SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 15.01.2004

Assinatura: *Ana Paula Jampaio Jr/ps-*

**Uma estratégia para correção de uma
característica de qualidade de uma peça
devido à variação de temperatura**

Paulo Leonardo Sirimarco Gomes

Orientador: *Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP – São Carlos
Janeiro/2004

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior

Prof. Dr. Josemar Rodrigues

Prof. Dr. Heleno Bonfarine

The image shows three handwritten signatures in blue ink, each positioned on a horizontal line. The first signature is a large, stylized 'D' with a vertical stroke. The second signature is a smaller, more compact 'D' with a horizontal stroke. The third signature is a cursive, flowing signature that appears to be 'H. Bonfarine'.

À minha família e à minha noiva

Agradecimentos

Neste momento, gostaria de agradecer as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho. Agradeço especialmente:

- Ao meu orientador Prof. Dorival Leão pela dedicação, paciência e por todo seu incentivo nos momentos de dúvidas.
- À empresa KS Pistões pelo financiamento deste trabalho. Particularmente, aos senhores Ghünter, Ednan e Juscelino pela cumplicidade e receptividade.
- Aos meus pais Paulo e Sônia e aos meus irmãos Alessandro e Sabine pelo apoio e pela compreensão, principalmente nas horas mais difíceis.
- À minha noiva Glaucia por todo o amor, compreensão nas horas de nervosismo e pelos sonhos divididos.
- Ao instituto de ciências matemáticas e de computação da USP São Carlos pelos recursos oferecidos para o desenvolvimento deste trabalho.
- A Deus por permitir a conclusão deste trabalho.

Muito obrigado a todos!

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos um algoritmo para compensarmos as medições do diâmetro de uma peça devido à variação de temperatura ambiente para sistemas de medição que medem por comparação. Para isto, aplicamos os modelos de regressão com erros nas variáveis com o objetivo de determinar os coeficientes de correção no diâmetro úteis no algoritmo. Numa primeira etapa, realizamos dois experimentos, um utilizando da estufa para simular uma situação natural de variação de temperatura e assim obtermos informações prévias do comportamento do diâmetro da peça em função da temperatura. Em um outro experimento onde a temperatura das peças foram obtidas em função da variação natural de temperatura do setor de realização do experimento. Numa segunda etapa, apresentamos o modelo de regressão linear sem intercepto com erros nas variáveis para situação onde conhecemos a variância associada ao erro cometido pelo termômetro utilizado para medir a temperatura das peças. Na terceira etapa, propomos duas abordagens para tratar o problema, abordagem Bayesiana e Clássica. Numa quarta etapa, comparamos as aproximações para as estimativas dos coeficientes do modelo de regressão com erros nas variáveis obtidos via algoritmo de Gibbs e EM.

Abstract

In this work, we creative an algorithm to compensate the measurement of the diameter of a piece due to change of the environment temperature for systems of measurement that measures by comparison. For this, we applied regression models with errors in the variables in order to determine the coefficients of correction in the useful diameter in the algorithm. In a first step, we do two experiments, one using the thermal heating to simulate a natural situation of change the temperature and then we get prior information of diameter behavior of the piece in action of temperature. In another experiment the pieces temperature was get in function to natural change of temperature of the site of running experiment. In the second step, we present the linear regression model without intercept with errors in variables to situation where we know the error variance commit to thermometer used to measure the pieces temperature. In the thirst step, we propose two boards to treat the problem. Bayesian board and Classic. In the quarter step, we compare the approach for the coefficients estimates of the regression model with errors in variables got through Gibbs and EM algorithms.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Descrição da Peça e da Característica da Qualidade	3
1.2	Célula de Medição e o procedimento de ajuste	3
1.3	Equação de Medição	5
1.4	Estratégia de Correção	6
2	Delineamento Experimental	13
2.1	Experimento Preliminar	14
2.2	Segundo Experimento	20
3	Modelo de Regressão com erro nas variáveis intercepto nulo: Relação Ultraestrutural	27
3.1	Notação Matricial	30
3.2	Introdução de Variáveis Latentes	36
4	Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV)	45
4.1	Algoritmo EM (Esperança e Maximização)	45
4.2	Matriz de Informação Esperada de Fisher	48
5	Estimador de Bayes	53
5.1	Métodos Bayesianos	53
5.2	Análise Bayesiana e Algoritmo de Simulação	54
6	Aplicação: Correção no Diâmetro do Furo do Pistão devido à Variação de Temperatura	59
6.1	Informações Iniciais	59

6.1.1	Hiperparâmetros para análise Bayesiana	60
6.1.2	Valores Iniciais	63
6.2	Resultados	64
6.2.1	Análise Clássica	64
6.2.2	Análise Bayesiana	68
6.3	Análise de Robustez	74
6.3.1	Robustez do Algoritmo EM	74
6.3.2	Robustez das Estimativas Bayesianas	75
7	Discussão	77
8	Propostas futuras	83
9	Apêndices	85
9.1	Certificado de calibração	85
9.2	Algoritmo de Gibbs Sampling	86
9.3	Critério de convergência de Gelman e Rubin	88
9.4	Dados do Pré e segundo experimentos	90
9.5	Dados da segunda fase da validação	97
	Bibliografia	103

Lista de Figuras

1.1	Diâmetro do Furo	4
1.2	Procedimento de Medição	6
2.1	Termômetro de Contato	14
2.2	Estufa	15
2.3	Padrão	15
2.4	Scatter Plot padrão	17
2.5	Scatter Plot peça	17
2.6	Box-Plot padrão	18
2.7	Box-Plot peça	18
2.8	Dados padrão	21
2.9	Dados peça	21
2.10	Dados transformados padrão	22
2.11	Dados transformados peça	23
6.1	Equação estimada - dados dos padrões	67
6.2	Equação estimada - dados dos pistões	67
6.3	Equação estimada - dados dos padrões	70
6.4	Equação estimada - dados dos pistões	70
6.5	Iterações para β_{Pad}	72
6.6	Iterações para β_{Pist}	72
6.7	Aproximação da densidade a posteriori marginal de β_{Pist}	73
6.8	Aproximação da densidade a posteriori marginal de β_{Pad}	73
7.1	Erros de compensação térmica	80

7.2	Impacto da implantação dos coeficientes obtidos via análise clássica	81
9.1	Certificado de calibração do termômetro Fluke	85

Lista de Tabelas

2.1	Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para padrão.	19
2.2	Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para peça.	19
2.3	Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para padrão.	24
2.4	Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para peça.	24
2.5	Sumarização dos dados transformados de diâmetro e temperatura para padrão.	25
2.6	Sumarização dos dados transformados de diâmetro e temperatura para peça.	25
6.1	Informações preliminares dos dos parâmetros β e σ^2 para os dados dos padrões.	61
6.2	Informações preliminares dos dos parâmetros β e σ^2 para os dados dos pistões.	61
6.3	Informações preliminares dos parâmetro σ_V^2 para os dados dos padrões e pistões.	62
6.4	Resultados da análise clássica do modelo de regressão com erros para os dados para os padrões.	65
6.5	Resultados da análise clássica do modelo de regressão com erros para os dados para os pistões.	65
6.6	Sumários a posteriori do modelo de regressão com erros para os dados para os padrões.	68
6.7	Sumários a posteriori do modelo de regressão com erros para os dados para os pistões.	69
6.8	Estimativas Bayesianas para diferentes valores de σ_δ^2	71
6.9	Análise de Robustez do algoritmo EM para os dados dos padrões.	74
6.10	Análise de Robustez do algoritmo EM para os dados dos pistões.	75

6.11	Análise de Robustez das aproximações para as estimativas Bayesinas do modelo de regressão com erros para os dados dos padrões.	75
6.12	Análise de Robustez das aproximações para as estimativas Bayesinas do modelo de regressão com erros para os dados dos pistões.	76
7.1	Valores de referência obtidos a 20 ^o C.	79
9.1	Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Padrões - Pré-experimento. . . .	90
9.2	Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Pistões (Peças) - Pré-experimento.	92
9.3	Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Padrões - Segundo-experimento.	93
9.4	Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Pistões (Peças) - Segundo-experimento.	95
9.5	Dados referentes ao Diâmetro do Furo e temperatura dos Padrões transformados - Segundo-experimento.	96
9.6	Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Pistões Transformados (Peças) - Segundo-experimento.	98

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento da indústria de manufatura tem exigido de sistemas de medição a garantia de medidas cada vez mais exatas. Atualmente, diversas empresas da área automobilística tem utilizado tolerâncias para algumas características de peças na escala de microns (10^{-6} metros). Infelizmente, em tal escala, pequenas variações na temperatura ambiente provocam alterações significativas nas características das peças. Neste trabalho, pretendemos desenvolver um algoritmo para a correção da característica da qualidade em função da temperatura ambiente.

O comportamento das características das peças em relação às variações da temperatura ambiente é estudado neste trabalho via regressão com erros nas variáveis. Esta classe de modelos tem sido aplicada em diversas situações onde o erro das medições é significativa, ver Fuller (1987) e Van Ness (1999). Aqui, vamos montar um experimento onde variamos a temperatura das peças e medimos a sua correspondente característica. Como a temperatura é determinada por um termômetro e a característica da qualidade por uma célula automática, que medem com erro (como todo equipamento de medição), utilizamos os modelos de regressão com erros nas variáveis.

A preocupação de se estar medindo corretamente faz com que as empresas desenvolvam novas técnicas para testar os seus sistemas de medição, pois este sistema é um dos grandes medidores de qualidade de seus produtos. Caso o sistema de medição não seja confiável, não podemos confiar nos produtos que são aprovados ou reprovados por este sistema. Neste trabalho, o sistema de medição de interesse é a célula automática que

mede o diâmetro do furo de um pistão.

Este sistema de medição é responsável pela medição e classificação de pistões a partir das características de interesse. A KS Pistões é a maior produtora mundial de Pistões. Esta produz peças com destino a motores à gasolina, álcool e diesel. A estrutura da fábrica é dividida em quatro setores: Fundição, Usinagem, Tratamento Térmico e Controle de Qualidade. Atualmente, as células automáticas encontram-se na Usinagem e no Controle de Qualidade. Muitas divergências entre medições realizadas entre estes dois setores e a alta variabilidade das medições dentro dos setores reforçaram a hipótese de que este sistema de medição necessitava de melhoria.

Quando realizamos medições a partir da célula automática no Controle de Qualidade ou na Usinagem, deparamos com muitas influências que geram erros nos resultados obtidos, de modo que não exista medição perfeita, ou seja, sem erros. Aspectos tecnológicos forçam que qualquer sistema de medição construído resulte imperfeito: suas dimensões, forma geométrica, material, propriedades elétrica, pneumática, etc, não correspondem exatamente ao ideal. As leis e princípios físicos que regem o funcionamento da célula automática nem sempre são perfeitamente lineares como uma análise simplista poderia supor. Podendo também ocorrer desgaste e deterioração de partes do equipamento, agravando ainda mais a qualidade do sistema de medição.

Perturbações externas como condições ambientais podem provocar erros, alterando diretamente o sistema de medição e fazendo com que o comportamento do sistema de medição se afaste ainda mais do ideal. Neste trabalho estamos preocupados com as variações ambientais, no Controle de Qualidade e na Usinagem, que chegam a variar durante um mesmo dia em 15°C .

A preocupação principal com a variação térmica é o fato de que os limites de especificação associados às características da qualidade foram projetados para a temperatura 20°C . Porém, a temperatura ambiente pode variar entre 10°C e 35°C .

Diante deste problema, propomos um algoritmo para realizarmos correções nas características de qualidade para a temperatura de referência de 20°C . Com isto, precisamos corrigir todas as leituras para a temperatura de referência de 20°C . Embora a

temperatura ambiente possa variar entre 10°C e 35°C no dia-a-dia de trabalho.

1.1 Descrição da Peça e da Característica da Qualidade

Neste trabalho o produto de interesse é o pistão para carros. Quando se produz um pistão deve-se ter em mente quais são as propriedades finais que este deve possuir para desempenhar suas funções adequadamente. Uma das características de interesse do pistão é o diâmetro do furo. Isto decorre do fato que o pistão deve encaixar perfeitamente ao pino que segura a biela. Caso isto não ocorra, o bom funcionamento do motor pode ser comprometido, podendo até ocasionar a quebra do motor.

Dentre os vários tipos de pistões fabricados pela KS Pistões, estudamos o pistão do tipo *PB086144*, que é utilizado em carros com motores de gasolina com motores 1.6. Este pistão quando fabricado deve atender às especificações associadas à característica do diâmetro do furo. As especificações de projeto são:

- Limite Inferior de Especificação: 20007,0 microns
- Valor Nominal de Desenho: 20004,5 microns
- Limite Superior de Especificação: 20002,0 microns

Deve-se salientar que os limites de especificação associados ao diâmetro do furo são valores projetados para 20°C . A figura 1.1 representa uma unidade do produto pistão *PB086144* e sua respectiva característica de qualidade (diâmetro do furo) indicada apropriadamente.

1.2 Célula de Medição e o procedimento de ajuste

A célula de medição realiza suas medições sob princípio de um relógio comparador. Medir o diâmetro de uma peça por comparação é determinar a diferença do diâmetro exis-

Figura 1.1: Diâmetro do Furo

tente entre ela e o padrão calibrado. No entanto, a célula de medição ao contrário do relógio comparador comum de funcionamento mecânico, realiza suas medições de forma eletrônica. Isto possibilita uma leitura rápida, indicando instantaneamente a medida no display em microns.

Antes que a Célula de Medição comece a medir e classificar os pistões, ela deve passar por um procedimento de ajuste. Este procedimento consiste em: ajustar os vários parâmetros da célula de medição (pressão de saída, trimplot, etc) e a realizar o zeramento do equipamento de medição.

Para melhor compreensão do esquema de medição e posteriormente do algoritmo de correção, inserimos o conceito de zeramento. Este consiste em passar o padrão na célula e informar o seu respectivo valor calibrado à 20°C . O padrão possui um papel importante na realização das medições por possuir valor "conhecido" à 20°C . O padrão é calibrado por um laboratório de metrologia e consequentemente, o laboratório determina o valor do padrão a 20°C e seu respectivo desvio padrão (incerteza). No item a seguir, mostramos que o esquema de medição da célula depende do valor do padrão à 20°C ,

tornando as medições realizadas pela célula rastreáveis em relação a um padrão nacional (INMETRO).

1.3 Equação de Medição

Para propor o algoritmo de correção, precisamos conhecer o esquema de medição da célula. Ela realiza medições segundo o princípio de um relógio comparador. Desde que a célula é zerada por um padrão e informado o valor do padrão à 20°C, o esquema matemático de medição da célula funciona da seguinte forma:

$$D_{CT} = D_{Pad20^{\circ}C} + \Delta_{Deslocamento}, \quad (1.1)$$

onde

- D_{CT} : representa o diâmetro do furo na temperatura T medido pela célula;
- $D_{Pad20^{\circ}}$: representa o valor do padrão determinado por calibração à 20°C;
- $\Delta_{Deslocamento}$: representa a diferença entre o diâmetro do pistão e do padrão na temperatura T .

A célula apenas mede a diferença entre o diâmetro do pistão e padrão na temperatura ambiente e então, somamos através de software o valor do padrão à 20°C. A Figura 1.2 nos mostra um operador realizando a medição de um pistão na célula.

Conforme Figura 1.2, peça é alocada no espigão, onde a pressão exercida pela peça é transformada em tensão elétrica por um princípio físico denominado Piezoelétrico. Esta tensão elétrica é medida por um sensor e digitalizada. O valor da tensão é transformado em milímetros por um modelo de regressão inversa, definido na fase de ajuste da célula.

Devemos salientar que a diferença de comportamento térmico entre o pistão e o padrão é consequência do pistão ser de alumínio e o padrão ser de aço. Conhecimentos a

Figura 1.2: Procedimento de Medição

priori da física nos garantem que o alumínio dilata mais do que o aço quando submetidos a mesma temperatura.

1.4 Estratégia de Correção

Para entender o problema existente neste esquema de medição e motivar a estratégia de correção para o esquema de medição em 1.1, vamos considerar uma ilustração numérica. Consideramos uma peça onde conhecemos o seu diâmetro do furo à 20°C e diâmetro do furo do padrão também à 20°C . Além disso, sabemos que o diâmetro do furo para o pistão aumenta $2\text{microns}/^{\circ}\text{C}$ enquanto que para o padrão aumenta $1\text{micron}/^{\circ}\text{C}$.

A seguir apresentamos o valor diâmetro do furo para pistão e o padrão à 20°C , para ilustrar a estratégia de ajuste.

- Pistão: 18998 microns
- Padrão: 19000 microns

Utilizando a equação de medição da célula em 1.1, temos analiticamente que

$$D_{C20} = D_{Pad20^{\circ}C} + (D_{Pist20^{\circ}C} - D_{Pad20^{\circ}C}). \quad (1.2)$$

Assim, o resultado final da medição do diâmetro do furo para cada pistão em 20°C a partir da célula é

- $19000 + (18998 - 19000) = 18998$.

Podemos notar que a célula apenas mede a diferença entre a peça e o padrão e adiciona ao valor do padrão à 20°C. Esta situação climática de 20°C é a ideal, pois obtemos a medição do diâmetro do furo do pistão na mesma temperatura em que os limites de especificação foram projetados. Além disso, o esquema de medição em 1.1 preserva os verdadeiros valores do furo. Ou seja, para a temperatura de referência de 20°C o esquema de medição da célula não necessita de uma estrutura de correção.

