**NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS:
UMA COMPARAÇÃO COM OS
RESULTADOS USUAIS EM
SIMULAÇÃO.**

Aluno: Gilberto C. Ruggiero Bernasconi
Orientadora: Maria Creusa Bretas Salles

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Ciências de Computação e Matemática Computacional.

São Carlos, janeiro de 1994

Comparo a pesquisa ao pólen que
as abelhas levam até as flores
para que estas floresçam e dêem
frutos.

À Arlene.

AGRADECIMENTOS

À Prof. Dra. Maria Creusa B. Salles, do ICMSC-USP, minha orientadora, pela realização deste trabalho, pelo tempo, amizade e paciência que me dispensou, além da análise crítica apresentada no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Donald McNickle da University of Canterbury, New Zealand, pelas sugestões e direção feitas ao trabalho, durante sua visita ao ICMSC-USP.

Aos colegas do ICMSC-USP pelo apoio e estímulo que recebi durante este período de convivência.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Números aleatórios antitéticos são usualmente utilizados em simulação para a obtenção de resultados com menor variância.

Utilizando uma fila M/M/1 como modelo a ser simulado, demonstramos neste trabalho que, além de reduzir a variância da variável observada, tempo de espera na fila, a simulação gerada com números aleatórios antitéticos produz uma melhora na porcentagem de cobertura do tempo médio real de espera pelos intervalos de confiança gerados e no comprimento médio do intervalo de confiança, sem alterar de forma significativa as autocorrelações, em comparação com os resultados obtidos através da geração usual de números aleatórios.

ABSTRACT

For years, antithetic random numbers have been used as a variance-reduction technique on simulation. In this work we present results, using an M/M/1 queue as the model to be simulated, on the performance of simulation using antithetic and usual random numbers, showing that the expected half width of the confidence interval, the coverage of the real value of the expected waiting time by the generated confidence intervals are better with antithetic random numbers, and the autocorrelations are almost the same in both cases.

ÍNDICE

RESUMO	V
ABSTRACT	V
1. INTRODUÇÃO	01
2. ALGUNS RESULTADOS PARA O MODELO DE FILA M/M/1	06
3. SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA	11
3.1 Introdução	11
3.2 Duração do período de estabilização	14
3.3 Métodos para obtenção dos dados	17
3.3.1 Replicação	18
3.3.2 Batch Means	21
3.4 Comparação entre os métodos	23
3.5 Autocorrelação entre os batches	29
4. NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS	31
4.1 Resultados gerais	31
4.2 Análise dos resultados da simulação	35
5. TESTE DA DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAIS	37
6. CONCLUSÕES	42
BIBLIOGRAFIA	44
APÊNDICE 1	46
APÊNDICE 2	48

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Sistema de filas M/M/1	07
Figura 2	- Método de Replicação	19
Figura 3	- Método Batch Means	22

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Teste X^2 para a sequência de números pseudo-aleatórios	14
Tabela 2	- Resultado sobre o período de estabilização	16
Tabela 3	- Porcentagem de cobertura por intervalos de 90% de confiança na fila M/M/1 com $\rho = 0.9$	24
Tabela 4	- Porcentagem de cobertura por intervalos de 90% de confiança, considerando um período de estabilização, na fila M/M/1 com $\rho = 0.9$	25
Tabela 5	- Porcentagem de cobertura por intervalos de 90% de confiança, considerando um período de estabilização de 500 pessoas, na fila M/M/1 com $\rho = 0.9$	27
Tabela 6	- Média das autocorrelações de lags 1,2 e 3 com 200 simulações com números aleatórios usuais.	30
Tabela 7	- Estatística dos resultados de 200 simulações obtidos com números aleatórios antitéticos. ...	35
Tabela 8	- Estatística dos resultados de 200 simulações obtidos com números aleatórios usuais e antitéticos.	40
Tabela 9	- Dados obtidos usando número aleatórios usuais.	48
Tabela 10	- Dados obtidos usando número aleatórios antitéticos.	53

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os problemas enfrentados por pessoas que trabalham com sistemas envolvendo teoria das filas estão, em certos casos, na resolução analítica do sistema, pela própria complexidade e dificuldade do problema em estudo.

Neste caso uma alternativa seria avaliar o desempenho do sistema realizando experimentos com o mesmo, ou ainda podemos recorrer à técnica de simulação estocástica, onde os experimentos são realizados com um modelo matemático. Ou seja, através da simulação estocástica formulada a partir de um modelo experimental no qual observamos dados numéricos, podendo então conhecer mais detalhadamente o sistema e inferir sobre o comportamento do mesmo.

A motivação deste trabalho é buscar uma maneira apropriada de utilizar simulação estocástica (que denotaremos por simulação, a partir de agora), para que esta represente adequadamente o sistema em estudo, quanto à precisão dos resultados obtidos.

Nesta aproximação do sistema em estudo procuramos evitar possíveis erros que são decorrentes de: trabalhamos com um gerador de números pseudo-aleatórios, usarmos diferentes métodos de coleta de dados, período de estabilização insuficiente e outros fatores que venham contribuir para o erro do modelo simulado.

O objetivo deste trabalho é analisar a dimensão do erro cometido na simulação de uma fila, através não só dos números aleatórios usualmente utilizados mas também dos números aleatórios antitéticos, usando a porcentagem de cobertura, obtidas através dos

intervalos de confiança dos valores de interesse gerados pela simulação. Para isto, utilizamos o procedimento de análise desenvolvido por Law (1977) que trabalha com uma fila M/M/1 em equilíbrio, e o método de coleta de dados batch means.

A maneira que Law compara os resultados obtidos pelos números aleatórios usuais é através da construção de intervalos de confiança para os tempos médios de espera na fila e verificando a porcentagem de cobertura, para o valor teórico desta variável. Com o auxílio de tabelas com diferentes valores do número total de dados simulados e diferentes números de rodadas, Law fornece uma visão ampla sobre a porcentagem de cobertura, na comparação dos métodos de coleta de dados por replicação e batch means.

Quanto ao método antitético de geração de números pseudo-aleatórios este é usado na literatura como um método de redução da variância dos dados coletados através de simulação (Law e Kelton (1991)). A idéia central foi apresentada por Hammersley e Marton em 1956 no contexto de simulação de Monte Carlo, onde os números aleatórios de entrada do modelo são simulados em pares complementares, tal que se um elemento do par apresentar uma observação pequena, o outro elemento, que será o número antitético do primeiro, é compensado por um valor grande de maneira que os dois valores são negativamente correlacionados, como será visto no capítulo 4.

A partir da década de 70 vários autores contribuíram no estudo de números aleatórios antitéticos, buscando a confiabilidade e eficácia do método, por exemplo: Andréasson (1972), George (1977), Mitchell (1973), Wilson (1979), Law e Kelton (1982), Rubinstein, Samoradnitsky e Shaked (1985) e outros, citados em Law e Kelton (1991). Esses autores, trabalhando com diferentes modelos, mostraram não só analiticamente, como através de simulação, que o uso dos números aleatórios antitéticos conduz à redução de variância, bem como calcularam a magnitude da redução.

Como dissemos anteriormente os números aleatórios antitéticos são usualmente utilizados como uma técnica de redução da variância

e não encontramos nenhum trabalho semelhante ao nosso, o qual compara os números aleatórios antitéticos com os usuais, através da porcentagem de cobertura.

O nosso trabalho é desenvolvido através da simulação de uma fila M/M/1. Necessitamos do conhecimento teórico da mesma, para que possamos avaliar os resultados obtidos com o uso dos números aleatórios usuais e antitéticos, o que é feito no capítulo 2. Fazemos então o desenvolvimento prático que é a construção e uso adequado de um programa de simulação. A linguagem de simulação utilizada por nós é o GPSS/H, General Purpose Simulation System, versão H (Banks, Carson, Ngo Sy, (1989)), o qual possui vários recursos facilmente manuseados e que nos fornece grande quantidade de resultados sobre o comportamento do sistema em estudo.

Com o auxílio da linguagem de simulação desenvolvemos o programa que simula uma fila M/M/1, com $\lambda = 1$, $1/\mu = 0.9$, portanto $\rho = 0.9$. Como nosso objetivo é analisar o sistema em equilíbrio, tomamos os devidos cuidados com a duração do período para a estabilização e com os métodos para obtenção dos dados, que descreveremos no capítulo 3.

Para facilitar a compreensão do texto iremos esclarecer o contexto das seguintes palavras: chamamos de simulação o experimento computacional completo para coleta de dados que é composto de várias rodadas de simulação. Estas rodadas correspondem aos batches quando utilizamos o método batch means, ou às rodadas quando utilizamos o método de replicação de coletas de dados.

O período de estabilização é o intervalo de tempo necessário para que o sistema entre em equilíbrio. Na busca para se obter alternativas para o período de estabilização, recorremos ao artigo de Pawlikowski (1990), onde ele descreve que possivelmente num período inicial de comprimento de 2% do valor total simulado ocorre vício, bem como utilizamos os resultado de Odoni e Roth (1983) comprovando esta porcentagem. Passamos, então, a considerar o

comprimento de aproximadamente 4% do total simulado, como sendo o período de estabilização, durante o qual não coletamos resultados. Além disso sabemos que a distribuição de equilíbrio de uma M/M/1 é uma distribuição geométrica, conforme demonstrado no capítulo 2. Utilizamos então, para inicializar o sistema, a função acumulada da distribuição geométrica com parâmetro $p = (1 - \rho)$ para associar um número inicial de fregueses no sistema, chegando assim ao período de estabilização mais rapidamente.

Com relação aos métodos para obtenção dos dados, optamos pelo batch means por ser mais viável que o de replicações, pois utilizamos um único período de estabilização, enquanto na replicação temos que usar um período de estabilização para cada rodada, como pode ser visto no capítulo 3. Em compensação, sabemos que esse método pode nos levar à uma dependência entre as médias dos batches.

Para a definição do nosso experimento de simulação, quanto ao número de batches necessários em cada rodada, utilizamos também os resultados apresentados em Schmeiser (1981) que descreveremos a seguir:

Schmeiser, usando o método de batch means e supondo que o período de instabilidade do sistema é removido e que existe independência entre os batches, chega à conclusão de que a quantidade de batches ideal varia de 10 a 30 e é independente do número de fregueses que entram no sistema. Ele mostra, com o uso de intervalos de confiança para o estimador pontual da média β , representando a média dos tempos médios de espera na fila, que a probabilidade de cobertura para β não aumenta acima de 30 batches e não diminui abaixo de 10 batches. Por esta razão optamos pela utilização de 30 batches em cada uma de nossas simulações, no qual cada batch tem 1280 fregueses saindo do sistema.

Além do número ideal de batches, precisamos verificar a independência entre eles, (McNickle (1988)) através do cálculo da autocorrelação entre os batches, onde observamos as médias das autocorrelações de lags 1, 2 e 3 em um total de 200 repetições do

experimento de simulação. Os resultados são apresentados no capítulo 3.

