões de corte é que o objeto é cortado em objetos intermediários, para então, serem cortados novamente de modo que se obtenha os itens demandados. Outra característica importante é que os itens demandados são agrupados em diferentes classes e itens de classes diferentes são obtidos de objetos intermediários diferentes. Os objetos intermediários são denominados por compartimentos e o objeto é denominado por mochila compartimentada. Portanto, em um primeiro estágio, seja em problemas unidimensionais ou bidimensionais, a mochila é dividida em compartimentos e, num segundo estágio, cada compartimento é dividido em itens que pertençam à mesma classe. Neste trabalho, estes problemas são denominados por: problema da mochila compartimentada unidimensional e problema da mochila compartimentada bidimensional. Uma classificação dos diferentes tipos de padrões de corte adotados na literatura é dada na Seção 2.1 e uma introdução para problemas da mochila compartimentada encontra-se na Seção 2.2.

2.1 Padrões de corte clássicos

Em problemas unidimensionais, um padrão de corte consiste em cortar um objeto com apenas uma dimensão relevante, digamos de comprimento L , em itens de comprimentos menores l_i , $i = 1, \dots, n$. Um padrão de corte bidimensional consiste em cortar um objeto grande, que possui duas dimensões relevantes, em itens de tamanhos menores. Os objetos são retângulos (ou placas) que têm comprimento L e largura W , que devem ser cortados em retângulos menores de comprimento l_i e largura w_i , $i = 1, \dots, n$.

Em geral, padrões de corte unidimensional são definidos por problemas da mochila clássicos, restritos ou irrestritos. Em problemas de corte bidimensional, a configuração dos padrões pode ser bastante variada. Os principais tipos de cortes são os cortes retos (indústrias moveleiras e o corte de chapas de aço) e cortes curvos (indústria têxtil e de couro). Entre os cortes retos que atravessam a placa de um lado a outro, chamados cortes guilhotinados, existem os ortogonais e não ortogonais em relação à placa. A seguir, é descrita a classificação dos padrões guilhotinados ortogonais.

Padrão de corte guilhotinado e estagiado: O padrão é obtido por meio de uma sequência de cortes guilhotinados, isto é, a cada corte obtêm-se dois novos retângulos. Os cortes iniciais, paralelos entre si, são considerados de primeiro estágio. Os cortes aplicados aos retângulos obtidos no primeiro estágio (ortogonais aos cortes iniciais) são de segundo estágio etc. Se o número de estágios é limitado por k , dizemos que o padrão é k -estágios ou k -estagiado. Um corte final para “aparar” o objeto não é contado como um novo estágio e diz-se um padrão de corte k -estagiado não exato.

Padrão guilhotinado p-grupo: É uma classe de problemas de corte 2-estágios, no qual no primeiro estágio a placa é dividida em faixas. Essas faixas são separadas em p grupos, e o segundo estágio de corte é realizado simultaneamente sobre as faixas de cada grupo.

Padrão de corte restrito: A quantidade de cada tipo de item é limitada no padrão de corte.

Padrão de corte homogêneo: O padrão é formado por um único tipo de item.

Padrão de corte não-guilhotinado: O padrão de corte (ortogonal) é não guilhotinado se não for obtido por uma sequência de cortes guilhotinados.

Deste modo, a resolução do subproblema depende do tipo de padrão de corte utilizado, fazendo surgir diversos trabalhos na literatura com diferentes abordagens. Além disso, outras características podem ser necessárias para definir um padrão de corte, o que torna o subproblema mais complexo. Uma revisão da literatura para problemas de corte bidimensional pode ser encontrada em Lodi et al. (2002).

2.2 Problema da mochila compartimentada

O problema da mochila compartimentada pode ser ilustrado considerando a seguinte situação. Considere que uma mochila deve ser carregada com um certo número de itens. Para cada item existe um peso, um valor utilidade e um limitante superior para o carregamento dos itens na mochila (se não existe limitante superior o problema é chamado irrestrito). Entretanto, itens de classes diferentes, como por exemplo, alimentos, remédios, roupas etc., devem ser alocados em compartimentos separados dentro da mochila. Note que, cada compartimento também é uma mochila. Os compartimentos têm uma capacidade flexível, porém limitada inferior e superiormente e, também, um custo fixo ao serem incluídos na mochila, que depende da classe de itens escolhida. Além disso, a inclusão de um compartimento na mochila introduz uma perda fixa na capacidade original da mochila. O problema da mochila compartimentada consiste em determinar compartimentos de capacidade adequada e como incluí-los na mochila de modo que maximize o valor utilidade total, dado pela soma do valor utilidade dos itens menos o custo total dos compartimentos.

No caso do problema da mochila compartimentada unidimensional, o peso dos itens tem apenas uma dimensão relevante (por exemplo, o comprimento), bem como a capacidade da mochila. Enquanto que, no problema da mochila compartimentada bidimensional, os itens possuem duas dimensões relevantes (comprimento e largura), bem como a mochila.

Xavier & Miyazawa (2006) mostram que para problemas da mochila compartimentada (caso unidimensional) não existem algoritmos aproximativos, ao menos que $P=NP$ e, também, pertencem a classe NP-difícil. Consequentemente, esta afirmação também é válida para o problema da mochila compartimentada bidimensional, visto que são mais difíceis de resolver que o caso unidimensional. O problema unidimensional é um caso particular do bidimensional, em que todas as alturas dos itens e objeto são iguais.

No problema da mochila compartimentada bidimensional é necessário definir a disposição dos itens nos compartimentos e, respectivamente, dos compartimentos na mochila. Em geral, em problemas de corte bidimensional práticos não é desejável vários estágios de corte devido ao custo operacional de manuseio de objetos intermediários e ajuste das facas e serras. Neste trabalho serão abordados problemas da mochila compartimentada bidimensional com três estágios de corte. De acordo com Cui & Huang (2012), padrões de cortes 3-estágios são bastante utilizados, pois permitem um bom balanço entre utilização de material e complexidade do processo de corte. No primeiro estágio de corte a placa é dividida em compartimentos por meio de cortes guilhotinados ao longo do comprimento (analogamente ao longo da largura). Assim, o primeiro estágio de corte define um problema similar ao problema da mochila compartimentada unidimensional, isto é, a disposição dos compartimentos na mochila com apenas uma dimensão relevante (o comprimento ou a largura). Ao final do primeiro estágio de corte é obtido um conjunto de objetos bidimensionais de comprimento reduzido (objetos intermediários). Estes objetos podem passar por algum processamento, que os deixam com características diferentes

(laminação, lixamento, pintura etc.) e, então, é necessário obter itens finais a partir desses objetos. Os itens são obtidos a partir de uma série de cortes realizados sobre cada compartimento. Neste trabalho os tipos de corte considerados nos compartimentos são guilhotinados restrito 2-estágios não-exato. Portanto, este problema é um caso generalizado de problemas de corte bidimensional guilhotinado restrito 3-estágios. Obviamente que outros tipos de padrões de cortes compartimentados, ou outros tipos de corte para os compartimentos, podem ser adotados. Além disso, considerando padrões de corte ortogonais, características de compartimentação podem ser utilizadas em padrões guilhotinados, k -estagiado, não estagiado, exato, não exato, restrito e irrestrito. Da mesma forma que em problemas sem compartimentação, outras características também podem ser incorporadas ao problema da mochila compartimentada bidimensional.

2.3 Objetivos

Neste trabalho temos como objetivo propor e analisar formulações matemáticas e métodos de solução para o problema da mochila compartimentada unidimensional e bidimensional, que está estruturado como se segue.

- Análise de modelos e métodos para o problema da mochila compartimentada unidimensional;
- Análise de alguns padrões de corte bidimensional propícios ao problema compartimentado;
- Proposição de modelos matemáticos para o problema da mochila compartimentada bidimensional;
- Proposição de métodos de solução para a mochila compartimentada bidimensional baseados em geração de colunas, heurísticas e busca em grafo E/OU.

2.4 Organização do texto

Esta parte do texto está organizada nos seguintes capítulos. No Capítulo 3 são apresentados alguns trabalhos cujos problemas possuem características similares aos problemas da mochila compartimentada e a revisão da literatura para o problema da mochila compartimentada unidimensional. O Capítulo 4 apresenta formulações, métodos e resultados computacionais para o problema da mochila compartimentada unidimensional. No Capítulo 5, o problema da mochila compartimentada bidimensional é definido e são propostas algumas formulações matemáticas. O Capítulo 6 contém métodos de solução e limitantes superiores para o problema da mochila compartimentada bidimensional. O Capítulo 7 apresenta os resultados computacionais. Por fim, o Capítulo 8 apresenta as conclusões.

Capítulo 3

Revisão da literatura

Neste capítulo é apresentada a revisão da literatura para problemas de corte estagiados nos contextos unidimensional e bidimensional. O problema da mochila compartimentada unidimensional pode ser visto como um caso de problemas de corte unidimensional em dois estágios e começou a ser estudado no início da década de 90, com intuito de resolver problemas industriais, em especial o corte de bobinas de aço. Da mesma forma, o problema da mochila compartimentada bidimensional proposto neste trabalho pode ser visto como um caso de corte bidimensional 3-estágios. Entretanto, em alguns trabalhos na literatura que abordam cortes estagiados unidimensional e bidimensional não é necessário o agrupamento dos itens em classes, como no caso de problemas compartimentados.

A Seção 3.1 apresenta a revisão de alguns trabalhos para problemas unidimensionais estagiados compartimentados e não compartimentados, com aplicações em indústrias de papel, metalúrgicas, produção de fibras ópticas e armazenamento de dados em sistemas multimídias. A Seção 3.2 apresenta trabalhos relacionados ao problema de corte bidimensional guilhotinado 3-estágios. Entretanto, para o caso bidimensional não foi encontrado nenhum trabalho que sugere a classificação dos itens em diversas classes, com a restrição de que itens de classes diferentes não podem estar no mesmo compartimento.

3.1 Problemas de corte unidimensional estagiados

Na literatura, aplicações para problemas de corte unidimensional estagiado sem compartimentação são encontradas em indústrias de papel (Haessler, 1971; Johnson et al., 1997; Zak, 2002a,b; Correia et al., 2004), filmes (Haessler, 1979), cabos de aço (Johnston, 1992) e fibras ópticas (Johnston, 1992; Johnston & Khan, 1995). Nestes casos, todos os itens pertencem a uma única classe. Nas indústrias papeleiras, o corte de bobinas de papel é realizado em duas fases devido ao número limitado de facas, enquanto que no problema de corte de filmes plásticos é devido ao processamento que produz bobinas intermediárias de diferentes diâmetros. Em problemas de cabos de aços, o corte é realizado em várias fases devido à combinação de cabos,

que são enrolados ou dispostos em camadas para produzirem o cabo de aço final. Em fibras ópticas é realizada a coloração e corte de fibras, que serão combinadas para formar um cabo de fibra óptica.

Haessler (1971) considera o problema de corte de rolos de papel, em que o primeiro estágio de corte gera bobinas menores, que podem ser itens finais ou bobinas intermediárias para serem cortadas em itens demandados. A segunda fase de corte é devida ao número limitado de facas e para evitar o manuseio das facas ao mudar de um padrão para outro. O objetivo é minimizar perda de material e custos de processamento (relativos ao segundo estágio de corte e mudanças na disposição das facas), que foi modelado como uma função não-linear. Para resolver o problema, o autor apresenta uma heurística gulosa que gera um padrão a ser utilizado o máximo de vezes de modo que não exceda a demanda e, então, atualiza a demanda. O processo continua até que toda demanda seja atendida.

Haessler (1979) descreve um modelo e uma heurística para o problema de corte em duas fases de uma indústria de filmes plásticos. Nessa indústria são produzidos rolos de filmes que são cortados em bobinas intermediárias. Ao cortar a bobina mestre é possível determinar diferentes diâmetros para as bobinas intermediárias, que são cortadas nas bobinas finais. A heurística proposta está baseada no método geração de colunas de Gilmore & Gomory (1961), em que as colunas são determinadas por um procedimento heurístico. O subproblema consiste em determinar quantas vezes os itens aparecem em cada objeto intermediário e a soma dos objetos intermediários forma o padrão.

Johnson et al. (1997) comparam a eficiência dos processos de corte em uma única fase com o corte em duas fases para a indústria de papel. Apesar da possibilidade de realizar os cortes em uma única fase, os autores utilizaram o corte em duas fases para comparar os dois procedimentos. Eles adotaram um procedimento heurístico, cuja desvantagem é que não era possível melhorar as bobinas intermediárias obtidas, caso fosse encontrado uma solução ruim. Apesar da necessidade de procedimentos melhores, ficou demonstrado que o corte em duas fases foi bastante eficiente em relação ao corte em uma fase, diminuindo muito a perda.

Zak (2002a,b) estuda o problema de corte em duas fases proveniente de uma indústria de papel. Nesse trabalho, a necessidade de dois estágios de corte é devido ao número limitado de facas. Para resolver o problema, o autor propõe uma técnica geração de colunas e linhas, em que os tamanhos das bobinas intermediárias são as linhas e os padrões de corte são as colunas. Para gerar linhas e colunas o autor considerou três problemas: dois problemas clássicos da mochila e um não-linear. Os dois problemas clássicos da mochila fazem a geração de colunas, enquanto que, o problema não-linear faz a geração simultânea de linhas e colunas.

Correia et al. (2004) consideram a produção e o corte em dois estágios de bobinas de papel em um horizonte de planejamento. Os itens demandados são dados por folhas e bobinas de papel. Assim, o primeiro estágio de corte produz bobinas intermediárias, que podem ser itens finais ou precisam de um segundo estágio de corte para produzir os itens demandados. Os autores apresentam um sistema computacional desenvolvido para uma indústria de papel, que

devido ao número limitado de facas o corte é realizado em duas fases. O procedimento de solução proposto consiste em gerar bobinas intermediárias e depois os padrões de corte, no qual somente as bobinas intermediárias que têm o mesmo diâmetro interno e externo e o mesmo comprimento podem ser combinadas no mesmo objeto. Estes padrões são utilizados como colunas no problema de programação linear e resolvido pelo método simplex. Soluções inteiras são obtidas por uma heurística de arredondamento.

Uma variação do problema clássico da mochila discutido na literatura é o *nested knapsack problem*, abordado em Faaland (1992), Johnston (1992) e Johnston & Khan (1995). O problema consiste no carregamento de uma mochila em estágios, em que cada compartimento de uma mochila é carregado com um subconjunto de itens, formando uma submochila, que é carregada em uma próxima submochila e, assim por diante, até a mochila ser completamente preenchida. Deste modo, é definido o carregamento da mochila em estágios sucessivos, em que cada submochila é incluída somente uma vez na submochila do estágio superior.

Em Johnston (1992) e Johnston & Khan (1995) é descrita aplicações do *nested knapsack problem* em fabricação de cabos de fibras ópticas e de cabos metálicos. No caso de cabos de fibras ópticas, cada fibra deve ser colorida e cortada em duas seções para, então, serem combinadas formando um cabo com múltiplas fibras. Em seguida, esses cabos podem ser cortados nos comprimentos demandados, enquanto que a fabricação de cabos de aço consiste da combinação de um conjunto de cabos metálicos enrolados ou dispostos em camadas. Os itens finais são definidos por combinações e comprimentos específicos. Assim, um conjunto de matéria-prima é cortado em diversas fases e combinados, obtendo os itens finais.

Para resolver o *nested knapsack problem*, Johnston (1992) apresenta dois tipos de heurísticas: uma para o problema de produção de cabos de aço e outra para o problema de produção de fibras ópticas. No primeiro caso é proposta uma heurística que a cada estágio gera cortes no objeto. Os estágios são executados até que os comprimentos obtidos sejam iguais ao dos itens demandados. No segundo caso é apresentada uma heurística com o objetivo principal de gerar conjuntos de fibras que sejam factíveis para os grupos de cabos demandados. Além disso, Faaland (1992) e Johnston & Khan (1995) apresentam formulações matemáticas para o problema. Em Faaland (1992), o modelo matemático é resolvido por um método *branch-and-bound*. Em Johnston & Khan (1995) o problema é resolvido heurísticamente, em que os itens são incluídos em uma mochila e, então, a mochila é dividida de modo que não ultrapasse a capacidade das mochilas dos estágios anteriores.

De modo geral, os métodos encontrados na literatura para resolver o problema da mochila compartimentada e problemas de corte de estoque com padrões compartimentados são heurísticos. Note que denotamos por mochila compartimentada apenas um padrão de corte, enquanto o problema de corte de estoque envolve vários padrões de corte para atender uma dada demanda. O problema da mochila compartimentada unidimensional encontra-se em diversas aplicações como em corte de bobinas de aço, armazenamento de dados e problemas de designação de ferramentas a máquinas em sistemas de manufatura.

Em problemas de corte de bobinas de aço, o processo industrial consiste em cortar bobinas (bobinas mestres) em bobinas menores (bobinas intermediárias) que passam pelo processo de laminação (redução de espessura). Inicialmente, cada bobina intermediária tem a mesma espessura da bobina mestre, que em alguns casos a redução da espessura original é realizada para que encontre a espessura de um determinado conjunto de itens que serão obtidos a partir da bobina intermediária. Assim, é necessária a classificação dos itens em diferentes conjuntos, em que itens da mesma classe possuem a mesma espessura. Ferreira et al. (1990), Carvalho & Rodrigues (1994, 1995) e Hoto et al. (2007) apresentam métodos de solução para o problema de corte de bobinas de aços, sendo que os padrões de corte são compartimentados. Métodos de solução para o problema da mochila compartimentada são apresentados em Xavier & Miyazawa (2006), Marques & Arenales (2007) e Hoto et al. (2010). Estes trabalhos são discutidos a seguir.

Em Ferreira et al. (1990), a heurística proposta consiste em, primeiramente, gerar os objetos intermediários (ou compartimentos) por uma heurística gulosa e, então, gerar os padrões de corte. Entretanto, os padrões de corte gerados inicialmente podem ser infactíveis devido ao excesso de produção dos itens demandados, ou o comprimento do objeto intermediário não satisfaz os limitantes inferiores e superiores. Neste caso, outros compartimentos são gerados e o processo é repetido até que a demanda seja completamente atendida. Em Carvalho & Rodrigues (1994, 1995) o problema de corte com padrões compartimentados é resolvido pelo método geração de colunas, em que os compartimentos são cortados em apenas um tipo de item, isto é, solução homogênea para cada compartimento. Hoto et al. (2007) também resolve o problema de corte de estoque por geração de colunas. Para os subproblemas, os autores consideram duas variações: mochila compartimentada restrita e irrestrita. O caso restrito considera um limitante superior sobre o número de itens que podem ser incluídos no compartimento. Para resolver o problema da mochila compartimentada irrestrita os autores propuseram um método exato e uma heurística. Enquanto que para o problema da mochila compartimentada restrita, foi proposta uma heurística. Essas heurísticas consistem apenas de resolução de problemas da mochila.

Em Xavier & Miyazawa (2006) o problema da mochila compartimentada restrita é denominado *constrained shelf knapsack problem*. Para resolvê-lo, os autores propõem e analisam algoritmos aproximativos de tempo polinomial. Para o problema da mochila compartimentada com os tamanhos dos compartimentos limitados somente superiormente, ou inferior e superiormente, o algoritmo proposto gera um conjunto polinomial de compartimentos, em que pelo menos um deles tem valor muito próximo ao ótimo com tamanho não maior que o tamanho da solução ótima. Para gerar a solução final (seleção de compartimentos) é utilizado um algoritmo de programação dinâmica. Para o problema da mochila com os tamanhos dos compartimentos limitados superiormente e inferiormente, os autores mostram que não existe algoritmo de aproximação r , ao menos que $P = NP$.

Em Marques & Arenales (2007) é apresentado um modelo não-linear inteiro e algumas heurísticas para o problema da mochila compartimentada restrito, com tamanho dos compartimentos limitado inferior e superiormente. As heurísticas consistem de dois passos: no pri-

meio passo um conjunto de compartimentos é gerado e no segundo alguns compartimentos são selecionados para compor a mochila. O problema que define os compartimentos é dado por problemas da mochila restrita e o que seleciona os compartimentos por um problema de programação inteira. Uma heurística que combina as heurísticas apresentadas em Marques & Arenales (2007) é proposta em Leão (2009). Em Hoto et al. (2010) foi introduzido um método geração de colunas para o problema da mochila compartimentada, que foi melhor investigado em Leão (2009). Uma comparação entre essa técnica geração de colunas e uma heurística de Marques & Arenales (2007) pode ser encontrada em Hoto et al. (2010).

Variações de problemas de empacotamento, cujos padrões são dados por problemas da mochila compartimentada podem ser encontrados na literatura como: *class constrained bin packing problem* (Shachnai & Tamir, 2001b, 2004; Xavier & Miyazawa, 2008a, 2009); *online class constrained bin packing problem* (Shachnai & Tamir, 2004; Xavier & Miyazawa, 2008a); *temporary class constrained bin packing problem* (Shachnai & Tamir, 2004); *class constrained shelf bin packing problem* (Xavier & Miyazawa, 2008b, 2009); *class constrained multiple knapsack problem* (Shachnai & Tamir, 2001a,b); *fair placement problem* (Shachnai & Tamir, 2001a); *generalized class constrained packing problem and the 0-1 class constrained knapsack problem* (Shachnai & Tamir, 2001b). A principal diferença entre essas variações está na função objetivo, perda fixa pela inclusão de compartimentos (se é considerado ou não), sequência dos itens a serem empacotados. A Tabela 3.1 apresenta os diferentes nomes encontrados para o problema e os autores que os utilizam. Para resolver esses problemas, os autores propõem algoritmos aproximativos, heurísticas baseadas em *first-fit-decreasing* e *best-fit-decreasing*. A aplicação relacionada a esses problemas descrita pelos autores é a administração de armazenamento de dados em sistemas multimídia, que é comum em aplicações comerciais, de entretenimento e busca de informações em banco de dados. A estrutura de compartimentação surge também em sistemas de manufatura flexíveis, em que as máquinas possuem diferentes ferramentas para processar uma determinada quantidade de operações. De acordo com (Özpeynirci & Azizoglu, 2010), cada operação pode ser vista como um item e as operações que usam o mesmo tipo de ferramenta pertencem a mesma classe.

Tabela 3.1: Classificação dos artigos de acordo com o nome dado a problemas compartimentados

Nome dado ao problema	Artigos
Problema da mochila compartimentada	Marques & Arenales (2007), Hoto et al. (2007)
constrained shelf knapsack problem	Xavier & Miyazawa (2006)
Class constrained bin packing problem	Shachnai & Tamir (2001b, 2004) Xavier & Miyazawa (2008a, 2009)
Online class constrained bin packing problem	Shachnai & Tamir (2004) Xavier & Miyazawa (2008a)
Temporary class constrained bin packing problem	Shachnai & Tamir (2004)
Class constrained shelf bin packing problem	Xavier & Miyazawa (2008b, 2009);
Class constrained multiple knapsack problem	Shachnai & Tamir (2001a,b);
Fair placement problem	Shachnai & Tamir (2001a)
Generalized class constrained packing problem	Shachnai & Tamir (2001b)
0-1 class constrained knapsack problem	Shachnai & Tamir (2001b)

3.2 Problemas de corte bidimensional estagiados

O problema da mochila compartimentada bidimensional proposto neste trabalho pode ser classificado como um problema de corte bidimensional 3-estágios. Deste modo, esta seção apresenta uma revisão de problemas de corte bidimensionais que possuem características semelhantes ao problema compartimentado bidimensional, principalmente problemas de corte bidimensional 3-estágios. Em problemas com três estágios de corte, a placa é dividida em compartimentos e cada um desses compartimentos é cortado em dois estágios, de modo que se obtenham os itens finais. Entretanto, estes trabalhos não consideram o agrupamento dos itens em diferentes classes, como no caso do problema da mochila compartimentada.

Em Gilmore & Gomory (1965) é descrito o problema de produzir caixas de papelão, que consiste em cortar rolos de papel no comprimento e na largura para a produção de retângulos, o que caracteriza um problema de corte bidimensional. Primeiro, o rolo de papel é cortado na horizontal, tal que o comprimento pode ser desconsiderado, formando assim faixas de comprimento igual ao comprimento do rolo de papel. Em seguida, o rolo dividido em faixas é cortado na vertical. Para os cortes nas verticais existem duas facas e cada uma tem limitações sobre o comprimento que pode cortar. Assim, as faixas são divididas em dois grupos, consequentemente, cada padrão pode ter no máximo duas larguras diferentes. Geralmente, existem papéis de diferentes larguras em estoque, o que é favorável na redução de perda. Uma maneira de determinar os padrões é gerar todos os pares de larguras possíveis dos itens para todos os tipos de objetos em estoque. Considerando W a largura de um dos rolos em estoque, f_i e f_j o número de vezes que as faixas de largura w_i e w_j são incluídas no padrão, Gilmore & Gomory (1965) relatam que a maneira mais simples é resolver o problema da mochila para todos os pares possíveis:

$$f_i w_i + f_j w_j \leq W \quad (3.1)$$

$$f_i, f_j \geq 0, \text{ inteiros.} \quad (3.2)$$

O objetivo do problema é minimizar a perda e a utilização de máquina. Gilmore & Gomory (1965) também discutem sobre sequenciamento da produção, pois existem três eixos de facas, enquanto um é utilizado os outros dois são fixados. A semelhança deste problema com o problema da mochila compartimentada está no fato que nos padrões de corte são considerados agrupamento dos itens de acordo com suas larguras, em que cada padrão contém apenas duas classes de itens, ou seja, dois compartimentos. A figura 3.1 representa o corte de um rolo de papel em dois tipos de faixas, três de largura w_1 e duas de largura w_2 , então as faixas são divididas em dois grupos e cortadas na vertical, em que os padrões dentro dos compartimentos são homogêneos.

Figura 3.1: Corte de rolos de papel para a produção de caixas de papelão.

Vanderbeck (2001) considera o problema de corte de estoque bidimensional guilhotinado 3-estágios. No primeiro estágio, a placa é cortada em seções, no segundo estágio, as seções são cortadas em faixas e, por fim, no terceiro estágio, as faixas são cortadas nos itens demandados. O autor considera o reaproveitamento de sobras, em que a parte da placa não utilizada pode voltar ao estoque e ser utilizada posteriormente. Algumas restrições adicionais devem ser consideradas: o número de seções é limitado superiormente; o comprimento da seção é limitado superiormente (L^{max}); uma seção pode conter no máximo dois tipos de faixa e uma faixa contém apenas um tipo de item (faixa homogênea); o número de faixas em uma seção é limitado. Foram considerados quatro tipos de perda: (1) perda quando o comprimento da parte não utilizada no padrão é menor que L^{min} (parte que não retorna ao estoque); (2) perda ao longo do comprimento das seções em ambas as extremidades, devido ao corte realizado pelas facas; (3) o comprimento da seção é o comprimento da maior faixa, assim se uma seção tem faixas de diferentes comprimentos existe uma perda, denominada perda vertical; (4) perda se a soma das larguras das faixas que compõem uma seção é menor que a largura da peça em estoque. A Figura 3.2 ilustra um padrão de corte composto por duas seções, a seção 1 tem 3 faixas, duas compostas por itens do tipo A e uma composta por itens do tipo B, a seção 2 possui duas fai-

xas compostas por itens do tipo C. Este padrão contém os quatro tipos de perda considerados no problema. Além disso, existem diversos tipos de comprimento e largura para as placas em estoque.

Figura 3.2: Processo de perda em um padrão de corte (Vanderbeck, 2001).

Para resolver o problema de corte de estoque, o autor utiliza um método geração de colunas e ao final do método uma solução factível é determinada por uma heurística de arredondamento. Entretanto, não foi determinada a solução ótima para o subproblema. Para que a geração de colunas forneça um limitante inferior (problema de minimização) para o problema de corte de estoque, foi determinado um limitante superior e um limitante inferior para o subproblema. O limitante inferior para o problema de corte de estoque é dado pelo valor da solução do problema mestre com as colunas factíveis adicionadas mais o limitante superior do subproblema (subproblema de maximização). Entretanto, testes computacionais preliminares (quando consideramos o problema da mochila compartimentada bidimensional) mostraram que esta técnica de geração de colunas fornece limitantes fracos. Este problema pode ser considerado como um caso particular do problema da mochila compartimentada, pois podemos considerar as seções como compartimentos, porém em Vanderbeck (2001) não existe divisão dos itens em classes.

Em Cui (2004) é proposto o formato T para gerar padrões de corte, que consiste em cortar a placa verticalmente, dividindo-a em duas subplacas. A subplaca à esquerda é cortada em faixas horizontais e a da direita em faixas verticais. Para a descrição do padrão, considere a Figura 3.3, em que a placa original é cortada verticalmente em um ponto chamado ponto de quebra, formando duas novas subplacas de dimensões $y \times W$ e $(L - y) \times W$. O retângulo

$y \times W$ é chamado subplaca X (todas as suas faixas estão na direção X) e $(L - y) \times W$ de subplaca Y (todas as suas faixas estão na direção Y). As faixas são homogêneas (isto é, apenas um tipo de item em cada faixa) e considerando que temos n itens, então existem $2n$ possibilidades de faixas para cada uma das subplacas (n comprimentos e n larguras de itens). Para resolver este problema, Cui (2004) propôs um método exato, em que para cada ponto de quebra é determinada a melhor solução para as subplacas X e Y , considerando todas as $2n$ possibilidades de faixas. Por fim, com todas as subplacas definidas, determina-se o melhor padrão, consequentemente, a divisão ótima. O objetivo desse trabalho é gerar padrões de corte para o problema de corte bidimensional guilhotinado que, de acordo com o autor, simplifica o processo de corte e fornece bons resultados com relação a perda e o tempo computacional.

Figura 3.3: Padrão formato T (Cui, 2004).

Puchinger & Raidl (2007) consideram um problema de empacotamento em *bins* bidimensional guilhotinado 3-estágios, que é uma variação do problema proposto em Vanderbeck (2001). No primeiro estágio de corte a placa de comprimento L e largura W é dividida em placas menores (subplacas), com cortes realizados na horizontal. No segundo estágio de corte realizado verticalmente, cada subplaca é dividida em faixas, que por fim são divididas em itens no terceiro estágio. O objetivo do problema é minimizar o número de placas necessárias para atender a demanda. A particularidade desse problema é que os itens empacotados na mesma faixa devem ter o mesmo comprimento. Os itens são ordenados em ordem não-crescente de acordo com a largura. Cada faixa é numerada com o índice do item de maior largura que ela contém (i. e., o menor índice). Cada subplaca é numerada com o índice da faixa de maior largura. Por fim, a placa é numerada com o índice da menor subplaca que ela contém.

Além disso, existem dois casos denominados restrito e irrestrito. No caso restrito, a faixa de maior largura em cada subplaca sempre consiste de um único item, isto é, o item de maior largura na subplaca define sua largura. Deste modo, a largura de todas as faixas contidas na subplaca k não excede a largura da faixa k que, respectivamente, tem largura idêntica ao do item k , como exemplifica a Figura 3.4. Note que, a largura da subplaca 1 é definida pela largura do item 1.

Figura 3.4: Subplaca (Puchinger & Raidl, 2007).

O caso irrestrito permite configurações mais gerais para os *bins*, em que não é imposto que a largura de cada subplaca é dada pelo item de maior largura e nem que uma das faixas deve ser composta apenas pelo item de maior largura, um exemplo de uma subplaca irrestrita é a subplaca 6 na Figura 3.5.

Figura 3.5: Representação de um *Bin* (*Bin 1*) (Puchinger & Raidl, 2007).

Para cada uma dessas abordagens (restrito e irrestrito) os autores apresentam um modelo matemático com variáveis binárias, cujo objetivo é minimizar o número total de *bins* necessá-

rios para atender a demanda. Além disso, foi proposto um método *branch-and-price*, em que os autores aplicaram uma decomposição Dantzig-Wolfe aos modelos propostos. Nessa decomposição o problema mestre é dado por um problema de cobertura de conjuntos e o subproblema que gera *bins* para o problema mestre é um problema de empacotamento bidimensional 3-estágios. Para resolver os subproblemas, durante o método geração de colunas, foram utilizados quatro procedimentos hierárquicos, em que quando um procedimento não encontra uma solução para ser adicionado ao problema mestre, o próximo procedimento é executado. A primeira é uma heurística gulosa, a segunda heurística é dada por um algoritmo evolutivo, o terceiro procedimento consiste em resolver o subproblema com uma forma reduzida pelo CPLEX. Por fim, quando o subproblema reduzido não encontra soluções para serem adicionados ao problema mestre, o subproblema completo é resolvido pelo CPLEX na otimalidade. Os resultados mostram que o *branch-and-price* prova a otimalidade para a maioria dos exemplos executados, com tempo computacional limitado em 1000 segundos.

Cui & Liu (2008) propuseram o formato T de blocos homogêneos, que é uma generalização do padrão proposto em Cui (2004). Nesse padrão, a placa é dividida em dois segmentos, X e Y . Se o primeiro corte está na vertical o padrão é denominado TX , caso contrário TY . Em adição ao formato T de Cui (2004), cada segmento é dividido em seções, em que o segmento X contém seções X e Y contém seções Y . Uma seção X consiste de linhas de blocos homogêneos arranjadas horizontalmente da esquerda para direita, enquanto que, uma seção Y é uma seção X rotacionada 90° . No padrão TX o segmento da esquerda sempre é um segmento X e, no padrão TY , o segmento X fica na parte superior. Por fim, os blocos homogêneos são formados de faixas homogêneas (todas formadas pelo mesmo item), em que duas faixas sucessivas são paralelas ou ortogonais. A figura 3.6 representa um padrão T , em que o segmento X é composto por 2 seções. A seção $X1$ possui três blocos homogêneos formados pelos itens 5, 1 e 4, respectivamente, a seção $X2$ possui dois blocos homogêneos formados pelos itens 3 e 1 respectivamente. O segmento Y é formado por apenas uma seção Y composta de dois blocos homogêneos, um composto por itens de tipo 2 e outro composto por itens de tipo 1. Para determinar o padrão ótimo, os autores consideram todos os possíveis pontos que a placa pode ser cortada de modo que obtenha dois segmentos. Na definição do padrão, primeiro são gerados todos os blocos ótimos. Em seguida, é considerado o arranjo ótimo dos blocos na seção para todos os comprimentos e larguras possíveis, então, o arranjo ótimo das seções nos segmentos. Por fim, o método seleciona os dois segmentos que formam o padrão ótimo. Este problema pode ser considerado como um caso particular da mochila compartimentada. Para isso, basta considerar os blocos homogêneos como compartimentos e, ao invés de gerar blocos homogêneos, são gerados blocos formados por itens de uma mesma classe.

Figura 3.6: Padrão TX (Cui & Liu, 2008).

Silva et al. (2010) propõem um modelo de programação inteira para problemas de corte bidimensional guilhotinado 2 e 3-estágios. No modelo, cada coluna corresponde a um corte, em que cada variável de decisão está associada ao número de vezes que o corte é realizado. Deste modo, o conjunto de todos os possíveis cortes para as placas e placas residuais é um dado de entrada para o modelo, que é gerado por um algoritmo. As regras sobre o número de estágios dependem se o problema possui dois ou três estágios de corte. O modelo proposto encontrou a solução ótima para a maioria dos exemplos analisados pelos autores, com o tempo computacional limitado em duas horas. Além disso, este modelo foi comparado com o modelo de Lodi & Monaci (2003) no caso de 2-estágios e com o modelo de Puchinger & Raidl (2007) para problemas 3-estágios, o qual se mostrou melhor para a grande maioria dos casos.

Capítulo 4

Mochila compartimentada unidimensional

O problema da mochila compartimentada unidimensional consiste em cortar um objeto de comprimento L em itens de comprimento l_i , valor utilidade v_i e limitante superior σ_i , $i = 1, \dots, n$, que estão particionados em K diferentes classes. A mochila é organizada em compartimentos com tamanho limitado entre L_{min}^k e L_{max}^k , que devem ser incluídos na mochila de modo que não ultrapasse sua capacidade L . Cada compartimento deve apenas conter itens que pertencem à mesma classe. A inclusão de cada compartimento na mochila com itens da classe k possui um custo fixo c_k e uma perda fixa S_k . Assim, o valor de um compartimento é dado pela soma do valor utilidade dos itens que o compõe menos o custo de inclusão do compartimento na mochila. Além disso, é possível alocar mais de um compartimento com itens da mesma classe na mochila. O valor de utilidade da mochila é dado pela soma do valor dos compartimentos incluídos. Assim, o problema da mochila compartimentada unidimensional consiste em definir compartimentos para serem alocados a mochila de modo que maximize seu valor de utilidade.

Para este problema são apresentadas três formulações matemáticas, dois métodos de solução e dois limitantes superiores. Este capítulo foi publicado em Leão et al. (2011).

4.1 Formulações matemáticas

Para a definição dos modelos matemáticos considere os seguintes parâmetros.

- L : capacidade da mochila;
- n : número de diferentes tipos de itens;
- K : número de classes;
- $\{n_0 + 1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2, \dots, n_{K-1} + 1, \dots, n_K\}$: conjunto de itens, em que $n_0 = 0$ e $n_K = n$. Uma classe de itens do tipo k é definida pelos itens $\{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$;
- l_i : comprimento do item do tipo i ;
- v_i : valor de utilidade do item do tipo i ;

- σ_i : limitante sobre o número de vezes que o item do tipo i pode ser incluído na mochila (para σ_i suficientemente grande o problema é chamado irrestrito);
- $L_{max}^k(L_{min}^k)$: limitante superior (inferior) da capacidade dos compartimentos preenchidos com itens da classe k ;
- c_k : custo de incluir um compartimento preenchido com itens da classe k ;
- S_k : perda fixa na capacidade dos compartimentos preenchidos com itens da classe k ao serem incluídos na mochila.

4.1.1 Formulação não-linear inteira

A formulação não-linear inteira apresentada nesta seção foi proposta em Marques & Arenales (2007). Para apresentação do modelo considere as variáveis a_{is} como o número de vezes que o item do tipo i é incluído no compartimento s e, β_{sk} o número de vezes que o compartimento s preenchido com itens da classe k é incluído na mochila. Além disso, considere que o número máximo de compartimentos para a classe k que podem ser incluídos na mochila é dado por $\bar{N}_k = \left\lfloor \frac{L}{L_{min}^k} \right\rfloor$. A formulação matemática é dada como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{\bar{N}_k} \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i a_{is} - c_k \right) \beta_{sk}, \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{\bar{N}_k} \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k \right) \beta_{sk} \leq L, \quad (4.2)$$

$$\sum_{s=1}^{\bar{N}_k} a_{is} \beta_{sk} \leq \sigma_i, \quad k = 1, \dots, K, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \quad (4.3)$$

$$L_{min}^k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k \leq L_{max}^k, \quad k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \bar{N}_k, \quad (4.4)$$

$$a_{is} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad k = 1, \dots, K, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, s = 1, \dots, \bar{N}_k, \quad (4.5)$$

$$\beta_{sk} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \bar{N}_k. \quad (4.6)$$

A função objetivo (4.1) maximiza o valor dos compartimentos incluídos na mochila menos o custo de incluí-los, em que o valor de um compartimento é dado por $\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i a_{is}$. A restrição (4.2) limita a soma dos comprimentos dos compartimentos incluídos na mochila, que não pode ultrapassar sua capacidade L , em que o comprimento de um compartimento é dado por $\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k$. As restrições (4.3) limitam o número de vezes que cada item pode ser incluído na mochila e as restrições (4.4) limitam o comprimento dos compartimentos. Por fim, as restrições (4.5) e (4.6) definem as variáveis como inteiras. A não linearidade encontra-se na função objetivo, restrições (4.2) e (4.3).

4.1.2 Problema reformulado

Em Leão (2009) é proposta uma reformulação do modelo não-linear, que consiste em supor que todos os compartimentos são conhecidos, ou seja, todas as possíveis soluções para as restrições (4.4) - (4.5). Compartimentos factíveis para classe k , $k = 1, \dots, K$, satisfazem as seguintes restrições.

$$L_{min}^k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i + S_k \leq L_{max}^k, \quad (4.7)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \quad (4.8)$$

em que a_i representa o número de itens do tipo i da classe k no compartimento. Para a formulação, considere $\hat{a}_{is}$, $s = 1, \dots, N_k$, $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$ todas as possíveis soluções para as restrições (4.7) - (4.8) para todas as classes k , $k = 1, \dots, K$, isto é, N_k é o número de todos os possíveis compartimentos que podem ser preenchidos com itens da classe k (N_k é maior que $\bar{N}_k$). Assim, o problema (4.1) - (4.6) é equivalentemente escrito como o seguinte problema mestre:

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{N_k} (V_{sk} - c_k) \beta_{sk}, \quad (4.9)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{N_k} L_{sk} \beta_{sk} \leq L, \quad (4.10)$$

$$\sum_{s=1}^{N_k} \hat{a}_{is} \beta_{sk} \leq \sigma_i, k = 1, \dots, K, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \quad (4.11)$$

$$\beta_{sk} \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, N_k, \quad (4.12)$$

em que, $L_{sk} = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i \hat{a}_{is} + S_k$ e $V_{sk} = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i \hat{a}_{is}$ são o comprimento e o valor de utilidade do compartimento s com itens da classe k , respectivamente. O problema (4.9) - (4.12) é um problema de programação inteira com muitas variáveis. A estrutura matricial do problema mestre é dada na Tabela 4.1.

A relaxação linear do problema mestre (4.9) - (4.12) pode ser resolvida pelo método geração de colunas, em que K subproblemas da mochila restrita (4.7) -(4.8) são resolvidos por iteração. Maiores detalhes são dados na Seção 4.2.2.

Tabela 4.1: Estrutura matricial do problema mestre.

$V_{11} - c_1$	...	$V_{1N_1} - c_1$	$V_{21} - c_2$	...	$V_{2N_2} - c_2$	...	$V_{K1} - c_K$	...	V_{KN_K}
L_{11}	...	L_{1N_1}	L_{21}	...	L_{2N_2}	...	L_{K1}	...	L_{KN_K}
$\hat{a}_{(n_0+1)1}$	...	$\hat{a}_{(n_0+1)N_1}$	0	...	0	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{a}_{n_1 1}$	...	$\hat{a}_{n_1 N_1}$	0	...	0	...	0	...	$\vdots$
0	...	0	$\hat{a}_{(n_1+1)1}$	...	$\hat{a}_{(n_1+1)N_2}$	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	...	0	$\hat{a}_{n_2 1}$	...	$\hat{a}_{n_2 N_2}$	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	...	0	0	...	0	...	$\hat{a}_{(n_{K-1}+1)1}$	...	$\hat{a}_{(n_{K-1}+1)N_K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	...	0	0	...	0	...	$\hat{a}_{n_K 1}$	...	$\hat{a}_{n_K N_K}$

4.1.3 Formulação linear inteira

A formulação linear inteira apresentada nesta seção foi proposta em Yanasse et al. (2005). Entretanto, os autores consideram um limitante sobre o número de compartimentos que podem ser incluídos na mochila, e também, sobre o número de itens que podem ser incluídos nos compartimentos. Neste modelo, ao invés de definir um compartimento e decidir quantas vezes incluí-lo na mochila, os compartimentos são construídos e adicionados sem considerar repetição. Entretanto, um compartimento pode ter a mesma configuração que outros (repetição implícita). Para a formulação matemática, considere a_{is} o número de vezes que o item do tipo i , $n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_k$, é incluído no compartimento s da classe k . O número máximo de compartimentos para a classe k que pode ser incluído na mochila é dado por: $\bar{N}_k = \left\lfloor \frac{L}{L_{min}^k} \right\rfloor$. Considere também δ_s^k igual a 1 se o compartimento s para classe k é construído e incluído na mochila e 0 caso contrário. A função objetivo pode ser escrita como segue:

$$\text{maximize } \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{\bar{N}_k} (\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i a_{is} - c_k) \delta_s^k.$$

As restrições (4.3) podem ser representadas como:

$$\sum_{s=1}^{\bar{N}_k} a_{is} \leq \sigma_i, k = 1, \dots, K, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k.$$

Além disso, as restrições (4.2) e (4.4) são dadas respectivamente por:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{\bar{N}_k} (\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k) \delta_s^k \leq L,$$

$$\delta_s^k L_{min}^k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k \delta_s^k \leq \delta_s^k L_{max}^k, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \bar{N}_k.$$

Deste modo, a formulação linear inteira pode ser descrita como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{\bar{N}_k} \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i a_{is} - c_k \right) \delta_s^k, \quad (4.13)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{\bar{N}_k} \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k \right) \delta_s^k \leq L, \quad (4.14)$$

$$\sum_{s=1}^{\bar{N}_k} a_{is} \leq \sigma_i, \quad k = 1, \dots, K, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \quad (4.15)$$

$$\delta_s^k L_{min}^k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{is} + S_k \delta_s^k \leq \delta_s^k L_{max}^k, \quad k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \bar{N}_k, \quad (4.16)$$

$$a_{is} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad k = 1, \dots, K, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, s = 1, \dots, \bar{N}_k, \quad (4.17)$$

$$\delta_s^k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \bar{N}_k. \quad (4.18)$$

Nas restrições (4.16), se $\delta_s^k = 1$ o compartimento s é incluído na mochila com comprimento entre L_{min}^k e L_{max}^k , caso contrário ($\delta_s^k = 0$) as variáveis $a_{is} = 0, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$.

4.2 Limitantes superiores

Esta seção apresenta dois limitantes superiores para o problema da mochila compartimentada unidimensional. O primeiro, denominado super compartimentos, foi proposto por Marques & Arenales (2007) e o segundo é um método geração de colunas para o problema mestre relaxado (4.9) - (4.12) proposto em Leão (2009).

4.2.1 Super compartimentos

O limitante superior proposto por Marques & Arenales (2007) é uma formulação linear inteira. Para a definição do modelo, considere a_i o número de vezes que itens do tipo i é incluído na mochila, e β_k o número de vezes que o compartimento preenchido com itens da classe k é incluído na mochila. O modelo é dado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^n v_i a_i - \sum_{k=1}^K c_k \beta_k, \quad (4.19)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^n l_i a_i \leq L - \left(\sum_{k=1}^K S_k \beta_k \right), \quad (4.20)$$

$$L_{min}^k \beta_k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i + S_k \beta_k \leq L_{max}^k \beta_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (4.21)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, n, \quad (4.22)$$

$$\beta_k \geq 0, \text{ inteiro, } k = 1, \dots, K. \quad (4.23)$$

Note que a restrição (4.21) considera um super compartimento com comprimento entre $L_{min}^k \beta_k$ e $L_{max}^k \beta_k$ para cada classe k , que não necessariamente pode ser dividido em β_k compartimentos. Em Marques & Arenales (2007) encontra-se uma prova de que este modelo fornece um limitante superior para o problema.

4.2.2 Problema mestre relaxado: método geração de colunas

O método geração de colunas para o problema da mochila compartimentada unidimensional foi proposto em Leão (2009). O método é aplicado na relaxação linear do problema mestre (4.9) - (4.12) com um conjunto inicial de colunas e a cada iteração novas colunas são encontradas pela resolução dos subproblemas (um para cada classe k , $k = 1, \dots, K$). Para a definição dos subproblemas, considere λ e π as variáveis duais associadas às restrições (4.10) e (4.11), respectivamente:

$$(\lambda, \pi) = (\lambda, \pi_{n_0}, \dots, \pi_{n_1}, \pi_{n_1+1}, \dots, \pi_{n_2}, \dots, \pi_{n_{K-1}+1}, \dots, \pi_{n_K}).$$

Uma coluna do problema mestre correspondendo a classe k é dada por (veja Tabela 4.1, omitindo o índice s):

$$\alpha_k = (L_k, 0, \dots, 0, a_{n_{k-1}+1}, \dots, a_{n_k}, 0, \dots, 0)^T.$$

Assim, o melhor custo reduzido para cada classe k , $k = 1, \dots, K$, é dado por:

$$\max\{(V_k - c_k) - \lambda L_k - (\pi_{n_{k-1}+1}, \dots, \pi_{n_k}) \begin{pmatrix} a_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ a_{n_k} \end{pmatrix}\}.$$

em que $V_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i a_i$ e $L_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i + S_k$, o subproblema para a classe k , $k = 1, \dots, K$, é dado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (v_i - \lambda l_i - \pi_i) a_i, \quad (4.24)$$

$$\text{sujeito a:} \quad L_{min}^k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i + S_k \leq L_{max}^k, \quad (4.25)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \text{ inteiro, } i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (4.26)$$

Em cada iteração do método simplex, K subproblemas (4.24) - (4.26) são resolvidos, fornecendo colunas para o problema mestre. Se $\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (v_i - \lambda l_i - \pi_i) a_i - (c_k + \lambda S_k) \leq 0$ para todo $k = 1, \dots, K$, então uma solução ótima para a relaxação linear do problema mestre foi encontrada.

4.3 Métodos de solução

Esta seção descreve duas heurísticas para o problema da mochila compartimentada unidimensional. A primeira heurística (geração de colunas estática) é uma combinação das heurísticas propostas em Marques & Arenales (2007) e foi apresentada em Leão (2009). A segunda heurística, proposta durante o desenvolvimento desta tese, consiste na combinação da geração de colunas estática com o método geração de colunas. Estas heurísticas são descritas a seguir.

4.3.1 Problema mestre restrito: geração de colunas estática

Em Marques & Arenales (2007) foram propostas diversas heurísticas de decomposição com dois estágios. No primeiro estágio são resolvidos diversos subproblemas que fornecem colunas para o problema mestre. Esses subproblemas são dados por (4.24) - (4.26), porém $\lambda = 0$, $\pi_i = 0$ para todo i . No segundo estágio é resolvido o problema mestre (4.9) - (4.12) com apenas um subconjunto de colunas (problema mestre restrito). Para determinar diferentes soluções para os subproblemas, em uma de suas heurísticas Marques & Arenales (2007) consideram Z diferentes soluções para o subproblema (denominada heurística dos Z melhores compartimentos). Quando $Z = 1$, os autores denominam de heurística de decomposição. Outra heurística proposta pelos autores é a heurística de W diferentes capacidades, que consiste em determinar a melhor solução para o subproblema considerando W diferentes capacidades entre L_{min}^k e L_{max}^k para o compartimento, $k = 1, \dots, K$. Em Leão (2009) foi proposta uma heurística que combina as ideias destas heurísticas, em que a cada resolução de um subproblema são consideradas diferentes capacidades para o compartimento e diferentes soluções, que são determinadas por um *branch-and-bound* que determina as Z melhores soluções para problemas da mochila. Esta heurística híbrida é descrita como segue.

