EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE
SEGUNDA ESPÉCIE : SOLUÇÃO POR
COLOCAÇÃO POLINOMIAL SPLINE.

LEONARDO S. GUILLERMO FELIPE

ORIENTADORA: Profa. Dra. Neide Maria Bertoldi Franco.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São
Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências
de Computação e Matemática Computacional.

São Carlos-São Paulo

1994

À minha família

AGRADECIMENTOS

A professora Dra. Neide Maria Bertoldi Franco, pela orientação, apoio e atenção que sempre me dispensou durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores, colegas de Pós-Graduação e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, que contribuíram para tornar minha permanência bem proveitosa e agradável.

A meus colegas de sala, pela cooperação, amizade e companherismo.

Ao povo brasileiro, que através do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) patrocinou este trabalho mediante uma bolsa de mestrado.

Finalmente, reitero minha consideração aos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho e aproveito para manifestar que este foi motivo de grande satisfação pessoal.

EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE : SOLUÇÃO POR COLOCAÇÃO POLINOMIAL SPLINE .

RESUMO

Neste trabalho pesquisamos a ordem de convergência atingível da aproximação num certo espaço polinomial spline para a solução de equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo regular e fracamente singular.

Se considerarmos equações de Volterra com núcleo regular, a suavidade da solução é determinada pela suavidade do núcleo dado e pela função forçante. Isto, por sua vez, implica que a aproximação por colocação exibe ordem ótima de convergência global. Superconvergência local é atingível para alguma escolha apropriada dos parâmetros de colocação. Entretanto, se admitirmos núcleos contendo singularidades fracas do tipo algébrico, e se empregarmos uma sequência de malhas quase-uniforme, então a ordem de convergência global da aproximação é menor que 1, sem considerar o grau da função da aproximação spline. Para restaurar a ordem ótima de convergência, colocação sobre uma malha convenientemente graduada será mostrada. Resultados numéricos verificando a taxa de convergência do método são apresentados.

VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND : SOLUTION FOR POLYNOMIAL SPLINE COLLOCATION.

Leonardo S. Guillermo Felipe.

Adviser: Profa. Dra. Neide Maria Bertoldi Franco.

ABSTRACT

In this work we investigate the attainable order of convergence of collocation approximation in certain polynomial spline spaces for solution of second kind Volterra integral equations with regular and weakly singular kernel.

If we consider Volterra equations with regular kernel, the smoothness of the solution is determined by the smoothness of the given kernel and forcing function. This, in turn, implies that the collocation approximation exhibits the (optimal) order of global convergence. Local superconvergence is attained for some suitable choice of the collocation parameters. However, if we admit kernels containing a weak singularity of algebraic type, and if we employ quasi-uniform mesh sequences, then the global order of convergence of the approximation is less than one, regardless of the degree of the approximating spline function. In order to restore the optimal order of convergence, collocation on suitably graded meshes will be shown. Numerical results verifying the convergence rates of the method are presented.

CONTEÚDO

	Pág.
INTRODUÇÃO.	1
CAPÍTULO I - PRELIMINARES.	3
1.1 - Equações integrais de Volterra de segunda espécie.	3
1.2 - Alguns resultados da análise numérica.	4
1.2.1 - Desigualdades discretas de tipo Gronwall.	4
1.2.2 - Alguns resultados de quadratura numérica.	5
1.2.3 - Fórmulas de quadratura de Gauss-Legendre, Radau e Lobatto.	7
1.3 - O espaço dos polinômios splines $S_{m-1}^{(d)}(Z_N)$.	9
CAPÍTULO II - MÉTODO DE COLOCAÇÃO USANDO MALHA QUASE-UNIFORME PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE COM NÚCLEO REGULAR.	12
2.1 - Método de colocação polinomial spline para equações integrais de Volterra de segunda espécie.	12
2.1.1 - A equação de colocação exata.	12
2.1.2 - Resultado de convergência global.	15
2.1.3 - Superconvergência local em $\bar{Z}_N$	20
2.2 - Resultados de convergência para a equação de colocação discretizada.	23
2.3 - Exemplo numérico.	30
2.4 - Conclusão.	33

CAPÍTULO III -MÉTODO DE COLOCAÇÃO USANDO MALHA QUASE-UNIFORME PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE COM NÚCLEO FRACAMENTE SINGULAR.	34
3.1 - Suavidade das soluções.	35
3.2 - Método de colocação polinomial spline para equações integrais de Volterra de segunda espécie.	37
3.2.1 - Método de colocação polinomial spline usando malha quase-uniforme.	37
3.3 - Conclusão.	49
 CAPÍTULO IV - METODO DE COLOCAÇÃO USANDO MALHA GRADUADA PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE COM NÚCLEO FRACAMENTE SINGULAR.	 50
4.1 - Discretização da equação de colocação.	54
4.2.- Exemplo numérico.	62
4.3 - Conclusão.	65
 CAPÍTULO V - CONCLUSÕES GERAIS	 66
 BIBLIOGRAFIA.	 68

INTRODUÇÃO

Problemas físicos (como por exemplo, condução de calor, superfluidez, eletroquímica) conduzem frequentemente a equações integrais de segunda espécie cujos núcleos contêm singularidades (integráveis) de tipo algébrico ou logarítmico (ver por exemplo, [HANDELSMAN-72], [OLMSTEAD-77], [TE RIELE-82]). Consideraremos equações integrais de Volterra de segunda espécie cujas singularidades são do tipo algébrico; isto é,

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} k(t,s,y(s)) ds, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in I := [0, T], \quad (1)$$

onde assumiremos que as funções dadas g e k são suficientemente suaves sobre seus domínios I e $S \times \mathbb{R}$ (com $S := \{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$), respectivamente.

No desenvolvimento deste trabalho serão tratados vários aspectos de um método de aproximação para a solução da equação integral dada acima. Tal método baseia-se em uma técnica de colocação sobre um certo espaço polinomial spline. Nosso interesse particular está na construção de um método que possua ordem de convergência elevada, não só para $\alpha=0$, mas também para $\alpha \in (0,1)$. Para isto será necessário conhecer as propriedades de suavidade da solução exata de (1). Para $\alpha=0$, a suavidade de g e k implicam a existência de uma (única) solução y que é suave sobre $[0,T]$. A presença de singularidade fraca ($0 < \alpha < 1$) no núcleo deverá conduzir a uma (ainda única) solução que tem derivadas não limitadas em $t=0$; isto é, se $\alpha \in (0,1)$ e g, k são funções suaves, isto não implica que a solução y seja suave em todo I . A implicação prática deste fato é que existem métodos numéricos com convergência de ordem elevada que são aplicados a equações integrais com soluções suaves, estes deverão ser

modificados de tal maneira que considerem a natureza do comportamento singular da solução exata em $t=0$.

O objetivo deste trabalho é apresentar o método de colocação polinomial spline para aproximar a solução exata da equação integral de Volterra de segunda espécie (1), assim como fazer a análise de convergência do método, usando malha conveniente de modo a obter ordem ótima de convergência.

No Capítulo I apresentamos algumas notações, definições e teoremas matemáticos básicos, os quais achamos necessários para o desenvolvimento dos demais Capítulos.

O método de colocação (e sua discretização) no espaço polinomial spline para as equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo regular ($\alpha=0$), assim como a análise de convergência (global e local) e um exemplo numérico; encontram-se no Capítulo II.

No Capítulo III descrevemos as propriedades de suavidade da solução da equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular ($0<\alpha<1$) e também apresentamos a análise de convergência do método usando malha quase-uniforme.

O método de colocação para equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular, a discretização da equação de colocação, assim como a análise de convergência do método usando malha graduada e resultados numéricos, são apresentados no Capítulo IV.

No Capítulo V apresentamos as conclusões gerais deste trabalho.

Finalmente é apresentada a Bibliografia que contém os textos e artigos utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste Capítulo damos algumas notações básicas e conceitos matemáticos que consideramos necessários para o desenvolvimento do presente trabalho.

1.1. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE. [BRUNNER-86].

Sejam $I:=[0,T]$ um intervalo compacto, com $T>0$, e $S:=\{(t,s): 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Uma equação integral (para a função desconhecida y) da forma:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s,y(s))ds, \quad t \in I,$$

é chamada **equação integral de Volterra (não linear) de segunda espécie**; onde g (a função forçante) e k (o núcleo da equação integral) são funções dadas de valor real.

A equação integral de Volterra é linear se seu núcleo é da forma:

$$k(t,s,y(s)) = K(t,s)y(s).$$

Se o núcleo de uma equação integral de Volterra é produto de uma função suave e uma função fracamente singular (isto é, não limitada, mas integrável) da forma:

$$k(t,s,y) = (t-s)^{-\alpha} \gamma(t,s,y), \quad 0 < \alpha < 1$$

então, as equações são chamadas de equações integrais do tipo Abel.

Teoremas de existência e unicidade para equações integrais de Volterra e equações integrais do tipo Abel de segunda espécie são encontrados, por exemplo, em [YOSIDA-60] e [MILLER-71a].

1.2. ALGUNS RESULTADOS DA ANÁLISE NUMÉRICA.

1.2.1. DESIGUALDADES DISCRETAS DE TIPO GRONWALL.

A discretização de equações de Volterra por meio de métodos de quadratura e a subsequente análise de convergência conduz a desigualdades discretas da forma

$$z_n \leq g_n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i z_i, \quad n=0, \dots, N;$$

onde os elementos das sequências $\{g_n\}$, $\{p_n\}$ e $\{z_n\}$ são não negativos.

Os seguintes dois Teoremas podem ser encontrados em [MCKEE -82] e [BRUNNER - 86].

Teorema 1.1.

Seja $z_n \geq 0$ para $n=0, 1, \dots, N$, e suponha que a sequência $\{z_n\}$ obedece a desigualdade:

$$z_n \leq hC_1 \sum_{i=0}^{n-1} z_i + C_2, \quad n=k, k+1, \dots, N \quad (1.1)$$

onde $k > 0$, $C_i > 0$ ($i=1, 2$) e $h > 0$. Então os elementos desta sequência podem ser limitados por:

$$z_n \leq (hC_1 z_k + C_2)(1+hC_1)^{n-k}, \quad n=k, \dots, N$$

desde que os valores iniciais $z_0, \dots, z_{k-1}$ satisfaçam $z_j \leq z/k$. $\square$

Observação 1.1.

Nos resultados para desigualdades discretas do tipo

Gronwall, os coeficientes de $\{z_1\}$ sobre o lado direito de (1.1) não dependem de n . Não obstante, na discretização de equações de Volterra com núcleo fracamente singular, encontramos desigualdades da forma:

$$z_n \leq h^{1-\alpha} C_1 \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^{-\alpha} z_i + C_2, \quad n=0, \dots, N \quad (1.2)$$

onde os coeficientes de z_1 variam com n . Deste modo, a seguir apresentamos um resultado para $\alpha \in (0,1)$:

Teorema 1.2.