Também usando as 200 repetições, testamos as hipóteses de uma possível igualdade entre os resultados obtidos com números aleatórios usuais e antitéticos comparando as médias do tempo médio de espera na fila, a amplitude do intervalo de confiança e as autocorrelações de lags 1,2 e 3. Mostramos que existe diferença somente entre a amplitude do intervalo de confiança, conforme capítulo 5. Os intervalos de confiança foram construídos, com uma distribuição t-Student com 90% de confiança, através das médias dos batches que são compostos dos tempos médios de espera na fila. Verificamos se o valor teórico do mesmo está contido no intervalo de confiança (isto é denominado de porcentagem de cobertura), onde obtivemos uma porcentagem de cobertura no método usual de 81% e 87% no método antitético. Concluimos que o método antitético, além de reduzir a variância em aproximadamente 67%, apresenta um sensível ganho com relação à porcentagem de cobertura.

CAPÍTULO 2

ALGUNS RESULTADOS PARA O MODELO DE FILA M/M/1

Nas atividades diárias das nossas vidas tais como irmos ao supermercado, partilhar linhas telefônicas ou trafegar por uma avenida, quase sempre somos obrigados a enfrentar filas. Existem congestionamentos ocorrendo na produção, no transporte, nas comunicações, nos computadores ou em qualquer gênero de sistema que permite a ocorrência de filas, resultando no bloqueamento de recursos e na perda de tempo, dinheiro e paciência. Esforços para o controle desses congestionamentos são de vital importância e encontramos em Teoria das Filas com o uso da Simulação, uma ferramenta para as atividades de pesquisa.

Uma das filas mais conhecidas e que apresenta maior quantidade de resultados teóricos já desenvolvidos é a M/M/1, no qual nos baseamos para o desenvolvimento deste trabalho (ver, por exemplo, Gross e Harris (1985) e Allen (1990)).

Vamos considerar uma fila M/M/1, onde o processo de chegada é um processo de Poisson de parâmetro λ , os tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial de parâmetro μ , e os processo de chegada e serviço são considerados independentes entre si. O sistema tem somente um canal de atendimento, em que os fregueses são atendidos um a um, segundo a

ordem de chegada. O tamanho da sala de espera é infinita. A fila M/M/1 está representada na figura 1.

Sendo o processo de chegada Poisson, o tempo entre chegadas sucessivas tem distribuição exponencial de parâmetro λ que são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (ver no apêndice 1 o comando "generate").

Figura 1: SISTEMA DE FILA M/M/1

A função densidade para os tempos entre as chegadas e os tempos de serviço são então, respectivamente:

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^{-\lambda t} & , t \geq 0, \lambda > 0, \\ b(t) = \mu e^{-\mu t} & , t \geq 0, \mu > 0. \end{cases}$$

Portanto, $1/\lambda$ é a média dos tempos entre chegadas e $1/\mu$ é a média dos tempos de serviço.

Seja o processo de Markov $\{N_t: t \geq 0\}$, que conta o número de pessoas no sistema no instante $t \geq 0$, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ e gerador infinitesimal Q , do tipo nascimento e morte.

Resolvendo a equação de equilíbrio $pQ = 0$, onde $p = \{p_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$ é a distribuição em equilíbrio do sistema, se existir, obtemos:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\ p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ p_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ \vdots \\ p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \end{cases}$$

Seja $\rho = \lambda/\mu$, definida como taxa de ocupação do sistema, então $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ é uma série geométrica, portanto converge se e só se $|\rho| < 1$.

Para a existência da distribuição de equilíbrio temos que satisfazer

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Logo sob a condição de $\rho < 1$ ($\lambda < \mu$), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

Temos então o resultado da equação de equilíbrio do processo $\{N_t: t \geq 0\}$ dado por:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho$$

$$p_n = \rho^n (1 - \rho) \quad (2.1)$$

onde p_n é a probabilidade de encontrarmos n pessoas no sistema em equilíbrio.

Avaliamos o comportamento do sistema através de medidas de desempenho e no caso da fila M/M/1 essas medidas já estão amplamente desenvolvidas (ver por exemplo Gross e Harris (1985)). Citaremos apenas aquelas de maior importância e as necessárias para o desenvolvimento deste trabalho:

1. O número esperado de pessoas no sistema em equilíbrio é:

$$L = E[N] = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

que pode ser calculado através da esperança da distribuição de equilíbrio $\{p_n: n \geq 0\}$.

2. O número esperado de pessoas na fila em equilíbrio é dado por:

$$L_q = E[N_q] = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

calculado usando a relação:

$$N_q = \begin{cases} 0 & \text{se } N \leq 1 \\ N-1 & \text{se } N > 1 \end{cases}$$

3. O tempo médio de permanência dos fregueses no sistema, incluindo o tempo de serviço é:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

que pode ser calculado diretamente pelo processo $\{N_t\}$ ou pela fórmula de Little $L = \lambda W$.

4. O tempo médio de espera na fila é:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (2.2)$$

O tempo médio de espera na fila W_q será o resultado utilizado em nosso trabalho, pois é sobre o mesmo que faremos as análises de simulação.

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

3.1 - INTRODUÇÃO

Simulação estocástica é uma técnica numérica para realizar experimentos com sistemas onde o fator tempo está associado ao experimento, e devido ao fato do sistema apresentar mudanças no decorrer do tempo, este é conotado de sistema dinâmico.

O desenvolvimento de simulação estocástica teve início no final da década de 50 com a busca de soluções em sistemas dinâmicos. Em 1962 foi documentado o aparecimento das primeiras linguagens de simulação apropriadas a sistemas dinâmicos, Simscript e GPSS.

Por exemplo podemos simular estocasticamente uma rede de computadores em uma determinada agência, onde cada usuário tem a possibilidade de se comunicar com os outros usuários. Através da simulação podemos obter informações sobre o número de dados que um determinado usuário recebe em um horário de pico, ou ainda o tempo médio de processamento de cada dado. A simulação pode ser útil também na implementação da rede na agência, pois através dela podemos conhecer o número de terminais ideais para que a agência funcione sem um acúmulo de informações ou ociosidade dos terminais.

Os conceitos e procedimentos para o uso de simulação

estocástica, podem ser descritas de forma que o processo de simulação compreende um conjunto de etapas tais como: definição do experimento, modelagem, implementação computacional, validação, coletas de dados e análise estatística dos dados, que descreveremos resumidamente a seguir.

A definição do experimento consiste na própria definição do sistema dinâmico e nesta primeira etapa definimos o nível de estrutura que será incorporada no modelo da simulação.

No caso da rede de computadores por exemplo, podemos definir a que nível iremos compor o modelo, usando somente um único terminal ou todos os terminais da agência. Também devemos estabelecer as variáveis internas e externas que atuam no sistema e o relacionamento entre estas variáveis.

Na modelagem buscamos as funções que serão modeladas e suas características essenciais ao nosso modelo. Nesta etapa a definição das funções bem como essas características para a construção do modelo de simulação dependem da necessidade ou viabilidade (financeira) da modelagem.

Com o modelo definido coletamos os dados amostrais do sistema real, se for possível, através de cronometragem ou contagem para que possamos caracterizar o processo de chegada e de atendimento dos fregueses.

Na implementação computacional construímos um programa de simulação, ou usamos as linguagens de simulação já existentes, que represente o modelo anteriormente definido.

Na etapa de validação verificamos se os resultados obtidos através do programa estão corretos, comparando com os resultados teóricos conhecidos, ou com aproximações a resultados conhecidos.

Somente depois de cumprirmos as etapas anteriores podemos

coletar os dados da simulação com convicção que o simulador é confiável.

Na análise estatística dos resultados devemos verificar se os resultados são satisfatórios e suficientes para o estudo do modelo que está sendo simulado.

Nosso trabalho usará os resultados teóricos da fila M/M/1, em equilíbrio, na busca de resultados em Teoria de Simulação, por isso suprimimos as duas primeiras etapas que é a definição do experimento e a modelagem.

O GPSS/H é alimentado por um gerador de números pseudo-aleatórios que é o gerador linear congruencial multiplicativo de Lehmer. Através deste gerador o GPSS/H possui uma sequência de aproximadamente dois bilhões de números armazenados, onde indicamos o ponto inicial nesta sequência de números pseudo-aleatórios. Usaremos o termo "dado gerado" e "gerador" nos referindo aos elementos aleatórios já armazenados no GPSS/H, onde definimos como "semente" a posição inicial indicada por nós na sequência.

Consideramos um gerador de números pseudo-aleatórios confiável quando satisfaz as exigências de independência e uniformidade, entre elas:

- os números gerados são não correlacionados;
- os números são distribuídos uniformemente entre 0 e 1;
- o gerador tem uma longa sequência de números distintos.

Para testar a uniformidade dos dados gerados no GPSS/H construímos programas que coletam dados segundo uma distribuição uniforme. Através do teste X^2 com a hipótese H_0 : os dados possuem uma distribuição uniforme, contra a hipótese H_1 : os dados não possuem uma distribuição uniforme, verificamos a eficiência quanto à uniformidade do gerador de números pseudo-aleatórios do GPSS/H. Os resultados estão na tabela 1.

Tabela 1: TESTE χ^2 PARA A SEQUÊNCIA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS

QUANTIDADE DE DADOS DE UMA DISTR. UNIFORME (0,1)	VALOR CALCULADO P/ O TESTE χ^2	VALOR TABELADO P/ O TESTE χ^2
1000	6.08	$\chi^2_9(0.05) = 16.92$
5000	9.132	$\chi^2_9(0.05) = 16.92$
10000	21.132	$\chi^2_{19}(0.05) = 30.14$

Nos três casos aceitamos a hipótese de que os dados pertencem a uma distribuição uniforme, com estes resultados passamos a utilizar com mais segurança o gerador de números pseudo-aleatórios.

3.2 - DURAÇÃO DO PERÍODO DE ESTABILIZAÇÃO

Nos problemas de simulação o estado inicial do sistema é um fator de preocupação no uso da simulação. O estado inicial mais simples é o estado "vazio" no qual a simulação começa com nenhum freguês no sistema. Mas como o propósito é trabalharmos com o sistema em equilíbrio, para que possamos fazer comparações com os resultados teóricos, partimos de um outro estado que não seja o vazio, como descreveremos no final deste item.

Podemos definir como duração do período de estabilização a quantidade de tempo necessária para que o sistema entre em equilíbrio.

O método mais utilizado na solução do período de instabilidade é retardar a coleta de estatísticas durante um período inicial. Isto normalmente é realizado estabelecendo um ponto de truncamento, antes do qual nenhum valor obtido é incluído na estatística, eliminando-se assim os valores coletados durante o período em que o sistema não esteja estabilizado. O problema está na definição do momento em que será feito este truncamento.