Estágio 1: Para cada classe k , $k = 1, \dots, K$ determine as Z melhores soluções para o problema:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i a_i, \quad (4.27)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i + S_k \leq L^w, \quad (4.28)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \quad i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \text{ inteiro.} \quad (4.29)$$

em que $L^1 = L_{max}^k$, e defina $\hat{a}_i^{zw} = a_i$ ($i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$), $V_k^{zw} = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} v_i \hat{a}_i^{zw}$ e $L_k^{zw} = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i \hat{a}_i^{zw} + S_k$. Para determinar L_{w+1}^k (a $(w+1)$ -ésima capacidade), faça $L_{w+1}^k = \min\{L_k^{zw}, z = 1, \dots, Z\}$, $w = w + 1$, $L^w = L_w^k - 1$. Repita o estágio 1 até $L^w < L_{min}^k$ ou $w > W$.

Estágio 2: Resolva o problema mestre restrito:

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{z=1}^Z \sum_{w=1}^W (V_k^{zw} - c_k) \beta_k^{zw}, \quad (4.30)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{z=1}^Z \sum_{w=1}^W L_k^{zw} \beta_k^{zw} \leq L, \quad (4.31)$$

$$\sum_{z=1}^Z \sum_{w=1}^W \hat{a}_i^{zw} \beta_k^{zw} \leq \sigma_i, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \quad (4.32)$$

$$\beta_k^{zw} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad k = 1, \dots, K, \quad z = 1, \dots, Z, \quad w = 1, \dots, W. \quad (4.33)$$

4.3.2 Problema mestre restrito: geração de colunas dinâmica

Nesta seção é proposta uma heurística baseada em geração de colunas. O método consiste em resolver o problema mestre relaxado (4.9) - (4.12), porém a cada iteração do método simplex um conjunto de colunas é encontrado para o subproblema (4.27) - (4.29) pela heurística híbrida (geração de colunas estática). Além disso, quando a solução ótima para a relaxação linear do problema mestre é encontrada, uma solução inteira é obtida ao resolver o problema mestre restrito com todas as colunas redefinidas como inteiras. Para encontrar uma solução inicial são utilizadas variáveis de folga, consequentemente, $\lambda = \pi_i = 0$. Portanto, o primeiro conjunto de colunas obtido na primeira iteração do método simplex é o mesmo conjunto encontrado pela geração de colunas estática. Todas as colunas com custo reduzido positivo são adicionadas ao problema mestre restrito e mantidas até o método parar. O método é descrito como segue.

Algoritmo: geração de colunas dinâmica

Estágio 1: Geração de colunas

Fase 1: Gere uma solução inicial usando variáveis de folga.

Pare = Falso.

Fase 2: Enquanto Pare = Falso faça:

Resolva o problema mestre restrito relaxado (4.9) - (4.12) e determine as variáveis duais (λ, π) e gere novas colunas usando o Estágio 1 da geração de colunas estática para o subproblema (4.24) - (4.26).

Se $\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (v_i - \lambda l_i - \pi_i) \hat{a}_i^{11} - (c_k + \lambda S_k) \leq 0, k = 1, \dots, K,$

então a solução para o problema mestre restrito é a solução ótima para o problema mestre.

Pare=Verdadeiro.

Senão

Adicione todas as novas colunas geradas com custo reduzido positivo ao novo problema mestre restrito.

Fim Enquanto.

Estágio 2: Resolva o problema mestre restrito inteiro.

Note que, ao resolvermos os subproblemas (4.24) - (4.26) pelo Estágio 1 da geração de colunas estática são determinadas as Z melhores soluções com W diferentes capacidades para os subproblemas. Para avaliar o custo relativo em cada iteração é necessário avaliar apenas a

solução de maior valor que é fornecida quando $Z = 1$ e $W = 1$, com vetor solução da coluna associada dado por $(\hat{a}_i^{11})$.

4.4 Resultados computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais dos métodos descritos neste capítulo. Os algoritmos foram implementados em linguagem C/C++ e executados num computador Intel Core2 Duo com 2.33 GHz e 2 Gbyte de memória. Para determinar as Z melhores soluções para os problema da mochila foi utilizado um método *branch-and-bound* baseado em Gilmore & Gomory (1963) (também conhecido como pesquisa lexicográfica), os demais modelos foram resolvidos pelo pacote CPLEX 12.1 e implementados em linguagem C/C++. Todas as formulações matemáticas são resolvidas na otimalidade, exceto a formulação linear inteira (4.13) - (4.18).

4.4.1 Exemplos gerados

Nos exemplos gerados, o tamanho da mochila foi considerado como $L = 1100$. Para gerar os dados dos itens foi utilizado um gerador baseado em Pisinger (1999). O comprimento dos itens foi gerado aleatoriamente com $l_i \in [L_{min}^k, L_{max}^k]$ e o valores utilidade dado por:

- 1) Não correlacionados: $v_i \in [L_{min}^k, L_{max}^k]$;
- 2) Fracamente correlacionados: $v_i \in [l_i - \frac{L_{max}^k}{30}, l_i + \frac{L_{max}^k}{30}]$;
- 3) Fortemente correlacionados: $v_i = l_i + 10$.

O número de classes K foi fixo em 5, 10, 15 e 20. Para cada classe k , $k = 1, \dots, K$, o número de itens foi fixado em 20, 40 e 80 com demanda igual a 1. Os compartimentos têm tamanho limitado entre $[L_{min}^k, L_{max}^k] = [100mm, 300mm]$. Finalmente, os custos foram gerados aleatoriamente com $c_k \in [1, 100]$. Os resultados descritos nesta seção são para $S_k = 0$, porém algumas observações para $S_k \neq 0$ são feitas no final da seção. A Tabela 4.2 mostra as características de cada tipo de problema, para os quais foram gerados 20 exemplos.

Tabela 4.2: Características dos problemas.

Grupo	K	n. de itens	correlação	Grupo	K	n. de itens	correlação
1	5	20	1	19	15	20	1
2	5	20	2	20	15	20	2
3	5	20	3	21	15	20	3
4	5	40	1	22	15	40	1
5	5	40	2	23	15	40	2
6	5	40	3	24	15	40	3
7	5	80	1	25	15	80	1
8	5	80	2	26	15	80	2
9	5	80	3	27	15	80	3
10	10	20	1	28	20	20	1
11	10	20	2	29	20	20	2
12	10	20	3	30	20	20	3
13	10	40	1	31	20	40	1
14	10	40	2	32	20	40	2
15	10	40	3	33	20	40	3
16	10	80	1	34	20	80	1
17	10	80	2	35	20	80	2
18	10	80	3	36	20	80	3

Tabela 4.3: Gap médio dos limitantes superiores.

Grupo	GAP	Grupo	GAP	Grupo	GAP	Grupo	GAP
1	1,83%	10	1,25%	19	1,58%	28	1,17%
2	0,16%	11	0,29%	20	0,32%	29	0,29%
3	0,31%	12	0,30%	21	0,18%	30	0,24%
4	1,69%	13	1,31%	22	0,99%	31	0,97%
5	0,22%	14	0,16%	23	0,21%	32	0,18%
6	-0,11%	15	-0,02%	24	0,03%	33	0,07%
7	0,95%	16	1,01%	25	1,18%	34	1,53%
8	0,22%	17	0,24%	26	0,18%	35	0,13%
9	-0,46%	18	0,12%	27	-0,05%	36	-0,23%

4.4.2 Limitantes superiores: problema mestre relaxado e super compartimentos

Para comparar os dois limitantes superiores descritos na Seção 4.2.1, o gap é dado por: $\frac{f_{CG} - \bar{f}}{\bar{f}}$, em que f_{CG} é o valor ótimo da função objetivo do problema mestre relaxado dado por (4.9), e $\bar{f}$ é o valor da função objetivo (4.19) do super compartimento. A Tabela 4.3 mostra os resultados.

Note que, o limitante superior fornecido pelo modelo do super compartimentos é mais forte que o limitante da relaxação linear do problema mestre, porém não é dominante. O problema mestre relaxado foi melhor somente para 19,31% dos exemplos. Além disso, o tempo médio de execução do problema (4.19) - (4.23) foi de 0,12 segundos, enquanto que o método geração de colunas foi 0,47 segundos, com número de iterações médio de 9,4. Assim, pode-se concluir que o super compartimentos fornece os melhores limitantes com o menor tempo computacional.

4.4.3 Formulação linear inteira

Considerando todos os 720 exemplos, somente para dois exemplos o CPLEX não provou a otimalidade do modelo (4.13) - (4.18), porém com gaps de 0,24% e 0,25%, em que a execução foi encerrada devido à falta de memória. O tempo médio de execução foi de 87,28 segundos, porém o tempo médio de execução por grupo varia entre 1,56 e 1410,43 segundos. O tempo de execução é bastante instável e não depende do tamanho do exemplo. Para alguns exemplos, o tempo computacional foi menor que 1 segundo, e para um exemplo do grupo 9 o tempo computacional foi maior que 7 horas. O desvio padrão médio do tempo é de 357,19 segundos, e o desvio padrão médio dos grupos varia entre 0,47 segundos e 6235,81 segundos. Para estimar o gap da formulação linear inteira também foi utilizado o limitante superior do super partimentos (4.19) - (4.23), que é dado por: $\frac{\bar{f}-f}{f}$, em que $\underline{f}$ é o valor da função objetivo (4.13) e $\bar{f}$ é o valor da função objetivo (4.19), com ambos os modelos resolvidos pelo CPLEX. Para aproximadamente 50% dos exemplos o gap foi de 0%, e o gap médio foi de 0,20%. Isso mostra que o problema (4.19) - (4.23) pode ser resolvido com um baixo tempo computacional e fornece bons limitantes superiores para o problema.

4.4.4 Formulação não linear inteira

O modelo não-linear inteiro (4.1) - (4.6) foi codificado no Sistema de Modelagem Algébrica GAMS e resolvido pelo *softwares* SBB e DICOPT. Entretanto, os softwares não encontraram soluções factíveis para os exemplos analisados neste capítulo. Assim, alguns exemplos com poucos itens e poucas classes foram gerados e foi possível determinar soluções factíveis apenas para problemas com no máximo 3 itens distribuídos em 2 classes. Para estes exemplos, o SBB conseguiu encontrar a solução ótima e o DICOPT encontrou soluções factíveis. Ambos tiveram tempo de execução maior que a resolução da formulação linear inteira pelo CPLEX e que as heurísticas. O tempo computacional necessário para resolver o modelo não-linear variou entre 1,21s e 33s, enquanto que o tempo computacional das heurísticas e o tempo necessário para resolver a formulação linear inteira é menor que 0,00001s.

4.4.5 Geração de colunas estática e dinâmica

Um conjunto de testes computacionais foi realizado para ambas as heurísticas (geração de colunas estática e dinâmica) por atribuir diferentes valores para Z e W , em que $Z = 1, 5, 7$ e $W = 1, 5, 7$. Para cada exemplo, o gap é dado por: $\frac{\bar{f}-f}{f}$, em que $\bar{f}$ é o valor da função objetivo (4.13) fornecido pela formulação linear inteira, e f o valor da função objetivo da heurística analisada. Esses resultados são interpretados usando o perfil de desempenho proposto por Dolan & Moré (2002). Para isso, considere $t_{p,(Z,W)}$ o gap médio dos problemas do tipo p resolvidos pela geração de colunas estática ou dinâmica. A função de avaliação $r_{p,(Z,W)}$ é a normalização

do gap médio dado por:

$$r_{p,(Z,W)} = \frac{t_{p,(Z,W)}}{\min\{t_{p,(Z,W)} : (Z, W), \forall Z \text{ e } W\}}. \quad (4.34)$$

Se o denominador for zero, então os valores do gap são deslocados uma unidade. O desempenho geral das heurísticas nos problemas é definido pela função $\rho : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$ que é dada por:

$$\rho_{(Z,W)}(\tau) = \frac{\text{número de problemas tal que } \log_2 r_{p,(Z,W)} \leq \tau}{\text{número total de problemas}}. \quad (4.35)$$

Esta função é denominada perfil de desempenho e representa a fração de problemas resolvidos pela heurística com desempenho $\log_2 r_{p,(Z,W)}$ dentro de um fator τ do melhor desempenho obtido. O perfil de desempenho é equivalente a probabilidade da heurística resolver um problema com desempenho $\log_2 r_{p,(Z,W)}$ dentro de um fator τ da melhor razão possível. Assim, $\rho_{(Z,W)}$ pode ser visto como uma função de distribuição cumulativa para a razão de desempenho, que é dada por:

$$\rho_{(Z,W)} = P(\log_2 r_{p,(Z,W)} \leq \tau \text{ para os parâmetros } Z \text{ e } W \text{ considerados}). \quad (4.36)$$

A Figura 4.1 mostra o perfil de desempenho da geração de colunas estática ($H(Z,W)$) e dinâmica ($CGH(Z,W)$) para $Z = 1$ e $W = 1, 5, 7$ representados por (Z, W) . O gráfico mostra que a geração de colunas dinâmica com $Z = 1$ e $W = 7$ ($CGH(1,7)$) teve melhor desempenho. Além disso, a geração de colunas dinâmica obteve o menor gap em aproximadamente 79% dos problemas e resolveu cada problema com um gap não pior que $2^{0,9}$ do melhor gap obtido para $Z = 1$ e $W = 1, 5, 7$. Assim, a partir da Figura 4.1 podemos concluir que a geração de colunas dinâmica domina a geração de colunas estática. Note que, mesmo para $Z = 1$ e $W = 1$, a geração de colunas dinâmica domina a geração de colunas estática com $Z = 1$ e $W = 7$. Quando o valor de W aumenta, o desempenho de ambas as heurísticas melhora. Entretanto o tempo computacional aumenta como mostra a Tabela 4.4. Para completar os resultados, a Tabela 4.5 mostra o gap para ambos os métodos considerando $Z = 1$ e $W = 1, 5, 7$. Os resultados mostram que a geração de colunas dinâmica obtém os menores gaps que a geração de colunas estática. Note que, se $Z = 1$ na geração de colunas estática obtemos a heurística de W capacidades de Marques & Arenales (2007).

Tabela 4.4: Tempo computacional médio (segundos) das heurísticas.

Z, W	$H(Z, W)$	$CGH(Z, W)$	Z, W	$H(Z, W)$	$CGH(Z, W)$	Z, W	$H(Z, W)$	$CGH(Z, W)$
1,1	0,02	0,49	5,1	0,03	1,51	7,1	0,03	1,98
1,5	0,04	1,31	5,5	0,09	9,62	7,5	0,10	9,48
1,7	0,05	1,65	5,7	0,09	9,62	7,7	0,12	14,75

Tabela 4.5: Gap: heurísticas com $Z = 1$.

	$CGH(1,1)$	$CGH(1,5)$	$CGH(1,7)$	$H(1,1)$	$H(1,5)$	$H(1,7)$
Pior caso	9,84%	6,51%	6,40%	24,28%	19,60%	19,57%
Melhor caso	0,17%	0,08%	0,02%	10,04%	0,43%	0,25%
Média	2,13%	0,90%	0,72%	19,22%	10,02%	6,68%

Figura 4.1: Perfil de desempenho do gap para $Z = 1$.

A Figura 4.2 mostra o desempenho da geração de colunas estática ($H(Z, W)$) e a geração de colunas dinâmica ($CGH(Z, W)$) para $Z = 5$ e $W = 1, 5, 7$. Note que para $W = 1$ a geração de colunas estática fornece a heurística Z melhores compartimentos de Marques & Arenales (2007). Da mesma maneira que para $Z = 1$, a geração de colunas dinâmica com $Z = 5$ e $W = 7$ ($CGH(5, 7)$) teve o melhor desempenho. Além disso, este obteve o melhor gap para aproximadamente 89% dos exemplos e resolveu cada um com gap não pior que $2^{1,7}$, em relação ao melhor gap obtido entre os outros parâmetros. Por outro lado, a geração de colunas dinâmica para $(Z, W) = (5, 1)$ teve desempenho similar ao da geração de colunas estática para $(Z, W) = (5, 5)$. Enquanto que a geração de colunas estática com $(Z, W) = (5, 7)$ domina a geração de colunas dinâmica com $(Z, W) = (5, 1)$ com fator menor que $2^{5,5}$. Os resultados na Tabela 4.6

mostram que para ambos os métodos com $Z = 5$, os gaps são menores que para $Z = 1$, porém o comportamento é similar.

Tabela 4.6: Gap: heurísticas com $Z = 5$.

	CGH(5,1)	CGH(5,5)	CGH(5,7)	H(5,1)	H(5,5)	H(5,7)
Pior caso	7,28%	6,28%	6,27%	23,10%	19,58%	19,57%
Melhor caso	0,04%	0,00%	0,00%	4,65%	0,01%	0,00%
Média	1,51%	0,41%	0,25%	15,64%	6,04%	3,55%

Figura 4.2: Perfil de desempenho do gap para $Z = 5$.

A Figura 4.3 mostra o perfil de desempenho da geração de colunas estática ($H(Z,W)$) dinâmica ($CGH(Z,W)$) para $Z = 7$ e $W = 1, 5, 7$. O desempenho dos métodos para $Z = 7$ é similar a $Z = 5$. A principal diferença está no desempenho da geração de colunas dinâmica para $W = 7$, o qual resolveu cada exemplo com gap 2^x , tal que x está próximo a zero, do melhor gap obtido pelos os demais métodos. A Tabela 4.7 mostra o gap para ambos os métodos considerando $Z = 7$ e $W = 1, 5, 7$. Note que, $CGH(7,7)$ foi pior que $CGH(7,5)$ no pior caso, pois as colunas geradas são diferentes, e as colunas que melhoram o valor da função objetivo do problema mestre restrito inteiro não foram geradas para alguns exemplos. Ao compararmos a Tabela 4.6, quando $Z = 5$ aumenta para $Z = 7$, o gap médio da geração de colunas estática diminui mais que o da geração de colunas dinâmica.

Tabela 4.7: Gap: heurísticas com $Z = 7$.

	CGH(7,1)	CGH(7,5)	CGH(7,7)	H(7,1)	H(7,5)	H(7,7)
Pior caso	8,50%	6,26%	6,27%	22,00%	19,57%	19,57%
Melhor caso	0,03%	0,00%	0,00%	3,06%	0,01%	0,00%
Média	1,51%	0,29%	0,22%	13,76%	2,65%	2,29%

Figura 4.3: Perfil de desempenho do gap para $Z = 7$.

De modo geral, quanto maior Z e W menor é o gap. Além disso, o aumento de W influencia mais que o aumento de Z . Apesar da geração de colunas estática fornecer gaps piores que o da geração de colunas dinâmica, seu tempo de execução é menor e mais estável. O desvio padrão médio do tempo computacional da geração de colunas estática é 0,04 segundos, enquanto o da geração de colunas dinâmica é de 3,89 segundos. De fato, a geração de colunas dinâmica pode gerar muitas colunas para serem adicionadas ao problema mestre restrito, que ao final do método geração de colunas tem as colunas redefinidas como inteiras e o problema mestre restrito é resolvido pelo CPLEX. Além disso, quando Z e W aumentam, a solução inteira do problema mestre restrito da geração de colunas dinâmica pode ser pior, pois as colunas são diferentes. O número de iterações médio da geração de colunas dinâmica é aproximadamente 5,15. Comparando a geração de colunas dinâmica com a formulação linear inteira (4.13) - (4.18) do problema da mochila compartimentada, tem-se que apesar da geração de colunas não encontrar todas as soluções ótimas, seu tempo computacional é menor que o tempo necessário para o CPLEX encontrar as soluções ótimas para (4.13) - (4.18). Por exemplo, para $Z = 7$ e $W = 7$, o gap do método geração de colunas dinâmica é 0,25% e o tempo de execução médio é 14,75 segundos, enquanto que o tempo necessário para o CPLEX resolver a formulação linear

inteira é 87,28 segundos.

Para os mesmos exemplos alguns testes foram executados para $S_k \neq 0$. Os resultados, em termos de gap e tempo computacional, são muitos próximos aos exemplos com $S_k = 0$, porém o tempo computacional do CPLEX é duas vezes maior para resolver o problema linear inteiro (4.13) -(4.18).

4.5 Conclusões

Neste capítulo foi proposta uma nova heurística, que denominamos por geração de colunas dinâmica. Além disso, foi realizada uma análise computacional entre os modelos propostos na literatura, a geração de colunas dinâmica e a geração de colunas estática. Foram consideradas três formulações matemática: um modelo não-linear inteiro, um problema reformulado e uma formulação linear inteira. A geração de colunas estática foi proposta em Leão (2009) e a partir desta heurística é possível obter as heurísticas de Marques & Arenales (2007), por apenas fixar Z e W em determinados valores. Os testes computacionais mostraram que resolver o modelo não-linear inteiro não é uma estratégia viável, sendo possível resolver problemas com no máximo três itens distribuídos em duas classes. Por outro lado, a formulação linear inteira fornece a solução ótima para mais de 99% dos exemplos, porém para poucos exemplos o tempo computacional pode ser bastante alto. A geração de colunas estática consegue determinar soluções factíveis de boa qualidade em menos de 4 segundos. Ao considerarmos a geração de colunas dinâmica, seu pior tempo computacional foi de 18 minutos, porém o gap melhora em torno de 10 vezes e, em alguns casos encontrando até mesmo a solução ótima.

Deste modo, os resultados computacionais sugerem que o modelo linear inteiro é promissor, garantindo a solução ótima com baixo tempo computacional para a grande maioria dos exemplos. Apenas para poucos exemplos que é necessário algumas horas para resolver o problema da mochila compartimentada e, neste caso, o uso de heurísticas é mais eficiente.

Capítulo 5

Mochila compartimentada bidimensional

Neste capítulo é proposto o problema da mochila compartimentada bidimensional, para o qual apresentamos a definição e propomos cinco formulações matemáticas. O problema é formulado considerando cortes guilhotinados com um total de 3-estágios de corte.

5.1 Definição

Para a definição do problema da mochila compartimentada bidimensional, considere que uma placa de tamanho $L \times W$ (comprimento $\times$ largura) deva ser cortada em itens de tamanhos $l_i \times w_i$, $i = 1, \dots, n$, os quais têm valores de utilidade v_i e limitantes superiores σ_i (máximo de itens do tipo i). Além disso, os itens estão agrupados em K classes distintas (por exemplo, vermelha, azul etc.). A placa é inicialmente cortada (primeira fase) em objetos intermediários, chamados compartimentos, e cada compartimento é processado independentemente (por exemplo, pintado de vermelho, azul etc.), sendo então associado a uma classe $k = 1, \dots, K$ (diferentes compartimentos podem estar associados à mesma classe). A construção de um compartimento de classe k pode envolver um custo c_k e uma perda fixa S_k na placa original. Em seguida, cada compartimento é cortado (segunda fase) em itens demandados, de acordo com a classe do compartimento, nas dimensões e quantidades máximas dadas. Esta sequência de cortes gera um padrão compartimentado bidimensional. O problema da mochila compartimentada bidimensional consiste em determinar um padrão compartimentado bidimensional de modo que maximize a soma dos valores de utilidade dos itens, menos a soma dos custos dos compartimentos.

Pode-se ter diferentes configurações dos padrões de corte sobre a placa, dependendo da maneira como os cortes da primeira fase e segunda fase são definidos. Neste trabalho, restringimos os cortes da primeira fase em verticais ou horizontais (Figura 5.1). No caso dos cortes verticais, os compartimentos de classe k têm seus comprimentos limitados no intervalo $[L_{min}^k, L_{max}^k]$, analogamente, no caso de cortes horizontais, os compartimentos de classe k têm suas larguras limitadas no intervalo $[W_{min}^k, W_{max}^k]$. Consideramos uma perda fixa S_k ao longo do comprimento (ou largura) da placa para cada compartimento de classe k . Além disso, os

cortes na segunda fase são do tipo 2-estágios, o que leva a um padrão de corte global do tipo 3-estágios.

Figura 5.1: Divisão da placa em compartimentos.

O segundo estágio de corte sobre a placa (ou o primeiro estágio de corte sobre os compartimentos) pode ser horizontal, com o terceiro estágio de corte definido na vertical. Neste caso, o primeiro estágio de cortes sobre os compartimentos produz faixas horizontais, que por sua vez são cortadas verticalmente para obter os itens finais, como mostra a Figura 5.2, onde é ilustrado um padrão compartimentado bidimensional, em que a placa é cortada em três compartimentos e cada um dos compartimentos é cortado em 2-estágios, com o primeiro estágio de corte na horizontal e o segundo estágio na vertical. As partes pintadas em preto representam perdas. Note que, para obter alguns itens é necessário a apara (padrão não-exato), que é perpendicular ao corte anterior e não é computada como um novo estágio.

Figura 5.2: Padrão compartimentado bidimensional: compartimentos com o primeiro estágio de corte na horizontal.

Por outro lado, o primeiro estágio de corte nos compartimentos pode ser definido por cortes na vertical e o segundo estágio por cortes na horizontal. Neste caso, o primeiro estágio de corte

sobre os compartimentos (segundo estágio de corte sobre a placa) produz faixas verticais, que são cortadas horizontalmente fornecendo os itens, como mostra a Figura 5.3. Da mesma forma que no caso anterior, para obter alguns itens pode ser necessária a apara, que é perpendicular ao corte anterior.

Figura 5.3: Padrão compartimentado bidimensional: compartimentos com o primeiro estágio de corte na vertical.

Além disso, pode-se considerar uma combinação de compartimentos com seu primeiro estágio de corte sendo realizado na vertical ou na horizontal, como mostra a Figura 5.4, em que o compartimento 1 tem o primeiro estágio de corte realizado na vertical, enquanto que os compartimentos 2 e 3 têm o primeiro estágio de corte realizado na horizontal.

Figura 5.4: Padrão compartimentado: primeiro compartimento com o primeiro estágio de corte na vertical, segundo e terceiro compartimentos com primeiro estágio de corte na horizontal.

Uma possível aplicação para este problema é considerar que uma placa seja cortada em placas menores, que passam por algum tipo de processamento para, então, serem recortadas nos itens demandados. Os tipos de processamento podem ser, por exemplo, diferentes tipos de pinturas, banhos químicos, etc. Neste caso, uma placa em estoque é cortada em placas

menores (compartimentos), que serão processadas e os itens são classificados conforme suas características, assim cada placa menor é processada de acordo com uma determinada classe. O custo operacional de processar cada item separadamente poderia ser muito alto.

Neste trabalho consideramos que o primeiro estágio de corte na placa sempre é realizado na vertical, como mostra a Figura 5.1 a), visto que a divisão da placa em compartimentos verticais ou horizontais é equivalente. De fato, se o primeiro estágio de corte é realizado na vertical, então ao rotacionar a placa em 90° obtemos o caso com o primeiro estágio de corte realizado na horizontal. Assim, dado que o primeiro estágio de corte é realizado na vertical, serão propostas formulações matemáticas e métodos de solução para as três classificações definidas de acordo com o segundo estágio de corte na placa, isto é:

- o segundo estágio de corte pode ser realizado apenas na horizontal;
- o segundo estágio de corte pode ser realizado apenas na vertical;
- o segundo estágio de corte pode ser realizado na horizontal ou vertical.

Para o primeiro caso (segundo estágio de corte na horizontal), a Seção 5.2 apresenta dois modelos matemáticos de programação linear inteira mista. Para o segundo caso (segundo estágio de corte na vertical), a Seção 5.3 apresenta dois modelos, que é uma variação do caso anterior. Esses modelos estão baseados nos modelos de corte 2-estágios propostos por Lodi & Monaci (2003), Furini et al. (2012) e na formulação linear inteira do problema da mochila compartimentada unidimensional (4.13) - (4.18). Além disso, a Seção 5.4 apresenta uma formulação generalizada baseada no modelo de geração de colunas de Gilmore & Gomory (1961), como apresentado na Seção 4.1.2. Neste caso, apresentamos um problema mestre com colunas definidas pelos compartimentos. Deste modo, o subproblema gera compartimentos que podem ter seu primeiro estágio de corte na vertical ou na horizontal, ou a melhor opção entre os dois. A terceira classificação (segundo estágio de corte realizado na horizontal ou vertical) pode ser resolvida somente pela formulação generalizada e heurísticas propostas no Capítulo 6. A definição da ordem do segundo e terceiro estágio de corte (horizontal/vertical) é fundamental para as formulações matemáticas e métodos de solução tanto do problema da mochila compartimentada quanto dos subproblemas, pois estas sofrem variações. Em todas estas variações não consideramos rotações dos itens, porém isso pode ser facilmente incorporado por apenas incluir cópia dos itens rotacionados.

Para as formulações matemáticas das Seções 5.2 - 5.4 considere os seguintes dados.

- L : comprimento da placa;
- W : largura da placa;
- K : número de classes;
- $\{n_0 + 1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2, \dots, n_{K-1} + 1, \dots, n_K\}$: conjunto de itens, em que $n_0 = 0$ e $n_K = n$;

- $A_k = \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$: conjunto de itens pertencentes à classe k , $k = 1, \dots, K$;
- l_i : comprimento do item do tipo i ;
- w_i : largura do item do tipo i ;
- v_i : valor de utilidade do item do tipo i ;
- σ_i : limitante sobre o número de vezes que o item do tipo i pode ser incluído na mochila (para σ_i suficientemente grande o problema é chamado irrestrito);
- $L_{max}^k(L_{min}^k)$: limitante superior (inferior) do comprimento dos compartimentos preenchidos com itens da classe k ;
- c_k : custo de incluir um compartimento preenchido com itens da classe k ;
- S_k : perda fixa ao longo do comprimento dos compartimentos preenchidos com itens da classe k ao serem incluídos na mochila;
- M_k : número máximo de possíveis compartimentos da classe k na placa, em que $M_k = \lfloor \frac{L}{L_{min}^k} \rfloor$, $k = 1, \dots, K$.

5.2 Formulações matemáticas para o segundo estágio de corte na placa realizado na horizontal

Dado que o primeiro estágio de corte na placa é sempre na vertical, nesta seção são apresentados dois modelos matemáticos de programação inteira mista para o problema da mochila compartimentada bidimensional com o segundo estágio na placa realizado na horizontal.

5.2.1 Modelo compartimentado horizontal

Uma formulação linear inteira para o problema da mochila compartimentada bidimensional com as faixas dos compartimentos dispostas na horizontal é proposta nesta seção. Este modelo está baseado no modelo proposto em Furini et al. (2012) e na formulação linear inteira do problema da mochila compartimentada unidimensional (4.13) - (4.18). O modelo consiste em gerar faixas para compor compartimentos, de modo que sejam factíveis, isto é a soma da largura das faixas nos compartimentos seja menor ou igual a W e o comprimento do compartimento esteja entre L_{min}^k e L_{max}^k . Os compartimentos são dispostos na placa de modo que não ultrapasse o comprimento L . Para apresentação do modelo considere os seguintes dados adicionais e variáveis.

Dados:

- e_k : número máximo de possíveis faixas num compartimento com itens da classe k , em que $e_k = \lfloor \frac{W}{\bar{w}_k} \rfloor$ e $\bar{w}_k = \min\{w_i, i \in A_k\}$, $k = 1, \dots, K$;
- $\bar{\sigma}_i$: o número máximo de possíveis itens do tipo i ($i \in A_k$) em uma faixa, em que $\bar{\sigma}_i = \min\{\sigma_i, \lfloor \frac{L_{max}^k}{l_i} \rfloor\}$, $i \in A_k, k = 1, \dots, K$.

Variáveis

- y_{rs}^k : largura da faixa r do compartimento s da classe k , $r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K$;
- x_s^k : comprimento do compartimento s da classe k , $s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K$;
- γ_{irs} : número de vezes que o item i é incluído na faixa r do compartimento s ;
- $\bar{\delta}_{rs}^k$: igual 1 se a faixa r com itens da classe k é incluída no compartimento s ; 0 caso contrário;
- δ_s^k : igual a 1 se o compartimento s com itens da classe k é incluído na mochila; 0 caso contrário;
- φ_{irs} : igual a 1 se o item i é incluído na faixa r do compartimento s ; 0 caso contrário.

Desta forma, o problema da mochila compartimentada bidimensional com o segundo estágio de corte horizontal pode ser formulado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \left(\sum_{r=1}^{e_k} \sum_{i \in A_k} v_i \gamma_{irs} - c_k \right) \delta_s^k, \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad L_{min}^k \bar{\delta}_{rs}^k \leq \sum_{i \in A_k} l_i \gamma_{irs} + S_k \bar{\delta}_{rs}^k \leq L_{max}^k \bar{\delta}_{rs}^k, \quad (5.2)$$

$$r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i \in A_k} l_i \gamma_{irs} + S_k \bar{\delta}_{rs}^k \leq x_s^k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.3)$$

$$\gamma_{irs} \leq \bar{\sigma}_i \varphi_{irs}, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.4)$$

$$\sum_{s=1}^{M_k} \sum_{r=1}^{e_k} \gamma_{irs} \leq \sigma_i, i \in A_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.5)$$

$$w_i \varphi_{irs} \leq y_{rs}^k, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.6)$$

$$\sum_{r=1}^{e_k} y_{rs}^k \leq W, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.7)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} x_s^k \leq L, \quad (5.8)$$

$$y_{rs}^k \leq y_{r+1s}^k, r = 1, \dots, e_k - 1, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.9)$$

$$\bar{\delta}_{rs}^k \leq \delta_s^k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.10)$$

$$\bar{\delta}_{rs}^k \in \{0, 1\}, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.11)$$

$$y_{rs}^k \geq 0, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.12)$$

$$0 \leq x_s^k \leq L_{max}^k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.13)$$

$$\gamma_{irs} \geq 0, \text{ inteiro}, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.14)$$

$$\varphi_{irs} \in \{0, 1\}, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.15)$$

$$\delta_s^k \in \{0, 1\}, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K. \quad (5.16)$$

No modelo, a função objetivo maximiza o valor de utilidade dos compartimentos menos o custo de incluí-los (c_k), sendo que o valor de um compartimento s preenchidos com itens da classe k é dado por $\sum_{r=1}^{e_k} \sum_{i \in A_k} v_i \gamma_{irs}$. As restrições (5.2) controlam o comprimento das faixas para os compartimentos. Se uma faixa r preenchida com itens da classe k for incluída em algum compartimento da classe k , então $\bar{\delta}_{rs}^k$ tem valor 1, consequentemente seu tamanho deve estar entre L_{min}^k e L_{max}^k . As restrições (5.3) definem o valor das variáveis x_s^k que são utilizadas na restrição (5.8). x_s^k não é menor que o comprimento de qualquer faixa do compartimento s preenchido com itens da classe k . As restrições (5.4) limitam o número máximo de itens do tipo i na faixa r do compartimento s , se itens do tipo i são incluídos, então a variável φ_{irs} tem valor 1. As restrições (5.5) limitam o número de itens do tipo i na placa. As restrições (5.6) definem as variáveis y_{rs}^k , cujo valor não é menor que a largura de qualquer item incluído na faixa r do compartimento s com itens da classe k . As restrições (5.7) limitam que a soma das larguras das faixas incluídas num compartimento s com itens da classe k tem que ser menor ou igual que a largura da placa. A restrição (5.8) assegura que a soma do comprimento dos compartimentos incluídos na placa tem que ser menor ou igual ao comprimento da placa. Para melhorar o limitante fornecido pelo problema foram adicionadas as desigualdades válidas (5.9), que evitam simetrias. Nas restrições (5.10) se alguma faixa é incluída no compartimento s , consequentemente o compartimento é incluído na mochila e a variável δ_s^k terá valor 1. Por fim, as restrições (5.11) - (5.16) definem o domínio das variáveis.

Note que, as restrições (5.2) coincidem com as restrições (4.16) do modelo linear inteiro do problema compartimentado unidimensional, porém no caso bidimensional o modelo além de definir as faixas é necessário definir os compartimentos, dados por placas bidimensionais, e alocá-los a mochila. Comparando o modelo (5.1) - (5.16) com o modelo proposto em Furini et al. (2012), temos que em Furini et al. (2012) o modelo gera um padrão de corte bidimensional para uma placa de comprimento e largura definida. No caso da mochila compartimentada, o modelo gera um conjunto de padrões de corte bidimensional (compartimentos) de largura definida, porém de comprimento desconhecido. Além disso, a mochila compartimentada bidimensional aloca esses padrões de corte bidimensional (compartimentos) a uma mochila de comprimento limitado e largura idêntica à largura dos compartimentos, similar ao problema da mochila compartimentada unidimensional, isto é, apenas uma dimensão relevante.

5.2.2 Modelo compartimentado das prateleiras

Esta segunda formulação matemática está baseada em Lodi & Monaci (2003). O corte de cada compartimento pode ser visto como o empacotamento de itens em prateleiras, em que uma prateleira é uma fatia da placa retangular, com altura definida pela largura do maior item que a compõe. Nesta formulação matemática é necessário considerar um mapeamento entre os tipos de itens e as prateleiras em cada um dos compartimentos. Para isso considere:

- Os itens devem ser ordenados de acordo com a largura, isto é, $w_{n_{k-1}+1} \geq \dots \geq w_{n_k}$, $k = 1, \dots, K$;
- $\hat{\sigma}_k = \sum_{i \in A_k} \sigma_i$: demanda total dos itens da classe k e também um limitante superior sobre o número total de possíveis prateleiras em compartimentos formados por itens da classe k , $k = 1, \dots, K$ (a classe k é dada pelos itens $\{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$);
- $\alpha_{ik} = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_{k-1}+1+i} \sigma_j$, para $i = 1, \dots, |A_k|$ e $\alpha_{0k} = 0$, $k = 1, \dots, K$: auxilia no cálculo dos limitantes superiores para a inclusão do item i nas prateleiras.

Para facilitar a formulação matemática considere uma redefinição dos itens, em que os itens pertencentes a $A_k = \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ serão redefinidos para o conjunto $\{1, \dots, |A_k|\}$, com seus respectivos valores (v_i), comprimento e largura (l_i e w_i), e demanda (σ_i). No mapeamento, qualquer tipo de item $i = 1, \dots, |A_k|$ pode ser cortado das prateleiras de índice variando no intervalo $[1, \alpha_{ik}]$. Por outro lado, qualquer prateleira em um compartimento s ($s = 1, \dots, M_k$) da classe k , denotada por p_k , $p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k$, $k = 1, \dots, K$, pode ser cortada em itens com o tipo variando entre $[\beta_{p_k}, |A_k|]$, com $\beta_{p_k} = \min\{r : 1 \leq r \leq |A_k|, \alpha_{rk} \geq p_k\}$. β_{p_k} representa o tipo de item que deve inicializar a prateleira p_k , isto é utilizado para cada compartimento s , $s = 1, \dots, M_k$ e $k = 1, \dots, K$. As variáveis do problema são $x_{ip_k s}$, $q_{p_k s}$, δ_s^k e y_s^k , definidas como segue.

- $x_{ip_k s} = \begin{cases} \text{- número de itens do tipo } i \text{ colocados na prateleira } p_k \text{ no compartimento} \\ \text{ } s \text{ da classe } k \text{ se } i \neq \beta_{p_k}, \\ \text{- número de itens adicionais do tipo } i \text{ colocados na prateleira } p_k \text{ no} \\ \text{ compartimento } s \text{ da classe } k \text{ se } i = \beta_{p_k}, \end{cases}$

para $i = 1, \dots, |A_k|$, $p_k \in [1, \alpha_{ik}]$, $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$. O termo “adicional” indica que o item do tipo i ($i = \beta_{p_k}$) inicializando a prateleira p_k é considerado separadamente, quando a prateleira corresponde a esse tipo de item.

- $q_{p_k s} = \begin{cases} 1 \text{ se a prateleira } p_k \text{ é utilizada no compartimento } s \\ 0 \text{ caso contrário,} \end{cases}$

para $p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k$, $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$.

- $\delta_s^k = \begin{cases} 1 \text{ se o compartimento } s \text{ é incluído na mochila} \\ 0 \text{ caso contrário,} \end{cases}$

para $s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K$.

- y_s^k : comprimento do compartimento s da classe $k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K$.

O modelo é dado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \left(\sum_{i=1}^{|A_k|} v_i \left(\sum_{p_k=1}^{\alpha_{ik}} x_{ip_k s} + \sum_{p_k=\alpha_{(i-1)k}+1}^{\alpha_{ik}} q_{p_k s} \right) - c_k \right) \delta_s^k, \quad (5.17)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{t=p_k}^{\alpha_{ik}} x_{its} \leq \sigma_i - (p_k - \alpha_{(i-1)k}), p_k \in [\alpha_{(i-1)k} + 1, \alpha_{ik}],$$

$$i = 1, \dots, |A_k|, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.18)$$

$$(L_{min}^k - S_k - l_{\beta_{p_k}}) q_{p_k s} \leq \sum_{i=\beta_{p_k}}^{|A_k|} l_i x_{ip_k s} \leq (L_{max}^k - S_k - l_{\beta_{p_k}}) q_{p_k s},$$

$$p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.19)$$

$$\sum_{p_k=1}^{\hat{\sigma}_k} w_{\beta_{p_k}} q_{p_k s} \leq W, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.20)$$

$$\sum_{i=\beta_{p_k}}^{|A_k|} l_i x_{ip_k s} + l_{\beta_{p_k}} q_{p_k s} + S_k q_{p_k s} \leq y_s^k, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k,$$

$$s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.21)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} y_s^k \leq L, \quad (5.22)$$

$$\sum_{s=1}^{M_k} \left(\sum_{p_k=1}^{\alpha_{ik}} x_{ip_k s} + \sum_{p_k=\alpha_{(i-1)k}+1}^{\alpha_{ik}} q_{p_k s} \right) \leq \sigma_i, i = 1, \dots, |A_k|, k = 1, \dots, K, \quad (5.23)$$

$$q_{p_k s} \leq \delta_s^k, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.24)$$

$$q_{p_k s} \in \{0, 1\}, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.25)$$

$$0 \leq x_{ip_k s} \leq \sigma_i, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, |A_k|, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k,$$

$$s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.26)$$

$$y_s^k \geq 0, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.27)$$

$$\delta_s^k \in \{0, 1\}, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K. \quad (5.28)$$

A função objetivo maximiza o valor de utilidade dos compartimentos menos o custo de incluí-los na mochila. O valor de um compartimento s é dado por $\sum_{i=1}^{|A_k|} v_i \left(\sum_{p_k=1}^{\alpha_{ik}} x_{ip_k s} + \sum_{p_k=\alpha_{(i-1)k}+1}^{\alpha_{ik}} q_{p_k s} \right)$, para $s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K$. As restrições (5.18) limitam o número de itens do tipo i incluídos em cada prateleira p_k . As restrições (5.19) limitam o tamanho das prateleiras p_k no compartimento s entre L_{min}^k e L_{max}^k . Nas restrições (5.20) a soma da largura das prateleiras incluídas no compartimento s tem que ser menor que a largura da placa. O valor das variáveis y_s^k é definido em (5.21), cujo valor não é menor que o comprimento de qualquer

faixa no compartimento s com itens da classe k . As variáveis y_s^k são utilizadas na restrição (5.22) para garantir que a soma do comprimento dos compartimentos incluídos na mochila seja menor ou igual ao comprimento da placa. As restrições (5.23) limitam o número de itens do tipo i na placa $i = 1, \dots, |A_k|$, $k = 1, \dots, K$. Nas restrições (5.24) se alguma prateleira p_k for incluída em algum compartimento s , consequentemente, o compartimento é incluído na mochila e a variável δ_s^k terá valor 1. Por fim, as restrições (5.25) - (5.28) definem o domínio das variáveis.

Comparando o modelo (5.17) - (5.28) com o modelo de Lodi & Monaci (2003), segue que em Lodi & Monaci (2003) o modelo gera um padrão de corte para uma placa de comprimento e largura dada, enquanto que no problema da mochila compartimentada é gerado um conjunto de padrões de corte (compartimentos) considerando as mesmas estratégias de Lodi & Monaci (2003). Entretanto, o comprimento dos padrões de corte não é conhecido, que por sua vez serão alocados a mochila de modo que não ultrapasse o comprimento L , como no caso unidimensional, visto que a largura dos compartimentos é igual à largura da mochila.

Para exemplificar os parâmetros que são utilizados para a definição do modelo compartimentado das prateleiras, considere os seguintes dados de um problema da mochila compartimentada.

- Número de classes: $K = 1$.
- Número de tipos de itens da classe 1: $n_1 = 3$.
- Dados dos itens do tipo 1: $(l_1, w_1, \sigma_1) = (2, 5, 3)$.
- Dados dos itens do tipo 2: $(l_2, w_2, \sigma_2) = (3, 3, 2)$.
- Dados dos itens do tipo 3: $(l_3, w_3, \sigma_3) = (4, 2, 2)$.

Os itens estão definidos em ordem não-crescente de acordo com a largura e estão representados na Figura 5.5.

Figura 5.5: Representação dos itens do tipo 1, 2 e 3.

Assim, a demanda total dos itens e, também, o limitante superior sobre o número possível de prateleiras é dado por $\hat{\sigma}_1 = 7$. Cada prateleira pode ser incluída apenas uma vez. O parâmetro α_{ik} para cada um dos itens é dado por $\alpha_{11} = 3$, $\alpha_{21} = 5$, $\alpha_{31} = 7$, eles auxiliam no cálculo dos limitantes dos itens nas prateleiras dados pelas restrições (5.18). Os parâmetros β_{pk} são dados por $\beta_{11} = 1$, $\beta_{21} = 1$, $\beta_{31} = 1$, $\beta_{41} = 2$, $\beta_{51} = 2$, $\beta_{61} = 3$, $\beta_{71} = 3$. $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 1$ significa que caso a prateleira 1, 2 ou 3 seja incluída no padrão de corte, ela deve começar com o item 1, itens do tipo 2 e 3 também podem ser incluídos. $\beta_{41} = \beta_{51} = 2$ significa que caso as prateleiras 4 e/ou 5 sejam incluídas no padrão de corte, elas devem começar com o item 2, note que itens do tipo 3 podem ser incluídos, porém não podem ser incluídos itens do tipo 1. Da mesma forma, $\beta_{61} = \beta_{71} = 3$ significa que caso sejam incluídas as prateleiras 6 e/ou 7 no padrão de corte, elas devem começar com itens do tipo 3, itens do tipo 1 e 2 não podem ser incluídos nessas prateleiras. As restrições (5.18), desconsiderando o número máximo de compartimentos M_k , fazendo $s = 1$ e dado que $K = 1$, são dadas por:

$$x_{111} \leq 2;$$

$$x_{121} \leq 1;$$

$$x_{131} \leq 0;$$

$$x_{241} \leq 1;$$

$$x_{251} \leq 0;$$

$$x_{361} \leq 1;$$

$$x_{371} \leq 0.$$

Caso a prateleira 1 seja incluída no compartimento 1, a variável q_{11} será 1, que significa que o item 1 é incluído uma vez na prateleira. A variável x_{111} representa o número de vezes que os demais itens do tipo 1 é incluído no compartimento. Assim, o número total de itens do tipo 1 incluídos na prateleira 1 deve ser maior ou igual a 1 e menor ou igual a 3, logo x_{111} deve ser menor ou igual a 2.

Caso a prateleira 2 seja incluída na mochila, a variável q_{2s} será 1, que significa que o item 1 é incluído uma vez. A variável x_{121} representa o número de vezes que os demais itens do tipo 1 pode ser incluído na prateleira 2. Para reduzir o número de prateleiras repetidas, note que a prateleira 2 pode incluir até 2 itens do tipo 1.

Se prateleira 3 for incluída a variável $x_{131} = 0$, significa que apenas um item do tipo 1 deve ser incluído na prateleira representado por $q_{3s} = 1$. Da mesma forma podemos analisar as demais restrições. A Figura 5.6 representa o número máximo dos itens que inicializam as prateleiras podem ser incluídos.

Figura 5.6: Representação de como deve ser composição dos primeiros itens nas prateleiras.

5.3 Formulações matemáticas para o segundo estágio de corte na placa realizado na vertical

Nesta seção são apresentados dois modelos matemáticos de programação inteira mista para o problema da mochila compartimentada bidimensional com o segundo estágio na placa realizado na vertical, que são adaptações dos modelos descritos na Seção 5.2.

5.3.1 Modelo compartimentado vertical

Para que o primeiro estágio de corte dentro dos compartimentos seja na vertical é necessário considerar algumas adaptações no modelo (5.1) - (5.16). Neste caso, o modelo deve gerar faixas verticais para compor os compartimentos. Uma faixa vertical tem o comprimento dado pelo item de maior comprimento que a compõe e sua largura é dada por W . Caso a soma da largura dos itens na faixa seja menor que W , então a parte não utilizada é considerada como perda. Além disso, o comprimento do compartimento com itens da classe k deve estar entre L_{min}^k e L_{max}^k , em que o comprimento do compartimento é maior ou igual à soma do comprimento das faixas que o compõe mais a perda fixa (S_k). Se a soma do comprimento das faixas mais a perda fixa for menor que o comprimento do compartimento, então existe uma perda extra. Da mesma forma que no modelo (5.1) - (5.16), os compartimentos são dispostos na placa de modo que não ultrapasse o comprimento L . Para a apresentação do modelo considere os seguintes dados adicionais e variáveis.

Dados:

- e_k : número máximo de possíveis faixas num compartimento com itens da classe k , em que $e_k = \lfloor \frac{L_{max}^k}{l_k} \rfloor$ e $\bar{l}_k = \min\{l_i, i \in A_k\}$, $k = 1, \dots, K$;
- $\bar{\sigma}_i$: o número máximo de possíveis itens do tipo i ($i \in A_k$) em uma faixa, em que $\bar{\sigma}_i = \min\{\sigma_i, \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor\}$, $i \in A_k$, $k = 1, \dots, K$.