Agora, supomos que pistão e padrão estejam ambos a 15°C. Vamos simular como o esquema de medição em 1.1 realiza suas medições. Primeiro, calculamos quanto o diâmetro da peça e do padrão contraíram com a queda de temperatura de 20°C para 15°C. Para isto, conhecimentos à priori sobre a relação da dilatação do diâmetro do furo em função da temperatura garantem que esta relação pode ser aproximada de forma linear. A relação linear para pistão e padrão são apresentados a seguir.

$$D_{PistT} = D_{Pist20^{\circ}C} + \beta_{Pist} * (T - 20) \quad (1.3)$$

onde,

- D_{PistT} : representa o diâmetro do furo do pistão na temperatura T ;
- $D_{Pist20^{\circ}}$: representa o valor do diâmetro do furo do pistão a 20°C;
- β_{Pist} : representa a taxa de mudança do diâmetro do furo do pistão quando ocorre a mudança de uma unidade na temperatura.

Similarmente, para o diâmetro do furo do padrão, temos:

$$D_{PadT} = D_{Pad20^{\circ}C} + \beta_{Pad} * (T - 20) \quad (1.4)$$

onde,

- D_{PadT} : representa o diâmetro do furo do padrão na temperatura T ;
- $D_{Pad20^{\circ}C}$: representa o valor do diâmetro do furo para o padrão a $20^{\circ}C$;
- β_{Pad} : representa a taxa de mudança do diâmetro do furo do padrão quando ocorre a mudança de uma unidade na temperatura.

Para este exemplo estamos assumindo que $\beta_{Pist} = 2$ e $\beta_{Pad} = 1$. Assim, os diâmetros da peça e padrão são dados por:

- Pistão: $18998 + 2 * (15 - 20) = 18988$.
- Padrão: $19000 + 1 * (15 - 20) = 18995$.

Através da Equação 1.1, temos que

$$D_{C15} = D_{Pad20^{\circ}C} + (D_{Pist15^{\circ}C} - D_{Pad15^{\circ}C}) \quad (1.5)$$

onde,

- D_{C15} : representa o diâmetro obtido pela célula na temperatura $T = 15^{\circ}C$.

Utilizando as Equações 1.4 e 1.3, obtemos que

$$D_{CT} = D_{Pad20^{\circ}C} + (D_{Pist20^{\circ}C} - D_{Pad20^{\circ}C}) - \beta_{Pad} * (15 - 20) + \beta_{Pist} * (15 - 20). \quad (1.6)$$

Assim, o diâmetro da peça obtido pela célula automática na temperatura de $15^{\circ}C$ é dado por:

- Pistão: $19000 + (18988 - 18995) = 18993 = 19000 + (18998 - 19000) + (-10 + 5) = 19000 - 2 - 5$

Note que nesta situação climática de $T = 15^{\circ}\text{C}$ menor que a situação de interesse de $T = 20^{\circ}\text{C}$, o esquema de medição em 1.1 não foi capaz de preservar o verdadeiro valor do diâmetro do furo conhecido à 20°C , ou seja, o esquema de medição para este caso necessita de uma estrutura de correção.

Além disso, a equação de medição em 1.6 quando realizado medições na temperatura de 15°C , a diferença de medição do diâmetro do furo entre peça e padrão é decomposta em duas parcelas: diferença do pistão para o padrão à 20°C mais a diferença de contração do pistão para o padrão de 20°C para 15°C . Com isto, se realizamos uma correção na medição no diâmetro do furo do pistão realizada pela célula à 15°C de $\beta_{Pad} * (T - 20) - \beta_{Pist} * (T - 20)$ é possível resgatar o verdadeiro valor do diâmetro do furo medido pela célula na temperatura ambiente de 20°C .

Uma estratégia de correção no esquema de medição para Equação 1.1 se faz necessária principalmente porque no dia-a-dia de trabalho da KS Pistões nos setores da Usinagem e Controle de Qualidade como mencionado anteriormente, a temperatura ambiental chega a variar em até 15°C , e raramente atinge à temperatura de interesse de 20°C . Como visto anteriormente através da simulação numérica, o esquema de medição da célula necessita de uma estratégia de correção para temperaturas diferentes de 20°C .

A estratégia de correção para Equação 1.1 tornaria desnecessária se o material, a geometria e a massa do pistão fossem os mesmos do padrão. Na realidade, eles tem o mesmo comportamento se a peça for um "clone" do padrão. Porém, a empresa opera com o padrão e peça não atendendo a estas exigências.

Por outro lado, a estratégia adotada para resolver o problema existente no esquema de medição para Equação 1.1 é realizar a correção de $\beta_{Pad} * (T - 20) - \beta_{Pist} * (T - 20)$ no diâmetro do furo do pistão obtido pela célula. No entanto, para que esta se torne viável, é necessário estimar os valores de β_{Pist} e β_{Pad} através de experimentos. Para isto, planejamos um experimento para pistão e padrão em que basicamente variamos a temperatura deles e medimos seus respectivos diâmetros do furo. Para estimar β_{Pad} e

β_{Pist} adequadamente, propomos um modelo de regressão com erros nas variáveis para o diâmetro do furo da peça e do padrão em função da temperatura ambiente.

Em linhas gerais, a estratégia de correção proposta neste trabalho consiste em obter uma medição em temperatura ambiente pela célula funcionando como relógio comparador

$$D_{CT} = D_{Pad20^{\circ}C} + (D_{PistT^{\circ}C} - D_{PadT^{\circ}C}) \quad (1.7)$$

e, realizar a correção em D_{CT} da seguinte forma:

$$D_{Corr20} = D_{CT} - \beta_{Pist} * (T - 20) + \beta_{Pad} * (T - 20) \quad (1.8)$$

O trabalho foi organizado em 5 capítulos, conforme descrito abaixo:

No capítulo 2, apresentamos os materiais e o procedimento experimental empregado para obter informações amostrais sobre o comportamento do diâmetro do furo do pistão e do padrão em função da temperatura a partir de dois experimentos. Análise exploratória das informações de ambos os experimentos são apresentados.

No capítulo 3, descrevemos um modelo de regressão com erros nas variáveis sem intercepto: relação ultraestrutural para modelar a dilatação térmica.

No capítulo 4 é descrito um procedimento de estimação via abordagem Clássica para os parâmetros de interesse β_{Pist} e β_{Pad} . Além, obtemos a matriz de informação de Fisher esperada.

No capítulo 5 um procedimento de estimação via abordagem Bayesiana para os parâmetros de interesse β_{Pist} e β_{Pad} .

No capítulo 6 apresentamos aproximações das estimativas dos coeficientes utilizando abordagens Clássica e Bayesiana.

No capítulo 7 realizamos uma discussão sobre os ganhos proporcionados pela metodologia desenvolvida. Analisamos a redução do erro sistemático devido a uma má correção e diminuição na taxa de refugo.

No capítulo 8 apresentamos as perspectivas de continuidade deste trabalho.

Capítulo 2

Delineamento Experimental

Neste capítulo, apresentamos detalhes sobre o planejamento experimental empregado para a coleta de observações referentes ao diâmetro do furo em função da variação de temperatura, tanto para peça e padrão.

Nos primeiros experimentos, chegamos a utilizar uma caixa de papelão com uma lâmpada para aquecer as peças e os padrões em 15 minutos de estabilização em cada patamar. Os resultados obtidos foram considerados inadequados. A partir daí, uma estufa passou a ser utilizada nos experimentos.

Ainda assim, foi necessário realizar outros experimentos para determinar um tempo adequado para a estabilização da temperatura. Após alguns experimentos pilotos, que serviram para ajustar e conhecer variáveis não controladas, seguindo princípio Iterativo de Aprendizagem, ver Box e Drapper (1987), determinamos o tempo de estabilização nos patamares de temperatura. Após vários pré-experimentos, propomos um tempo de estabilização de 2 horas para os pistões e de 3 horas para o padrão em cada patamar de temperatura.

A utilização da estufa permitiu em curto prazo de tempo o levantamento de dados sobre o comportamento do diâmetro em função da temperatura. Se por um lado a utilização da estufa permite a realização do experimento de forma rápida, por outro cria uma situação artificial de variação da temperatura das peças e padrões. Assim, realizamos um segundo experimento onde observamos o diâmetro do furo a partir da variação natural da

temperatura do setor de realização do experimento e utilização do sistema de medição.

2.1 Experimento Preliminar

Um primeiro experimento foi realizado para obter informações à priori sobre os parâmetros do modelo de regressão com erros nas variáveis descrito com detalhes no próximo capítulo. Para obtermos as várias condições de temperatura, neste experimento utilizamos auxílio da estufa, enquanto que no outro utilizamos da própria variação da temperatura ambiente.

A seguir, o procedimento experimental e os equipamentos utilizados para a realização do experimento são descritos

Figura 2.1: Termômetro de Contato

Figura 2.2: Estufa

Figura 2.3: Padrão

O termômetro Fluke tem resolução de $0,1^{\circ}\text{C}$ com certificado de calibração emitido pelo laboratório da Rede Brasileira de Calibração. Este equipamento realiza as medições via o contato de sua haste com a peça ou padrão.

O procedimento experimental empregado para os pistões é apresentado abaixo:

1. Selecionar 10 pistões;
2. Considerar uma faixa experimental de temperatura de 20°C a 60°C ;
3. A estufa é limitada a operar de 30°C a 550°C . Diante disto, se no início do experimento a temperatura ambiente é menor que 30°C , realizar uma primeira tomada de temperatura sem a utilização da estufa.
4. Regular a estufa para 30°C , inserir os pistões no seu interior e aguardar um tempo de estabilização de 2 horas (Figura 2.2);
5. Após o processo de estabilização, cada pistão foi retirado da estufa (um a um após cada medição), e imediatamente a temperatura do pistão foi tomada com termômetro FLUKE (Figura 2.1);
6. Na sequência, a peça foi introduzida na célula de medição para realização da medição do diâmetro do furo (Figura 1.2);;
7. O segundo passo foi repetido incrementando-se de 5 em 5 graus até que se atingisse 60. Consequentemente, também os passos 3, 4 e 5 foram repetidos sem alterações.

De forma análoga, o procedimento empregado para coleta de dados associado ao padrão foi o mesmo utilizado para os pistões. Devemos frisar que neste experimento utilizou-se as mesmas peças nos vários patamares de temperatura. Isto ocorreu porque os pistões são vistos como unidades experimentais heterogêneas. Apesar de parecerem iguais visivelmente, eles possuem uma série de características distintas uma das outras (não existe 2 peças iguais). Com isso, a necessidade de se realizar um esquema experimental de medidas repetidas.

Um primeiro passo foi análise gráfica do comportamento do diâmetro do furo em função da temperatura para cada padrão e peça.

Figura 2.4: Scartter Plot padrão

Figura 2.5: Scartter Plot peça

A partir dos gráficos acima, tanto para peça como para o padrão, notamos uma relação linear do diâmetro do furo em função da temperatura. Além disso, notamos um aumento na variabilidade das medições do diâmetro para patamares de temperatura acima de 30°C , para peça e padrão.

Para avaliarmos a variabilidade das medições da temperatura para cada patamar, apresentamos Gráficos Box-Plots para padrão e peça:

Figura 2.6: Box-Plot padrão

Figura 2.7: Box-Plot peça

Como nas medições do diâmetro, a variabilidade nas medições da temperatura também aumenta quando o patamar é maior que 30°C . Isto ocorre, devido a troca intensa de calor entre uma peça retirada da estufa e o meio onde é realizado o experimento. A seguir, as Tabelas 2.1 e 2.2 resumizam as observações associadas ao diâmetro e a temperatura observada em cada patamar de temperatura, para padrão e peça.

Patamar	Diâmetro		Temperatura	
Patamar	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
25	20004,3	6,01041	24,3	0
30	20005,8	5,9397	30,65	0,070711
35	20005,8	5,58614	34,55	0,636396
40	20007,2	6,64182	41,6	0,989949
45	20007,4	6,80423	46,35	0,636396
50	20008,6	6,32749	50,85	0,919239

Tabela 2.1: Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para padrão.

Patamar	Diâmetro		Temperatura	
Patamar	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
25	20004,4	0,75542	23,39	0,22828
30	20005,8	0,8135	29,92	0,25298
35	20007,3	0,86929	35,41	0,65056
40	20009,2	1,10179	41,40	1,64722
45	20008,0	1,77975	47,92	0,66131
50	20013,5	1,20904	56,98	2,073

Tabela 2.2: Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para peça.

Devidos a problemas como a troca intensa de calor após a retirada da peça da estufa até a medição, optamos pela realização de um segundo experimento onde a variação de temperatura é dado pelo próprio meio ambiente. Neste caso, o tempo de execução do experimento é bem maior que o primeiro experimento, porém com uma confiabilidade melhor na medição da temperatura.

A seguir apresentamos detalhes do experimento e das observações coletadas no segundo experimento.

2.2 Segundo Experimento

Neste experimento amostramos informações do diâmetro do furo em vários níveis de temperatura utilizando da própria variação natural da temperatura no ambiente de atuação das células (Usinagem e Controle). Os dados referentes a este experimento encontram-se no apêndice.

Em especial, temos que neste experimento obtemos medições do furo dentre os vários patamares de temperatura, inclusive na condição de 20^0 Celsius. Isto permite realizar uma transformação nas variáveis do diâmetro e da temperatura de forma a possibilitar estabelecer um modelo sem intercepto, visto que na Equação (1.8) necessitamos apenas do coeficiente angular e não do intercepto.

A transformação é dada subtraindo-se o diâmetro da j -ésima peça obtida no i -ésimo patamar de temperatura do diâmetro da j -ésima peça obtida a 20^0C . Estes dados transformados são utilizados para ilustrar a metodologia desenvolvida no Capítulo 3.

Para ilustrar esta idéia, apresentamos gráficos referentes às observações dos padrões e dos pistões sem a transformação

Figura 2.8: Dados padrão

Figura 2.9: Dados peça

Visivelmente uma relação linear com intercepto poderia ser estabelecida. Diante disto, realizamos uma transformação nos dados subtraindo o valor do diâmetro e temperatura com relação à 20°C . Para ilustrar a transformação, tomamos os dados de um dos padrões (dados completos localizados nas tabelas nas tabelas 9.3 e 9.5 no apêndice), para o qual a transformação

Temperatura	Diâmetro	Temperatura Transformada	Diâmetro Transformado
20,9	20000	$20,9 - 20,9 = 0$	$20000 - 20000 = 0$
33,2	20001,5	$33,2 - 20,9 = 12,3$	$20001,5 - 20000 = 1,5$
24,6	20000,1	$24,6 - 20,9 = 3,7$	$20000,1 - 20000 = 0,1$
28,9	20000	$28,9 - 20,9 = 8$	$20000 - 20000 = 0$
28,1	20000,8	$28,1 - 20,9 = 7,2$	$20000,8 - 20000 = 0,8$
17,1	19999,9	$17,1 - 20,9 = -3,8$	$19999,9 - 20000 = -0,1$
25,9	20000,4	$25,9 - 20,9 = 5$	$20000,4 - 20000 = 0,4$
27	20000,5	$27 - 20,9 = 6,1$	$20000,5 - 20000 = 0,5$

Como podemos observar, tomamos o patamar de temperatura mais próximo à 20°C e subtraímos as temperaturas e seus respectivos diâmetros com relação a este patamar.

Apresentamos os gráficos de dispersão para os padrões e pistões após a transformação:

Figura 2.10: Dados transformados padrão

Figura 2.11: Dados transformados peça

Note que a transformação conserva a relação linear entre o diâmetro e a temperatura porém passando pela origem do plano. Além disto, a transformação reduziu nos patamares a variabilidade das medições entre peças e padrões.

Observe que mesmo com temperatura abaixo de 20°C , alguns desvios são maiores que zero (ver gráfico 2.11). Este comportamento é consequência dos erros de medição ocorridos na medição da temperatura pelo termômetro Fluke e do diâmetro realizado pela Célula de medição. Isto reflete a necessidade de utilizarmos modelos com erros nas variáveis.

Utilizando apenas da variação natural da temperatura ambiente do local de realização do experimento, a variabilidade das medições foram menores e mais estáveis do que aquelas utilizando a estufa. Esta estratégia contorna problemas de troca intensa de calor entre uma peça retirada da estufa e o meio onde é realizado o experimento.

Nas Tabelas abaixo, as médias e os desvios padrão são tomados de 10 peças para as tabelas 2.3 e 2.5 e 2 padrões para as tabelas 2.4 e 2.6 referentes aos padrões. Os dados completos estão no apêndice

	Diâmetro		Temperatura	
Patamar	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
1	20004,5	6,43467	20,9	0
2	20006,5	7,07107	33,15	0,07071
3	20004,8	6,71751	24,6	0
4	20004,8	6,78823	28,8	0,14142
5	20005,4	6,50538	28,20	0,141421
6	20004,2	6,43467	17,05	0,070711
7	20005,0	6,43467	25,95	0,070711
8	20005,1	6,50538	27,05	0,070711

Tabela 2.3: Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para padrão.