Para determinar este período de tempo em que o sistema não está em equilíbrio utilizamos os resultados do artigo de Odoni e Roth (1983), que trabalhando com a simulação de filas Markovianas, utilizaram como medida o comprimento médio da fila em equilíbrio. Através de resultados numéricos de filas Markovianas e de testes de aproximação obtidos computacionalmente, eles chegam a determinação do período de estabilização que melhor se ajusta aos resultados numéricos, através do coeficiente de relaxação calculado por:

$$\tau = \frac{C_a^2 + C_s^2}{2.8\mu(1-\sqrt{\rho})^2} \quad (3.2.1)$$

onde C_a e C_s são os coeficientes de variação para o tempo entre chegadas e o tempo de serviço, respectivamente, $1/\mu$ é o tempo médio de serviço e ρ é a taxa de ocupação do sistema.

Usando os resultados encontrados de Odoni e Roth, verificamos com o uso do GPSS/H se iremos obter os mesmos resultados para o coeficiente de relaxação.

Coletamos os tempos entre chegadas sucessivas e os tempos de serviço para 10 mil pessoas saindo do sistema através da simulação, com diferentes valores de λ e μ . Com estes resultados calculamos os coeficientes de variação (C_a e C_s) e substituindo na fórmula (3.2.1) encontramos os tempos de relaxação na fila M/M/1, lembrando que $\rho = \lambda/\mu$. Comparamos com os resultados obtidos por Odoni e Roth,

resultando na tabela 2.

Tabela 2: RESULTADOS SOBRE O PERÍODO DE ESTABILIZAÇÃO.

SISTEMA M/M/1			
μ	ρ	τ OBTIDO POR ODONI E ROTH	τ OBTIDO POR NÓS
0.5	0.25	5.7	5.701
	0.50	16.7	16.615
	0.75	80.0	79.387
	0.85	234.0	233.512
	0.90	542.0	539.179
1.0	0.25	2.9	2.850
	0.50	8.3	8.308
	0.75	40.0	39.618
	0.85	117.0	116.744
	0.90	271.0	269.627
2.0	0.25	1.4	1.035
	0.50	4.2	4.154
	0.75	19.9	19.809
	0.85	59.0	58.372
	0.90	136.0	134.822

Podemos observar na tabela 2 que os valores τ , gerados por simulação, obtidos por Odoni e Roth e por nós são praticamente iguais, e concluimos que podemos utilizar os resultados sobre período de relaxação definidos por Odoni e Roth.

Na determinação do tempo de relaxação para o nosso trabalho, simulamos 10 mil pessoas saindo da fila M/M/1 com os valores de $\lambda = 1$ e $1/\mu = 0.9$, portanto com $\rho = 0.9$, por serem os valores utilizados neste trabalho para compararmos os resultados com números aleatórios antitéticos e usuais, calculamos o período de

estabilização. O valor determinado foi 238.25 unidades de tempo, que equivale aproximadamente ao mesmo número de pessoas entrando no sistema, pois estamos considerando que em média chega um freguês por unidade de tempo ($\lambda = 1$). Por outro lado, este valor também corresponde a 2.38% das 10 mil pessoas, confirmando o resultado encontrado por Pawlikowski (1990), onde ele cita que em um comprimento inicial de 2% do valor do total da simulação ocorre vício.

Como o tempo de estabilização é um fator de grande importância, pois a utilização do período transiente do sistema incluído nos resultados finais da simulação comprometeria todo o nosso estudo, optamos por utilizar uma margem maior de segurança. Passamos então a desprezar o comprimento de aproximadamente 4% da simulação.

Além disso sabemos que a distribuição de equilíbrio de uma M/M/1 é uma distribuição geométrica (equação 2.1). Utilizamos, então, a função distribuição acumulada da geométrica para determinar o número de fregueses presentes no sistema no início da simulação, num total de 26 fregueses (veja programa no apêndice 1). Desta maneira, iniciamos a simulação com um número, entre 0 e 26 fregueses no sistema, segundo a distribuição de equilíbrio, chegando assim ao período de estabilização mais rapidamente.

3.3 - MÉTODO PARA OBTENÇÃO DOS DADOS

Nos últimos 25 anos tem-se discutido a metodologia de análise de saída de dados, considerando simulações em equilíbrio. Entre

outros problemas enfrentados nos resultados simulados, estes métodos buscam resolver problemas tais como a não estacionaridade inicial causada pela existência de um período inicial transiente, ou a correlação entre as observações coletadas.

Entre esses métodos os mais conhecidos são: replicação, batch means, regenerativo, método baseado na análise espectral e outros. Os dois primeiros métodos serão detalhados e comparados na seção 3.3.1, tendo como base os resultados de Law (1977) que utiliza da simulação de uma fila M/M/1 nesta comparação.

No método regenerativo, as observações são agrupadas em ciclos de comprimentos aleatórios que são definidos por instantes consecutivos em que o sistema atinge o ponto de regeneração. Pela teoria de processo regenerativo temos que esses ciclos são independentes e possuem o mesmo comportamento estocástico.

O método baseado na análise espectral assume que a sequência de observações são autocorrelacionadas e muda a análise, no domínio das frequências, aplicando a transformação de Fourier nas funções autocorrelacionadas produzindo a função de densidade espectral.

Os três primeiros métodos: replicação, batch means e regenerativo, são usados na tentativa de eliminar os efeitos da autocorrelação enquanto o método baseado na análise espectral é usado na tentativa de estimar este efeito.

3.3.1. - Replicação

O método de replicação é conceitualmente um dos mais conhecidos métodos para coleta de dados obtidos através da

simulação, quanto à análise dos resultados. Suponha que replicamos ou repetimos k rodadas do mesmo experimento de simulação, onde para cada rodada usamos uma sequência diferente e independente de números pseudo-aleatórios, tornando as rodadas não só independentes entre si como identicamente distribuídas.

Em cada rodada, m observações são coletadas de um processo de interesse $\{X_n: n \geq 0\}$, com $E[X] = \beta$, em equilíbrio, gerando um total de n observações ($n = km$). O valor médio das observações coletadas durante cada rodada é calculado, como mostra a figura 2 (McNickle (1992)).

Figura 2: MÉTODO DE REPLICAÇÃO

Podemos escrever esta sequência de dados da seguinte maneira:

$$(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}), \dots, (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km})$$

onde o elemento x_{ij} , $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$, refere-se ao j -ésimo resultado observado na i -ésima rodada.

Através das sequências de dados determinarmos as médias amostrais, obtidas em cada rodada, e que deverá estar mais próxima da média β quanto maior for o comprimento das rodadas. Estas médias são denotadas da seguinte maneira:

$$\bar{X}_1(m), \bar{X}_2(m), \dots, \bar{X}_k(m)$$

onde:

$$\bar{X}_i(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{ij}$$

é o estimador pontual da média β da variável aleatória $\{X_n: n \geq 0\}$ na i -ésima rodada. De forma análoga temos o estimador média das médias para as k rodadas:

$$\bar{\bar{X}}(k, m) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i(m)$$

que é numericamente equivalente à média geral dos dados, $\bar{X}(n)$, $n = k.m$, e que é usualmente considerado o estimador final da simulação para a média de $\{X_n: n \geq 0\}$ em equilíbrio. Podemos obter também o estimador intervalar referente ao intervalo de confiança para a média das médias das k rodadas com $100(1-\alpha)\%$ de confiança. Usamos a distribuição t-Student, que é utilizada para pouca quantidade de dados, com $k-1$ graus de liberdade, na construção do intervalo de confiança, visto que o número k de pontos obtidos para o estimador média das médias é usualmente próximo de 30 pontos (ver Schmeiser (1981)), e m (comprimento da rodada) suficientemente

grande para garantir a normalidade de $\bar{X}_i(m)$. Esse intervalo é então definido por:

$$\bar{X}(k,m) \pm t_{k-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \theta[\bar{X}(k,m)]$$

onde:

$$\theta^2[\bar{X}(k,m)] = \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{X}_i(m) - \bar{X}(k,m))^2}{k(k-1)}$$

é o estimador da variância de $\bar{X}(k,m)$ e $t_{k-1, 1-\alpha/2}$ para $0 < \alpha < 1$ é obtido através das tabelas da distribuição t-Student com k-1 graus de liberdade.

Observe que nas m observações coletadas, a média amostral $\bar{X}_i(m)$ flutua em torno da média populacional β com erro padrão $\sigma/\sqrt{m}$ (onde σ é o desvio padrão populacional) com probabilidade de 90%.

3.3.2. - Batch Means

Outro método de coleta de dados é o batch means onde executa-se uma única rodada coletando n observações ($x_1, x_2, \dots, x_n$) do processo observado $\{X_n: n \geq 0\}$, que é dividida em k subconjuntos denominados de batches e que não se sobrepõem ($x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}$), ($x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$), ..., ($x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}$), de mesmo tamanho m, como mostra a figura 3. Como no método de replicações, onde cada batch

é equivalente a uma rodada, as médias dos batches $\bar{X}_1(m)$, $\bar{X}_2(m)$,
.... $\bar{X}_k(m)$ são calculadas.

Figura 3: MÉTODO BATCH MEANS

O estimador pontual e o intervalo de confiança para a média β , também são calculados da mesma forma como é feito no método de replicações.

Quando consideramos um período inicial para estabilização do sistema, o método batch means contorna o problema de precisarmos descontar o período inicial várias vezes, como ocorre no método de

replicação. Isto porque na simulação por batch means usamos um único período de estabilização (figura 3), enquanto no método de replicações temos que usar um período de estabilização para cada replicação (figura 2), tornando o método de batch means potencialmente equivalente ao de replicação.

Assumindo o fato de que o período inicial tenha sido descartado temos que cada batch se encontra no estado de equilíbrio. Se o tamanho m do batch for suficientemente longo, a média dos batches serão aproximadamente independentes e identicamente distribuídas, ou seja, as médias serão menos correlacionadas. A dificuldade é encontrar tamanhos de batches que assegurem a não correlação entre as médias dos batches.

3.4 - COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Na comparação entre os métodos de coleta de dados por replicação e batch means, recorreremos ao artigo do Law (1977) que compara os dois métodos através de um sistema de fila M/M/1. Como foi dito na introdução estaremos usando a palavra rodada equivalendo a batch no método de batch means ou a rodada quando utilizamos o método de replicação na coleta de dados.

Neste artigo, Law verifica a performance de 400 experimentos independentes de simulação, onde cada experimento corresponde a uma simulação de k rodadas no caso de replicação e k batches no batch means. Utilizando em cada experimento diferentes valores do número total de dados ($n = 1600, 3200, 6400$ e 12800) e diferentes valores

de número de rodadas/batches ($k = 5, 10, 20$ e 40). Lembrando que $n = km$ temos experimentos que os valores das m observações em cada rodada/batch aumentam proporcionalmente aos valores de n , número total de dados, mantendo-se k fixo.

O processo observado, para a comparação, é o tempo de espera na fila de cada um dos fregueses $\{W_{q,n}: n \geq 0\}$ que a partir de agora denominaremos de $\{X_n: n \geq 0\}$.

O valor teórico do tempo médio de espera na fila é 8.1 , quando $\lambda = 1$ e $1/\mu = 0.9$ e portanto $\rho = 0.9$, calculado através da equação (2.2).