Variáveis:

- y_{rs}^k : comprimento da faixa r do compartimento s da classe k , $r = 1, \dots, e_k$, $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$;
- x_s^k : comprimento do compartimento s da classe k , $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$;
- γ_{irs} : número de vezes que o item i é incluído na faixa r do compartimento s ;
- δ_s^k : igual a 1 se o compartimento s da classe k é incluído na mochila; 0 caso contrário;
- φ_{irs} : igual a 1 se o item i é incluído na faixa r do compartimento s ; 0 caso contrário.

Assim, o problema da mochila compartimentada bidimensional com segundo estágio de corte vertical pode ser formulado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \left(\sum_{r=1}^{e_k} \sum_{i \in A_k} v_i \gamma_{irs} - c_k \right) \delta_s^k, \quad (5.29)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i \in A_k} w_i \gamma_{irs} \leq W, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.30)$$

$$\gamma_{irs} \leq \bar{\sigma}_i \varphi_{irs}, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.31)$$

$$\sum_{s=1}^{M_k} \sum_{r=1}^{e_k} \gamma_{irs} \leq \sigma_i, i \in A_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.32)$$

$$l_i \varphi_{irs} \leq y_{rs}^k, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.33)$$

$$L_{min}^k \delta_s^k \leq \sum_{r=1}^{e_k} y_{rs}^k + S_k \delta_s^k \leq L_{max}^k \delta_s^k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.34)$$

$$\sum_{r=1}^{e_k} y_{rs}^k + S_k \delta_s^k \leq x_s^k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.35)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} x_s^k \leq L, \quad (5.36)$$

$$\sum_{i \in A_k} (l_i w_i) \gamma_{irs} \leq y_{rs}^k W, r = 1, \dots, e_k, \\ s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.37)$$

$$y_{rs}^k \leq y_{r+1s}^k, r = 1, \dots, e_k - 1, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.38)$$

$$\delta_s^k \in \{0, 1\}, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.39)$$

$$y_{rs}^k \geq 0, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.40)$$

$$0 \leq x_s^k \leq L_{max}^k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.41)$$

$$\gamma_{irs} \geq 0 \text{ e inteiro}, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.42)$$

$$\varphi_{irs} \in \{0, 1\}, i \in A_k, r = 1, \dots, e_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K. \quad (5.43)$$

A função objetivo (5.29) maximiza o valor de utilidade dos compartimentos menos o custo de incluí-los. As restrições (5.30) geram as faixas, em que a soma da largura dos itens incluídos não pode ultrapassar a largura da placa. As restrições (5.31) limitam o número de itens do tipo i incluídos nas faixas, em que se um item do tipo i é incluído na faixa r no compartimento s , então φ_{irs} tem valor 1. As restrições (5.32) limitam o número de itens do tipo i incluídos na placa. As restrições (5.33) determinam o valor das variáveis y_{rs}^k , que tem valor não menor que o comprimento dos itens na faixa r no compartimento s com itens da classe k . As restrições (5.34) determinam o comprimento dos compartimentos, que devem estar entre L_{min}^k e L_{max}^k . Note que, se algum y_{rs}^k for maior que o comprimento de qualquer faixa no compartimento s , então existirá uma perda extra além da perda fixa S_k . Para auxiliar na soma do comprimento dos compartimentos incluídos na mochila dado pela restrição (5.36), é definido a variável x_s^k , que pela restrição (5.35) não tem valor menor que o comprimento do compartimento s com itens da classe k . As restrições (5.37) são desigualdades válidas que limitam a área global dos itens em cada faixa a sua área. As restrições (5.38) são desigualdades válidas que evitam simetrias. Por fim, as restrições (5.39) - (5.43) definem o tipo e o intervalo das variáveis.

5.3.2 Modelo compartimentado das colunas

A formulação proposta nesta subseção consiste de uma modificação da formulação (5.17) - (5.28) para que o primeiro estágio de corte dentro dos compartimentos seja na vertical. A definição de cada compartimento pode ser vista como o empacotamento de itens em colunas, em que uma coluna é uma fatia da placa retangular disposta na vertical, com o comprimento definido pelo comprimento do maior item que a compõe. Na formulação é realizado um mapeamento entre os tipos de itens e as colunas em cada um dos compartimentos. Para a formulação considere os seguintes dados.

- Os itens devem ser ordenados de acordo com o comprimento, isto é, $l_{n_{k-1}+1} \geq \dots \geq l_{n_k}$, $k = 1, \dots, K$;
- $\hat{\sigma}_k = \sum_{i \in A_k} \sigma_i$: número total de itens e também um limitante superior sobre o número total de possíveis colunas em compartimentos formados por itens da classe k , $k = 1, \dots, K$;
- $\alpha_{ik} = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_{k-1}+1+i} \sigma_j$, para $i = 1, \dots, |A_k|$ e $\alpha_{0k} = 0$, $k = 1, \dots, K$.

Para facilitar a formulação matemática considere uma redefinição dos itens, em que itens pertencentes a $A_k = \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ serão redefinidos para o conjunto $\{1, \dots, |A_k|\}$, com seus respectivos valores (v_i) , comprimento e largura $(l_i$ e $w_i)$, e demanda (σ_i) . No mapeamento, qualquer tipo de item $i \in A_k$ pode ser cortado das colunas de índice variando no intervalo $[1, \alpha_{ik}]$. Por outro lado, qualquer coluna em um compartimento s ($s = 1, \dots, M_k$) da classe k , denotada por p_k , $p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k$, $k = 1, \dots, K$, pode ser cortada em itens com o tipo variando entre $[\beta_{p_k}, |A_k|]$, com $\beta_{p_k} = \min\{r : 1 \leq r \leq |A_k|, \alpha_{rk} \geq p_k\}$. β_{p_k} representa o tipo de item

que deve inicializar a coluna p_k , isso é utilizado para cada compartimento s , $s = 1, \dots, M_k$ e $k = 1, \dots, K$. As variáveis do problema são do tipo $x_{ip_k s}$, $q_{p_k s}$, δ_s^k e y_s^k definidas como segue.

- $x_{ip_k s} = \begin{cases} \text{número de itens do tipo } i \text{ colocados na coluna } p_k \text{ no compartimento} \\ s \text{ da classe } k \text{ se } i \neq \beta_{p_k}, \\ \text{número de itens adicionais do tipo } i \text{ colocados na coluna } p_k \text{ no} \\ \text{compartimentos da classe } k \text{ se } i = \beta_{p_k}, \end{cases}$

para $i = 1, \dots, |A_k|$, $p_k \in [1, \alpha_{ik}]$, $s = 1, \dots, M_k$. O termo “adicionais” indica que o item do tipo i ($i = \beta_{p_k}$) que inicializa a coluna p_k é considerado separadamente, quando a coluna corresponde a esse tipo de item.

- $q_{p_k s} = \begin{cases} 1 \text{ se a coluna } p_k \text{ é utilizada no compartimento } s \\ 0 \text{ caso contrário,} \end{cases}$

para $p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k$, $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$.

- $\delta_s^k = \begin{cases} 1 \text{ se o compartimento } s \text{ da classe } k \text{ é incluído na mochila} \\ 0 \text{ caso contrário,} \end{cases}$

para $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$.

- y_s^k : comprimento do compartimento s da classe k , $s = 1, \dots, M_k$, $k = 1, \dots, K$.

O modelo é dado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \left(\sum_{i=1}^{|A_k|} v_i \left(\sum_{p_k=1}^{\alpha_{ik}} x_{ip_k s} + \sum_{p_k=\alpha_{(i-1)k}+1}^{\alpha_{ik}} q_{p_k s} \right) - c_k \right) \delta_s^k, \quad (5.44)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{t=p_k}^{\alpha_{ik}} x_{its} \leq \sigma_i - (p_k - \alpha_{(i-1)k}), p_k \in [\alpha_{(i-1)k} + 1, \alpha_{ik}], \quad (5.45)$$

$$i = 1, \dots, |A_k|, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=\beta_{p_k}}^{|A_k|} w_i x_{ip_k s} \leq (W - w_{\beta_{p_k}}) q_{p_k s}, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, \quad (5.46)$$

$$s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K,$$

$$(L_{min}^k - S_k) \delta_s^k \leq \sum_{p_k=1}^{\hat{\sigma}_k} l_{\beta_{p_k}} q_{p_k s} + \Delta_s^k \leq (L_{max}^k - S_k) \delta_s^k, \quad (5.47)$$

$$s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{s=1}^{M_k} \sum_{p_k=1}^{\hat{\sigma}_k} l_{\beta_{p_k}} q_{p_k s} + S_k \delta_s^k + \Delta_s^k \leq y_s^k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.48)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} y_s^k \leq L, \quad (5.49)$$

$$\sum_{s=1}^{M_k} \left(\sum_{p_k=1}^{\alpha_{ik}} x_{ip_k s} + \sum_{p_k=\alpha_{(i-1)k}+1}^{\alpha_{ik}} q_{p_k s} \right) \leq \sigma_i, i = 1, \dots, |A_k|, k = 1, \dots, K, \quad (5.50)$$

$$q_{p_k s} \leq \delta_s^k, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.51)$$

$$q_{p_k s} \in \{0, 1\}, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.52)$$

$$0 \leq x_{ip_k s} \leq \sigma_i, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, |A_k|, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.53)$$

$$y_s^k \geq 0, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.54)$$

$$\Delta_s^k \geq 0, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K, \quad (5.55)$$

$$\delta_s^k \in \{0, 1\}, p_k = 1, \dots, \hat{\sigma}_k, s = 1, \dots, M_k, k = 1, \dots, K. \quad (5.56)$$

A função objetivo maximiza o valor de utilidade dos compartimentos menos os custo de incluí-los na mochila. As restrições (5.45) limitam o número de itens do tipo i na coluna p_k , $i = 1, \dots, |A_k|$, $p_k \in [\alpha_{(i-1)k}, \alpha_{ik}]$, $k = 1, \dots, K$. As restrições (5.46) geram colunas para os compartimentos com largura menor ou igual à largura da placa (W). As restrições (5.47) limitam o comprimento dos compartimentos entre L_{min}^k e L_{max}^k . O comprimento do compartimento é dado pela soma dos comprimentos dos compartimentos, definido pelo maior comprimento do item que o compõe, mais a perda fixa e uma perda extra Δ_s^k . A variável Δ_s^k faz com que este modelo seja equivalente ao modelo (5.29) - (5.43). As restrições (5.48) definem que as variáveis y_s^k tem que ser maior ou igual ao comprimento do compartimento s com itens da classe k e são utilizadas na restrição de capacidade da mochila (5.49). As restrições (5.50) limitam o número de itens do tipo i na placa, $i = 1, \dots, |A_k|$. Nas restrições (5.51), se alguma coluna p_k for incluída em algum compartimento s , consequentemente, o compartimento é incluído na mochila e a variável δ_s^k terá valor 1. Por fim, as restrições (5.52) - (5.56) definem o domínio das variáveis.

5.4 Formulação generalizada: segundo estágio de corte na placa realizado na vertical ou horizontal

As formulações descritas nas Seções 5.2 e 5.3 descrevem problemas cujo segundo estágio de corte na placa é realizado na direção horizontal e na direção vertical, respectivamente. Nesta seção, a reformulação (4.9) - (4.12) descrita para o caso unidimensional é utilizada para gerar padrões compartimentados bidimensionais, que podem ter o segundo estágio de corte na vertical, na horizontal e na vertical ou horizontal. Em muitas situações, realizar o primeiro estágio de corte no compartimento na vertical pode fornecer uma solução melhor que realizar o primeiro corte na horizontal e vice-versa. O objetivo desta formulação é fornecer padrões compartimentados que tenham a opção de escolher qual será a direção do primeiro corte em cada compartimento individualmente, selecionado o melhor entre os dois casos.

A formulação matemática (4.9) - (4.12) é descrita novamente nesta seção enfatizando o caso bidimensional. Para isso, considere N_k como o número total de possíveis padrões de corte para

os compartimentos da classe k , $k = 1, \dots, K$. Como a placa é dividida em compartimentos ao longo do comprimento L , então os compartimentos para a classe k possuem dimensões dadas por: $L_{sk} \times W$, $s = 1, \dots, N_k$ e $k = 1, \dots, K$. Considere que todos os padrões de corte para todos os compartimentos sejam conhecidos, sendo $\hat{a}_{is}$ o número de vezes que o item i aparece no compartimento s e $V_{ks} = \sum_{i \in A_k} v_i \hat{a}_{is}$ o valor utilidade, a variável β_{sk} representa o número de vezes que o compartimento $L_{sk} \times W$ é repetido na mochila. Assim, temos a formulação (5.57) - (5.60) denominada problema mestre. Este problema é uma extensão direta do problema mestre no caso unidimensional, diferindo apenas na obtenção de $\hat{a}_{is}$, que corresponde a um padrão bidimensional para o compartimento $L_{sk} \times W$:

$$\text{maximize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{N_k} (V_{sk} - c_k) \beta_{sk}, \quad (5.57)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{N_k} (L_{sk} + S_k) \beta_{sk} \leq L, \quad (5.58)$$

$$\sum_{s=1}^{N_k} \hat{a}_{is} \beta_{sk} \leq \sigma_i, \quad i \in A_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (5.59)$$

$$\beta_{sk} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad k = 1, \dots, K, \quad s = 1, \dots, N_k. \quad (5.60)$$

O modelo consiste em selecionar compartimentos para compor a placa (mochila) de modo que maximize o valor utilidade menos o custo de incluí-los (5.57), respeitando o comprimento L da placa (5.58) e o limitante superior dos itens (5.59). Assim, é necessário definir os compartimentos, tal que $L_{min}^k \leq L_{sk} + S_k \leq L_{max}^k$, obtidos pela resolução dos subproblemas, como no caso unidimensional. Da mesma forma que no caso unidimensional, a relaxação linear do problema mestre é resolvida por geração de colunas. A definição de cada compartimento é determinada por subproblemas que são resolvidos ou por formulações matemáticas ou heurísticas. Detalhes do método geração de colunas, bem como, formulações matemáticas e heurísticas utilizadas para a resolução dos subproblemas são dadas no Capítulo 6.

Capítulo 6

Métodos de solução

Neste capítulo será apresentado o método geração de colunas para o modelo (5.57) - (5.60), uma heurística baseada no método grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada bidimensional e alguns limitantes superiores para o problema.

O método geração de colunas é aplicado na relaxação linear do problema (5.57) - (5.60). A cada iteração, compartimentos são determinados e adicionados se convenientes. Como observado no Capítulo 5, os compartimentos são problemas de corte guilhotinado restrito 2-estágios não-exato, que podem ter o primeiro estágio de corte na vertical, na horizontal, ou considerar a orientação que fornece melhor solução (primeiro estágio no compartimento na vertical ou horizontal). O primeiro estágio de corte na placa é considerado na vertical, visto que é equivalente ao caso horizontal, pois basta rotacionar a placa. Para determinar compartimentos para o problema mestre, nesta seção serão apresentadas as seguintes abordagens:

- Duas adaptações da formulação de Furini et al. (2012), uma para o segundo estágio de corte na vertical e outra para o segundo estágio de corte na horizontal (para o problema com o segundo estágio de corte realizado na vertical ou horizontal é escolhida a melhor solução obtida entre as duas formulações);
- Duas adaptações da formulação de Lodi & Monaci (2003), uma para o segundo estágio de corte na vertical e outra para o segundo estágio de corte na horizontal (para o problema com o segundo estágio de corte realizado na vertical ou horizontal é escolhida a melhor solução obtida entre as duas formulações);
- Extensão de uma heurística bastante utilizada na literatura para o segundo estágio de corte na vertical e sua adaptação para o segundo estágio de corte na horizontal (para o problema com o segundo estágio de corte realizado na vertical ou horizontal é escolhida a melhor solução obtida entre as duas heurísticas);
- Abordagem grafo E/OU, que foi utilizada apenas para o problema em que o segundo estágio de corte é realizado na vertical ou horizontal.

Ao final do método geração de colunas, a solução obtida é contínua. Para determinar uma solução inteira factível, o modelo (5.57) - (5.60) é resolvido com as variáveis associadas às colunas geradas redefinidas como inteiras.

Limitantes superiores para o problema da mochila compartimentada bidimensional são obtidos por relaxações dos modelos propostos nas Seções 5.2 e 5.3, pelo método geração de colunas e por uma adaptação do limitante superior de Marques & Arenales (2007). A adaptação do modelo de Marques & Arenales e a geração de colunas fornecem limitantes superiores para os três casos considerados neste trabalho de acordo com o segundo estágio de corte na placa (ou primeiro estágio de cortes no compartimento): vertical, horizontal, vertical ou horizontal.

6.1 Geração de colunas

Para a descrição do método de geração de colunas para o problema da mochila compartimentada bidimensional, considere a relaxação linear do problema (5.57) - (5.60) apenas com um conjunto de colunas definidas. Neste caso o problema é denominado problema mestre restrito relaxado. Para cada classe k e cada possível tamanho inteiro entre L_{min}^k e L_{max}^k (os dados do problema são inteiros), $k = 1, \dots, K$, um subproblema deve ser resolvido. Considerando λ a variável dual associada à restrição (5.58) e o vetor $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \pi_{n_1+1}, \dots, \pi_{n_2}, \dots, \pi_{n_{K-1}+1}, \dots, \pi_{n_K})$ associado às restrições (5.59), uma coluna do problema mestre correspondendo à classe k é dada por: $\alpha_k = (L_k, 0, \dots, 0, a_{n_{k-1}+1}, \dots, a_{n_k}, 0, \dots, 0)^T$, com $L_{min}^k \leq L_k + S_k \leq L_{max}^k$. O valor desta coluna em (5.57) é dado por: $V_k - c_k = \sum_{i \in A_k} v_i a_i - c_k$. Portanto, o maior custo relativo é determinado por:

$$\max \left\{ \sum_{i \in A_k} (v_i - \pi_i) a_i - (c_k + \lambda(L_k + S_k)) \right\}.$$

Assim, para cada classe k e $L_k + S_k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$ um subproblema é definido por:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i \in A_k} (v_i - \pi_i) a_i - (c_k + \lambda(L_k + S_k)), \quad (6.1)$$

$$\text{sujeito a : } (a_{n_{k-1}+1}, \dots, a_{n_k}) : \text{corresponde a um compartimento } L_k \times W. \quad (6.2)$$

Se o subproblema (6.1) - (6.2) for resolvido na otimalidade, então a solução ótima para o problema mestre relaxado é encontrada quando $\sum_{i \in A_k} (v_i - \pi_i) a_i - (c_k + \lambda(L_k + S_k)) \leq 0$ para toda a classe k e todo $(L_k + S_k) \in [L_{min}^k, L_{max}^k]$, $k = 1, \dots, K$.

Os subproblemas são dados por um padrão de corte guilhotinado restrito 2-estágios e resolvê-los otimamente em todas as iterações do método geração de colunas pode ser computacionalmente caro. Assim, neste capítulo consideramos métodos heurísticos para resolver (6.1) - (6.2) até que não encontre soluções atrativas para serem incluídas no problema mestre. Quando isto acontece, o subproblema é resolvido otimamente para verificar se existe alguma coluna atrativa

e garantir a otimalidade do problema mestre relaxado. Para obter uma solução factível para o problema da mochila compartimentada bidimensional, após a finalização do método de geração de colunas as variáveis são redefinidas como inteiras e o problema mestre restrito com as colunas geradas é resolvido novamente. O método geração de colunas pode ser descrito como segue.

Geração de Colunas	
Fase 1:	Determine um conjunto de colunas iniciais para o problema (5.57) - (5.60). Faça Pare=Falso e $t = 0$.
Fase 2:	Enquanto Pare=Falso faça. <ul style="list-style-type: none"> - Resolva a relaxação linear do problema mestre restrito e determine o vetor multiplicador simplex (λ^t, π^t). - Resolva os subproblemas por um método heurístico ou exato. - Se todas as colunas $K * (L_{max}^k - L_{min}^k + 1)$ tem custo relativo negativo quando os subproblemas são resolvidos na otimalidade, então: Pare=Verdadeiro. (solução ótima para o problema mestre relaxado) - Senão adicione as colunas com custos relativos positivos no problema mestre: Faça: $t = t + 1$. Fim Enquanto.
Fase 3:	Redefina as variáveis como inteira e resolva o último problema mestre restrito.

6.2 Subproblema (6.1) - (6.2)

Nesta seção são apresentados modelos e heurísticas para os subproblemas (padrões de corte guilhotinado restrito 2-estágios não-exato) utilizados durante a geração de colunas. A seção está dividida em quatro partes. A Subseção 6.2.1 apresenta duas adaptações da formulação de Furini et al. (2012) para determinar compartimentos, em que a primeira adaptação é para o caso em que o primeiro estágio de corte é horizontal e a segunda na vertical. A Subseção 6.2.2 também apresenta duas formulações, uma adaptação do modelo de Lodi & Monaci (2003) para o primeiro estágio corte na horizontal e outra na vertical. A Subseção 6.2.3 apresenta uma heurística com duas versões uma para o caso vertical e outra para o caso horizontal. Entretanto, se o objetivo é determinar compartimentos tal que a direção do primeiro estágio de corte nos compartimentos é irrelevante, pode-se determinar uma solução para o caso vertical e uma solução para o caso horizontal e, então, selecionar a que fornece melhor valor. Por fim, a Subseção 6.2.4 apresenta o grafo E/OU proposto por Morabito & Arenales (1996), que determina padrões de corte, em que o primeiro estágio pode ser na vertical ou horizontal, isto é, a direção do primeiro estágio de corte é irrelevante.

6.2.1 Formulação de Furini et al.

Furini et al. (2012) apresenta uma formulação matemática para o problema de corte restrito 2-estágios para os casos em que os itens podem ou não ser rotacionados, porém nesta seção não consideramos a rotação. Para o modelo matemático, considere que a placa tenha largura W e comprimento $\bar{L}^k$, $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$, $w_i \leq W$ para todo $i \in A_k$ e os itens ordenados em ordem não-decrescente de largura. Defina $i^* = \min\{i : \sum_{j=n_{k-1}+1}^i w_j : \sigma_j > W\}$ e, então,

defina $\rho = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{i^*-1} \sigma_i + \left\lfloor \frac{W - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{i^*-1} w_i \sigma_i}{w_{i^*}} \right\rfloor$. Caso não exista i^* , então defina o número

máximo de faixas por $\rho = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \sigma_i$. As variáveis do problema são dadas por: φ_{ir} que é 1

se o item i está na faixa r e 0 caso contrário, para $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$ e $r = 1, \dots, \rho$; γ_{ir} representa o número de itens do tipo i na faixa r , para $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$ e $r = 1, \dots, \rho$; y_r denota a largura da faixa r , para $r = 1, \dots, \rho$; δ_r é igual a 1 se a faixa r é utilizada e 0 caso contrário, $r = 1, \dots, \rho$. Para a definição do modelo considere o limitante sobre o número de itens na placa dado por $\tilde{\sigma}_i = \min\{\sigma_i, \left\lfloor \frac{\bar{L}^k W}{l_i w_i} \right\rfloor\}$ e o limitante do número de itens em uma faixa r por $\hat{\sigma}_i = \min\{\sigma_i, \left\lfloor \frac{\bar{L}^k}{l_i} \right\rfloor\}$. Deste modo, a formulação para o problema sem rotação dos itens é dada como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{i \in A_k} \bar{v}_i \sum_{r=1}^{\rho} \gamma_{ir} - \Delta, \quad (6.3)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{r=1}^{\rho} y_r \leq W, \quad (6.4)$$

$$\delta_r L_{min}^k \leq \sum_{i \in A_k} l_i \gamma_{ir} + S_k \delta_r \leq \bar{L}^k \delta_r, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.5)$$

$$\sum_{r=1}^{\rho} \gamma_{ir} \leq \tilde{\sigma}_i, i \in A_k, \quad (6.6)$$

$$w_i \varphi_{ir} \leq y_r, i \in A_k, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.7)$$

$$\gamma_{ir} \leq \hat{\sigma}_i \varphi_{ir}, i \in A_k, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.8)$$

$$\sum_{i \in A_k} l_i \gamma_{ir} + S_k \delta_r \leq \Delta, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.9)$$

$$\sum_{i \in A_k} l_i w_i \leq y_r \bar{L}^k, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.10)$$

$$y_r \leq y_{r+1}, r = 1, \dots, \rho - 1, \quad (6.11)$$

$$\Delta \geq 0, \quad (6.12)$$

$$\delta_r \in \{0, 1\}, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.13)$$

$$y_r \geq 0, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.14)$$

$$\varphi_{ir} \in \{0, 1\}, i \in A_k, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.15)$$

$$\gamma_{ir} \geq 0, \text{ inteiro}, i \in A_k, r = 1, \dots, \rho. \quad (6.16)$$

Como os modelos são utilizados durante o processo geração de colunas, para determinar a solução ótima do problema mestre é necessário determinar soluções para os compartimentos com comprimento entre L_{min}^k e $\bar{L}^k$, para cada $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$, $k = 1, \dots, K$. Além disso, considere $\bar{v}_i = v_i - \pi_i$. A função objetivo maximiza o valor de utilidade dos itens e Δ minimiza o comprimento das faixas adicionadas. A variável Δ não é considerada no cálculo dos custos relativos dos subproblemas e é definida nas restrições (6.9), apenas para que o modelo forneça uma solução em que o maior comprimento seja mínimo, caso haja múltiplas soluções ótimas. Além disso, a variável Δ auxilia para que o modelo de Lodi & Monaci (2003) e Furini et al. (2012) apresentem as mesmas soluções. Quando esta variável não é considerada, os modelos de Lodi & Monaci (2003) e Furini et al. (2012) podem encontrar soluções com mesmo valor e vetor solução, porém a disposição dos itens na placa é diferente, fazendo com que os comprimentos dos compartimentos sejam diferentes. A restrição (6.4) limita a soma total da largura das faixas adicionadas no compartimento à largura da placa. A variável y_r tem o valor definido nas restrições (6.7), que é maior ou igual à largura da faixa. As restrições (6.5) definem as faixas, cujos comprimentos estão entre L_{min}^k e $\bar{L}^k$, em que existe um subproblema para cada $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$. As restrições (6.6) limitam o número de itens do tipo i na placa. As restrições (6.8) limitam o número de itens do tipo i nas faixas. As restrições (6.9) minimizam o comprimento das faixas. As restrições (6.10) e (6.11) são desigualdades válidas que asseguram que a área global dos itens na faixa não exceda a área da faixa e reduzem a simetria, respectivamente. Por fim, as restrições (6.12) - (6.16) definem o domínio das variáveis.

Conforme a Seção 6.1 e de acordo com o modelo (6.1) - (6.2) $a_i = \sum_{r=1}^{\rho} \gamma_{ir}$. Note que, neste modelo o primeiro corte no compartimento é horizontal, porém em uma configuração geral a solução ótima do primeiro estágio de corte pode ser na vertical. Assim, para que o primeiro corte seja na vertical as restrições (6.4), (6.5), (6.7), (6.9) e (6.10) são descritas como seguem, respectivamente.

$$L_{min}^k \leq \sum_{r=1}^{\rho} y_r + S_k \leq \bar{L}^k, \quad (6.17)$$

$$\sum_{i \in A_k} w_i \gamma_{ir} \leq W, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.18)$$

$$l_i \varphi_{ir} \leq y_r, i \in A_k, r = 1, \dots, \rho, \quad (6.19)$$

$$\sum_{r=1}^{\rho} y_r \leq \Delta, r = 1, \dots, \rho. \quad (6.20)$$

$$\sum_{i \in A_k} l_i w_i \leq y_r W, r = 1, \dots, \rho. \quad (6.21)$$

Além disso, o limitante superior sobre o número de itens em uma faixa é dado por: $\hat{\sigma}_i = \min\{\sigma_i, \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor\}$, e os itens são ordenados em ordem não-decrescente de comprimento. As faixas são definidas pelas restrições (6.18). As variáveis y_r têm valores definidos nas restrições

(6.19), que são utilizadas para determinar o comprimento do compartimento na restrição (6.17). O tamanho do compartimento é dado pela soma das variáveis y_r mais a perda fixa.

Outro conjunto de desigualdades válidas foi utilizado em Furini et al. (2012). Para o primeiro estágio de corte na horizontal este conjunto é definido por:

$$\begin{aligned}\theta_{min} &= \lfloor \frac{\bar{L}^k}{\max\{l_i, i \in A_k\}} \rfloor, \\ \theta_{max} &= \lfloor \frac{\bar{L}^k}{\min\{l_i, i \in A_k\}} \rfloor, \\ \sum_{i \in A_k} \lfloor l_i / (\bar{L}^k / (\theta + 1)) - \epsilon \rfloor \gamma_{ir}, \quad r = 1, \dots, \rho, \theta = \theta_{min}, \dots, \theta_{max}.\end{aligned}$$

Entretanto, esse conjunto de restrições não foi utilizado na resolução dos subproblemas, pois a validade da desigualdade depende do valor de ϵ , que pode variar de acordo com os exemplos analisados neste trabalho.

6.2.2 Formulação de Lodi & Monaci

A formulação matemática de Lodi & Monaci (2003) pode ser vista como o empacotamento de itens em prateleiras, em que uma prateleira é uma fatia da placa retangular, com altura definida pela largura do maior item que a compõe. Nesta formulação matemática é necessário considerar um mapeamento entre os tipos de itens e as prateleiras. Para isso considere $\bar{n} = \sum_{i \in A_k} \sigma_i$, que é o número total de itens e também um limitante superior sobre o número total de possíveis prateleiras. Para facilitar a formulação matemática considere uma redefinição dos itens pertencentes ao conjunto $A_k = \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ para o conjunto $\{1, \dots, |A_k|\}$, com seus respectivos valores, comprimento, largura e demanda. Defina $\alpha_i = \sum_{j=1}^i \sigma_j$, para $i = 1, \dots, |A_k|$ e $\alpha_0 = 0$, parâmetro que auxilia no cálculo dos limitantes superiores para o item i nas prateleiras. Além disso, qualquer tipo de item $i = 1, \dots, |A_k|$ pode ser cortado das prateleiras de índice variando no intervalo $[1, \alpha_i]$. Por outro lado, qualquer prateleira p , $p = 1, \dots, \bar{n}$ pode ser cortada em itens com o tipo variando entre $[\beta_p, |A_k|]$, com $\beta_p = \min\{r : 1 \leq r \leq |A_k|, \alpha_r \geq p\}$. β_p representa o tipo de item que deve inicializar a prateleira p . Além disso, considere os itens ordenados de acordo com a largura, isto é, w_i ($w_{n_{k-1}+1} \geq \dots \geq w_{n_k}$) quando a rotação não é permitida. As variáveis do problema são x_{ip} e q_p , definidas como segue.

$$x_{ip} = \begin{cases} \text{número de itens do tipo } i \text{ cortados da prateleira } p \text{ se } i \neq \beta_p, \\ \text{número de itens adicionais do tipo } i \text{ cortados da prateleira } p \text{ se } i = \beta_p, \end{cases}$$

para $i \in A_k$, $p \in [1, \alpha_i]$ o termo “adicional” indica que o item do tipo i que inicializa a prateleira é considerado separadamente.

$$\text{Para } p = 1, \dots, \bar{n}, q_p = \begin{cases} 1 \text{ se a prateleira } p \text{ é utilizada,} \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, cada prateleira pode ser utilizada apenas uma vez. Da mesma forma que em (6.3) - (6.16), para determinar a solução ótima do problema mestre é necessário determinar soluções para os compartimentos com comprimento entre L_{min}^k e $\bar{L}^k$, $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$, $k = 1, \dots, K$ e $\bar{v}_i = v_i - \pi_i$. Conforme a Seção 6.1 e de acordo com o modelo (6.1) - (6.2) $a_i = \sum_{p=1}^{\alpha_i} x_{ip} + \sum_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} q_p$. O modelo é dado como segue.

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{|A_k|} \bar{v}_i \left(\sum_{p=1}^{\alpha_i} x_{ip} + \sum_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} q_p \right) - \Delta, \quad (6.22)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{p=1}^{\alpha_i} x_{ip} + \sum_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} q_p \leq \sigma_i, i = 1, \dots, |A_k|, \quad (6.23)$$

$$(L_{min}^k - S_k - l_{\beta_p})q_p \leq \sum_{i=\beta_p}^{|A_k|} l_i x_{ip} \leq (\bar{L}^k - S_k - l_{\beta_p})q_p, \quad (6.24)$$

$$p = 1, \dots, \bar{n},$$

$$\sum_{p=1}^{\bar{n}} w_{\beta_p} q_p \leq W, \quad (6.25)$$

$$\sum_{t=p}^{\alpha_i} x_{it} \leq \sigma_i - (p - \alpha_{i-1}), i = 1, \dots, |A_k|, p \in [\alpha_{i-1} + 1, \alpha_i], \quad (6.26)$$

$$\sum_{i=\beta_p}^{|A_k|} l_i x_{ip} + (l_{\beta_p} + S_k)q_p \leq \Delta, p = 1, \dots, \bar{n}, \quad (6.27)$$

$$\Delta \geq 0, \quad (6.28)$$

$$0 \leq x_{ip} \leq \sigma_i, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, |A_k|, p \in [1, \alpha_i], \quad (6.29)$$

$$q_p \in \{0, 1\}, p = 1, \dots, \bar{n}. \quad (6.30)$$

A função objetivo maximiza o valor de utilidade dos itens incluídos e minimiza a variável Δ , em que Δ representa o maior comprimento das faixas adicionadas definida na restrição (6.27). As restrições (6.23) limitam o número de itens do tipo i no compartimento. As restrições (6.24) limitam o tamanho das prateleiras entre L_{min}^k e $\bar{L}^k$, em que existe um subproblema para cada $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$. A restrição (6.25) define que a soma das larguras das prateleiras na placa não seja maior que a largura da placa. As restrições (6.26) são desigualdades válidas que limitam o número de itens do tipo i nas prateleiras. As restrições (6.28) - (6.30) definem o domínio das variáveis. Um exemplo de como funcionam os parâmetros e as restrições (6.26), que limitam o número de itens do tipo i nas prateleiras, é dado na Subseção 5.2.2, porém na Subseção 5.2.2 é considerado os índices k (referente às classes) e s (referente aos compartimentos) e, para adequar ao modelo (6.22) - (6.30), estes índices devem ser desconsiderados.

Do mesmo modo que no modelo de Furini et al. (2012), neste modelo o primeiro corte na placa é horizontal. Para que o primeiro corte na placa seja na vertical, os itens devem ser ordenados de acordo com o comprimento ($l_i, i = 1, \dots, A_k$) e as restrições (6.24), (6.25) e (6.27) são descritas como seguem, respectivamente.

$$\sum_{i=\beta_p}^{|A_k|} w_i x_{ip} \leq (W - w_{\beta_p})q_p, p = 1, \dots, \bar{n}, \quad (6.31)$$

$$L_{min}^k \leq \sum_{p=1}^{\bar{n}} l_{\beta_p} q_p + S_k q_p + F \leq \bar{L}^k, \quad (6.32)$$

$$\sum_{p=1}^n l_{\beta_p} q_p + S_k q_p + F \leq \Delta. \quad (6.33)$$

A variável F foi adicionada para que o modelo seja compatível com o de Furini et al. (2012). F permite que compartimentos com comprimento menor que L_{min}^k sejam incluídos na mochila, sendo o comprimento do compartimento dado por $\sum_{p=1}^{\bar{n}} l_{\beta_p} q_p + S_k q_p + F$, em que F representa uma perda.

6.2.3 Heurística

Primeiro estágio de corte dos compartimentos na horizontal

Para definir compartimentos factíveis, considere que estes são divididos em faixas que, por sua vez, são divididas em itens. A largura de cada faixa é dada pela largura do item de maior largura que a compõe. Assim, as possíveis larguras para as faixas são $w_{n_{k-1}+1}, \dots, w_{n_k}$ para cada classe $k, k = 1, \dots, K$. O seguinte conjunto define os itens que podem ser cortados em uma faixa com largura w_i para cada classe $k, i \in A_k$: $W_i = \{j \in A_k : w_j \leq w_i\}$ (se $w_i = w_j$ com $i < j$, então considere apenas o conjunto W_i). Para cada conjunto $W_i, i \in A_k, k = 1, \dots, K$, as restrições (6.34) - (6.36) definem faixas factíveis para os compartimentos.

$$\bar{v}_i = \text{maximize} \quad \sum_{j \in W_i} (v_j - \pi_j) a_j, \quad (6.34)$$

$$L_{min}^k \leq \sum_{j \in W_i} l_j a_j + S_k \leq \bar{L}^k, \quad (6.35)$$

$$0 \leq a_j \leq \sigma_j, \text{ inteiro}, j \in W_i. \quad (6.36)$$

A variável a_j determina o número de vezes que o item j é incluído na faixa. O problema consiste em seleccionar os itens de modo que o comprimento da faixa esteja entre L_{min}^k e L_{max}^k . Para cada classe k de itens são determinadas F_k faixas, $k = 1, \dots, K$. A Figura 6.1 representa uma faixa formada por 4 itens, no qual a largura da faixa é definida pela largura do item 1 (w_1), a parte pintada em preto representa a perda.

Para obter mais de um tipo de faixa formado por itens de W_i no compartimento, podemos determinar as Z melhores soluções com diferentes capacidades variando-se $\bar{L}^k = L_{max}^k, L_{max}^k - 1, \dots$, para os problemas da mochila (6.34) - (6.36). Para determinar as Z melhores soluções para as mochilas pode ser utilizado um método *branch-and-bound* (para maiores detalhes veja (Leão, 2009)).

Figura 6.1: Ilustração de uma faixa.

Figura 6.2: Divisão do compartimento em faixas.

Após definir um conjunto de faixas, é preciso determinar as faixas que formarão o compartimento, como mostra a Figura 6.2. Com o objetivo de determinar um conjunto de compartimentos, consideramos que as faixas são separadas em conjuntos de acordo com seus comprimentos definidos por: $W_{tk} = \{r \in \{1, \dots, F_k\} : L_r \leq L_t\}$, $t = 1, \dots, F_k$, $k = 1, \dots, K$. Considere f_r a variável que representa o número de vezes que a faixa $r \in W_{tk}$, $t = 1, \dots, F_k$, $k = 1, \dots, K$, é utilizada no compartimento. A largura da faixa r é dada pela maior largura dos itens que a compõem, representada por w_r . O número de vezes que um item i ($i \in A_k$) é incluído na faixa r da classe k dado por a_{ir} . Para cada conjunto W_{tk} , $t = 1, \dots, F_k$ e $k = 1, \dots, K$, o seguinte modelo define compartimentos factíveis:

$$\text{maximize} \quad \sum_{r \in W_{tk}} \bar{v}_r f_r, \quad (6.37)$$

$$\sum_{r \in W_{tk}} w_r f_r \leq W, \quad (6.38)$$

$$\sum_{r \in W_{tk}} a_{ir} f_r \leq \sigma_i, \quad i \in A_k, \quad (6.39)$$

$$f_r \geq 0, \text{ inteiro}, \quad r \in W_{tk}. \quad (6.40)$$

Ao resolver F_k problemas (6.37) - (6.40), eliminando-se compartimentos iguais, são gerados N_k compartimentos factíveis para $k = 1, \dots, K$, em que o comprimento do compartimento s

($s = 1, \dots, N_k$) é determinado pelo comprimento da maior faixa que o compõe, representado por L_{sk} . $\hat{a}_{is} = \sum_{r \in W_{tk}} a_{ir} f_r$ define o número de vezes que o item i aparece no compartimento s , e seu valor utilidade é dado por V_{sk} , dado pela soma do valor utilidade das faixas que o compõe, com $s = 1, \dots, N_k$ e $k = 1, \dots, K$. Com este procedimento é possível gerar um conjunto de compartimentos a cada iteração do método geração de colunas.

Em Hifi & M'Hallah (2006) métodos heurísticos baseados em geração de faixas são comparados entre si. Um método similar ao descrito acima considera a melhor solução para o problema (6.34) - (6.36), assim cada conjunto W_i fornece apenas uma faixa. Com todas as faixas geradas, um segundo problema da mochila restrita é resolvido selecionando quais formarão o padrão. O limitante superior sobre as variáveis restringe o número máximo de vezes que cada faixa pode ser incluída no padrão.

Outra diferença entre a heurística considerada e o método utilizado em Hifi & M'Hallah (2006) está na resolução do segundo problema que seleciona faixas. Em Hifi & M'Hallah (2006), o segundo problema é dado por um problema da mochila restrita, enquanto que na heurística proposta o segundo problema é dado pela formulação (6.37) - (6.40). Entretanto, resolver o problema (6.37) - (6.40) é computacionalmente barato, como mostram os resultados computacionais no Capítulo 6. Além disso, quanto maior for o valor de Z melhor é o valor do padrão restrito 2-estágios guilhotinado. Chamaremos a heurística definida nesta seção de heurística $Z\bar{L}$ horizontal.

Primeiro estágio de corte dos compartimentos na vertical

Na definição de padrões de corte 2-estágios com o primeiro estágio de corte na vertical, o comprimento de cada coluna é dada pelo comprimento do item de maior comprimento que a compõe. Da mesma forma que no caso anterior, definimos o conjunto de itens que podem ser cortados em uma coluna com comprimento l_i , para $i \in A_k$, que é dado por $\mathcal{L}_i = \{j \in A_k : l_j \leq l_i\}$. Para cada conjunto $\mathcal{L}_i$, $i \in A_k$, $k = 1, \dots, K$, a seguinte formulação define colunas para os compartimentos.

$$\bar{v}_i = \text{maximize} \quad \sum_{j \in \mathcal{L}_i} (v_j - \pi_j) a_j, \quad (6.41)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{L}_i} w_j a_j \leq W, \quad (6.42)$$

$$0 \leq a_j \leq s_j, \text{ inteiro}, j \in \mathcal{L}_i. \quad (6.43)$$

A variável a_j determina o número de vezes que o item j é incluído na coluna. O modelo gera colunas com largura limitada por W . Deste modo, para cada classe k a resolução dos problemas (6.41) - (6.43) fornece F_k colunas, $k = 1, \dots, K$. A Figura 6.3 representa uma coluna, o comprimento da coluna é dado por l_1 . Com a definição de um conjunto de colunas, é possível determinar quais serão incluídas no compartimento. A Figura 6.4 representa um compartimento organizado por um conjunto de colunas.

Figura 6.3: Ilustração de uma coluna.

Figura 6.4: Divisão do compartimento em colunas.

Para definir compartimentos é preciso selecionar colunas, tal que a soma do comprimento total das colunas em cada compartimento mais a perda fixa S_k esteja entre L_{min}^k e L_{max}^k . Uma coluna r é definida pelos parâmetros a_{ir} , que é o número de itens do tipo i na faixa r ($i \in A_k$), obtido pela resolução de (6.41) - (6.43). Considere f_r a variável que representa o número de vezes que a coluna r é incluída no compartimento da classe k e l_r seu comprimento, $r = 1, \dots, F_k$, $k = 1, \dots, K$. O seguinte modelo define um compartimento para cada classe k e $\bar{L}_k = L_{max}^k, \dots, L_{min}^k$, $k = 1, \dots, K$.

$$\text{maximize} \quad \sum_{r=1}^{F_k} \bar{v}_r f_r \quad (6.44)$$

$$L_{min}^k \leq \sum_{r=1}^{F_k} l_r f_r + S_k \leq \bar{L}_k, \quad (6.45)$$

$$\sum_{r=1}^{F_k} a_{ir} f_r \leq \sigma_i, \quad i \in A_k, \quad (6.46)$$

$$f_r \geq 0, \text{ inteiro}, \quad r = 1, \dots, F_k. \quad (6.47)$$

Com esse procedimento é possível determinar um conjunto de compartimentos ao conside-

rar que o comprimento do compartimento em (6.44) - (6.47) é dado por valores entre L_{min}^k e L_{max}^k . Para resolver o problema da mochila (6.41) - (6.43) é utilizado o método que determina Z melhores soluções. Chamaremos este procedimento de heurística Z vertical.

6.2.4 Grafo E/OU

A abordagem em grafo E/OU de Morabito & Arenales (1996) será utilizada para resolver os subproblemas, isto é, determinar compartimentos para o problema mestre. Para a descrição do método, considere uma placa $L \times W$, um conjunto de itens de tamanhos $l_i \times w_i$ e demanda σ_i , $i = 1, \dots, m$, e $G = (V, E)$ um grafo, tal que V é o conjunto de nós e E o conjunto de arcos direcionados. Observe que um padrão de corte para um objeto inicial (placa $L \times W$) é construído por uma sequência de cortes guilhotinados que, a cada aplicação de um corte, dois novos objetos intermediários são gerados:

$$\mathcal{N} \xRightarrow{\text{corte}} (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$$

Cada um dos objetos intermediários (placas intermediárias) são cortados para gerar outros objetos intermediários e, assim, sucessivamente, até que os itens demandados ou perdas sejam obtidas. Tais objetos intermediários e os cortes que os conectam podem ser representados por uma árvore E/OU, em que um caminho completo liga o objeto inicial aos objetos finais (itens ou perdas) e representa um padrão de corte. A Figura 6.5 representa um caminho completo definido pela sequência de cortes c_1 , c_2 e c_3 de apenas 1-estágio de corte, em que $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_5$ e $\mathcal{N}_6$ os nós finais. A Figura 6.6 representa o padrão de corte obtido pela sequência de cortes representados na Figura 6.5 .

Figura 6.5: Representação de um padrão de corte pela sequência de cortes em objetos intermediários.

c_2	c_3	c_1
$\mathcal{N}_3$	$\mathcal{N}_5$	$\mathcal{N}_6$
		$\mathcal{N}_2$

Figura 6.6: Padrão de corte obtidos pela sequência de cortes c_1, c_2, c_3 .

Como existem muitas formas de se cortar um objeto (original ou intermediário) e objetos intermediários podem ser obtidos a partir de diferentes sequências de cortes guilhotinados, todos os possíveis padrões de corte são representados por caminhos completos em um grafo E/OU. No contexto de grafos, os objetos intermediários são chamados nós e os cortes (que fornecem a ligação entre os nós) são arcos. Cada arco $e \in E$ liga um nó a um par de nós: $e = (\mathcal{N}, \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\})$, o que significa que o nó $\mathcal{N}$ é ligado aos nós $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$, chamados sucessivos de $\mathcal{N}$. Para indicar que um nó $\mathcal{N}$ não tem sucessores (objeto não é mais cortado), utilizamos o corte-0, em que o sucessor de um objeto é ele próprio. Nesta duplicação final de um nó pelo corte-0, associamos uma solução, que pode ser um item com seu valor de utilidade, uma perda com valor zero, um padrão cujo valor é a soma dos valores de utilidades dos itens nele contido. Para cada nó (ou placa) são calculados os limitantes inferior e superior com o objetivo de avaliar se o caminho a ser percorrido é promissor e, caso não seja o caminho não é investigado, ou seja, uma enumeração implícita dos nós dos grafos. Além disso, é necessário definir posições que a placa pode ser cortada, o qual chamamos de conjunto de discretização. Os limitantes e o conjunto de discretização são descritos a seguir.

Limitante inferior

Um limitante inferior pode ser dado por uma solução factível para cada placa intermediária do grafo E/OU. Uma solução factível trivial é a solução homogênea e o item é incluído o máximo possível. Como o problema considerado neste trabalho é restrito e 2-estágios, o melhor valor para soluções homogêneas para uma placa $x \times y$ é dada por:

$$LI(x, y) = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \bar{v}_i * \min \left\{ \left\lfloor \frac{x}{l_i} \right\rfloor, \sigma_i \right\} \right\}, & \text{se } x \times y \text{ é gerado por corte vertical;} \\ \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \bar{v}_i * \min \left\{ \left\lfloor \frac{y}{w_i} \right\rfloor, \sigma_i \right\} \right\}, & \text{se } x \times y \text{ é gerado por corte horizontal.} \end{cases}$$

Observe que a solução homogênea com $a_i = \left\lfloor \frac{x}{l_i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{w_i} \right\rfloor$, $a_j = 0$, $j \neq i$ é 2-estágios e pode ser utilizada apenas no nó inicial. Se $\left\lfloor \frac{x}{l_i} \right\rfloor > \sigma_i$ ou $\left\lfloor \frac{y}{w_i} \right\rfloor > \sigma_i$, um limitante melhor pode ser obtido por determinar uma solução homogênea composta de um conjunto de soluções homogêneas para placa da seguinte forma: se o corte é gerado na vertical, determine o item j

que fornece $\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \bar{v}_i * \min \left\{ \left\lfloor \frac{x}{l_i} \right\rfloor, \sigma_i \right\} \right\}$, atualize a demanda e calcule a solução novamente para a placa $(x - \theta l_j, y)$ até que não seja mais possível alocar peças no retângulo restante, em que $\theta = \left\lfloor \frac{x}{l_i} \right\rfloor$. O processo é análogo se o corte é horizontal.

Embora outros limitantes inferiores simples, de melhor qualidade, possam ser facilmente descritos, $LI(x, y)$ não faz aumentar o número de estágios.

Limitante superior

Um limitante superior pode ser obtido pela relaxação do problema, por exemplo:

$$LS(x, y) = \max \sum_{i=1}^m \bar{v}_i a_i \quad (6.48)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{i=1}^m l_i w_i a_i \leq xy \quad (6.49)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, i = 1, \dots, m \quad (6.50)$$

Naturalmente, a condição de integralidade das variáveis a_i também fornece um limitante superior, ao custo de resolver um problema da mochila inteiro.