Patamar	Diâmetro	D_{ij}	Temperatura	T_{ij}
Patamar	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
1	20004,4	0,88919	20,83	0,0483
2	20008,2	1,06687	32,27	0,35606
3	20005,4	0,94334	25,38	1,77689
4	20005,7	0,95661	27,85	1,74436
5	20005,5	0,9331	28,44	0,11738
6	20004,4	0,88719	17,9	0,22608
7	20006	1,04992	26,7	1,01215
8	20007,2	1,09869	29,26	1,84162

Tabela 2.4: Sumarização dos dados de diâmetro e temperatura para peça.

Na sequência a sumarização das observações após a transformação.

Patamar	Diâmetro	Y_{ij}	Temperatura	X_{ij}
Patamar	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
1	0	0	0	0
2	1,95	0,6364	12,25	0,07071
3	0,3	0,28284	3,7	0
4	0,25	0,35355	7,9	0,14142
5	0,85	0,070711	7,25	0,070711
6	-0,25	0,212132	-3,85	0,070711
7	0,4	0,0000	3,7	0,070711
8	0,55	0,070711	6,15	0,070711

Tabela 2.5: Sumarização dos dados transformados de diâmetro e temperatura para padrão.

Patamar	Diâmetro	Y_{ij}	Temperatura	X_{ij}
Patamar	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
1	0	0	0	0
2	3,86	0,353396	11,44	0,37476
3	1,01	0,191195	4,55	1,76714
4	1,34	0,279682	7,02	1,75613
5	1,14	0,117379	7,61	0,14491
6	0,06	0,250333	-2,93	0,22632
7	1,59	0,387155	5,87	1,01877
8	2,78	0,716163	8,43	1,85356

Tabela 2.6: Sumarização dos dados transformados de diâmetro e temperatura para peça.

No próximo capítulo, propomos um modelo de regressão com erros nas variáveis com intercepto nulo para modelar os dados deste segundo experimento.

Capítulo 3

Modelo de Regressão com erro nas variáveis intercepto nulo: Relação Ultraestrutural

Nesta seção, propomos um modelo de regressão com erros nas variáveis para modelar a dilatação térmica da peça e do padrão em função da temperatura ambiente.

No capítulo 1 propomos uma estratégia de correção para o esquema de medição em 1.1 para que a célula de medição (no dia-a-dia de trabalho) realize correções no valor do diâmetro do furo. Para isso, precisamos conhecer os coeficientes de correção térmica do diâmetro do furo para peça e padrão.

No capítulo 2, apresentamos dois delineamentos experimentais, um utilizando estufa e outra a variação natural da temperatura ambiente, onde para diferentes temperaturas da peça e do padrão medimos seus respectivos diâmetros do furo. Porém, estas duas variáveis são medidas por equipamentos de medição, o termômetro de contato na medição da temperatura e a célula de medição na medição do diâmetro do furo. Como todo equipamento de medição, célula e termômetro, ambos medem com erro, vamos considerar modelos com erros nas variáveis. Neste trabalho, temos o conhecimento à priori da variabilidade associada ao erro aleatório cometido pelo termômetro de contato. A variância do erro do termômetro é obtido a partir do certificado de calibração emitido

por um laboratório de calibração (ver apêndice). Daqui para frente vamos considerar o modelo para o diâmetro da peça em relação à temperatura. Um modelo similar será usado para o padrão. Neste contexto, propomos um modelo de regressão com erros nas variáveis, com o intercepto nulo, da seguinte forma:

$$Y_{ij} = \beta V_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

onde;

- Y_{ij} : Diâmetro da j-ésima peça obtida no i-ésimo patamar de temperatura subtraída do diâmetro da j-ésima peça obtida a 20°C.
- V_{ij} : Verdadeiro valor da temperatura da j-ésima peça no i-ésimo patamar de temperatura subtraído de 20°C.
- β : Coeficiente de dilatação da peça.
- ε_{ij} : Erro de medição do diâmetro do furo obtida na j-ésima peça no i-ésimo patamar de temperatura.

No entanto, o diâmetro do furo possui comportamento linear apenas em função do verdadeiro valor da temperatura, que não é diretamente observado. Neste tipo de modelagem, observamos a temperatura, porém medida com erro como apresentado a seguir:

$$X_{ij} = V_{ij} + \delta_{ij} \quad (3.2)$$

onde;

- X_{ij} : Temperatura observada da j-ésima peça no i-ésimo patamar de temperatura subtraída de 20°C. Medição obtida a partir do termômetro de contato Fluke.
- V_{ij} : Verdadeiro valor da temperatura da j-ésima peça no i-ésimo patamar de temperatura subtraído de 20°C.

- δ_{ij} : Variável aleatória correspondendo ao erro de medição de temperatura, cuja variância foi previamente estimada no processo de calibração (ver apêndice).

Aqui, faremos as seguintes hipóteses:

1. $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ com σ^2 desconhecido.
2. $\delta_{ij} \sim N(0, \sigma_\delta^2)$ com σ_δ^2 conhecido.
3. $V_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_V^2)$, com μ_i e σ_V^2 desconhecidos.
4. ε_{ij} são independentes δ_{ij} para todo i e j .
5. ε_{ij} são independentes $\varepsilon_{ij'}$ são independentes δ_{ij} são independentes $\delta_{ij'}$ são independentes δ_{ij} , V_{ij} são independentes V_{ij} e $V_{ij'}$ são independentes V_{ij} , para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$.

Neste conjunto de suposições, assumimos que o erro cometido pela célula na medição do diâmetro é independente do erro cometido pelo termômetro de contato na medição de temperatura, independente do pistão e do patamar de temperatura. Com relação aos erros cometidos na medição da variável resposta e na medição da variável independente, assumiremos que estes são independentes do pistão e do patamar de temperatura. Com estas suposições, a esperança de Y_{ij} e X_{ij} são:

- $E[Y_{ij}] = E[\beta V_{ij} + \varepsilon_{ij}] = \beta \mu_i$,
- $E[X_{ij}] = E[V_{ij} + \delta_{ij}] = \mu_i$,

e a variância de Y_{ij} e X_{ij} são

- $Var[Y_{ij}] = Var[\beta V_{ij} + \varepsilon_{ij}] = \beta^2 \sigma_V^2 + \sigma^2$.
- $Var[X_{ij}] = Var[V_{ij} + \delta_{ij}] = \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2$.

Além disso, a estrutura de covariância, para pistões j e j' do mesmo patamar i de temperatura é dada por:

- $Cov[Y_{ij}, Y_{ij'}] = Cov[\beta V_{ij} + \varepsilon_{ij}, \beta V_{ij'} + \varepsilon_{ij'}] = 0,$
- $Cov[X_{ij}, X_{ij'}] = Cov[V_{ij} + \delta_{ij}, V_{ij'} + \delta_{ij'}] = Cov[V_{ij}, V_{ij'}] + Cov[V_{ij}, \delta_{ij'}] + Cov[\delta_{ij}, V_{ij'}] + Cov[\delta_{ij}, \delta_{ij'}] = 0,$
- $Cov[Y_{ij}, X_{ij}] = Cov[\beta V_{ij} + \varepsilon_{ij}, V_{ij} + \delta_{ij}] = Cov[\beta V_{ij}, V_{ij}] + Cov[\beta V_{ij}, \delta_{ij}] + Cov[\varepsilon_{ij}, V_{ij}] + Cov[\varepsilon_{ij}, \delta_{ij}] = \beta \sigma_V^2,$
- $Cov[Y_{ij}, X_{ij'}] = Cov[\beta V_{ij} + \varepsilon_{ij}, V_{ij'} + \delta_{ij'}] = Cov[\beta V_{ij}, V_{ij'}] + Cov[\beta V_{ij}, \delta_{ij'}] + Cov[\varepsilon_{ij}, V_{ij'}] + Cov[\varepsilon_{ij}, \delta_{ij'}] = 0,$
- $Cov[V_{ij}, X_{ij}] = Cov[V_{ij}, V_{ij} + \delta_{ij}] = Cov[V_{ij}, V_{ij}] + Cov[V_{ij}, \delta_{ij}] = \sigma_V^2,$
- $Cov[V_{ij}, X_{ij'}] = Cov[V_{ij}, V_{ij'} + \delta_{ij'}] = Cov[V_{ij}, V_{ij'}] + Cov[V_{ij}, \delta_{ij'}] = 0,$
- $Cov[V_{ij}, Y_{ij}] = Cov[V_{ij}, \beta V_{ij} + \varepsilon_{ij}] = Cov[V_{ij}, \beta V_{ij}] + Cov[V_{ij}, \varepsilon_{ij}] = \beta \sigma_V^2,$
- $Cov[V_{ij}, Y_{ij'}] = Cov[V_{ij}, \beta V_{ij'} + \varepsilon_{ij'}] = Cov[V_{ij}, \beta V_{ij'}] + Cov[V_{ij}, \varepsilon_{ij'}] = 0.$

De forma análoga, para patamares i e i' considerando o mesmo pistão j temos a mesma estrutura de covariância anterior. Quando este modelo é adotado, o interesse principal está em estimar β , μ , σ^2 e σ_V^2 respectivamente ou uma função deles.

3.1 Notação Matricial

Para simplificar a notação, vamos tratar as observações de forma matricial. Para isso, tomamos

$$\underline{Z}_i = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{ik} \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{ik} \end{pmatrix}_{2k \times 1} \quad \underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{Z}_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Vamos admitir que o vetor aleatório $\underline{Z}_i$ tem distribuição normal $2k$ -multivariada, na forma

$$\underline{Z}_i \sim N_{2k}(\underline{\mu}_i, \Sigma)$$

onde $\underline{\mu}_i$ é o vetor de médias de dimensão $2k \times 1$; Σ é a matriz de covariância. Aqui, temos como vetor de médias e a matriz de covariâncias respectivamente.

$$\underline{\mu_i} = \begin{pmatrix} \beta\mu_i \\ \beta\mu_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta\mu_i \\ \mu_i \\ \mu_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_i \end{pmatrix}_{2k \times 1}; \Sigma = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}_{2k \times 2k}$$

onde

$$B_{11} = \begin{pmatrix} \beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} \beta\sigma_V^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \beta\sigma_V^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \beta\sigma_V^2 \end{pmatrix} = B_{21}$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a função de distribuição conjunta do vetor $\underline{Z}_i$ é dada por:

$$f(\underline{Z}_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2k} |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{Z}_i - \underline{\mu}_i)' \Sigma^{-1} (\underline{Z}_i - \underline{\mu}_i)\right). \quad (3.3)$$

No entanto, precisamos calcular a inversa e o determinante da matriz de covariâncias Σ . Para o cálculo da inversa e do determinante, utilizamos resultados para inversas de matrizes apresentados por Graybill (Teorema 8.3.3, 1983, pag. 189). Estas estratégias consistem basicamente em considerar a matriz de covariâncias constituída de blocos. Para o cálculo da inversa, consideremos a matriz da seguinte forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}_{2k \times 2k}.$$

Com isto, a inversa da matriz é dada por [Graybill (1983), Teorema 8.3.3, pg. 189]

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} [B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}[B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1} \\ -B_{22}^{-1}B_{21}[B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1} & [B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1} \end{pmatrix}_{2k \times 2k}$$

e o determinante da matriz é dada por [Graybill, (1983), Teorema 8.2.1, item 2, pag. 184]

$$|\Sigma_{2k \times 2k}| = |B_{22}| |B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}|. \quad (3.4)$$

Primeiro efetuamos o calculo da inversa da matriz de covariâncias. Consideramos esta matriz formada por blocos da seguinte forma: Σ_{11}^{-1} , Σ_{12}^{-1} , Σ_{21}^{-1} e Σ_{22}^{-1} . Calculamos cada bloco passo a passo.

1. $\Sigma_{11}^{-1} = [B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1}$
2. $B_{11} = (\beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2)I_{k \times k}$
3. $B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} = (\beta\sigma_V^2)(I_{k \times k})(\frac{1}{\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2})(I_{k \times k})(\beta\sigma_V^2)(I_{k \times k}) = (\frac{\beta^2\sigma_V^4}{\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$.
4. $B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} = (\frac{\beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2}{\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$
5. $\Sigma_{11}^{-1} = [B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1} = (\frac{\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2}{\beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$.

A seguir, calculamos Σ_{22}^{-1}

1. $\Sigma_{22}^{-1} = [B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1}$
2. $B_{22} = (\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)I_{k \times k}$
3. $B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} = (\beta\sigma_V^2)(I_{k \times k})(\frac{1}{\beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2})(I_{k \times k})(\beta\sigma_V^2)(I_{k \times k}) = (\frac{\beta^2\sigma_V^4}{\beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2})(I_{k \times k})$
4. $B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} = (\frac{\beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2}{\beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2})(I_{k \times k})$
5. $\Sigma_{22}^{-1} = [B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1} = (\frac{\beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2}{\beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$.

Finalmente, calculamos Σ_{21}^{-1}

1. $[-B_{22}^{-1}B_{21}] = (-\frac{\beta\sigma_V^2}{\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$
2. $\Sigma_{21}^{-1} = [-B_{22}^{-1}B_{21}][B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1} = (-\frac{\beta\sigma_V^2}{\beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$

e Σ_{12}^{-1}

1. $[-B_{11}^{-1}B_{12}] = (-\frac{\beta\sigma_V^2}{\beta^2\sigma_V^2 + \sigma^2})(I_{k \times k})$
2. $\Sigma_{12}^{-1} = [-B_{11}^{-1}B_{12}][B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1} = (-\frac{\beta\sigma_V^2}{\beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2})(I_{k \times k})$.

Desta forma, obtemos

$$\Sigma_{2k \times 2k}^{-1} = \left(\frac{1}{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 \sigma_\delta^2} \right) \times \begin{pmatrix} \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 & 0 & . & . & . & 0 & -\beta \sigma_V^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 & . & . & . & 0 & 0 & -\beta \sigma_V^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 & 0 & 0 & . & . & . & -\beta \sigma_V^2 \\ -\beta \sigma_V^2 & 0 & . & . & . & 0 & \beta^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\beta \sigma_V^2 & . & . & . & 0 & 0 & \beta^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -\beta \sigma_V^2 & 0 & 0 & . & . & . & \beta^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Após calculo da inversa da matriz de covariâncias, o próximo passo é o calculo do seu determinante.

1. $|B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}| = \left(\frac{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 \sigma_\delta^2}{\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2} \right)^k$
2. $|B_{22}| = (\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)^k$
3. $|\Sigma_{2k \times 2k}| = (\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)^k \left(\frac{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 \sigma_\delta^2}{\sigma_V^2 \cdot \sigma_\delta^2} \right)^k$

A partir da inversa e do determinante da matriz de covariâncias, obtemos a função distribuição conjunta de $\underline{Z}_i$. Após manipulações algébricas, concluímos que,:

$$f(\underline{Z}) = \prod_{i=1}^n f(\underline{Z}_i)$$

$$f(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n) \propto (\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 \sigma_\delta^2)^{-nk/2} \exp \left(-\frac{1}{2} h_1(\beta, \mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_V^2, V_{ij}, Y_{ij}, X_{ij}) \right)$$

onde

$$\begin{aligned}
h_1 = & \left(\frac{\beta \sigma_V^2}{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^2 \sigma_V^2 + \sigma^2 \sigma_\delta^2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} X_{ij} - \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^k Y_{ij} - \beta \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^k X_{ij} + k \beta \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) \\
& - \left(\frac{1}{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + 2 \sigma^2 \sigma_V^2 + 2 \sigma^2 \sigma_\delta^2} \right) \left(\beta \sigma_V^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k X_{ij}^2 - 2 \beta \sigma_V^2 \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^k X_{ij} + k \beta \sigma_V^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) \\
& - \left(\frac{1}{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + 2 \sigma^2 \sigma_V^2 + 2 \sigma^2 \sigma_\delta^2} \right) \left(\sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k X_{ij}^2 - 2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^k X_{ij} + k \sigma^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) \\
& - \left(\frac{1}{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + 2 \sigma^2 \sigma_V^2 + 2 \sigma^2 \sigma_\delta^2} \right) \left(\sigma_V^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - 2 \beta \sigma_V^2 \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^k X_{ij} + k \beta \sigma_V^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) \\
& - \left(\frac{1}{\beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + 2 \sigma^2 \sigma_V^2 + 2 \sigma^2 \sigma_\delta^2} \right) \left(\sigma_\delta^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - 2 \sigma_\delta^2 \beta \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^k Y_{ij} + k \sigma_\delta^2 \beta^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Como a função conjunta acima é complexa (observe que β e σ_V^2 estão juntos no denominador), não conseguimos obter explicitamente o estimador de máxima verossimilhança. Diante deste problema, recorreremos a estratégia de buscar estimativas de máxima verossimilhança via algoritmo EM (Esperança e Maximização).

O algoritmo EM [ver Dempster, Laird and Rubin (1977)] é usado na estimação de máxima verossimilhança na presença de dados faltantes (ou perdidos), porém a verossimilhança dada em (3.5) não envolve variáveis não observáveis. Neste contexto, introduzimos as variáveis latentes V_{ij} .

3.2 Introdução de Variáveis Latentes

Como podemos observar, a função de verossimilhança dada em 3.5, apesar de englobar toda informação da amostra, é bastante complexa. Este fato, na análise clássica acaba dificultando a obtenção de expressões fechadas para os estimadores de máxima verossimilhança.

Introduzimos no modelo variáveis não observáveis V_{ij} , ($i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$), também chamadas de variáveis latentes que permitem a obtenção de estimadores mediante a utilização do algoritmo EM (Estimação e Maximização). Esta variável pode ser considerada uma variável latente adequada, pois ao introduzirmos a variável latente V_{ij} quebramos a estrutura de covariância, deixando apenas os erros.