Seja $0 < \alpha < 1$, e defina v como sendo um inteiro positivo pequeno satisfazendo $v(1-\alpha) \geq 1$. Se a sequência não negativa $\{z_n\}$ satisfaz a desigualdade (1.2) com $nh \leq Nh = cT$, então:

$$z_n \leq C_2 [C_2' + hC_1' (cT)^{v(1-\alpha)-1}] \exp[C_1' (cT)^{v(1-\alpha)}], \quad n=1, \dots, N$$

onde as constantes C_i' ($i=1,2$) são dadas por:

$$C_1' := \frac{[C_1 \Gamma(1-\alpha)]^v}{\Gamma(v(1-\alpha))},$$

$$C_2' := (1 + C_1 h^{1-\alpha}) \sum_{j=0}^{v-2} \gamma^j + \gamma^{v-1}, \quad \gamma := \frac{C_1 (cT)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}.$$

1.2.2. ALGUNS RESULTADOS DE QUADRATURA NUMÉRICA. [ISAACSON-66].

Seja $I[\phi] := \int_a^b \phi(t) dt$, $|a| < \infty$, $|b| < \infty$, $a < b$; e consideremos uma aproximação numérica para $I[\phi]$ definida por:

$$I_n[\phi] := \sum_{j=0}^n c_{n,j} \phi(t_{n,j}),$$

onde os $t_{n,j}$ ($t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,n}$) são pontos ou abscissas não necessariamente em $[a,b]$, e $\{c_{n,j}\}$ ($j=0, \dots, n$) são os coeficientes.

A aproximação $I_n[\phi]$ é chamada fórmula de quadratura sobre $(n+1)$ pontos.

O erro da aproximação ou erro da quadratura é dado por:
 $E_n[\phi] := I[\phi] - I_n[\phi].$

Definição 1.1.

Uma fórmula de quadratura tem grau de precisão q se é exata para todo polinômio ϕ de grau não excedendo q , e é não exata para polinômios de grau $q+1$.

As fórmulas de quadratura interpolatória podem ser caracterizadas pelo seguinte Teorema:

Teorema 1.3.

Uma fórmula de quadratura baseada em $(n+1)$ pontos (distintos) é do tipo interpolatório se, e só se, seu grau de precisão satisfaz $q \geq n$.

Observação 1.2.

Estimativas para $E_n[\phi]$ podem ser dadas em casos especiais, por exemplo, se os pontos $\{t_{n,j}\}$ são igualmente espaçados, ou se $t_{n,j}$ são relacionados com os zeros de certos polinômios ortogonais. Nestes casos as fórmulas de quadratura são da forma,

$$\int_a^b \phi(t) dt = I_n[\phi] + e_n (b-a)^{q+2} \phi^{(q+1)}(\tilde{t}_n), \quad \tilde{t}_n \in (a, b) \quad (1.3)$$

onde q é o grau de precisão da fórmula e e_n é uma constante dependendo só de n .

Fazendo $t=a+h\tau$, τ sobre o intervalo $[0,1]$, com $h=b-a$ obtemos:

$$\int_0^1 \phi(a+(b-a)\tau) d\tau = \frac{1}{b-a} I_n[\phi] + e_n (b-a)^{q+1} \phi^{(q+1)}(\tilde{t}_n), \quad (1.4)$$

onde $I_n[\phi]$ é a mesma aproximação numérica que em (1.3).

Na construção de métodos passo a passo para equações de Volterra, é muitas vezes conveniente escrever (1.4) na seguinte forma [BRUNNER-86],

$$\int_0^1 \phi(a+\tau h) d\tau = \sum_{i=1}^m w_i \phi(a+d_i h) + e_m h^{q+1} \phi^{(q+1)}(\tilde{t}_m), \quad (1.5)$$

onde, $0 \leq d_1 < \dots < d_m \leq 1$ e h denota o passo de integração do método.

1.2.3. FÓRMULAS DE GAUSS-LEGENDRE, RADAU E LOBATTO.

Em [KRYLOV-62] pode ser visto que o grau de precisão da fórmula de quadratura interpolatória sobre $(n+1)$ pontos pode ser feita consideravelmente superior a n , escolhendo-se os pontos $\{t_{n,j}\}$ apropriadamente. As fórmulas de Gauss-Legendre são um exemplo desse tipo de fórmula. Elas são definidas pelos pontos,

$$t_{n,j} = \left(\frac{b-a}{2}\right) z_{n,j} + \frac{b+a}{2}, \quad j=0,1,\dots,n$$

onde $\{z_{n,j}\}$ são os $n+1$ zeros do polinômio de Legendre $P_{n+1}(t)$, definido por,

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2-1)^k, \quad k=0,1,\dots$$

Observação 1.3.

Nas fórmulas de Gauss-Legendre os limites de integração não estão contidos no conjunto dos pontos $t_{n,j}$. Não obstante, na construção da aproximação da solução de equações integrais de Volterra, é muitas vezes conveniente incluir um ou ambos os pontos extremos no conjunto de abscissas $\{t_{n,j}\}$. Escolhendo-se os pontos de tal forma que o grau de precisão seja o maior possível, obtemos famílias de fórmulas de Radau e Lobatto, respectivamente.

1.2.3.1. FÓRMULAS DE RADAU.

São definidas pelos pontos,

$$t_{n,j} = \left(\frac{b-a}{2}\right) z_{n,j} + \frac{b+a}{2}, \quad j=1,\dots,n; \quad t_{n,0}=a,$$

onde $\{z_{n,j}\}$ são os n zeros do polinômio $\frac{P_n(t)+P_{n+1}(t)}{t+1}$, com $P_n(t)$ denotando o polinômio de Legendre de grau n .

As fórmulas de Radau definidas acima serão chamadas **fórmulas de Radau I**. Fórmulas similares podem ser derivadas se ao invés de a incluirmos b no conjunto de abscissas; estas fórmulas são chamadas **fórmulas de Radau II** e suas abscissas $\bar{t}_{n,j}$ são dadas por,

$$\bar{t}_{n,j} = b + a - t_{n,n-j},$$

onde $t_{n,k}$ são os pontos das fórmulas de Radau I.

1.2.3.2. FÓRMULAS DE LOBATTO.

São definidas pelos pontos,

$$t_{n,0} = a, \quad t_{n,n} = b, \quad t_{n,j} = \left(\frac{b-a}{2}\right)z_{n,j} + \frac{b+a}{2}, \quad j=1, \dots, n-1,$$

onde $\{z_{n,j}\}$ são os $n-1$ zeros dos polinômios $P'_n(t)$, com $P_n(t)$ denotando o polinômio de Legendre.

Definição 1.2. [RIVLIN - 69].

A função

$$\Lambda_m(x) := \sum_{l=1}^m |L_l(x)|, \quad \text{é chamada função de Lebesgue; e a}$$

quantidade

$$\Lambda_m := \max\{\Lambda_m(x) : 0 \leq x \leq 1\} \text{ é chamada constante de Lebesgue.}$$

Aqui $L_1(x)$ são os polinômios fundamentais de Lagrange.

Teorema 1.4. [ABRAMOWITZ - 70].

Se f e g são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e de classe C^n , então a n -ésima derivada da função produto $f(x)g(x)$ em relação a x é dada por

$$\left[f(x)g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x), \quad (1.6)$$

onde

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \quad \text{são chamados}$$

coeficientes binomiais.

A fórmula (1.6) é denominada regra do produto de Leibniz.

Teorema (Binomial) 1.5. [ABRAMOWITZ - 70].

Se n é um número inteiro positivo, então

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

onde $\binom{n}{k}$ são os coeficientes binomiais.

1.3. O ESPAÇO DOS POLINÔMIOS SPLINES $S_{m-1}^{(d)}(Z_N)$. [BLOM-87]

Para $N \in \mathbb{N}$ dado, sejam

$$\Delta_N: 0 = t_0^{(N)} < t_1^{(N)} < \dots < t_N^{(N)} = T$$

uma partição (ou malha) do intervalo $I := [0, T]$;

$$h_n^{(N)} := t_{n+1}^{(N)} - t_n^{(N)},$$

$$h_{\min}^{(N)} := \min \{ h_n^{(N)} : 0 \leq n \leq N-1 \} \text{ e}$$

$$h_{\max}^{(N)} := \max \{ h_n^{(N)} : 0 \leq n \leq N-1 \}.$$

Definição 1.3.

Uma sequência de malhas para o intervalo I é chamada **quase-uniforme**, se existe uma constante finita $\gamma \geq 1$ independente de N tal que,

$$\frac{h_{\max}^{(N)}}{h_{\min}^{(N)}} \leq \gamma, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

É fácil ver que a sequência de malhas quase-uniforme satisfaz a seguinte propriedade,

$$Nh_n^{(N)} \leq Nh_{\max}^{(N)} \leq \gamma Nh_{\min}^{(N)} \leq \gamma T, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Esta é uma propriedade de crucial importância na análise de convergência do método de colocação baseado em polinômios splines.

Para uma partição uniforme temos que,

$$h_{\min}^{(N)} = h_{\max}^{(N)} (=h) = T/N, \quad \text{com } \gamma=1; \text{ e então (1.8) se reduz a}$$

$Nh=T$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Agora, com a partição Δ_N , associamos o conjunto de seus pontos interiores,

$$Z_N := \{t_n^{(N)} : n=1, \dots, N-1\} \text{ com } \bar{Z}_N := Z_N \cup \{T\}.$$

e os subintervalos,

$$\sigma_0^{(N)} := [t_0^{(N)}, t_1^{(N)}], \quad \sigma_n^{(N)} := (t_n^{(N)}, t_{n+1}^{(N)}], \quad n=1, \dots, N-1.$$

Para abreviar a notação suprimimos o índice N em $t_n^{(N)}$, $h_n^{(N)}$,

$$h_{\max}^{(N)}, \quad h_{\min}^{(N)} \text{ e } \sigma_n^{(N)}.$$

Definimos $h := h_{\max}$ (chamado diâmetro da malha Δ_N).

Definição 1.4.

Sejam m e d dois números inteiros dados, satisfazendo $-1 \leq d \leq m-1$, e seja P_{m-1} ($m \geq 1$) o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a $m-1$. Definimos,

$$S_{m-1}^{(d)}(Z_N) := \left\{ u: u(t) \Big|_{t \in \sigma_n} = u_n(t) \in P_{m-1}, \quad n=0, \dots, N-1; \right. \\ \left. u_{n-1}^{(j)}(t_n) = u_n^{(j)}(t_n), \text{ para } j=0, \dots, d; \text{ e } t_n \in Z_N \right\}$$

como o espaço dos polinômios (reais) splines de grau $m-1$ e classe de continuidade d , tendo nós Z_N .

observação 1.4.

Se $d=-1$, então os elementos de $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ podem ter

descontinuidades de salto (finito) nos nós Z_N . O espaço $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ é então o espaço de polinômios splines menos suave, enquanto que $S_{m-1}^{(m-1)}(Z_N)$ (o espaço spline clássico) é o mais suave destes espaços; ver por exemplo [DE BOOR-78] e [SCHUMAKER-81].

Neste trabalho mostraremos que o espaço dos polinômios splines correspondente a $d=0$ e $d=-1$ são de particular importância.

Definição 1.5. [BRUNNER-85].

Denotemos por $\Delta_N^{(r)}$ a partição graduada de $[0,T]$ definida por,

$$t_n := \left(\frac{n}{N}\right)^r T, \quad n=0, \dots, N-1 \quad (N \geq 2) \quad (1.9)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é dado por $r = m/(1-\alpha)$ (m é um número inteiro dado na definição 1.4 e $0 < \alpha < 1$). Assumiremos que $r \geq 1$.