Conjunto de discretização

Considere que os itens estão ordenados em ordem crescente pelo comprimento (l_i) se o corte é vertical, ou pela largura (w_i) se o corte é horizontal ($l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m$ ou $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$). O conjunto de discretização da placa $L \times W$, para os cortes verticais é:

$$X = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i, (\text{se } w_i > W \Rightarrow \alpha_i = 0), 1 \leq x \leq \lfloor L/2 \rfloor, \alpha_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Para cortes horizontais, o conjunto de discretização é dado por:

$$Y = \left\{ y : y = \sum_{i=1}^m w_i \beta_i, (\text{se } l_i > L \Rightarrow \beta_i = 0), 1 \leq y \leq \lfloor W/2 \rfloor, \beta_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Estes conjuntos eliminam a simetria com $x \leq \lfloor L/2 \rfloor$ e, também, consideram o conceito de exclusão de Herz (1972), isto é, descartam itens $w_i > W$ de X , analogamente para o conjunto Y .

Computacionalmente, para determinar os conjuntos de discretização é utilizada a seguinte recursão para os cortes verticais (Christofides & Whitlock, 1977; Morabito & Arenales, 1996): Para $i = 1, \dots, m$ e $x = 1, \dots, \lfloor L/2 \rfloor$, considere $F_i(x) = \infty$, $F_0(x) = \infty$ e $F_i(0) = 0$.

$$F_i(x) = \min\{F_{i-1}(x), \max\{w_i, \min\{F_{i-1}(x - \rho * l_i), \rho = 1, \dots, \min\{\lfloor x/l_i \rfloor, \sigma_i\} \text{ e inteiro}\}\}\}, \\ \text{para todo } l_i \leq x \leq L/2.$$

Isso significa que $F_i(x)$ é o mínimo da máxima largura das peças $1, \dots, i$ que combinadas formam x . Enquanto que para os cortes horizontais:

Para $i = 1, \dots, m$ e $y = 1, \dots, \lfloor W/2 \rfloor$, considere $G_i(y) = \infty$ e $G_0(y) = \infty, G_i(0) = 0$.

$$G_i(y) = \min\{G_{i-1}(y), \max\{l_i, \min\{G_{i-1}(y - \rho * w_i), \rho = 1, \dots, \min\{\lfloor y/w_i \rfloor, \sigma_i\} \text{ e inteiro}\}\}\}, \\ \text{para todo } w_i \leq y \leq W/2.$$

Isso significa que $G_i(y)$ é o mínimo do máximo comprimento das peças $1, \dots, i$ que combinadas formam y .

Se $F_i(x) < \infty$ então $x = \sum_{j=1}^i \alpha_j l_j, 0 \leq \alpha_j \leq \sigma_j$ e, portanto, $x \in X$. Logo $F_i(x)$ independe do nó e pode ser gerado antes de começar o processo de busca. Em um nó N com placa de dimensões $\bar{x} \times \bar{y}$, o conjunto de discretização $X(N)$ é encontrado utilizando $F_m(x)$, isto é, $X(N) = \{x \mid F_m(x) \leq \bar{y}, 1 \leq x \leq \lfloor \bar{x}/2 \rfloor\}$, análogo para $G(N)$.

Busca em profundidade e *hill-climbing*

Em Morabito et al. (1992) é proposta uma estratégia de busca em profundidade com a heurística *hill-climbing*, como estratégia de busca no grafo E/OU. *Hill-climbing* é uma estratégia de busca local, que após gerar todos os sucessores imediatos de um nó, escolhe o melhor sucessor para ser expandido novamente e descarta os demais, isto é, examina até a profundidade 1 os sucessores do nó escolhido a ser expandido. Esta profundidade pode ser aumentada e os sucessores até uma profundidade pré-definida são examinados. Para isto, utiliza-se a busca primeiro em profundidade. Com o melhor caminho obtido, cada nó final é considerado como o nó raiz e expandido novamente até que o caminho tenha somente nós finais.

6.3 Grafo E/OU: mochila compartimentada bidimensional

Nesta seção, propomos uma heurística baseada no método grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada bidimensional. Para o desenvolvimento de métodos de busca em grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada bidimensional é necessário definir os pontos em que a placa é dividida em compartimentos. Para isso, considere $L_{min} = \min\{L_{min}^k, k = 1, \dots, K\}$ e $L_{max} = \max\{L_{max}^k, k = 1, \dots, K\}$, todos os pontos entre L_{min} e L_{max} definem o conjunto de discretização da mochila compartimentada. Além disso, é necessário determinar qual classe de itens preencherá o compartimento, cujo tamanho é definido a priori. Para selecioná-la, utilizamos um critério de seleção definido na Seção 6.3.3. Após selecionar a classe que preencherá o compartimento é necessário determinar o padrão para o compartimento, para

isso é utilizado o método de busca em grafo E/OU para o problema de corte restrito 2-estágios não-exato descrito na Seção 6.2.4. Além do critério de seleção, é necessário determinar um limitante superior e inferior para cada nó da árvore. Um algoritmo de busca em grafo E/OU para o problema, um critério de seleção e os limitantes são descritos a seguir.

6.3.1 Busca em grafo E/OU

Da mesma forma que para problemas de corte bidimensional restrito 2-estágios, o grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada é um grafo $G = (V, E)$, em que V é o conjunto de nós e E o conjunto de arcos direcionados. Cada nó representa uma placa intermediária, cada arco representa um corte que divide a placa (L, W) em duas placas (L_1, W) e (L_2, W) e um nó final representa um compartimento devidamente preenchido. Para a construção dos compartimentos, apenas cortes guilhotinados verticais sobre a placa inicial são considerados. Cada nó final possui um valor, que é o valor do compartimento determinado pela resolução de um problema de corte bidimensional restrito 2-estágios para a classe que o preenche. A árvore E/OU que representa uma solução para o problema da mochila compartimentada bidimensional é ilustrado na Figura 6.7.

Na figura 6.7 é apresentado um caminho (um padrão compartimentado para a placa $L \times W$), em que os nós representam placas intermediárias a serem divididas em compartimentos, os círculos representam as possíveis classes que podem preencher um compartimento. O primeiro corte na placa A produz placas intermediárias B e C. A placa B tem dimensões $L_B \times W$, em que $L_{min} \leq L_B \leq L_{max}$, e é preenchida com itens da classe 1, conduzindo ao nó B1, tal que $L_{min}^1 \leq \bar{L}_{B1} + S_1 \leq L_{max}^1$. O nó à direita de B, nó C, é cortado em duas placas intermediárias D e E. A placa D, com dimensões $L_D \times W$ com $L_{min} \leq L_D \leq L_{max}$, é preenchida com itens da classe 2, conduzindo ao nó D2, tal que $L_{min}^2 \leq \bar{L}_{D2} + S_2 \leq L_{max}^2$. O nó E é cortado nas placas F e G, em que G representa uma perda e F é preenchido com itens da classe 2 é escolhida para preenchê-lo, levando ao nó F2, tal que $L_{min}^2 \leq \bar{L}_{F2} + S_2 \leq L_{max}^2$. Com todos os nós fechados (finais) no caminho, temos um padrão compartimentado formado pelos compartimentos: B1, D2, F2 e G. Deste modo, o primeiro corte na placa produz um compartimento (nó à esquerda), o qual é preenchido por itens de alguma classe escolhida, que influencia nas soluções dos demais compartimentos nos caminhos. Quando uma determinada classe é escolhida, um padrão de corte para o compartimento é determinado (por exemplo, utilizando a abordagem em grafo E/OU de Morabito & Arenales (1996)), então, a demanda é atualizada para o nó à direita. Para cada nó um limitante superior é calculado, conforme na Seção 6.3.2, e seu valor é representado por: L_{sup} . Um limitante inferior é dado por uma solução factível calculada antes de iniciar o algoritmo, que é representada por L_{inf} , ou define $L_{inf} = 0$, e à medida que soluções melhores são encontradas o L_{inf} é atualizado. Para selecionar a classe que preencherá o compartimento, para cada classe k um problema é resolvido, como descrito na Seção 6.3.3, assim cada classe possui um valor e são ordenadas em ordem decrescente de acordo com esse valor. Assim, a

Figura 6.7: Grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada bidimensional.

seleção da classe que preenche o compartimento não precisa ser a classe de maior valor definida de acordo com o critério de seleção, por exemplo, podemos escolher a segunda melhor ou terceira melhor classe. Considere s o índice que representa a s -ésima melhor classe, de acordo com o a resolução do problema, escolhida para preencher o compartimento, o critério de seleção é representado por: $criterio(x, s, \sigma)$, em que s é um dado de entrada para o critério de seleção, σ é o vetor da demanda e a função retorna uma classe k que preencherá o compartimento, que de acordo com o critério é a s -ésima melhor classe para preencher o compartimento. O cálculo do limitante superior, critério de seleção e o algoritmo são dados a seguir.

6.3.2 Cálculo do limitante superior

No cálculo do limitante superior para uma placa de comprimento $\bar{L}$ e largura W , considere que os itens não são agrupados em diferentes classes (relaxação). Deste modo, existe um con-

junto de n tipos de itens com o vetor de demanda dado por σ . Um limitante superior é dado pela resolução do seguinte problema da mochila linear.

$$\max \sum_{i=1}^n v_i a_i \quad (6.51)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{i=1}^n (l_i w_i) a_i \leq \bar{L} W \quad (6.52)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.53)$$

Este limitante superior é fraco, porém durante o método consideramos apenas uma porcentagem do seu valor (pseudo limitante), ou seja, o limitante é multiplicado por $0 < \alpha \leq 1$.

6.3.3 Critério de seleção

Dado o comprimento do compartimento, definido por: $x \in [L_{min}, L_{max}]$ e o índice s , o procedimento consiste em resolver o problema (6.54) - (6.56) para cada classe $k = 1, \dots, K$:

$$V_k = \max \sum_{i \in A_k} v_i a_i - c_k \quad (6.54)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{i \in A_k} (l_i w_i) a_i \leq x W \quad (6.55)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \quad i \in A_k. \quad (6.56)$$

Ordenando as classes de acordo com o valor V_k , a classe k que fornece o s -ésimo melhor valor é selecionada para preencher o compartimento de tamanho x . A solução do compartimento é definida pelo grafo E/OU descrito na Seção 6.2.4.

6.3.4 Algoritmo

O algoritmo consiste em selecionar o caminho que forneça o melhor valor para o padrão compartimentado. No algoritmo, $solgrafo(x)$ armazena a solução obtida com a busca em grafo E/OU de Morabito & Arenales (1996) para uma placa de tamanho x (compartimento) e $solucao$ armazena a solução atual do problema da mochila compartimentada. O método recursivo é descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo de busca em grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada

Determine uma solução inicial, cujo valor é dado por $Linf$ ou defina $Linf = 0$

Seja $\bar{L} = L$, $solucao = 0$, $solgrafo(0) = 0$ e $s = 1$

Grafo E/OU mochila compartimentada $(\bar{L}, s, \sigma, solucao)$

Retorne a melhor solução encontrada ($Linf$).

```

1  Grafo E/OU mochila compartimentada ( $\bar{L}, s, \sigma$ ):
2  while  $s \leq K$  (s-ésimo melhor compartimento) do
3      para  $x = L_{max}, \dots, L_{min}$  faça
4          se  $x \leq \bar{L}$  então
5              Calcule o limitante superior ( $\bar{L} - x, \sigma$ ) e obtenha  $Lsup^1$ 
6              Calcule o limitante superior ( $x, \sigma$ ) e obtenha  $Lsup^2$ 
7              se  $solucao + \alpha * (Lsup^1 + Lsup^2) > Linf$  então
8                   $k = criterio(\bar{L}, s, \sigma)$ 
9                  se  $L_{min}^k \leq x \leq L_{max}^k$  então
10                      $subL = x - S_k$ 
11                      $solgrafo(x) = \text{grafo E/OU}(subL, k, \sigma)$ 
12                      $solucao = solucao + solgrafo(x) - c_k$ 
13                      $\bar{L} = \bar{L} - x$ 
14                     Atualiza a demanda  $\sigma$ 
15                     se  $solucao > Linf$  então
16                          $Linf = solucao$ 
17                     fim
18                     se  $L_{min} \leq \bar{L}$  então
19                         Grafo E/OU mochila compartimentada ( $\bar{L}, s, \sigma$ )
20                     fim
21                 fim
22             fim
23         fim
24          $\bar{L} = \bar{L} + x$ 
25          $solucao = solucao - solgrafo(x) + c_k$ 
26         Atualiza a demanda  $\sigma$ 
27     fim
28      $s = s + 1$ 
29 end

```

Algoritmo 1: Grafo E/OU mochila compartimentada ($\bar{L}, s, \sigma$)

6.4 Limitante superior para o problema da mochila compartimentada bidimensional

Os limitantes superiores analisados para o problema da mochila compartimentada bidimensional são definidos pela relaxação das formulações matemáticas apresentadas no Capítulo 5 e uma extensão do limitante de Marques & Arenales (2007) do caso unidimensional para o caso bidimensional.

6.4.1 Geração de colunas

O método geração de colunas para a formulação (5.57) - (5.60) foi descrito na Seção 6.1. Ao final do método geração de colunas é obtido um limitante para o problema apenas se ao menos na última iteração os subproblemas forem resolvidos na otimalidade. O método geração de colunas fornece limitante para as três variações do primeiro estágio de corte nos compartimentos. Para determinar a otimalidade dos subproblemas foram utilizados os modelos descritos nas Seções 6.2.2 e 6.2.1. As estratégias de resolução dos subproblemas no método geração de colunas para cada uma das abordagens do problema da mochila compartimentada bidimensional são descritas como segue.

- Primeiro estágio de corte na horizontal. Nas primeiras iterações, os subproblemas (um para cada classe k , $k = 1, \dots, K$) são resolvidos pela heurística $Z\bar{L}$ horizontal descrita na Seção 6.2.3. Quanto a heurística não encontra mais soluções com custo reduzido positivo, os subproblemas são resolvidos pela formulação (6.22) - (6.30) ou (6.3) - (6.16). Neste último caso, é resolvido um subproblema para cada $\bar{L}^k$, com $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$ e cada $k = 1, \dots, K$ em cada iteração. Quando o custo reduzido de todos os $K * (L_{max}^k - L_{min}^k + 1)$ subproblemas forem menores ou iguais a zero, então a solução ótima do problema mestre relaxado foi encontrada.
- Primeiro estágio de corte na vertical. Nas primeiras iterações, os subproblemas (um para cada classe k , $k = 1, \dots, K$) são resolvidos pela heurística Z vertical descrita na Seção 6.2.3. Quanto a heurística não encontra mais soluções com custo reduzido positivo, os subproblemas são resolvidos pela formulação (6.22), (6.23), (6.26), (6.31) - (6.33) e (6.28)-(6.30), ou (6.3), (6.6), (6.8), (6.17) - (6.21) e (6.13) - (6.16). Neste último caso, é resolvido um subproblema para cada $\bar{L}^k$, com $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$ e cada $k = 1, \dots, K$ em cada iteração. Quando o custo reduzido de todos os $K * (L_{max}^k - L_{min}^k + 1)$ subproblemas forem menores ou iguais a zero, então a solução ótima do problema mestre relaxado foi encontrada.
- Orientação do primeiro estágio de corte irrelevante e avaliada separadamente para cada compartimento. Nas primeiras iterações, o subproblema é resolvido pelo método grafo E/OU descrito na Seção 6.2.4, o algoritmo é executado para cada comprimento do compartimento $\bar{L}^k$, com $\bar{L}^k = L_{min}^k, \dots, L_{max}^k$ e $k = 1, \dots, K$. Quando o grafo E/OU não encontra mais soluções com custo reduzido positivo, o subproblema é resolvido pelos modelos adaptados de Lodi & Monaci (2003) [(6.22) - (6.30) e (6.22), (6.23), (6.26), (6.31) - (6.33)] ou de Furini et al. (2012) [(6.3) - (6.16) e [(6.3), (6.6), (6.8), (6.17) - (6.21), (6.13) - (6.16)]. A solução com maior valor entre os dois modelos com o primeiro corte na vertical e primeiro corte na horizontal é adicionada ao problema mestre. Para cada um dos dois tipos de subproblemas (primeiro estágio de corte na vertical e primeiro

estágio de corte na horizontal) são resolvidos $K * (L_{max}^k - L_{min}^k + 1)$ subproblemas, totalizando $2 * K * (L_{max}^k - L_{min}^k)$ subproblemas por iteração.

6.4.2 Programação linear inteira : super compartimentos bidimensionais

Um limitante superior para o problema da mochila compartimentada bidimensional pode ser obtido pela extensão do limitante superior proposto por Marques & Arenales (2007) para o caso unidimensional. Neste caso, o tamanho da mochila e dos itens são redefinidos para tamanhos unidimensionais, isto é, um item de comprimento l_i e largura w_i tem o tamanho definido por $l_i w_i$, a mochila tem tamanho redefinido por LW e o tamanho dos compartimentos estão limitados por $L_{min}^k W$ e $L_{max}^k W$. Para a definição do modelo, considere a_i o número de vezes que o item i é incluído na mochila e β_k o número de compartimentos da classe k que é incluído na mochila, em que é incluído apenas um compartimento (super compartimento) com tamanho entre $\beta_k L_{min}^k W$ e $\beta_k L_{max}^k W$.

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^n v_i a_i - \sum_{k=1}^K c_k \beta_k \quad (6.57)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^n l_i w_i a_i \leq LW - \left(\sum_{k=1}^K S_k W \beta_k \right) \quad (6.58)$$

$$L_{min}^k W \beta_k \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i w_i a_i + S_k W \beta_k \leq L_{max}^k W \beta_k, \\ k = 1, \dots, K \quad (6.59)$$

$$0 \leq a_i \leq \sigma_i, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n \quad (6.60)$$

$$\beta_k \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K. \quad (6.61)$$

A função objetivo (6.57) maximiza o valor de utilidade dos itens descontando o custo de incluir os compartimentos. A restrição (6.58) define que a sua área total de itens incluídos na mochila não deve exceder a capacidade da mochila. As restrições (6.59) definem os tamanhos dos super-compartimentos. As restrições (6.60) limita o número de itens na mochila. Este modelo é um limitante superior para todos os três casos do problema da mochila compartimentada considerados.

6.4.3 Programação linear

Os modelos de programação linear utilizados para determinar limitantes superiores para o problema são as formulações matemáticas descritas nas Seções 5.2 e 5.3, que definem limitantes superiores apenas para os casos com primeiro estágio de corte nos compartimentos realizado na horizontal e primeiro estágio de corte nos compartimentos realizado na vertical. Assim, temos:

- Primeiro estágio de corte na horizontal: (1) modelo compartimentado horizontal (5.1) - (5.16); (2) modelo compartimentado das prateleiras (5.17)- (5.28)
- Primeiro estágio de corte na vertical: (1) modelo compartimentado vertical (5.29) - (5.43); (2) modelo compartimentado das colunas (5.44)- (5.56).

Capítulo 7

Resultados Computacionais

Este capítulo apresenta os resultados computacionais para os modelos apresentados no Capítulo 5 e os métodos apresentados no Capítulo 6. Os testes computacionais foram realizados num computador Intel Core i7 com 3.20 GHz e 16 Gbyte de memória. Os modelos e os métodos computacionais foram implementados em linguagem C/C++, com as formulações apresentadas no Capítulo 5, o problema mestre inteiro/relaxado e os modelos matemáticos dos subproblemas apresentados nas Subseções 6.2.1 e 6.2.2 resolvidos com o auxílio do CPLEX 12.4. Para os subproblemas resolvidos pela heurística $Z\bar{L}$ horizontal e Z vertical (Subseção 6.2.3) utilizamos um método *branch-and-bound* que determina as Z melhores soluções para o problema da mochila. O método grafo E/OU descrito na Seção 6.2.4 para resolver o subproblema e o método grafo E/OU para mochila compartimentada descrito na Seção 6.3 foram implementados em linguagem C/C++. Para os modelos resolvidos pelo CPLEX o número de processadores foi limitado em quatro. No final do método geração de colunas, as variáveis do problema mestre foram redefinidas como inteiras e o problema mestre restrito inteiro foi resolvido pelo CPLEX com o tempo computacional limitado em 10 minutos, bem como os modelos apresentados no Capítulo 5.

7.1 Gerador de dados para o problema da mochila compartimentada bidimensional

Os exemplos gerados estão baseados na classificação proposta em Alvarez-Valdés et al. (2002) e estão divididos em 12 grupos, para cada grupo foram gerados 20 exemplos, totalizando 240 exemplos. Os grupos são definidos pela variação do número de itens, número de classes e o valor utilidade dos itens. Para o valor utilidade foi considerado o caso com peso e sem peso, isto é, o problema é denominado com peso (CP) se o valor utilidade é gerado aleatoriamente e sem peso (SP) se o valor do item é dado pela sua área. Os dados foram gerados da seguinte maneira:

Parâmetros fixos:

- tamanho da mochila: $(L, W) = (500, 100)$
- comprimento mínimo e máximo para os compartimentos: $L_{min}^k = 90$ e $L_{max}^k = 100$, $k = 1, \dots, K$

Parâmetros aleatórios:

- demanda: $\sigma_i = \max\{1, \min\{10, \text{random}(\lfloor L/l_i \rfloor \cdot \lfloor W/w_i \rfloor)\}\}$
- comprimento e largura dos itens: l_i e $w_i \in [0.1L_{max}, 0.7W]$

Parâmetros variáveis:

- Número de classes:
 - Pequeno (P): $k \in [3, 10]$
 - Médio (M): $k \in [11, 20]$
- Número de itens por classe:
 - Pequeno (P): $n_k \in [5, 10]$
 - Médio (M): $n_k \in [10, 15]$
 - Grande (G): $n_k \in [15, 20]$
- Valor utilidade:
 - Sem peso (SP): $\bar{v}_i = l_i \times w_i$
 - Com peso (CP): $\bar{v}_i \in [100, 1000]$

A Tabela 7.1 mostra as características dos grupos.

Tabela 7.1: Característica de cada grupo de exemplares.

Grupo	número de classes	número de itens	utilidade
1	P	P	SP
2	P	M	SP
3	P	G	SP
4	P	P	CP
5	P	M	CP
6	P	G	CP
7	M	P	SP
8	M	M	SP
9	M	G	SP
10	M	P	CP
11	M	M	CP
12	M	G	CP

7.2 Segundo estágio de corte na placa realizado na horizontal

7.2.1 Limitantes superiores

Os limitantes superiores para o problema da mochila compartimentada com o segundo estágio de corte na horizontal são dados pelos seguintes modelos: super compartimentos bidimensionais (6.57) - (6.61); modelo compartimentado horizontal (5.2) - (5.16) relaxado; modelo compartimentado das prateleiras (5.17) - (5.28) relaxado; problema mestre (5.57) - (5.60) relaxado. O problema mestre relaxado é resolvido pelo método geração de colunas com os subproblemas resolvidos pela heurística $Z\bar{L}$ horizontal (com $Z = 1$ e $\bar{L} = 1$), quando a heurística para de encontrar colunas para serem adicionadas ao problema mestre, os subproblemas são resolvidos pela formulação adaptada de Furini et al. (2012) [(6.3) - (6.16)] ou pela formulação adaptada de Lodi & Monaci (2003) [(6.22) - (6.30)].

A Tabela 7.2 apresenta o gap médio e o tempo computacional médio (t(s)) para os limitantes superiores. A notação utilizada na tabela para representar os resultados dos limitantes é dada como segue: PLI representa modelo super compartimentos bidimensionais; MCHR representa modelo compartimentado horizontal relaxado; MCPR representa modelo compartimentado das prateleiras relaxado; GC representa o método geração de colunas. Para o método geração de colunas, a tabela apresenta o tempo computacional com o subproblema resolvido pela formulação adaptada de Furini et al. (2012) [(6.3) - (6.16)] na coluna t(s) Furini. Para o subproblema resolvido pela formulação adaptada de Lodi & Monaci (2003) [(6.22) - (6.30)], os resultados são apresentados na coluna t(s) Lodi. O gap é calculado em relação ao super compartimentos bidimensionais, que é dado por $100 * \frac{f(PLI) - f}{f(PLI)}$ (%), em que $f(PLI)$ é o valor da função objetivo do super compartimentos e f o valor da função objetivo da formulação analisada.

Tabela 7.2: Resultados dos limitantes superiores - segundo estágio de corte na horizontal.

Grupo	PLI	MCHR		MCPR		GC $Z=1 \bar{L}=1$		
	t(s)	gap	t(s)	gap	t(s)	gap	t(s) Furini	t(s) Lodi
1	65,66	-157,94	0,29	-279,17	0,51	5,59	57,23	52,14
2	23,89	-242,24	0,53	-434,48	0,91	2,71	138,58	117,93
3	4,68	-316,04	0,96	-578,30	1,21	1,27	329,54	206,91
4	1,35	-36,37	0,25	-67,88	0,37	14,32	82,34	83,08
5	2,28	-53,18	0,53	-129,67	0,85	10,71	197,37	557,69
6	2,61	-66,41	1,01	-185,00	1,30	8,60	434,52	659,37
7	543,93	-236,78	0,54	-549,81	0,82	3,42	80,89	78,39
8	9,79	-340,16	1,12	-1012,13	1,78	1,46	215,52	168,50
9	4,93	-405,93	1,68	-1199,70	2,32	0,64	454,31	201,94
10	2,22	-62,21	0,73	-183,86	0,90	11,53	240,34	366,28
11	3,23	-76,38	1,37	-286,16	1,74	10,59	324,61	481,73
12	3,43	-83,19	2,09	-338,50	2,78	8,90	640,23	1262,43

O problema mestre (5.57) - (5.60) relaxado resolvido pelo método geração de colunas fornece os melhores limitantes superiores para todos os exemplos, apenas um exemplo do grupo 9 que o super compartimentos e o problema mestre relaxado obtiveram o mesmo valor objetivo. Quando o subproblema é resolvido pela adaptação do modelo Lodi & Monaci (2003), o tempo

computacional do método geração de colunas é maior para os exemplos com valor de utilidade CP. Além disso, para um exemplo do grupo 10, o método geração de colunas com o subproblema resolvido pela adaptação do modelo de Lodi & Monaci (2003) não obteve solução ótima (após 24 horas a execução do algoritmo foi encerrada). Para este grupo o gap médio é dado por 11,67%, que foi calculada a média entre os 19 exemplos resolvidos. Quando o subproblema é resolvido pela adaptação do modelo de Furini et al. (2012), o tempo computacional do método geração de colunas é menor para os exemplos com valor de utilidade SP, em relação ao método com o subproblema resolvido pelo modelo de Lodi & Monaci (2003). Os tempos computacionais do método geração de colunas são para os subproblemas resolvidos nas primeiras iterações pela heurística $Z\bar{L}$ horizontal com $Z = 1$ e $\bar{L} = 1$, à medida que $\bar{L}$ aumenta o tempo computacional do método diminui.

Apesar do tempo computacional do modelo compartimentado horizontal e modelo compartimentado das prateleiras relaxados ser baixo, os limitantes superiores fornecidos por ambos é pior que o limitante fornecido pelo modelo super compartimentos bidimensionais, sendo que o modelo compartimentado horizontal relaxado é mais apertado que modelo compartimentado das prateleiras relaxado.

7.2.2 Soluções factíveis

A Tabela 7.3 apresenta os resultados computacionais médios obtidos com o modelo compartimentado horizontal (coluna MCH) e o modelo compartimentado das prateleiras (coluna MCP). Os métodos geração de colunas são apresentados nas Tabelas 7.4, 7.5 e 7.6. Para os subproblemas foram consideradas três abordagens: resolvidos apenas pela heurística $Z\bar{L}$ horizontal (Subseção 6.2.3), resolvidos pela heurística e pelo modelo adaptado de Furini et al. (2012) [(6.3) - (6.16)], e resolvidos pela heurística e pelo modelo adaptado de Lodi & Monaci (2003) [(6.22) - (6.30)], representados nas tabelas por Heurística, Furini e Lodi, respectivamente. Para a heurística foi considerado $Z = 1, 5$ e 7 e $\bar{L} = 1, 5$ e 7 . Nas tabelas é apresentado o tempo computacional denotado por $t(s)$, o gap e o número de iterações para os métodos geração de colunas denotado por it . O gap foi calculado em relação ao melhor limitante superior obtido, isto é, o método geração de colunas, dado por $100 * \frac{f(LS) - f}{f(LS)}$, em que $f(LS)$ representa o melhor limitante superior obtido e f é o valor da solução do modelo analisado ou do problema mestre restrito inteiro obtido após o método geração de colunas.

Para o problema mestre restrito inteiro e os modelos resolvidos pelo CPLEX, o tempo computacional foi limitado em 600 segundos. Dentro deste tempo computacional, para todos os modelos o CPLEX determinou soluções factíveis, exceto o método geração de colunas com o subproblema resolvido pelo modelo (6.22) - (6.30), que não foi determinada a solução ótima para o problema mestre (5.57) - (5.60) relaxado de um exemplo. Comparando o modelo compartimentado horizontal e o modelo compartimentado das prateleiras, na Tabela 7.3 temos que o modelo compartimentado horizontal apresenta os menores gaps, em que a diferença é maior

Tabela 7.3: Resultados das formulações matemáticas - segundo estágio de corte na horizontal.

Grupo	MCH		MCP	
	gap	t(s)	gap	t(s)
1	3,03	600,18	3,97	600,43
2	2,38	600,35	7,23	600,22
3	2,15	600,50	9,24	600,53
4	4,84	583,77	5,03	600,53
5	3,70	600,68	15,98	600,61
6	3,43	600,73	25,69	600,19
7	2,46	600,27	3,62	601,14
8	2,10	600,41	9,73	600,13
9	2,27	600,50	15,38	600,24
10	3,77	600,39	7,15	600,99
11	2,81	600,92	20,83	600,34
12	3,23	601,39	54,43	600,20

para problemas com o número de itens por classe dado por M e G . O modelo compartimentado das prateleiras mostrou ter mais dificuldade para resolver os exemplos a medida que o número de itens aumenta.

A Tabela 7.4 apresenta os resultados médios dos métodos geração de colunas para $Z = 1$. Pode-se observar que não existe uma garantia de que o gap melhore com o aumento do valor de $\bar{L}$ na heurística $Z\bar{L}$ horizontal e, quando os subproblemas são resolvidos na otimalidade nas últimas iterações, em alguns casos, o gap médio piorou. Para o método geração de colunas com o subproblema resolvido apenas pela heurística a medida que $\bar{L}$ aumenta o gap diminui. Além disso, o gap foi alto para os problemas com valor utilidade do tipo CP e baixo para os problemas do tipo SP com número de classes do tipo M (grupos 7, 8 e 9). Quando os subproblemas são resolvidos pelas adaptações dos modelos de Lodi & Monaci (2003) e Furini et al. (2012) o método tem aproximadamente os mesmos gaps e para poucos grupos o gap médio foi diferente. O número de iterações médio também é igual, exceto para os grupos 6 e 9. Enquanto que o tempo computacional do método com o subproblema resolvido pelo modelo de Lodi & Monaci (2003) é maior, apenas os três primeiros grupos que o tempo computacional foi menor. Para os problemas do tipo SP, principalmente os grupos 7, 8 e 9, o gap é aproximadamente o mesmo para o método geração de colunas com o subproblema resolvido apenas pela heurística, subproblema resolvido pela heurística e método exato e, também, pelo modelo compartimentado horizontal resolvido pelo CPLEX.

A Tabela 7.5 mostra os resultados médios para $Z = 5$. Para os subproblemas resolvidos na otimalidade nas últimas iterações, os gaps e o número médio de iterações são parecidos para todos os valores de $\bar{L}$, com poucas exceções. Para os grupos com valor de utilidade CP com o subproblema resolvido pelo modelo de Furini et al. (2012), o tempo computacional é menor que o método com o subproblema resolvido pelo modelo Lodi & Monaci (2003), porém é maior para os grupos SP. Para os subproblemas resolvidos apenas pela heurística o aumento de $\bar{L}$ proporcionou poucas melhorias no gap, em que o gap é mais alto para o grupo CP. Na Tabela 7.6 encontra-se os resultados obtidos para o método geração de colunas com $Z = 7$, em que o comportamento dos métodos é similar a $Z = 5$.

Tabela 7.4: Resultados das heurísticas com $Z = 1$ - segundo estágio de corte na horizontal.

	Furini $\bar{L} = 1$			Furini $\bar{L} = 5$			Furini $\bar{L} = 7$		
Grupo	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,17	57,37	5,30	3,29	51,73	4,70	3,29	52,63	4,70
2	2,19	138,73	5,45	2,36	112,84	4,60	2,36	110,86	4,55
3	1,67	329,68	4,95	1,77	281,24	4,35	1,75	258,14	4,25
4	6,52	82,49	8,55	5,98	83,36	8,70	5,98	83,32	8,70
5	4,85	197,55	8,80	4,85	205,49	8,80	4,91	205,15	8,70
6	3,97	434,69	8,65	4,15	413,89	8,20	4,18	413,47	8,25
7	2,38	80,99	4,50	2,46	67,22	4,00	2,46	67,23	4,00
8	1,66	215,62	4,65	1,72	184,36	4,15	1,72	178,62	4,10
9	1,12	454,41	4,35	1,14	385,47	3,95	1,14	369,54	3,85
10	3,87	240,47	6,55	3,91	231,48	6,40	3,91	229,38	6,40
11	2,55	324,74	6,70	2,58	335,05	6,75	2,58	335,48	6,75
12	2,62	640,34	6,45	2,59	648,19	6,30	2,59	618,06	6,15
	Lodi $\bar{L} = 1$			Lodi $\bar{L} = 5$			Lodi $\bar{L} = 7$		
Grupo	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,17	52,27	5,30	3,29	49,23	4,70	3,29	49,83	4,70
2	2,19	118,08	5,45	2,36	100,69	4,65	2,36	99,23	4,60
3	1,67	207,05	4,85	1,77	197,40	4,30	1,75	166,84	4,15
4	6,36	83,23	8,55	5,82	82,75	8,70	5,82	82,19	8,70
5	4,85	557,85	8,80	4,86	629,12	8,90	4,91	631,91	8,80
6	4,05	659,55	8,60	4,17	658,04	8,25	4,20	651,13	8,35
7	2,38	78,50	4,50	2,46	65,53	4,00	2,46	64,88	4,00
8	1,66	168,60	4,65	1,72	137,42	4,15	1,72	132,60	4,10
9	1,12	202,04	4,20	1,14	181,19	3,90	1,14	174,84	3,80
10	3,92	366,43	6,58	3,99	374,22	6,37	3,99	373,93	6,37
11	2,55	481,86	6,70	2,58	483,13	6,75	2,58	483,37	6,75
12	2,62	1262,55	6,45	2,59	1479,17	6,30	2,59	1241,18	6,20
	Heurística $\bar{L} = 1$			Heurística $\bar{L} = 5$			Heurística $\bar{L} = 7$		
Grupo	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	6,27	1,63	2,25	4,69	3,48	2,00	4,69	3,58	2,00
2	3,49	3,66	2,15	3,07	9,66	2,00	3,07	10,44	2,00
3	2,31	5,69	2,00	2,09	15,69	2,00	2,09	16,91	2,00
4	31,70	0,47	3,00	27,66	0,88	3,10	27,66	0,89	3,10
5	35,42	0,71	2,85	32,04	1,67	2,80	32,22	1,65	2,70
6	32,06	0,87	2,60	24,65	2,59	2,35	24,48	2,48	2,40
7	3,04	3,07	2,00	2,78	6,51	2,00	2,78	6,55	2,00
8	1,99	7,24	2,00	1,88	18,82	2,00	1,88	19,61	2,00
9	1,27	11,33	2,00	1,19	31,92	2,00	1,19	33,41	2,00
10	30,58	0,69	2,05	27,90	1,46	2,05	27,90	1,46	2,05
11	25,90	1,07	2,15	22,73	2,51	2,05	22,73	2,56	2,05
12	26,46	1,39	2,20	22,46	3,53	2,00	22,45	3,62	2,00

Tabela 7.5: Resultados das heurísticas com $Z = 5$ - segundo estágio de corte na horizontal.

Grupo	Furini $\bar{L} = 1$			Furini $\bar{L} = 5$			Furini $\bar{L} = 7$		
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,18	46,59	4,30	3,23	42,92	4,20	3,23	42,75	4,20
2	2,34	111,79	4,55	2,33	109,64	4,50	2,33	109,50	4,50
3	1,72	284,40	4,45	1,75	251,01	4,15	1,75	250,66	4,15
4	6,37	72,96	7,55	6,34	73,45	7,50	6,34	73,47	7,50
5	4,96	196,74	8,00	4,90	198,61	8,00	4,90	198,37	8,00
6	3,61	396,52	8,00	3,83	405,12	8,20	3,83	405,96	8,20
7	2,39	66,30	3,90	2,39	66,92	3,90	2,39	66,81	3,90
8	1,69	191,44	4,20	1,69	172,65	4,00	1,69	172,14	4,00
9	1,12	364,36	3,80	1,12	346,79	3,70	1,12	336,03	3,65
10	3,85	176,10	6,05	3,85	171,73	5,95	3,85	171,68	5,95
11	2,57	299,36	6,15	2,57	307,27	6,20	2,57	306,75	6,20
12	2,56	644,59	6,20	2,58	636,25	6,15	2,58	638,38	6,15
Grupo	Lodi $L = 1$			Lodi $L = 5$			Lodi $L = 7$		
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,18	42,68	4,25	3,23	40,12	4,20	3,23	39,64	4,20
2	2,34	98,58	4,55	2,33	103,16	4,50	2,33	103,08	4,50
3	1,72	190,78	4,45	1,75	172,70	4,15	1,75	171,72	4,15
4	6,37	70,34	7,55	6,34	71,06	7,50	6,34	70,91	7,50
5	4,96	516,11	8,05	4,90	461,64	8,00	4,90	460,81	8,00
6	3,64	550,98	8,05	3,88	541,60	8,20	3,88	541,26	8,20
7	2,39	65,19	3,90	2,39	68,08	3,90	2,39	68,21	3,90
8	1,69	143,01	4,20	1,69	127,20	4,00	1,69	127,43	4,00
9	1,12	184,42	3,80	1,12	171,41	3,70	1,12	165,97	3,65
10	3,90	318,35	6,00	3,90	332,93	6,00	3,90	337,11	6,00
11	2,57	466,11	6,15	2,57	484,24	6,20	2,57	484,70	6,20
12	2,56	1382,71	6,20	2,58	1376,95	6,15	2,58	1377,88	6,15
Grupo	Heurística $\bar{L} = 1$			Heurística $\bar{L} = 5$			Heurística $\bar{L} = 7$		
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	4,44	6,99	2,00	4,44	7,93	2,05	4,44	7,83	2,05
2	3,08	13,31	2,00	2,97	16,90	2,00	2,97	16,12	2,00
3	1,90	17,63	2,00	1,93	22,63	2,00	1,93	22,37	2,00
4	13,58	3,15	2,75	13,41	3,23	2,65	13,41	3,23	2,65
5	15,98	6,00	2,45	16,59	6,78	2,40	16,59	6,80	2,40
6	13,60	8,88	2,30	13,22	10,02	2,35	13,22	10,15	2,35
7	2,61	13,67	2,00	2,62	14,09	2,00	2,62	14,05	2,00
8	1,76	28,27	2,00	1,76	32,46	2,00	1,76	32,41	2,00
9	1,13	38,95	2,00	1,12	42,83	2,00	1,12	42,87	2,00
10	14,31	6,45	2,00	13,91	6,22	2,00	13,91	6,26	2,00
11	10,70	11,04	2,00	10,47	11,75	2,00	10,47	11,83	2,00
12	11,44	13,45	2,00	11,26	15,40	2,00	11,26	15,38	2,00

Tabela 7.6: Resultados das heurísticas com $Z = 7$ - segundo estágio de corte na horizontal.

	Furini $\bar{L} = 1$			Furniri $\bar{L} = 5$			Furini $\bar{L} = 7$		
Grupo	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,18	48,74	4,45	3,23	48,19	4,40	3,23	48,23	4,40
2	2,33	109,66	4,45	2,33	109,92	4,50	2,33	110,12	4,50
3	1,70	282,05	4,40	1,75	247,97	4,10	1,75	249,50	4,10
4	6,56	73,73	7,50	6,49	72,23	7,40	6,49	72,24	7,40
5	4,83	191,37	7,80	4,61	191,34	7,80	4,61	191,07	7,80
6	3,66	408,47	8,20	3,70	386,43	7,90	3,70	387,42	7,90
7	2,39	67,78	3,90	2,39	66,30	3,85	2,39	66,31	3,85
8	1,69	180,82	4,05	1,69	178,22	4,05	1,69	178,20	4,05
9	1,11	364,57	3,80	1,11	325,02	3,60	1,11	325,19	3,60
10	3,84	177,44	5,75	3,84	179,24	5,85	3,84	179,29	5,85
11	2,51	295,40	6,05	2,51	294,59	6,05	2,51	294,21	6,05
12	2,55	656,98	6,25	2,55	624,90	6,05	2,55	623,91	6,05
	Lodi $\bar{L} = 1$			Lodi $\bar{L} = 5$			Lodi $\bar{L} = 7$		
Grupo	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,18	43,34	4,40	3,23	42,97	4,40	3,23	43,12	4,40
2	2,32	96,52	4,45	2,32	103,55	4,50	2,32	103,45	4,50
3	1,70	191,11	4,40	1,75	170,10	4,10	1,75	170,21	4,10
4	6,42	71,60	7,50	6,34	70,16	7,40	6,34	70,19	7,40
5	4,83	496,63	7,85	4,61	489,76	7,80	4,61	492,62	7,80
6	3,67	704,17	8,15	3,70	622,26	7,85	3,70	623,53	7,85
7	2,39	67,07	3,90	2,39	63,14	3,85	2,39	63,14	3,85
8	1,69	137,34	4,05	1,69	138,00	4,05	1,69	137,82	4,05
9	1,11	185,25	3,80	1,11	160,37	3,60	1,11	159,74	3,60
10	3,89	327,51	5,79	3,89	336,33	5,89	3,89	336,07	5,89
11	2,51	441,77	6,05	2,51	436,14	6,05	2,51	437,38	6,05
12	2,55	1552,08	6,25	2,55	1632,80	6,05	2,55	1666,73	6,05
	Heurística $\bar{L} = 1$			Heurística $\bar{L} = 5$			Heurística $\bar{L} = 7$		
Grupo	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	4,44	8,43	2,00	4,21	8,95	2,05	4,21	8,95	2,05
2	2,94	15,40	2,00	2,91	16,90	2,00	2,91	16,84	2,00
3	1,94	20,16	2,00	1,94	22,94	2,00	1,94	22,95	2,00
4	10,84	4,01	2,70	10,80	4,18	2,65	10,80	4,18	2,65
5	13,05	8,06	2,40	13,30	8,69	2,40	13,30	8,67	2,40
6	10,91	11,30	2,50	10,74	12,44	2,45	10,74	12,54	2,45
7	2,59	15,12	2,00	2,60	15,51	2,00	2,60	15,49	2,00
8	1,76	31,36	2,00	1,76	34,17	2,00	1,76	34,31	2,00
9	1,11	38,70	2,00	1,11	44,22	2,00	1,11	44,06	2,00
10	10,04	8,29	2,00	9,76	8,53	2,00	9,76	8,55	2,00
11	8,88	14,07	2,00	8,88	14,79	2,00	8,88	14,78	2,00
12	9,16	18,33	2,00	9,04	19,92	2,00	9,04	20,00	2,00

Para a maioria dos exemplos resolvidos por geração de colunas o CPLEX determinou a solução ótima para o problema mestre restrito inteiro, exceto exemplos do grupo 12 com os subproblemas resolvidos na otimalidade. O tempo computacional do método geração de colunas com subproblemas resolvidos apenas pela heurística é menor, porém para os problemas do tipo CP o gap é maior quando comparado aos demais métodos geração de colunas e o modelo compartimentado horizontal. Além disso, a medida que Z e $\bar{L}$ aumentam o tempo computacional também aumenta e em alguns casos o gap diminui, principalmente quando o valor de Z aumenta em problemas com valor de utilidade do tipo CP. Para os métodos com os subproblemas resolvidos nas últimas iterações na otimalidade em alguns casos o gap aumenta com o aumento de Z e $\bar{L}$, porém os gaps estão muito próximos com diferenças pouco significativas. O gap fornecido pelo modelo compartimentado horizontal é similar a solução obtida com o problema mestre restrito inteiro com os subproblemas resolvidos na otimalidade durante o método geração de colunas.

7.3 Segundo estágio de corte na placa realizado na vertical

7.3.1 Limitantes superiores

Os limitantes superiores para o problema da mochila compartimentada com o segundo estágio na vertical são dados pelos seguintes modelos: super compartimentos bidimensionais (6.57) - (6.61), modelo compartimentado vertical (5.29) - (5.43) relaxado, modelo compartimentado das colunas (5.44) - (5.56) relaxado e pelo problema mestre (5.57) - (5.60) relaxado. O problema mestre relaxado é resolvido pelo método geração de colunas com os subproblemas resolvidos pela heurística Z vertical. Quando as heurísticas param de encontrar colunas para serem adicionadas ao problema mestre, os subproblemas são resolvidos pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) [(6.22), (6.23), (6.26), (6.31) - (6.33)] ou de Furini et al. (2012) [(6.3), (6.6), (6.8), (6.17) - (6.21), (6.13) - (6.16)]. O gap é calculado em relação ao super compartimentos bidimensionais, que é dado por $100 * \frac{f(PLI) - f}{f(PLI)} (\%)$, em que $f(PLI)$ é o valor da função objetivo do super compartimentos e f o valor da função objetivo da formulação analisada. A Tabela 7.7 apresenta os resultados médios dos limitantes superiores. A notação utilizada na tabela para representar os limitantes é dada por: MCVR representa o modelo compartimentado vertical relaxado; MCCR representa o modelo compartimentado das colunas relaxado. Para o método geração de colunas, a tabela apresenta o tempo computacional médio com os subproblemas resolvidos pela formulação adaptada de Lodi & Monaci (2003) na coluna t(s) Lodi e pela formulação adaptada de Furini et al. (2012) na coluna t(s) Furini.

Tabela 7.7: Resultados dos limitantes superiores - segundo estagio de corte na vertical.

Grupo	PLI	MCVR		MCCR		GC			
	t(s)	gap	tempo	gap	tempo	gap	t(s) Furini	t(s) Lodi	
1	65,66	0,00	0,34	0,00	0,26	5,13	60,56	58,51	
2	23,89	0,00	0,60	0,00	0,37	2,51	96,77	72,26	
3	4,68	0,00	0,92	0,00	0,65	1,33	292,98	104,98	
4	1,35	-6,21	0,41	-5,73	0,27	5,70	98,68	144,98	
5	2,28	-6,79	0,73	-6,72	0,58	5,28	205,21	266,96	
6	2,61	-8,82	1,19	-8,95	1,05	5,28	398,18	1255,35	
7	543,93	0,00	0,52	0,00	0,37	2,97	91,00	83,17	
8	9,79	0,00	1,13	0,00	0,73	1,18	162,10	122,06	
9	4,93	0,00	1,51	0,00	2,13	0,62	393,23	185,25	
10	2,22	-16,16	0,79	-16,60	0,52	5,42	172,46	261,93	
11	3,23	-17,67	1,32	-18,02	1,08	5,11	403,83	1357,52	
12	3,43	-16,87	1,97	-17,17	2,73	4,68	694,07	1497,10	

O problema mestre (5.57) - (5.60) relaxado resolvido pelo método geração de colunas fornece os melhores limitantes, apenas um exemplo que o valor da função objetivo foi igual ao do super compartimentos bidimensionais (grupo 9) e outro exemplo que foi pior (grupo 4). Entretanto, o tempo computacional do método geração de colunas é maior que as demais formulações. O tempo computacional da geração de colunas com os subproblemas resolvidos pelas adaptações de Lodi & Monaci (2003) é maior para os exemplos com valor de utilidade do tipo SP e menor para os exemplos CP, em relação à geração de colunas com os subproblemas resolvidos pelo modelo de Furini et al. (2012). Quando o subproblema é resolvido pelo modelo de Lodi & Monaci (2003), o método geração de colunas não determinou a solução de um problema mestre relaxado do grupo 3 (após 24 horas de execução do método geração de colunas, o método foi encerrado). Neste caso, o gap do grupo 3 (gap médio dos 19 exemplos resolvidos) do método geração de colunas quando o subproblema é resolvido pelo modelo de Lodi & Monaci (2003) é 1,38%. Para os grupos com valor de utilidade SP, o modelo compartimentados vertical e o modelo compartimentado das colunas obtiveram valor objetivo iguais ao do modelo super compartimentos. Enquanto que, para os grupos com valor de utilidade do tipo CP, os limitantes obtidos pelo super compartimentos são mais apertados.

Comparando com o problema com o segundo estágio de corte na horizontal, pode-se observar que no caso vertical o limitante fornecido pela relaxação do modelo compartimentado vertical e o modelo compartimentado das colunas é melhor para todos os grupos. Note que, o modelo compartimentado vertical e o modelo compartimentado das colunas são obtidos a partir do modelo compartimentado horizontal e o modelo compartimentado das prateleiras, respectivamente. Enquanto que, no método geração de colunas para o caso vertical, os gaps são aproximadamente iguais para os grupos SP e melhor para os grupos CP, em relação ao caso horizontal.

7.3.2 Soluções factíveis

A Tabela 7.8 apresenta os resultados computacionais médios obtidos com o modelo compartimentado vertical (MCV) e o modelo compartimentado das colunas (MCC), enquanto que

a Tabela 7.9 apresenta os resultados para os métodos geração de colunas. Para os subproblemas do problema mestre restrito foram consideradas três abordagens: resolvidos apenas pela heurística Z vertical (Subseção 6.2.3), resolvidos pela heurística e pelo modelo adaptado de Furini et al. (2012) [(6.3), (6.6), (6.8), (6.17) - (6.21), (6.13) - (6.16)] e resolvidos pela heurística e pelo modelo adaptado de Lodi & Monaci (2003) [(6.22), (6.23), (6.26), (6.31) - (6.33)], representados por Heurística, Furini e Lodi, respectivamente. Para a heurística foi considerado $Z = 1, 5$ e 7 . Nas tabelas são apresentados o tempo computacional médio denotado por $t(s)$, o gap médio e para o método geração de colunas o número de iterações denotado por it . O gap foi calculado em relação ao melhor limitante superior obtido dado por $100 \times \frac{f(LS)-f}{f(LS)}$, em que $f(LS)$ representa o limitante superior e f é o valor da solução factível dado pelo modelo ou método analisado.