Com a introdução das variáveis latentes, o novo vetor de observações denotado por $\underline{W}_i$ torna-se

$$\underline{W}_i = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{ik} \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{ik} \\ V_{i1} \\ V_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{ik} \end{pmatrix}_{3k \times 1} \quad \underline{W} = \begin{pmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{W}_n \end{pmatrix}_{3nk \times 1}$$

Vamos admitir que a distribuição conjunta de $\underline{W}_i$ é norma multivariada, na forma

$$\underline{W}_i \sim N_{3k}(\underline{\mu}_i^*, \Sigma^*)$$

onde $\underline{\mu}^*$ é o vetor de médias de dimensão $3k \times 1$; Σ^* é a matriz de covariância

$$\underline{\mu_i^*} = \begin{pmatrix} \beta\mu_i \\ \beta\mu_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta\mu_i \\ \mu_i \\ \mu_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_i \\ \mu_i \\ \mu_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_i \end{pmatrix}_{3k \times 1} ; \Sigma^* = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}_{3k \times 3k},$$

onde

$$B_{11}^* = \Sigma_{2k \times 2k}$$

$$B_{12}^* = \begin{pmatrix} \beta\sigma_V^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \beta\sigma_V^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \beta\sigma_V^2 \\ \sigma_V^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_V^2 \end{pmatrix} = B_{12}^*$$

$$B_{22}^* = \begin{pmatrix} \sigma_V^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_V^2 \end{pmatrix}$$

Assim, a função de distribuição conjunta ou a função de verossimilhança do vetor $\underline{W}$ é dada por

$$f(\underline{W}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3k} |\Sigma^*|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{W}_i - \underline{\mu}_i^*)' \Sigma^{*-1} (\underline{W}_i - \underline{\mu}_i^*)\right). \quad (3.6)$$

No entanto, novamente precisamos calcular a inversa e o determinante da matriz de covariâncias $\Sigma_{3k \times 3k}^*$. Para o cálculo da inversa e do determinante, utilizamos a mesma estratégia da seção 3. Consideramos a matriz covariâncias, ampliada com a entrada da variável latente, constituída de blocos. Para o cálculo da inversa, consideramos a matriz da seguinte forma:

$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}_{3k \times 3k}$$

Com isto, a inversa da matriz é dada por [Graybill (1983), Teorema 8.3.3, pg.189]

$$\Sigma^{*-1} = \begin{pmatrix} [B_{11}^* - B_{12}^* B_{22}^{*-1} B_{21}^*]^{-1} & -B_{11}^{*-1} B_{12}^* [B_{22}^* - B_{21}^* B_{11}^{*-1} B_{12}^*]^{-1} \\ -B_{22}^{*-1} B_{21}^* [B_{11}^* - B_{12}^* B_{22}^{*-1} B_{21}^*]^{-1} & [B_{22}^* - B_{21}^* B_{11}^{*-1} B_{12}^*]^{-1} \end{pmatrix}_{2k \times 2k}$$

e o determinante da matriz é dada por [Graybill,(1983), Teorema 8.2.1,item 2, pag.184]

$$|\Sigma_{3k \times 3k}^{*-1}| = |B_{22}^*| |B_{11}^* - B_{12}^* B_{22}^{*-1} B_{21}^*| \quad (3.7)$$

Primeiro efetuamos o cálculo da inversa da nova matriz de covariâncias. Consideramos esta matriz formada por blocos da seguinte forma: Σ_{11}^{*-1} , Σ_{12}^{*-1} , Σ_{21}^{*-1} e Σ_{22}^{*-1} . Calculamos cada bloco a seguir.

$$1. \Sigma_{11}^{*-1} = [B_{11}^* - B_{12}^* B_{22}^{*-1} B_{21}^*]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1/\sigma^2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1/\sigma_\delta^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1/\sigma_\delta^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1/\sigma_\delta^2 \end{pmatrix}$$

$$2. \Sigma_{22}^{*-1} = [B_{22}^* - B_{21}^* B_{11}^{*-1} B_{12}^*]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \psi/\sigma_V^2 \sigma^2 \sigma_\delta^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \psi/\sigma_V^2 \sigma^2 \sigma_\delta^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \psi/\sigma_V^2 \sigma^2 \sigma_\delta^2 \end{pmatrix}$$

onde

$$\psi = \beta^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \sigma_V^2 \sigma^2 + \sigma_\delta^2 \sigma^2$$

$$3. \Sigma_{21}^{*-1} = [-B_{22}^{*-1} B_{21}^* | [B_{11}^* - B_{12}^* B_{22}^{*-1} B_{12}^*]^{-1}] =$$

$$\begin{pmatrix} -\beta/\sigma^2 & 0 & . & . & . & 0 & -1/\sigma_\delta^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \beta/\sigma^2 & . & . & . & 0 & 0 & -1/\sigma_\delta^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -\beta/\sigma^2 & 0 & 0 & . & . & . & -1/\sigma_\delta^2 \end{pmatrix}$$

$$4. \Sigma_{12}^{*-1} = [-B_{11}^{*-1}B_{12}^*][B_{22}^* - B_{21}^*B_{11}^{*-1}B_{12}^*]^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} -\beta/\sigma^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\beta/\sigma^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -\beta/\sigma^2 \\ -1/\sigma_\delta^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1/\sigma_\delta^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -1/\sigma_\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Após calculo da inversa da matriz de covariâncias, o próximo passo é o calculo do seu determinante.

$$|B_{11}^* - B_{12}^*B_{22}^{*-1}B_{21}^*| = (\sigma_V^2)^k(\sigma^2)^k(\sigma_\delta^2)^k.$$

Observe que o determinante da matriz de covariâncias ficou mais simples com a introdução da variável latente. A partir da inversa e do determinante da matriz de covariâncias, podemos desenvolver a Equação (3.6) com mais detalhes. Após manipulações algébricas, obtemos

$$f(\underline{W}/\beta, \mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_V^2, \sigma^2) \propto (\sigma_V^2)^{-nk/2}(\sigma^2)^{-nk/2} \exp\left(-\frac{1}{2}h_2(\beta, \mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_V^2, V_{ij}, Y_{ij}, X_{ij})\right), \quad (3.8)$$

onde

$$h_2(\beta, \mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_V^2, V_{ij}, Y_{ij}, X_{ij}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} V_{ij} + \frac{1}{\sigma_\delta^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k X_{ij}^2$$

$$-\frac{2}{\sigma_\delta^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k X_{ij} V_{ij} + \frac{\beta^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2 + \frac{1}{\sigma_\delta^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2 + \frac{1}{\sigma_V^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2 - \frac{2}{\sigma_V^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij} \mu_i + \frac{k}{\sigma_V^2} \sum_{i=1}^n \mu_i^2.$$

Observe que esta expressão apresenta uma grande simplificação em relação a expressão em 3.5. Além disso, envolve as variáveis não observáveis V_{ij} .

Capítulo 4

Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV)

Neste capítulo, utilizamos do algoritmo EM para obtenção de aproximações para os estimadores de Máxima Verossimilhança para os parâmetros envolvidos no modelo de regressão com erros proposto no Capítulo 3. Além disto, vamos utilizar a teoria assintótica para determinarmos a variância assintótica dos estimadores e construirmos intervalos de confiança..

4.1 Algoritmo EM (Esperança e Maximização)

A técnica conhecida como algoritmo EM, formalizado por Dempster, Laird e Rubin em 1977, tornou-se um algoritmo numérico para obtenção de aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança. O algoritmo EM (expectation and maximization) tornou muitos problemas de inferência, até então sem solução, possíveis de serem solucionados se abordados sob o ponto de vista de um problema onde estivesse faltando dados. Na etapa E estimamos os valores das variáveis latentes via o valor esperado condicional destas variáveis dado os dados e os valores iniciais para os parâmetros. Para executarmos a etapa M, maximizamos a função de verossimilhança do modelo com as variáveis latentes (equação 3.6).

Para isto, derivando o logaritmo da função de verossimilhança (equação 3.8) com respeito aos parâmetros: β , μ_i , σ_V^2 e σ^2 , temos

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} V_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2} \quad (4.1)$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{\sum_{j=1}^k V_{ij}}{k} \quad (4.2)$$

$$\hat{\sigma}_V^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (V_{ij} - \hat{\mu}_i)^2}{nk} \quad (4.3)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \hat{\beta} V_{ij})^2}{nk} \quad (4.4)$$

onde V_{ij} para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$ serão estimados na etapa E do algoritmo EM. Com a inclusão das variáveis latentes, foi possível obter expressões fechadas para cada um dos parâmetros, porém, envolvendo as variáveis latentes. As equações (4.1), (4.2) e (4.3) e (4.4) definem o passo M do algoritmo EM.

No passo E necessitamos calcular as esperanças condicionais das variáveis latentes dado $\underline{Y}_i, \underline{X}_i, \underline{\mu}_i, \sigma_V^2$ e σ^2 . Note que as expressões obtidas em (4.1), (4.2) e (4.3) e (4.4) a partir da verossimilhança aumentada dependem de funções do verdadeiro valor da temperatura, (V_{ij} e V_{ij}^2). Porém estes não são observados diretamente. Assim, precisamos estimar estas funções dos verdadeiros valores da temperatura fazendo uso da distribuição conjunta de $\underline{Y}_i$, $\underline{X}_i$ e $\underline{V}_i$.

Utilizando a distribuição conjunta dada pela equação (3.6), estas esperanças podem ser facilmente obtidas através do seguinte resultado. Considere $\underline{t} = (\underline{t}_1, \underline{t}_2)'$ um vetor aleatório tal que

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 \\ \underline{t}_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \right).$$

Então

$$\underline{t}_1/\underline{t}_2 \sim N[\underline{\mu}_1 + T_{12}T_{22}^{-1}(\underline{t}_2 - \underline{\mu}_2), T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}],$$

conforme apresentado por [Graybill,(1976), Teorema 3.6.1, pag.106]. Então, as esperanças condicionais são dadas por

$$E[\underline{V}_i/\underline{Y}_i, \underline{X}_i, \sigma_V^2, \sigma^2, \underline{\mu}_i] = \underline{\mu}_i + A\underline{d}_i, \quad (4.5)$$

onde

$$\underline{d}_i = \left(\underline{Z}_i - \underline{\mu}_i \right)_{2k \times 1} e$$

$$A = \begin{pmatrix} \beta\sigma_V^2\sigma_\delta^2/\psi & 0 & . & . & . & 0 & \sigma_V^2\sigma^2/\psi & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \beta\sigma_V^2\sigma_\delta^2/\psi & . & . & . & 0 & 0 & \sigma_V^2\sigma^2/\psi & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \beta\sigma_V^2\sigma_\delta^2/\psi & 0 & 0 & . & . & . & \sigma_V^2\sigma^2/\psi \end{pmatrix},$$

e

$$\psi = \beta^2\sigma_V^2\sigma_\delta^2 + \sigma^2\sigma_V^2 + \sigma^2\sigma_\delta^2.$$

Além disso,

$$E[\underline{V}_i^2/\underline{Y}_i, \underline{X}_i, \sigma_V^2, \sigma^2, \underline{\mu}_i] = Var[\underline{V}_i/\underline{Y}_i, \underline{X}_i, \sigma_V^2, \sigma^2, \underline{\mu}_i] + E^2[\underline{V}_i/\underline{Y}_i, \underline{X}_i, \sigma_V^2, \sigma^2, \underline{\mu}_i], \quad (4.6)$$

onde

$$E[\underline{V}_i/\underline{Y}_i, \underline{X}_i, \sigma_V^2, \sigma^2, \underline{\mu}_i]$$

foi definida anteriormente e

$$Var[\underline{V_i}/\underline{Y_i}, \underline{X_i}, \sigma_V^2, \sigma^2, \underline{\mu_i}] = \begin{pmatrix} \sigma_V^2 - \frac{\phi}{\psi} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 - \frac{\phi}{\psi} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_V^2 - \frac{\phi}{\psi} \end{pmatrix},$$

onde

$$\phi = \beta^2 \sigma_V^4 \sigma_\delta^2 + \sigma_V^4 \sigma^2.$$

O algoritmo computacional para obtermos aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros β , σ_V^2, σ^2 e μ_i é estabelecido da seguinte forma:

- (i) Tomar os valores iniciais de $\beta^{(0)}$, $\sigma_V^{(0)2}, \sigma^{(0)2}$, $\mu_i^{(0)}$.
- (ii) Na etapa **E**, calcular $\hat{V}_{ij}$ e $\hat{V}_{ij}^2$ através das equações em (4.5) e (4.6).
- (iii) Na etapa **M**, obter o valor de $\beta^{(1)}, \mu_i^{(1)}$, $\sigma_V^{2(1)}$ e $\sigma^{2(1)}$, usando as equações em (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4).
- (iii) Verificar a convergência.
- (iv) Incrementar em 1 unidade o contador se não há convergência.

4.2 Matriz de Informação Esperada de Fisher

Na seção anterior, propomos um algoritmo para obter aproximações para estimativas dos EMVs para os parâmetros envolvidos no modelos de regressão com erros. Agora, estamos interessados em encontrar a distribuição assintótica dos estimadores.

Seja, $\underline{\zeta}_{(1 \times n+3)} = (\beta, \sigma_V^2, \sigma^2, \mu_1, \dots, \mu_n)$ o vetor com os verdadeiros valores dos parâmetros, e $\hat{\underline{\zeta}}$ o vetor de estimadores de Máxima Verossimilhança. Como o modelo satisfaz as condições de regularidade apresentados em Sen e Singer, 1993 [teorema 5.2.2, página 209], concluímos que $(\underline{\zeta} - \hat{\underline{\zeta}})$ converge em distribuição para $N_{n+3}(\underline{0}, \Gamma(\underline{\zeta}))$, isto é

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{\sigma}_V^2 - \sigma_V^2 \\ \hat{\sigma}^2 - \sigma^2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\mu}_n - \mu_n \end{pmatrix} \longrightarrow N_{n+3}(\underline{0}, \underline{\Gamma}), \quad (4.7)$$

onde $\Gamma(\underline{\zeta})$ é estimado pela inversa da matriz de informação de Fisher Esperada para a função de verossimilhança em (3.5).

Denotamos por $I(\underline{\zeta})$ a matriz de informação de Fisher Esperada dos parâmetros a serem estimados, obtida a partir da esperança das segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança (equação (3.5)) em relação ao vetor de parâmetros $\underline{\zeta}$. Devido a complexidade do logaritmo da verossimilhança expressa em (3.5), utilizamos teorema [seção 3.1 na página 44 em Dolby, 1976] para calcular a matriz de informação de Fisher esperada. Cada elemento da matriz de Informação Esperada de dimensão $((n+3) \times (n+3))$ é dado por

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \psi \partial \omega} \right] = k * [tr(P^{-1} P_\psi P^{-1} P_\omega) + d'_\psi P^{-1} d_\omega]. \quad (4.8)$$

. Aqui, temos que

$$P_{2nk \times 2nk} = \begin{pmatrix} (\beta^2 \sigma_V^2 + \sigma^2)I & (\beta \sigma_V^2)I \\ (\beta \sigma_V^2)I & (\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)I \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$P_{2nk \times 2nk}^{-1} = \begin{pmatrix} (\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)I & (-\beta \sigma_V^2)I \\ (-\beta \sigma_V^2)I & (\beta^2 \sigma_V^2 + \sigma^2)I \end{pmatrix} \times \frac{1}{\psi}, \quad (4.10)$$

e

$$d_{2nk \times 1} = \begin{pmatrix} \underline{Y_i} - \beta \underline{\mu} \\ \underline{X_i} - \underline{\mu} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

e I é uma matriz identidade

$$nk \times nk$$

Denotamos por P_ω e d_ω as derivadas elemento à elemento da matrizes P e d com relação a um parâmetro arbitrário ω pertencente ao conjunto $\zeta_{(1 \times n + 3)} = (\beta, \sigma_V^2, \sigma_\delta^2, \mu_1, \dots, \mu_n)$. A seguir, calculamos cada elemento da matriz de informação esperada. Primeiro, as variâncias e na sequência as covariâncias