É fácil verificar as seguintes propriedades para malha graduada,

$$a). \quad t_n = n^r t_1, \quad n=1, \dots, N; \quad \text{onde } t_1 = h_0 (=h_{\min}) = TN^{-r}. \quad (1.10)$$

$$b). \quad h = h_{N-1} = rTN^{-1}(1-\theta N^{-1})^{r-1} \leq rTN^{-1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (h = h_{\max}) \quad (1.11)$$

$$c). \quad \frac{h}{h_{\min}} = \frac{h_{N-1}}{h_0} = rN^{r-1}(1-\theta N^{-1})^{r-1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (1.12)$$

Observação 1.5.

A propriedade de crucial importância na análise de convergência (no Capítulo IV) é (1.11) (análoga à propriedade (1.8) para malha quase-uniforme). Observe que o diâmetro da malha para uma sequência de malha graduada comporta-se do mesmo modo que $h = O(N^{-1})$ em intervalos compactos, isto é, $h \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Por outro lado, a propriedade (1.12) mostra que a sequência de malha graduada (1.9) com $r > 1$ não se comporta como malha quase-uniforme, desde que $h/h_{\min} \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$.

CAPÍTULO II

MÉTODO DE COLOCAÇÃO USANDO MALHA QUASE-UNIFORME PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE COM NÚCLEO REGULAR

Neste Capítulo introduzimos o método de colocação, o qual é baseado no princípio de aproximar a solução exata de uma equação funcional dada, num espaço apropriado de funções finito-dimensionais. O elemento de aproximação deve satisfazer a equação funcional num certo subconjunto finito do intervalo no qual a equação deverá ser resolvida. Este elemento, em geral não satisfaz a equação num ponto que não pertença a este subconjunto finito. Tal subconjunto é chamado de conjunto dos pontos de colocação.

O objetivo deste capítulo é estudar o método de colocação para equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo regular. Daremos particular atenção a resultados de convergência (global e local) e a discretização da equação de colocação. O espaço de aproximação será o espaço dos polinômios splines.

Os resultados apresentados neste Capítulo podem ser encontrados em [BRUNNER-86] e [BLOM-87].

2.1. MÉTODO DE COLOCAÇÃO POLINOMIAL SPLINE PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE.

2.1.1. A EQUAÇÃO DE COLOCAÇÃO EXATA.

Considere a equação integral de Volterra de segunda espécie:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s,y(s))ds, \quad t \in I \quad (2.1)$$

onde g e k são funções dadas de valor real. A equação (2.1) pode ser escrita na forma,

$$y(t) = F_n(t) + \int_{t_n}^t k(t, s, y(s)) ds, \quad t \in \sigma_n, \quad n=0, \dots, N-1; \quad (2.2)$$

onde $F_n(t)$ é dado por:

$$F_n(t) := g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t, s, y(s)) ds. \quad (2.3)$$

A solução exata y de (2.1) será aproximada por um elemento do espaço dos polinômios splines $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$. Lembremos que $h_n := t_{n+1} - t_n$ ($n=0, \dots, N-1$), $h := \max_n h_n$. Assumiremos que a partição é quase-uniforme. Temos então que $Nh_n \leq Nh \leq \gamma T$ (ver (1.8)). Seja o subconjunto finito $X(N)$ de I dado por,

$$X(N) := \bigcup_{n=0}^{N-1} X_n, \quad (2.4)$$

onde $X_n := \{t_{n,j} := t_n + c_j h_n : 0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1\}$. O conjunto $X(N)$ será chamado de pontos de colocação. A aproximação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ deverá ser requerida a satisfazer a equação integral (2.1) (ou equivalentemente (2.2)) no conjunto $X(N)$. Mais precisamente, o elemento $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ deverá ser tal que (após fazer mudança de variável $s = t_n + v h_n$, $t = t_{n,j}$ e $s = t_i + v h_i$, em (2.2) e (2.3) respectivamente):

$$u_n(t_{n,j}) = \bar{F}_n(t_{n,j}) + h_n \int_0^1 k\left(t_{n,j}, t_n + v h_n, u_n(t_n + v h_n)\right) dv, \quad j=1, \dots, m \quad (2.5)$$

onde,

$$u_n(t_n + v h_n) = \sum_{j=1}^m L_j(v) u_n(t_{n,j}), \quad t_n + v h_n \in \sigma_n, \quad n=0, \dots, N-1; \quad (2.6)$$

$\bar{F}_n(t)$, a aproximação para o termo exato $F_n(t)$, é definida por

$$\bar{F}_n(t) := g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 k\left(t, t_i + v h_i, u_i(t_i + v h_i)\right) dv, \quad (2.7)$$

e L_j é o j -ésimo polinômio fundamental de Lagrange associado com os m

parâmetros de colocação $\{c_j\}$ em (2.4), ou seja

$$L_j(v) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m \frac{(v-c_r)}{(c_j-c_r)}, \quad 1 \leq j < m. \quad (2.8)$$

Antes de analisar a equação de colocação (2.5), damos um caso especial na escolha dos pontos de colocação (2.4). Este é o caso onde, para $m \geq 2$, os pontos t_n e t_{n+1} pertencem a X_n .

Teorema 2.1.

Sejam g e k funções contínuas. Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ em (2.4) são tais que $0=c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1} < c_m=1$, então a aproximação por colocação u definida por (2.5) é um elemento de $S_{m-1}^{(0)}(Z_N)$.

Prova.

Devemos provar que $u_{n-1}(t_n) = u_n(t_n)$. Por (2.5) temos que,

$$\begin{aligned} u_n(t_n) &= g(t_n) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 k\left(t_n, t_i + vh_i, u_i(t_i + vh_i)\right) dv + \\ &\quad + h_n \int_0^{c_n} k\left(t_n, t_n + vh_n, u_n(t_n + vh_n)\right) dv \\ &= g(t_n) + \sum_{i=0}^{n-2} h_i \int_0^1 k\left(t_n, t_i + vh_i, u_i(t_i + vh_i)\right) dv + \\ &\quad + h_{n-1} \int_0^1 k\left(t_n, t_{n-1} + vh_{n-1}, u_{n-1}(t_{n-1} + vh_{n-1})\right) dv \\ &= u_{n-1}(t_n), \text{ pois } t_{n-1,m} = t_n = t_{n,1}. \quad \square \end{aligned}$$

Agora reescreveremos a equação de colocação (2.5) introduzindo a seguinte notação,

$$\Phi_{n,i}^{(j)}[u_i] := \begin{cases} \int_0^1 k\left(t_{n,j}, t_i + vh_i, u_i(t_i + vh_i)\right) dv, & 0 \leq i \leq n-1 \\ \int_0^{c_j} k\left(t_{n,j}, t_n + vh_n, u_n(t_n + vh_n)\right) dv, & i=n \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $j=1, \dots, m$. Com esta notação (2.5) assume a seguinte forma:

$$u_n(t_{n,j}) = g(t_{n,j}) + h_n \phi_{n,n}^{(j)}[u_n] + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \phi_{n,i}^{(j)}[u_i],$$

$$j=1, \dots, m; \quad n=0, \dots, N-1. \quad (2.10)$$

2.1.2. RESULTADO DE CONVERGÊNCIA GLOBAL.

Nesta parte resolveremos a questão de ordem ótima de convergência global do método de colocação introduzido na Seção 2.1.1, assumindo que as integrais (2.9) são avaliadas analiticamente. Enunciaremos e provaremos o resultado de convergência para a equação integral linear de Volterra de segunda espécie:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)y(s) ds, \quad t \in I. \quad (2.11)$$

Seja $e := y - u$, e denotemos sua restrição para o intervalo σ_n por e_n . Esta função erro, em geral, terá saltos finitos em Z_N .

Lembramos que,

$$\|e\|_{\infty} := \sup \{ |e_n(t)| : t \in \sigma_n, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \}.$$

Teorema 2.2.

Suponha que as funções dadas g e K em (2.11) pertencem a $C^m(I)$ e $C^m(S)$ respectivamente. Então existe $\bar{h} > 0$ tal que a equação de colocação (2.10) define para cada $h \in (0, \bar{h})$ um único elemento $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$. O erro induzido por esta aproximação para a solução exata y de (2.11) satisfaz, para toda escolha dos parâmetros de colocação $\{c_j\}$ com $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$ e para toda sequência de malha quase-uniforme,

$$\|e\|_{\infty} \leq C h^m, \quad (2.12)$$

onde C denota alguma constante finita independente de h (mas dependendo de $\{c_j\}$).

Prova:

As hipóteses para g e K implicam que (2.11) tem uma única solução $y \in C^m(I)$. Em consequência, podemos fazer o desenvolvimento de

y em série de Taylor em torno do ponto t_n para obter:

$$y(t_n + \tau h_n) = \sum_{l=1}^m c_{n,l} \tau^{l-1} + h_n^m R_n(\tau), \quad t_n + \tau h_n \in \sigma_n, \quad (2.13)$$

onde

$$c_{n,l} := \frac{y^{(l-1)}(t_n)}{(l-1)!} h_n^{l-1}, \quad R_n(\tau) := \frac{y^{(m)}(\xi_n)}{m!} \tau^m,$$

com $t_n < \xi_n < t_n + \tau h_n$.

Se a restrição de $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ ao subintervalo σ_n é definida por,

$$u_n(t_n + \tau h_n) := \sum_{l=1}^m \alpha_{n,l} \tau^{l-1}, \quad t_n + \tau h_n \in \sigma_n, \quad (2.14)$$

então a restrição da função erro e ao subintervalo σ_n é dada por :

$$e_n(t_n + \tau h_n) = y(t_n + \tau h_n) - u_n(t_n + \tau h_n). \quad (2.15)$$

Usando (2.13) e (2.14) em (2.15) temos,

$$\begin{aligned} e_n(t_n + \tau h_n) &= \sum_{l=1}^m c_{n,l} \tau^{l-1} + h_n^m R_n(\tau) - \sum_{l=1}^m \alpha_{n,l} \tau^{l-1} \\ &= \sum_{l=1}^m (h_n^p \beta_{n,l}) \tau^{l-1} + h_n^m R_n(\tau), \end{aligned}$$

onde $h_n^p \beta_{n,l} := c_{n,l} - \alpha_{n,l}$, $l=1, \dots, m$; p é inteiro, $1 \leq p \leq m$. Daí,

$$e_n(t_n + \tau h_n) = h_n^p \left\{ \sum_{l=1}^m \beta_{n,l} \tau^{l-1} + h_n^{m-p} R_n(\tau) \right\}, \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