Com o resultado teórico Law verifica a percentagem de cobertura, isto é, percentagem de vezes que o valor teórico está contido no intervalo de confiança, obtido através de uma distribuição t-Student com 90% de confiança, para a média dos tempos médios de espera na fila dos fregueses (ver capítulo 3, secção 3.3).

Os resultados obtidos por Law estão na tabela 3.

Tabela 3: PORCENTAGEM DE COBERTURA POR INTERVALOS DE 90% DE CONFIANÇA NA FILA M/M/1 COM $\rho = 0.9$.

\ k n \	REPLICAÇÃO				BATCH MEANS			
	5	10	20	40	5	10	20	40
1600	52.75	18.25	00.00	00.00	63.25	57.50	47.50	36.50
3200	67.00	41.75	04.50	00.00	76.75	68.25	60.50	52.25
6400	75.25	62.00	27.00	00.00	80.50	76.75	72.00	61.25
12800	83.25	73.75	52.75	09.00	86.50	81.25	79.75	74.00

Law mostra ainda o vício sobre a porcentagem de cobertura quando não é utilizado um período inicial para a estabilização. Para isso, repete este experimento com a utilização de um período de estabilização, cujo comprimento não é citado e onde a cada simulação é desprezado um período em que o sistema não está estável. Na tabela 4 apresentamos os resultados obtidos por Law.

Nota-se perfeitamente um acréscimo em todos os valores referentes à porcentagem de cobertura quando usamos um período de estabilização, ao comparamos as tabelas 3 e 4. Também para estes dois resultados observa-se que no método de replicação este acréscimo é mais significativo que no método batch means. Por exemplo, para $k = 40$, na replicação na tabela 3 temos os valores 00.00, 00.00, 00.00 e 09.00 passando, na tabela 4, para 89.25, 89.75, 89.00 e 88.00, enquanto no método batch means para este mesmo valor de k , temos na tabela 3 os valores 36.50, 52.25, 61.25 e 74.00 passando para 40.50, 53.00, 64.25 e 75.50 na tabela 4.

Tabela 4: PORCENTAGEM DE COBERTURA POR INTERVALOS DE 90% DE CONFIANÇA, CONSIDERANDO UM PERÍODO DE ESTABILIZAÇÃO, NA FILA M/M/1 COM $\rho = 0.9$.

\ k n \	REPLICAÇÃO				BATCH MEANS			
	5	10	20	40	5	10	20	40
1600	78.00	81.00	85.25	89.25	68.75	63.00	53.50	40.50
3200	81.50	82.00	84.50	89.75	79.25	70.75	62.75	53.00
6400	84.50	83.50	85.50	89.00	82.75	79.50	74.25	64.25
12800	86.00	84.25	87.00	88.00	86.75	83.50	81.25	75.50

Os resultados na tabela 4 para a porcentagem de cobertura, considerando o período de estabilização, são melhores no método de replicação do que no método batch means, o que não ocorre na tabela 3.

Esta inversão dos resultados ocorre porque no método de replicação desprezamos um período de estabilização para cada rodada, enquanto que no batch means temos apenas um período de estabilização.

Até o presente comentou-se sobre a diferença nos resultados com o uso ou não do período de estabilização, comentaremos agora a diferença dos resultados obtidos pelos métodos de replicação e batch means.

Na tabela 3 fica evidente a superioridade do método batch means, onde a porcentagem de cobertura é superior à do método de replicação em todos os resultados. Mas com o uso do período de estabilização (tabela 4) isto não ocorre, onde apenas em um resultado encontramos uma porcentagem de cobertura superior para o método batch means ($k = 5$ e $n = 12800$) deixando transparecer que é melhor usar batches mais longos, como é o caso em que $n = 12800$, $k = 5$ e portanto $m = 2560$. Com respeito à replicação, os resultados melhoram quando aumentamos o número de rodadas, não sendo significativo a importância do tamanho m das rodadas. Nas duas tabelas e para os dois métodos nota-se que a porcentagem de cobertura aumenta quando aumentamos o número total de dados n e consequentemente o tamanho da rodada m , exceto para alguns poucos resultados.

Os resultados obtidos por Law nos fornece um visão ampla sobre a porcentagem de cobertura quando comparamos os dois métodos de coleta de dados. Com estes resultados chega-se a conclusão que o método de replicação é superior ao método batch means em relação a porcentagem de cobertura, mas quando se usam batches mais longos, como é o caso em que $k = 5$ $m = 2560$ o método batch means apresenta

certa superioridade sobre o método de replicação. Observe que a perda ainda não é muito grande quando $m = 1280$, nos casos $n = 12800$, $k = 10$ e $n = 6400$, $k = 5$.

Law não faz referência ao simulador usado, surgindo assim a questão: o GPSS/H apresenta os mesmos resultados que os obtidos por Law?

Para responder a esta questão desenvolvemos programas, usando o GPSS/H, representando a fila M/M/1, onde fizemos simulações com as mesmas características, em relação ao número de pessoas entrando no sistema e à taxa de ocupação, utilizadas no trabalho de Law. Os resultados estão na tabela 5 considerando apenas o caso de 5 rodadas/batches e um período de estabilização de 500 fregueses saindo do sistema.

Tabela 5: PORCENTAGEM DE COBERTURA POR INTERVALOS DE 90% DE CONFIANÇA, CONSIDERANDO UM PERÍODO DE ESTABILIZAÇÃO DE 500 PESSOAS, EM UMA FILA M/M/1 COM $\rho = 0.9$.

		REPLICAÇÃO	BATCH MEANS
n \ k		5	5
1600	(320)	72.50	63.25
3200	(640)	73.75	70.85
6400	(1280)	80.00	80.50
12800	(2560)	83.25	84.00

Obs: os valores entre os parênteses corresponde aos números m de observações.

Os resultados encontrados por nós foram, na média dos 4

valores, semelhantes aos de Law, com a porcentagem de cobertura cerca de 5.12% menor no caso de replicação e 4.72% no batch means. Considerando que os simuladores e a geração de números pseudo-aleatórios são diferentes, aceitamos que os resultados obtidos apresentam o mesmo comportamento que os apresentados por Law.

Com isso concluimos que o GPSS/H apresenta a mesma tendência nos resultados, ou seja, quando usamos batches mais longos no caso de $k = 5$ e $n = 12800$, o método batch means é superior ao método de replicação quanto a porcentagem de cobertura.

Considerando a facilidade operacional do método batch means, optamos então em utilizar o método batch means nas nossas simulações, mas fica ainda uma outra questão a ser resolvida: qual o número de batches que devemos usar?

Schmeiser (1981), usando o método de batch means, com as restrições de que o período de instabilidade do sistema é removido e assumindo independência entre os batches, chega à conclusão de que a quantidade de batches ideal está entre 10 e 30. Através do cálculo da porcentagem de cobertura para a média β por intervalos de confiança, ele verifica que esta porcentagem não aumenta significativamente acima de 30 batches e é insignificante abaixo de 10.

Os resultados nos levaram a usar em nossas simulações a quantidade de 30 batches, pois os intervalos de confiança para β usando a média das médias, através de uma distribuição t-Student são calculados sobre as 30 médias, assim como as autocorrelações de lags 1, 2 e 3 (secção 3.5). Utilizando as 30 médias, chegamos a conclusão de que não é viável utilizar uma quantidade inferior pois comprometeria os cálculos descritos acima. Por outro lado acima de 30 batches não teríamos um aumento significativo na porcentagem de cobertura.

3.5 - AUTOCORRELAÇÃO ENTRE OS BATCHES

A estimação do intervalo de confiança descrito na secção 3.3.1, que será usado para avaliação dos dados obtidos pela simulação usando o método batch means de coleta de dados, não pode ser aplicado diretamente se os dados forem correlacionados, pois esta estimação requer a suposição de independência.

Uma das maneiras de verificar se existe independência entre as médias dos batches (McNickle (1988)) é através do cálculo da autocorrelação entre os batches, referentes aos resultados obtidos pela simulação do processo markoviano $\{W_{q,n}: n \geq 0\}$, aqui denominado por $\{X_n: n \geq 0\}$.

Seja a sequência das médias dos batches em cada simulação $\{\bar{X}_i(m), i = 1, 2, \dots, k\}$. Calculamos a autocorrelação de lag j , r_j , através dos pares $(\bar{X}_i(m), \bar{X}_{i+j}(m))$, para $i = 1, 2, \dots, k$ e $i+j \leq k$, definida da seguinte maneira:

$$r_j = \frac{\sum_{i=1}^{k-j} (\bar{X}_i(m) - \bar{\bar{X}}(k, m)) (\bar{X}_{i+j}(m) - \bar{\bar{X}}(k, m))}{\sum_{i=1}^k (\bar{X}_i(m) - \bar{\bar{X}}(k, m))^2}$$

onde a autocorrelação varia no intervalo $-1 \leq r_j \leq 1$. Quanto mais próximo de -1 ou 1 mais correlacionadas, e no zero consideramos independência entre os batches.

Note que o numerador da expressão acima é função da

autocovariância do processo observado definida para os diferentes lag j . No denominador temos uma função do estimador da variância do processo observado.

No nosso trabalho usamos 30 batches, cada um com 1280 fregueses saindo do sistema M/M/1, com $\lambda = 1$, $1/\mu = 0.9$, portanto $\rho = 0.9$. Calculamos as médias das autocorrelações de lag 1, 2, 3 para um total de 200 repetições do experimento com os números aleatórios usuais (tabela 6).

Tabela 6: MÉDIAS DAS AUTOCORRELAÇÕES DE LAGS 1,2 E 3 COM 200 SIMULAÇÕES COM NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS.

	Lag 1	Lag 2	Lag 3
Usual	0.0192	-0.0340	-0.0717

Pelos valores da tabela 6 podemos considerar que em média existe independência entre as médias dos batches, pois os valores não são significativos (próximo de zero).

Os resultados para os lags 1,2 e 3 dos 200 experimentos estão na tabela 9 do apêndice 2.

CAPÍTULO 4

NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

4.1 - RESULTADOS GERAIS

Os números aleatórios antitéticos são usados como técnica de redução da variância em dados de saída de uma simulação.

Usualmente não temos um controle direto sobre os dados de saída da simulação, mas estes são relacionados com os números aleatórios de entrada. Podemos então melhorar a saída induzindo uma redução na variância nos dados de entrada.

A idéia central foi apresentada por Hammersley e Marton em 1956 no contexto de simulação de Monte Carlo (veja Law e Kelton (1992)), e será descrito a seguir:.

Sabemos que se a variável aleatória U tem distribuição uniforme $(0,1)$:

$$U \sim u(0,1) \rightarrow 1-U \sim u(0,1)$$

Os números aleatórios de entrada do modelo são então rodados em pares complementares de tal modo que se um elemento do par

apresentar um valor pequeno, o outro elemento do par tende a ser compensado por um valor grande de maneira que os dois valores são negativamente correlacionados. Usamos a média dos dois valores como dados de entrada da simulação.