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \beta} \right] = k * [tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_\beta) + d'_\beta P^{-1} d_\beta], \text{ onde}$$

$$1. P_\beta = \begin{pmatrix} (2\beta\sigma_V^2)I & (\sigma_V^2)I \\ (\sigma_V^2)I & (0)I \end{pmatrix}$$

$$2. d'_{\beta(1 \times 2nk)} = \begin{pmatrix} \mu' & \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$3. tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_\beta) = \frac{nk}{\psi^2} ((\sigma_V^4 + \sigma_\delta^2 \sigma_V^2)(\sigma^2 \sigma_V^2 - \beta^2 \sigma_V^4) ((\beta \sigma^4 + 2\beta \sigma_V^2 \sigma_\delta^2)^2 + \beta^2 \sigma^8)).$$

$$4. d'_\beta P^{-1} d_\beta = \frac{k(\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)(\sum_{i=1}^n \mu_i^2)}{\psi}$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \sigma_V^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\sigma_V^2} P^{-1} P_{\sigma_V^2}) + d'_{\sigma_V^2} P^{-1} d_{\sigma_V^2}], \text{ onde}$$

$$1. P_{\sigma_V^2} = \begin{pmatrix} (\beta^2)I & (\beta)I \\ (\beta)I & (0)I \end{pmatrix}$$

$$2. d'_{\sigma_V^2(1 \times 2nk)} = 0$$

$$3. tr(P^{-1} P_{\sigma_V^2} P^{-1} P_{\sigma_V^2}) = \frac{nk}{\psi^2} (\beta^4 \sigma_\delta^4 + 2\beta^2 \sigma^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^4).$$

$$4. d'_{\sigma_V^2} P^{-1} d_{\sigma_V^2} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\sigma^2} P^{-1} P_{\sigma^2}) + d'_{\sigma^2} P^{-1} d_{\sigma^2}], \text{ onde}$$

$$1. P_{\sigma^2} = \begin{pmatrix} (1)I & (0)I \\ (0)I & (0)I \end{pmatrix}$$

$$2. d'_{\sigma^2(1 \times 2nk)} = 0$$

$$3. tr(P^{-1} P_{\sigma^2} P^{-1} P_{\sigma^2}) = \frac{nk}{\psi^2} (\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2)^2.$$

$$4. \ d'_{\sigma^2} P^{-1} d_{\sigma^2} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_i \partial \mu_i} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\mu_i}) + d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\mu_i}], \text{ onde}$$

$$1. \ P_{\mu_i} = \begin{pmatrix} (0)I & (0)I \\ (0)I & (0)I \end{pmatrix}$$

$$2. \ d'_{\mu_i(1 \times 2nk)} = ((-\beta \dots - \beta)(0 \dots 0)(-1 \dots -1)(0 \dots 0))$$

$$3. \ tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\mu_i}) = 0.$$

$$4. \ d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\mu_i} = \frac{k}{\psi} (\beta^2 \sigma_\delta^2 + \sigma^2)$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \mu_i} \right] = k * [tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_{\mu_i}) + d'_\beta P^{-1} d_{\mu_i}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_{\mu_i}) = 0.$$

$$2. \ d'_\beta P^{-1} d_{\mu_i} = \frac{k\beta\sigma_\delta^2\mu_i}{\psi}$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \sigma_V^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_{\sigma_V^2}) + d'_\beta P^{-1} d_{\sigma_V^2}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_{\sigma_V^2}) = \frac{2nk}{\psi^2} (\beta^3 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + \beta \sigma^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2).$$

$$2. \ d'_\beta P^{-1} d_{\sigma_V^2} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \sigma^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_{\sigma^2}) + d'_\beta P^{-1} d_{\sigma^2}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_\beta P^{-1} P_{\sigma^2}) = \frac{2nk}{\psi^2} (\beta \sigma_V^4 \sigma_\delta^2 + \beta \sigma_V^2 \sigma_\delta^4).$$

$$2. \ d'_\beta P^{-1} d_{\sigma^2} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_i \partial \mu_{i'}} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\mu_{i'}}) + d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\mu_{i'}}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\mu_{i'}}) = 0.$$

$$2. \ d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\mu_{i'}} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_i \partial \sigma_V^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\sigma_V^2}) + d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\sigma_V^2}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\sigma_V^2}) = 0.$$

$$2. \ d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\sigma_V^2} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_i \partial \sigma^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\sigma^2}) + d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\sigma^2}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_{\mu_i} P^{-1} P_{\sigma^2}) = 0.$$

$$2. \ d'_{\mu_i} P^{-1} d_{\sigma^2} = 0$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \sigma^2} \right] = k * [tr(P^{-1} P_{\sigma_V^2} P^{-1} P_{\sigma^2}) + d'_{\sigma_V^2} P^{-1} d_{\sigma^2}], \text{ onde}$$

$$1. \ tr(P^{-1} P_{\sigma_V^2} P^{-1} P_{\sigma^2}) = \frac{nk}{\psi^2} (\beta \sigma_\delta^2)^2.$$

$$2. \ d'_{\sigma_V^2} P^{-1} d_{\sigma^2} = 0$$

Assim, compomos a matriz de informação esperada de dimensão $((n+3) \times (n+3))$

$$I_{\underline{\zeta}} = \begin{pmatrix} -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \beta} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \sigma_V^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \sigma^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \mu_1} \right] & \dots & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \mu_n} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \beta} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \sigma_V^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \sigma^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \mu_1} \right] & \dots & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma_V^2 \partial \mu_n} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \beta} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \sigma_V^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \mu_1} \right] & \dots & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2 \partial \mu_n} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_1 \partial \beta} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_1 \partial \sigma_V^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_1 \partial \sigma^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_1 \partial \mu_1} \right] & \dots & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_1 \partial \mu_n} \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_n \partial \beta} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_n \partial \sigma_V^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_n \partial \sigma^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_n \partial \mu_1} \right] & \dots & -E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu_n \partial \mu_n} \right] \end{pmatrix},$$

onde parte dos elementos foram calculados devido à propriedade de simetria da matriz esperada. Na prática, a partir das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e os dados, calculamos a matriz esperada no ponto das aproximações das estimativas de máxima verossimilhança e posteriormente calculamos sua inversa de forma numérica. Desta forma, calculamos intervalos de confiança para os parâmetros envolvidos.

No próximo capítulo apresentamos análise estatística do modelo de regressão com erros nas variáveis em (3.1) e (3.2) utilizando métodos Bayesianos.

Capítulo 5

Estimador de Bayes

5.1 Métodos Bayesianos

Métodos Bayesianos são métodos inferenciais alternativos aos métodos tradicionais que podem melhorar a precisão dos resultados. A principal diferença entre os métodos Clássicos e Bayesianos é que os métodos Bayesianos permitem incorporar ao modelo informações prévias a respeito dos parâmetros de interesse para a análise. Ao contrário da inferência Clássica, a inferência Bayesiana considera os parâmetros como variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade chamadas de distribuições a priori, disponíveis para melhorar a precisão da inferência. A escolha de uma distribuição a priori adequada é fundamental para garantir a qualidade da inferência Bayesiana. Após estipular as distribuições a priori para os parâmetros do modelo, combinamos estas distribuições com a função de verossimilhança e através da fórmula de Bayes encontramos a distribuição a posteriori conjunta para os parâmetros. Na análise Bayesiana toda a inferência de interesse será baseada nesta distribuição.

O algoritmo Gibbs Sampling é um método de simulação via cadeias de Markov, que obtém amostras de uma distribuição de interesse, baseada nas distribuições condicionais a posteriori dos parâmetros. Este algoritmo é utilizado quando as distribuições condicionais apresentam a forma de distribuição conhecida.

Um tópico de grande importância é o diagnóstico de convergência das cadeias

de Markov. Existem vários métodos para verificação da convergência e um dos mais utilizados é o método de Gelman e Rubin (ver Gelman e Rubin, 1992). A idéia deste método é que iniciando com diferentes pontos iniciais, as trajetórias de várias cadeias devem ser similares se convergirem para uma distribuição estacionária. Gelman e Rubin (1992) formalizam essas idéias através do uso das técnicas de análise de variância (ver apêndice B). Neste trabalho, utilizamos este método para a verificação da convergência no modelo de regressão com erros.

Como no algoritmo EM, aqui também introduzimos no modelo variáveis não observáveis V_{ij} , ($i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$) visto a complexidade da verossimilhança em (3.3). Estas variáveis simplificam o algoritmo de simulação dos métodos MCMC [ver Tanner and Wong (1987)], favorecendo a utilização do algoritmo de Gibbs Sampling. Na próxima seção apresentamos análise bayesiana do modelo de regressão com erros nas variáveis já com a inclusão das variáveis latentes.

5.2 Análise Bayesiana e Algoritmo de Simulação

Desenvolvemos uma análise Bayesiana para o modelo de regressão com erros nas variáveis assumindo as seguintes distribuições a priori para os parâmetros:

1. $\beta \sim N(a_0, b_0^2)$ para a_0 e b_0^2 conhecidos.
 2. $\mu_i \sim N(a_{1i}, b_{1i}^2)$ para a_{1i} e b_{1i}^2 conhecidos, para $i = 1, \dots, n$.
 3. $\sigma_V^2 \sim IG(a_2, b_2)$ para a_2 e b_2 conhecidos.
 4. $\sigma^2 \sim IG(a_3, b_3)$ para a_3 e b_3 conhecidos.
- (5.1)

Onde os todos hiperparâmetros são obtidos a partir das informações prévias obtidas pelo experimento preliminar. Conforme modelo proposto, temos que

$$V_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_V^2) \text{ para } \mu_i \text{ e } \sigma_V^2 \text{ desconhecidos.}$$

Assumindo que as distribuições a priori para os parâmetros σ_V^2 , σ^2 , μ_i , β e V_{ij} são independentes, a função densidade a priori conjunta para esses parâmetros é dada por,

$$g(\sigma_V^2, \sigma^2, \mu_i, \beta, V_{ij}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2b_0^2}(\beta - a_0)^2\right) \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2b_{1i}^2}(\mu_i - a_{1i})^2\right) \\ \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_V^2}(V_{ij} - \mu_i)^2\right) (\sigma^2)^{-(a_3+1)} \exp\left(-\frac{b_3}{\sigma^2}\right) (\sigma_V^2)^{-(a_2+1)} \exp\left(-\frac{b_2}{\sigma_V^2}\right) \quad (5.2)$$

Combinando a expressão (5.2) com a função de verossimilhança com as variáveis latentes dada em (3.8), encontramos a densidade a posteriori conjunta para σ_V^2, σ^2 , μ_i , β e V_{ij} dada por,

$$g(\sigma_V^2, \mu_i, \beta / V_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2b_0^2}(\beta - a_0)^2\right) \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2b_{1i}^2}(\mu_i - a_{1i})^2\right) \\ \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_V^2}(V_{ij} - \mu_i)^2\right) (\sigma_V^2)^{-(a_2+1)} \exp\left(-\frac{b_2}{\sigma_V^2}\right) \\ (\sigma^2)^{-(a_3+1)} \exp\left(-\frac{b_3}{\sigma^2}\right) (\sigma^2)^{-nk/2} (\sigma_V^2)^{-nk/2} \exp\left(-\frac{1}{2}h(\beta, \mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_V^2, V_{ij}, Y_{ij}, X_{ij})\right). \quad (5.3)$$

Portanto, as distribuições condicionais necessárias para o uso dos métodos MCMC são dadas por,

$$(i) g(\beta / Y_{ij}, X_{ij}, \mu_i, \sigma_V^2, \sigma^2, V_{ij}) \propto \exp\left\{\frac{-1}{2\left(\frac{b_0^2 \sigma^2}{\sigma^2 + b_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2}\right)} \left(\beta - \frac{a_0 \sigma^2 + b_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} V_{ij}}{\sigma^2 + b_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2}\right)^2\right\} \\ (ii) g(\mu_i / Y_{ij}, X_{ij}, \beta, \sigma_V^2, \sigma^2, V_{ij}) \propto \exp\left\{\frac{-1}{2\left(\frac{b_{1i}^2 \sigma_V^2}{\sigma_V^2 + 2kb_{1i}^2}\right)} \left(\mu_i - \frac{a_{1i} \sigma_V^2 + 2b_{1i}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}}{\sigma_V^2 + 2kb_{1i}^2}\right)^2\right\} \quad (5.4)$$

$$(iii) g(V_{ij}/Y_{ij}, X_{ij}, \mu_i, \sigma_V^2, \sigma^2, \beta) \propto$$

$$\exp \left\{ \frac{-1}{2 \left(\frac{\sigma^2 \sigma_V^2 \sigma_\delta^2}{2\sigma^2 \sigma_\delta^2 + \sigma_V^2 \sigma^2 + \sigma_V^2 \sigma_\delta^2} \right)} \left(V_{ij} - \frac{\beta Y_{ij} \sigma_V^2 \sigma_\delta^2 + X_{ij} \sigma_V^2 \sigma^2 + 2\mu_i \sigma^2 \sigma_\delta^2}{2\sigma^2 \sigma_\delta^2 + \sigma_V^2 \sigma^2 + \sigma_V^2 \sigma_\delta^2} \right)^2 \right\}$$

$$(iv) g(\sigma_V^2/Y_{ij}, X_{ij}, \mu_i, V_{ij}, \sigma^2, \beta) \propto$$

$$(\sigma_V^2)^{-(a_2 + \frac{nk}{2} + 1)} \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma_V^2} \left(b_2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \mu_i V_{ij} + k \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right) \right\}$$

$$(v) g(\sigma^2/Y_{ij}, X_{ij}, \mu_i, V_{ij}, \sigma_V^2, \beta) \propto$$

$$(\sigma^2)^{-(a_3 + \frac{nk}{2} + 1)} \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma^2} \left(b_3 + \frac{(\beta^2 + 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k V_{ij}^2}{2} - \beta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} V_{ij} \right) \right\}$$

Como as distribuições condicionais para os parâmetros β , σ_V^2 , σ^2 , μ_i e V_{ij} para $i = 1, \dots, n$ apresentam formas de distribuições Normais e Inversa Gama, utilizamos o algoritmo Gibbs Sampling para realizar a simulação dos parâmetros e fazer as inferências desejadas. O algoritmo computacional para gerar amostras dos parâmetros β , σ_V^2 , σ^2 e μ_i , baseado na introdução de variáveis latentes, é dado pelas seguintes etapas:

(i) Dados os valores iniciais $\beta^{(0)}$, $\sigma_V^{(0)2}$, $\sigma^{(0)2}$ e $\mu_i^{(0)}$, gerar uma amostra $(V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nk})$ da distribuição Normal para V_{ij} definido no item (iii) das Equações em (5.4)

(ii) Gerar $\mu_i^{(1)}$ a partir da distribuição Normal no item (ii) das Equações em (5.4)

(iii) Gerar $\beta^{(1)}$ a partir da distribuição Normal no item (i) das Equações em (5.4)

(iv) Gerar $\sigma_V^{(0)2}$ a partir da distribuição Inversa Gama no item (iv) das Equações em (5.4)

(v) Gerar $\sigma^{(0)2}$ a partir da distribuição Inversa Gama no item (v) das Equações em (5.4)

Repetir (i)-(v) até gerar uma amostra de tamanho S .

Capítulo 6

Aplicação: Correção no Diâmetro do Furo do Pistão devido à Variação de Temperatura

Neste capítulo, consideramos os dados obtidos a partir do segundo experimento do Capítulo 2 realizado na Fábrica de Pistões - KS Pistões (Nova Odessa/SP). Primeiro, utilizamos as informações adicionais do experimento preliminar do Capítulo 2 para auxiliar os procedimentos clássico e bayesiano de estimação na escolha dos valores iniciais e hiperparâmetros. Na sequência, os resultados são apresentados para ambas estratégias de estimação. Por último, a análise de robustez dos métodos de estimação.

6.1 Informações Iniciais

Nesta seção, tratamos para os Algoritmos EM de Gibbs Sampling a atribuição de valores iniciais para os parâmetros e a especificação dos hiperparâmetros referentes às densidades informativas a priori. Para isto, utilizamos os dados obtidos através do experimento preliminar localizados no Apêndice. Na análise preliminar realizada para obtermos os hiperparâmetros ajustamos uma regressão linear para cada peça e cada padrão referentes aos dados do Pré-experimento descrito no Capítulo 2.

Outra informação fornecida nesta seção é sobre a variabilidade (σ_δ^2) do erro de medição do termômetro Fluke. Esta pode ser obtida pelo certificado de calibração emitido pelo Laboratório de Termometria Latermo (ver apêndice). No entanto, o certificado oferece o desvio padrão em cada ponto de temperatura multiplicado pelo fator de abrangência 2. Desta forma, precisamos calcular,

$$\sigma_\delta^2 = \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 = 0,5625.$$

Este valor foi adotado tanto para análise dos dados para as peças como para os padrões.

6.1.1 Hiperparâmetros para análise Bayesiana

Quando utilizamos do Pré-experimento em nossa análise, no enfoque Bayesiano, estamos considerando como informação a priori sobre os parâmetros envolvidos no modelo de regressão com erros. Em outros problemas práticos poderíamos questionar o especialista da área sobre o valor da média e da variância de um específico parâmetro.

Neste contexto, primeiramente, o procedimento prático usual para obtenção dos hiperparâmetros em (5.1) é explorar os dados do Pré-experimento (ver apêndice tabelas (9.1) e (9.2)) sobre o valor da média e da variância.

Utilizamos a Regressão Linear Simples com intercepto para os dados do Pré-experimento para os padrões e pistões para obtenção dos estimadores preliminares para os parâmetros β e σ^2 , detalhes ver (Drapper e Smith, 1998). A seguir apresentamos os resultados referentes aos padrões e depois das peças.

Padrão	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}^2$
1	0,13013	0,1942
2	0,16478	0,135
Média	0,1474	0,1646
Variância	0,06	0,01752

Tabela 6.1: Informações preliminares dos dos parâmetros β e σ^2 para os dados dos padrões.

Pistão	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}^2$
1	0,31435	0,093
2	0,27386	0,988
3	0,20368	2,792
4	0,20456	2,288
5	0,1644	2,784
6	0,27168	3,481
7	0,23120	0,678
8	0,21764	2,252
9	0,31135	1,620
10	0,24167	2,955
Média	0,2434	1,9931
Variância	0,024	1,2273

Tabela 6.2: Informações preliminares dos dos parâmetros β e σ^2 para os dados dos pistões.