Nosso objetivo agora consiste em demonstrar que se $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ é definida por (2.10), então os vetores $\beta_n := (\beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,m})^T$ ficam uniformemente limitados para $n=0, \dots, N-1$, quando $h \rightarrow 0^+$ e $Nh \leq \gamma T$, sempre que $p \leq m$. Mais precisamente, $p=m$ é o maior inteiro para o qual existe uma constante finita B tal que

$$\|\beta_n\|_1 := \sum_{l=1}^m |\beta_{n,l}| \leq B$$

uniformemente, quando $h \rightarrow 0^+$. Isto por sua vez implica, de acordo com (2.16), que

$$|e_n(t_n + \tau h_n)| \leq h_n^m (B + M_m), \quad t_n + \tau h_n \in \sigma_n, \quad (2.17)$$

para $n=0, \dots, N-1$ ($Nh \leq \gamma T$), e para todo $h > 0$ suficientemente pequeno. A constante M_m é dada por

$$M_m := \max \{ |y^{(m)}(t)| / m! : t \in I \}.$$

Subtraindo a equação de colocação (2.5) (com $k(t, s, y) = K(t, s)y$) da equação (2.2) (com $t = t_{n,j}$), obtemos

$$\begin{aligned} e_n(t_{n,j}) &= h_n \int_0^j K_{n,j}(t_n + \tau h_n) e_n(t_n + \tau h_n) d\tau + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 K_{n,j}(t_i + \tau h_i) e_i(t_i + \tau h_i) d\tau, \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $K_{n,j}(\cdot) := K(t_{n,j}, \cdot)$. Para verificar (2.17) observamos que as restrições da função erro aos subintervalos σ_i ($0 \leq i \leq n \leq N-1$) são dadas por (2.18). Como $e_n(t_{n,j}) = y(t_{n,j}) - u_n(t_{n,j})$, temos por (2.18), (2.13) e (2.14) o seguinte,

$$\begin{aligned} &h_n \int_0^j K_{n,j}(t_n + \tau h_n) e_n(t_n + \tau h_n) d\tau + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 K_{n,j}(t_i + \tau h_i) e_i(t_i + \tau h_i) d\tau = \\ &= \sum_{l=1}^m c_{n,l} \tau^{l-1} + h_n^m R_n(\tau) - \sum_{l=1}^m \alpha_{n,l} \tau^{l-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Substituindo (2.16) no lado esquerdo de (2.19) (com $p=m$) resulta (depois de dividir por h_n^m),

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^m \beta_{n,l} \left[c_j^{l-1} - h_n \int_0^j K_{n,j}(t_n + \tau h_n) \tau^{l-1} d\tau \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h_i (h_i / h_n)^m \sum_{l=1}^m \beta_{i,l} \int_0^1 K_{n,j}(t_i + \tau h_i) \tau^{l-1} d\tau + q_{n,j}, \end{aligned} \quad j=1, \dots, m \quad (2.20)$$

onde,

$$q_{n,j} := -R_n(c_j) + h_n \int_0^c K_{n,j}(t_n + \tau h_n) R_n(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} h_i (h_i/h_n)^m \int_0^1 K_{n,j}(t_i + \tau h_i) R_i(\tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Para fazer a seguinte análise mais clara, introduzimos matrizes quadradas $D_{n,i}$ e V definidas por

$$D_{n,i} := \begin{cases} \left[\int_0^1 K_{n,j}(t_i + \tau h_i) \tau^{l-1} d\tau \right], & 0 \leq i \leq n-1 \\ \left[\int_0^c K_{n,j}(t_n + \tau h_n) \tau^{l-1} d\tau \right], & i=n \quad (j, l=1, \dots, m) \end{cases}$$

e

$$V := (c_j^{l-1}), \quad (j, l=1, \dots, m).$$

Além disso, sejam $q_n := (q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,m})^T$ e $k_0 := \max\{|K(t,s)| : (t,s) \in S\}$. Desde que $K \in C(S)$, k_0 é finito. Fazendo o desenvolvimento dos somatórios em (2.20), e tendo em consideração que $j=1, \dots, m$; obtemos,

$$(V - h_n D_{n,n,n}) \beta_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_i (h_i/h_n)^m D_{n,i} \beta_i + q_n. \quad (2.22)$$

Considere agora o lado esquerdo de (2.22): desde que a matriz de Vandermonde V é não singular para todos os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ com $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$, existe $\bar{h} > 0$ tal que a matriz $V - h_n D_{n,n,n}$ tem inversa uniformemente limitada para todo $h_n \in (0, \bar{h})$ ($n=0, \dots, N-1$). Assim os vetores $\{\beta_n\}$ são definidos por

$$\beta_n = (V - h_n D_{n,n,n})^{-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} h_i (h_i/h_n)^m D_{n,i} \beta_i + q_n \right], \quad n=0, \dots, N-1. \quad (2.23)$$

Agora, usando (2.21) e o fato de que $h_n \leq h$, com $Nh \leq \gamma T$, $1 \leq \gamma < \infty$, para qualquer sequência de malha quase-uniforme, as componentes de q_n podem ser limitadas por,

$$|q_{n,j}| \leq M_m + h k_0 \frac{M_m}{(m+1)} + (N-1) h \gamma^m k_0 \frac{M_m}{(m+1)}$$

$$\leq M_m \left(1 + \gamma^{m+1} \frac{k_0 T}{(m+1)} \right) =: q, \quad j=1, \dots, m.$$

Segue então que,

$$\|q_n\|_1 = \sum_{j=1}^m |q_{n,j}| \leq m q =: Q,$$

para alguma constante apropriada Q não dependendo de n .

Além disso, desde que $K(t,s)$ é limitada em S , existe uma constante D_1 tal que, para todo $h \in (0, \bar{h})$ e para $0 \leq i \leq n-1 \leq N-2$, $\|D_{n,i}\|_1 \leq D_1$. Deste modo, se D_0 denota um limitante superior uniforme para $\|(V - h D_{n,n})^{-1}\|_1$, então (2.23) fornece,

$$\|\beta_n\|_1 \leq h \gamma^m D_0 D_1 \sum_{i=0}^{n-1} \|\beta_i\|_1 + D_0 Q, \quad n=0, \dots, N-1, \quad (2.24)$$

ou seja, obtemos uma desigualdade de Gronwall discreta para $\{\beta_n\}$. Consequentemente, aplicando o Teorema 1.1 em (2.24), obtem-se que o limitante uniforme destas normas é,

$$\|\beta_n\|_1 \leq (h \gamma^m D_0 D_1 \beta + D_0 Q) (1 + h \gamma^m D_0 D_1)^{r-n}, \quad r=n, \dots, N.$$

Isto, junto com (2.17), completam a prova do Teorema 2.2. $\square$

Exemplo 2.1. Aproximação em $S_1^{(-1)}(Z_N)$.

Do espaço $S_1^{(-1)}(Z_N)$ deduzimos que $m=2$, e $0 \leq c_1 < c_2 \leq 1$. A equação de colocação (2.10) é da forma (com $Y_{n,j} := u_n(t_{n,j})$),

$$\begin{cases} Y_{n,1} = g(t_{n,1}) + h \Phi_{n,n}^{(1)}[u_n] + \sum_{i=0}^{n-1} h_1 \Phi_{n,i}^{(1)}[u_i] \\ Y_{n,2} = g(t_{n,2}) + h \Phi_{n,n}^{(2)}[u_n] + \sum_{i=0}^{n-1} h_1 \Phi_{n,i}^{(2)}[u_i] \end{cases} \quad (2.25)$$

Finalmente determinamos,

$$u_n(t_n + v h_n) = \sum_{j=1}^2 Y_{n,j} L_j(v) = \frac{1}{c_2 - c_1} [(c_2 - v) Y_{n,1} + (v - c_1) Y_{n,2}],$$

$$t_n + v h_n \in \sigma_n, \quad n=0, \dots, N-1;$$

onde $Y_{n,j}$ ($j=1,2$) são obtidos resolvendo o sistema de equações (2.25).

Em particular, se $c_2=1$, então $u_n(t_{n+1})=Y_{n,2}$ para $t_{n+1} \in \bar{Z}_N := Z_N \cup \{T\}$. Além disso, para a escolha especial dos parâmetros de colocação, $c_1=0$ e $c_2=1$, geramos uma aproximação linear contínua por pedaços, $u \in S_1^{(0)}(Z_N)$ (ver Teorema 2.1). Neste caso,

$$\Phi_{n,n}^{(1)}[u_n] = 0 \quad \text{e} \quad Y_{n,1} = u_n(t_n) = u_{n-1}(t_n).$$

2.1.3. SUPERCONVERGÊNCIA LOCAL EM $\bar{Z}_N$

Na Seção anterior demonstramos que a aproximação por colocação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ para a solução da equação integral (2.11) possui, sob apropriadas hipóteses de suavidade para g e K , ordem de convergência global $p=m$; esta ordem é a melhor possível. A questão agora é: é também $p=m$ a ordem ótima se consideramos só os valores de u nos pontos da malha $\{t_n\}$? Para ser mais preciso, existe um inteiro $p^* > p=m$ tal que, quando $h \rightarrow 0$ e $Nh \leq \gamma T$,

$$|e(t_n)| \leq Ch^{p^*} \quad \text{para todo } t_n \in \bar{Z}_N,$$

para alguma escolha apropriada dos parâmetros de colocação $\{c_j\}$? Se tal p^* pode ser encontrado, então chamaremos a aproximação u **superconvergente localmente** (sobre $\bar{Z}_N$).

Existem várias formas de obter superconvergência local; por exemplo, colocação nas abcissas de Radau II e de Lobatto. Entretanto, colocação nas abcissas de Gauss-Legendre não fornece superconvergência local em $\bar{Z}_N$. De fato,

Teorema 2.3.

Seja $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ a aproximação por colocação para a solução da equação integral (2.11), e assumamos que $g \in C^{2m-\nu}(I)$, $K \in C^{2m-\nu}(S)$, para algum $\nu \in \{0,1,2\}$ e $m \geq [\nu/2] + 1$.

- (a) Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ são os zeros de $P_{m-1}^{(2s-1)} - P_m^{(2s-1)}$ (isto é, os pontos de Radau II em $(0,1]$), então temos, para $\nu=1$,

$$\max_{t_n \in Z_N} |e(t_n)| = O(N^{-(2m-1)}), \text{ quando } N \rightarrow \infty, Nh \leq \gamma T.$$

- (b) Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ são os zeros de $s(1-s)P_{m-1}'^{(2s-1)}$ (isto é, os pontos de Lobatto em $[0,1]$), então para $\nu=2$,

$$\max_{t_n \in Z_N} |e(t_n)| = O(N^{-(2m-2)}), \text{ quando } N \rightarrow \infty, Nh \leq \gamma T.$$

- (c) Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ são os zeros de $P_m^{(2s-1)}$ (isto é, os pontos de Gauss-Legendre em $(0,1)$), e se $\nu=0$, então

$$\max_{t_n \in Z_N} |e(t_n)| = O(N^{-m}), \text{ quando } N \rightarrow \infty, Nh \leq \gamma T.$$

Prova.