Por exemplo se u corresponde a um tempo de serviço grande e tem o efeito de aumentar o congestionamento na fila, $1-u$ será pequeno e teremos o oposto no congestionamento da fila.

Passamos então a descrever como a utilização da variável antitética reduz a variância.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer.

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y) \quad (5.1)$$

O coeficiente de correlação pode ser escrito na forma:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{(\text{Var}(X) \text{Var}(Y))^{\frac{1}{2}}}$$

portanto:

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) (\text{Var}(X) \text{Var}(Y))^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

Substituindo a equação (5.2) em (5.1) temos:

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab \rho(X, Y) (\text{Var}(X) \text{Var}(Y))^{\frac{1}{2}}$$

Então podemos escrever para a média da soma das variáveis, ou seja $a = b = 1/2$,

$$\text{Var}\left[\frac{(X+Y)}{2}\right] = \frac{1}{4} [\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\rho(X, Y) (\text{Var}(X) \text{Var}(Y))^{\frac{1}{2}}] \quad (5.3)$$

Onde ρ é a taxa de ocupação do sistema. Vamos então considerar as variáveis $X \sim u(0,1)$ e $Y = 1 - X \sim u(0,1)$.

Observe que $\text{Var}(X)$ é igual a $\text{Var}(Y)$, pois X e Y são uniformemente distribuídos.

Considerando que:

$$Z = \frac{X + Y}{2}$$

podemos escrever a equação (5.3) da seguinte maneira:

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{2} [\text{Var}(X) + \rho(X, Y) (\text{Var}(X) \text{Var}(Y))^{\frac{1}{2}}]$$

Por outro lado se as amostras da população são independentes $\rho = 0$ e:

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{2} [\text{Var}(X)]$$

Se os pares das amostras são negativamente correlacionados então $\rho < 0$, e:

$$\text{Var}(Z) < \frac{1}{2} [\text{Var}(X)]$$

Se a técnica de redução da variância for usada, dobramos o tamanho da amostra por ter uma segunda rodada do modelo simulado, como veremos a seguir, entretanto a redução da variância é certa. Law e Kelton fizeram experimentos com números aleatórios antitéticos reduzindo a variância na ordem de 60 à 65% (Law e Kelton (1991)).

Nós calculamos as variáveis antitéticas procedendo do seguinte modo:

Posicionamos o ponteiro na sequência de números pseudo-aleatórios através do comando RMULT, entre os dois bilhões da sequência, gerando os tempos entre chegadas e os tempos de serviço. Rodamos o programa e coletamos os dados dos tempos de espera na fila, para cada batch, no total de 30 batches, já descartados os 1500 fregueses do período de estabilização.

Repetimos o procedimento mas com o número negativo no comando RMULT, gerando os valores complementares da distribuição uniforme e novamente os correspondentes tempos entre chegadas e se serviço, coletamos os tempos de espera na fila desta rodada. Sobreposos os dois conjuntos de dados em um único, determinando a média, dado a dado, dos tempos de espera. Este único conjunto é que chamamos de antitético.

Para cada batch, tanto para o usual como antitético, obtemos a média do tempo de espera na fila e sobre o conjunto de 30 médias construímos o intervalo de confiança onde verificamos a porcentagem de cobertura do tempo de espera na fila de um sistema de filas M/M/1, bem como fazemos os cálculos da autocorrelação entre os batches.

4.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Repetimos toda a pesquisa feita com o gerador usual, utilizando as variáveis aleatórias antitéticas, ou seja:

Para o mesmo sistema de filas M/M/1, com $\lambda = 1$ e $1/\mu = 0.9$, observamos o tempo de espera na fila determinado conforme o descrito acima. Foram feitas 200 rodadas do experimento de simulação utilizando o método batch means de coleta de dados. Iniciamos o sistema com um número de fregueses determinado segundo a distribuição geométrica de equilíbrio da M/M/1 e com um período de estabilização de 1500 fregueses. Cada simulação consiste de 30 batches, cada batch correspondendo a 1280 fregueses saindo do sistema.

Os resultados obtidos foram:

Tabela 7: ESTATÍSTICAS DOS RESULTADOS DE 200 SIMULAÇÕES OBTIDOS COM NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS.

	Média	Variância
Média	8.0637	0.3027
1/2 do I.C.	0.8025	0.0654
Lag 1	0.0354	0.0336
Lag 2	-0.0323	0.0288
Lag 3	-0.0430	0.0332

Com esses resultados observamos que a média das médias está próximo do valor teórico obtido na fórmula (2.2) que é de 8.1, e a variância do dados pode ser considerada pequena comparada com os números aleatórios usuais como veremos no próximo capítulo.

Os intervalos de confiança são menores que os obtidos pelos resultados dos números aleatórios usuais, que têm em média meia amplitude de 1.2855 com variância igual a 0.2626 (descrita no capítulo seguinte), pois estamos utilizando uma técnica de redução da variância.

As autocorrelações de lags 1,2 e 3 são pequenas, portanto podemos aceitar independência entre os batches.

Quanto à porcentagem de cobertura, houve um acréscimo de 6% com o uso dos números aleatórios antitéticos, de 81% utilizando os número aleatórios usuais para 87%.

CAPÍTULO 5

TESTE DA DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAIS

A Inferência Estatística é amplamente usada em vários processos de tomada de decisões, onde uma das ferramentas apresentadas é justamente o teste da diferença de médias amostrais, usado para comparar a performance de duas amostras. Com este teste podemos verificar se existe diferença significativa entre os resultados obtidos usando números aleatórios usuais e os antitéticos, comparando as médias amostrais destes resultados, determinados pelos 200 experimentos de simulação.

A base matemática para o uso do teste é a seguinte (ver por exemplo Allen (1990)): suponha duas variáveis aleatórias independentes X e Y com médias μ_X e μ_Y e variância σ_X^2 e σ_Y^2 . Então a variável $(X-Y)$ tem como média $(\mu_X - \mu_Y)$ e variância $(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Se a média amostral de uma amostra de tamanho n de uma determinada população é dada por $\bar{X}$ e a média amostral de uma amostra de tamanho m de outra população é dada por $\bar{Y}$, então podemos escrever as seguintes equações:

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y$$

e

$$\text{Var}(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$$

Para a utilização do teste para uma diferença d_0 entre as médias amostrais, iremos seguir o algoritmo descrito abaixo. Por outro lado, se uma amostra aleatória $x_1, x_2, \dots, x_n$ de uma variável aleatória X , e uma amostra aleatória $y_1, y_2, \dots, y_m$ de uma variável aleatória Y , onde X e Y são independentes, este algoritmo determina, com o nível de significância α , se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula $H_0: \mu_X - \mu_Y = d_0$, contra uma hipótese alternativa $H_1: \mu_X - \mu_Y \neq d_0$. Assumindo que $n \geq 30$ e $m \geq 30$ e σ_X^2 e σ_Y^2 são desconhecidas usamos s_X^2 e s_Y^2 , as variâncias amostrais, que são bons estimadores para as respectivas variâncias, dados por:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

e

$$s_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{Y})^2$$

Temos então o algoritmo:

Passo 1 [Cálculo do teste estatístico]: Cálculo z pela fórmula:

$$z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - d_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2}{n}\right) + \left(\frac{\sigma_y^2}{m}\right)}}$$

e $z_{\alpha/2}$: ponto crítico correspondendo a $\phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ onde ϕ é a função distribuição acumulada de uma variável $N(0,1)$, que é utilizada para grandes amostras.

Se σ_x^2 e σ_y^2 são desconhecidos substituo por s_x^2 e s_y^2 .

Passo 2 [Determinação da região crítica]: Para a hipótese H_1 : $\mu_x - \mu_y \neq d_0$, a região crítica considera o conjunto de todo z tal que $z < -z_{\alpha/2}$ e $z > z_{\alpha/2}$.

Passo 3 [Aceito ou rejeito H_0]: Se o valor de z determinado no passo 1 cair na região crítica determinada pelo passo 2, rejeito H_0 , caso contrário não rejeito H_0 .

Sejam então $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ as médias amostrais dos tempos médios de espera na fila, obtidos usando o gerador de números aleatórios usuais e antitéticos respectivamente, coletados através das 200 repetições independentes do experimento de simulação.

Considere os dados (veja apêndice 2) das 200 médias das médias do tempo de espera na fila e o algoritmo com $d_0 = 0$, portanto com as hipóteses $H_0: \mu_x = \mu_y$ e $H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

Como $n = m = 200$, $\bar{x} = 8.1018$ (média dos 200 tempos médios de espera na fila para os números aleatórios usuais), $s_x^2 = 0.9235$

e $\bar{y} = 8.0637$ (média dos 200 tempos médios de espera na fila para os números aleatórios antitéticos), $s_y^2 = 0.3027$, temos:

$$z = \frac{8.1018 - 8.0637}{\sqrt{\frac{0.9235}{200} + \frac{0.3027}{200}}} = \frac{0.0381}{0.0783} = 0.4866$$

Com nível de significância $\alpha = 0.05$, temos $z_{0.025} = 1.96$, portanto a região de rejeição é dada por $z < -1.96$ e $z > 1.96$.

Podemos então aceitar $H_0: \mu_x = \mu_y$ pois $z = 0.4866 < 1.96$, isto é, não existe diferença significativa entre as 200 médias obtidas através dos números aleatórios usuais e antitéticos para o tempo de espera na fila.

Repetimos o teste da diferença das médias para a meia amplitude do intervalo de confiança e as autocorrelações de lags 1, 2 e 3, com o objetivo de compararmos os resultados obtidos com números aleatórios usuais com os antitéticos. Os resultados estão na tabela 8.

Tabela 8: ESTATÍSTICAS DOS RESULTADOS DE 200 SIMULAÇÕES, OBTIDOS COM NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS E ANTITÉTICOS.

	Média		Variância		Teste Estatístico (Z)
	Usual	Antit.	Usual	Antit.	
Média de $\bar{X}$	8.1018	8.0637	0.9235	0.3027	0.4866
1/2 I.C.	1.2855	0.8025	0.2626	0.0654	11.9271
Lag 1	0.0192	0.0354	0.0327	0.0336	-0.8907
Lag 2	-0.0340	-0.0323	0.0304	0.0288	-0.1009
Lag 3	-0.0717	-0.0430	0.0296	0.0332	-1.6183

Verificamos que os valores de z encontrados para as autocorrelações de lag 1,2 e 3 também estão contidos no intervalo $-1.96 < z < 1.96$, onde aceitamos a hipótese nula de igualdade das médias com nível de significância $\alpha = 0.05$, ou seja, não existe diferença significativa entre os resultados obtidos com os números aleatórios usuais e antitéticos para as autocorrelações de lags 1,2 e 3.