Tabela 7.8: Resultados das formulações matemáticas - segundo estágio de corte na vertical.

Grupo	MCV		MCC	
	gap	t(s)	gap	t(s)
1	2,97	600,48	2,94	600,20
2	2,38	600,33	2,12	600,29
3	1,64	600,30	1,47	600,41
4	5,05	567,15	5,06	600,28
5	4,69	600,88	4,72	600,60
6	4,04	601,48	4,04	601,26
7	2,39	600,74	2,34	600,24
8	2,01	600,36	1,82	600,37
9	1,83	602,35	1,64	600,75
10	5,62	600,01	5,56	601,34
11	4,60	601,66	4,49	601,16
12	4,56	602,94	4,56	601,83

O tempo computacional de resolução do modelo compartimentado vertical, modelo compartimentado das colunas e o problema mestre restrito inteiro foi limitado em 600 segundos. Dentro deste tempo, o CPLEX encontrou solução factível para todos os modelos, exceto o grupo 3 que o método geração de colunas não encontrou a solução factível para um exemplo quando o subproblema é resolvido pela formulação adaptada de Lodi & Monaci (2003). Comparando o modelo compartimentado vertical e o modelo compartimentado das colunas, o desempenho foi bastante similar, porém o modelo compartimentado das colunas obteve soluções um pouco melhores que as obtidas pelo modelo compartimentado vertical para quase todos os grupos. Além disso, os modelos encontraram soluções com gaps menores para os problemas do tipo SP. Comparando os casos vertical e horizontal, pode-se observar que o modelo compartimentado horizontal foi melhor que o modelo compartimentado das prateleiras, ao contrário do do caso vertical, em que para a maioria dos grupos o modelo compartimentado das colunas foi melhor ou igual ao modelo compartimentado vertical.

Tabela 7.9: Resultados das heurísticas - segundo estágio de corte na vertical.

Grupo	Furini Z=1			Furini Z=5			Furini Z=7		
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,80	65,39	4,70	3,64	62,39	4,60	3,56	73,94	4,55
2	2,44	108,32	4,30	2,36	92,52	4,00	2,47	108,14	3,90
3	1,79	349,67	4,20	1,57	299,80	4,00	1,56	362,19	3,95
4	7,01	125,84	8,95	6,67	108,29	9,25	6,51	129,58	9,20
5	6,85	269,69	9,65	6,20	222,04	8,40	6,26	248,75	7,95
6	5,05	525,84	9,15	5,19	388,52	8,35	5,41	461,49	8,55
7	2,57	114,00	4,05	2,41	84,81	3,65	2,41	103,15	3,70
8	1,73	212,46	3,80	1,64	157,11	3,55	1,64	183,72	3,55
9	1,20	519,83	3,80	1,15	433,06	3,65	1,14	491,55	3,70
10	5,78	215,81	6,60	5,80	215,05	6,05	5,76	201,91	5,90
11	4,53	528,73	6,85	4,63	582,45	6,55	4,62	489,29	6,10
12	4,53	797,24	6,55	4,67	875,21	6,45	4,68	857,12	6,25
Grupo	Lodi Z=1			Lodi Z=5			Lodi Z=7		
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	3,80	78,30	4,70	3,64	58,75	4,60	3,56	63,92	4,55
2	2,45	94,73	4,30	2,36	68,77	4,00	2,47	75,02	3,90
3	6,79	136,78	4,21	6,56	130,51	4,00	6,56	120,12	3,95
4	6,78	192,25	8,95	6,67	470,60	9,25	6,51	168,75	9,15
5	6,85	365,08	9,55	6,20	279,71	8,40	6,26	246,78	7,95
6	5,05	1780,33	9,15	5,16	1231,91	8,30	5,37	1177,82	8,55
7	2,57	104,85	4,05	2,41	94,09	3,65	2,41	104,17	3,70
8	1,73	157,43	3,80	1,64	136,16	3,55	1,64	120,88	3,55
9	1,20	241,99	3,80	1,15	213,02	3,65	1,14	200,10	3,70
10	5,80	355,51	6,60	5,80	290,92	6,05	5,76	326,73	5,90
11	4,53	1811,43	6,80	4,63	1333,64	6,55	4,62	1597,28	6,10
12	4,53	1871,54	6,55	4,68	1768,35	6,40	4,68	1816,69	6,25
Grupo	Heurística Z=1			Heurística Z=5			Heurística Z=7		
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it
1	4,57	14,76	2,15	4,31	17,17	2,15	4,24	17,42	2,15
2	4,72	15,71	2,00	2,55	17,47	2,05	2,59	16,80	2,05
3	4,86	18,73	2,00	2,72	20,11	2,05	2,73	19,50	2,05
4	50,10	17,11	3,25	24,21	26,09	3,70	21,56	25,87	3,80
5	43,16	16,59	4,10	18,83	26,20	3,25	15,01	24,43	3,00
6	40,16	15,57	3,65	19,07	26,05	3,40	15,81	27,62	3,55
7	2,89	23,84	2,00	2,56	29,31	2,00	2,55	31,25	2,00
8	1,88	29,93	2,00	1,72	34,76	2,00	1,69	37,53	2,00
9	1,30	32,26	2,00	1,17	36,69	2,00	1,17	39,14	2,00
10	43,69	25,06	2,55	17,88	27,81	2,20	13,62	30,71	2,20
11	32,50	23,58	2,25	14,84	31,69	2,05	11,79	33,99	2,00
12	31,11	20,15	2,00	12,90	30,94	2,00	9,93	33,74	2,00

A Tabela 7.9 apresenta os resultados médios para os métodos geração de colunas. Os subproblemas resolvidos pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) e Furini et al. (2012) são bastante similares, com poucos grupos diferentes sendo a diferença na ordem de 10^{-2} , exceto para o grupo 3 que o CPLEX não encontrou a solução ótima do problema mestre restrito relaxado para um exemplo quando o subproblema é resolvido por Lodi & Monaci (2003). O número médio de iterações também é bastante similar, em geral são iguais. O tempo computacional do método para os subproblemas resolvidos pelas adaptações na formulação de Furini et al. (2012) é mais baixo, principalmente para os grupos 6, 11 e 12. O método com os subproblemas resolvidos apenas pela heurística forneceu soluções piores, porém o tempo computacional é relativamente baixo. O gap é relativamente alto para problemas com valores de utilidades do tipo CP, porém para os problemas do tipo SP os gaps são próximos ao método com os subproblemas resolvidos na otimalidade. Para os métodos geração de colunas com subproblemas resolvidos na otimalidade o aumento do valor de Z não garante soluções melhores, em que alguns casos a solução até piorou. Enquanto que para a geração de colunas com o subproblema resolvido apenas pela heurística o gap diminuiu bastante para problemas com valor de utilidade do tipo CP. De modo geral, o modelo compartimentado vertical e o modelo compartimentado das colunas fornecem soluções um pouco melhores que o método geração de colunas. Comparando os casos vertical e horizontal, o método geração de colunas para o problema com o segundo estágio de corte na placa realizado na vertical foi um pouco pior que o método para o caso horizontal.

7.4 Segundo estágio de cortes na placa realizado na vertical ou horizontal

7.4.1 Limitantes superiores

Os limitantes superiores para o problema da mochila compartimentada com o segundo estágio na vertical ou horizontal são dados pela formulação super compartimentos bidimensionais (6.57) - (6.61) e pelo problema mestre (5.57) - (5.60) relaxado. O problema mestre relaxado é resolvido pelo método geração de colunas com os subproblemas resolvidos pelo método grafo E/OU de Morabito & Arenales (1996) apresentada na Subseção 6.2.4. Quando a heurística para de encontrar colunas para serem adicionadas ao problema mestre, os subproblemas são resolvidos pelas formulações adaptadas de Furini et al. (2012) [(6.3) - (6.16) e (6.3), (6.6), (6.8), (6.17) - (6.21), (6.13) - (6.16)] ou de Lodi & Monaci (2003) [(6.22) - (6.30) e (6.22), (6.23), (6.26), (6.31) - (6.33)]. O gap é calculado em relação ao super compartimentos bidimensionais, que é dado por $100 * \frac{f(PLI) - f}{f(PLI)}$ (%), em que $f(PLI)$ é o valor da função objetivo do super compartimentos e f o valor da função objetivo da formulação analisada. A Tabela 7.10 apresenta os resultados dos limitantes superiores. Para o método geração de colunas, a tabela apresenta o

tempo computacional médio com os subproblemas resolvidos pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) na coluna t(s) Lodi e pelas formulações adaptadas de Furini et al. (2012) na coluna t(s) Furini.

Tabela 7.10: Resultados dos limitantes superiores - segundo estágio de cortes na vertical ou horizontal.

Grupo	IP	Geração de colunas		
	t(s)	gap	t(s) Furini	t(s) Lodi
1	65,66	3,60	75,35	66,76
2	23,89	1,76	149,46	115,86
3	4,68	5,80	626,83	269,45
4	1,35	4,39	93,84	114,73
5	2,28	3,77	209,81	331,94
6	2,61	3,82	572,26	1177,94
7	543,93	2,21	124,82	109,91
8	9,79	0,87	278,47	200,56
9	4,93	0,35	828,64	393,22
10	2,22	3,81	252,56	1930,79
11	3,23	3,99	504,69	1298,10
12	3,43	3,67	1197,79	1951,10

A geração de colunas fornece os melhores limitantes superiores, porém com tempo computacional maior, em apenas três exemplos a formulação super compartimentos bidimensionais forneceu um limitante mais apertado (um do grupo 4 e dois do grupo 10) e o tempo computacional para o grupo 7 foi maior. Entretanto, o método geração de colunas com o subproblema resolvido pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) não resolveu um problema do grupo 3, em que após 24 horas de execução o algoritmo foi encerrado. O tempo computacional das formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) é menor para os grupos com valor de utilidade SP e maior para os de valor utilidade CP, comparados com os subproblemas resolvidos pelas formulações adaptadas de Furini et al. (2012). De modo geral, o método geração de colunas para o problema com segundo de corte na placa realizado na vertical ou horizontal fornece limitantes mais apertados que para os problemas com o segundo estágio de corte realizado apenas na vertical ou na horizontal.

7.4.2 Soluções factíveis

A Tabela 7.11 apresenta os resultados computacionais médios obtidos com a heurística baseada no método grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada e os métodos geração de colunas. Ao final do método geração de colunas, as colunas geradas tem suas respectivas variáveis redefinidas como inteiras e o problema mestre restrito inteiro é resolvido pelo CPLEX, com tempo limitado em 10 minutos. As colunas Lodi apresentam os resultados quando os subproblemas são resolvidos pelo método grafo E/OU e, quando este não encontra mais soluções para serem adicionadas, as colunas são determinadas pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003). Enquanto que na tabela as colunas denotadas por Furini apresentam os resultados com os subproblemas definidos pelas adaptações dos modelos de Furini et al. (2012). As colunas grafo E/OU apresentam os resultados quando o subproblema é resolvido apenas pelo

grafo E/OU. As colunas “grafo E/OU mochila compartimentada” apresentam os resultados para a heurística baseada em grafo E/OU. Na tabela, $t(s)$ representa o tempo computacional médio, it o número de iterações médio dos métodos geração de colunas. O gap é dado por $100 * \frac{fLS-f}{fLS}$, em que $f(LS)$ é o limitante superior mais apertado encontrado para o problema e f o valor da função objetivo da solução fornecida pelo método analisado.

Tabela 7.11: Resultado das heurísticas - segundo estágio de cortes na vertical ou horizontal.

Grupo	Geração de colunas									grafo E/OU mochila compartimentada	
	Furini			Lodi			grafo E/OU			gap	t(s)
	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it	gap	t(s)	it		
1	6,93	76,61	4,80	3,48	69,69	4,80	7,24	2,06	2,90	8,34	0,12
2	3,95	157,41	4,60	2,23	120,04	4,60	4,32	10,90	2,70	6,71	0,66
3	2,39	684,49	5,05	6,59	278,52	5,05	2,62	40,95	3,00	5,79	1,69
4	10,97	94,97	9,65	6,83	117,07	9,65	11,57	9,69	7,30	7,36	0,18
5	9,53	215,73	10,10	5,98	336,79	10,10	10,21	66,07	7,70	6,98	0,88
6	9,66	593,31	9,05	6,05	1259,51	9,05	9,87	195,34	6,50	6,08	5,11
7	4,36	129,52	4,30	2,19	111,72	4,30	4,72	3,71	2,45	6,88	0,31
8	2,38	285,14	4,00	1,52	206,16	4,00	2,40	23,17	2,50	7,73	1,10
9	1,39	837,89	4,40	1,04	419,02	4,40	1,40	83,56	2,50	6,70	3,21
10	9,29	230,05	6,85	5,62	2090,25	6,85	10,15	13,45	4,60	7,77	0,85
11	8,29	500,81	7,05	4,48	1288,67	7,05	9,13	86,47	4,35	6,99	2,68
12	7,96	1268,91	7,15	4,45	1972,10	7,15	8,36	463,66	4,50	6,10	8,70

A Tabela 7.11 mostra que o subproblema resolvido pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) forneceram soluções com o melhor gap, exceto o grupo 3 que o método não conseguiu resolver um exemplo. Além disso, o tempo do método com os subproblemas resolvido pelas formulações adaptadas de Lodi & Monaci (2003) é melhor para os grupos com o valor de utilidade SP e pior para os grupos com valor de utilidade CP, em relação ao método com os subproblemas resolvidos pelas formulações adaptadas de Furini et al. (2012). O número de iterações é exatamente o mesmo para a geração de colunas com os subproblemas resolvidos na otimalidade. Resolver os subproblemas apenas pelo grafo E/OU fornece soluções piores, porém o tempo computacional é menor. Na heurística grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada, o fator multiplicando o limitante superior é dado por $\alpha = 0.4$. Esta heurística forneceu soluções piores, com gap variando entre 6 e 8, porém o tempo computacional é baixo, sendo que para metade dos grupos o tempo computacional médio é menor que 1 segundo. Outros valores de α foram analisados e a medida que α o gap melhora, porém para valores maiores que 0.4 o tempo computacional é alto para alguns exemplos e a melhoria não é muito significativa.

Capítulo 8

Conclusões

Nesta primeira parte do trabalho apresentamos o problema da mochila compartimentada nos contextos unidimensional e bidimensional. Os principais objetivos foram definir o problema da mochila compartimentada bidimensional, propor formulações matemáticas, bem como desenvolver métodos de solução baseados em geração de colunas para os casos unidimensional e bidimensional.

Na literatura encontram-se diversos estudos para o problema da mochila compartimentada unidimensional com aplicações diversificadas relatadas no Capítulo 3. No Capítulo 4 foram comparadas formulações matemáticas e heurísticas baseadas em geração de colunas para o problema unidimensional. A partir do método geração de colunas dinâmica é possível obter soluções de boa qualidade em um bom tempo computacional, porém se o objetivo for determinar soluções ótimas uma formulação de programação inteira pode ser utilizada com certo custo de tempo computacional para alguns exemplos.

No Capítulo 5 o problema da mochila compartimentada bidimensional considerado é do tipo guilhotinado restrito 3-estágios. Outros tipos de padrões compartimentados podem ser considerados, porém a ocorrência de padrões com muitos estágios de corte não é desejável na prática. O problema foi definido de acordo com a orientação dos cortes realizados, sendo que para problemas 3-estágios o segundo estágio de corte é fundamental para o desenvolvimento de métodos de solução e formulações matemáticas. Na primeira fase o problema é dividido em compartimentos, com cortes realizados apenas na vertical, visto que o primeiro estágio na horizontal é similar pois basta rotacionar a placa em 90° . Nesta etapa, a divisão da placa em compartimentos é similar ao problema da mochila compartimentada unidimensional, pois apenas uma dimensão é relevante. Dentro dos compartimentos são definidos padrões de corte restritos 2-estágios guilhotinado não-exato, em que para o segundo estágio de corte na placa original foram definidas três variações do problema: (i) segundo estágio de corte realizado apenas na vertical; (ii) segundo estágio de corte realizado apenas na horizontal; (iii) segundo estágio de corte realizado na vertical ou horizontal.

Para o problema da mochila compartimentada bidimensional com o segundo estágio de corte

realizado na vertical foram propostas três formulações matemáticas: dois modelos de programação inteira (modelo compartimentado horizontal e o modelo compartimentado das prateleiras) e o problema decomposto em problema mestre e subproblemas (como no caso unidimensional). Estes modelos foram adaptados para o problema com segundo estágio de corte na horizontal, denominados modelo compartimentado vertical e modelo compartimentado das colunas, e o problema decomposto, em que o problema mestre relaxado é o mesmo e os subproblemas foram adaptados. Para o problema com o segundo estágio de corte realizado na vertical ou horizontal foi considerado apenas a formulação decomposta em problema mestre e subproblemas. Além disso, foi proposta uma heurística para o problema da mochila compartimentada com o segundo estágio de corte realizado na vertical ou horizontal baseada no método grafo E/OU.

Quando a relaxação do problema mestre é resolvida por geração de colunas é necessário resolver os subproblemas, dados por problema de corte restrito 2-estágios não exato, para os quais foram implementadas diversas abordagens:

- (i) Duas adaptações das formulações de Lodi & Monaci (2003), uma para o segundo estágio de corte na vertical e outra para o segundo estágio de corte na horizontal;
- (ii) Duas adaptações das formulações de Furini et al. (2012), uma para o segundo estágio de corte na vertical e outra para o segundo estágio de corte na horizontal;
- (iii) Extensão de uma heurística bastante utilizada na literatura para o segundo estágio de corte na vertical e sua adaptação para o segundo estágio de corte na horizontal;
- (iv) Abordagem grafo E/OU, que foi utilizada apenas para o problema em que o segundo estágio de corte é realizado na vertical ou horizontal.

De modo geral, os resultados computacionais para limitantes superiores mostram que a relaxação linear do problema mestre fornece limitantes mais apertados, porém o tempo computacional é relativamente alto quando comparado com a relaxação das formulações dos problemas de programação inteira proposta. Além disso, soluções inteiras factíveis obtidas pelas heurísticas baseadas em geração de colunas também fornecem boas soluções factíveis com gaps similares aos das formulações de programação inteira, exceto o modelo compartimentado das prateleiras que forneceu soluções piores para problemas com valor de utilidade do tipo CP (com peso). Quando o subproblema é resolvido apenas por heurísticas, soluções factíveis para o problema mestre restrito inteiro são determinadas dentro de um tempo computacional baixo, porém as soluções são piores. O mesmo pode ser afirmado para o método grafo E/OU proposto para o problema da mochila compartimentada se for considerado apenas uma porcentagem do limitante superior, cujo objetivo é ramificar menos nós da árvore grafo E/OU.

Como perspectivas de investigações futuras encontram-se a definição de uma formulação matemática para o problema da mochila compartimentada bidimensional com segundo estágio de corte realizado na vertical E/OU horizontal, bem como melhorias a serem realizadas no método grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada. Neste último método, é necessário buscar limitantes superiores mais apertados e de fácil resolução. Além disso, é possível implementar este método para o problema da mochila compartimentada bidimensional com o

segundo estágio de corte realizado apenas na vertical, ou apenas na horizontal. Por fim, outro tópico para investigação futura é encontrar problemas reais compartimentados bidimensionais.

Parte II

Problema de corte de estoque acoplado ao dimensionamento de lotes

Capítulo 9

Introdução

Problemas de corte de estoque e problemas de dimensionamento de lotes são amplamente estudados na literatura. Em indústrias de papel, móveis, metalúrgicas entre outras, estes problemas encontram-se de maneira acoplada. Uma prática bastante comum de lidar com estes problemas é resolver primeiramente o problema de produção e, então, resolve-se o problema de corte. Entretanto, poucos trabalhos discutem estes problemas de maneira integrada. Drexel & Kimms (1997) relatam que dimensionamento de lotes e programação da produção acoplados a problemas de corte são oportunidades de pesquisa, quando estes problemas são resolvidos de maneira integrada custos e perdas de material podem ser reduzidos.

Na literatura problemas de corte acoplado com programação da produção são relatados em Farley (1988), Reinders (1992), Hendry et al. (1996), Respício et al. (2002), Menon & Schrage (2002), Arbib & Marinelli (2005), Gramani & França (2006), Nonas & Thorstenson (2000, 2008), Poltroniere et al. (2008), Ghidini (2008), Gramani et al. (2009) e Santos et al. (2011). Em alguns trabalhos os modelos propostos são complexos e para resolvê-los são utilizadas heurísticas que possuem duas fases: em uma fase resolve-se o problema de corte e, em outra, o problema de dimensionamento de lotes, ou vice-versa.

No contexto de corte de estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes encontram-se as indústrias papeleiras. O processo de produzir matérias-primas (bobinas) e cortá-las em itens finais de modo que atenda uma demanda consiste de diversas etapas e decisões referentes à produção, estocagem e distribuição em um horizonte de planejamento. O estágio de produção de matéria-prima pode variar em algumas indústrias, o qual depende da origem do material (polpa) que será processado na máquina de papel, podendo ser adquirida ou produzida pela própria indústria. Posteriormente, na máquina de papel, a polpa é processada junto com papéis reciclados de diversos tipos. O material obtido ao final do processamento na máquina de papel são bobinas que possuem uma determinada gramatura. Após a produção das bobinas existem dois tipos de decisões a serem tomadas, que são o corte das bobinas em itens demandados (bobinas menores) e estoque de itens e bobinas no final dos períodos do horizonte de planejamento. Assim, existe um planejamento conjunto de quanto produzir, estocar e cortar

bobinas de papel.

Algumas outras características, além da origem da polpa, podem variar nas indústrias papeleiras, que são o número de máquinas e o gargalo da produção. No primeiro caso, existem na literatura indústrias com uma máquina para a produção de papel (Santos & Almada-Lobo, 2012; Correia et al., 2004; Respício et al., 2002) e duas máquinas (Poltroniere et al., 2008). No segundo caso, o gargalo da produção pode ser a máquina que produz papel (Santos & Almada-Lobo, 2012; Poltroniere et al., 2008; Respício et al., 2002) ou a máquina de corte (Menon & Schrage, 2002). No contexto de corte de estoque, em geral, as empresas possuem uma lista de padrões de cortes pré-definidos para as bobinas produzidas e, também, estimam uma perda devido ao corte das bobinas. Entretanto, é possível gerar outros tipos de padrões de corte que visam à redução do desperdício de material.

Estudos detalhados de todo o processo industrial de bobinas de papel podem ser encontrados em Santos & Almada-Lobo (2012). Os autores integram a produção de eletricidade, polpa e papel de uma indústria portuguesa. Na primeira etapa (produção de eletricidade e polpa), a madeira é triturada e, então, passa por processos químicos produzindo polpa e licor preto. O licor preto é utilizado para a produção de eletricidade e a polpa vai para a máquina de papel. Neste último, a polpa se junta aos papéis reciclados para a produção das bobinas. Entretanto, eles não consideram a fase de corte de estoque. Poltroniere et al. (2008) consideram a produção de papel e o problema de corte de estoque. Na parte do problema de dimensionamento de lotes é decidido quanto produzir de bobinas e estoque de itens e bobinas, enquanto que no problema de corte são decididos padrões de cortes para os diversos tipos e tamanhos de bobinas provenientes de diferentes máquinas. Assim, o estágio de produção de polpa não é considerado.

O objetivo desta parte do trabalho é analisar formulações matemáticas para problemas de dimensionamento de lotes acoplado ao problema de corte de estoque unidimensional. O problema possui dois tipos de decisões: decisão tática e decisão operacional. A decisão tática está relacionada à produção de matéria-prima, enquanto que a decisão operacional está relacionada ao problema de corte de estoque (definir padrões de corte para os objetos). Os problemas de dimensionamento de lotes considerados têm capacidade limitada com uma máquina ou várias para a produção de um tipo ou vários tipos de objetos. Se diversos tipos de objetos são produzidos, então existem custo e tempo de preparação de máquina quando esta deixa de produzir um tipo de objeto para produzir outro. Os objetos podem ser diferentes de acordo com alguma característica, por exemplo, no caso de indústrias papeleiras os objetos são classificados de acordo com a gramatura do papel. Neste caso, os itens são obtidos a partir de objetos com características correspondentes, em que os objetos são cortados de acordo com um conjunto de padrões de corte de modo que atenda a demanda. Tanto os objetos quanto os itens podem ser estocados ao invés de serem utilizados no período que foram produzidos. O objetivo é minimizar perdas devido ao corte de objetos, estoque de itens e objetos e custo de preparação de máquina.

A Figura 9.1 representa o processo produtivo de indústrias de papel considerando uma máquina para a produção de um único tipo de objeto ou vários tipos de objeto. O problema pode

ser estendido para múltiplas máquinas para a produção dos objetos, como mostra a Figura 9.2. Nas Figuras 9.1 e 9.2 a polpa alimenta a(s) máquina(s) de papel, produzindo objetos que podem ter diferentes gramaturas e comprimentos, que por sua vez são cortados nos itens demandados.

Figura 9.1: Uma máquina para a produção de bobinas.

Figura 9.2: Várias máquinas para a produção de bobinas.

As modelagens matemáticas para o problema são analisadas de acordo com algumas formulações de problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional. Primeiramente os problemas são classificados de acordo com o número de tipos de objetos e o número de máquinas: um tipo de objeto e uma máquina para produzi-los; vários tipos de objetos e uma máquina para produzi-los; vários tipos de objetos e várias máquinas para produzi-los. No caso do problema com um único tipo de objeto não existe tempo e custo de preparação de máquina. Enquanto que para problemas com a produção de vários tipos de objeto existem custo e tempo de preparação de máquina, que na prática é dependente da sequência, porém consideramos sequência independente.

Para os problemas com uma máquina e um ou vários tipos de objetos foram propostas três formulações matemáticas. A primeira consiste em modelar o problema de corte de estoque com

uma formulação do tipo de designação. A segunda consiste em considerar a formulação clássica de corte de estoque proposta por Gilmore & Gomory (1961), que pode ser vista como uma decomposição da formulação anterior. A terceira abordagem consiste combinar duas decomposições: a decomposição do problema de corte de estoque de Gilmore & Gomory (1961) com a decomposição Dantzig-Wolfe para o problema de dimensionamento de lotes. A decomposição Dantzig-Wolfe utilizada é denominada por decomposição por períodos. Para o problema com vários tipos de objetos e várias máquinas foram propostas cinco formulações matemáticas, que são: os três tipos descritos anteriormente; a decomposição do problema de corte de estoque com a decomposição Dantzig-Wolfe por máquinas; a decomposição do problema de corte de estoque com a decomposição Dantzig-Wolfe por máquinas e períodos (combinadas). Para resolver as relaxações lineares dos problemas mestres provenientes das decomposições propostas para o problema foram implementados métodos geração de colunas. Para obter soluções inteiras factíveis as variáveis do último problema mestre restrito foram redefinidas como inteiras e resolvidos pelo pacote CPLEX 12.4.

O problema com vários tipos de objetos e várias máquinas foi apresentado em Poltroniere et al. (2008). Para o qual os autores propuseram duas heurísticas. Nesta tese, as heurísticas de Poltroniere et al. (2008) foram reimplementadas e comparadas com o modelo compacto e as soluções inteiras factíveis obtidas a partir dos modelos estendidos resolvidos pelo método geração de colunas.

Organização do texto

O Capítulo 10 apresenta a revisão da literatura para problemas de dimensionamento de lotes acoplado com problemas de corte de estoque unidimensional e bidimensional. No Capítulo 11, propomos três formulações matemáticas para o problema acoplado considerando uma máquina para a produção de um único tipo de objeto. No Capítulo 12 as formulações do Capítulo 11 são estendidas para o caso com uma máquina e vários tipos de objetos. O Capítulo 13 apresenta formulações matemáticas para o problema com várias máquinas utilizadas para a produção de vários tipos de objetos. Por fim, o Capítulo 14 apresenta as conclusões finais e pesquisas futuras.

Capítulo 10

Revisão da Literatura

Neste capítulo é realizada uma revisão da literatura para problemas de dimensionamento de lotes combinado com problemas de corte de estoque. O capítulo está dividido em duas seções. A Seção 10.1 contém a revisão da literatura para problemas de planejamento da produção e corte de estoque (unidimensional ou bidimensional) em diversos contextos industriais. Enquanto a Seção 10.2 apresenta separadamente trabalhos da literatura no contexto de produção e corte de bobinas de papel.

10.1 Problema de dimensionamento de lotes combinado com corte de estoque

Farley (1988) considera o problema de corte de estoque acoplado com o problema de programação da produção em uma indústria de roupas. Entretanto, o problema acoplado é dado implicitamente, pois o problema foi formulado como um problema de programação da produção com um único período. Neste caso, o problema de corte é bidimensional irregular, com padrões de corte definidos anteriormente em retângulos de acordo com a largura dos rolos de tecido em estoque.

Reinders (1992) é o primeiro trabalho que considera explicitamente um problema acoplado. O problema consiste no processamento de diferentes tipos de troncos de árvore para se tornarem placas. Os troncos de árvores são cortados em toras de modo que maximize o valor total do tronco da árvore, e cada tora é cortada em placas de modo que maximize o valor da tora. As decisões são selecionar a quantidade e quais tipos de toras devem ser produzidos dos troncos das árvores, em qual semana e em qual dia da semana (as toras também podem ser compradas). Assim, o objetivo é maximizar o valor dos troncos e das toras, minimizar os custos de estoque, de falta de estoque, de hora extra e de toras adquiridas.

Hendry et al. (1996) estudou o problema de corte de estoque acoplado com o problema de programação da produção em uma indústria de fundição de cobre. O processo industrial consiste em derreter sobras de cobre em barras com diâmetros específicos, que serão cortadas em

itens. Para resolver o problema eles utilizaram dois modelos que são resolvidos consecutivamente, isto é, um procedimento dois estágios que é executado para cada período do horizonte de planejamento. O primeiro estágio consiste em resolver um problema de corte, que determina o número de barras que devem ser produzidas para atender a demanda em um período do horizonte de planejamento. No segundo estágio um problema de programação da produção é resolvido, que determina a produção diária de barras.

Nonas & Thorstenson (2000) acopla o problema de corte bidimensional com o problema de dimensionamento de lotes sob condições estática e determinísticas. O problema consiste em cortar placas de aço em placas menores para a produção de caminhões de lixo. O modelo tem função objetivo não-linear côncava, que minimiza o custo total de cortar as placas, perda de material, estoque das peças cortadas e custo de preparação da máquina de corte quando muda a dimensão da placa. As restrições do problema são as de atendimento de demanda e a garantia de preparação de máquina se um tipo de padrão de corte é utilizado. Os autores resolveram uma versão simplificada do problema, que não considera o custo de preparação para cada período. Para resolver a simplificação, os autores utilizaram dois métodos de otimização global e três algoritmos de busca local. Além disso, um algoritmo de busca em árvore para gerar padrões de corte e um método geração de colunas foi proposto, que foi melhorado em Nonas & Thorstenson (2008).

Arbib & Marinelli (2005) apresentam o problema de uma indústria que produz correias de engrenagens, que consiste em cortar cilindros de nylon emborrachado em correias. O problema acopla o problema de corte unidimensional e dimensionamento de lotes. Os autores propuseram dois modelos, o primeiro é um modelo linear que considera o corte e reaproveitamento de material, bem como o estoque das sobras. O segundo modelo é uma extensão do primeiro, que considera decisões de transporte de estoque de material, de compra e produção de material. Este modelo é inteiro misto, porém admite decomposição em um problema de dimensionamento de lotes sem restrições de capacidade com um único item e um problema de corte de estoque. Em ambos os modelos, os pedidos são programados de acordo com a capacidade da máquina de costura. Os autores resolveram os problemas pelo CPLEX e, para o modelo linear foi utilizado um procedimento para reduzir o número de preparações e combinações.

Gramani & França (2006) integram o problema de corte de estoque bidimensional com dimensionamento de lotes, considerando o corte de um tipo placa em quantidade suficiente para atender a demanda e custo de preparação de máquina a cada período de produção. Para resolver o problema, os autores utilizaram o problema de caminho mínimo, em que os nós representam os períodos e os arcos um problema de corte com restrição de capacidade da máquina de corte. Para cada arco (k, l) , o problema de corte é resolvido considerando o custo de estoque do período k até o $l - 1$. Outro procedimento analisado é resolver primeiro o problema de dimensionamento de lotes, determinando a quantidade de itens que devem ser produzidos em cada período, e com isso resolve o problema de corte para cada período.

Gramani et al. (2009) também estuda o problema acoplado de corte bidimensional com dimensionamento de lotes. Neste problema, os itens finais são móveis, que são obtidos a partir de um conjunto de peças cortadas das placas em estoque. Na formulação matemática, a restrição de balanceamento de estoque e custo de estoque é apenas sobre a quantidade os produtos finais. Enquanto que, a quantidade de peças cortadas tem que ser maior ou igual à quantidade peças necessária para atender a demanda no período. O custo de preparação de máquina é considerado por item final produzido a cada período, e a restrição de capacidade é referente à máquina de serra. Para resolver o problema, os autores aplicam a relaxação lagrangiana nas restrições do problema de corte e na restrição de capacidade de serra, separando os problemas de corte e de dimensionamento de lotes.

Ghidini (2008) propõe um modelo para o problema de corte de estoque bidimensional acoplado com o dimensionamento de lotes, com considerações de demanda extra e horizonte de planejamento rolante para amortizar impacto de incertezas nas demandas. Para este propósito é considerado um conjunto de restrições que garante que a demanda esperada seja exatamente igual a soma dos pedidos em carteira com o atendimento extra. A restrição de balanceamento de estoque é apenas sobre os itens finais. Além disso, foram consideradas restrições de capacidade de serra e furadeira. O problema tem como objetivo minimizar o custo total do processo produtivo e decidir se antecipa ou não a produção dos itens finais. Para resolver o problema foram propostas duas heurísticas baseadas em geração de colunas com o subproblema definido por padrões de corte bidimensional guilhotinado dois-estágios. Uma das heurísticas resolve o problema acoplado e outra resolve o problema decomposto em dimensionamento de lotes e de problema de corte.

Gramani et al. (2011) consideram o mesmo problema proposto em Gramani et al. (2009), porém é permitido estoque de peças (partes dos produtos finais) e não considera custo de preparação de máquina. Assim, o modelo envolve equações de balanceamento de estoque de produtos finais, balanceamento de estoque de peças e capacidade de máquina. Os autores comparam dois métodos de solução. O primeiro método consiste em resolver primeiro o problema de dimensionamento de lotes sem restrição de capacidade e balanceamento de estoque apenas dos itens finais, determinando a quantidade de objetos produzidos por período. Com a resolução do problema de dimensionamento de lotes o problema de corte de estoque multiperíodo é resolvido, que contém restrições de balanceamento de estoque das partes e restrição de capacidade de máquina. O segundo método é uma geração de colunas com o subproblema definido por um problema de corte dois-estágios guilhotinado. A resolução do problema acoplado pelo método geração de colunas diminui o número de placas utilizadas em relação à resolução do problema decomposto, porém aumenta o estoque das partes.

Santos et al. (2011) propõem um modelo para o problema de corte bidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes para uma fábrica de móveis. O modelo considera a estratégia de horizonte de planejamento rolante, em que o primeiro período é dividido em subperíodos e cada subperíodo corresponde a um ciclo de serra. O total de subperíodos é o número de ciclos

de serra que podem ser processados no primeiro período, que corresponde a um dia. Apenas as decisões do primeiro dia são aplicadas, os períodos seguintes são utilizados para avaliar a capacidade de produção futura. No modelo não são consideradas decisões de ciclos de serra, pois os padrões de corte são dados de entrada para o modelo (gerados a priori). Os autores consideram estoque de segurança e limite sobre a quantidade de itens finais estocados. Se a quantidade de itens estocados ultrapassarem este limite, então o custo de estoque passa a ter valor elevado. Para representar estes limites de estoque foi utilizada na função objetivo uma função linear por partes com parâmetros definidos heurísticamente. Além disso, o problema possui duas restrições de capacidade: uma para a máquina de corte e outra para as demais máquinas agregadas.

Vanzela et al. (2012) apresentam um modelo para o problema de indústria moveleira baseado no modelo proposto em Gramani et al. (2011), definindo a restrição de capacidade de máquina em termos do número de ciclos de serra e acrescentando restrições de estoque de segurança. O modelo é resolvido por geração de colunas, em que o subproblema determina padrões de corte dois-grupos. Ao final do método geração de colunas o modelo é resolvido com as variáveis redefinidas como inteiras. Um método de decomposição foi implementado, em que primeiro resolve o problema de dimensionamento de lotes, então o problema de corte de estoque multiperíodo (resolvido por geração de colunas). Os resultados reafirmam as características das soluções obtidas em Gramani et al. (2011), o modelo integrado obtém melhor aproveitamento de matéria-prima, porém maior estoque de partes dos produtos.

Alem & Morabito (2012) apresenta um modelo determinístico, que é uma extensão do modelo de Gramani et al. (2009) por permitir atraso e hora extra que são penalizados na função objetivo. A restrição de capacidade é sobre o tempo total de produção com sequência independente. A partir deste modelo três modelos de otimização robusta foram propostos por considerar incertezas nos custos, nas demandas e custos e demandas. Alem (2011) também apresenta um modelo com restrições de capacidade de corte e furação consideradas separadamente, que foi estendido para modelos de programação estocástica e robusta com demanda e tempo de preparação de preparação de máquina estocásticos.

10.2 Programação da produção em indústrias de papel

Respício et al. (2002) estudou o problema de corte de estoque acoplado ao problema de dimensionamento de lotes em uma indústria de papel. O processo industrial consiste na produção de bobinas e corte das bobinas em bobinas menores (que são agrupadas em famílias de acordo com os pedidos dos clientes). O problema de corte é estendido por considerar restrições de capacidade de produção de bobinas sobre os períodos do horizonte de planejamento e o atendimento da demanda em cada período. O modelo proposto foi resolvido por um método *branch-and-price*.

Menon & Schrage (2002) considera o problema de corte de estoque unidimensional acoplado com o problema de designação de máquinas idênticas. O problema consiste em cortar bobinas de papel em bobinas menores (itens) e selecionar qual máquina que cortará cada um dos padrões de corte. Neste caso, para cada máquina é resolvido um problema de corte. Além disso, as máquinas possuem capacidade limitada. O modelo foi resolvido por um método *branch-and-price*.

Correia et al. (2004) considera o problema de corte estoque unidimensional acoplado com programação da produção para indústrias papelarias. Uma revisão deste trabalho encontra-se no Capítulo 3 da Parte I, pois além do problema considerar decisões de produção os cortes das bobinas de papel são realizados em dois estágios.

Poltroniere et al. (2008) estudou o problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao problema de dimensionamento de lotes de uma indústria de papel. O processo industrial consiste em produzir jumbos em máquinas paralelas. Cada máquina produz jumbos de pesos e comprimentos diferentes. Além disso, um jumbo pode ter diferentes tipos de papel, bem como, papel de baixa qualidade devido à mudança do tipo de papel. Entretanto, os autores consideraram que um jumbo tem apenas um tipo de peso específico, denominado bobinas de referência. Em seguida, os jumbos são cortados em rolos menores de modo que atenda a demanda. O problema consiste em minimizar perdas provenientes do corte dos objetos, custo de produção das bobinas, custo de estocagem de itens e de bobinas de referência. As restrições do modelo são balanceamento de estoque das bobinas de referência, balanceamento de estoque dos itens, capacidade de máquina, em que a quantidade de bobinas de referências produzidas mais a perda devem satisfazer a capacidade de cada máquina. Além disso, a quantidade de bobinas cortadas deve ser a igual à quantidade de bobinas disponíveis.

Para resolver este modelo Poltroniere et al. (2008) propuseram duas heurísticas, que estão baseadas na relaxação lagrangiana das restrições de balanceamento de estoque de bobinas. Estas restrições acoplam o problema de corte e dimensionamento de lotes e ao relaxá-las o problema acoplado pode ser decomposto. As heurísticas possuem duas etapas, em que uma etapa resolve o problema de dimensionamento de lotes e a outra resolve o problema de corte multiperíodo. A primeira heurística consiste em resolver primeiro o problema de dimensionamento de lotes, cuja função objetivo tem os termos da função lagrangiana relacionados apenas ao problema de dimensionamento de lotes. Com a quantidade de bobinas de referência produzidas em cada período do horizonte de planejamento, o problema de corte multiperíodo é resolvido, em que a função objetivo contém os termos da função lagrangiana relacionados ao problema de corte. A resolução do problema de corte multiperíodo fornece os multiplicadores de lagrange atualizados, que são passados novamente para o problema de dimensionamento de lotes. Este processo é repetido um determinado número de iterações. Na segunda heurística, primeiro resolve o problema de corte multiperíodo supondo estoque ilimitado para qualquer tipo de bobina de referência, em seguida, resolve o problema de dimensionamento de lotes. As decisões de corte e dimensionamento de lotes são revisadas iterativamente, com os multiplicadores de lagrange

fornecidos pelo problema de corte multiperíodo atualizados a cada iteração. Maiores detalhes destas heurísticas são dados no Capítulo 13.

Capítulo 11

Problema acoplado com uma máquina e um tipo de objeto

O objetivo deste capítulo é analisar alguns modelos matemáticos para o problema de corte de estoque unidimensional combinado com o problema de dimensionamento de lotes considerando apenas uma única máquina para produzir objetos de um único tipo. Estes objetos são produzidos e cortados de modo que obtenha os itens demandados em um horizonte de planejamento. O gargalo do processo produtivo é a capacidade da máquina que produz os objetos, em que não existem custo e tempo de preparação de máquina. Além disso, é permitido estoque de objetos e itens ao final de cada período do horizonte de planejamento. A demanda em cada período deve ser exatamente atendida e excesso de itens finais é considerado como perda. Deste modo, o problema consiste em três tipos de decisões para cada período do horizonte de planejamento, que são: a quantidade de objetos produzidos, respeitando a restrição de capacidade da máquina; definir os padrões de corte para os objetos produzidos; estoque de itens e objetos. O objetivo é minimizar o custo de perda de material proveniente do corte dos objetos, excesso de produção de itens no último período do horizonte de planejamento, custo de estoque de objetos e de itens.

Para as formulações matemáticas foram consideradas três abordagens. A primeira abordagem (formulação compacta) consiste em modelar o problema de corte de estoque com uma formulação de designação. A segunda formulação (formulação estendida) considera a formulação de corte de estoque proposta por Gilmore & Gomory (1961). Por fim, a terceira abordagem consiste em combinar a formulação estendida com a decomposição de Dantzig & Wolfe (1960) para o problema de dimensionamento de lotes. A decomposição Dantzig-Wolfe utilizada é a decomposição por períodos. Na literatura, modelos acoplados são definidos de acordo com a formulação estendida. Assim, neste capítulo são analisados duas novas abordagens para o problema acoplado: formulação compacta e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe.

Para a definição dos modelos matemáticos considere os seguintes dados e variáveis relacionados às três formulações.

Dados:

- T : número de períodos no horizonte de planejamento;
- n : número de diferentes tipos de itens demandados;
- N_t : número total de padrões de corte para os objetos no período t , $t = 1, \dots, T$;
- $\bar{h}_e$: custo de estoque de uma bobina;
- F : custo de estoque inicial de uma bobina;
- h_i : custo unitário de estoque do item do tipo i , $i = 1, \dots, n$;
- cl : custo do material perdido durante o processo de corte (por unidade de comprimento);
- l_i : comprimento dos itens do tipo i , $i = 1, \dots, n$;
- d_i^t : número de itens demandados do tipo i no período t , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
- b : comprimento dos objetos;
- vt : tempo necessário para produzir um objeto;
- C_t : capacidade de produção em unidade de tempo da máquina no período t , $t = 1, \dots, T$.

Variáveis:

- e_t : número de objetos armazenadas no final do período t , $t = 1, \dots, T$;
- s_i^t : número de itens do tipo i armazenados no final do período t , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
- r_t : número de objetos produzidos no período t , $t = 1, \dots, T$.

Nos modelos matemáticos é considerado estoque inicial dos objetos definido pela variável artificial e_0 , que tem um custo alto (F), porém não é permitido estoque inicial dos itens. O estoque inicial de objetos é utilizado para factibilizar a resolução problema.

11.1 Formulação compacta

As restrições do problema de corte de estoque unidimensional considerando uma formulação de designação, consistem em determinar para cada objeto se ele será utilizado ou não. Caso este seja utilizado, deve-se determinar um padrão de corte factível, isto é, corta-se o objeto em um conjunto dos itens demandados de modo que não ultrapasse o comprimento do objeto. O número total de itens cortados a partir dos objetos deve satisfazer a demanda. Nesta formulação é definido um limitante superior sobre o número de objetos necessários para atender a demanda dado por $\bar{N}$. Para a definição das restrições do problema de corte de estoque unidimensional de acordo com a formulação de designação considere as variáveis: y_j é 1 se o objeto j é utilizado e 0 caso contrário; x_{ij} define o número de itens do tipo i cortados do objeto j . A demanda dos itens de comprimento l_i é dada por d_i . Assim, as restrições do problema de corte de estoque são descritas como segue.

$$\sum_{j=1}^{\bar{N}} x_{ij} \geq d_i, i = 1, \dots, n, \quad (11.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_i x_{ij} \leq by_j, j = 1, \dots, \bar{N}, \quad (11.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \bar{N}, \quad (11.3)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, \bar{N}. \quad (11.4)$$

As restrições (11.1) são as restrições de demanda, as restrições (11.2) definem padrões de cortes factíveis e (11.3)-(11.4) definem o domínio das variáveis. Estudos da formulação compacta para o problema de corte de estoque unidimensional são encontrados em de Carvalho (2002) e Vance (1998).

Na formulação compacta para o problema acoplado, as decisões relativas ao problema de dimensionamento de lotes são integradas ao problema de corte de estoque com a formulação de designação (11.1) - (11.4). Para o modelo considere as seguintes variáveis associadas ao problema de corte de estoque.

- y_j^t : igual a 1 se o objeto j é utilizado no período t e 0 caso contrário;
- x_{ij}^t : é o número de itens do tipo i obtido do objeto j no período t .

O limitante superior sobre o número de objetos utilizados para atender a demanda do período t é definido por $\bar{N}_t$. As demais variáveis e os dados estão definidos no início do capítulo. A formulação matemática compacta é dada como segue.

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \bar{h}_e e_t + F e_0 + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{\bar{N}_t} cl(by_j^t - \sum_{i=1}^n l_i x_{ij}^t) + \sum_{i=1}^n cl s_i^T, \quad (11.5)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{\bar{N}_t} x_{ij}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (11.6)$$

$$\sum_{i=1}^n l_i x_{ij}^t \leq by_j^t, j = 1, \dots, \bar{N}_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.7)$$

$$vt * r_t \leq C_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.8)$$

$$r_t + e_{t-1} - e_t = \sum_{j=1}^{\bar{N}_t} y_j^t, t = 1, \dots, T, \quad (11.9)$$

$$x_{ij}^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \bar{N}_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.10)$$

$$y_j^t \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, \bar{N}_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.11)$$

$$r_t \geq 0, \text{ inteiro}, t = 1, \dots, T, \quad (11.12)$$

$$e_t \geq 0, \text{ inteiro}, t = 0, \dots, T, \quad (11.13)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (11.14)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (11.15)$$

As restrições (11.6) definem que o número total de itens cortados dos objetos no período t devem atender a demanda, considerando o estoque de itens provenientes do período anterior e o restante para o próximo período. As restrições (11.7) determinam padrões de corte factíveis. As restrições (11.6) e (11.7) são as restrições de corte de acordo com a formulação de designação. As restrições de capacidade da máquina que produz os objetos a serem cortados são definidas em (11.8). Nesta formulação não existe preparação de máquina visto que somente um tipo de objeto é produzido. As restrições (11.9) integram o problema de corte de estoque ao problema de dimensionamento de lotes. Estas restrições definem o balanceamento de estoque dos objetos, em que um objeto é cortado no período t apenas se ele foi produzido ou estava em estoque. A função objetivo (11.5) consiste em minimizar o custo de estoque dos objetos e dos itens finais e, também, a perda de material. Note que, neste modelo é permitido o estoque inicial de objetos, porém eles tem um custo alto dado por F e estoque de itens finais s_i^T ($i = 1, \dots, n$) é considerado como perda. Finalmente, as restrições de não negatividade e integralidade são definidas em (11.10) - (11.15).

11.2 Formulação estendida

Nesta seção, o problema acoplado é formulado considerando a formulação proposta por Gilmore & Gomory (1961) para o problema de corte de estoque. A formulação de Gilmore & Gomory (1961) é equivalente a formulação obtida pela aplicação da decomposição Dantzig-Wolfe na formulação de designação (11.1) - (11.4). Maiores detalhes podem ser encontrados no Capítulo 2 e em Desaulniers et al. (2005) e em Vance (1998). Para a definição do modelo, considere que todos os padrões de corte de cada período t ($t = 1, \dots, T$) do horizonte de planejamento são conhecidos. Neste caso, as variáveis do problema de corte de estoque consistem em determinar quantas vezes um padrão de corte j é utilizado. Um padrão de corte j é definido pelo vetor (a_j) , em que cada posição a_{ij} representa o número de vezes que um item final do tipo i aparece no padrão de corte j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N_t$ e $t = 1, \dots, T$ e ele é factível se satisfaz as seguintes condições (restrições da mochila, com o índice j omitido):

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_n a_n \leq b, \quad (11.16)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n. \quad (11.17)$$

A variável que determina o número de vezes que o padrão de corte j é utilizado no período t é definida por y_j^t , $j = 1, \dots, N_t$ e $t = 1, \dots, T$. Assim, a formulação matemática estendida do problema acoplado é dada como segue.