A equação de colocação para $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$, que é válida só no conjunto dos pontos de colocação $X(N)$, pode ser escrita na forma

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds - \delta(t), \quad t \in I \quad (2.26)$$

onde $\delta(t)$ denota uma função apropriada, a qual é nula em $X(N)$. Esta função é suave em cada subintervalo σ_n , com o grau de suavidade dado pelo grau de suavidade de g e K . Além disso, devido a convergência global de u , $\delta(t)$ vai para zero, uniformemente sobre I , quando $h \rightarrow 0$. Subtraindo (2.26) de (2.11) obtemos a equação integral de Volterra de segunda espécie para a função erro $e := y - u$,

$$e(t) = \delta(t) + \int_0^t K(t,s)e(s)ds, \quad t \in I. \quad (2.27)$$

cuja solução é dada por, (ver [BRUNNER-86, Teorema 1.3.1])

$$e(t) = \delta(t) + \int_0^t R(t,s)\delta(s)ds, \quad t \in I.$$

Agora, (2.27) pode ser escrito como,

$$e(t) = \delta(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t,s) \delta(s) ds + \int_{t_n}^t R(t,s) \delta(s) ds, \quad t \in I \quad (2.28)$$

Fazendo $s = t_i + \tau h_i$ e $t = t_n \in \bar{Z}_N$, obtemos

$$e(t_n) = \delta(t_n) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 R(t_n, t_i + \tau h_i) \delta(t_i + \tau h_i) d\tau \quad (2.29)$$

onde t_n é um ponto em $\bar{Z}_N$. Substituindo cada uma das integrais (2.29) pela soma das correspondentes fórmulas de quadratura em m-pontos, baseadas sobre as abscissas $\{t_{i,1}\}$, com seus termos do resto $E_{n,i}$, temos,

$$e(t_n) = \delta(t_n) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \left\{ \sum_{l=1}^m b_l R(t_n, t_{i,1}) \delta(t_{i,1}) + E_{n,i} \right\} \quad (2.30)$$

onde $b_l := \int_0^1 L_l(v) dv$, com L_l denotando o l-ésimo polinômio fundamental

de Lagrange para os parâmetros de colocação $\{c_j\}$. Desde que a função $\delta(t)$ é nula em todos os pontos de colocação (que agora assumem o papel das abscissas de quadratura), a expressão (2.30) se reduz a:

$$e(t_n) = \delta(t_n) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i E_{n,i}, \quad t_n \in \bar{Z}_N.$$

Esta equação, por sua vez, implica

$$|e(t_n)| \leq |\delta(t_n)| + Nh \sup\{|E_{n,i}| : 0 \leq i \leq n-1 \leq N-1\}, \quad t_n \in \bar{Z}_N \quad (2.31)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e $Nh \leq \gamma T$.

Vamos supor primeiramente que $c_m = 1$. Cada $t_n \in \bar{Z}_N$ é então um elemento de $X(N)$, implicando $\delta(t_n) = 0$. Em consequência, a ordem de $e(t_n)$ em (2.31) coincide com a dos termos do resto $E_{n,i}$ associados com os parâmetros de quadratura interpolatória em m pontos usando as abscissas $\{t_i + c_1 h_i\}$. Em [BRUNNER-86] pode ser visto que $E_{n,i} = O(h_i^{2m-\nu})$ para as fórmulas de quadratura de Radau II ($\nu=1$) e para as de Lobatto ($\nu=2$). Os integrandos $R(t, \cdot) \delta(\cdot)$ em (2.29) são $(2m-\nu)$ -vezes continuamente diferenciáveis em cada subintervalo σ_i ($0 \leq i \leq n-1$), desde que $R(t,s)$

herda as propriedades de suavidade do núcleo $K(t,s)$ e desde que a função $\delta(t)$ é definida por (2.26).

Se $c_m < 1$, então, em geral, $\delta(t_n) \neq 0$. Em consequência, para determinar a ordem de $e(t_n)$, necessitamos de informação mais precisa sobre a ordem da função $\delta(t)$ no conjunto $\bar{Z}_N$. Esta informação está dada no seguinte

Lema 2.1.

Sejam g e K em (2.11) pelo menos m -vezes continuamente diferenciáveis sobre seus respectivos domínios, e seja $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ a aproximação por colocação definida por (2.26). Então,

$$\delta(t_n + \tau h_n) = O(h^m), \text{ para todo } t_n + \tau h_n \notin X(N),$$

e esta ordem é a melhor possível.

Prova. Pode ser encontrada em [BRUNNER-86].

Voltando a (2.31), deduzimos que $e(t_n) = O(\delta(t_n)) = O(h^m)$ para todo $t_n \in \bar{Z}_N$, sempre que $c_m < 1$. Isto é verdade, em particular, para os pontos de Gauss-Legendre desde que eles estão no intervalo $(0,1)$ para qualquer valor de m . $\square$

Observação 2.1.

Os argumentos usados para estabelecer os resultados de superconvergência local, mostram que o erro de colocação em cada ponto de $\bar{Z}_N$ é da ordem dada pelos termos do resto associados com a fórmula de quadratura interpolatória, cujas abscissas são baseadas sobre os parâmetros de colocação $\{c_j\}$, com a condição de que o último destes parâmetros seja igual a 1 (isto é, $c_m = 1$).

2.2. RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA PARA A EQUAÇÃO DE COLOCAÇÃO DISCRETIZADA.

Os resultados de convergência estabelecidos na Seção anterior foram derivados sob a suposição de que as integrais (2.9) que aparecem na equação de colocação (2.10) podem ser avaliadas

analiticamente. Desde que isto é raramente possível em aplicações práticas, surge a questão de como aproximar estas integrais. A equação de colocação discretizada (2.10) produzirá então, uma aproximação $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ que em geral é diferente de u .

Fazendo $\hat{e}(t) := y(t) - \hat{u}(t)$, $\varepsilon(t) := u(t) - \hat{u}(t)$, temos

$$|\hat{e}(t)| \leq |y(t) - u(t)| + |u(t) - \hat{u}(t)| = |e(t)| + |\varepsilon(t)|, \quad t \in I \quad (2.32)$$

onde, sob as hipóteses do Teorema 2.2, $|e(t)| \leq Ch^m$ uniformemente em I .

Em consequência, desejamos escolher um processo de quadratura para as integrais (2.9) de tal forma que a perturbação $\varepsilon(t)$ tenha ao menos a ordem do erro de colocação $e(t)$. Sejam μ_0 e μ_1 inteiros positivos dados, e suponha que as integrais (2.9) são aproximadas por fórmulas de quadratura da forma,

$$\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_1] := \begin{cases} \sum_{l=1}^{\mu_1} w_{1,l} k\left[t_{n,j}, t_i + d_{1,l} h_1, u_1(t_i + d_{1,l} h_1)\right], & 0 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{l=1}^{\mu_0} w_{j,l} k\left[t_{n,j}, t_n + d_{j,l} h_n, u_n(t_n + d_{j,l} h_n)\right], & i=n \end{cases} \quad (2.33)$$

onde $j=1, \dots, m$. Estas fórmulas de quadratura são interpolatórias, com parâmetros de quadratura $\{d_1\}$ e $\{d_{j,l}\}$ satisfazendo $0 \leq d_1 < \dots < d_{\mu_1} \leq 1$, e $0 \leq d_{j,1} < \dots < d_{j,\mu_0} \leq c_j$ ($j=1, \dots, m$), respectivamente. Os pesos de quadratura são, então, dados por

$$w_1 = \int_0^1 \frac{\mu_1}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^{\mu_1} (d_1 - d_r)} \frac{(v - d_r)}{(d_1 - d_r)} dv, \quad l=1, \dots, \mu_1$$

e

$$w_{j,l} = \int_0^{c_j} \frac{\mu_0}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^{\mu_0} (d_{j,l} - d_{j,r})} \frac{(v - d_{j,r})}{(d_{j,l} - d_{j,r})} dv, \quad \begin{matrix} l=1, \dots, \mu_0 \\ j=1, \dots, m. \end{matrix}$$

Os correspondentes termos do erro são definidos por,

$$E_{n,i}^{(j)}[u_i] := \Phi_{n,i}^{(j)}[u_i] - \hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[u_i], \quad j=1, \dots, m; \quad i=0, \dots, n \quad (2.34)$$

com $\Phi_{n,i}^{(j)}[u_i]$ e $\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[u_i]$ dados por (2.9) e (2.33) respectivamente.

Agora, usaremos as fórmulas de quadratura (2.33) para obter a **versão discretizada completa** da equação de colocação (2.10). Desde que os termos do erro de quadratura sejam desprezados, geramos uma aproximação $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ que é definida por,

$$\hat{u}_n(t_{n,j}) = g(t_{n,j}) + h_n \hat{\Phi}_{n,n}^{(j)}[\hat{u}_n] + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i], \quad j=1, \dots, m; \quad n=0, \dots, N-1, \quad (2.35)$$

e que, em geral, será diferente da aproximação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ dada pela equação de colocação exata (2.10). Deste modo, sobre o subintervalo σ_n a aproximação $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ é dada por,

$$\hat{u}_n(t_n + v h_n) = \sum_{j=1}^m \hat{Y}_{n,j} L_j(v), \quad t_n + v h_n \in \sigma_n, \quad v \in [0, 1] \quad (2.36)$$

onde $\hat{Y}_{n,j} := \hat{u}_n(t_{n,j})$ e $L_j(v)$ é o j -ésimo polinômio fundamental de Lagrange para os m parâmetros de colocação $\{c_j\}$ dado por (2.8). A equação (2.35) constitui uma sequência de N sistemas de equações algébricas para os vetores $\hat{Y}_n := (\hat{Y}_{n,1}, \dots, \hat{Y}_{n,m})^T \in \mathbb{R}^m$, $n=0, \dots, N-1$. Uma vez que $\hat{Y}_n$ é determinado, (2.36) permitirá a avaliação de $\hat{u}$ em σ_n .

Agora, a ordem da diferença, $\epsilon := u - \hat{u}$, dependerá da escolha das fórmulas de quadratura (2.33), como estabelece o seguinte

Teorema 2.4.

Sejam g e K como em (2.11) sendo ao menos m vezes continuamente diferenciáveis em I e S respectivamente, e seja $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ que denota a aproximação para a solução y definida pela equação de colocação exata (2.10). Assuma que as fórmulas de quadratura (2.33) satisfazem:

$$\int_0^1 \phi(t_1 + \tau h_1) d\tau - \sum_{l=1}^{\mu_1} w_{l,1} \phi(t_1 + d_{l,1} h_1) = O(h_1^{r_1}),$$

e, para $j=1, \dots, m$,

$$\int_0^1 \phi(t_n + \tau h_n) d\tau - \sum_{l=1}^{\mu_0} w_{j,l} \phi(t_n + d_{j,l} h_n) = O(h_n^{r_0}),$$

sempre que o integrando seja uma função suficientemente suave. Se $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ é a aproximação dada pela equação de colocação discretizada (2.35), então existe uma constante finita Q tal que $\varepsilon := u - \hat{u}$ satisfaz,

$$\|\varepsilon\|_{\infty} \leq Q h^r, \quad \text{com } r := \min(r_0 + 1, r_1), \quad (2.37)$$

para toda malha quase-uniforme, com $h > 0$ suficientemente pequeno.

Prova:

Denotemos por $\varepsilon_n(t)$ a restrição de $\varepsilon(t)$ ao subintervalo σ_n . Subtraindo (2.35) de (2.10) e observando (2.34), com $k(t, s, y) = K(t, s)y$, obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(t_{n,j}) &= h_n \sum_{l=1}^{\mu_0} w_{j,l} K_{n,j}(t_n + d_{j,l} h_n) \varepsilon_n(t_n + d_{j,l} h_n) + \\ &+ h_n E_{n,n}^{(j)}[u_n] + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \sum_{l=1}^{\mu_1} w_{l,n} K_{n,j}(t_i + d_{l,n} h_i) \varepsilon_i(t_i + d_{l,n} h_i) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} h_i E_{n,i}^{(j)}[u_i], \quad j=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esta equação pode ser vista como a análoga discreta de (2.18).