O mesmo não acontece para a meia amplitude do intervalo de confiança, pois o valor encontrado para $z = 11.9271$ está na região de rejeição de H_0 , portanto, como era previsto, existe diferença no tamanho do intervalo de confiança usando os números aleatórios antitéticos, pois estamos utilizando uma técnica de redução da variância.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Com o uso dos números aleatórios antitéticos na análise da porcentagem de cobertura do tempo médio de espera na fila M/M/1, realizado com o auxílio do pacote computacional GPSS/H, chegamos a resultados que vêm a contribuir com a pesquisa e com os usuários em simulação estocástica, proporcionando aos mesmos uma maior confiança nos resultados obtidos pela simulação.

Estes resultados foram obtidos através do método de coleta de dados batch means com 30 batches de 1280 pessoas saindo do sistema para o tempo médio de espera na fila. Com a execução de 200 rodadas de simulação, tanto para os números aleatórios usuais como para os antitéticos, obtemos o mesmo número de resultados para a média dos tempos médios de espera na fila, meia amplitude do intervalo de confiança e as autocorrelações de lags 1,2 e 3.

No capítulo anterior verificamos que não existe diferença significativa entre as 200 médias dos tempos de espera na fila, bem como para as autocorrelações de lags 1,2 e 3, podendo em ambos os casos aceitar independência entre os batches devido aos baixos valores das autocorrelações. Mas como era de se esperar, encontramos uma redução significativa no tamanho do intervalo de confiança, pois utilizamos uma técnica de redução da variância.

Observamos que o tempo médio de espera na fila usando os números aleatórios usuais, 8.1018 (veja tabela 8), está próximo do valor real, $W_q = 8.1$, bem como os números aleatórios antitéticos, 8.0637, no entanto a cobertura do valor real de W_q é maior 6% com os números aleatórios antitéticos. Ou seja, os intervalos de

confiança com 90% de confiança, construídos para os 200 resultados, contêm o valor real W_q em 81% das vezes com o uso dos números aleatórios usuais e 87%, com o uso dos números aleatórios antitéticos, correspondendo a diferença de 6%.

Esta diferença traz como indicação usar os números aleatórios antitéticos, pois estes nos fornece uma melhor aproximação do sistema simulado.

Também a variância gerada com números antitéticos é 67.22%, em média, menor do que os gerados por números aleatórios usuais. Observe que este valor é superior ao intervalo de redução de variância encontrados por Law e Kelton (1991), que é de 60 à 65%.

A ferramenta simulação busca representar o sistema real com maior exatidão e aproximação possível e depende de uma série de fatores, como a qualidade do gerador de números aleatórios, o método de coleta de dados e a presença ou não do período de estabilização, que influenciam nos resultados da simulação.

Além destes fatores, que devem ser utilizados corretamente, encontramos uma perda maior em 6% quando usamos os números aleatórios usuais comparados com os antitéticos.

A contribuição principal deste trabalho é esta superioridade de 6% no uso dos números aleatórios antitéticos para o sistema de filas M/M/1, onde partindo da mesma idéia, podemos abrir um enorme campo de pesquisa buscando informações sobre o uso dos números aleatórios antitéticos em outros modelos de filas, ou em uma rede de filas, generalizando os resultados obtidos neste trabalho.

Concluimos que o uso de números aleatórios antitéticos, além de reduzir de modo significativo a variância, apresenta um sensível ganho na porcentagem de cobertura, ou seja, quando simulamos com números aleatórios antitéticos ficamos mais seguros quanto à possibilidade de utilizarmos um intervalo de confiança que contenha o valor real.

BIBLIOGRAFIA

- ALLEN, A.O.: Probability, Statistics, and Queueing Theory, wiht Computer Science Applications Academic Press, New York, 2nd ed, 1990.
- ANDRÉASSON, I.J. (1972). Antithetic Methods in Queueing Simulations, Roy. Inst. Technol. Dept. Comput. Sci. Tech. NA 72.58, Stockholm.
- BANKS, J., CARSON, J.S. and NGO SY, J.: Getting Started With GPSS/H, Wolverine Software Corporation, Annandale, 1989.
- GEORGE, L.L. (1977). Variance Reduction for a Replacement Process, Simulation, 29, 65-74, 1977.
- GROSS, D. and HARRIS, C. M.: Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley, New York, 2nd ed, 1991.
- HAMMERSLEY, J.M. and MORTON, K.W. (1956). A New Monte Carlo Technique: Antithetic Variates, Proc. Camb. Phil. Soc., 52, 449-475.
- LAW, A. M. (1977). Confidence interval in discrete event simulation: A comparison of replication and bath means, Naval Res. Logist. Quart., 24, 667-678.
- LAW, A.M. and KELTON W.D. (1982). Confidence Interval for Steady State Simulations, II: A survey of Sequential Procedure, Management Sci. 28, 550-562

- LAW, A. M. and KELTON, W. D.: Simulation Modeling and Analysis, Mc Graw-Hill Inc, 2nd ed, 1991.
- McNICKLE, D.C. (1992). Notas de Seminários proferidos no ICMSC - USP, São Carlos, SP.
- McNICKLE, D. C. (1988). Lagged correlations in simple queueing networks, Appl. Stoch. Mod. and Data Anal., 4, 65-72.
- MITCHELL, B. (1973). Variance Reduction by Antithetic Variates in G/G/1 Queueing Simulations, Oper. Res., 21, 988-997.
- ODONI, A.R. and ROTH, E. (1983). An empirical investigation of the transient behaviour of stationary queueing systems, Oper. Res., 31, 432-455.
- PAWLIKOWSKI, K. (1990). Steady state simulation of queueing processes: a survey of problems and solutions, Oper. Res. 22 (2), 123 - 170.
- RUBINSTEIN, R.Y., SAMORODNITSKY G. and SHAKED M. (1985). Antithetic Variates, Multivariate Dependence, and Simulation of Complex Stochastic Systems, Management Sci., 31, 66-77.
- SCHMEISER, B. (1982). Batch size effects in the analysis of simulation output, Oper. Res., 30, 556-568.
- WILSON, J. R. (1979). Proof of the Antithetic Variates Theorem for Unbounded Functions, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 86, 477-479.

APÊNDICE 1

Programa GPSS/H que coleta os tempos de espera de uma fila M/M/1. Os comentários entre parênteses são à respeito do comando anterior.

```

SIMULATE
*   MODELO  M/M/1  PELO MÉTODO BATCH MEANS, PARA O CALCULO DO
*   TEMPO DE ESPERA NA FILA
      INTERGER      &I
      REAL          &A
      RMULT         , (3361251), (8692579)
*   (Com este comando posicionamos o ponteiro na sequência de
*   números pseudo-aleatórios)
SAIDA  FILE          'NOR.RES'
*   (Os tempos de espera na fila são armazenados no arquivo
*   nor.res)
GEOM   FUNCTION      RN(1), D27
0.1, 0/0.19, 1/0.271, 2/0.3439, 3/0.4095, 4/0.4686, 5/0.5217, 6/0.5695, 7
/0.6126, 8/0.6513, 9/0.6862, 10/0.7176, 11/0.7458, 12/0.7712, 13/0.7941
, 14/0.8147, 15/0.8332, 16/0.8499, 17/0.8649, 18/0.8784, 19/0.8906, 20/0
.9015, 21/0.9114, 22/0.9203, 23/0.9282, 24/0.9354, 25/1.0, 26
*   (Esta função associa valores de 1 à 26 aos intervalos da
*   função distribuição acumulada)
      GENERATE      RVEXPO(2, 1.0)
*   (gera fregueses com tempo entre chegadas de acordo com
*   uma distribuição exponencial com média 1.0)
ATEND  QUEUE        FILA
*   (início do cálculo das estatísticas para a fila)

```

```
SEIZE          LAW
*             (captura o freguês)
BLET           &A=M1
BPUTPIC        FILE=SAIDA,LINES=1,(&A)
***.***
*             (Coleta os dados dos tempos de espera na fila)
DEPART         FILA
*             (término do cálculo das estatísticas para a fila)
ADVANCE        RVEXPO(3,0.9)
*             (O tempo de atendimento obedece uma distribuição
*             exponencial com média 0.9 unidade de tempo)
RELEASE        LAW
*             (libera o freguês)
TERMINATE      1
*             (Retira um freguês do sistema)
GENERATE        ,,,FN(GEOM)
*             (Determina o número inicial de fregueses no sistema)
TRANSFER        ,ATEND
START          1500,NP
*             (Corresponde ao período de estabilização de 1500
*             fregueses)
RESET
*             (Zera somente as estatísticas)
DO              &I=1,30
*             (Define os batches)
START          1280
RESET
ENDDO
END
```

APÊNDICE 2

Os pontos com (*) representam os intervalos de confiança que não contem o valor teórico W_q

Tabela 9: DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS

Número da Simul.	Média de W_q	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
001	6.489	0.714 *	0.541	-0.023	-0.318
002	7.036	0.643 *	0.163	0.082	0.059
003	6.686	0.652 *	0.205	-0.243	-0.112
004	7.865	1.329	0.078	-0.136	-0.358
005	7.419	0.768	0.087	-0.355	-0.399
006	7.321	0.863	-0.223	0.060	-0.306
007	7.665	1.073	0.169	-0.001	-0.165
008	8.811	1.652	0.063	-0.200	-0.206
009	7.438	0.886	-0.151	-0.000	0.085
010	9.530	2.130	-0.000	-0.179	0.046
011	9.120	2.200	0.330	-0.149	-0.334
012	7.545	1.115	0.013	0.014	-0.273
013	7.617	0.989	-0.080	-0.100	-0.048
014	7.976	0.737	-0.088	-0.174	0.069
015	8.172	0.854	-0.120	0.241	-0.061
016	8.143	1.122	-0.107	-0.287	-0.417
017	7.373	1.117	0.153	0.197	0.366
018	7.510	0.919	-0.207	0.032	-0.172
019	9.560	2.360	-0.106	-0.255	-0.311
020	8.650	1.810	-0.117	-0.049	-0.155
021	9.010	2.890	0.285	-0.019	-0.085
022	7.270	0.721 *	0.113	0.176	-0.093
023	8.031	1.235	-0.068	-0.017	0.026
024	8.430	1.080	0.106	-0.128	-0.322
025	7.859	1.317	-0.185	0.058	-0.173
026	7.876	1.079	-0.161	-0.005	0.112
027	7.863	1.021	0.003	-0.051	-0.027
028	7.735	1.131	0.184	-0.075	-0.218
029	8.002	1.370	0.171	-0.074	-0.148
030	7.888	1.236	-0.169	-0.113	0.177
031	6.871	0.898 *	-0.185	-0.122	-0.049
032	9.140	2.180	0.183	-0.032	-0.146
033	8.115	1.306	0.068	-0.228	-0.133
034	6.845	1.101 *	0.108	-0.081	0.116
035	8.448	1.569	0.441	-0.016	-0.197
036	7.961	1.043	-0.011	-0.139	0.043
037	8.127	1.268	0.101	-0.237	-0.253
038	7.597	1.076	0.024	0.087	-0.078
039	9.102	1.311	0.048	-0.176	0.100
040	8.397	1.111	-0.145	-0.144	0.096