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \bar{h}_e e_t + F e_0 + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} cl(b - \sum_{i=1}^n l_i a_{ij}) y_j^t + \sum_{i=1}^n cl s_i^T, \quad (11.18)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{j=1}^{N_t} a_{ij} y_j^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (11.19)$$

$$r_t + e_{t-1} - e_t = \sum_{j=1}^{N_t} y_j^t, t = 1, \dots, T, \quad (11.20)$$

$$vt * r_t \leq C_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.21)$$

$$y_j^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.22)$$

$$e_t \geq 0, \text{ inteiro}, t = 0, \dots, T, \quad (11.23)$$

$$r_t \geq 0, \text{ inteiro}, t = 1, \dots, T, \quad (11.24)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (11.25)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (11.26)$$

As restrições (11.19), (11.20) e (11.21) são de balanceamento de estoque dos itens, balanceamento de estoque dos objetos e capacidade de máquina, respectivamente. A função objetivo (11.18) minimiza o custo de estoque dos itens e dos objetos, bem como, o custo de perda nos padrões de corte e excesso de itens estocados no final do último período. As restrições (11.22) - (11.26) definem as variáveis como inteiras. A estrutura matricial do problema (11.18) - (11.26) é dada na Tabela 11.2.

A primeira linha da Tabela 11.2 contém as variáveis do modelo, em que $Y^t = (y_1^t, \dots, y_{N_t}^t)$, $S^t = (s_1^t, \dots, s_n^t)$ para $t = 1, \dots, T$, e $R = (r_1, \dots, r_T)$. No segundo conjunto de linhas da tabela, a submatriz A^t representa os padrões de cortes para os objetos produzidos e é dada por:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nN_t} \end{pmatrix} \quad (11.27)$$

Cada coluna representa um padrão de corte, em que a coluna correspondente ao padrão de corte na formulação (11.18) - (11.26) é dada por:

$$\left(\underbrace{(0, \dots, 0, a_{1j}, \dots, a_{nj}, 0, \dots, 0)}_{\text{referente às restrições (11.19)}}, \underbrace{(0, \dots, -1, 0, \dots, 0)}_{\text{referente às restrições (11.20)}} \right).$$

No primeiro bloco de linhas, as matrizes $\mathbf{0}$ correspondentes as colunas em Y^t têm dimensão $n \times N_t$, enquanto que nas colunas referentes a S^t têm dimensão $n \times n$, nas colunas e_t os vetores $\bar{0}$ têm n linhas, na coluna R as matrizes $\mathbf{0}$ têm dimensão $n \times T$. O segundo e o terceiro blocos de linhas têm T linhas cada, assim as matrizes $\mathbf{0}$ nas colunas em Y^t têm dimensão $T \times N_t$, enquanto que nas colunas em S^t têm dimensão $T \times n$ e as matrizes I têm dimensão $T \times T$.

Tabela 11.1: Estrutura matricial do problema (11.14) - (11.25).

Y^1	Y^2	$\dots$	Y^T	S^0	S^1	S^2	$\dots$	S^{T-1}	S^T	e_0	e_1	e_2	$\dots$	e_{T-1}	e_T	$\mathbf{R}$
$\mathbf{A}^1$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\dots$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}^2$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{I}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\dots$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\mathbf{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{A}^T$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{I}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\dots$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\mathbf{0}$
-1	$\dots$	-1	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	1	-1	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	-1	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	1	-1	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\dots$	-1	$\dots$	-1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	1	-1	$\mathbf{I}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\dots$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\mathbf{I}$

Note que, com a decomposição proposta por Gilmore & Gomory (1961) o problema (11.18) - (11.26) é definido como problema mestre, enquanto que as restrições da mochila (11.16) - (11.17) são as restrições dos subproblemas, definindo assim T subproblemas, um para cada período do horizonte de planejamento.

11.3 Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe

Nesta seção, a decomposição Dantzig-Wolfe é aplicada a formulação estendida (11.18) - (11.26). Os subproblemas provenientes desta decomposição são definidos pelas restrições de capacidade da máquina, ou seja, o subproblema define o plano de produção de um dado período. Note que neste caso existem dois tipos de subproblemas: um associado a decomposição de Gilmore & Gomory (1961) (subproblema 1) e outro associado a decomposição por período (subproblema 2). As restrições dos subproblemas que determinam os padrões de corte para cada período do horizonte de planejamento são as restrições da mochila.

Restrições do subproblema 1:

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_n a_n \leq b, \quad (11.28)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n. \quad (11.29)$$

Enquanto que, as restrições que determinam os planos de produção da máquina para cada período, isto é, quantos objetos são produzidos em cada período, são dadas como segue.

Restrições do subproblema 2:

$$vt * r_t \leq C_t, \quad (11.30)$$

$$r_t \geq 0, \text{ inteiro}. \quad (11.31)$$

Note que, existem T subproblemas do tipo 1 e T subproblemas do tipo 2. Suponha que para cada período t ($t = 1, \dots, T$) todas as soluções do subproblema 1 e subproblema 2 sejam conhecidas para cada período t , $t = 1, \dots, T$. No primeiro subproblema, todos os padrões de cortes para todos os períodos são conhecidos, enquanto que no segundo subproblema, todos os planos de produção são conhecidos. Para a definição do problema mestre considere os seguintes parâmetros e variáveis.

Parâmetros:

- P_t : número de planos de produção referente ao período t , $t = 1, \dots, T$;
- $r_t^{p_t}$: quantidade de objetos produzidos no plano de produção p_t do período t , $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$.

Variáveis:

- $\bar{r}_t^{p_t}$: peso do plano de produção p_t do período t , $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$.

As variáveis r_t podem ser reescritas como uma combinação convexa dos planos de produção referente ao período t , isto é, para cada $t = 1, \dots, T$:

$$r_t = \sum_{p_t=1}^{P_t} r_t^{p_t} \bar{r}_t^{p_t}, \quad (11.32)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, \quad (11.33)$$

$$\bar{r}_t^{p_t} \geq 0, \text{ inteiro } p_t = 1, \dots, P_t. \quad (11.34)$$

Neste caso, os planos de produção de cada período t são pontos extremos dos subproblemas. Assim, com a redefinição de r_t o problema mestre é definido por:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \bar{h}_e e_t + F e_0 + \sum_{t=1}^t \sum_{j=1}^{N_t} cl(b - \sum_{i=1}^n l_i a_{ij}) y_j^t + \sum_{i=1}^n cl s_i^T, \quad (11.35)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{N_t} a_{ij} y_j^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (11.36)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} r_t^{p_t} \bar{r}_t^{p_t} + e_{t-1} - e_t = \sum_{j=1}^{N_t} y_j^t, t = 1, \dots, T, \quad (11.37)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, \quad (11.38)$$

$$y_j^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.39)$$

$$e_t \geq 0, \text{ inteiro}, t = 0, \dots, T, \quad (11.40)$$

$$\bar{r}_t^{p_t} \geq 0, \text{ inteiro}, p_t = 1, \dots, P_t, t = 1, \dots, T, \quad (11.41)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (11.42)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (11.43)$$

No modelo (11.35) - (11.43) a redefinição das variáveis r_t por $\bar{r}_t^{p_t}$ representa a seleção de um plano de produção que seja suficiente para atender a necessidade de objetos a serem cortados para atender a demanda de acordo com as restrições (11.36). As restrições (11.37) acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. Restrições (11.38) são de convexidade. Por fim, as restrições (11.39) - (11.43) definem a integralidade e não negatividade das variáveis.

11.4 Limitantes inferiores e geração de colunas

Nesta seção são descritos os limitantes inferiores para o problema acoplado com um único tipo de objeto. Para este problema consideramos três tipos de relaxação:

1. Relaxação linear da formulação compacta (11.5) - (11.15);

2. Relaxação linear da formulação estendida (11.18) - (11.26);
3. Relaxação linear da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe (11.35) - (11.43).

No primeiro caso a relaxação é trivial, basta relaxar a integralidade das variáveis. O segundo e terceiro caso, a solução ótima para o problema relaxado é determinada através do método de geração de colunas. Note que, determinar todos os padrões de corte para o problema pode ser computacionalmente inviável. O método de geração de colunas apresenta uma maneira alternativa de determinar padrões de corte e planos de produção, viabilizando a determinação de limitantes inferiores e soluções factíveis para o problema acoplado. Detalhes de métodos de geração de colunas encontram-se no Capítulo 2. Neste trabalho, consideramos apenas a adição de colunas ao problema mestre, isto é, colunas não são eliminadas nas iterações do método quando novas colunas são adicionadas. Nas Seções 11.4.1 e 11.4.2 são descritos o método de geração de colunas para o problema acoplado com a formulação estendida e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, respectivamente.

11.4.1 Geração de colunas para o problema acoplado com a formulação estendida

Para aplicar o método de geração de colunas ao modelo (11.14) - (11.26), a condição de integralidade das variáveis y_j^t, r_t, e_t, s_i^t é relaxada. Como descrito na Seção 11.2, as colunas do problema são padrões de cortes que podem ser determinados pelas restrições da mochila. Em cada iteração do método de geração de colunas são resolvidos T subproblemas. Para determinar o custo relativo dos subproblemas (um para cada período t), considere $(\pi_{11}, \dots, \pi_{n1}, \pi_{12}, \dots, \pi_{n2}, \dots, \pi_{1T}, \dots, \pi_{nT})$ as variáveis duais associadas às restrições (11.19) e $(\sigma_1, \dots, \sigma_T)$ as variáveis duais associadas às restrições (11.20). Deste modo o custo reduzido de um período t é dado por:

$$c^t = cl * b - \sum_{i=1}^n (\pi_{it} + cl * l_i) a_i + \sigma_t.$$

Assim, para cada período $t, t = 1, \dots, T$, o subproblema é dado por:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^n (\pi_{it} + cl * l_i) a_i, \quad (11.44)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=1}^n l_i a_i \leq b, \quad (11.45)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n. \quad (11.46)$$

Se para algum $t, c^t < 0$ ($t = 1, \dots, T$), então a coluna é adicionada ao problema mestre restrito (11.18) - (11.26) relaxado. Caso contrário, $c^t \geq 0$ para todo $t = 1, \dots, T$, a solução ótima para o problema relaxado foi encontrada.

11.4.2 Geração de colunas para o problema acoplado com a formulação estendida e decomposição Dantzig-Wolfe

Ao relaxar a condição integralidade das variáveis y_j^t , s_i^t , e_t e $\bar{r}_t^{pt}$ do problema (11.35) - (11.43) é possível aplicar o método de geração de colunas. Nesta decomposição as colunas do problema são padrões de corte e planos de produção para a máquina que produz os objetos. Assim, temos T subproblemas para determinar padrões de corte para o problema mestre e T subproblemas para determinar os planos de produção para a máquina, ou seja, dois subproblemas para cada período t do horizonte de planejamento. Para determinar os custos relativos dos subproblemas considere $(\pi_{11}, \dots, \pi_{n1}, \pi_{12}, \dots, \pi_{n2}, \dots, \pi_{1T}, \dots, \pi_{nT})$ as variáveis duais associadas às restrições (11.36), $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_T)$ as variáveis duais associadas às restrições (11.37) e $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_T)$ as variáveis duais associadas às restrições (11.38). O custo reduzido do subproblema t que determina os padrões de corte é dado por:

$$c_1^t = cl * b - \sum_{i=1}^n (\pi_{it} + cl * l_i) a_i + \sigma_t.$$

O custo reduzido do subproblema t que determina os planos de produção é dado por:

$$c_2^t = -\sigma_t * r_t - \gamma_t.$$

Assim, para cada período t ($t = 1, \dots, T$) temos o subproblema 1 e o subproblema 2 dados a seguir.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^n (\pi_{it} + cl * l_i) a_i, \quad (11.47)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=1}^n l_i a_i \leq b, \quad (11.48)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n. \quad (11.49)$$

Subproblema 2:

$$\text{minimize} \quad -\sigma_t * r_t, \quad (11.50)$$

$$\text{sujeito a :} \quad vt * r_t \leq C_t, \quad (11.51)$$

$$r_t \geq 0, \text{ inteiro}. \quad (11.52)$$

Para cada iteração do método de geração de colunas $2T$ subproblemas são resolvidos, fornecendo colunas (padrões de corte e planos de produção) para o problema mestre. Se para algum t , $c_1^t < 0$ ou $c_2^t < 0$ a coluna ou o plano de produção, respectivamente, é adicionado ao problema mestre. Caso contrário, para todo $t = 1, \dots, T$, $c_1^t \geq 0$ e $c_2^t \geq 0$, então a solução é

ótima para o problema relaxado. Note que, a resolução do Subproblema 2 é trivial, basta fixar o número de objetos produzidos r_t em $\lfloor \frac{C_t}{vt} \rfloor$ para todo t .

11.5 Resultados computacionais

Nesta seção são descritos resultados computacionais para os modelos apresentados neste capítulo, para os quais consideramos limitante inferior e soluções factíveis. Os métodos do tipo geração de colunas foram implementados em C/C++ e as modelagens matemáticas resolvidas com o auxílio do pacote CPLEX 12.4. Para resolver os problemas da mochila foi implementado um método *branch-and-bound* baseado no método de Gilmore & Gomory (1961). Os algoritmos foram executados em um computador Intel Core i7 com 3.20 GHz e 16 Gbyte de memória. Para, os modelos que foram resolvidos pelo CPLEX o número de processadores foi limitado em quatro. Os dados foram gerados com base nos dados de uma indústria de polpa e papel portuguesa.

11.5.1 Dados

Primeiramente são descritos os dados para o problema acoplado com vários tipos de objetos, pois neste caso existe uma aplicação prática, cujos modelos matemáticos e resultados computacionais são apresentados nos Capítulos 12 e 13. A modificação para o problema com apenas um tipo de objeto é descrita no fim da seção.

A indústria considerada neste trabalho produz 13 tipos de papel classificados de acordo com a gramatura (g/m^2), que são produzidas a partir da polpa virgem e polpa reciclada. As polpas seguem para a máquina de papel, que possui uma produção média de bobinas dada por toneladas por hora. A Tabela 11.2 mostra as gramaturas e seu respectivo tempo de processamento, outros 3 tipos de papel foram acrescentados ao final da tabela. Cada gramatura é denotada pelo índice k , em que cada exemplo gerado considera um subconjunto de K gramaturas da Tabela 11.2. Os itens demandados tem gramaturas específicas e são cortados de bobinas de mesma gramatura. Assim, os itens são divididos em diferentes classes, em que itens de gramaturas iguais pertencem à mesma classe.

A produção de papel é contínua, deste modo a capacidade da máquina é definida por um dia de trabalho, isto é $C_t = 24$ horas para todo período do horizonte de planejamento. Além disso, as bobinas de cada tipo de gramatura têm comprimento dado por $b_k = 650$ e seu peso em toneladas é dado por $\text{peso} = 10^{-4} \times \text{gramatura} \times b$. Assim, o tempo necessário para produzir uma bobina é dado por $vt_k = \text{peso}/\text{tempo de produção de uma tonelada}$. A partir desses valores é possível determinar o custo de preparação de máquina como $stc_k = 10 \times vt_k$, tempo de preparação de máquina como $stk = 0.1 \times vt_k$ e custo de perda de cada unidade de comprimento é $cl_k = 10^4 \times vt_k/b_k$. O custo de estoque de bobinas e de itens no final dos períodos é considerado de baixa relevância, com custo das bobinas dados por $h_k = 0.01$ e de

cada tipo de item i dado por $s_i^t = 0.01 \times l_i / b_k$, em que $l_i \in [70, 334]$. A demanda dos itens é dada em unidades por $d_i^t \in [0, 20]$ e o número total de tipos de itens por classe é dado por $n_k \in [1, 10]$. O custo inicial de estoque de bobinas é dado por $F_k = 1000$. Os exemplos estão divididos em 15 grupos definidos de acordo com o número de períodos (em dias) $T = 3, 5, 10, 15, 20$ e número de tipos de bobinas de acordo com a gramatura $K = 4, 8, 12$. Para cada grupo foram gerados 10 exemplos.

Tabela 11.2: Características de diferentes tipos de bobinas de papel.

k	Gramagem (g/m^2)	Produção (Ton/hora)
1	115	36.4
2	125	39.6
3	135	42.7
4	140	44.3
5	150	41.9
6	170	45.6
7	186	45.0
8	200	48.4
9	225	49.4
10	250	52.1
11	275	49.2
12	300	49.2
13	115	34.3
14	135	40.2
15	140	39.1
16	170	47.5

Para o problema acoplado com apenas um tipo de objeto, isto é, existe apenas um tipo de gramatura, o tempo de produção e o custo de perda são dados por $vt = 0.2054$ e $cl = 2.54$, respectivamente. O número de itens é dado pela soma total do número de itens dos exemplos gerados para os problema com vários tipos de objetos, com a mesma demanda, largura e custo de estoque.

Para a formulação compacta, o limitante superior sobre o número de objetos cortados $\bar{N}_t$ foi dado pelo número de padrões de corte homogêneos necessário para atender a demanda total, isto é, a soma da demanda de todos os períodos.

11.5.2 Limitantes inferiores

As três relaxações lineares apresentadas na Seção 11.4 foram comparadas com a relaxação linear estendida resolvida pelo método de geração de colunas. O gap é dado por: $100 \times \frac{f_{FE} - f}{f_{FE}}$ (%), em que f_{FE} é o valor da função objetivo ótima para o formulação estendida relaxada e f é o valor da função objetivo da formulação compacta relaxada ou da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe relaxada. A Tabela 11.3 apresenta os resultados computacionais da formulação compacta relaxada e a Tabela 11.4 apresentam os resultados da formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe (formulação estendida + DW). As tabelas apresentam o gap médio, o tempo em segundos (t(s)), o número de objetos utilizados (objetos), a porcentagem da perda média (% perda), o número médio de estoque inicial de objetos (e0) e

o número médio de estoque final de objetos (eT). Para os métodos geração de colunas, a Tabela 11.4 apresenta o número médio de iterações (it).

A Tabela 11.3 apresenta o número médio de tipos de itens em cada grupo de exemplos (denotado por n. itens). Note que, para o problema com apenas um tipo de objeto o número de classes interfere apenas na quantidade total de itens no exemplo. Assim, as características destes exemplos variam pelo número total de períodos e o número total de tipos de itens. O tempo computacional para resolver os problemas lineares na formulação compacta foi limitado a 600 segundos, sendo que um exemplo do grupo 20/12 o CPLEX não encontrou a solução ótima. Os resultados mostram que a formulação compacta fornece limitantes muito fracos (irrelevantes) sem perda e estoque de objetos iniciais e finais. O tempo computacional necessário para determinar a solução ótima é maior que o tempo gasto pelos métodos geração de colunas para as formulações decompostas. A formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornece limitantes iguais aos da formulação estendida, exceto para os grupos 3/12 e 20/12 que obteve gaps um pouco melhores. O tempo médio gasto por ambas as gerações de colunas para resolver as formulações é menor que 30 segundos. O número de objetos cortados e a porcentagem de perda são exatamente os mesmos para ambas as formulações estendidas, com o número médio de iterações e estoque inicial de objetos bastante próximos.

Tabela 11.3: Resultados da formulação compacta relaxada - um tipo de objeto e uma máquina.

T/K	n. itens	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	19,40	100,00	0,20	77,54	0,00	0,00	0,00
3/8	44,70	100,00	0,35	155,77	0,00	0,00	0,00
3/12	68,20	100,00	1,01	268,39	0,00	0,00	0,00
5/4	19,10	100,00	0,45	127,61	0,00	0,00	0,00
5/8	45,80	100,00	1,27	278,91	0,00	0,00	0,00
5/12	63,75	90,00	2,79	379,45	0,00	0,00	0,00
10/4	22,30	100,00	1,98	275,08	0,00	0,00	0,00
10/8	40,75	100,00	8,39	543,92	0,00	0,00	0,00
10/12	60,33	95,78	22,71	816,58	0,00	0,00	0,00
15/4	22,80	100,00	5,97	444,80	0,00	0,00	0,00
15/8	42,33	100,00	22,55	817,64	0,00	0,00	0,00
15/12	64,00	97,63	54,75	1241,69	0,00	0,00	0,00
20/4	21,10	100,00	8,06	501,77	0,00	0,00	0,00
20/8	32,50	100,00	34,17	1045,87	0,00	0,00	0,00
20/12 ¹	51,00	90,32	95,64	1578,37	0,00	1,09	0,00

¹Para um exemplo o CPLEX não encontrou a solução ótima no tempo limite

Tabela 11.4: Resultados dos métodos geração de colunas - um tipo de objeto e uma máquina.

T/K	Formulação estendida						Formulação estendida + DW						
	t(s)	iter	objetos	%perda	e0	eT	gap	t(s)	iter	p. corte	%perda	e0	eT
3/4	0,42	26,00	78,78	1,37	0,00	0,00	0,00	0,49	26,00	78,78	1,37	0,00	0,00
3/8	1,31	77,40	155,78	0,01	0,00	0,00	0,00	1,62	77,00	155,78	0,01	0,00	0,00
3/12	2,71	120,80	268,43	0,01	0,48	0,00	-0,05	3,38	121,50	268,43	0,01	0,68	0,00
5/4	0,39	27,00	128,53	0,73	0,00	0,00	0,00	0,56	27,00	128,53	0,73	0,00	0,00
5/8	1,83	73,50	279,09	0,07	0,00	0,00	0,00	2,31	73,90	279,09	0,07	0,00	0,00
5/12	3,22	113,70	379,48	0,01	0,00	0,00	0,00	3,88	112,90	379,48	0,01	0,00	0,00
10/4	0,84	35,70	275,65	0,26	0,00	0,00	0,00	1,03	34,80	275,65	0,26	0,00	0,00
10/8	3,14	70,90	544,46	0,11	0,00	0,00	0,00	3,50	70,20	544,46	0,11	0,00	0,00
10/12	7,98	113,40	816,60	0,00	0,00	0,00	0,00	9,49	113,50	816,60	0,00	0,00	0,00
15/4	1,41	31,90	447,33	0,56	0,00	0,00	0,00	1,51	32,50	447,33	0,56	0,00	0,00
15/8	5,87	65,40	818,03	0,05	0,00	0,00	0,00	5,75	65,20	818,03	0,05	0,00	0,00
15/12	17,30	111,10	1241,76	0,01	1,84	0,00	0,00	17,06	111,40	1241,76	0,01	2,05	0,00
20/4	1,76	32,40	504,16	0,50	0,00	0,00	0,00	2,05	32,90	504,16	0,50	0,00	0,00
20/8	7,58	62,10	1046,69	0,09	0,00	0,00	0,00	7,45	61,90	1046,69	0,09	0,00	0,00
20/12	29,93	113,70	1651,93	0,00	4,66	0,00	-0,05	28,94	113,50	1651,93	0,00	5,98	0,00

11.5.3 Soluções factíveis

Para a formulação estendida e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, ao final do método de geração de colunas as variáveis foram redefinidas como inteiras e resolvidos pelo CPLEX 12.4. Deste modo, uma solução factível pode ser obtida para cada uma das formulações. Para determinar a solução inteira, o tempo computacional foi limitado em 10 minutos. O gap é dado por $100 \times \frac{f-LB}{f}$ (%), em que LB é o melhor limitante inferior encontrado pelas relaxações dos modelos e f é o valor da solução factível encontrada pelo modelo analisado. Neste caso, foram utilizados os limitantes inferiores fornecidos pela formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe relaxada. A Tabela 11.5 mostra os resultados computacionais médios para a formulação compacta (11.5) - (11.15). As Tabelas 11.6 e 11.7 apresentam os resultados para as formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, respectivamente. Os métodos não encontram solução factíveis para todos os exemplos analisados, sendo o número de exemplos resolvidos para cada grupo T/K representados nas tabelas por resol. Os demais parâmetros avaliados seguem a mesma notação da seção anterior.

Tabela 11.5: Resultados da formulação compacta - um tipo de objeto e uma máquina.

T/K	resol	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	10	66,36	600,39	80,60	3,55	0,00	0,00
3/8	10	99,53	601,34	160,40	2,95	0,00	0,00
3/12	10	99,59	602,22	278,60	3,62	23,10	6,20
5/4	10	78,65	601,08	131,70	3,14	0,00	0,00
5/8	10	98,14	602,94	289,00	3,45	0,00	0,00
5/12	8	99,81	601,81	391,00	4,11	0,00	0,00
10/4	10	91,09	602,54	286,80	3,82	0,00	0,00
10/8	8	97,70	602,29	546,88	5,97	0,00	0,00
10/12	3	99,99	601,04	783,33	7,36	0,00	0,00
15/4	10	90,03	602,69	474,10	5,82	0,00	0,00
15/8	9	99,63	602,10	916,22	11,75	0,00	0,00
15/12	1	100,00	600,87	1165,00	11,93	0,00	0,00
20/4	10	92,37	602,91	540,30	6,91	0,00	0,00
20/8	4	98,01	605,33	957,50	10,59	0,00	0,00
20/12	1	100,00	603,27	1556,00	15,59	0,00	0,00

Tabela 11.6: Resultados da formulação estendida - um tipo de objeto e uma máquina.

T/K	resol	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	10	43,24	395,42	79,30	1,99	0,00	0,00
3/8	10	88,33	601,31	156,20	0,29	0,00	0,00
3/12	10	96,05	602,71	269,00	0,23	0,50	0,00
5/4	10	50,70	540,45	129,20	1,41	0,00	0,00
5/8	10	74,91	601,83	279,60	0,27	0,00	0,00
5/12	10	95,32	603,22	380,50	0,27	0,00	0,00
10/4	10	49,27	600,84	276,20	0,50	0,00	0,00
10/8	10	67,42	603,14	545,60	0,31	0,00	0,00
10/12	6	97,02	607,33	784,67	0,47	0,00	0,00
15/4	10	29,70	541,78	447,90	0,72	0,00	0,00
15/8	9	62,42	539,68	792,56	0,14	0,00	0,00
15/12	5	79,93	613,78	1223,40	0,16	2,60	0,00
20/4	10	35,20	482,79	504,90	0,63	0,00	0,00
20/8	7	53,80	606,32	1037,71	0,25	0,00	0,00
20/12	4	75,26	621,90	1593,50	0,14	1,75	0,00

Tabela 11.7: Resultados da formulação estendida + DW - um tipo de objeto e uma máquina.

T/K	resol	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	10	43,24	445,53	79,30	1,99	0,00	0,00
3/8	10	88,33	601,62	156,20	0,29	0,00	0,00
3/12	10	96,05	603,38	269,00	0,23	0,40	0,00
5/4	10	50,70	481,04	129,20	1,41	0,00	0,00
5/8	10	74,91	602,31	279,70	0,29	0,00	0,00
5/12	10	95,32	603,88	380,90	0,36	0,00	0,00
10/4	10	49,27	601,03	276,20	0,50	0,00	0,00
10/8	10	67,42	603,50	545,10	0,22	0,00	0,00
10/12	6	97,02	608,59	783,83	0,38	0,17	0,00
15/4	10	29,70	541,86	447,90	0,72	0,00	0,00
15/8	10	64,91	546,69	819,00	0,16	0,00	0,00
15/12	4	78,26	613,65	1209,25	0,13	3,75	0,00
20/4	9	29,36	468,95	479,11	0,67	0,00	0,00
20/8	7	41,91	605,19	992,57	0,25	0,00	0,00
20/12	3	66,52	624,79	1685,00	0,07	2,00	0,00

Os resultados mostram que a formulação compacta fornece soluções piores e consegue resolver menos exemplos que as formulações estendidas e estendidas com decomposição Dantzig-Wolfe. As soluções da formulação compacta são piores em termos de gap, número de objetos e perda. As soluções obtidas pelas formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornecem os mesmo resultados para os grupos com até $T/K = 15/4$. Para os grupos 15/8, 15/12 e problemas com 20 períodos, o número de exemplos resolvidos são diferentes, em que o número total de exemplos resolvidos para estes grupos é 35 para a formulação estendida e 33 para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Para a maioria dos exemplos o CPLEX não encontra a solução ótima para os problemas restrito inteiro (apenas poucos exemplos para $k = 4$ e 8). Desde modo o tempo computacional em geral é em torno de 600 segundos (tempo máximo para resolver o problema mestre restrito inteiro), visto que tempo computacional da geração de colunas para o problema relaxado é baixo.

Resolver o problema mestre restrito inteiro pelo CPLEX não é uma estratégia eficiente, pois o número de colunas adicionadas ao problema mestre é extremamente alto quando considerado apenas a adição de colunas (sem excluí-las quando novas colunas são adicionadas). Soluções

factíveis podem ser encontradas ao considerar heurísticas de arredondamento. Entretanto, a qualidade das soluções dependem dos tipos de heurísticas de arredondamento utilizadas.

11.6 Conclusões

Neste capítulo foi proposto o problema de corte de estoque unidimensional acoplado com dimensionamento de lotes, que tem uma máquina de capacidade limitada para a produção de objetos idênticos (um tipo de objeto) para serem cortados. A máquina em questão produz uma quantidade de objetos em cada período do horizonte de planejamento. Os objetos produzidos devem ser cortados em itens menores de modo que atenda a demanda de cada período do horizonte de planejamento. Para este problema foram propostas três formulações matemáticas denominadas por formulação compacta, formulação estendida e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Na literatura, formulações para problemas acoplados são definidas de acordo com a formulação estendida, porém, de modo geral, os problemas envolvem outras características, como por exemplo, duas dimensões relevantes para os objetos e itens, outros tipos de máquinas etc.

O objetivo desta parte do trabalho foi analisar como se comporta outros tipos de modelos para problemas acoplados envolvendo apenas uma máquina com capacidade limitada para a produção de objetos a serem cortados em itens finais. Podemos concluir que, a formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período fornecem limitantes inferiores equivalentes, enquanto que a formulação compacta fornece limitantes muito fracos. Em termos de solução factível, a formulação compacta resolvida pelo CPLEX teve o pior desempenho, em relação às outras duas formulações resolvidas pelo método geração de colunas. A formulação estendida conseguiu resolver mais exemplos, com porcentagem de perda, número de objetos necessários para atender a demanda e gap de otimalidade muito semelhante aos resultados obtidos com a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Entretanto, resultados melhores podem ser obtidos com a formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe se for considerado outros tipos de heurísticas para obter soluções inteiras a partir do problema mestre restrito relaxado obtido ao final do método geração de colunas.

Capítulo 12

Problema acoplado com uma máquina e múltiplos tipos de objetos

As formulações matemáticas descritas no Capítulo 11 são estendidas para o problema de dimensionamento de lotes acoplado com o problema de corte com diferentes tipos de objetos. Neste caso, os itens são separados em diferentes classes de acordo com alguma característica e os objetos são produzidos de acordo com as características dos itens demandados. Como a máquina produz diferentes tipos de objetos, consequentemente existe tempo e custo de preparação de máquina, que consideramos independente da sequência. O problema consiste em decidir quantos e quais tipos de objetos são produzidos em cada período do horizonte de planejamento de modo que não ultrapasse a restrição de capacidade de máquina. Além disso, é preciso decidir os padrões de cortes para os objetos, o estoque dos objetos e dos itens de modo que a demanda de cada período seja atendida. O objetivo é minimizar o custo de estoque dos itens e objetos, custo de preparação de máquina, custo de perda e estoque inicial de objetos (utilizado como variável artificial para viabilizar a resolução do problema). Da mesma forma que no capítulo anterior, serão apresentadas as formulações compacta, estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe para o problema de corte de estoque acoplado com dimensionamento de lotes com múltiplos tipos de objetos. Para as formulações matemáticas, considere os parâmetros dado a seguir.

Dados:

- T : número de períodos no horizonte de planejamento;
- K : número de diferentes tipos de objetos;
- $\{n_0 + 1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2, \dots, n_{k-1} + 1, n_K\}$: o conjunto de tipos de itens demandados, em que $n_0 = 0$ e $n_K = n$. Assim, o conjunto de itens obtidos de objetos do tipo k é definido por $\{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$, $k = 1, \dots, K$;
- N_{kt} : número total de padrões de cortes para o objeto do tipo k no período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- $\bar{h}_k$: custo de estoque de um objeto do tipo k , $k = 1, \dots, K$;

- F_k : custo de estoque inicial de um objeto do tipo k , $k = 1, \dots, K$;
- h_i : custo unitário de estoque do item do tipo i , $i = 1, \dots, n$;
- l_i : comprimento de um item do tipo i , $i = 1, \dots, n$;
- d_i^t : número de itens do tipo i demandados no período t , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
- b_k : comprimento dos objetos do tipo k , $k = 1, \dots, K$;
- C_t : capacidade de produção em unidade de tempo da máquina no período t , $t = 1, \dots, T$;
- st_k : tempo de preparação de máquina para produzir objetos do tipo k , $k = 1, \dots, K$;
- stc_k : custo de preparação de máquina para produzir objetos do tipo k , $k = 1, \dots, K$;
- vt_k : tempo necessário para produzir um objeto do tipo k , $k = 1, \dots, K$;
- cl_k : custo do material perdido por unidade de comprimento do tipo k durante o processo de corte, $k = 1, \dots, K$;
- M_k^t : limitante superior para a produção de objetos do tipo k no período t , dado por $\frac{C_t}{v_k^t}$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$.

Variáveis:

- e_k^t : número de objetos do tipo k armazenados no final do período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 0, \dots, T$;
- s_i^t : número de itens do tipo i armazenados no final do período t , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
- r_k^t : número de objetos do tipo k produzidos no período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- z_k^t : igual a 1, se objetos do tipo k são produzidos no período t , igual a 0, caso contrário, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$.

12.1 Formulação compacta

Esta seção apresenta a formulação compacta para o problema acoplado considerando a necessidade de diferentes tipos de objetos para atender a demanda. O modelo considerado para o problema de corte é a formulação de designação (11.1) - (11.4) definida na Seção 11.1. O limitante superior sobre o número de objetos do tipo k utilizados para atender a demanda de itens provenientes deste tipo de objeto no período t é definido por $\bar{N}_{kt}$. As variáveis associadas ao problema de corte de estoque são dadas por:

- y_{jk}^t : igual a 1 se o objeto j do tipo k é utilizado no período t e, igual a 0 caso contrário, $j = 1, \dots, \bar{N}_{kt}$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- x_{ij}^t : número de itens do tipo i obtidos do objeto j no período t , $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$.

Os demais dados e variáveis estão definidos no início do capítulo. A formulação do problema é dada como segue.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_i s_i^t + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \bar{h}_k e_k^t + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T st c_k z_k^t + \sum_{k=1}^K F_k e_k^0 \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{\bar{N}_{kt}} cl_k (b_k y_{jk}^t - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i x_{ij}^t) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_k s_i^T, \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{\bar{N}_{kt}} x_{ij}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (12.2)$$

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i x_{ij}^t \leq b_k y_{jk}^t, j = 1, \dots, \bar{N}_{kt}, t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, K, \quad (12.3)$$

$$r_k^t + e_k^{t-1} - e_k^t = \sum_{j=1}^{\bar{N}_{kt}} y_{jk}^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.4)$$

$$\sum_{k=1}^K (st_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, t = 1, \dots, T, \quad (12.5)$$

$$r_k^t \leq M_k^t z_k^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.6)$$

$$x_{ij}^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1}+1, \dots, n_k, j = 1, \dots, \bar{N}_{kt}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.7)$$

$$y_{jk}^t \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, \bar{N}_{kt}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.8)$$

$$r_k^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.9)$$

$$z_k^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.10)$$

$$e_k^t \geq 0 \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.11)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1}+1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.12)$$

$$s_i^0 = 0, i = n_{k-1}+1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \quad (12.13)$$

As restrições (12.2) definem o balanceamento de estoque dos itens, em que o número total de itens cortados dos objetos no período t , considerando o estoque proveniente do período anterior e o restante para o próximo período, deve atender a demanda. Restrições (12.3) determinam padrões de corte factíveis. As restrições de balanceamento de estoque de objetos são representadas em (12.4), que integram o problema de corte com o de dimensionamento de lotes. As restrições de capacidade de máquina são definidas em (12.5). As restrições de preparação de máquina são definidas em (12.6). O objetivo (12.1) é minimizar o custo de estoque dos itens e objetos, custo de preparação de máquina, estoque inicial de objetos e custo da perda. Neste modelo, é permitido o estoque inicial de objetos, porém eles têm um alto custo dado por F_k , $k = 1, \dots, K$. O estoque final dos itens é considerado como perda. Finalmente, as restrições (12.7) - (12.13) definem as variáveis como inteiras e não negativas.

12.2 Formulação estendida

Nesta seção, a formulação do problema de corte de estoque proposta por Gilmore & Gomory (1961) é utilizada para modelar as restrições de corte e estoque no problema acoplado. Para isso, considere que todos os padrões de corte para cada objeto k de todos os períodos t sejam conhecidos. Além disso, considere a_{ij} como o número de itens finais do tipo i obtidos do padrão j para $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$, $j = 1, \dots, N_{kt}$, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$. O padrão j é factível se satisfaz as seguintes condições para toda a classe k , $k = 1, \dots, K$ (restrições da mochila, com o índice j omitido):

$$\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} l_j a_j \leq b_k, \quad (12.14)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (12.15)$$

As variáveis y_{jk}^t definem o número de vezes que o padrão j é utilizado no período t , $j = 1, \dots, N_{kt}$, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$. Assim, a formulação matemática é dada como segue.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_i s_i^t + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \bar{h}_k e_k^t + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T stc_k z_k^t + \sum_{k=1}^K F_k e_k^0 \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_{kt}} cl_k (b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jk}^t + \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_k s_i^T, \end{aligned} \quad (12.16)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{j=1}^{N_{kt}} a_{ij} y_{jk}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, K, \quad (12.17)$$

$$r_k^t + e_k^{t-1} - e_k^t = \sum_{j=1}^{N_{kt}} y_{jk}^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.18)$$

$$\sum_{k=1}^K (stc_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, t = 1, \dots, T, \quad (12.19)$$

$$r_k^t \leq M_k^t z_k^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.20)$$

$$y_{jk}^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_{kt}, t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, K, \quad (12.21)$$

$$z_k^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.22)$$

$$r_k^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (12.23)$$

$$e_k^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 0, \dots, T, \quad (12.24)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (12.25)$$

$$s_i^0 = 0, i = n_{k-1}+1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \quad (12.26)$$

As restrições (12.17), (12.18), (12.19) e (12.20) definem o balanceamento de estoque e atendimento de demanda, estoque e corte de objetos, capacidade máquina e preparação de máquina, respectivamente. A função objetivo (12.16) é a mesma definida na restrição (12.1). As res-

trições (12.21)-(12.26) definem o domínio das variáveis. A estrutura matricial das restrições (12.17) e (12.18) são dadas nas Tabelas 12.1 e 12.2, respectivamente.

Tabela 12.1: Estrutura matricial das restrições (12.17).

Y_1^1	...	Y_K^1	Y_1^2	...	Y_K^2	...	Y_1^T	...	Y_K^T	S^0	S^1	S^2	...	S^{T-1}	S^T
A^{11}	...	0	0	...	0	...	0	...	0	$\bar{I}$	$-\bar{I}$	0	...	0	0
0	$\ddots$	A^{K1}	0	...	0	...	0	...	0	$\bar{I}$	$-\bar{I}$	0	...	0	0
0	...	0	A^{12}	...	0	...	0	...	0	0	$\bar{I}$	$-\bar{I}$	...	0	0
0	...	0	0	$\ddots$	A^{K2}	...	0	...	0	0	$\bar{I}$	$-\bar{I}$	...	0	0
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
0	...	0	0	...	0	...	A^{1T}	...	0	0	$\bar{I}$	$-\bar{I}$	...	0	0
0	...	0	0	...	0	...	0	$\ddots$	A^{KT}	0	0	0	...	$\bar{I}$	$-\bar{I}$

Tabela 12.2: Estrutura matricial das restrições (12.18).

Y_1^1	...	Y_K^1	Y_1^2	...	Y_K^2	...	Y_1^T	...	Y_K^T	E^1	...	E^K	R^1	...	R^K
$-\bar{I}$	...	$\bar{0}$	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	E	...	0	I	...	0
$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	$-\bar{I}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$						
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$						
0	...	$\bar{0}$	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$-\bar{I}$	...	$\bar{0}$						
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	0	...	E	0	...	I
$\bar{0}$	...	$-\bar{I}$	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$						
$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	$\bar{0}$	...	$-\bar{I}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$						
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$						
0	...	$\bar{0}$	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$\bar{0}$	...	$-\bar{I}$						

Nas Tabelas 12.1 e 12.2, $Y_k^t = (y_{1k}^t, y_{2k}^t, \dots, y_{N_{kt}}^t)$ significa quantas vezes o padrão de corte j ($j = 1, \dots, N_{kt}$) para o objeto k produzido no período t é utilizado, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$. $S^t = (s_1^t, s_2^t, \dots, s_n^t)$ e representa o estoque dos itens. A submatriz A^{kt} representa os padrões de corte do objeto do tipo k no período t e é dada por:

$$A^{kt} = \begin{pmatrix} a_{(n_{k-1}+1)1} & \dots & a_{(n_{k-1}+1)N_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n_k)1} & \dots & a_{(n_k)N_k} \end{pmatrix}$$

Assim, uma coluna correspondente ao padrão de corte j na formulação (12.16) - (12.26), para o período t e itens i da classe k ($i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$), é dada por:

$$\underbrace{(0, \dots, 0, a_{(n_{k-1}+1)j}, \dots, a_{(n_k)j}, 0, \dots, 0)}_{\text{referente às restrições (12.17)}, \underbrace{(0, \dots, -1, 0, \dots, 0)}_{\text{referente às restrições (12.18)}}).$$

O elemento $a_{(n_{k-1}+1)j}$ está na $(n \times (t-1) + n_{k-1})$ -ésima posição do vetor e o elemento -1 está na $(n \times T + (t-1) \times k + t)$ -ésima posição. Na Tabela 12.1, as matrizes $\bar{0}$ correspondentes as colunas Y_k^t têm dimensão $(n_k - n_{k-1} - 1) \times N_{kt}$, as matrizes 0 e $\bar{I}$ nas colunas S^t têm dimensão $(n_k - n_{k-1} - 1) \times n$, em que $\bar{I}$ tem valor 1 nas posições $j \times (n_{k-1} + j)$, $j = 1, \dots, n_k - n_{k-1} - 1$.

Na Tabela 12.2 cada bloco tem T linhas, $\bar{1}$ é um vetor unitário $(1, \dots, 1)$ com N_{kt} posições, cada posição corresponde a um padrão de corte, para $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$. O vetor R^k representa o número de objetos produzidos, tal que $R^k = (r_k^1, \dots, r_k^T)$. O vetor E^k representa o estoque dos objetos do tipo k , tal que $E^k = (e_k^0, e_k^1, \dots, e_k^T)$, a matriz E tem dimensão $T \times T$ e é dada por:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

12.3 Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe

Nesta seção, a formulação de Gilmore & Gomory (1961) em (12.16) - (12.26) para o problema de corte é integrada a decomposição Dantzig-Wolfe para o problema de dimensionamento de lotes. Da mesma forma que na Seção 11.3, é utilizada a decomposição Dantzig-Wolfe por períodos, em que os subproblemas são definidos pelas restrições de capacidade de máquina. Existem, também, dois tipos de subproblemas: um associado a decomposição de Gilmore & Gomory (1961) (subproblema 1) e outro associado a decomposição por período (subproblema 2). Entretanto, a resolução do subproblema 2 para problemas com vários tipos de objetos não é trivial como o subproblema 2 da Seção 11.3. Nos subproblemas do tipo 1, as restrições (12.27) - (12.28) determinam padrões de corte para cada período t ($t = 1, \dots, T$) e classe k ($k = 1, \dots, K$). No subproblema 2, as restrições (12.29) - (12.32) determinam os planos de produção para cada período t , $t = 1, \dots, T$.

Restrições do subproblema 1 ($k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$):

$$l_1 a_{n_{k-1}+1} + \dots + l_n a_{n_k} \leq b_k, \quad (12.27)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (12.28)$$

Restrições do subproblema 2 ($t = 1, \dots, T$):

$$\sum_{k=1}^K (st_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, \quad (12.29)$$

$$r_k^t \leq M_k^t z_k^t, k = 1, \dots, K, \quad (12.30)$$

$$z_k^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, \quad (12.31)$$

$$r_k^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K. \quad (12.32)$$

Suponha que para cada período t e classes k , $t = 1, \dots, T$, $k = 1, \dots, K$, todas as soluções do subproblema 1 sejam conhecidas e, também, todas as soluções para cada período t , $t = 1, \dots, T$, do subproblema 2 sejam conhecidas. No primeiro subproblema, conhecemos todos os padrões de cortes para todos os períodos e classes, já no segundo subproblema, conhecemos todos os planos de produção. Para a definição do problema mestre considere os seguintes parâmetros

Parâmetros:

- P_t : número de planos de produção referente ao período t , $t = 1, \dots, T$;
- $r_k^{tp_t}$: quantidade de objetos do tipo k produzidos no plano de produção p_t do período t , $k = 1, \dots, K$, $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$;
- $z_k^{tp_t}$: definido como 1 se objetos do tipo k foram produzidos no plano de produção p_t do período t , 0, caso contrário, $k = 1, \dots, K$, $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$.

Além disso, considere as seguintes variáveis:

- $\bar{r}_t^{p_t}$: peso do plano de produção p_t do período t , $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$.

As variáveis r_k^t e z_k^t podem ser reescritas como uma combinação convexa dos planos de produção referente ao período t , isto é, para cada $t = 1, \dots, T$:

$$r_k^t = \sum_{p_t=1}^{P_t} r_k^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t}, k = 1, \dots, K, \quad (12.33)$$

$$z_k^t = \sum_{p_t=1}^{P_t} z_k^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t}, k = 1, \dots, K, \quad (12.34)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, \quad (12.35)$$

$$\bar{r}_t^{p_t} \geq 0, \text{ inteiro } p_t = 1, \dots, P_t. \quad (12.36)$$

Neste caso os planos de produção de cada período t são pontos extremos dos subproblemas. Assim, com a redefinição de z_k^t e r_k^t o problema mestre é definido por:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_i s_i^t + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \bar{h}_k e_k^t + \sum_{t=1}^T \sum_{p_t=1}^{P_t} \sum_{k=1}^K z_k^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t} + \sum_{k=1}^K F_k e_k^0 \\
& + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_{kt}} cl_k(b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jk}^t + \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_k s_i^T, \tag{12.37}
\end{aligned}$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{j=1}^{N_{kt}} a_{ij} y_{jk}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, K, \tag{12.38}$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} r_k^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t} + e_k^{t-1} - e_k^t = \sum_{j=1}^{N_{kt}} y_{jk}^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \tag{12.39}$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, t = 1, \dots, T, \tag{12.40}$$

$$y_{jk}^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_{kt}, t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, K, \tag{12.41}$$

$$\bar{r}_t^{p_t} \geq 0, \text{ inteiro}, p_t = 1, \dots, P_t, t = 1, \dots, T, \tag{12.42}$$

$$e_k^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 0, \dots, T, \tag{12.43}$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \tag{12.44}$$

$$s_i^0 = 0, i = n_{k-1}+1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \tag{12.45}$$

A redefinição das variáveis r_k^t e z_k^t pelos planos de produção $\bar{r}_k^{tp_t}$ no modelo (12.37) - (12.45) representa a seleção de um plano de produção para cada período t que seja suficiente para atender a necessidade de objetos a serem cortadas para atender a demanda de acordo com as restrições (12.38). As restrições (12.39) acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. As restrições (12.40) são de convexidade, uma para cada período do horizonte de planejamento. Por fim, as restrições (12.41) - (12.45) definem a integralidade e não negatividade das variáveis.

12.4 Limitantes inferiores e geração de colunas

Esta seção descreve os limitantes inferiores para o problema acoplado com vários tipos de objetos e uma máquina para produzi-los. Assim, como no Capítulo 11 apresentamos três tipos de relaxação:

1. Relaxação linear da formulação compacta (12.1) - (12.13);
2. Relaxação linear da formulação estendida (12.16) - (12.26);
3. Relaxação linear da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe (12.37) - (12.45).

O primeiro caso a relaxação é trivial, basta relaxar a integralidade das variáveis. O método de geração de colunas para o segundo e terceiro caso estão descritos nas duas próximas seções.

12.4.1 Geração de colunas para a formulação estendida

Ao relaxar a condição de integralidade das variáveis $e_k^t, r_k^t, y_{jk}^t, z_k^t, s_i^t$ é possível aplicar o método de geração de colunas para o problema (12.16) - (12.26). Em cada iteração do método são resolvidos $K \times T$ subproblemas, dado por problemas da mochila, que determinam padrões de corte. Para determinar os custos reduzidos (um para cada período t e classe k), considere $(\pi_{(n_0+1)1}, \dots, \pi_{(n_1)1}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)1}, \dots, \pi_{(n_K)1}, \dots, \pi_{(n_0+1)T}, \dots, \pi_{(n_1)T}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)T}, \dots, \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (12.17) e $(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{T1}, \dots, \sigma_{1K}, \dots, \sigma_{TK})$ as variáveis duais associadas às restrições (12.18). O custo reduzido para cada classe k no período t é dado por:

$$c^{kt} = cl_k b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i) a_i + \sigma_{kt}.$$

Portanto, para cada período t e para cada classe $k, t = 1, \dots, T, k = 1, \dots, K$ o subproblema é dado por:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i) a_i, \quad (12.46)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_k, \quad (12.47)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro, } i = n_{k-1} + 1 \dots n_k. \quad (12.48)$$

Se $c^{kt} < 0$ a coluna é adicionada ao problema (12.16) - (12.26) relaxado. Caso contrário, $c^{kt} \geq 0$ para todo $t = 1, \dots, T$ e $k = 1, \dots, K$, então a solução ótima para o problema relaxado foi encontrada.