Desde que ε_n é por definição um polinômio de grau $m-1$, temos

$$\varepsilon_n(t_n + \tau h_n) = \sum_{l=1}^m \varepsilon_n(t_{n,l}) L_l(\tau), \quad t_n + \tau h_n \in \sigma_n. \quad (2.39)$$

Para fazer uma análise mais clara, escrevemos (2.38) na forma matricial. Sejam $Q_{n,i}$, $0 \leq i \leq n \leq N-1$, matrizes quadradas de ordem m cujos elementos são,

$$q_{j,l}^{(n,i)} := \begin{cases} \mu_1 \\ \sum_{s=1} w_s K_{n,j}(t_1 + d_{s1} h_1) L_1(d_s), & 0 \leq i \leq n-1 \\ \mu_0 \\ \sum_{s=1} w_{j,s} K_{n,j}(t_n + d_{j,s} h_n) L_1(d_{j,s}), & i=n \\ & j, l=1, \dots, m. \end{cases}$$

Além disso, introduzimos os vetores $r_{n,i} := \left[E_{n,i}^{(1)}[u_1], \dots, E_{n,i}^{(m)}[u_1] \right]^T$

e $\eta_1 := \left[\varepsilon_1(t_{1,1}), \dots, \varepsilon_1(t_{1,m}) \right]^T$. Com esta terminologia, (2.38) torna-se,

$$(I - h Q_{n,n}) \eta_n = \sum_{i=0}^{n-1} h Q_{n,i} \eta_i + h r_{n,n} + \sum_{i=0}^{n-1} h r_{n,i}, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (2.40)$$

Agora, da suposição da ordem das fórmulas de quadratura (2.33) e das hipóteses de suavidade do núcleo, segue que, existem constantes Q_0 e Q_1 tais que,

$$\|r_{n,n}\|_1 \leq Q_0 h_n^{r_0}, \quad \|r_{n,i}\|_1 \leq Q_1 h_i^{r_1} \quad (0 \leq i < n \leq N-1).$$

Também, desde que os pesos de quadratura são limitados, e desde que o mesmo é verdade para o núcleo $K(t,s)$ em S , existe uma constante $\hat{D}_0 < \infty$ com $\|(I - h Q_{n,n})^{-1}\|_1 \leq \hat{D}_0$, $n=0, \dots, N-1$, para todo $h_n > 0$ suficientemente pequeno. Analogamente, existe uma constante $\hat{D}_1$ tal que, $\|Q_{n,i}\|_1 \leq \hat{D}_1$, $0 \leq i < n \leq N-1$.

Portanto, (2.40) conduz a:

$$\|\eta_n\|_1 \leq \hat{D}_0 \left[h \hat{D}_1 \sum_{i=0}^{n-1} \|\eta_i\|_1 + h Q_0 h^{r_0} + N h Q_1 h^{r_1} \right], \quad n=0, \dots, N-1,$$

(com $h_n \leq h$, $Nh \leq \gamma T$). Isto representa a desigualdade de Gronwall discreta para $\|\eta_n\|_1$,

$$\|\eta_n\|_1 \leq h \hat{C}_0 \sum_{i=0}^{n-1} \|\eta_i\|_1 + \hat{C}_1 h^{r_1}, \quad n=0, \dots, N-1,$$

onde,

$$\hat{C}_0 := \hat{D}_0 \hat{D}_1, \quad \hat{C}_1 := \hat{D}_0 \left[Q_0 h^{r_0+1} + \gamma T Q_1 h^{r_1} \right],$$

com $r := \min(r_0+1, r_1)$. Consequentemente, pelo Teorema 1.1, segue que:

$$\|\eta_n\|_1 \leq Q_2 h^r, \quad n=0, \dots, N-1, \quad (2.41)$$

com $Nh \leq \gamma T$ e $h > 0$ suficientemente pequeno. Para completar a prova voltamos a (2.39): se para $0 \leq \tau \leq 1$, Λ_m denota a constante de Lebesgue (definição 1.2) associada com os parâmetros de colocação $\{c_j\}$; então temos, por (2.39) e (2.41),

$$|\varepsilon_n(t_n + \tau h_n)| \leq \sum_{l=1}^m |\varepsilon_n(t_{n,l})| |L_l(\tau)| \leq \|\eta_n\|_1 \Lambda_m \leq Q h^r,$$

onde $t_n + \tau h_n \in \sigma$, $n=0, \dots, N-1$, e com $Q := Q_2 \Lambda_m$. Isto é equivalente a (2.37). $\square$

Corolário 2.1.

Sejam as hipóteses do Teorema 2.4 válidas. Se as fórmulas de quadratura (2.33) são de tipo interpolatório, com $\mu_0 = \mu_1 = m$, então a aproximação $\hat{u}_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ definida pela equação de colocação discretizada (2.35) conduz ao erro $\hat{e}(t)$ satisfazendo,

$$\|\hat{e}\|_\infty = O(h^m) \quad (\text{quando } h \rightarrow 0^+, Nh \leq \gamma T), \quad (2.42)$$

para qualquer escolha dos parâmetros de colocação $\{c_j\}$ com $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$.

Prova:

De acordo com o Teorema 1.3 e a relação (1.5), uma fórmula de quadratura interpolatória em m pontos é caracterizada, na terminologia do Teorema 2.4, por $\min(r_0, r_1) \geq m$. Daqui temos $r \geq m$.

Se agora combinamos o resultado do Teorema 2.2 e Teorema 2.4 em (2.32), obtemos

$$|\hat{e}(t)| \leq Ch^m + Qh^r = O(h^m)$$

uniformemente para $t \in I$. $\square$

O resultado de convergência (2.42) é válido em particular para o caso $d_1=c_1$, $d_{j,l}=c_j c_l$ ($l=1,\dots,m$; $j=1,\dots,m$). As aproximações por quadratura na equação de colocação discretizada (2.35) são então dadas por,

$$\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_1] = \begin{cases} \sum_{l=1}^m b_{l,i} k[t_{n,j}, t_{n,i} + c_l h_1, \hat{Y}_{1,l}], & 0 \leq i \leq n-1, \\ \sum_{l=1}^m \bar{a}_{j,l} k[t_{n,j}, t_n + c_j c_l h_n, \sum_{s=1}^m L_s(c_j c_l) \hat{Y}_{n,s}], & i=n \end{cases} \quad (2.43)$$

onde $\bar{a}_{j,l} = c_j b_{l,i}$, com $b_l = \int_0^1 L_l(\tau) d\tau$; e $\hat{u}_n(t_n + \tau h_n) = \sum_{s=1}^m \hat{Y}_{n,s} L_s(\tau)$,

$$\hat{Y}_{n,s} := \hat{u}_n(t_{n,s}).$$

Agora procedemos com a questão da ordem de superconvergência local atingível sobre $\bar{Z}_N$ para a aproximação $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}$ definida pela equação de colocação discretizada completa (2.35).

Teorema 2.5.

Assuma que g e K em (2.11) são de classe $C^{2m-\nu}(I)$ e $C^{2m-\nu}(S)$ respectivamente, com $\nu \in \{0,1,2\}$ e $m \geq [\nu/2] + 1$. Seja $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ definida pela equação de colocação discretizada completa (2.35).

(a) Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ são os zeros de $P_{m-1}(2s-1) - P_m(2s-1)$ (isto é, os pontos de Radau II em $(0,1]$), e se as fórmulas de quadratura empregadas (2.33) são de tipo interpolatório e caracterizadas por $\mu_0 = \mu_1 = m$, $d_1 = c_1$, $d_{j,l} = c_j c_l$ ($j, l = 1, \dots, m$); então, para $\nu=1$

$$\max_{t_n \in \bar{Z}_N} |\hat{e}(t_n)| = O(N^{-(2m-1)}), \text{ quando } N \rightarrow \infty, Nh \leq \gamma T.$$

(b) Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ são os zeros de $s(1-s)P'_{m-1}(2s-1)$ (isto é, os pontos de Lobatto em $[0,1]$), e se as fórmulas de quadratura (2.33) são da forma descrita como em (a); então, para $\nu=2$

$$\max_{t_n \in \bar{Z}_N} |\hat{e}(t_n)| = O(N^{-(2m-2)}), \text{ quando } N \rightarrow \infty, Nh \leq \gamma T.$$

- (c) Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ são os zeros de $P_m(2s-1)$ (isto é, os pontos de Gauss-Legendre em $(0,1)$), e se as fórmulas de quadratura (2.33) são da forma descrita como em (a); então, para $\nu=0$

$$\max_{t_n \in \bar{Z}_N} |\hat{e}(t_n)| = O(N^{-m}), \text{ quando } N \rightarrow \infty, Nh \leq \gamma T;$$

Prova.

A prova das afirmações acima segue de (2.32), usando o Teorema 2.3 e o Teorema 2.4.

2.3. EXEMPLO NUMÉRICO.

Nesta Seção apresentaremos alguns resultados numéricos para a equação:

$$y(t) = 1 + t - \cos(t) - \int_0^t \cos(t-s)y(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (2.44)$$

cujas solução exata é $y(t)=t$. A aproximação será feita em $S_2^{(-1)}(Z_N)$, de onde deduzimos que $m=3$. Consideraremos a discretização baseada na fórmula de quadratura (2.43). A equação integral (2.44) será resolvida usando os seguintes parâmetros de colocação :

(a). Os pontos de Radau II,

$$c_1 = (1 - \frac{1}{5} (1 + 6^{1/2}))/2, \quad c_2 = (1 + \frac{1}{5} (6^{1/2} - 1))/2 \quad \text{e} \quad c_3 = 1.$$