Tabela 9: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
041	7.548	1.113	-0.117	0.028	-0.122
042	8.165	1.349	-0.212	0.234	-0.192
043	7.839	1.041	-0.136	-0.088	0.066
044	8.448	1.547	0.168	-0.199	-0.331
045	7.859	1.254	-0.076	0.309	0.011
046	8.399	1.062	0.178	0.190	0.124
047	8.214	1.284	-0.152	0.099	-0.151
048	7.625	1.000	-0.043	-0.045	-0.251
049	7.575	1.050	-0.331	0.100	-0.226
050	6.779	0.720 *	0.017	-0.061	0.112
051	7.937	1.238	0.093	-0.005	0.275
052	10.720	2.790	0.017	-0.175	0.180
053	8.055	1.511	-0.095	-0.249	0.102
054	8.059	1.052	-0.196	-0.006	0.076
055	9.302	1.681	0.142	0.343	0.259
056	8.013	1.129	0.193	-0.076	-0.083
057	7.420	0.936	-0.105	-0.089	-0.095
058	7.964	0.998	0.153	-0.242	-0.197
059	8.390	1.740	0.016	-0.300	-0.196
060	7.918	1.612	0.205	-0.020	0.135
061	7.713	0.848	-0.018	-0.091	-0.201
062	8.451	1.488	0.071	-0.232	-0.171
063	6.324	0.613 *	-0.182	-0.013	0.156
064	7.111	0.835 *	0.090	-0.077	0.061
065	9.110	2.030	-0.013	0.224	-0.003
066	8.200	2.000	0.247	-0.028	-0.015
067	8.333	0.981	0.272	-0.216	-0.081
068	11.250	3.580	0.591	0.271	-0.009
069	8.218	1.112	-0.102	0.012	-0.185
070	7.203	0.876 *	0.062	-0.008	-0.176
071	7.992	1.113	0.016	-0.028	-0.199
072	7.353	0.884	-0.228	-0.130	0.072
073	8.179	1.023	0.144	-0.002	-0.227
074	7.701	1.223	0.213	-0.021	-0.179
075	6.948	0.917 *	0.090	0.223	-0.308
076	9.626	1.626	-0.271	-0.221	0.161
077	8.662	0.969	0.135	-0.159	-0.122
078	8.159	1.269	0.052	0.224	-0.251
079	8.546	1.211	0.039	-0.090	-0.227
080	8.475	1.247	-0.404	0.364	-0.241

Tabela 9: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
081	10.310	1.820 *	-0.041	-0.149	0.161
082	7.486	0.995	0.064	0.047	0.009
083	6.690	0.718 *	-0.009	-0.471	0.333
084	10.120	2.120	0.035	-0.045	-0.060
085	6.793	0.906 *	0.032	-0.140	-0.052
086	9.321	1.593	-0.253	0.145	-0.171
087	8.793	1.462	0.456	0.014	-0.004
088	7.353	0.775	-0.254	0.143	-0.206
089	8.638	1.439	0.127	-0.217	-0.234
090	8.807	1.578	0.182	-0.258	-0.033
091	7.107	0.747 *	0.072	0.106	-0.107
092	6.944	0.893 *	0.071	-0.059	-0.072
093	7.719	1.195	-0.036	0.084	0.082
094	7.231	0.769 *	-0.145	0.069	0.096
095	6.729	0.745 *	-0.007	0.382	0.070
096	9.910	3.110	0.389	-0.136	-0.104
097	7.299	0.784 *	-0.046	0.244	-0.016
098	9.182	1.296	0.349	-0.344	-0.293
099	9.259	1.597	-0.128	-0.097	-0.224
100	7.227	1.327	-0.162	0.141	-0.006
101	7.400	0.901	0.029	-0.450	-0.180
102	6.224	0.553 *	-0.145	-0.139	0.282
103	9.423	1.477	0.460	0.265	-0.054
104	8.850	1.760	-0.065	-0.003	-0.205
105	7.477	1.035	0.082	-0.313	0.077
106	9.570	1.470 *	-0.059	0.152	0.117
107	8.685	1.348	0.150	-0.024	-0.019
108	7.865	0.843	0.022	-0.063	-0.537
109	9.717	1.594 *	-0.168	-0.216	0.197
110	8.320	1.760	-0.044	-0.142	0.055
111	10.410	2.430	0.230	0.104	0.155
112	6.612	0.720 *	0.141	0.053	-0.026
113	7.665	1.248	0.290	-0.075	-0.136
114	8.766	1.362	0.215	-0.247	-0.328
115	8.142	1.444	0.052	0.025	-0.186
116	7.634	1.357	-0.083	-0.083	-0.055
117	6.907	0.974 *	0.094	-0.322	-0.410
118	7.069	0.857 *	-0.227	-0.048	-0.040
119	6.497	0.605 *	-0.119	0.052	-0.140
120	8.571	1.509	-0.044	0.129	-0.267

Tabela 9: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS

Número da Simul.	Média de W_q	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
121	8.307	1.055	0.140	-0.242	-0.167
122	7.099	0.931 *	0.066	0.172	0.234
123	7.652	1.163	-0.048	-0.162	0.188
124	8.614	1.019	-0.067	0.066	0.146
125	8.769	1.448	-0.151	-0.330	-0.172
126	9.790	2.670	0.403	-0.055	0.014
127	9.036	1.655	-0.301	0.307	-0.278
128	7.843	1.207	-0.033	0.489	-0.232
129	6.987	0.664 *	0.195	0.245	0.186
130	8.190	1.464	-0.079	-0.040	-0.083
131	9.462	1.647	0.120	-0.142	-0.341
132	7.756	1.259	0.109	-0.098	0.018
133	8.701	1.375	0.081	-0.180	0.072
134	7.480	0.769	0.088	-0.203	-0.077
135	8.594	1.345	-0.210	-0.098	0.124
136	8.820	1.970	0.413	-0.037	-0.192
137	7.908	1.096	-0.201	-0.190	0.106
138	7.548	1.054	-0.028	0.029	-0.113
139	7.792	0.937	-0.098	-0.274	-0.243
140	7.427	1.011	0.086	0.204	-0.033
141	8.360	1.780	-0.001	-0.170	0.013
142	6.827	0.899 *	-0.139	0.089	0.051
143	8.211	0.873	0.223	0.044	0.095
144	7.212	0.931	0.144	-0.163	-0.393
145	7.970	0.959	0.049	-0.018	-0.059
146	6.761	0.779 *	-0.002	-0.223	0.023
147	7.507	1.116	-0.089	-0.096	-0.133
148	7.974	1.279	-0.034	-0.138	0.147
149	9.570	2.010	0.015	-0.273	-0.109
150	7.672	1.010	-0.047	0.069	-0.409
151	7.239	1.129	-0.082	-0.012	-0.006
152	7.448	0.975	-0.169	-0.045	-0.152
153	9.646	1.526 *	0.161	0.043	0.084
154	8.376	1.445	-0.043	0.053	-0.235
155	7.308	0.963	-0.043	-0.106	-0.116
156	8.309	0.939	-0.285	0.018	-0.077
157	7.286	0.822	-0.010	-0.199	-0.126
158	8.573	1.421	-0.221	0.305	-0.099
159	8.253	1.320	-0.120	-0.013	0.070
160	9.140	1.800	-0.083	-0.055	-0.016

Tabela 9: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS USUAIS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
161	8.100	1.770	-0.042	-0.106	0.228
162	6.875	0.697 *	-0.081	-0.181	-0.262
163	8.450	1.203	-0.280	0.211	-0.324
164	8.361	1.515	-0.159	0.154	-0.022
165	8.072	0.945	0.367	0.192	-0.172
166	8.310	1.149	-0.225	0.090	0.009
167	8.223	1.533	0.029	-0.134	0.111
168	7.604	1.044	0.064	-0.238	-0.225
169	9.340	2.060	-0.111	0.098	-0.189
170	8.630	1.770	0.171	0.080	-0.169
171	6.485	0.729 *	0.133	-0.070	-0.031
172	6.840	0.869 *	-0.214	-0.002	0.152
173	7.946	1.107	-0.167	-0.190	0.002
174	8.592	1.419	0.110	-0.028	-0.232
175	11.650	3.220 *	0.354	-0.112	-0.170
176	9.550	1.830	0.078	-0.094	-0.027
177	8.150	1.289	0.058	0.229	-0.103
178	8.414	1.165	0.024	-0.067	0.128
179	7.744	1.358	-0.225	0.262	-0.315
180	7.445	1.277	-0.182	-0.383	0.198
181	7.303	0.948	-0.141	-0.349	0.094
182	7.626	1.257	0.056	0.196	0.147
183	7.166	0.866 *	0.249	-0.274	-0.431
184	7.060	0.864	0.253	0.024	-0.038
185	7.272	0.893	0.424	0.098	-0.135
186	9.397	1.433	-0.218	0.273	0.158
187	7.432	0.950	-0.085	-0.217	-0.191
188	8.472	1.249	0.167	-0.192	0.174
189	10.780	1.910 *	-0.295	0.150	-0.174
190	7.692	1.258	0.159	-0.263	0.031
191	7.329	0.919	0.014	-0.190	0.096
192	10.690	3.080	-0.041	0.013	-0.122
193	8.449	0.981	-0.102	-0.017	-0.055
194	8.500	2.060	0.383	-0.207	0.108
195	9.140	1.720	0.335	0.341	0.244
196	8.640	2.240	0.182	-0.043	0.005
197	7.964	0.963	-0.093	0.291	-0.413
198	7.698	1.030	-0.233	0.148	-0.327
199	8.242	1.123	-0.085	0.101	-0.217
200	6.309	0.741 *	-0.051	0.031	-0.140