Na sequência, apresentamos os resultados preliminares para as peças e os padrões referentes ao parâmetro σ_V^2 . Para este parâmetro, calculamos a variância amostral da temperatura observada em cada patamar de temperatura, utilizando os mesmos dados localizados nas tabelas (9.1) e (9.2)[Apêndice]:

Patamar	$\widehat{\sigma}_V^2(\text{Padrão})$	$\widehat{\sigma}_V^2(\text{Pistão})$
1	0,0	0,05211
2	0,005	0,064
3	0,405	0,4232
4	0,980	0,029
5	0,405	0,43733
6	0,845	4,29733
Média	0,44	0,8831
Variância	0,1681	2,8323

Tabela 6.3: Informações preliminares dos parâmetro σ_V^2 para os dados dos padrões e pistões.

Na obtenção de informações preliminares para os parâmetros μ_i adotamos em anotar o valor da temperatura ambiente no início das medições na realização do segundo experimento. As informações a priori sobre a temperatura foram obtidos através de um termômetro de mercúrio instalado na área. Este procedimento possibilitou a utilização destes valores na especificação das médias a priori a_{1i} . Na especificação das variâncias b_{1i}^2 utilizamos o desvio padrão do termômetro de mercúrio (0,1) multiplicado por 10. Este procedimento foi adotado para os dados das peças e dos padrões.

Portanto, para obtermos os hiperparâmetros, iniciamos com as densidades a priori dos parâmetros σ_V^2 e σ^2 utilizando as informações preliminares das tabelas (6.1), (6.2) e (6.3). Ilustramos os cálculos para os dados do padrão, de forma similar poderia ser estendido para os dados dos pistões. Então, primeiro o parâmetro σ_V^2 , resolvemos o sistema de duas equações envolvendo os hiperparâmetros a_2 e b_2 ,

$$\begin{cases} 0,44 = \frac{b_2}{a_2-1} \\ 0,1681 = \frac{b_2^2}{(a_2-1)^2(a_2+2)} \end{cases}$$

e obtemos $a_2 = 3,15$ e $b_2 = 0,94$. Para obtenção dos hiperparâmetros a_3 e b_3 da distribuição a priori do parâmetro σ^2 , realizamos o mesmo procedimento anterior,

$$\begin{cases} 0,1646 = \frac{b_3}{a_3-1} \\ 0,01752 = \frac{b_3^2}{(a_3-1)^2(a_3-2)} \end{cases}$$

e obtemos $a_3 = 3,54$ e $b_3 = 0,42$.

Para os parâmetros β , obtemos $0,1474 = a_0$ e $0,06 = b_0^2$. Finalmente, relativo aos parâmetros μ_i obtemos para $i = 1, \dots, n$,

$$a_{11} = 1 \text{ e } b_{12}^2 = 1, a_{12} = 14 \text{ e } b_{12}^2 = 1, a_{13} = 5 \text{ e } b_{13}^2 = 1, a_{14} = 9 \text{ e } b_{14}^2 = 1, a_{15} = 9 \text{ e } b_{15}^2 = 1, a_{16} = -2 \text{ e } b_{16}^2 = 1, a_{17} = 7 \text{ e } b_{17}^2 = 1, a_{18} = 8 \text{ e } b_{18}^2 = 1.$$

De maneira análoga, repetimos os cálculos anteriores para os dados dos pistões

$$a_0 = 0,256044, b_0^2 = 0,01797, a_{11} = 1 \text{ e } b_{12}^2 = 1, a_{12} = 14 \text{ e } b_{12}^2 = 1, a_{13} = 5 \text{ e } b_{13}^2 = 1, a_{14} = 9 \text{ e } b_{14}^2 = 1, a_{15} = 9 \text{ e } b_{15}^2 = 1, a_{16} = -2 \text{ e } b_{16}^2 = 1, a_{17} = 7 \text{ e } b_{17}^2 = 1, a_{18} = 8 \text{ e } b_{18}^2 = 1, a_2 = 2,27, b_2 = 1,126, a_3 = 5,23, b_3 = 8,44.$$

Muito embora a prática de considerarmos informação a priori seja muito difundida em várias áreas, problemas adicionais podem aparecer, uma vez que essa informação pode mudar substancialmente a resposta a posteriori. Idealmente, almejamos obter uma priori de tal sorte que, mesmo uma informação a priori totalmente conflitante com os dados não provoque mudança substancial na resposta a posteriori, o que caracteriza o problema de robustez Bayesiana. Detalhes sobre robustez Bayesiana pode ser visto em (Pericchi e Smith, 1992).

6.1.2 Valores Iniciais

A atribuição de valores iniciais aos parâmetros para cada cadeia simulada é de fundamental importância para uma convergência adequada nos algoritmos. Para ambos os algoritmos adotamos os mesmos valores iniciais. A partir disto, variamos estes valores iniciais permitindo gerar várias cadeias referentes ao algoritmo de Gibbs ou várias execuções do algoritmo EM. A seguir apresentamos para cada parâmetro os três valores iniciais adotados:

$\beta_{Pad} = [0, 1; 0, 14; 5]$, $\sigma_V^2 = [0, 1; 0, 44; 5]$, $\sigma^2 = [0, 01; 0, 1646; 5]$, $\mu_1 = [-5; 1; 5]$, $\mu_2 = [7; 14; 15]$, $\mu_3 = [1; 5; 6]$, $\mu_4 = [4; 9; 10]$, $\mu_5 = [4; 9; 10]$, $\mu_6 = [-6; -2; 0]$, $\mu_7 = [0; 7; 9]$, $\mu_8 = [3; 8; 10]$ e para os pistões

$\beta_{Pist} = [0, 01; 0, 24; 5]$, $\sigma_V^2 = [0, 01; 0, 88; 5]$, $\mu_1 = [-5; 1; 5]$, $\mu_2 = [7; 14; 15]$, $\mu_3 = [1; 5; 6]$, $\mu_4 = [4; 9; 10]$, $\mu_5 = [4; 9; 10]$, $\mu_6 = [-6; -2; 0]$, $\mu_7 = [0; 7; 9]$, $\mu_8 = [3; 8; 10]$, $\sigma^2 = [0, 01; 1, 9931; 5]$.

A partir destas informações iniciais e da especificação dos hiperparâmetros das densidades à priori, na próxima seção apresentamos os resultados do modelo de regressão com erros a partir da utilização dos algoritmos EM e Gibbs Sampling.

6.2 Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados das análises Clássica e Bayesiana considerando os dados para padrões e pistões das Tabelas (2.5) e (2.6), respectivamente.

Na análise clássica do modelo de regressão com erros apresentamos as estimativas de máxima-verossimilhança obtida a partir do algoritmo EM e as respectivas variâncias assintóticas. Possibilitando a construção de intervalos de confiança. Na Bayesiana, apresentamos os sumários a posteriori a partir do algoritmo de Gibbs Sampling.

6.2.1 Análise Clássica

Na estimação dos parâmetros envolvidos no modelo de regressão com erros através do algoritmo EM desenvolvido no capítulo 4, utilizamos os dados para peça e padrão transformados obtidos a partir do segundo experimento e os valores iniciais estabelecidos na seção anterior. Aqui assumimos sempre um nível de significância $\alpha = 0,05$.

Nas Tabelas a seguir, apresentamos as aproximações das estimativas de máxima-verossimilhança, desvio-padrão assintótico dado na seção 4.2 e o intervalo de confiança de 95

Parâmetro	EMV	DP	Int.Conf(95)
$\beta_{P_{nd}}$	0,125	0,00746	(0,1103; 0,139)
μ_1	0	0,3448	(-0,675; 0,675)
μ_2	12,63	0,3535	(11,937; 13,323)
μ_3	3,55	0,3455	(2,872; 4,227)
μ_4	7,7	0,3481	(7,017; 8,382)
μ_5	7,2	0,3476	(6,518; 7,8814)
μ_6	-3,64	0,345	(-4,317; -2,962)
μ_7	4,83	0,3461	(4,151; 5,508)
μ_8	5,94	0,3467	(5,26; 6,62)
σ_V^2	0,005	0,0845	(0; 0,17)
σ^2	0,071	0,0126	(0,0462; 0,0957)

Tabela 6.4: Resultados da análise clássica do modelo de regressão com erros para os dados para os padrões.

Parâmetro	EMV	DP	Int.Conf(95)
$\beta_{P_{ist}}$	0,269	0,0032	(0,2626; 0,2753)
μ_1	0	0,1069	(-0,209; 0,209)
μ_2	11,75	0,1078	(11,528; 11,951)
μ_3	4,46	0,107	(4,25; 4,66)
μ_4	6,8	0,10723	(6,58; 7,01)
μ_5	7,25	0,10727	(7,05; 7,47)
μ_6	-2,6	0,10698	(-2,809; -2,3903)
μ_7	5,88	0,1071	(5,65; 6,08)
μ_8	8,62	0,1074	(8,41; 8,83)
σ_V^2	0,67	0,0405	(0,59; 0,749)
σ^2	0,35	0,0131	(0,324; 0,3757)

Tabela 6.5: Resultados da análise clássica do modelo de regressão com erros para os dados para os pistões.

De posse das aproximações para as estimativas de máxima verossimilhança relativo aos parâmetros β_{Pad} e β_{Pist} , visualizamos o comportamento das equações estimadas junto aos gráficos de dispersão (2.10) e (2.11) para os dados dos padrões e dos pistões, respectivamente.

Figura 6.1: Equação estimada - dados dos padrões

Figura 6.2: Equação estimada - dados dos pistões

Note que, as equações estimadas utilizando as aproximações das estimativas de máxima verossimilhança ajustaram-se bem aos dados observados. Na próxima seção, realizamos abordagem Bayesiana do modelo de regressão com erros proposto.

6.2.2 Análise Bayesiana

As Tabelas (6.6) e (6.7) nos mostram os resumos a posteriori dos parâmetros β , σ_V^2 , $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ e μ_7 e μ_8 . Apresentamos para cada parâmetro, a média, o desvio padrão, o intervalo de credibilidade (95) e o fator de redução e escala (GR) do critério de convergência de Gelman e Rubin. Primeiro apresentamos os sumários associado aos dados dos padrões e depois os sumários para os pistões

Parâmetro	Média	DP	Int.Cred(95)	GR
β_{Pad}	0,20	0,0020469	(0,1946; 0,2097)	1,0001
μ_1	-0,42	0,1461721	(-0,5862; 0,14013)	1,0001
μ_2	8,87	0,1461982	(8,5056; 9,4548)	1,0001
μ_3	2,87	0,1365543	(2,44129; 3,14269)	1,0001
μ_4	5,64	0,1481350	(4,90366; 6,25629)	1,0001
μ_5	6,99	0,1463323	(6,23595; 7,4793)	1,0001
μ_6	-2,518	0,1462018	(-2,9098; -2,18146)	1,0001
μ_7	4,19	0,1881707	(3,86051; 4,44456)	1,0001
μ_8	5,28	0,1881707	(4,96051; 5,54456)	1,0001
σ_V^2	3,15	0,523	(2,985; 3,7653)	0,9998
σ^2	0,6007	0,0131	(0,532; 0,687)	0,9998

Tabela 6.6: Sumários a posteriori do modelo de regressão com erros para os dados para os padrões.

Parâmetro	Média	DP	Int.Cred(95)	GR
β_{Pist}	0,58	0,008361973	(0,57245765; 0,596167434)	1,0002
μ_1	-0,18	0,033523284	(-0,264360686; 0,06407953)	1,0002
μ_2	6,018	0,216760952	(6,003480992; 6,873095137)	1,0003
μ_3	1,73	0,092799802	(1,516480478; 1,883393641)	1,0002
μ_4	3,71	0,143479134	(3,449590494; 4,021644797)	1,0001
μ_5	3,2	0,155532249	(2,900450669; 3,513024714)	1,0001
μ_6	-0,7	0,069788731	(-0,905542853; -0,528268536)	1,0002
μ_7	2,8	0,117766929	(2,608351657; 3,073732215)	1,0001
μ_8	4,06	0,158921357	(3,668513479; 4,592197149)	1,0001
σ_V^2	0,7	0,057385313	(0,293126834; 0,915097725)	0,9988
σ^2	0,3044	0,012402945	(0,198677104; 0,8743910351)	0,9988

Tabela 6.7: Sumários a posteriori do modelo de regressão com erros para os dados para os pistões.

Da mesma forma que realizado na análise clássica, aqui também utilizamos as aproximações para as estimativas de Bayes relativo aos parâmetros β_{Pad} e β_{Pist} ; e desta forma visualizamos o comportamento das equações estimadas junto aos gráficos de dispersão (2.10) e (2.11) para os dados dos padrões e dos pistões respectivamente.

Figura 6.3: Equação estimada - dados dos padrões

Figura 6.4: Equação estimada - dados dos pistões

Observamos que o modelo de regressão com erros sob enfoque Bayesiano não se ajustou de maneira satisfatória aos dados observados. Enquanto que a estratégia clássica de estimação proporcionou um melhor ajuste dos parâmetros do modelo de regressão com erros. Porém, se variarmos os valores de σ_δ^2 tanto para os dados dos pistões e dos padrões, obtemos, as seguintes aproximações para as estimativas de Bayes

σ_δ^2	$\widehat{\beta}_{Pist}$	$\widehat{\beta}_{Pad}$
0,1	0,3246	0,1512
0,5625	0,58	0,2
1,0	0,763	0,23

Tabela 6.8: Estimativas Bayesianas para diferentes valores de σ_δ^2 .

Notamos que se a variabilidade do erro cometido pelo termômetro Fluke é pequena, as estimativas Bayesianas tornam-se próximas das estimativas de máxima verossimilhança. Anteriormente, mostramos que as estimativas de máxima verossimilhança referente ao parâmetro β_{Pist} e β_{Pad} apresentaram bom desempenho quando comparado aos dados observados.

No processo de geração das cadeias, geramos várias cadeias com grande quantidade de pontos e seleccionamos sistematicamente valores dentro da cadeia, formando novas amostras. Foram geradas 3 cadeias de 40000 para cada parâmetro. Para cada cadeia, desprezamos os 20000 valores iniciais e seleccionamos os restantes, 1 em cada 20 valores, formando 3 amostras com 1000 valores.

Para todos os parâmetros tivemos que a convergência foi atingida pelo critério de Gelman e Rubin, pois os valores do fator de redução e escala se aproximam de 1. Outra forma de verificarmos a convergência dos parâmetros, é através dos gráficos dados a seguir que mostram as trajetórias das cadeias ao longo das iterações. Apresentamos apenas gráfico associado ao parâmetro β .

Figura 6.5: Iterações para β_{pad}

Figura 6.6: Iterações para β_{dist}

A seguir apresentamos as Figuras 6.7 e 7.1, que são histogramas referentes aos 1000 valores obtidos após seleção das amostras dos parâmetros β_{Pist} e β_{Pad} . Esses histogramas representam aproximações das densidades a posteriori marginais desses parâmetros.

Figura 6.7: Aproximação da densidade a posteriori marginal de β_{Pist}

Figura 6.8: Aproximação da densidade a posteriori marginal de β_{Pad}

6.3 Análise de Robustez

De fundamental interesse na escolha da técnica de estimação a ser utilizada é o estudo de sua robustez. Na análise Bayesiana a robustez é caracterizada pela influência dos hiperparâmetros a_0 , a_3 , b_3 , a_2 , e b_2 das densidades a priori dos parâmetros β , σ^2 e σ_V^2 . Na análise clássica a robustez é caracterizada pela influencia de diferentes valores iniciais utilizados no algoritmo EM. Primeiro, apresentamos a robustez do algoritmo EM e depois para o algoritmo Gibbs sampling.

6.3.1 Robustez do Algoritmo EM

Nesta análise, variamos os valores iniciais estabelecidos para os parâmetros β , σ_V^2 e σ^2 para padrão e peça. Nas tabelas a seguir, apresentamos as aproximações das estimativas de máxima verossimilhança para os três diferentes valores iniciais e os respectivos número de iterações.

A coluna Parâmetros refere-se aos parâmetros analisados; a coluna Valores iniciais refere-se aos valores iniciais avaliados no algoritmo, as colunas R1,R2 e R3 são as aproximações das estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir de cada valor inicial; as colunas IT1,IT2 e IT3 são as iterações necessárias para que houvesse convergencia do algoritmo para cada valor inicial utilizado.

Parâmetro	Valores Iniciais	R1	R2	R3	IT1	IT2	IT3
β	0, 1; 0, 14; 5	0, 124	0, 127	0, 125	8	5	34
σ_V^2	0, 01; 0, 44; 5	0, 007	0, 004	0, 005	12	7	21
σ^2	0, 01; 0, 17; 5	0, 071	0, 072	0, 068	11	4	23

Tabela 6.9: Análise de Robustez do algoritmo EM para os dados dos padrões.

Parâmetro	Valores Iniciais	R1	R2	R3	IT1	IT2	IT3
β	0, 1; 0, 24; 5	0, 273	0, 267	0, 298	10	3	22
σ_V^2	0, 01; 0, 88; 5	0, 63	0, 72	0, 68	6	15	19
σ^2	0, 01; 1, 99; 5	0, 36	0, 34	0, 38	7	5	18

Tabela 6.10: Análise de Robustez do algoritmo EM para os dados dos pistões.

Observamos que para diferentes valores iniciais, o algoritmo EM atingiu convergência. Porém, para valores iniciais distantes da solução numérica, a obtenção da convergência exige um número maior de iterações.