A equação de colocação discretizada resultante é,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n,1} = & g(t_{n,1}) + \frac{h_n}{180} \left\{ (35 - 10(6)^{1/2}) k\left[t_{n,1}, t_n + \frac{11 - 4(6)^{1/2}}{50} h_n, \right. \right. \\ & \left. \frac{12(6)^{1/2} + 117}{100} \hat{Y}_{n,1} - \frac{108(6)^{1/2} + 103}{500} \hat{Y}_{n,2} + \frac{24(6)^{1/2} + 9}{250} \hat{Y}_{n,3} \right\} + \\ & + (29 - 6(6)^{1/2}) k\left[t_{n,1}, t_n + \frac{h_n}{10}, \frac{6(6)^{1/2} + 9}{20} \hat{Y}_{n,1} - \frac{6(6)^{1/2} - 9}{20} \hat{Y}_{n,2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{10} \hat{Y}_{n,3} \right] + (8 - 2(6)^{1/2}) k\left[t_{n,1}, t_n + \frac{4 - (6)^{1/2}}{10} h_n, \hat{Y}_{n,1} \right] \Big\} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(1)}[\hat{u}_i].$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n,2} = & g(t_{n,2}) + \frac{h_n}{180} \left\{ (29+6(6)^{1/2}) k\left(t_{n,2}, t_n + \frac{h_n}{10}, \frac{6(6)^{1/2}+9}{20} \hat{Y}_{n,1} - \right. \right. \\ & - \frac{6(6)^{1/2}-9}{20} \hat{Y}_{n,2} + \frac{1}{10} \hat{Y}_{n,3} \left. \right\} + (35+10(6)^{1/2}) k\left(t_{n,2}, t_n + \right. \\ & + \frac{11+4(6)^{1/2}}{50} h_n, \frac{108(6)^{1/2}-103}{500} \hat{Y}_{n,1} + \frac{117-12(6)^{1/2}}{100} \hat{Y}_{n,2} - \\ & - \frac{24(6)^{1/2}-9}{250} \hat{Y}_{n,3} \left. \right\} + (8+2(6)^{1/2}) k\left(t_{n,2}, t_n + \frac{4+(6)^{1/2}}{10} h_n, \hat{Y}_{n,2} \right) \left. \right\} + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(2)}[\hat{u}_i]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n,3} = & g(t_{n,3}) + \frac{h_n}{36} \left\{ (16-(6)^{1/2}) k\left(t_{n,3}, t_n + \frac{4-(6)^{1/2}}{10} h_n, \hat{Y}_{n,1} \right) + \right. \\ & + (16+(6)^{1/2}) k\left(t_{n,3}, t_n + \frac{4+(6)^{1/2}}{10} h_n, \hat{Y}_{n,2} \right) + 4k\left(t_{n,3}, t_n + h_n, \right. \\ & \left. \hat{Y}_{n,3} \right) \left. \right\} + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(3)}[\hat{u}_i]. \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i] = & \frac{1}{36} \left\{ (16-(6)^{1/2}) k\left(t_{n,j}, t_{i,1}, \hat{Y}_{i,1} \right) + (16+(6)^{1/2}) k\left(t_{n,j}, \right. \right. \\ & \left. \left. t_{i,2}, \hat{Y}_{i,2} \right) + 4k\left(t_{n,j}, t_{i,3}, \hat{Y}_{i,3} \right) \right\}; \quad j=1, 2, 3 \quad (0 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

(b). Os pontos de Lobatto: $c_1=0$, $c_2=1/2$, $c_3=1$. A equação de colocação discretizada para estes parâmetros de colocação é:

$$\hat{Y}_{n,1} = g(t_{n,1}) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(1)}[\hat{u}_i].$$

$$\hat{Y}_{n,2} = g(t_{n,2}) + \frac{h_n}{12} \{k(t_{n,2}, t_n, \hat{Y}_{n,1}) + 4k(t_{n,2}, t_n + \frac{h_n}{4}, \frac{3}{8}\hat{Y}_{n,1} + \frac{3}{4}\hat{Y}_{n,2} - \frac{1}{8}\hat{Y}_{n,3}) + k(t_{n,2}, t_n + \frac{h_n}{2}, \hat{Y}_{n,2})\} + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(2)}[\hat{u}_i].$$

$$\hat{Y}_{n,3} = g(t_{n,3}) + \frac{h_n}{6} \{k(t_{n,3}, t_n, \hat{Y}_{n,1}) + 4k(t_{n,3}, t_n + \frac{h_n}{2}, \hat{Y}_{n,2}) + k(t_{n,3}, t_n + h_n, \hat{Y}_{n,3})\} + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \hat{\Phi}_{n,i}^{(3)}[\hat{u}_i]. \quad (n=0,1,\dots,N-1)$$

Onde (para $j=1,2,3$ e $0 \leq i \leq n-1$),

$$\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i] = \frac{1}{6} \{k(t_{n,j}, t_{i,1}, \hat{Y}_{i,1}) + 4k(t_{n,j}, t_{i,2}, \hat{Y}_{i,2}) + k(t_{n,j}, t_{i,3}, \hat{Y}_{i,3})\}.$$

Os resultados numéricos obtidos são apresentados na seguinte Tabela:

TABELA 2.1

N	Pontos de Radau II	Pontos de Lobatto
5	3.21 E-06	1.15 E-04
10	6.35 E-08	5.62 E-06
20	1.89 E-09	3.29 E-07

A Tabela 2.1 mostra, para cada N, os erros máximos em $\bar{Z}_N$, usando malha quase-uniforme. Observamos que a ordem de convergência da aproximação por colocação é $p^* = 2m-1=5$ (para os pontos de Radau II) e $p^* = 2m-2=4$ (para os pontos de Lobatto), confirmando a veracidade do Teorema 2.5 partes (a) e (b), respectivamente.

Damos a seguir o algoritmo utilizado para resolver a equação (2.44),

Passo 1. Gerar os pontos da malha t_n , $n=0,1,\dots,N-1$.

Passo 2. Para cada $n=0,\dots,N-1$, resolver um sistema de m equações algébricas para $\hat{Y}_{n,j}$ ($n=0,\dots,N-1$; $j=1,\dots,m$), segundo a equação de colocação discretizada completa (2.35). A fórmula de quadratura utilizada é dada por (2.43).

Passo 3. Determinar a aproximação $\hat{u}_n$ em σ_n mediante (2.36).

Passo 4. Calcular o erro da aproximação, isto é,

$$|\hat{e}(t_n)| = |y(t_n) - \hat{u}_n(t_n)|, \quad t_n \in \bar{Z}_N, \quad n=1,\dots,N.$$

Passo 5. Tomar o $\max\{|\hat{e}(t_n)| : t_n \in \bar{Z}_N, \quad n=1,\dots,N\}$.

2.4. CONCLUSÃO.

A aproximação por colocação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ para a solução exata da equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo regular, bem como uma análise de convergência (global e local) foram apresentadas. Se as funções dadas g e K são m -vezes continuamente diferenciáveis sobre seus respectivos domínios, segue que a correspondente solução tem o mesmo grau de suavidade sobre I . Isto por sua vez implica que a aproximação por colocação acima exhibe a ordem (ótima) de convergência global $p=m$. Entretanto, se escolhermos parâmetros de colocação de maneira apropriada, superconvergência local é obtida. Foi feita uma análise de convergência para a versão discretizada completa da equação (2.35), onde as integrais (2.9) foram aproximadas por processos de quadratura apropriados. Finalmente foi apresentado um exemplo numérico para confirmar a correspondente ordem de convergência teórica analisada neste Capítulo.

CAPÍTULO III

MÉTODO DE COLOCAÇÃO USANDO MALHA QUASE-UNIFORME PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE COM NÚCLEO FRACAMENTE SINGULAR

Para motivar o estudo deste Capítulo, iniciamos considerando um exemplo [MILLER -71b].

Seja a equação integral de segunda espécie,

$$y(t) = g(t) - \int_0^t (t-s)^{-1/2} y(s) ds, \quad t \in I := [0, 1].$$

a) Se $g(t) \equiv 1$, então a solução exata é (ver [BAKKE-86]),

$$y(t) = E_{1/2}(-\Gamma(1/2)t^{1/2}),$$

onde $E_{1/2}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)}$ é a função Mittag-Leffler e Γ é a

função gamma (ver [ABRAMOWITZ-70]).

Pode-se verificar que $y'(t) \approx t^{-1/2}$ quando $t \rightarrow 0^+$. Assim temos que $y(t)$ não é suave em $t=0$.

b) Se $g(t) = 1 + 2\sqrt{t}$ (que não é suave em $t=0$), então a solução exata é $y(t) \equiv 1$ (ver BRUNNER-86); isto é, a correspondente solução exata é suave no intervalo $I := [0, 1]$.

Isso mostra que, escolhas aleatórias da função g dão propriedades de suavidade em $t=0$ que são contrárias às que

intuitivamente esperamos.

3.1. SUAVIDADE DAS SOLUÇÕES.

Quando analisamos a convergência de um método numérico para uma equação funcional dada, precisamos de informação a respeito da suavidade da solução exata sobre o domínio em que a equação é resolvida. Isto torna-se mais significativo quando desejamos achar a ordem máxima de convergência de um método. Nesta seção estabelecemos resultados de suavidade para equações integrais de Volterra de segunda espécie cujo núcleo é fracamente singular.

Consideremos a equação:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} K(t,s)y(s)ds, \quad t \in I, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.1)$$

onde, $g(t) = g_1(t) + t^\beta g_2(t)$, $\beta > 0$, $\beta \notin \mathbb{N}$.

Teorema 3.1. [BRUNNER - 82].

Sejam $g_i \in C^m(I)$, $i=1,2$ com $m \geq 1$, e $K \in C^m(S)$. Então a única solução de (3.1) está em $C(I) \cap C^m(0,T]$ e tem a forma

$$y(t) = g_1(t) + t^\beta g_2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Psi_{n,1}(t; \alpha) + t^\beta \Psi_{n,2}(t; \alpha, \beta) \right\} t^{n(1-\alpha)}, \quad (3.2)$$

onde as funções:

$$\Psi_{n,1}(t; \alpha) = \int_0^1 (1-\tau)^{n(1-\alpha)-1} \Phi_n(t, \tau t; \alpha) g_1(\tau t) d\tau,$$

$$\Psi_{n,2}(t; \alpha, \beta) = \int_0^1 (1-\tau)^{n(1-\alpha)-1} \tau^\beta \Phi_n(t, \tau t; \alpha) g_2(\tau t) d\tau,$$

satisfazem $\Psi_{n,i} \in C^m(I)$, $i=1,2$ ($n \geq 1$), e Φ_n é dada recursivamente por

$$\Phi_n(t, s; \alpha) = \int_0^1 \frac{K(t, s+(t-s)u) \Phi_{n-1}(s+(t-s)u, s; \alpha)}{u^{1-(n-1)(1-\alpha)} (1-u)^\alpha} du, \quad n \geq 2,$$

com $\Phi_1(t, s; \alpha) := K(t, s)$.

Prova. Pode ser encontrada em [BRUNNER - 86]. $\square$

Observação 3.1.

Nas equações que surgem em aplicações práticas, o expoente α caracterizando a singularidade fraca do núcleo é usualmente racional; isto é, $\alpha=p/q$, com p e $q \in \mathbb{N}$, tais que p e q sejam primos entre si. Para aplicação posterior, apresentamos uma versão substituta de (3.2), que para α racional, fornece uma estrutura melhor para a solução de (3.1).

Corolário 3.1.