Tabela 10: DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Número da Simul.	Média de W_q	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
001	6.664	0.445 *	0.259	0.090	-0.005
002	7.501	0.736	0.140	-0.023	-0.073
003	7.568	0.547	-0.029	-0.413	-0.239
004	8.099	0.896	0.147	0.031	-0.092
005	7.390	0.508 *	-0.196	0.081	-0.225
006	7.466	0.617 *	-0.184	0.264	-0.237
007	7.460	0.589 *	0.147	-0.200	-0.075
008	8.516	1.038	0.133	0.043	-0.011
009	7.697	0.695	0.000	-0.229	-0.016
010	8.414	0.973	0.090	-0.117	-0.077
011	8.491	1.053	0.158	-0.171	-0.258
012	7.741	0.770	0.259	-0.182	-0.216
013	7.415	0.654 *	0.063	-0.095	-0.141
014	7.235	0.526 *	-0.164	0.103	-0.007
015	7.764	0.621	-0.214	0.383	-0.167
016	8.032	0.822	-0.183	-0.056	0.037
017	9.630	2.300	0.339	-0.054	-0.162
018	8.773	0.737	0.000	0.267	-0.227
019	8.604	1.240	0.075	-0.146	-0.158
020	8.483	1.083	-0.049	-0.183	-0.223
021	8.848	1.507	0.195	-0.009	0.185
022	7.536	0.881	-0.081	-0.143	-0.162
023	7.732	0.590	-0.071	-0.048	0.085
024	7.631	0.525	-0.088	0.023	-0.167
025	7.414	0.821	-0.005	0.043	-0.113
026	8.266	0.839	0.221	-0.035	0.100
027	7.748	0.674	0.087	-0.333	0.118
028	8.279	0.793	0.149	-0.009	0.107
029	8.061	0.897	0.135	0.153	-0.132
030	7.745	0.538	-0.085	-0.132	0.101
031	7.840	0.664	0.292	0.003	0.060
032	8.315	1.170	0.055	-0.198	-0.259
033	7.563	0.642	0.104	-0.236	-0.003
034	7.903	0.693	0.085	-0.030	0.415
035	8.838	0.914	-0.027	0.061	0.024
036	8.764	0.748	-0.132	0.007	0.081
037	8.511	0.754	0.041	0.199	-0.037
038	7.728	0.685	0.226	0.025	-0.323
039	8.394	0.690	-0.101	-0.133	-0.027
040	8.968	0.872	0.291	0.239	-0.105

Tabela 10: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
041	8.236	0.755	-0.025	-0.193	0.075
042	7.680	0.698	-0.291	0.033	0.021
043	8.191	1.089	-0.087	0.000	0.184
044	7.896	0.780	0.380	-0.046	-0.210
045	8.094	0.705	-0.265	-0.165	0.230
046	7.729	0.634	0.159	0.079	0.280
047	7.975	0.626	0.151	-0.051	0.032
048	7.678	0.588	-0.165	-0.102	-0.018
049	7.631	0.506	-0.343	0.462	-0.177
050	8.075	0.827	0.071	-0.219	-0.062
051	8.987	1.074	0.163	-0.227	-0.004
052	9.281	1.187	-0.113	-0.203	0.165
053	7.799	0.863	0.227	-0.243	-0.098
054	8.084	0.582	0.018	-0.138	0.337
055	8.520	1.054	0.310	0.185	0.101
056	8.504	0.702	-0.100	-0.090	0.102
057	7.796	0.575	-0.087	0.027	0.050
058	7.925	0.529	0.106	0.130	-0.020
059	8.686	1.068	-0.118	-0.119	-0.120
060	8.526	0.959	0.137	-0.247	0.215
061	7.938	0.567	-0.114	-0.070	-0.099
062	8.356	0.830	-0.075	-0.215	-0.254
063	7.799	0.896	0.102	0.382	-0.133
064	7.547	0.427 *	0.092	-0.282	-0.309
065	8.565	1.187	-0.068	0.315	-0.041
066	8.452	1.037	0.042	-0.060	0.024
067	7.885	0.489	0.135	-0.126	-0.140
068	9.971	1.659 *	0.433	0.099	-0.015
069	7.926	0.594	-0.098	-0.019	-0.137
070	7.382	0.508 *	0.035	-0.138	-0.147
071	8.379	0.674	0.026	-0.154	-0.061
072	7.550	0.619	0.012	0.202	0.115
073	7.575	0.493 *	-0.300	0.056	-0.343
074	7.785	0.640	-0.069	0.044	0.186
075	7.972	0.938	-0.306	0.042	-0.183
076	8.371	0.786	-0.347	-0.037	-0.022
077	8.420	0.510	0.237	-0.040	-0.189
078	7.886	0.842	0.029	-0.142	-0.273
079	8.719	0.806	-0.080	-0.229	0.151
080	7.990	0.614	-0.187	0.483	-0.366

Tabela 10: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
081	8.850	0.921	0.171	-0.003	0.133
082	7.706	0.736	-0.088	0.088	-0.048
083	7.819	0.702	-0.145	-0.111	0.277
084	8.531	0.927	0.002	-0.167	-0.151
085	6.968	0.562 *	-0.245	-0.107	0.393
086	8.293	0.825	-0.254	-0.237	-0.089
087	8.133	0.861	0.198	-0.183	-0.313
088	7.501	0.439 *	-0.297	-0.237	-0.368
089	7.716	0.665	0.336	-0.169	-0.162
090	7.601	0.702	0.219	-0.250	-0.129
091	7.104	0.628 *	-0.090	-0.011	0.033
092	7.452	0.816	-0.176	-0.145	-0.067
093	7.450	0.785 *	-0.180	-0.092	-0.084
094	7.808	0.603	-0.281	-0.062	0.040
095	7.823	0.857	0.229	-0.050	-0.241
096	8.470	1.469	0.424	-0.137	-0.208
097	7.673	0.482	0.113	0.055	-0.016
098	8.427	0.629	0.120	-0.377	-0.354
099	7.942	0.756	0.011	-0.182	-0.093
100	7.650	0.814	-0.330	-0.034	-0.057
101	8.103	0.976	-0.022	-0.095	0.109
102	7.929	1.000	0.217	0.009	-0.142
103	9.554	1.323 *	0.115	0.013	0.101
104	8.409	0.843	0.165	0.060	0.193
105	7.752	0.484	-0.093	-0.100	-0.228
106	8.631	0.578	0.092	0.180	0.008
107	8.463	0.697	0.181	-0.132	-0.232
108	8.532	1.308	0.196	-0.143	-0.196
109	8.637	0.821	-0.097	-0.027	0.436
110	8.463	0.946	-0.063	-0.068	-0.097
111	9.049	1.268	0.262	0.281	0.290
112	7.615	0.717	-0.009	-0.191	0.085
113	8.048	0.705	-0.068	0.129	0.090
114	8.542	0.860	-0.061	-0.003	-0.373
115	7.751	0.665	0.052	0.220	0.014
116	7.988	1.023	0.332	0.172	-0.057
117	7.184	0.688 *	0.126	-0.228	-0.283
118	6.926	0.514 *	0.002	-0.095	-0.023
119	6.855	0.610 *	-0.237	0.070	-0.117
120	8.389	0.807	-0.240	0.231	-0.298

Tabela 10: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
121	7.864	0.629	0.228	-0.310	0.078
122	7.682	0.612	0.020	-0.122	0.208
123	7.893	0.675	-0.041	0.048	0.089
124	8.293	0.684	0.114	0.161	-0.296
125	8.411	0.929	0.041	-0.292	-0.101
126	8.717	1.307	0.320	-0.192	0.015
127	8.590	0.885	-0.471	0.499	-0.248
128	8.109	0.681	0.010	0.183	-0.425
129	7.244	0.368 *	0.061	-0.102	0.167
130	7.548	0.764	0.036	0.072	-0.047
131	7.929	0.825	0.220	-0.200	-0.389
132	7.831	0.837	0.226	0.043	-0.109
133	8.976	0.849 *	0.086	-0.307	0.261
134	7.940	0.811	0.315	0.098	-0.082
135	8.300	0.807	-0.053	0.196	-0.255
136	8.914	1.062	0.224	0.245	-0.226
137	7.519	0.507 *	-0.003	-0.169	0.215
138	7.813	0.702	-0.255	-0.032	-0.269
139	7.781	0.555	-0.029	-0.035	-0.122
140	8.506	0.823	-0.030	-0.160	0.225
141	7.484	0.920	0.008	-0.130	-0.050
142	8.127	0.910	0.221	-0.151	0.149
143	7.758	0.658	0.096	-0.149	0.107
144	7.685	0.967	0.104	-0.354	-0.344
145	7.758	0.516	0.130	-0.020	0.306
146	7.794	0.569	0.033	-0.105	0.140
147	7.617	0.612	0.234	-0.068	-0.126
148	7.474	0.685	0.080	0.016	0.104
149	8.049	1.054	0.144	-0.186	-0.136
150	7.702	0.602	0.002	0.133	-0.117
151	7.868	0.835	0.011	-0.045	0.301
152	7.406	0.671 *	-0.049	-0.064	-0.195
153	8.511	0.866	-0.135	-0.079	-0.029
154	8.506	0.778	-0.191	-0.240	0.182
155	8.117	1.029	0.297	-0.138	0.052
156	7.679	0.519	0.110	0.204	0.425
157	8.184	1.076	0.106	0.100	0.227
158	9.041	1.098	-0.210	-0.039	0.094
159	7.922	0.652	-0.125	-0.141	0.226
160	9.423	1.114 *	-0.017	0.293	-0.244

Tabela 10: (CONTINUAÇÃO) DADOS OBTIDOS USANDO NÚMEROS ALEATÓRIOS ANTITÉTICOS

Número da Simul.	Média de W_n	Meia Amplitude do I.C.	Lag 1	Lag 2	Lag 3
161	8.636	1.036	0.294	-0.093	-0.085
162	8.099	0.613	0.189	-0.106	-0.034
163	7.721	0.682	-0.081	0.148	-0.097
164	8.262	0.887	-0.229	-0.044	-0.091
165	7.729	0.465	0.110	0.195	0.095
166	7.958	0.725	-0.066	0.122	-0.118
167	8.479	1.033	0.293	-0.118	-0.235
168	8.387	1.083	0.167	0.066	0.025
169	8.605	1.145	-0.069	-0.194	0.038
170	7.985	0.845	0.148	-0.027	-0.211
171	7.006	0.516 *	0.013	-0.001	0.261
172	7.771	0.686	-0.097	-0.110	-0.229
173	7.760	0.780	-0.130	-0.340	0.208
174	8.450	0.795	0.540	0.121	0.148
175	9.063	1.525	0.388	-0.070	-0.066
176	8.796	1.184	0.330	-0.077	-0.349
177	8.739	1.136	0.173	0.139	0.087
178	8.284	0.669	-0.099	-0.185	-0.072
179	7.190	0.695 *	-0.302	0.335	-0.396
180	7.749	0.678	-0.202	0.099	-0.342
181	7.777	0.730	0.019	-0.419	-0.102
182	7.757	0.782	0.098	-0.069	-0.011
183	7.935	0.666	-0.203	0.043	0.048
184	7.404	0.595	0.275	-0.066	-0.218
185	7.637	0.735	0.068	-0.203	-0.219
186	8.538	0.721	0.245	0.104	-0.145
187	7.553	0.590	-0.257	0.073	-0.165
188	8.337	0.754	0.372	0.225	0.147
189	8.813	0.984	-0.171	0.023	-0.198
190	7.686	0.659	0.085	-0.195	-0.234
191	7.715	0.524	-0.003	-0.193	0.204
192	9.602	1.604	0.002	-0.026	0.114
193	7.587	0.625	-0.145	-0.132	0.210
194	8.193	1.062	0.461	0.220	-0.045
195	8.513	1.088	0.062	0.286	0.068
196	7.908	1.068	0.163	-0.026	-0.026
197	8.146	0.671	-0.095	0.072	0.177
198	9.133	0.810 *	0.101	-0.050	-0.195
199	7.984	0.776	0.217	-0.165	-0.235
200	7.361	0.758	0.249	0.027	-0.067