12.4.2 Geração de colunas para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe

Para aplicar o método de geração de colunas ao problema (12.37) - (12.45), a condição de integralidade das variáveis s_i^t, e_k^t, y_{jk}^t e $r_t^{tp_t}$ são relaxadas. Nesta decomposição, a cada iteração do método de geração de colunas são resolvidos $K \times T$ subproblemas que determinam os padrões de corte (subproblema 1) e T subproblemas que determinam os planos de produção (subproblema 2). Para determinar os custos reduzidos destes dois tipos de subproblemas considere $(\pi_{(n_0+1)1}, \dots, \pi_{(n_1)1}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)1}, \dots, \pi_{(n_K)1}, \dots, \pi_{(n_0+1)T}, \dots, \pi_{(n_1)T}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)T}, \dots, \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (12.38), $(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{K1}, \dots, \sigma_{1T}, \dots, \sigma_{KT})$ as variáveis duais associadas às restrições (12.39) e $(\gamma_1, \dots, \gamma_T)$ as variáveis duais associadas às restrições (12.40). O custo reduzido associado ao subproblema k, t , que determina os padrões de corte é dado por:

$$c_1^{kt} = cl_k b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i) a_i + \sigma_{kt}.$$

O custo reduzido ao subproblema t que determina os planos de produção é dado por:

$$c_2^t = \sum_{k=1}^K st c_k z_k^t - \sum_{k=1}^K \sigma_{kt} r_k^t - \gamma_t.$$

Assim, para cada período t e cada classe k os seguintes subproblemas determinam os padrões de corte, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i) a_i, \quad (12.49)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_k, \quad (12.50)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1 \dots n_k. \quad (12.51)$$

Para cada período t o subproblema 2 determina os planos de produção, $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 2:

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^K st c_k z_k^t - \sum_{k=1}^K \sigma_{kt} r_k^t, \quad (12.52)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{k=1}^K (st c_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, \quad (12.53)$$

$$r_k^t \leq M_k^t z_k^t, k = 1, \dots, K, \quad (12.54)$$

$$z_k^t \in \{0, 1\}, \quad (12.55)$$

$$r_k^t \geq 0, \text{ inteiro}. \quad (12.56)$$

Se $c_1^{kt} < 0$ e $c_2^t < 0$ para algum $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$, a coluna é adicionada ao problema mestre restrito relaxado proveniente de (12.37) - (12.44). Caso contrário, $c_1^{kt} \geq 0$ e $c_2^t \geq 0$ para todo $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$, a solução é ótima para o problema mestre relaxado.

12.5 Resultados computacionais

Nesta seção são descritos os resultados computacionais para os modelos apresentados neste capítulo. Os métodos do tipo geração de colunas foram implementados em C/C++ e as modelagens matemáticas resolvidas com o auxílio do CPLEX 12.4. Para resolver os problemas da mochila foi implementado um método *branch-and-bound* baseado no método de Gilmore & Gomory (1961) e os subproblemas (12.52) - (12.56) foram resolvidos pelo CPLEX 12.4. Os

algoritmos foram executados em um computador Intel Core i7 com 3.20 GHz e 16 Gbyte de memória. Para os modelos que foram resolvidos pelo CPLEX, o número de processadores foi limitado em quatro. Os dados foram gerados com base nos dados de uma indústria de polpa e papel portuguesa descritos na Seção 11.5.1.

12.5.1 Limitantes inferiores

Da mesma forma que no Capítulo 11, as três relaxações lineares apresentadas em 12.4 foram comparadas com a relaxação linear estendida resolvida pelo método de geração de colunas. O gap é dado por: $100 \times \frac{f_{FE} - f}{f_{FE}}$ (%), em que f_{FE} é o valor da função objetivo ótimo para a formulação estendida relaxada e f é o valor da função objetivo da formulação compacta relaxada ou da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe relaxada. Para a formulação compacta, o limitante superior de objetos cortados $\bar{N}_{kt}$ é dado pelo número total de padrões homogêneos do tipo k necessários para atender a demanda total do tipo k durante todos os períodos t , $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$. A Tabela 12.3 apresenta os resultados computacionais da formulação compacta relaxada e a Tabela 12.4 apresenta os resultados da formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe (formulação estendida + DW). As tabelas apresentam o gap médio, o tempo em segundos (t(s)), o número médio de objetos utilizados (objetos), a porcentagem da perda média (% perda), o número médio de estoque inicial de objetos (e0) e o número médio de estoque final de objetos (eT). Para os métodos geração de colunas, a Tabela 12.4 apresenta o número médio de iterações (it). Note que, como o gap é calculado em relação a formulação estendida, então na Tabela 12.4 não é representado o gap nas colunas referentes à formulação estendida.

Tabela 12.3: Resultados da formulação compacta relaxada - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.

T/K	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	100,00	0,11	77,54	0,00	0,00	0,00
3/8	100,00	0,17	155,77	0,00	0,00	0,00
3/12	97,96	0,24	268,39	0,00	9,91	0,00
5/4	100,00	0,17	127,61	0,00	0,00	0,00
5/8	100,00	0,28	278,91	0,00	0,00	0,00
5/12	99,46	0,36	379,45	0,00	2,60	0,00
10/4	100,00	0,59	275,08	0,00	0,00	0,00
10/8	100,00	1,27	543,92	0,00	0,00	0,00
10/12	98,70	2,16	816,58	0,00	14,43	0,00
15/4	100,00	2,22	444,80	0,00	0,00	0,00
15/8	100,00	3,97	817,64	0,00	0,00	0,00
15/12	98,23	6,83	1241,69	0,00	20,76	0,00
20/4	100,00	3,20	501,77	0,00	0,00	0,00
20/8	100,00	7,75	1045,87	0,00	0,00	0,00
20/12	97,31	17,63	1651,88	0,00	55,10	0,00

Tabela 12.4: Resultados do método de geração de colunas - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.

T/K	Formulação estendida						Formulação estendida + DW						
	t(s)	it	objetos	%perda	e0	eT	gap	t(s)	it	objetos	%perda	e0	eT
3/4	0,29	8,00	82,46	4,09	0,00	0,00	0,00	4,54	8,60	70,86	3,87	0,00	0,00
3/8	0,43	12,40	162,87	4,00	0,00	0,00	0,00	8,08	14,60	142,07	4,24	0,00	0,00
3/12	0,52	12,50	283,42	5,59	20,94	0,00	-0,03	22,14	32,00	261,01	5,72	21,05	0,00
5/4	0,34	9,90	133,75	3,90	0,00	0,00	0,00	5,84	10,20	106,54	3,89	0,00	0,00
5/8	0,50	12,30	293,17	4,45	0,00	0,00	0,00	8,08	13,30	260,82	4,55	0,00	0,00
5/12	0,65	13,10	397,53	4,60	12,73	0,00	-0,03	27,55	28,90	357,00	4,87	12,84	0,00
10/4	0,59	13,10	286,05	2,86	0,00	0,00	0,00	13,51	12,50	245,96	3,03	0,00	0,00
10/8	0,82	13,30	575,71	4,77	1,04	0,00	0,00	16,96	14,30	504,01	4,83	1,05	0,00
10/12	1,41	14,20	849,86	4,11	30,68	0,00	-0,02	50,17	25,70	767,12	4,07	30,89	0,00
15/4	0,63	11,40	467,71	3,52	0,00	0,00	0,00	19,11	11,30	402,21	3,36	0,00	0,00
15/8	1,18	14,20	868,13	5,19	0,00	0,00	0,00	27,57	15,20	739,91	5,29	0,00	0,00
15/12	2,81	14,70	1287,99	3,63	39,56	0,00	-0,02	78,66	27,70	1139,93	3,47	39,86	0,00
20/4	0,78	12,60	522,55	2,73	0,00	0,00	0,00	28,18	12,50	434,86	2,60	0,00	0,00
20/8	1,68	12,90	1100,14	4,77	0,00	0,00	0,00	44,77	13,80	958,71	4,86	0,00	0,00
20/12	4,31	14,40	1715,12	3,69	74,46	0,00	-0,03	113,64	25,60	1530,74	3,74	74,92	0,00

Os resultados mostram que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornece soluções melhores para todos os exemplos, porém o fator de melhoria do gap é em torno de 10^{-5} para cada exemplo. Apenas para os exemplos com 12 tipos de objetos diferentes que a melhoria pode ser representada na tabela, cujo o gap é menor ou igual a -0.02% . A formulação compacta fornece limitante inferior muito ruim, o gap médio para todas os grupos fica próximo a 100%. O tempo computacional do método de geração de colunas para a formulação estendida foi menor que para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, principalmente para os exemplos maiores. Entretanto, o número de objetos cortados foi menor na formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe relaxada. O número de objetos estocados no período inicial é aproximadamente o mesmo para as formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Portanto, entre os modelos implementados, a formulação estendida é a melhor opção para se obter limitantes para o problema acoplado em questão, pois fornece gaps bons em com menor tempo computacional.

12.5.2 Soluções factíveis

Para as formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, ao final do método de geração de colunas as variáveis foram redefinidas como inteiras e resolvidas pelo CPLEX 12.4. Deste modo, uma solução factível pode ser obtida para cada uma das formulações. Para determinar a solução inteira, o tempo computacional foi limitado em 10 minutos. O gap é dado por $100 \times \frac{f-LB}{f}$ (%), em que LB é o melhor limitante inferior encontrado entre os três modelos, neste caso foi utilizado os limitantes fornecidos pela formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe relaxada e f é o valor da solução factível encontrada. A Tabela 12.5 mostra os resultados computacionais médios para a formulação compacta (12.1) - (12.13). As Tabelas 12.6 e 12.7 apresentam os resultados para as formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, respectivamente. Os métodos não encontram solução factíveis

para todos os exemplos analisados, sendo o número de exemplos resolvidos para cada grupo T/K representados nas tabelas por resol. Os demais parâmetros avaliados seguem a mesma notação da seção anterior.

Para problemas com 3 períodos a formulação compacta forneceu soluções melhores. Além disso, a formulação compacta resolveu mais exemplos que as demais formulações. Para os problemas com mais de 3 períodos a formulação estendida forneceu gaps melhores, utilizou menos estoque inicial de objetos, porém a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe utilizou menos objetos para atender a demanda e a perda foi um pouco menor. A formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe teve menor controle sobre a produção de objetos ocasionando um grande estoque inicial de objetos, bem como sobra de objetos no último período do horizonte de planejamento. Para as formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe a perda média total fica em torno de 5,5%, em que excesso de itens finais no último período é considerado perda.

Tabela 12.5: Resultados da formulação compacta - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.

T/K	resolv	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	10	31,55	600,11	84,40	5,76	0,00	0,00
3/8	10	38,25	600,33	167,40	6,33	0,40	0,00
3/12	10	31,99	600,36	290,80	7,92	32,90	0,00
5/4	10	29,28	600,29	136,00	5,05	0,00	0,30
5/8	10	34,64	600,53	300,80	6,63	5,50	0,00
5/12	9	54,27	601,26	439,78	12,39	108,78	20,44
10/4	10	40,46	601,57	295,00	4,67	0,00	0,10
10/8	10	48,64	601,28	617,00	9,66	22,80	0,00
10/12	4	70,89	600,75	852,00	14,26	69,75	0,00
15/4	10	46,69	602,06	492,90	6,62	0,30	0,00
15/8	9	64,07	604,14	2961,22	30,00	2654,56	459,44
15/12	5	86,67	603,11	1585,20	23,25	342,40	2,40
20/4	10	54,04	602,67	555,40	6,47	0,00	0,20
20/8	5	58,78	605,33	1123,40	14,22	77,00	0,40
20/12	3	81,59	600,40	1678,00	18,91	67,67	0,00

Tabela 12.6: Resultados da formulação estendida - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.

T/K	resolv	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	10	33,53	64,17	84,60	5,99	0,00	0,00
3/8	10	40,82	551,96	167,70	6,56	0,00	0,00
3/12	10	34,55	600,52	291,70	8,33	25,00	0,00
5/4	10	26,27	400,57	135,50	4,86	0,00	0,00
5/8	10	29,78	600,50	298,90	6,11	0,30	0,00
5/12	10	26,68	600,65	403,70	6,07	15,60	0,00
10/4	10	19,27	600,59	288,30	3,49	0,00	0,00
10/8	10	13,37	600,81	557,63	5,35	0,00	0,00
10/12	1	20,40	602,10	1031,00	4,93	124,00	0,00
15/4	10	10,81	600,63	470,20	3,90	0,00	0,00
15/8	8	16,46	601,23	889,88	5,68	40,63	0,00
15/12	1	45,15	602,75	1357,00	6,12	534,00	0,00
20/4	10	11,21	600,78	524,90	3,03	0,00	0,00
20/8	5	13,23	601,32	1030,80	4,87	2,40	0,00
20/12	1	30,27	602,78	1610,00	7,33	655,00	0,00

De modo geral, para problemas com 3 períodos a formulação compacta forneceu os melhores resultados e para problemas com 5 períodos ou mais a formulação estendida forneceu

Tabela 12.7: Resultados da formulação estendida + DW - múltiplos tipos de objetos e uma máquina.

T/K	resolv	gap	t(s)	objetos	%perda	e0	eT
3/4	10	42,54	262,92	74,60	5,51	28,20	16,50
3/8	10	53,43	608,08	155,80	6,53	92,10	9,80
3/12	10	46,24	622,14	272,10	8,01	170,70	14,10
5/4	10	32,98	429,49	116,00	4,71	23,10	52,20
5/8	10	43,60	608,08	267,30	5,76	128,00	7,50
5/12	10	42,64	627,55	378,70	5,96	200,00	13,80
10/4	10	26,50	613,51	261,30	3,46	30,10	32,30
10/8	10	25,50	616,96	519,60	5,26	139,10	58,30
10/12	5	33,66	633,07	758,20	5,65	303,00	15,20
15/4	10	15,69	619,11	419,50	3,75	31,50	39,70
15/8	9	18,03	627,68	765,56	5,14	155,22	46,89
15/12	1	30,25	699,17	1274,00	4,77	480,00	0,00
20/4	9	14,16	627,31	426,33	3,06	23,89	65,78
20/8	6	17,13	642,36	912,17	5,86	147,33	71,17
20/12	1	75,83	683,85	1634,00	7,35	1025,00	0,00

os melhores resultados. Resolver o problema mestre restrito pelo CPLEX não é uma estratégia eficiente, visto que o número de colunas adicionadas ao problema mestre é estritamente alto, quando considerado apenas a adição de colunas (sem excluí-las quando novas colunas são adicionadas). É possível obter mais soluções factíveis para o problema considerando as formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe se heurísticas de arredondamento forem utilizadas. Como observado na seção anterior, a qualidade das soluções factíveis dependem estritamente das heurísticas de arredondamento utilizadas.

12.6 Conclusões

Neste capítulo foi proposto o problema de corte de estoque unidimensional acoplado com dimensionamento de lotes, que tem uma máquina de capacidade limitada para a produção de vários tipos de objetos para serem cortados. A máquina em questão produz um conjunto de objetos em cada período do horizonte de planejamento. Como há produção de vários tipos de objetos, então é considerado custo e tempo de preparação de máquina. Os objetos produzidos devem ser cortados em itens menores de modo que atenda a demanda de cada período do horizonte de planejamento. Os itens estão divididos em diferentes classes e devem ser obtidos de objetos de mesma característica. Para este problema as três formulações propostas são extensões das formulações propostas no Capítulo 11 e denominadas por: formulação compacta, formulação estendida e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Como descrito no capítulo anterior, na literatura, formulações para problemas acoplados são definidas de acordo com a formulação estendida, porém os modelos incorporam outras características.

O objetivo desta parte do trabalho foi analisar como se comporta outras formulações matemáticas para problemas acoplados envolvendo apenas uma máquina com capacidade limitada para a produção de diferentes tipos de objetos a serem cortados em itens finais. Podemos concluir que, a formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período

fornece limitantes inferiores equivalentes, enquanto que a formulação compacta fornece limitantes muito fracos. Em termos de solução factível, a formulação compacta resolvida pelo CPLEX teve o pior desempenho para problemas com 5 períodos ou mais, em relação às outras duas formulações resolvidas pelo método geração de colunas. Entretanto para problemas com 3 períodos os melhores resultados foram obtidas pela formulação compacta. Para problemas com 5 períodos ou mais a formulação estendida forneceu os melhores resultados.

Capítulo 13

Problema acoplado com múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas

Neste capítulo são descritos os modelos matemáticos para o problema com múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas. Da mesma forma que no Capítulo 12 os itens são separados em diferentes classes de acordo com alguma característica e os objetos são produzidos de acordo com as características dos itens demandados. Entretanto, existe mais de uma máquina para produzi-los. O problema consiste em decidir quantos e quais tipos de objetos são produzidos, em cada máquina, em cada período do horizonte de planejamento, de modo que não ultrapasse as restrições de capacidade das máquinas. Além disso, são decididos os padrões de corte para os objetos, o quanto estocar dos objetos e dos itens de modo que a demanda seja atendida sem atraso. A função objetivo minimiza o custo de estoque dos itens e objetos, custo de preparação de máquina, custo de perda e estoque inicial de objetos, que funciona como variável artificial para factibilizar o problema. Para este problema foram definidas cinco formulações matemáticas: compacta; estendida; estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período; estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina; estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período e máquina.

Este problema foi definido em Poltroniere et al. (2008). A formulação apresentada pelos autores foi a formulação estendida, apresentada na seção 13.2, porém os autores não determinaram limitantes inferiores para problema e soluções factíveis foram obtidas por heurísticas. Os modelos e soluções factíveis obtidas a partir da geração de colunas propostas neste trabalho são comparados com as heurísticas de Poltroniere et al. (2008). As heurísticas são apresentadas em 13.4

Para as formulações matemáticas, considere os parâmetros dados a seguir.

Dados:

- T : número de períodos no horizonte de planejamento;
- M : número de máquinas;
- K : número de diferentes objetos;

- $\{n_0 + 1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2, \dots, n_{k-1} + 1, n_K\}$: o conjunto de tipos de itens demandados, em que $n_0 = 0$ e $n_K = n$. Assim, o conjunto de itens obtidos de objetos do tipo k é definido por $\{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$, $k = 1, \dots, K$;
- N_{kmt} : número total de padrões de cortes para objetos do tipo k produzidos na máquina m no período t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$;
- $\bar{h}_{km}$: custo de estoque de um objeto do tipo k produzido na máquina m ao final de cada período, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- F_{km} : custo de estoque inicial de um objeto do tipo K produzido na máquina m , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- h_i : custo unitário de estoque do item do tipo i ao final de cada período, $i = 1, \dots, n$;
- l_i : comprimento de um item do tipo i , $i = 1, \dots, n$;
- d_i^t : número de itens demandados do tipo i no período t , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
- b_{km} : comprimento dos objetos do tipo k produzidos na máquina m , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- C_{mt} : capacidade de produção em unidade de tempo da máquina m no período t , $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$;
- st_{km} : tempo de preparação da máquina m para produzir objetos do tipo k , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- stc_{km} : custo de preparação da máquina m para produzir objetos do tipo k , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- vt_{km} : tempo necessário para produzir um objeto do tipo k na máquina m , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- cl_{km} : custo de perda de material por unidade de comprimento do objeto do tipo k produzido da máquina m , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$;
- M_{km}^t : limitante superior para a produção de objetos do tipo k na máquina m no período t , dado por $\frac{C_{mt}}{vt_{km}}$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$.

Variáveis:

- e_{km}^t : número de objetos do tipo k produzidos na máquina m armazenados no final do período t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$;
- s_i^t : número de itens do tipo i armazenados no final do período t , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
- r_{km}^t : número de objetos do tipo k produzidos na máquina m no período t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$;
- z_{km}^t : igual a 1, se objetos do tipo k são produzidos na máquina m no período t ; igual a 0, caso contrário, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$.

13.1 Formulação compacta

Para o problema com a formulação compacta (problema de corte de estoque de acordo com a formulação (11.1) - (11.4)), considere $\bar{N}_{kmt}$ o limitante superior sobre o número de objetos do tipo k produzidos na máquina m necessários para atender a demanda no período t e as seguintes variáveis adicionais:

- y_{jkm}^t : igual a 1 se o objeto j do tipo k produzido na máquina m é utilizada no período t e, igual a 0 caso contrário, $j = 1, \dots, \bar{N}_{kmt}$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$;
- x_{ijm}^t : número de itens do tipo i obtidos do objeto j do tipo k produzido na máquina m no período t , $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$.

A formulação do problema é dado como segue.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \bar{h}_{km} e_{km}^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K stc_{km} z_{km}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K F_{km} e_{km}^0 \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{\bar{N}_{kmt}} cl_{km} (b_{km} y_{jkm}^t - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i x_{ijm}^t) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T, \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{\bar{N}_{kmt}} x_{ijm}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (13.2)$$

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i x_{ijm}^t \leq b_{km} y_{jkm}^t, j = 1, \dots, \bar{N}_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.3)$$

$$\sum_{k=1}^K (st_{km} z_{km}^t + vt_{km} r_{km}^t) \leq C_{mt}, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.4)$$

$$r_{km}^t \leq M_{km}^t z_{km}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.5)$$

$$r_{km}^t + e_{km}^{t-1} - e_{km}^t = \sum_{j=1}^{\bar{N}_{kmt}} y_{jkm}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.6)$$

$$x_{ijm}^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \bar{N}_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.7)$$

$$y_{jkm}^t \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, \bar{N}_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.8)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.9)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.10)$$

$$e_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 0, \dots, T, \quad (13.11)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 0, \dots, T, \quad (13.12)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (13.13)$$

As restrições (13.2) são de balanceamento de estoque dos itens, em que o número total de itens cortados dos objetos no período t , considerando o estoque proveniente do período anterior e o restante para o próximo período, deve atender a demanda. Restrições (13.3) determinam padrões de corte factíveis. Restrições (13.4) são as restrições de capacidade de máquina que produz objetos para serem cortados. As restrições de preparação de máquina são definidas

em (13.5). As restrições de balanceamento de estoque de objetos são definidas em (13.6), que integram o problema de corte com o de dimensionamento de lotes. O objetivo (13.1) é minimizar o custo de estoque dos objetos e dos itens, bem como, o custo da perda de material proveniente do corte de objetos e custo de estoque de itens no último período do horizonte de planejamento. Neste modelo, permitimos que o estoque inicial de objetos, entretanto, eles tem um alto custo dado por F_{km} , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$. Finalmente, as restrições (13.7) - (13.13) definem as variáveis como inteiras e não negativas.

13.2 Formulação estendida

Para a definição da formulação estendida (problema de corte de estoque de acordo com a formulação de Gilmore & Gomory (1961)), considere que todos os padrões de corte para cada objeto do tipo k de todos os períodos t e de todas as máquinas sejam conhecidos. Defina a_{ijm} como o número de itens finais do tipo i obtidos do padrão j do objeto tipo k produzido na máquina m , para $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$, $j = 1, \dots, N_{kmt}$, $m = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$. O padrão j proveniente dos objetos do tipo k produzidos na máquina m deve satisfazer as seguintes restrições.

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_{km}, \quad (13.14)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (13.15)$$

Os parâmetros foram definidos no início do capítulo e, também, consideramos as variáveis y_{jkm}^t que definem o número de vezes que o padrão de corte j para o objeto do tipo k da máquina m é utilizado no período t para $j = 1, \dots, N_{kmt}$, $m = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$. A formulação matemática é dada como segue.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \bar{h}_{km} e_{km}^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K stc_{km} z_{km}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K F_{km} e_{km}^0 \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} cl_{km} (b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jkm}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T, \end{aligned} \quad (13.16)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a :} \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_{kmt}} a_{ijm} y_{jkm}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \\ & k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (13.17)$$

$$r_{km}^t + e_{km}^{t-1} - e_{km}^t = \sum_{j=1}^{N_{kmt}} y_{jkm}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.18)$$

$$\sum_{k=1}^K (stc_{km} z_{km}^t + vt_{km} r_{km}^t) \leq C_{mt}, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.19)$$

$$r_{km}^t \leq M_{km}^t z_{km}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.20)$$

$$y_{jkm}^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.21)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.22)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.23)$$

$$e_k^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 0, \dots, T, \quad (13.24)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 0, \dots, T, \quad (13.25)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (13.26)$$

As restrições de balanceamento de estoque dos itens são definidas em (13.17). As restrições de balanceamento de estoque dos objetos são dadas em (13.18), que acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. As restrições (13.19) são de capacidade das máquinas, enquanto que (13.20) são restrições de preparação das máquinas. As restrições (13.21) - (13.26) definem o domínio das variáveis. Em Poltroniere et al. (2008) o problema acoplado foi definido com uma formulação similar a formulação (13.17) - (13.26). Apesar da produção dos objetos ser definida em unidades (restrições 13.19), os autores também consideram o peso total de material necessário para atender a demanda dos itens, também em peso, porém com um acréscimo para a perda devido ao corte dos objetos. Esta formulação é um modelo alternativo que não considera o peso dos itens e objetos, visto que a demanda e a produção dos itens é considerada diretamente em unidades. As Tabelas 13.1 e 13.2 mostram a estrutura matricial das restrições (13.17) e (13.18), respectivamente.

Tabela 13.1: Estrutura matricial das restrições (13.17).

Y_{11}^1	...	Y_{1M}^1	...	Y_{K1}^1	...	Y_{KM}^1	...	Y_{11}^T	...	Y_{1M}^T	...	Y_{K1}^T	...	Y_{KM}^T	S^0	...	S^T
A_{11}^1	...	A_{1M}^1	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	$\bar{I}$	...	0
0	...	0	...	A_{K1}^1	...	A_{KM}^1	...	0	...	0	...	0	...	0	$\bar{I}$	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	...	0	...	0	...	0	...	A_{11}^T	...	A_{1M}^T	...	0	...	0	0	...	$-\bar{I}$
0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	A_{K1}^T	...	A_{KM}^T	0	...	$-\bar{I}$

Na Tabela 13.1, $Y_{km}^t = (y_{1km}^t, y_{2km}^t, \dots, y_{N_{kmt}km}^t)$, que fornece os padrões de corte ($j = 1, \dots, N_{kmt}$) do objeto k produzido na máquina m no período t é utilizado, $k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$. $S^t = (s_1^t, s_2^t, \dots, s_n^t)$. A submatriz A_{km}^t representa os padrões de corte dos objetos do tipo k produzidos na máquina m no período t e é dada por:

$$A_{km}^t = \begin{pmatrix} a_{(n_{k-1}+1)1} & \dots & a_{(n_{k-1}+1)N_{kmt}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n_k)1} & \dots & a_{(n_k)N_{kmt}} \end{pmatrix}. \quad (13.27)$$

Assim, uma coluna correspondente ao padrão de corte j na formulação (13.16) - (13.26), para o período t e itens i da classe k ($i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$), é dada por:

Tabela 13.2: Estrutura matricial das restrições (13.18).

Y_{11}^1	$\dots$	Y_{1M}^1	$\dots$	Y_{K1}^1	$\dots$	Y_{KM}^1	$\dots$	Y_{11}^T	$\dots$	Y_{1M}^T	$\dots$	Y_{K1}^T	$\dots$	Y_{KM}^T	E	R
$-\bar{1}$																
	$\ddots$														E_1^1	R_1^1
		$-\bar{1}$	$\dots$		0		$\dots$		0		$\dots$		0			
				$-\bar{1}$												
					$\ddots$										E_K^1	R_K^1
						$-\bar{1}$	$\dots$		0		$\dots$		0			
	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$				$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
								$-\bar{1}$								
									$\ddots$						E_1^T	R_1^T
										$-\bar{1}$	$\dots$		0			
														$-\bar{1}$		
															E_K^T	R_K^T

$$(\underbrace{0, \dots, 0, a_{(n_{k-1}+1)j}, \dots, a_{(n_k)j}, 0, \dots, 0}_{\text{referente às restrições (13.17)}}, \underbrace{0, \dots, -1, 0, \dots, 0}_{\text{referente às restrições (13.18)}}).$$

O elemento $a_{(n_{k-1}+1)j}$ está na $(n \times (t-1) + n_{k-1})$ -ésima posição do vetor e o elemento -1 está na $(n \times T + (t-1) \times M \times K + (m-1) \times K + k)$ -ésima posição. A matriz 0 na coluna Y_{km}^t tem a mesma dimensão A_{km}^t e $\bar{I}$ tem dimensão $((n_k - n_{k-1} - 1) \times n)$ com valor 1 nas posições $j \times (n_{k-1} + j)$, $j = 1, \dots, n_k - n_{k-1} - 1$.

Na Tabela 13.2, $\bar{1}$ é um vetor unitário $(1, \dots, 1)$ com N_{mkt} posições, cada posição corresponde a um padrão de corte, para $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$. A coluna E representa o estoque dos objetos em que $E_k^t = (e_{k1}^{t-1} - e_{k1}^t, e_{k2}^{t-1} - e_{k2}^t, \dots, e_{kM}^{t-1} - e_{kM}^t)$, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$. A coluna R representa a variável de produção de itens, em que $R_k^t = (r_{k1}^t, r_{k2}^t, \dots, r_{kM}^t)$ para $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$.

13.3 Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe

Nesta seção, é aplicada a decomposição Dantzig-Wolfe ao modelo (13.16) - (13.26) em três diferentes contextos: decomposição por período, decomposição por máquina e decomposição por período e máquina. Nestas decomposições existem dois tipos de subproblemas: um associado a decomposição de Gilmore & Gomory (1961) (subproblema 1) e outro associado a decomposição Dantzig-Wolfe (subproblema 2). Os subproblemas do tipo 1 determinam os padrões de cortes para cada $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$.

Restrições do subproblema 1:

$$\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_{km}, \quad (13.28)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (13.29)$$

Subproblemas do tipo 2 determinam os planos de produção e estão descritos nas próximas seções de acordo com o tipo de decomposição.

13.3.1 Decomposição por período

Na decomposição por período existem T subproblemas, cada subproblema t define os planos de produção das M máquinas para o período t e podem ser descritos como seguem.

Restrições do subproblema do tipo 2 (para $t = 1, \dots, T$):

$$\sum_{k=1}^K (st_{km} z_{km}^t + vt_{km} r_{km}^t) \leq C_{mt}, m = 1, \dots, M, \quad (13.30)$$

$$r_{km}^t \leq M_{km}^t z_{km}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, \quad (13.31)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, \quad (13.32)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M. \quad (13.33)$$

Supondo que para todos os subproblemas todas as soluções sejam conhecidas, isto é todos os planos de produção de cada período, podemos definir os seguintes parâmetros.

Parâmetros:

- P_t : número de planos de produção referente ao período t , $t = 1, \dots, T$;
- $r_{km}^{tp_t}$: quantidade de objetos do tipo k produzidos na máquina m no período t de acordo com o plano de produção p_t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$;
- $z_{km}^{tp_t}$: definido como 1 se objetos do tipo k foram produzidos na máquina m , no período t e de acordo com o plano de produção p_t , 0, caso contrário, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$.

Além disso, considere as seguintes variáveis:

- $\bar{r}_t^{p_t}$: peso do plano de produção p_t no período t , $p_t = 1, \dots, P_t$, $t = 1, \dots, T$.

Assim, cada variável r_{km}^t e z_{km}^t pode ser reescrita como uma combinação convexa dos planos de produção referentes ao período t , para cada $t = 1, \dots, T$:

$$r_{km}^t = \sum_{p_t=1}^{P_t} r_{km}^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, \quad (13.34)$$

$$z_{km}^t = \sum_{p_t=1}^{P_t} z_{km}^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, \quad (13.35)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, \quad (13.36)$$

$$\bar{r}_t^{p_t} \geq 0, \text{ inteiro } p_t = 1, \dots, P_t. \quad (13.37)$$

Com a redefinição das variáveis r_{km}^t e z_{km}^t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$, o problema mestre pode ser definido como segue.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \bar{h}_{km} e_{km}^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{p_t=1}^{P_t} \sum_{k=1}^K stc_{km} z_{km}^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t} + \sum_{k=1}^K F_k e_{km}^0 \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} cl_{km} (b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jkm}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T, \end{aligned} \quad (13.38)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a :} \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_{kmt}} a_{ij} y_{jkm}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \\ & k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (13.39)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} r_{km}^{tp_t} \bar{r}_t^{p_t} + e_{km}^{t-1} - e_{km}^t = \sum_{j=1}^{N_{kmt}} y_{jkm}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.40)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, t = 1, \dots, T, \quad (13.41)$$

$$y_{jkm}^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.42)$$

$$\bar{r}_t^{p_t} \geq 0, \text{ inteiro}, p_t = 1, \dots, P_t, t = 1, \dots, T, \quad (13.43)$$

$$e_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 0, \dots, T, \quad (13.44)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (13.45)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (13.46)$$

A redefinição das variáveis r_{km}^t e z_{km}^t pelos planos de produção $\bar{r}_t^{p_t}$ no modelo (13.38) - (13.46) representa a seleção de um plano de produção para cada período t que seja suficiente para atender a necessidade de objetos a serem cortados para atender a demanda de acordo com as restrições (13.39). As restrições (13.40) acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. Restrições (13.41) são as restrições de convexidade, uma para cada período do horizonte de planejamento. Por fim, as restrições (13.42) - (13.46) definem a integralidade e não negatividade das variáveis.

13.3.2 Decomposição por máquina

Na decomposição por máquina existem M subproblemas, cada subproblema define os planos de produção de uma máquina nos T períodos do horizonte de planejamento. Os subproblemas podem ser descritos como seguem.

Restrições do subproblema do tipo 2 (para $m = 1, \dots, M$):

$$\sum_{k=1}^K (st_{km}z_{km}^t + vt_{km}r_{km}^t) \leq C_{mt}, t = 1, \dots, T, \quad (13.47)$$

$$r_{km}^t \leq M_{km}^t z_{km}^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (13.48)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (13.49)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \quad (13.50)$$

Suponha que para todos os subproblemas todas as soluções sejam conhecidas, isto é todos os planos de produção de cada máquina, podemos definir os seguintes parâmetros.

Parâmetros:

- P_m : número de planos de produção referente à máquina m , $m = 1, \dots, M$;
- $r_{km}^{tp_m}$: quantidade de objetos do tipo k produzidos na máquina m no período t de acordo com o plano de produção p_m , $k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, p_m = 1, \dots, P_m, m = 1, \dots, M$;
- $z_{km}^{tp_m}$: definido como 1 se objetos do tipo k foram produzidos na máquina m , no período t e de acordo com o plano de produção p_m , 0, caso contrário, $k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, p_m = 1, \dots, P_m, m = 1, \dots, M$.

Além disso, considere as seguintes variáveis:

- $\bar{r}_m^{p_m}$: peso do plano de produção p_m da máquina m , $p_m = 1, \dots, P_m, m = 1, \dots, M$.

Assim, cada variável r_{km}^t e z_{km}^t pode ser reescrita como uma combinação convexa dos planos de produção referentes à máquina m , para cada $m = 1, \dots, M$:

$$r_{km}^t = \sum_{p_m=1}^{P_m} r_{km}^{tp_m} \bar{r}_m^{p_m}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (13.51)$$

$$z_{km}^t = \sum_{p_t=1}^{P_t} z_{km}^{tp_m} \bar{r}_m^{p_m}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (13.52)$$

$$\sum_{p_m=1}^{P_m} \bar{r}_m^{p_m} \leq 1, \quad (13.53)$$

$$\bar{r}_m^{p_m} \geq 0, \text{ inteiro } p_m = 1, \dots, P_m. \quad (13.54)$$

Com a redefinição das variáveis r_{km}^t e z_{km}^t , $k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$ o problema mestre pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \bar{h}_{km} e_{km}^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{p_m=1}^{P_m} \sum_{k=1}^K st c_{km} z_{km}^{tp_m} \bar{r}_m^{p_m} + \sum_{k=1}^K F_k e_{km}^0 \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} cl_{km} (b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jkm}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T, \end{aligned} \quad (13.55)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a : } & \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_{kmt}} a_{ij} y_{jkm}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \\ & k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (13.56)$$

$$\sum_{p_m=1}^{P_m} r_{km}^{tp_m} \bar{r}_m^{p_m} + e_{km}^{t-1} - e_{km}^t = \sum_{j=1}^{N_{kmt}} y_{jkm}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.57)$$

$$\sum_{p_m=1}^{P_m} \bar{r}_m^{p_m} \leq 1, m = 1, \dots, M, \quad (13.58)$$

$$y_{jkm}^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.59)$$

$$\bar{r}_m^{p_m} \geq 0, \text{ inteiro}, p_m = 1, \dots, P_m, m = 1, \dots, M, \quad (13.60)$$

$$e_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 0, \dots, T, \quad (13.61)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (13.62)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (13.63)$$

A redefinição das variáveis r_{km}^t e z_{km}^t pelos planos de produção $\bar{r}_m^{p_m}$ no modelo (13.55) - (13.63) representa a seleção de um plano de produção para cada máquina m que seja suficiente para atender a necessidade de objetos a serem cortados para atender a demanda de acordo com as restrições (13.56). As restrições (13.57) acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. Restrições (13.41) são as restrições de convexidade, uma para cada máquina. Por fim, as restrições (13.59) - (13.63) definem a integralidade e não negatividade das variáveis.

13.3.3 Decomposição por período e máquina

Na decomposição por período e máquina existem $M \times T$ subproblemas do tipo 2, em que cada subproblema (m, t) define os planos de produção da máquina m no período t , para $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$. Os subproblemas podem ser descritos como seguem.

Restrições do subproblema 2 ($m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$):

$$\sum_{k=1}^K (st_{km} z_{km}^t + vt_{km} r_{km}^t) \leq C_{mt}, \quad (13.64)$$

$$r_{km}^t \leq M_{km}^t z_{km}^t, k = 1, \dots, K, \quad (13.65)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, \quad (13.66)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}. \quad (13.67)$$

Suponha que todas as soluções dos subproblemas do tipo 2 sejam conhecidas, isto é, todos os planos de produção de cada máquina e de cada período do horizonte de planejamento, então podemos definir os seguintes parâmetros.

Parâmetros:

- P_{mt} : número de planos de produção referente ao período t da máquina m , $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$;
- $r_{km}^{tp_{mt}}$: quantidade de objetos do tipo k é produzido no plano de produção p_{mt} da máquina m no período t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $p_{mt} = 1, \dots, P_{mt}$, $t = 1, \dots, T$;
- $z_{km}^{tp_{mt}}$: definido como 1 se objetos do tipo k foram produzidos no plano de produção p_{mt} da máquina m no período t , 0, caso contrário, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $p_{mt} = 1, \dots, P_{mt}$, $t = 1, \dots, T$.

Além disso, considere as seguintes variáveis:

- $\bar{r}_{mt}^{p_{mt}}$: peso do plano de produção p_{mt} da máquina m no período t , $p_{mt} = 1, \dots, P_{mt}$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$.

As variáveis r_{km}^t e z_{km}^t podem ser reescritas como uma combinação convexa dos planos de produção referente a máquina m e ao período t , isto é, para cada $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$:

$$r_{km}^t = \sum_{p_{mt}=1}^{P_{mt}} r_{km}^{tp_{mt}} \bar{r}_{mt}^{p_{mt}}, k = 1, \dots, K, \quad (13.68)$$

$$z_{km}^t = \sum_{p_{mt}=1}^{P_{mt}} z_{km}^{tp_{mt}} \bar{r}_{mt}^{p_{mt}}, k = 1, \dots, K, \quad (13.69)$$

$$\sum_{p_{mt}=1}^{P_{mt}} \bar{r}_{mt}^{p_{mt}} \leq 1, \quad (13.70)$$

$$\bar{r}_{mt}^{p_{mt}} \geq 0, \text{ inteiro } p_{mt} = 1, \dots, P_{mt}. \quad (13.71)$$

Neste caso os planos de produção de cada período t e máquina m são pontos extremos dos subproblemas. Assim, com a redefinição de r_{km}^t e z_{km}^t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$ o problema mestre é definido por:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \bar{h}_{km} e_{km}^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{p_{mt}=1}^{P_{mt}} \sum_{k=1}^K st c_{km} \bar{r}_{mt}^{p_{mt}} z_{km}^{tp_{mt}} + \sum_{k=1}^K F_k e_{km}^0 \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} cl_{km} (b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jkm}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T, \end{aligned} \quad (13.72)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a : } & \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_{kmt}} a_{ij} y_{jkm}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k, \\ & k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (13.73)$$

$$\sum_{p_{mt}=1}^{P_{mt}} r_{km}^{tp_{mt}} \bar{r}_{mt}^{p_{mt}} + e_{km}^{t-1} - e_{km}^t = \sum_{j=1}^{N_{kmt}} y_{jkm}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.74)$$

$$\sum_{p_{mt}=1}^{P_{mt}} \bar{r}_{mt}^{p_{mt}} \leq 1, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.75)$$

$$y_{jkm}^t \geq 0, \text{ inteiro}, j = 1, \dots, N_{kmt}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.76)$$

$$\bar{r}_{mt}^{tp_{mt}} \geq 0, \text{ inteiro}, p_{mt} = 1, \dots, P_{mt}, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, \quad (13.77)$$

$$e_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 0, \dots, T, \quad (13.78)$$

$$s_i^t \geq 0, \text{ inteiro}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T, \quad (13.79)$$

$$s_i^0 = 0, i = 1, \dots, n. \quad (13.80)$$

A redefinição das variáveis r_{km}^t e z_{km}^t pelos planos de produção $r_{mt}^{tp_{mt}}$ no modelo (13.72) - (13.80) representa a seleção de um plano de produção para cada máquina m e período t que seja suficiente para atender a necessidade de objetos a serem cortados para atender a demanda de acordo com as restrições (13.73). As restrições (13.74) acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. As restrições de convexidade são dadas em (13.75), uma para cada máquina e período do horizonte de planejamento. Por fim, as restrições (13.76) - (13.80) definem a integralidade e não negatividade das variáveis.

13.4 Heurísticas de Poltronieri et al. (2008)

Em Poltroniere et al. (2008) o modelo considerado é similar ao modelo (13.16) - (13.26), a diferença é que os autores consideram a demanda dos itens em peso. Assim, é necessário considerar o peso de cada objeto do tipo k com comprimento b_{km} , dado por Π_{km} , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e, também, o peso do item i dado por η_i , $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, K$. O conjunto de restrições extra que garante que peso total dos objetos produzidos seja suficiente para atender o peso dos itens demandados é dado como segue:

$$\sum_{m=1}^M \Pi_{km} r_{km}^t + \Pi_{km} e_{km}^{t-1} - \Pi_{km} e_{km}^t = D_k^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \quad (13.81)$$

D_k^t é o peso total de itens demandados do tipo k no período t , $t = 1, \dots, T$ mais uma perda,

isto é, $D_k^t = \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \eta_i d_i^t + \Theta$, em que Θ é a estimativa da perda. Os autores não consideram estoque inicial de objetos, porém nesta tese isto é considerado. Além disso, eles consideram custo de produção que não é considerado neste trabalho. Deste modo, exceto estas duas condições o modelo (13.16) - (13.26) mais o conjunto de restrições (13.81) é equivalente ao modelo apresentado em Poltroniere et al. (2008).

Para resolver o modelo os autores propõem duas heurística baseadas na relaxação lagrangiana das restrições (13.18), que são adicionadas a função objetivo (13.16) multiplicadas pelas variáveis duais ξ_{km}^t , $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$. A função lagrangiana é dada por:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \bar{h}_{km} e_{km}^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K stc_{km} z_{km}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K F_{km} e_{km}^0 + \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} cl_{km} (b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jkm}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T - \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} \xi_{km}^t (\sum_{j=1}^{N_{kmt}} y_{jkm}^t - r_{km}^t - e_{km}^{t-1} + e_{km}^t). \end{aligned}$$

Com a restrição que acopla o problema de corte de estoque e dimensionamento de lotes relaxada, é possível decompor a formulação estendida em dois subproblemas: um problema de corte e outro de dimensionamento de lotes. O problema de lotes e o problema de corte de estoque são dados como segue.

Problema de dimensionamento de lotes:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K [(\bar{h}_{km} - \xi_{km}^t) e_{km}^t + \xi_{km}^t e_{km}^{t-1}] + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K stc_{km} z_{km}^t + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K F_{km} e_{km}^0 \quad (13.82) \\ \text{sujeito a :} \quad & (13.81), (13.19), (13.20), (13.22), (13.23), (13.24). \quad (13.83) \end{aligned}$$

Problema de corte de estoque multiperíodo:

$$\text{minimize} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i s_i^t + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_{kmt}} [cl_{km} (b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) - \xi_{km}^t] y_{jkm}^t + \quad (13.84)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} cl_{km} s_i^T, \quad (13.85)$$

$$\text{sujeito a :} \quad (13.17), (13.18), (13.21), (13.25), (13.26). \quad (13.86)$$

As heurísticas consistem em resolver estes dois problemas iterativamente. A heurística Lote-Corte resolve primeiro o problema de dimensionamento de lotes e depois o problema de corte de estoque multiperíodo. Enquanto que a heurística Corte-Lote resolve primeiro o problema de corte de estoque multiperíodo e depois o problema de dimensionamento de lotes. Nestas heurísticas é necessário considerar um número máximo de iterações, dado por $\Lambda = 30$ (como

em Poltroniere et al. (2008)). Note que, o estoque inicial de objetos também foi considerado na implementação destas heurísticas, que é considerado na formulação de dimensionamento de lotes. A heurística Lote-Corte é dada como segue.

Heurística Lote-Corte

- 1 Faça as variáveis duais $\xi_{km}^t = 0$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$ e a estimativa da perda $\Theta = 0$.
- 2 Para $it = 0$ até A faça:
 - 2.1 Resolva o problema de dimensionamento de lotes e faça $D_k^t = (1 + \Theta) \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \eta_i d_i^t$, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$;
 - 2.2 Resolva o problema de corte de estoque multiperíodo com a disponibilidade fornecida no Passo 2.1. Se o problema de corte multiperíodo for infactível vá para o Passo 3;
 - 2.3 Atualize os multiplicadores de lagrange ξ_{km}^t , dados pelos multiplicadores simplex associados às restrições (13.18).
- 3 Faça $\Theta = \Theta + 0.1$. Se $\Theta < 1$, então volte ao Passo 2 e faça $it = it + 1$.
- 4 Escolha a melhor solução factível obtida no Passo 2. Se nenhuma solução factível foi obtida, o problema é declarado infactível.

No passo 2.1, como admitimos estoque inicial de objetos o problema de dimensionamento de lotes nunca será infactível. A heurística Corte-Lote é dada como segue.

Heurística Corte-Lote

- 1 Faça as variáveis duais $\xi_{km}^t = 0$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$ e a estimativa da perda $\Theta = 0$.
- 2 Para $it = 0$ até A faça:
 - 2.1 Resolva o problema de corte de estoque multiperíodo. Se $it = 0$ as restrições (13.18) são omitidas;
 - 2.2 Se a solução é factível faça $D_k^t = (1 + \Theta) \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_{kmt}} \Pi_{km} y_{jkm}^t$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e atualize os multiplicadores de lagrange ξ_{km}^t , dados pelos multiplicadores simplex associados às restrições (13.18);
 - 2.3 Senão faça $\Theta = \Theta + 0.1$. Se $\Theta \leq 1$ faça $D_k^t = (1 + \Theta) \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \eta_i d_i^t$, $k = 1, \dots, K$ e $t = 1, \dots, T$ e vá para o Passo 4, senão vá para o Passo 5.

- 4 Resolva o problema de dimensionamento de lotes, com D_k^t dados no Passo 2, obtendo o número de objetos produzidos (r_{km}^t) mais o estoque inicial de objetos (e_{km}^0), que são utilizadas no problema de corte de estoque multiperíodo. Faça $it = it + 1$.
- 5 Escolha a melhor solução factível obtida no Passo 2. Se nenhuma solução factível foi obtida, o problema é declarado infactível.

O problema de corte de estoque multiperíodo foi resolvido pela heurística Lote por Lote descrito em Silva (2006). Esta heurística consiste em substituir cada restrição em (13.18) por: $\sum_{j=1}^{N_{jkm}^t} y_{jkm}^t \leq r_{km}^t + e_{km}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$. Além disso, as variáveis de estoque de itens (s_i^t) não são consideradas, isto é, não existe estoque de itens para o problema acoplado. Deste modo, o problema pode ser decomposto em $K \times T$ problemas, cujas relaxações são resolvidas pelo método geração de colunas com subproblemas (geradores de padrões de corte) dados por problemas da mochila. Para cada k e t o subproblema é resolvido, em que são atualizados o número de objetos do tipo k cortados no período t (variáveis y_{jkm}^t) e o estoque dos objetos (e_{km}^t). Esta heurística foi utilizada em Poltroniere et al. (2008) para resolver o problema de corte de estoque multiperíodo.

13.5 Limitantes inferiores e geração de colunas

Esta seção descreve os limitantes inferiores para o problema acoplado com vários tipos de objetos e múltiplas máquinas para produzi-los. Para este problema apresentamos cinco tipos de relaxação:

1. Relaxação linear da formulação compacta (13.1) - (13.13);
2. Relaxação linear da formulação estendida (13.16) - (13.26);
3. Relaxação linear da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período (13.38) - (13.46);
4. Relaxação linear da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina (13.55) - (13.63);
5. Relaxação linear da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período e máquina (13.72) - (13.80).

O primeiro caso a relaxação é trivial, basta relaxar a integralidade das variáveis. O método geração de colunas para os demais casos estão descritos nas duas próximas seções.