6.3.2 Robustez das Estimativas Bayesianas

Na Tabelas 6.11 e 6.12, apresentamos as estimativas de monte carlo para três diferentes situações de valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori para os parâmetros β , σ_V^2 e σ^2 para padrão e peça.

A coluna Parâmetros refere-se aos parâmetros analisados; a coluna Hiperparâmetros refere-se aos hiperparâmetros associados às distribuições à priori especificadas; as colunas S1,S2 e S3 são as três situações para os hiperparâmetros; as colunas MCS1,MCS2 e MCS3 são as estimativas de Monte Carlo avaliadas para cada uma das três situações.

Parâmetro	Hiperparâmetros	S1	S2	S3	MCS1	MCS2	MCS3
β	$a_0 =$	0, 1	0, 14	0, 5	0, 21	0, 204	0, 1992
	$b_0^2 =$	0, 01	0, 06	1			
σ_V^2	$a_2 =$	1	3, 15	5	3, 07	3, 2	3, 3
	$b_2 =$	0, 1	0, 94	3			
σ^2	$a_3 =$	1	3, 54	8	0, 61	0, 57	0, 65
	$b_3 =$	0, 01	0, 42	3			

Tabela 6.11: Análise de Robustez das aproximações para as estimativas Bayesianas do modelo de regressão com erros para os dados dos padrões.

Parâmetro	Hiperparâmetros	S1	S2	S3	MCS1	MCS2	MCS3
β	$a_0 =$	0,1	0,24	0,5	0,571	0,569	0,581
	$b_0^2 =$	0,001	0,018	1			
σ_V^2	$a_2 =$	1	2,27	3	0,65	0,72	0,82
	$b_2 =$	0,1	1,126	3			
σ^2	$a_3 =$	1	5,23	10	0,298	0,301	0,305
	$b_3 =$	4	8,44	12			

Tabela 6.12: Análise de Robustez das aproximações para as estimativas Bayesinas do modelo de regressão com erros para os dados dos pistões.

Após análise das Tabelas acima, concluímos que as densidades à priori formuladas para os parâmetros produziram estimativas bayesianas robustas. Principalmente para os parâmetro de interesse β útil na Equação de Correção em 1.8.

Capítulo 7

Discussão

Para resolver o problema de compensação da medição do diâmetro do furo do pistão devido à variação térmica, estabelecemos uma estratégia de correção (ver equação 1.8). Porém, para que esta equação funcione de forma adequada no dia a dia de trabalho, precisamos estimar os parâmetros β_{Pad} e β_{Pist} . Estes parâmetros representam a alteração ocorrida no diâmetro a partir da alteração de um grau da temperatura da peça.

A parte experimental deste problema necessitou de um grande período de tempo. No início dos primeiros experimentos, chegamos a utilizar uma caixa de papelão com uma lâmpada para aquecer as peças e os padrões em 15 minutos de estabilização. Após análise do gráfico de dispersão dos dados, percebemos que esta forma de execução do experimento não era adequada. A partir daí, uma estufa passou a ser utilizada nos experimentos. Mesmo com a utilização da estufa para aquecer as peças, foi necessário realizar outros experimentos para determinar um tempo adequado para a estabilização da temperatura. Após alguns experimentos pilotos, propomos um tempo de estabilização de 2 horas para os pistões e de 3 horas para o padrão em cada patamar de temperatura. A principal contribuição da estufa foi que a sua utilização permitiu realizar em curto prazo de tempo um experimento. Por outro lado a utilização da estufa cria uma situação artificial de variação da temperatura das peças e padrões. Além disso, ao retirarmos a peça da estufa para ser medida, temos uma troca de calor entre a peça e o meio ambiente, que pode comprometer os dados. Desta forma, decidimos realizar um segundo experimento onde observamos o diâmetro do furo a partir da variação natural da temperatura do setor de

realização do experimento e utilização do sistema de medição. Com este experimento, obtemos resultados satisfatórios.

Basicamente, os experimentos consistiram em variar a temperatura da peça e do padrão e imediatamente medirmos seus respectivos diâmetros do furo. No entanto, estas variáveis são medidas por equipamentos de medição, o termômetro de contato na medição da temperatura e a célula de medição na medição do diâmetro do furo. Como todo equipamento de medição, célula e termômetro, ambos medem com erro, consideramos modelos com erros nas variáveis mediante ao conhecimento prévio da variabilidade associada ao erro aleatório cometido pelo termômetro de contato (ver Relatório de Calibração apêndice). Adequadamente, adotamos modelo de regressão com erros nas variáveis sem intercepto: relação ultraestrutural para modelar as medições do diâmetro em função da temperatura.

Para abordar este modelo, utilizamos análises Clássicas e Bayesianas. Na análise clássica, não foi possível encontrar expressões fechadas para os estimadores de máxima verossimilhança. De forma análoga, na análise Bayesiana também não foi possível estabelecer uma expressão fechada para o estimador de Bayes. Diante disto, foi necessário introduzir para ambas abordagens a variável latente (V_{ij}). Esta variável permitiu na análise Clássica, a utilização do algoritmo EM e na análise Bayesiana a utilização do algoritmo de Gibbs Sampling. Após análise dos gráficos de dispersão (6.1), (6.2) para os coeficientes encontrados a partir da utilização do algoritmo EM e dos gráficos (6.3) e (6.4) utilizando os coeficientes encontrados a partir da estratégia Bayesiana, observamos que a abordagem Clássica, a partir da utilização do algoritmo EM, se ajustou melhor aos dados observados.

Com as aproximações das estimativas dos coeficientes β_{Pist} e β_{Pad} obtidas a partir das estratégias Clássica e Bayesiana, nos resta saber qual dupla produzem correções satisfatórias na medição do diâmetro da peça no dia a dia de trabalho. Para validar estes coeficientes, adotamos uma estratégia em duas fases:

Fase 1: Definindo valores de referência a 20°C

- Para isto, 10 peças, 2 padrões e uma Célula de medição foram encaminhadas para

uma sala climatizada a 20°C onde ficaram por 24 horas, para estabilizar a temperatura;

- Logo após, cada peça foi medida em sequência aleatória realizando-se a medição do diâmetro de cada peça por 3 vezes.
- Calculamos a média das 3 leituras realizadas à 20°C. Os dados estão na tabela 7.1.

Fase 2: Obtenção de medições em várias temperaturas

- As mesmas 10 peças, 2 padrões e Célula de medição foram encaminhadas para o Chão de Fábrica.
- Durante sete vezes, um experimetador dirigiu-se ao local do experimento, anotando-se a temperatura dos padrões e realizando o ajuste da Célula. Em seguida, anotou-se peça e peça, a medição da temperatura e do diâmetro de cada peça.

A Tabela abaixo, a primeira coluna refere-se a peça, as colunas R1,R2 e R3 referem-se a cada uma das réplicas e a última coluna a média das três réplicas

	<i>R1</i>	<i>R2</i>	<i>R3</i>	MÉDIA
<i>P1</i>	20004, 3	20004, 2	20004, 2	20004, 2
<i>P2</i>	20003	20003, 3	20003, 2	20003, 1
<i>P3</i>	20003, 5	20003, 6	20003, 5	20003, 5
<i>P4</i>	20005, 1	20005, 2	20005, 3	20005, 2
<i>P5</i>	20005	20005, 1	20005	20005, 03
<i>P6</i>	20003, 9	20003, 9	20003, 8	20003, 8
<i>P7</i>	20005, 6	20005, 6	20005, 5	20005, 5
<i>P8</i>	20005, 6	20005, 7	20005, 5	20005, 6
<i>P9</i>	20004, 9	20005	20004, 9	20004, 9
<i>P10</i>	20004, 1	20004, 3	20004, 2	20004, 2

Tabela 7.1: Valores de referência obtidos a 20°C.

Portanto, utilizando os dados obtidos na segunda fase (dados completos estão no apêndice) com os coeficientes $\beta_{P_{ist}}$ e $\beta_{P_{ud}}$ obtidos nas análises Clássica e Bayesiana, re-alizamos as compensações nas medições do diâmetro devido a variação de temperatura utilizando a equação (1.8). Com isto, comparamos estes valores com a medição de referência obtido na temperatura de 20°C na primeira fase da validação. A comparação entre as aproximações os coeficientes de compensação térmica obtidas via análises Clássicas e Bayesinas é apresentado a seguir

Figura 7.1: Erros de compensação térmica

No gráfico acima, o primeiro Box-plot (EM) refere-se ao erro cometido utilizando-se os coeficientes obtidos a partir da análise clássica. Enquanto que o segundo Box-Plot, refere-se aos erros de compensação térmica utilizando os coeficientes obtidos com abordagem Bayesiana.

Diante disto, decidimos escolher os coeficientes obtidos através da análise clássica para serem configurados em todas as Células de medição da KS Pistões. A partir da implantação destes coeficientes no dia primeiro de setembro de 2003, avaliamos o refugo devido a característica do diâmetro do furo durante todo o ano. O gráfico abaixo, mostra o impacto da implantação dos coeficientes no refugo.

Figura 7.2: Impacto da implantação dos coeficientes obtidos via análise clássica

Com isso, mostramos que a estratégia de correção foi eficaz reduzindo substancialmente o refugo.

Capítulo 8

Propostas futuras

Como perspectivas futuras, podemos sugerir para continuidade e melhoria deste trabalho:

1. Introduzir um efeito aleatório para peça/padrão no modelo de regressão com erros.
2. Considerar que os V_{ij} possuem variâncias distintas em cada patamar de temperatura.
3. No contexto Bayesiano, pode-se formular outras prioris para o parâmetro β .

Capítulo 9

Apêndices

9.1 Certificado de calibração

[illegible]

Figura 9.1: Certificado de calibração do termômetro Fluke

9.2 Algoritmo de Gibbs Sampling

O algoritmo Gibbs Sampling foi introduzido formalmente por Gelman e Gelman (1984), propuseram um esquema de amostragem de distribuições explorando as distribuições condicionais completas, através de um algoritmo iterativo que define uma Cadeia de Markov.

O algoritmo Gibbs Sampling é essencialmente um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas.

Descrição do método:

Suponha que a distribuição de interesse é $\pi(\underline{\theta})$ onde $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ e que as distribuições condicionais completas a posteriori $\pi(\theta_i / \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_p)$, $i = 1, \dots, p$, estão disponíveis sob forma padronizada. Podemos então gerar amostras através do seguinte procedimento:

Passo 1: iniciar o contador das iterações, $j = 1$, e atribuir valores iniciais $\underline{\theta} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})$.

Passo 2: obter um novo valor $\underline{\theta} = (\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_p^{(j)})$ através de sucessivas geração de valores:

$$\begin{aligned}\theta_1^{(j)} &\sim \pi(\theta_1 / \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}) \\ \theta_2^{(j)} &\sim \pi(\theta_2 / \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}) \\ &\vdots \\ \theta_p^{(j)} &\sim \pi(\theta_p / \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_{p-1}^{(j)})\end{aligned}$$

Passo 3: mudamos o contador j para $j + 1$ e retornamos ao Passo 2 até a convergência.

Gelman e Gelman (1984) mostram que os valores gerados para θ_i , $i = 1, \dots, p$, convergem em distribuição para uma variável aleatória da distribuição $\pi(\theta)$ com $j \rightarrow \infty$.

9.3 Critério de convergência de Gelman e Rubin

Uma forma simples de verificar convergência é a utilização de várias cadeias em paralelo começando por diferentes pontos iniciais. Com isso, evita-se que as cadeias se concentrem em regiões em torno de modas locais.

A inspeção visual de similaridade entre as trajetórias das várias cadeias após um certo número de iterações é um forte indício de convergência. Gelman e Rubin (1992) formalizam essa idéia, de que as trajetórias das cadeias devem ser a mesma depois de convergirem, através do uso de técnicas de análise de variância. A idéia geral é testar se a dispersão intra-cadeias é maior do que a dispersão inter-cadeias. Isto equivale a dizer que: o histograma das cadeias como um todo deve ser similar aos histogramas das cadeias tomadas individualmente.

Considerando m cadeias que evoluem em paralelo e uma função real $t(\theta)$, tem-se m trajetórias $\{t_i^0, t_i^1, \dots, t_i^n\}$, $i = 1, \dots, m$, para t . Portanto, podem ser obtidas a variância entre as cadeias, B , e a variância dentro das cadeias, W . As fórmulas correspondentes são dadas por:

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{t}_i - \bar{t})^2 \text{ e } W = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (t_i^{(j)} - \bar{t}_i)^2$$

onde $\bar{t}_i$ é a média das observações da cadeia i e $\bar{t}$ é média dessas médias, $i = 1, \dots, m$.

A variância de t pode ser estimada de forma não viciada por:

$$\hat{V}(t(\theta)) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) W + \left(\frac{1}{n}\right) B$$

Se as cadeias ainda não estiverem convergindo, então essa estimativa é maior que $\hat{V}(t(\theta))$ pois os valores iniciais ainda estão sendo influenciados pelos valores dos outros parâmetros da cadeia, de forma que a distribuição de equilíbrio ainda não foi atingida, indicando que eles foram escolhidos com dispersão maior que a da distribuição de equilíbrio. Por outro lado, W fornece estimativas menores que $\hat{V}(t(\theta))$, pois cadeia não terá coberto toda a variabilidade de $t(\theta)$.

Um indicador de convergência é dado pela chamada redução potencial estimada

da escala $\hat{R} = \sqrt{\hat{V}(t(\theta))/W}$. À medida que n cresce, ambos os estimadores acabarão convergindo para $V(t(\theta))$ e R convergirá para 1. Assim, $\hat{R}$ pode ser usado como indicador de convergência pela avaliação de sua proximidade a 1.

9.4 Dados do Pré e segundo experimentos

Os dados obtidos a partir do pré-experimento foram realizados segundo procedimento experimental detalhado no capítulo 2. Para ambos os experimentos coletou-se informações amostrais para peça e padrão.

Pré-experimento

Aqui, temos as medições do diâmetros e das temperaturas observadas de 10 peças e 2 padrões foram submetidos a 6 condições de temperatura

Patamar	Padrão	D_{ij}	T_{ij}
1	1	20000,1	24,3
1	2	20008,6	24,3
2	1	20001,6	30,6
2	2	20010,0	30,7
3	1	20001,9	34,1
3	2	20009,8	35
4	1	20002,5	40,9
4	2	20011,9	42,3
5	1	20002,6	45,9
5	2	20012,2	46,8
6	1	20004,1	50,2
6	2	20013,1	51,5

Tabela 9.1: Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Padrões - Pré-experimento.

e os dados referentes às peças

Patamar	Peça	D_{ij}	T_{ij}	Patamar	Peça	D_{ij}	T_{ij}
1	1	20004,1	23,8	4	1	20009,0	40,6
1	2	20005,3	23,7	4	2	20008,9	41,3
1	3	20005,4	23,4	4	3	20009,9	42,4
1	4	20004,8	23,4	4	4	20009,1	39,2
1	5	20003,2	23,4	4	5	20007,2	41,8
1	6	20004,8	23,2	4	6	20010,9	42,6
1	7	20004,4	23,2	4	7	20007,8	38,4
1	8	20004,2	23,1	4	8	20009,9	43,4
1	9	20003,2	23,2	4	9	20008,8	41,1
1	10	20004,4	23,5	4	10	20010,1	43,2
2	1	20005,5	30,1	5	1	20010,8	47,2
2	2	20006,9	29,8	5	2	20010,5	48,5
2	3	20007,1	29,6	5	3	20007,6	48
2	4	20006,1	29,9	5	4	20007,1	48,4
2	5	20004,8	30	5	5	20004,6	48,5
2	6	20006,5	30,5	5	6	20008,3	48,3
2	7	20005,8	29,8	5	7	20008,4	47,4
2	8	20005,7	29,8	5	8	20007	47,8
2	9	20004,6	29,7	5	9	20007,9	46,6
2	10	20005,8	30	5	10	20007,4	48,5

Patamar	Padrão	D_{ij}	T_{ij}	Patamar	Padrão	D_{ij}	T_{ij}
3	1	20007	34,5	6	1	20013,9	55,3
3	2	20008,7	36,4	6	2	20015,2	56,8
3	3	20008,4	36,2	6	3	20013,7	56,4
3	4	20007,7	34,5	6	4	20013,4	58,5
3	5	20006	35,8	6	5	20010,7	60,6
3	6	20007,6	35,4	6	6	20014,7	54,2
3	7	20007,1	35,2	6	7	20013	57,8
3	8	20007	35,7	6	8	20012,9	59,5
3	9	20006,1	34,9	6	9	20013,9	55,3
3	10	20007,1	35,5	6	10	20013,4	55,4

Tabela 9.2: Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Pistões (Peças) - Pré-experimento.

Onde, para ambos peça e padrão,

- D_{ij} : Diâmetro da j-ésima peça obtida no i-ésimo patamar de temperatura.
- T_{ij} : Temperatura observada da j-ésima peça no i-ésimo patamar de temperatura. Medição obtida a partir do termômetro de contato Fluke.

Segundo-experimento

Aqui, temos as medições do diâmetros e das temperaturas observadas de 10 peças e 2 padrões foram submetidos a 8 condições de temperatura

Patamar	Padrão	D_{ij}	T_{ij}
1	1	20000	20,9
1	2	20009,1	20,9
2	1	20001,5	33,2
2	2	20011,5	33,1
3	1	20000,1	24,6
3	2	20009,6	24,6
4	1	20000	28,9
4	2	20009,6	28,7
5	1	20000,8	28,1
5	2	20010	28,3
6	1	19999,9	17,1
6	2	20008,7	17
7	1	20000,4	25,9
7	2	20009,5	26
8	1	20000,5	27
8	2	20009,7	27,1

Tabela 9.3: Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Padrões - Segundo-experimento.

e os dados referentes às peças

Patamar	Pistão	D_{ij}	T_{ij}	Patamar	Pistão	D_{ij}	T_{ij}
1	1	20004,4	20,9	5	1	20005,6	28,5
1	2	20003,9	20,9	5	2	20005,2	28,3
1	3	20004,8	20,8	5	3	20005,9	28,5
1	4	20004,8	20,8	5	4	20006	28,6
1	5	20002,3	20,8	5	5	20003,3	28,3
1	6	20005,6	20,8	5	6	20006,9	28,6
1	7	20004	20,8	5	7	20005,1	28,4
1	8	20004,6	20,8	5	8	20005,6	28,4
1	9	20004,3	20,8	5	9	20005,5	28,5
1	10	20005,1	20,9	5	10	20006,1	28,3
2	1	20008,1	32,5	6	1	20004,5	17,7
2	2	20008,5	32,2	6	2	20004,5	18,3
2	3	20008,7	32,4	6	3	20004,6	17,9
2	4	20008,5	32,1	6	4	20004,9	17,7
2	5	20005,6	32,2	6	5	20002,1	17,7
2	6	20009,4	32,1	6	6	20005,4	17,7
2	7	20007,6	33	6	7	20004,2	18,2
2	8	20008,4	32,4	6	8	20004,7	18,1
2	9	20008,3	32,2	6	9	20004,5	17,9
2	10	20009,3	31,6	6	10	20005	17,8

Patamar	Pistão	D_{ij}	T_{ij}	Patamar	Pistão	D_{ij}	T_{ij}
3	1	20005,7	28,7	7	1	20005,8	26,4
3	2	20005,1	24,5	7	2	20005,7	26,4
3	3	20005,6	24,5	7	3	20007,4	29,5
3	4	20005,8	24,5	7	4	20006,2	26,6
3	5	20003,1	24,6	7	5	20003,7	26,5
3	6	20006,6	24,5	7	6	20007,3	26,4
3	7	20004,9	24,5	7	7	20005,4	25,9
3	8	20005,9	28,8	7	8	20005,9	26,2
3	9	20005,2	24,6	7	9	20005,7	26,3
3	10	20006	24,6	7	10	20006,6	26,8
4	1	20005,3	24,5	8	1	20006,6	27,3
4	2	20005,4	28,4	8	2	20006	27,2
4	3	20006,1	28,6	8	3	20006,3	26,4
4	4	20006,3	28,7	8	4	20007	28,2
4	5	20003,6	28,6	8	5	20005,5	30,8
4	6	20007,2	28,7	8	6	20009	30,9
4	7	20005,5	28,8	8	7	20007,6	31
4	8	20005,4	24,6	8	8	20007,6	29,9
4	9	20005,9	28,7	8	9	20007,5	29,5
4	10	20006,5	28,9	8	10	20008,5	31,4

Tabela 9.4: Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Pistões (Peças) - Segundo-experimento.

Após a transformação que possibilita a utilização do modelo com intercepto nulo, obtemos

e os dados transformados referentes às peças

Patamar	Padrão	Y_{ij}	X_{ij}
1	1	0	0
1	2	0	0
2	1	1,5	12,3
2	2	2,4	12,2
3	1	0,1	3,7
3	2	0,5	3,7
4	1	0,9	8
4	2	0,8	7,8
5	1	0,8	7,2
5	2	0,9	7,3
6	1	-0,1	-3,8
6	2	-0,4	-3,9
7	1	0,4	5
7	2	0,4	5,1
8	1	0,5	6,1
8	2	0,6	6,2

Tabela 9.5: Dados referentes ao Diâmetro do Furo e temperatura dos Padrões transformados - Segundo-experimento.

Patamar	Pistão	Y_{ij}	X_{ij}	Patamar	Pistão	Y_{ij}	X_{ij}
1	1	0	0	5	1	1,2	7,6
1	2	0	0	5	2	1,3	7,4
1	3	0	0	5	3	1,1	7,7
1	4	0	0	5	4	1,2	7,8
1	5	0	0	5	5	1	7,5
1	6	0	0	5	6	1,3	7,8
1	7	0	0	5	7	1,1	7,6
1	8	0	0	5	8	1	7,6
1	9	0	0	5	9	1,2	7,7
1	10	0	0	5	10	1	7,4
2	1	3,7	11,6	6	1	0,1	-3,2
2	2	4,6	11,3	6	2	0,6	-2,6
2	3	3,9	11,6	6	3	-0,2	-2,9
2	4	3,7	11,3	6	4	0,1	-3,1
2	5	3,3	11,4	6	5	-0,2	-3,1
2	6	3,8	11,3	6	6	-0,2	-3,1
2	7	3,6	12,2	6	7	0,2	-2,6
2	8	3,8	11,6	6	8	0,1	-2,7
2	9	4	11,4	6	9	0,2	-2,9
2	10	4,2	10,7	6	10	-0,1	-3,1

9.5 Dados da segunda fase da validação

Patamar	Pistão	Y_{ij}	X_{ij}	Patamar	Pistão	Y_{ij}	X_{ij}
3	1	1,3	7,8	7	1	1,4	5,5
3	2	1,2	3,6	7	2	1,8	5,5
3	3	0,8	3,7	7	3	2,6	8,7
3	4	1	3,7	7	4	1,4	5,8
3	5	0,8	3,8	7	5	1,4	5,7
3	6	1	3,7	7	6	1,7	5,6
3	7	0,9	3,7	7	7	1,4	5,1
3	8	1,3	8	7	8	1,3	5,4
3	9	0,9	3,8	7	9	1,4	5,5
3	10	0,9	3,7	7	10	1,5	5,9
4	1	0,9	3,6	8	1	2,2	6,4
4	2	1,5	7,5	8	2	2,1	6,3
4	3	1,3	7,8	8	3	1,5	5,6
4	4	1,5	7,9	8	4	2,2	7,4
4	5	1,3	7,8	8	5	3,2	10
4	6	1,6	7,9	8	6	3,4	10,1
4	7	1,5	8	8	7	3,6	10,2
4	8	0,8	3,8	8	8	3	9,1
4	9	1,6	7,9	8	9	3,2	8,7
4	10	1,4	8	8	10	3,4	10,5

Tabela 9.6: Dados referentes ao Diâmetro do Furo dos Pistões Transformados (Peças) - Segundo-experimento.

Peca	F1SC	TPistão	TPadrão	F1CEM	F1CB	F120	DIFF1EM	DIFF1B
<i>P1</i>	20005, 1	29, 1	30, 5	20003, 81487	20004, 23333	-0, 42	20001, 922	-2, 31
<i>P2</i>	20004, 1	29, 1	30, 5	20002, 81487	20003, 16667	-0, 35	20000, 922	-2, 24
<i>P3</i>	20004, 5	29, 3	30, 5	20003, 16096	20003, 53333	-0, 37	20001, 206	-2, 33
<i>P4</i>	20006, 3	29, 3	30, 5	20004, 96096	20005, 2	-0, 24	20003, 006	-2, 19
<i>P5</i>	20006	28, 9	30, 5	20004, 76879	20005, 03333	-0, 26	20002, 938	-2, 10
<i>P6</i>	20004, 9	29, 1	30, 5	20003, 61487	20003, 86667	-0, 25	20001, 722	-2, 14
<i>P7</i>	20006, 4	29, 1	30, 5	20005, 11487	20005, 56667	-0, 45	20003, 222	-2, 34
<i>P8</i>	20006, 4	29, 1	30, 5	20005, 11487	20005, 6	-0, 49	20003, 222	-2, 38
<i>P9</i>	20005, 9	29, 4	30, 5	20004, 534	20004, 93333	-0, 40	20002, 548	-2, 39
<i>P10</i>	20005	29, 6	30, 5	20003, 58009	20004, 2	-0, 62	20001, 532	-2, 67
<i>P1</i>	20004, 7	25, 9	23	20003, 33999	20004, 23333	-0, 89	20001, 878	-2, 36
<i>P2</i>	20004, 2	26, 2	23	20002, 75912	20003, 16667	-0, 41	20001, 204	-1, 96
<i>P3</i>	20003, 8	23, 1	23	20003, 19478	20003, 53333	-0, 34	20002, 602	-0, 93
<i>P4</i>	20005, 7	23, 2	23	20005, 06782	20005, 2	-0, 13	20004, 444	-0, 76
<i>P5</i>	20005, 7	24, 6	23	20004, 69042	20005, 03333	-0, 34	20003, 632	-1, 40
<i>P6</i>	20004, 1	23, 4	23	20003, 41391	20003, 86667	-0, 45	20002, 728	-1, 14
<i>P7</i>	20005, 4	22, 9	23	20004, 84869	20005, 56667	-0, 72	20004, 318	-1, 25
<i>P8</i>	20005	21, 5	23	20004, 82608	20005, 6	-0, 77	20004, 73	-0, 87
<i>P9</i>	20004, 5	22, 1	23	20004, 16434	20004, 93333	-0, 77	20003, 882	-1, 05
<i>P10</i>	20005, 4	25, 5	23	20004, 14781	20004, 2	-0, 05	20002, 81	-1, 39

Peça	F1SC	TPistão	TPadrão	F1CEM	F1CB	F120	DIFF1EM	DIFF1B
<i>P1</i>	20004,5	29,5	31,4	20003,21955	20004,23333	-1,01	20001,27	-2,96
<i>P2</i>	20003,6	30,9	31,4	20001,94215	20003,16667	-1,22	19999,558	-3,61
<i>P3</i>	20004,5	31,2	31,4	20002,76128	20003,53333	-0,77	20000,284	-3,25
<i>P4</i>	20006,8	32	31,4	20004,84563	20005,2	-0,35	20002,12	-3,08
<i>P5</i>	20005,8	31,2	31,4	20004,06128	20005,03333	-0,97	20001,584	-3,45
<i>P6</i>	20005,3	31,7	31,4	20003,4265	20003,86667	-0,44	20000,794	3,07
<i>P7</i>	20006,3	30,7	31,4	20004,69607	20005,56667	-0,87	20002,374	-3,19
<i>P8</i>	20006,3	30,7	31,4	20004,69607	20005,6	-0,90	20002,374	-3,23
<i>P9</i>	20005,6	29,7	31,4	20004,26563	20004,93333	-0,67	20002,254	-2,68
<i>P10</i>	20005,2	30,6	31,4	20003,62302	20004,2	-0,58	20001,332	-2,87
<i>P1</i>	20005,3	38,2	46,2	20003,52431	20004,23333	-0,71	19999,984	-4,25
<i>P2</i>	20004,5	38,9	46,2	20002,53562	20003,16667	-0,63	19998,778	-4,39
<i>P3</i>	20004,7	38,2	46,2	20002,92431	20003,53333	-0,61	19999,384	-4,15
<i>P4</i>	20007,9	39,5	46,2	20005,77388	20005,2	0,57	20001,83	-3,37
<i>P5</i>	20006,9	40,3	46,2	20004,55822	20005,03333	-0,48	20000,366	-4,67
<i>P6</i>	20006,1	41	46,2	20003,56953	20003,86667	-0,30	19999,16	-4,71
<i>P7</i>	20006,4	37,5	46,2	20004,81301	20005,56667	-0,75	20001,49	-4,08
<i>P8</i>	20006,3	37,5	46,2	20004,71301	20005,6	-0,89	20001,39	-4,21
<i>P9</i>	20007,1	40,2	46,2	20004,78518	20004,93333	-0,15	20000,624	-4,31
<i>P10</i>	20004,2	36,2	46,2	20002,96345	20004,2	-1,24	20000,044	-4,16

Peça	F1SC	TPistão	TPadrão	F1CEM	F1CB	F120	DIFF1EM	DIFF1B
<i>P1</i>	20005	29,3	30,1	20003,61096	20004,23333	-0,62	20001,626	-2,61
<i>P2</i>	20004	29,6	30,1	20002,53009	20003,16667	-0,64	20000,452	-2,71
<i>P3</i>	20004,6	29,2	30,1	20003,23792	20003,53333	-0,30	20001,284	-2,25
<i>P4</i>	20007	30,6	30,1	20005,26052	20005,2	0,06	20002,872	-2,33
<i>P5</i>	20006,4	30,1	30,1	20004,79531	20005,03333	-0,24	20002,562	-2,47
<i>P6</i>	20005,7	30,7	30,1	20003,93357	20003,86667	0,07	20001,514	-2,35
<i>P7</i>	20006,4	29,2	30,1	20005,03792	20005,56667	-0,53	20003,084	-2,48
<i>P8</i>	20006,5	30,2	30,1	20004,86835	20005,6	-0,73	20002,604	-3,00
<i>P9</i>	20006,2	29,4	30,1	20004,784	20004,93333	-0,15	20002,768	-2,17
<i>P10</i>	20005,6	30,9	30,1	20003,77965	20004,2	-0,42	20001,298	-2,90
<i>P1</i>	20004,8	37,4	38,6	20002,28997	20004,23333	-1,94	19998,428	-5,81
<i>P2</i>	20004	38,1	38,6	20001,30127	20003,16667	-1,87	19997,222	-5,94
<i>P3</i>	20004,6	36,7	38,6	20002,27866	20003,53333	-1,25	19998,634	-4,90
<i>P4</i>	20007,3	39,6	38,6	20004,19692	20005,2	-1,00	19999,652	-5,55
<i>P5</i>	20005,9	39,2	38,6	20002,90475	20005,03333	-2,13	19998,484	-6,55
<i>P6</i>	20004,7	38,4	38,6	20001,9204	20003,86667	-1,95	19997,748	-6,12
<i>P7</i>	20006,1	36,7	38,6	20003,77866	20005,56667	-1,79	20000,134	-5,43
<i>P8</i>	20006,1	36,6	38,6	20003,80562	20005,6	-1,79	20000,192	-5,41
<i>P9</i>	20006,5	39	38,6	20003,55866	20004,93333	-1,37	19999,2	-5,73
<i>P10</i>	20004,9	36,8	38,6	20002,55171	20004,2	-1,65	19998,876	-5,32

Pega	F1SC	TPistão	TPadrão	F1CEM	F1CB	F120	DIFF1EM	DIFF1B
<i>P1</i>	20005,2	31,2	34,4	20003,83628	20004,23333	-0,40	20001,584	-2,65
<i>P2</i>	20004,3	31,7	34,4	20002,8015	20003,16667	-0,37	20000,394	-2,77
<i>P3</i>	20004,7	32	34,4	20003,12063	20003,53333	-0,41	20000,62	-2,91
<i>P4</i>	20006,6	32,6	34,4	20004,85889	20005,2	-0,34	20002,172	-3,03
<i>P5</i>	20006,2	32,2	34,4	20004,56672	20005,03333	-0,47	20002,004	-3,03
<i>P6</i>	20005,1	32,4	34,4	20003,4128	20003,86667	-0,45	20000,788	-3,08
<i>P7</i>	20006,4	31,5	34,4	20004,95541	20005,56667	-0,61	20002,61	-2,96
<i>P8</i>	20006,4	31,3	34,4	20005,00933	20005,6	-0,59	20002,726	-2,87
<i>P9</i>	20006,1	31,4	34,4	20004,68237	20004,93333	-0,25	20002,368	-2,57
<i>P10</i>	20004,9	31,2	34,4	20003,53628	20004,2	-0,66	20001,284	-2,92

Bibliografia

- [1] Draper, N.R. & Smith, H. Applied Regression Analysis, Nova Iorque: John Wiley e Sons, 1998.
- [2] Dempster, A.P. & Laird, N.M. & Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 39, 1-38.
- [3] Gelman, A.E. & Rubin, D. 1992. Inference from iterative simulation using sequences, Statistical Science, vol 7, 457-511.
- [4] Gelman, A.E. & Gelman, D. 1984. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, n.6, pg 721-741.
- [5] Dolby, G.R. 1976. The ultrastructural relation: A synthesis of the relations. Biometrika, 63, 1, 39-50.
- [6] Box, G.E.P. & N.R. Draper 1987. Empirical Model Building and Response Surface. Wiley, New York.
- [7] Pranab, K.S & Singer, M.J. 1993. Large Sample Methods in Statistics. Chapman Hall/CRC.
- [8] Graybill, F.A. 1976. Theory and Application of the Linear Model, Pacific Grove, California.
- [9] Graybill, F.A. 1983. Matrices with Applications in Statistics, 2^o edition.

- [10] Cheng, C.L. & Van Ness, J.W. 1999. Statistical Regression with Measurement Error. Kendall's of Statistic 6, Arnold.
- [11] Fuller, W.A. 1987. Measurement Error Models, John Wiley & Sons.
- [12] Pericchi, L.R. & Smith, A.F.M 1992. Exact and Approximate Posterior Moments for a Normal Location Parameter. Journal Royal Statistical Society. B, 54, 3, 793-804.
- [13] Tanner, M.A. & Wong, W.H. 1987. The calculation of Posteriori Distributions by Data Augmentation. Journal of the American Statistical Association, 82 (398), Theory and Methods, 528-540.