13.5.1 Geração de colunas para a formulação estendida

Ao relaxar a condição de integralidade das variáveis $e_k^t, r_{km}^t, y_{jkm}^t, z_{km}^t, s_i^t$ é possível aplicar o método de geração de colunas para o problema (13.16) - (13.26). Em cada iteração do método são resolvidos $K \times M \times T$ subproblemas, dado por problemas da mochila, que determinam padrões de corte. Para determinar os custos reduzidos (um para cada período t e classe k), considere $(\pi_{(n_0+1)1}, \dots, \pi_{(n_1)1}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)1}, \dots, \pi_{(n_K)1}, \dots, \pi_{(n_0+1)T}, \dots, \pi_{(n_1)T}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)T}, \dots, \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.17). Considere, também, $(\sigma_{111}, \dots, \sigma_{K11}, \dots, \sigma_{1M1}, \dots, \sigma_{KM1}, \dots, \sigma_{11T}, \dots, \sigma_{K1T}, \dots, \sigma_{1MT}, \dots, \sigma_{KMT})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.18). O custo reduzido associado ao subproblema (k, m, t) ($k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$), que determina os padrões de corte é dado por:

$$c^{kmt} = cl_{km}b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i + \sigma_{kmt}.$$

Assim, para cada período t , máquina m e classe k o seguinte subproblema determina os padrões de corte, $k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i, \quad (13.87)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_{km}, \quad (13.88)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (13.89)$$

Se $c^{kmt} < 0$ a coluna é adicionada ao problema (13.16) - (13.26) relaxado. Caso contrário, $c^{kmt} \geq 0$ para todo $k = 1, \dots, K$ e $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$, então a solução ótima para o problema relaxado foi encontrada.

13.5.2 Geração de colunas para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe

Decomposição por período

Nesta seção, a condição de integralidade das variáveis $s_i^t, e_{km}^t, y_{jkm}^t$ e $\bar{r}_t^{Pt}$ do problema (13.38) - (13.46) são relaxadas para resolver o problema mestre restrito relaxado pelo método de geração de colunas. Nesta decomposição, a cada iteração do método são resolvidos $K \times M \times T$ subproblemas que determinam os padrões de corte (subproblema 1) e T subproblemas que determinam os planos de produção (subproblema 2). Para determinar os custos reduzidos destes dois tipos de subproblemas considere $(\pi_{(n_0+1)1}, \dots, \pi_{(n_1)1}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)1}, \dots,$

$\pi_{(n_K)1}, \dots, \pi_{(n_0+1)T}, \dots, \pi_{(n_1)T}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)T}, \dots, \pi_{(n_K)T}$) as variáveis duais associadas às restrições (13.39). Considere, também, $(\sigma_{111}, \dots, \sigma_{K11}, \dots, \sigma_{1M1}, \dots, \sigma_{KM1}, \dots, \sigma_{11T}, \dots, \sigma_{K1T}, \dots, \sigma_{1MT}, \dots, \sigma_{KMT})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.40) e $(\gamma_1, \dots, \gamma_T)$ as variáveis duais associadas às restrições (13.41). O custo reduzido associado ao subproblema (k, m, t) ($k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$), que determina os padrões de corte é dado por:

$$c_1^{kmt} = cl_{km}b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i + \sigma_{kmt}.$$

O custo reduzido associado ao subproblema t que determina os planos de produção é dado por:

$$c_2^t = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K stc_{km}z_{km}^t - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sigma_{kmt}r_{km}^t - \gamma_t.$$

Assim, para cada período t , máquina m e classe k o seguinte subproblema determina os padrões de corte, $k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i, \quad (13.90)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_{km}, \quad (13.91)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (13.92)$$

Para cada período t o seguinte subproblema determina os planos de produção, $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 2:

$$\text{minimize} \quad \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K stc_{km}z_{km}^t - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sigma_{kmt}r_{km}^t, \quad (13.93)$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{k=1}^K (st_{km}z_{km}^t + vt_{km}r_{km}^t) \leq C_{mt}, m = 1, \dots, M, \quad (13.94)$$

$$r_{km}^t \leq Mz_{km}^t, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, \quad (13.95)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, m = 1, \dots, M, \quad (13.96)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, m = 1, \dots, M, . \quad (13.97)$$

Se $c_1^{kmt} < 0$ e $c_2^t < 0$ para algum $k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$, a coluna é adicionada ao problema mestre restrito relaxado proveniente de (13.38) - (13.46). Caso contrário, a solução é ótima para o problema mestre relaxado.

Decomposição por máquina

Nesta seção, a condição de integralidade das variáveis s_i^t , e_{km}^t , y_{jkm}^t e $\bar{r}_m^{p_m}$ do problema (13.55) - (13.63) são relaxadas para resolver o problema mestre restrito relaxado pelo método de geração de colunas. Nesta decomposição, a cada iteração do método são resolvidos $K \times M \times T$ subproblemas que determinam os padrões de corte (subproblema 1) e M subproblemas que determinam os planos de produção (subproblema 2). Para determinar os custos reduzidos destes dois tipos de subproblemas considere $(\pi_{(n_0+1)1}, \dots, \pi_{(n_1)1}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)1}, \dots, \pi_{(n_K)1}, \dots, \pi_{(n_0+1)T}, \dots, \pi_{(n_1)T}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)T}, \dots, \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.56). Considere, também, $(\sigma_{111}, \dots, \sigma_{K11}, \dots, \sigma_{1M1}, \dots, \sigma_{KM1}, \dots, \sigma_{11T}, \dots, \sigma_{K1T}, \dots, \sigma_{1MT}, \dots, \sigma_{KMT})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.57) e $(\gamma_1, \dots, \gamma_M)$ as variáveis duais associadas às restrições (13.58). O custo reduzido associado ao subproblema (k, m, t) ($k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T$), que determina os padrões de corte é dado por:

$$c_1^{kmt} = cl_{km}b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i + \sigma_{kmt}.$$

O custo reduzido ao subproblema t que determina os planos de produção é dado por:

$$c_2^m = \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K stc_{km}z_{km}^t - \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sigma_{kmt}r_{km}^t - \gamma_m.$$

Assim, para cada período t , máquina m e classe k o seguinte subproblema determina os padrões de corte, $k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i, \quad (13.98)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_{km}, \quad (13.99)$$

$$a_i \geq 0, \text{ inteiro}, i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (13.100)$$

Para cada máquina m o seguinte subproblema determina os planos de produção, $m = 1, \dots, M$.

Subproblema 2:

$$\text{minimize} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K stc_{km}z_{km}^t - \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sigma_{kmt}r_{km}^t, \quad (13.101)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{k=1}^K (st_{km}z_{km}^t + vt_{km}r_{km}^t) \leq C_{mt}, t = 1, \dots, T, \quad (13.102)$$

$$r_{km}^t \leq Mz_{km}^t, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T, \quad (13.103)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T, \quad (13.104)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro}, t = 1, \dots, T, . \quad (13.105)$$

Se $c_1^{kmt} < 0$ e $c_2^m < 0$ para algum $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$, a coluna é adicionada ao problema mestre restrito relaxado proveniente de (13.55) - (13.63). Caso contrário, a solução é ótima para o problema mestre relaxado.

Decomposição por período e máquina

Nesta seção, a condição de integralidade das variáveis s_i^t , e_{km}^t , y_{jkm}^t e r_{mt}^{tpmt} do problema (13.72) - (13.80) são relaxadas para resolver o problema mestre restrito relaxado pelo método de geração de colunas. Nesta decomposição, a cada iteração do método são resolvidos $K \times M \times T$ subproblemas que determinam os padrões de corte (subproblema 1) e T subproblemas que determinam os planos de produção (subproblema 2). Para determinar os custos reduzidos destes dois tipos de subproblemas considere $(\pi_{(n_0+1)1}, \dots, \pi_{(n_1)1}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)1}, \dots, \pi_{(n_K)1}, \dots, \pi_{(n_0+1)T}, \dots, \pi_{(n_1)T}, \dots, \pi_{(n_{K-1}+1)T}, \dots, \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.73). Considere, também, $(\sigma_{111}, \dots, \sigma_{K11}, \dots, \sigma_{1M1}, \dots, \sigma_{KM1}, \dots, \sigma_{11T}, \dots, \sigma_{K1T}, \dots, \sigma_{1MT}, \dots, \sigma_{KMT})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.74) e $(\gamma_{11}, \dots, \gamma_{M1}, \dots, \gamma_{1T}, \dots, \gamma_{MT})$ as variáveis duais associadas às restrições (13.75). O custo reduzido associado ao subproblema (k, m, t) ($k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$), que determina os padrões de corte é dado por:

$$c_1^{kmt} = cl_{km}b_{km} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i + \sigma_{kmt}.$$

O custo reduzido ao subproblema t que determina os planos de produção é dado por:

$$c_2^{mt} = \sum_{k=1}^K stc_{km}z_{km}^t - \sum_{k=1}^K \sigma_{kmt}r_{km}^t - \gamma_{mt}.$$

Assim, para cada período t , cada máquina m e cada classe k o seguinte subproblema determina os padrões de corte, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + l_i)a_i, \quad (13.106)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_i \leq b_{km}, \quad (13.107)$$

$$0 \leq a_i, \text{ inteiro, } i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k. \quad (13.108)$$

Para cada máquina m e período t o seguinte subproblema determina os planos de produção, $m = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, T$.

Subproblema 2:

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^K st_{km} z_{km}^t - \sum_{k=1}^K \sigma_{kmt} r_{km}^t, \quad (13.109)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{k=1}^K (st_{km} z_{km}^t + vt_{km} r_{km}^t) \leq C_{mt}, \quad (13.110)$$

$$r_{km}^t \leq M z_{km}^t, k = 1, \dots, K, \quad (13.111)$$

$$z_{km}^t \in \{0, 1\}, \quad (13.112)$$

$$r_{km}^t \geq 0, \text{ inteiro.} \quad (13.113)$$

Se $c_1^{kmt} < 0$ e $c_2^{mt} < 0$ para algum $k = 1, \dots, K$, $m = 1, \dots, M$ e $t = 1, \dots, T$, a coluna é adicionada ao problema mestre restrito relaxado proveniente de (13.26) - (13.79). Caso contrário, a solução é ótima para o problema mestre relaxado.

13.6 Resultados computacionais

Nesta seção são descritos resultados computacionais para os modelos apresentados neste capítulo. Os métodos do tipo geração de colunas foram implementados em C/C++ e as modelagens matemáticas resolvidas com o auxílio do CPLEX 12.4. Para resolver os problemas da mochila foi implementado um método *branch-and-bound* baseado no método de Gilmore & Gomory (1961). Os algoritmos foram executados em um computador Intel Core i7 com 3.20 GHz e 16 Gbyte de memória. Para os modelos que foram resolvidos pelo pacote CPLEX o número de processadores foi limitado em quatro. Os dados foram gerados com base nos dados de uma indústria de polpa e papel portuguesa descritos na Seção 11.5.1. Entretanto, foram consideradas duas máquinas para produzir os objetos. A máquina 1 tem os dados de acordo com a Seção 11.5.1, porém a capacidade de máquina é dada por $C_{1t} = 12$. A máquina 2 tem capacidade dada por $C_{2t} = 12$ e produz objetos com comprimento dado por $b_{k2} = 550$. Os tempos de produção de objetos na máquina 2 são proporcionais ao da máquina 1, dados por $vt_{k2} = vt_{k1} \times 550/650$, os demais valores são definidos de acordo com as equações definidas na Seção 11.5.1 para problemas com uma máquina.

Na Seção 13.6.2, as heurísticas Corte-Lote e Lote-Corte de Poltroniere et al. (2008) são comparadas com as soluções factíveis obtidas a partir dos modelos apresentados. As heurísticas foram reimplementada de acordo com a Seção 13.4, em que para os problemas de corte foi implementado um método geração de colunas com subproblema resolvido por um método *branch-and-bound* e o problema mestre resolvido pelo CPLEX. Os problemas de dimensionamento de lotes também foram resolvidos pelo CPLEX, sendo que para cada resolução o tempo computacional foi limitado em 2 minutos e 4 processadores disponíveis, neste tempo o CPLEX encontrou solução factível para todos os problemas com gap médio de 2% para a heurística Corte-Lote e 2,81% para heurística Lote-Corte. Entretanto, os autores resolveram o

problema de dimensionamento de lotes por uma heurística. Assim, não consideramos o tempo computacional da reimplementação das heurísticas de Poltroniere et al. (2008), pois o tempo computacional é menor ao resolver os problemas de dimensionamento de lotes heurísticamente que resolvê-los pelo CPLEX.

13.6.1 Limitantes inferiores

A cinco relaxações lineares apresentadas em 13.5 foram comparadas com a relaxação linear da formulação estendida resolvida pelo método geração de colunas. O gap é dado por: $100 \times \frac{f_{FE} - f}{f_{FE}}$ (%), em que f_{FE} é o valor da função objetivo ótima para a formulação estendida relaxada e f é o valor da função objetivo da formulação compacta relaxada ou da formulação estendida com alguma das decomposições Dantzig-Wolfe relaxada. Para a formulação compacta, o limitante superior de objetos cortados $\bar{N}_{kmt}$ é dado pelo número de padrões homogêneos do tipo k necessários para atender a demanda total de todos os períodos do tipo k utilizando apenas objetos provenientes da máquina m . A Tabela 13.3 apresenta os resultados computacionais da formulação compacta relaxada, a Tabela 13.4 apresenta os resultados da formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período (formulação estendida + DW período) e a Tabela 13.5 apresenta os resultados para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina (formulação estendida + DW máquina) e por máquina e período (formulação estendida + DW máquina e período). As tabelas apresentam o gap médio, o tempo em segundos (t(s)), o número médio de objetos utilizados (objetos), a porcentagem da perda média (% perda), o número médio de estoque inicial de objetos (e0) e o número médio de estoque final de objetos (eT). Para os métodos de geração de colunas, as Tabelas 13.4 e 13.5 apresentam o número médio de iterações (it).

Tabela 13.3: Resultados da formulação compacta relaxada - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.

T/K	gap	t(s)	%perda	objetos	e0	eT
3/4	99,99	2,71	0,00	81,85	0,00	0,00
3/8	99,99	6,09	0,00	165,91	0,00	0,00
3/12	96,75	9,85	0,00	294,33	9,99	0,00
5/4	99,99	7,17	0,00	136,37	0,00	0,00
5/8	99,99	10,21	0,00	296,78	0,00	0,00
5/12	98,93	21,95	0,00	414,22	2,69	0,00
10/4	99,98	31,99	0,00	295,04	0,00	0,00
10/8	99,99	64,30	0,00	575,86	0,00	0,00
10/12	97,96	90,87	0,00	889,32	14,65	0,00
15/4	99,99	82,72	0,00	474,12	0,00	0,00
15/8	99,99	81,21	0,00	864,50	0,00	0,00
15/12	97,59	128,51	0,00	1357,39	21,01	0,00
20/4	99,99	66,61	0,00	531,63	0,00	0,00
20/8	99,99	146,31	0,00	1114,23	0,00	0,00
20/12	96,03	299,71	0,00	1799,63	55,45	0,00

Tabela 13.4: Resultados dos métodos de geração de colunas - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.

	Formulação estendida						Formulação estendida + DW por período						
T/K	t(s)	it	%perda	objetos	e0	eT	gap	t(s)	it	%perda	objetos	e0	eT
3/4	0,31	6,80	2,41	85,65	0,00	0,00	0,00	3,04	7,40	2,25	74,88	0,00	0,28
3/8	0,49	9,20	2,44	171,38	0,00	0,00	-0,11	5,67	11,00	2,52	156,12	0,05	2,27
3/12	0,78	8,90	3,32	299,49	19,16	0,00	-5,51	9,76	14,00	3,13	281,51	34,08	6,99
5/4	0,33	7,50	2,21	139,00	0,00	0,00	0,00	4,66	8,20	2,43	118,57	0,00	0,34
5/8	0,83	10,40	2,28	304,61	0,00	0,00	-0,08	10,80	13,10	2,46	281,84	0,00	3,62
5/12	1,35	11,00	2,23	418,73	11,41	0,00	-4,73	18,33	15,90	2,50	396,41	20,06	3,73
10/4	0,79	9,80	1,15	296,93	0,00	0,00	0,00	11,21	9,90	1,19	250,17	0,00	0,00
10/8	1,63	11,50	2,46	597,69	0,43	0,00	-0,01	24,24	16,20	2,54	540,60	0,46	4,22
10/12	2,95	11,10	2,63	902,06	30,10	0,00	-0,38	47,88	20,20	2,79	834,47	31,76	4,35
15/4	0,98	8,40	1,73	489,29	0,00	0,00	0,00	17,06	10,40	1,84	431,17	0,00	0,00
15/8	2,66	11,30	2,67	899,64	0,00	0,00	0,00	34,63	15,80	2,76	814,52	0,00	0,00
15/12	5,46	11,70	2,31	1370,33	38,22	0,00	-0,20	96,01	25,70	2,35	1264,71	39,55	0,33
20/4	1,46	10,40	1,54	544,80	0,00	0,00	0,00	27,67	12,10	1,55	464,31	0,00	0,00
20/8	3,75	10,70	2,80	1149,94	0,00	0,00	-0,02	69,08	19,40	2,85	1050,87	0,00	0,00
20/12	7,67	11,00	2,31	1826,79	73,82	0,00	-0,15	127,05	25,90	2,37	1686,39	75,10	0,00

Tabela 13.5: Resultados dos métodos de geração de colunas - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.

	Formulação estendida + DW por máquina							Formulação estendida + DW por máquina e período						
T/K	gap	t(s)	it	%perda	objetos	e0	eT	gap	t(s)	it	%perda	objetos	e0	eT
3/4	0,00	2,34	8,00	2,35	77,89	0,00	1,06	0,00	4,29	6,90	2,26	70,99	0,00	0,00
3/8	-4,54	4,07	11,10	2,54	160,25	5,18	7,04	-0,04	6,97	10,40	2,38	144,19	0,00	0,00
3/12	-8,64	7,72	14,40	3,11	283,53	40,42	3,60	-6,24	10,99	13,90	3,16	270,08	32,95	0,00
5/4	0,00	2,44	8,50	2,20	131,04	0,00	2,99	0,00	7,21	8,10	2,06	107,71	0,00	0,00
5/8	-0,28	4,98	11,20	2,45	298,14	0,00	3,49	-0,01	11,27	10,50	2,25	264,83	0,00	0,00
5/12	-8,08	9,18	15,60	2,33	406,61	32,19	3,57	-2,43	18,85	14,70	2,26	377,09	16,40	0,00
10/4	-0,01	3,69	11,30	1,23	286,44	0,00	1,72	0,00	18,20	10,20	1,15	233,34	0,00	0,00
10/8	-0,13	7,33	14,70	2,57	587,78	0,76	16,50	-0,01	25,67	12,40	2,55	517,58	0,44	0,00
10/12	-4,14	15,18	18,50	2,63	886,15	55,24	21,27	-0,16	45,32	17,00	2,58	795,22	30,85	0,00
15/4	0,00	4,58	11,80	1,88	480,53	0,00	1,02	0,00	23,70	9,00	1,61	401,22	0,00	0,00
15/8	-0,05	10,39	16,30	2,80	889,00	0,00	22,64	0,00	36,99	12,10	2,65	764,11	0,00	0,00
15/12	-4,00	22,14	20,70	2,29	1350,11	71,54	37,71	-0,17	74,02	17,90	2,23	1212,14	39,34	0,00
20/4	0,00	6,34	14,40	1,61	536,38	0,00	3,40	0,00	36,17	10,40	1,43	443,47	0,00	0,00
20/8	-0,28	17,03	21,70	2,87	1142,06	1,83	9,75	-0,02	65,35	14,60	2,75	984,75	0,00	0,00
20/12	-2,44	31,98	22,40	2,47	1806,76	97,99	21,86	-0,11	125,83	20,40	2,31	1613,68	74,85	0,00

Os resultados mostram que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina fornece o melhor limitante inferior para os grupos com $K = 8$ e $K = 12$, com tempo computacional menor que as demais formulações com decomposição Dantzig-Wolfe, porém maior que a formulação estendida. Entretanto, a formulação relaxada que utilizou menos objetos e obteve menos perda foi a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e período e a formulação que obteve o menor tempo computacional foi a formulação estendida. Apesar da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornecer o melhor limitante, a formulação teve pior administração entre o número de objetos iniciais necessários e a maior sobra de objetos no último período. A formulação compacta obtém o pior gap, quase 100% comparado com a formulação estendida.

13.6.2 Soluções factíveis

Para a formulação estendida e formulação estendida com as decomposições Dantzig-Wolfe, ao final do método geração de colunas as variáveis foram redefinidas como inteiras e resolvidas pelo CPLEX 12.4. Deste modo, uma solução factível pode ser obtida para cada uma das formulações. Para determinar a solução inteira, o tempo computacional foi limitado em 10 minutos. O gap é dado por $100 \times \frac{f-LB}{f}$ (%), em que LB é o melhor limitante inferior encontrado entre os

cinco modelos e f é o valor da solução factível encontrada. A Tabela 13.6 mostra os resultados obtidos com as heurísticas Corte-Lote e Lote-Corte. A Tabela 13.7 apresenta os resultados da formulação compacta (13.1) - (13.13). As Tabelas 13.8 e 13.9 apresentam os resultados dos métodos de geração de colunas. Nenhum dos métodos apresentou soluções factíveis para todos os exemplos analisados, sendo o número de exemplos resolvidos para cada grupo T/K representados nas tabelas por resol. Os demais parâmetros avaliados seguem a mesma notação da subseção anterior.

As formulações propostas obtiveram menor gap e perda que as heurísticas de Corte-Lote e Lote-Corte. Apenas os grupos 10/8, 10/12, 15/12, 20/8, 20/12 que a formulação compacta obteve perdas maiores que as heurísticas Corte-Lote e Lote-Corte. Entretanto, devido a estratégia utilizada para obter soluções factíveis a partir dos modelos, o número de soluções factíveis obtidas foi menor. A perda média geral obtida com as heurísticas Corte-Lote e Lote-Corte foi um pouco maior que 13%. Enquanto que a formulação compacta resolvida pelo CPLEX teve uma perda média geral pouco maior que 10%, porém os métodos de geração de colunas para as formulações apresentadas tiveram perda menor que 4%. Para os exemplos com $K = 4$, $T = 3, 5$ e 10 todos os modelos propostos e as heurísticas forneceram soluções factíveis. Para estes exemplos a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e período forneceu a menor perda e utilizou menos objetos para atender a demanda. Entretanto, a formulação estendida obteve o menor gap e mostrou ter melhor controle na administração de produção de objetos (estoque final nulo e menor utilização de objetos no período inicial).

Tabela 13.6: Resultados das heurísticas de Poltroniere et al. (2008).

T/K	Lote-Corte			Corte-Lote		
	resolv	gap	%perda	resolv	GAP	%perda
3/4	10	82,07	12,48	10	81,10	11,98
3/8	5	87,11	14,27	10	83,63	13,93
3/12	10	81,03	15,29	10	80,27	14,26
5/4	10	83,14	13,14	10	80,99	12,11
5/8	4	84,39	14,91	10	83,98	13,23
5/12	8	88,03	15,16	9	87,84	14,97
10/4	10	89,73	10,55	10	89,24	10,31
10/8	5	85,79	13,14	9	81,57	12,96
10/12	8	86,17	15,61	10	86,17	15,62
15/4	9	83,41	10,74	10	83,17	10,18
15/8	3	90,19	13,35	8	79,44	13,27
15/12	8	87,01	15,25	10	87,57	14,91
20/4	7	84,68	10,55	9	85,05	10,19
20/8	3	87,12	12,42	9	80,72	12,58
20/12	9	87,91	15,96	9	88,23	15,81

Ao considerar apenas as formulações e métodos propostos neste capítulo, tem-se que a formulação estendida obteve o menor gap, exceto o grupo 3/4 em que a formulação compacta obteve o menor gap e perda, porém não foi discrepante. Além disso, a formulação estendida teve melhor controle da produção e estoque de objetos, utilizando menos estoque inicial de objetos. A formulação estendida com decomposição por máquina resolvida por geração de colunas e o problema mestre restrito inteiro resolvido pelo CPLEX obteve mais soluções factíveis. As formulações estendida com decomposição Dantzig-Wolfe forneceram a menor perda em relação a formulação estendida e compacta. Pode-se concluir que é necessário considerar estratégias de arredondamento de modo que aumente o número de soluções factíveis obtidas de boa qualidade.

Tabela 13.7: Resultados da formulação compacta - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.

T/K	resolv	gap	t(s)	%perda	objetos	e0	eT
3/4	10	23,69	601,34	3,04	87,10	0,00	0,00
3/8	10	35,17	602,71	3,65	176,40	2,10	0,20
3/12	8	37,07	604,86	5,40	295,50	25,75	0,00
5/4	10	29,57	603,37	3,01	142,70	0,00	0,00
5/8	7	55,90	607,99	6,27	291,86	2,57	0,29
5/12	6	69,31	609,85	9,23	443,33	42,17	0,33
10/4	10	62,58	614,88	3,17	314,60	0,90	0,30
10/8	6	73,72	622,79	17,80	726,00	120,83	23,67
10/12	6	84,66	643,77	15,92	1002,33	119,17	0,00
15/4	10	62,54	661,61	5,83	528,20	1,00	0,50
15/8	6	83,90	698,82	13,42	996,83	100,50	0,33
15/12	3	87,66	728,73	20,87	1528,33	252,00	0,00
20/4	10	72,07	683,13	8,30	637,70	54,90	0,00
20/8	7	88,71	750,77	30,07	7146,29	5862,43	31,57
20/12	1	84,72	759,72	16,80	1557,00	24,00	0,00

Tabela 13.8: Resultados das formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.

T/K	Formulação estendida							Formulação estendida + DW período						
	resol	gap	t(s)	%perda	objetos	e0	eT	resol	gap	t(s)	%perda	objetos	e0	eT
3/4	10	25,58	125,26	3,29	87,30	0,00	0,00	10	40,80	194,85	3,17	78,80	22,60	16,20
3/8	10	25,15	388,50	3,26	173,50	0,20	0,00	10	53,07	547,21	3,16	160,00	89,60	22,20
3/12	10	18,04	600,78	4,11	301,90	23,60	0,00	10	44,51	609,76	3,84	284,30	185,70	12,50
5/4	10	20,78	362,03	2,68	140,80	0,00	0,00	10	31,18	424,97	2,69	123,80	18,20	43,40
5/8	10	19,40	600,83	2,81	307,20	0,00	0,00	10	46,57	551,35	2,81	283,80	112,20	19,90
5/12	6	13,18	601,22	2,93	393,83	9,17	0,00	9	47,23	617,93	2,83	394,00	209,22	18,67
10/4	10	13,01	600,79	1,31	298,10	0,00	0,00	10	24,94	611,21	1,20	244,60	18,40	23,30
10/8	9	10,75	601,57	2,76	579,33	1,00	0,00	10	29,74	624,24	2,69	553,30	114,40	49,20
10/12	1	15,66	601,98	3,35	722,00	10,00	0,00	3	37,93	640,47	3,02	716,33	254,67	27,67
15/4	10	6,71	600,98	1,85	490,80	0,00	0,00	10	15,34	617,06	1,80	435,20	22,40	30,60
15/8	6	10,88	602,56	3,12	849,33	1,00	0,00	7	23,14	633,54	2,89	775,14	120,43	38,00
15/12	0	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-
20/4	10	5,72	541,94	1,64	546,80	0,00	0,00	10	9,20	567,98	1,38	463,90	13,00	33,40
20/8	4	21,63	602,53	4,49	980,75	96,50	0,00	2	11,11	647,18	5,32	773,50	84,50	120,00
20/12	0	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-

Tabela 13.9: Resultados das formulações estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e período - múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas.

T/K	Formulação estendida + DW máquina							Formulação estendida + DW por máquina e período						
	resol	gap	t(s)	%perda	objetos	e0	eT	resol	gap	t(s)	%perda	objetos	e0	eT
3/4	10	41,90	134,83	3,29	79,70	27,00	27,90	10	37,01	150,13	3,09	75,50	16,90	33,30
3/8	10	56,56	485,45	3,31	165,30	99,70	16,10	10	51,23	498,97	3,28	151,80	74,10	17,70
3/12	10	47,02	607,72	4,01	289,30	206,40	8,40	10	43,39	610,99	3,94	270,90	168,40	19,40
5/4	10	36,94	401,13	2,85	134,20	27,50	45,40	10	28,73	1381,60	2,63	115,60	11,40	44,40
5/8	10	54,55	604,98	2,89	295,10	169,20	26,50	10	44,66	611,27	2,80	277,40	92,10	9,10
5/12	10	53,70	609,18	2,60	403,20	257,20	12,30	8	43,97	617,96	2,78	373,50	171,88	19,25
10/4	10	38,49	603,69	1,42	289,70	48,30	51,70	10	22,59	618,20	1,27	242,70	14,10	22,70
10/8	10	43,21	607,33	2,81	582,30	243,10	20,20	10	26,47	625,67	2,77	526,00	92,20	40,90
10/12	6	42,15	614,09	3,11	874,00	461,00	9,83	5	31,71	2200,93	3,01	760,40	239,00	54,00
15/4	10	26,56	604,58	2,16	481,20	68,50	127,70	10	13,07	623,70	1,77	415,20	16,20	17,60
15/8	9	37,95	610,38	2,76	874,11	325,11	61,00	9	20,06	636,44	2,60	757,67	92,00	26,67
15/12	2	40,35	617,64	3,46	1219,00	561,00	47,50	0	-	-	-	-	-	-
20/4	10	19,78	546,88	1,61	542,80	52,40	227,90	10	9,09	576,74	1,36	450,10	9,60	27,80
20/8	8	34,75	616,52	3,49	1064,75	350,50	158,50	6	14,26	654,80	3,83	916,33	79,00	51,83
20/12	2	40,46	627,71	3,28	1512,50	629,50	14,00	0	-	-	-	-	-	-

13.7 Conclusões

Neste capítulo o problema de corte de estoque acoplado com dimensionamento de lotes com múltiplas máquinas foi estudado. As máquinas produzem diferentes tipos de objetos, que devem ser cortados em itens menores de modo que atenda a demanda. Este problema foi proposto em Poltroniere et al. (2008), para o qual os autores propuseram uma formulação matemática equivalente a formulação estendida e para resolvê-lo propuseram duas heurísticas: Heurística

Lote-Corte e Heurística Corte-Lote. Neste trabalho foram propostos limitantes inferiores para o problema e quatro formulações matemáticas. As formulações matemáticas são denominadas por: formulação compacta, formulação estendida, formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período, formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina, formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período e máquina. As quatro últimas formulações tiveram a condição de integralidade relaxada e foram resolvidas pelo método geração de colunas, fornecendo os limitantes inferiores para o problema. Soluções factíveis são obtidas pela resolução do problema mestre restrito obtido ao final do método geração de colunas utilizando o CPLEX.

Os resultados computacionais mostraram que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período e máquina forneceu os melhores limitantes inferiores e a formulação compacta forneceu os piores limitantes. Pode-se observar que resolver o problema mestre restrito obtido ao final do método geração de colunas, com as variáveis associadas às colunas redefinidas como inteiras, não é uma estratégia eficiente para obter soluções factíveis. O CPLEX não conseguiu determinar soluções factíveis para todos os exemplos. A formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina obteve o maior número de exemplos resolvidos. A formulação estendida obteve soluções com o menor gap, enquanto que as formulações estendida com decomposição Dantzig-Wolfe forneceram soluções com menor perda. Comparando com as heurísticas de Poltroniere et al. (2008), com as metodologias propostas neste capítulo foi possível diminuir gap de otimalidade e a perda.

Capítulo 14

Conclusões

Nesta segunda parte do trabalho apresentamos o problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao problema de dimensionamento de lotes. O principal objetivo do trabalho foi propor novas formulações matemáticas baseadas em decomposições e analisar suas características e desempenho.

O problema integrado considerado neste trabalho foi proposto em Poltroniere et al. (2008), em que os autores propuseram uma formulação matemática e duas heurísticas baseada em relaxação lagrangiana. O problema envolve múltiplas máquinas para produzir objetos que são cortados de modo que se obtenham os itens finais. As máquinas que produzem os objetos têm capacidade limitada, tempo e custo de preparação de máquina. Também é preciso decidir padrões de corte para os objetos, permitindo estoque intermediário de itens e objetos. As decisões devem ser tomadas de modo que a demanda de cada período do horizonte de planejamento seja exatamente atendida.

Nesta tese, o problema foi reformulado em quatro novos modelos matemáticos baseados em formulações e decomposições que são clássicas para o problema de corte e para o problema de dimensionamento de lotes. As formulações foram denominadas:

- (i) *Formulação compacta*, o qual considera uma formulação de designação para o problema de corte de estoque unidimensional na formulação integrada;
- (ii) *Formulação estendida*, que considera a formulação de corte de estoque unidimensional de Gilmore & Gomory (1961) para o problema de corte de estoque;
- (iii) *Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período*;
- (iv) *Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina*;
- (v) *Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período e máquina*, que integra as decomposições (iii) e (iv).

A formulação estendida foi considerada em Poltroniere et al. (2008) e também é utilizada na literatura em trabalhos sobre problemas de corte de estoque bidimensional. Além disso, consideramos duas simplificações para o problema acoplado, apresentadas nos Capítulos 11 e 12, por considerar apenas um tipo de objeto e uma máquina para produzi-los, bem como,

considerar vários tipos de objetos e uma máquina para produzi-los, respectivamente. Nestes dois últimos casos consideramos apenas as formulações compacta, estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período.

Os resultados computacionais mostram, como esperado, que a formulação compacta fornece os piores limitantes, pois em problemas de corte unidimensional a formulação compacta fornece limitantes fracos. Limitantes mais apertados são obtidos com a formulação estendida para problemas com múltiplas máquinas e vários tipos de objetos. No caso de problemas com apenas uma máquina, a formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe praticamente fornecem os mesmos limitantes. Para obter soluções factíveis a partir dos modelos, as variáveis do problema mestre restrito obtido ao final do método geração de colunas (para as formulações estendidas) foram redefinidas como inteiras e resolvidas pelo pacote CPLEX. Entre todas as formulações, a formulação estendida obteve o melhor gap e maior controle na produção dos objetos e as formulações com decomposição Dantzig-Wolfe fornecem soluções com menor perda. Entretanto, resolver os problemas mestre restrito inteiro das formulações estendidas obtidos após a geração de colunas e a formulação compacta pelo CPLEX não foi possível obter solução factível para todos os exemplos devido à dimensão do problema.

Visto que *softwares* de otimização têm dificuldades para resolver o problema mestre restrito inteiro das formulações estendidas e estendidas com decomposição Dantzig-Wolfe, sugere-se como pesquisa futura o desenvolvimento de heurísticas de arredondamento eficientes que tenham como objetivo reduzir perda e o gap de otimalidade das soluções. Além disso, estas formulações estendidas com decomposições Dantzig-Wolfe podem ser facilmente utilizadas para resolver problemas de corte bidimensional, sendo necessário apenas modificar o gerador de padrões de corte.

Capítulo 15

Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi estudar os problemas da mochila compartimentada unidimensional e bidimensional e variações do problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes. Apesar destes problemas serem discutidos separadamente, eles envolvem problemas de corte e foi utilizado o método geração de colunas para resolvê-los.

Neste trabalho foi proposta uma nova heurística para o problema da mochila compartimentada unidimensional, denominada por geração de colunas dinâmica, bem como, realizado testes computacionais com modelos e heurísticas da literatura. Os modelos e métodos analisados são: modelo não-linear inteiro; modelo linear inteiro; modelo reformulado (relaxação linear resolvida pelo método geração de colunas); geração de colunas estática; geração de colunas dinâmica. Os resultados computacionais mostram que o modelo linear inteiro garante a solução ótima com baixo tempo computacional para a maioria dos exemplos. Apenas poucos exemplos que é necessário algumas horas para resolver o problema da mochila compartimentada e, neste caso, o uso de heurística é mais eficiente. A heurística geração de colunas estática fornece soluções de boa qualidade em menos de 4 segundos. Entretanto, a geração de colunas dinâmica melhora o gap em torno de 10 vezes, encontrando a solução ótima em alguns casos, em que o pior tempo computacional foi de 18 minutos.

O problema da mochila compartimentada bidimensional foi proposto neste trabalho. Para o problema distinguimos dois casos que dependem do segundo estágio de corte na placa (horizontal ou vertical). Para estes casos foram propostas quatro formulações matemáticas de programação linear inteira mista e uma heurística baseada no método grafo E/OU. Além disso, o modelo reformulado descrito para o caso unidimensional também foi utilizado para resolver o caso bidimensional. Assim como no caso unidimensional, a relaxação do modelo é resolvida pelo método geração de colunas, porém os subproblemas são diferentes. Para resolver os subproblemas (problemas de corte restrito 2-estágios guilhotinado não-exato) foram propostas as heurísticas $Z\bar{L}$ horizontal e Z vertical, utilizadas nas primeiras iterações do método geração de colunas. Para determinar a solução ótima do modelo reformulado relaxado (problema mestre relaxado) é necessário resolver o subproblema na otimalidade e, para isso, foram realizadas al-

gumas modificações nos modelos de Furini et al. (2012) e Lodi & Monaci (2003). Para obter soluções factíveis a partir do problema reformulado, ao final do método geração de colunas o problema mestre restrito tem suas variáveis redefinidas como inteiras e é resolvido pelo CPLEX.

Os resultados computacionais mostram que o modelo reformulado fornece os melhores limitantes superiores, quando comparado ao modelo super compartimentos bidimensionais e a relaxação linear do modelo compartimentado horizontal, modelo compartimentado das prateleiras, modelo compartimentado vertical e modelo compartimentado das colunas. As soluções factíveis obtidas a partir do problema mestre restrito, com o subproblema resolvido na otimalidade, são boas com gaps similares aos dos modelos compartimentados horizontal, vertical e das colunas. Entretanto, o tempo computacional do modelo reformulado é menor quando os subproblemas são resolvidos pela adaptação do modelo de Furini et al. (2012) para todos os grupos de exemplos, exceto o grupo 12. Quando o subproblema é resolvido pela adaptação do modelo de Lodi & Monaci (2003) o tempo computacional é maior, para problemas com número de itens do tipo G. A heurística grafo E/OU para o problema da mochila compartimentada forneceu soluções um pouco piores, porém o tempo computacional é extremamente baixo. O modelo das prateleiras teve o pior desempenho entre as abordagens propostas.

Para o problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes consideramos três variações denominadas por: problema acoplado com uma máquina e um tipo de objeto; problema acoplado com uma máquina e múltiplos tipos de objetos; problema acoplado com múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas. Este último problema foi proposto em Poltroniere et al. (2008). Para os problemas acoplados com uma máquina e um tipo de objeto e uma máquina e múltiplos tipos de objetos foram propostos três formulações matemáticas denominadas por: formulação compacta; formulação estendida; formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período. Para o problema acoplado com múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas além das três formulações anteriores foram propostas a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por máquina e período. A formulação estendida e as formulações estendidas com decomposição Dantzig-Wolfe foram resolvidas pelo método geração de colunas. O problema mestre restrito obtido ao final do método geração de colunas teve as variáveis redefinidas como inteiras e resolvidos pelos CPLEX, como no problema da mochila compartimentada.

Para os problemas acoplados com uma máquina e um tipo de objeto e com uma máquina e múltiplos tipos de objeto, os resultados computacionais mostram que a formulação compacta relaxada fornece limitantes fracos. A formulação estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornecem limitantes equivalentes. Em termos de solução factível, em geral, a formulação compacta tem o pior desempenho e a formulação estendida teve o melhor desempenho. Para o problema acoplado com múltiplos tipos de objetos e múltiplas máquinas os resultados computacionais mostraram que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe por período e máquina forneceu os melhores limitantes inferiores. A formulação estendida for-

neceu soluções com o menor gap de otimalidade e as formulações estendida com decomposição Dantzig-Wolfe a menor perda.

Referências Bibliográficas

- ALEM, D. J. *Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2011.
- ALEM, D. J.; MORABITO, R. Production planning in furniture settings via robust optimization. *Computers & Operations Research*, v. 39, n. 2, p. 139 – 150, 2012.
- ALVAREZ-VALDÉS, R.; PARAJÓN, A.; TAMARIT, J. M. A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un)constrained two-dimensional cutting problems. *Computers and Operations Research*, v. 29, p. 925–947, 2002.
- ARBIB, C.; MARINELLI, F. Integrating process optimization and inventory planning in cutting-stock with skiving option: An optimization model and its application. *European Journal of Operational Research*, v. 163, n. 3, p. 617–630, 2005.
- DE CARVALHO, J. LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 253–273, 2002.
- CARVALHO, J. M. V.; RODRIGUES, A. J. G. A computer-based interactive approach to a 2-stage cutting stock problem. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, v. 32, n. 4, p. 243–252, 1994.
- CARVALHO, J. M. V.; RODRIGUES, A. J. G. An lp-based approach to a 2-stage cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, v. 84, n. 3, p. 580–589, 1995.
- CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 30–44, 1977.
- CORREIA, M. H.; OLIVEIRA, J. F.; FERREIRA, J. S. Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers & Operations Research*, v. 31, n. 8, p. 1223–1243, 2004.
- CUI, Y. Generating optimal t-shaped cutting patterns for rectangular blanks. *Journal of Engineering Manufacture*, v. 218(B), p. 857–866, 2004.
- CUI, Y.; HUANG, B. Reducing the number of cuts in generating three-staged cutting patterns. *European Journal of Operational Research*, v. 218, n. 2, p. 358 – 365, 2012.

- CUI, Y.; LIU, Z. T-shape homogenous block patterns for the two-dimensional cutting problem. *Journal of Global Optimization*, v. 41, n. 2, p. 267–281, 2008.
- DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. Decomposition principle for linear-programs. *Operations Research*, v. 8, n. 1, p. 101–111, 1960.
- DESAULNIERS, G.; DESROSIERS, J.; SOLOMON, M. M. *Column generation*. Springer, 2005.
- DOLAN, E. D.; MORE, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling – survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v. 99, n. 2, p. 221 – 235, 1997.
- DYCKHOFF, H.; FINKE, U. *Cutting and packing in production and distribution: Typology and bibliography*. Heidelberg: Springer-Verlag., 1992.
- FAALAND, B. H. The multiperiod knapsack problem. *Operations Research*, v. 29, n. 3, p. 612 – 615, 1992.
- FARLEY, A. Mathematical-programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *Journal of the Operational Research Society*, v. 39, n. 1, p. 41–53, 1988.
- FERREIRA, J. S.; NEVES, M. A.; CASTRO, P. F. A 2-phase roll cutting problem. *European Journal of Operational Research*, v. 44, n. 2, p. 185–196, 1990.
- FURINI, F.; MALAGUTI, E.; DURÁN, R. M.; PERSIANI, A.; TOTH, P. A column generation heuristic for the two-dimensional two-staged guillotine cutting stock problem with multiple stock size. *European Journal of Operational Research*, v. 218, n. 1, p. 251–260, 2012.
- GHIDINI, C. T. L. S. *Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2008.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849–859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear-programming approach to the cutting stock problem - part 2. *Operations Research*, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965.
- GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, v. 174, n. 1, p. 509–521, 2006.

- GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M.; ARENALES, M. N. A linear optimization approach to the combined production planning model. *Journal of the Franklin Institute*, v. 348, n. 7, p. 1523 – 1536, 2011.
- GRAMANI, M. C. N.; FRANCA, P. M.; ARENALES, M. N. A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, v. 119, n. 2, p. 219–227, 2009.
- HAESSLER, R. W. Heuristic programming solution to a nonlinear cutting stock problem. *Management Science*, v. 17, n. 12, p. 793–802, 1971.
- HAESSLER, R. W. Solving the 2-stage cutting stock problem. *Omega-International Journal Of Management Science*, v. 7, n. 2, p. 145–151, 1979.
- HENDRY, L.; FOK, K.; SHEK, K. A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, n. 1, p. 38–47, 1996.
- HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972.
- HIFI, M.; M'HALLAH, R. Strip generation algorithms for constrained two-dimensional two-staged cutting problems. *European Journal Of Operational Research*, v. 172, n. 2, p. 515–527, 2006.
- HOTO, R.; ARENALES, M. N.; MACULAN, N. The one dimensional compartmentalised knapsack problem: A case study. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1183–1195, 2007.
- HOTO, R.; MACULAN, N.; BORSSOI, A. A study of the compartmentalized knapsack problem with additional restrictions. *IEEE Latin America Transactions*, v. 8, n. 3, p. 269–274, 2010.
- JOHNSON, M. P.; RENNICK, C.; ZAK, E. Skiving addition to the cutting stock problem in the paper industry. *SIAM Review*, v. 39, n. 3, p. 472–483, 1997.
- JOHNSTON, R. E. Dimensional efficiency in cable manufacturing problems and solutions. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 16, n. 1, p. 19 – 35, 1992.
- JOHNSTON, R. E.; KHAN, L. R. Bounds for nested knapsack problems. *European Journal of Operational Research*, v. 81, n. 1, p. 154 – 165, 1995.
- LEÃO, A.; SANTOS, M. O.; HOTO, R. H.; ARENALES, M. N. The constrained compartmentalized knapsack problem: mathematical models and solution methods. *European Journal of Operational Research*, v. 212, n. 3, p. 455–463, 2011.

- LEÃO, A. A. S. *Métodos geração de colunas para problemas de corte em duas fases*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo, 2009.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 241 – 252, 2002.
- LODI, A.; MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming*, v. 94, p. 257–278, 2003.
- MARQUES, F. P.; ARENALES, M. N. The constrained compartmentalised knapsack problem. *Computers & Operations Research*, v. 34, n. 7, p. 2109–2129, 2007.
- MENON, S.; SCHRAGE, L. Order Allocation for Stock Cutting in the Paper Industry. *Operations Research*, v. 50, n. 2, p. 324–332, 2002.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An and/or-graph approach. *European Journal of Operational Research*, v. 94, p. 548–560, 1996.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. N.; ARCARO, V. F. An and-or-graph approach for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, v. 58, p. 263–271, 1992.
- NONAS, S.; THORSTENSON, A. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 120, n. 2, p. 327–342, 2000.
- NONAS, S. L.; THORSTENSON, A. Solving a combined cutting-stock and lot-sizing problem with a column generating procedure. *Computers & Operations Research*, v. 35, n. 10, p. 3371–3392, 2008.
- PISINGER, D. Core problems in Knapsack algorithms. *Operations Research*, v. 47, n. 4, p. 570–575, 1999.
- POLTRONIERE, S. C.; POLDI, K. C.; BRAGION TOLEDO, F. M.; ARENALES, M. N. A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, v. 157, n. 1, p. 91–104, 2008.
- PUCHINGER, J.; RAIDL, G. R. Models and algorithms for three-stage two-dimensional bin packing. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1304 – 1327, 2007.
- REINDERS, M. Cutting stock optimization and integral production planning for centralized wood processing. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 16, n. 1, p. 37 – 55, 1992.

- RESPÍCIO, A.; CAPTIVO, M. E.; RODRIGUES, A. J. A dss for production planning and scheduling in the paper industry. In: *International Conference on Decision Making and Decision Support in the Internet Age*, University College Cork, Cork, Ireland, 2002, p. 298 – 308.
- SANTOS, M. O.; ALMADA-LOBO, B. Integrated pulp and paper mill planning and scheduling. *Computers & Industrial Engineering*, v. 63, p. 1–12, 2012.
- SANTOS, S. G.; DE ARAUJO, S. A.; RANGEL, S. Integrated cutting machine programming and lot sizing in furniture industry. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 3, n. 1, p. 1 – 17, 2011.
- SHACHNAI, H.; TAMIR, T. On two class-constrained versions of the multiple knapsack problem. *Algorithmica*, v. 29, n. 3, p. 442–467, 2001a.
- SHACHNAI, H.; TAMIR, T. Polynomial time approximation schemes for class-constrained packing problems. *Journal of Scheduling*, v. 4, n. 6, p. 313–338, 2001b.
- SHACHNAI, H.; TAMIR, T. Tight bounds for online class-constrained packing. *Theoretical Computer Science*, v. 321, n. 1, p. 103–123, 2004.
- SILVA, E.; ALVELOS, F.; DE CARVALHO, J. V. An integer programming model for two- and three-stage two-dimensional cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 205, n. 3, p. 699 – 708, 2010.
- SILVA, S. *Otimização do processo de corte integrado à produção de bobinas - modelo e métodos de solução*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2006.
- VANCE, P. Branch-and-price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem. *Computational Optimization and Applications*, v. 9, n. 3, p. 211–228, 1998.
- VANDERBECK, F. A nested decomposition approach to a three-stage, two-dimensional cutting-stock problem. *Management Science*, v. 47, n. 6, p. 864–879, 2001.
- VANZELA, M.; RANGEL, S.; ARAUJO, S.; CARRAVILLA, M. Um estudo do problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque para uma fábrica de móveis de pequeno porte. In: *XLIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional/XVI Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.
- WÄSCHER, G.; HAUßNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, p. 1109–1130, 2007.
- XAVIER, C. E.; MIYAZAWA, F. K. The class constrained bin packing problem with applications to video-on-demand. *Theoretical Computer Science*, v. 393, n. 1-3, p. 240–259, 2008a.

- XAVIER, C. E.; MIYAZAWA, F. K. A one-dimensional bin packing problem with shelf divisions. *Discrete Applied Mathematics*, v. 156, n. 7, p. 1083–1096, 2008b.
- XAVIER, C. E.; MIYAZAWA, F. K. A note on dual approximation algorithms for class constrained bin packing problems. *Rairo-Theoretical Informatics and Applications*, v. 43, n. 2, p. 239–248, 2009.
- XAVIER, E.; MIYAZAWA, F. Approximation schemes for knapsack problems with shelf divisions. *Theoretical Computer Science*, v. 352, n. 1-3, p. 71–84, 2006.
- YANASSE, H.; HOTO, R.; SPOLADOR, F.; ARENALES, M. Um Modelo Linear para o Problema da Mochila Compartimentada. In: *IX ONPCE - Oficina Nacional de problemas de Corte e Empacotamento*, 2005.
- ZAK, E. J. Modeling multistage cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 313–327, 2002a.
- ZAK, E. J. Row and column generation technique for a multistage cutting stock problem. *Computers & Operations Research*, v. 29, n. 9, p. 1143–1156, 2002b.
- ÖZPEYNIRCI, S.; AZIZOGLU, M. A lagrangean relaxation based approach for the capacity allocation problem in flexible manufacturing systems. *Journal of the Operational Research Society*, v. 61, n. 5, p. 872–877, 2010.