Sejam as hipóteses do Teorema 3.1 verdadeiras, e suponha que $\alpha=p/q$ (reduzida à sua expressão mínima). A solução de (3.1) pode então ser expressa na forma:

$$y(t)=v_0(t)+\sum_{s=1}^{q-1}v_s(t)t^{s(1-\alpha)}+t^\beta[w_0(t)+\sum_{s=1}^{q-1}w_s(t)t^{s(1-\alpha)}],$$

onde as funções v_s e w_s satisfazem $v_s \in C^m(I)$, $w_s \in C^m(I)$, e são definidas por:

$$v_0(t):=g_1(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\Psi_{q1,1}(t;\alpha)t^{l(q-p)},$$

$$v_s(t):=\sum_{l=0}^{\infty}\Psi_{q1+s,1}(t;\alpha)t^{l(q-p)}, \quad s=1,\dots,q-1,$$

$$w_0(t):=g_2(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\Psi_{q1,2}(t;\alpha,\beta)t^{l(q-p)},$$

$$w_s(t):=\sum_{l=0}^{\infty}\Psi_{q1+s,2}(t;\alpha,\beta)t^{l(q-p)}, \quad s=1,\dots,q-1.$$

Se $g_2(t) \equiv 0$ (isto é, se g em (3.1) é suave sobre o intervalo $I: g \in C^m(I)$), então

$$y(t)=v_0(t)+\sum_{s=1}^{q-1}v_s(t)t^{s(1-\alpha)}, \quad (3.3)$$

e se $g_2(t) \not\equiv 0$ e $\beta=1-\alpha$, então

$$y(t)=v_0(t)+t^{q-p}w_{q-1}(t)+\sum_{s=1}^{q-1}[v_s(t)+w_{s-1}(t)]t^{s(1-\alpha)}. \quad (3.4)$$

Prova. Pode ser encontrada em [BRUNNER - 86]. $\square$

3.2. MÉTODO DE COLOCAÇÃO POLINOMIAL SPLINE PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE.

No Capítulo II usamos funções polinomiais splines de $S_{m-1}^{(d)}(Z_N)$, com $d \in \{-1, 0\}$, para aproximar as soluções das equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo limitado. Vimos que a aproximação por colocação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ tem ordem (ótima) de convergência global $p=m$. Agora, se admitirmos núcleos contendo singularidades fracas da forma $(t-s)^{-\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$, e se usarmos sequências de malha quase-uniforme, então a ordem global de convergência da aproximação por colocação cai para $p=1-\alpha$, sem considerar como escolhemos seu grau $m-1$. Isto se deve ao fato de que a suavidade de $g(t)$ e $K(t,s)$ agora fornece uma solução cuja primeira derivada próxima de $t=0$ tem um comportamento da mesma forma que $y'(t) \approx t^{-\alpha}$ ([MILLER-71b]).

Neste Capítulo estudaremos um resultado de convergência global usando o método de colocação para aproximar a solução das equações integrais de segunda espécie com núcleo fracamente singular, considerando malhas quase-uniforme.

3.2.1. MÉTODO DE COLOCAÇÃO POLINOMIAL SPLINE USANDO MALHA QUASE-UNIFORME.

Como na Seção 2.1, o espaço polinomial spline $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ será usado para obter aproximação por colocação para a solução da equação integral:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} k(t,s,y(s)) ds, \quad t \in I := [0, T], \quad (3.5)$$

onde $0 < \alpha < 1$, $g(t)$ e $k(t,s,y)$ são funções suaves.

Para descrever o método de colocação, escrevemos a equação (3.5), para $t \in \sigma_n$, na seguinte forma

$$y(t) = F_n(t) + \int_{t_n}^t (t-s)^{-\alpha} k(t,s,y(s)) ds, \quad (3.6)$$

onde $F_n(t)$ é definido por,

$$F_n(t) := g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-s)^{-\alpha} k(t,s,y(s)) ds, \quad n=0, \dots, N-1.$$

Fazendo $s = t_i + vh_i$, $t = t_{n,j}$ em (3.6) e considerando o conjunto de pontos de colocação $X(N)$ introduzido em (2.4), temos que, a aproximação numérica para a solução exata y de (3.5) é um elemento $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ satisfazendo a equação integral dada sobre $X(N)$; isto é, esta aproximação u é calculada recursivamente de:

$$\begin{aligned} u(t_{n,j}) &= \bar{F}_n(t_{n,j}) + \\ &+ h_n^{1-\alpha} \int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} k\left(t_{n,j}, t_n + vh_n, u(t_n + vh_n)\right) dv, \\ j &= 1, \dots, m; \quad n = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{F}_n(t_{n,j}) &:= g(t_{n,j}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} k\left(t_{n,j}, t_i + vh_i, u_i(t_i + vh_i)\right) dv. \end{aligned}$$

Observação 3.2.

Se g e k são funções contínuas, então uma escolha especial dos parâmetros de colocação, $0 = c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1} < c_m = 1$, fornece uma aproximação u que é contínua em I ; ou seja, $u \in S_{m-1}^{(0)}(Z_N)$. Isto é, análogo ao resultado do Teorema 2.1.

Para a análise seguinte, definimos as integrais:

$$\Phi_{n,i}^{(j)}[u_i; \alpha] := \begin{cases} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} k(t_{n,j}, t_i + vh_i, u_i(t_i + vh_i)) dv & 0 \leq i \leq n-1, \quad j=1, \dots, m \\ \int_0^{c_j} (c_j - v)^{-\alpha} k(t_{n,j}, t_n + vh_n, u_n(t_n + vh_n)) dv & i=n, \quad j=1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.8)$$

Com esta notação a equação de colocação (3.7) tem a forma:

$$u_n(t_{n,j}) = g(t_{n,j}) + h_n^{1-\alpha} \Phi_{n,n}^{(j)}[u_n; \alpha] + \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \Phi_{n,i}^{(j)}[u_i; \alpha], \quad j=1, \dots, m \quad (n=0, \dots, N-1). \quad (3.9)$$

Por conseguinte, sob o subintervalo σ_n a aproximação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ é dada por,

$$u_n(t_n + vh_n) := \sum_{j=1}^m Y_{n,j} L_j(v), \quad t_n + vh_n \in \sigma_n, \quad (3.10)$$

onde L_j denota o j -ésimo polinômio fundamental de Lagrange para os m parâmetros de colocação $\{c_j\}$ dado por (2.8) e $Y_{n,j} := u_n(t_{n,j})$. Então, (3.9) representa uma sequência de N sistemas de equações algébricas em $\mathbb{R}^m$ para as componentes dos vetores $Y_n := (Y_{n,1}, \dots, Y_{n,m})^T$; $n=0, \dots, N-1$. Uma vez calculado Y_n , os valores de u em σ_n podem ser avaliados por meio de (3.10).

Estamos interessados em como aproximar u satisfatoriamente para a solução exata de (3.5). Como foi dito na Seção 3.2, a solução de (3.5) correspondente a suavidade de g e k possuirá derivada não limitada em $t=0$. Em consequência, tudo o que podemos esperar (usando malha uniforme ou quase-uniforme) é, $\|e\|_\infty := \|y - u\|_\infty = O(N^{-(1-\alpha)})$, não interessando a forma como seja escolhido o grau da aproximação. Isto é feito precisamente no Teorema 3.2 que vamos estabelecer, em concordância com as idéias esboçadas no Capítulo II, para a versão linear de (3.5), ou seja, para

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} K(t,s)y(s)ds, \quad t \in I, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.11)$$

Antes de apresentar o Teorema, estabelecemos tres Lemas.

[BRUNNER - 85] que irão nos auxiliar na demonstração da convergência do método descrito acima. Assim

Lema 3.1.

Considere uma sequência de malha quase-uniforme Δ_N para I, e seja $0 < \alpha < 1$. Se $0 \leq i \leq n-1$ ($n \leq N-1$), então:

$$\int_0^1 \left[\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right]^{-\alpha} v^{1-1} dv < \frac{\gamma^\alpha (1+\gamma)^\alpha}{1-\alpha} (n-1)^{-\alpha}, \quad j, l=1, \dots, m$$

para todo $\{c_j\}$ com $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$. Aqui, $\gamma \geq 1$ denota o parâmetro caracterizando estas malhas quase-uniforme (ver 1.7).

Prova.

Para $i=n-1$, temos:

$$\int_0^1 \left[1+c_j \frac{h_n}{h_{n-1}} - v \right]^{-\alpha} v^{1-1} dv \leq \int_0^1 (1-v)^{-\alpha} dv = \frac{1}{1-\alpha} < \frac{\gamma^\alpha (1+\gamma)^\alpha}{1-\alpha}$$

desde que $\gamma \geq 1$.

Suponha, agora, que $i \leq n-2$. Usando $t_{n,j} \geq t_n$, temos:

$$\begin{aligned} I_{n,i}(\alpha) &:= \int_0^1 \left[\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right]^{-\alpha} v^{1-1} dv \leq \int_0^1 \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} - v \right]^{-\alpha} dv \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{1-\alpha} - \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} - 1 \right]^{1-\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{1-\alpha} \left\{ 1 - \left[1 - \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{-1} \right]^{1-\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\left[1 - \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{-1} \right]^{1-\alpha} = 1 - (1-\alpha) \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{-1} \left[1 - \theta_{n,i} \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{-1} \right]^{1-\alpha}$$

com $0 < \theta_{n,i} < 1$; e portanto achamos que,

$$I_{n,i}(\alpha) \leq \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{-\alpha} \left[1 - \theta_{n,i} \left[\frac{t_n - t_i}{h_i} \right]^{-1} \right]^{1-\alpha}. \quad (3.12)$$

Por enquanto, não temos feito uso da suposição de que a sequência de malha $\{\Delta_N\}$ é quase-uniforme. A única condição que

impusemos até agora é que o diâmetro da malha h tende para zero quando N (o número de subintervalos definidos por Δ_N) tende para infinito. Suponha então que a sequência de malha é quase-uniforme, então por (1.7) é verdade que:

$$\frac{t_n - t_i}{h_i} \geq (n-i) \frac{h'}{h} \geq \gamma^{-1}(n-i),$$

onde $h' := h_{\min}$. Além disso, desde que $i \leq n-2$, temos

$$\begin{aligned} 1 - \theta_{n,i} \left(\frac{t_n - t_i}{h_i} \right)^{-1} &= 1 - \theta_{n,i} \left(\frac{h_i + \dots + h_{n-1}}{h_i} \right)^{-1} \geq 1 - \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{h_i} \right)^{-1} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^{-1} \geq 1 - \left(1 + \frac{h'}{h} \right)^{-1} \geq \\ &\geq 1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)^{-1} = \left(1 + \gamma \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Usando estes resultados em (3.12) obtemos, para $0 < \alpha < 1$,

$$I_{n,i}(\alpha) \leq \gamma^\alpha (1+\gamma)^\alpha (n-i)^{-\alpha} < \frac{\gamma^\alpha (1+\gamma)^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha}. \quad \square$$

Lema 3.2.

Sejam as hipóteses do Lema 3.1 verdadeiras. Então

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} v^{1-1} dv \leq \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.13)$$

Prova.

Usando novamente $t_{n,j} \geq t_n$, e desde que $c_j \in [0,1]$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} v^{1-1} dv &\leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_n - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} dv = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \left\{ \left(\frac{t_n - t_i}{h_i} \right)^{1-\alpha} - \left(\frac{t_n - t_{i+1}}{h_i} \right)^{1-\alpha} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ (t_n - t_{i+1})^{1-\alpha} - (t_n - t_{i+2})^{1-\alpha} \right\} \\
&= \frac{t_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \text{pois, } t_n \leq T \text{ para todo } n \leq N. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 3.3.

Considere qualquer sequência de malha quase-uniforme $\{\Delta_N\}$ para o intervalo I , e assuma que $1 \leq k \leq m$. Então para $0 < \alpha < 1$ e $s \geq 1$,

$$h_i^m t_i^{s(1-\alpha)-k} = \begin{cases} O(N^{-m}) & \text{se } s(1-\alpha)-k \geq 0 \\ O(N^{-(1-\alpha)}) & \text{se } s(1-\alpha)-k < 0 \end{cases} \quad (i=1, \dots, N-1)$$

Prova.

Se s e k são tais que $s(1-\alpha)-k \geq 0$, então a correspondente afirmação dada no Lema é trivialmente satisfeita desde que $t_i^{s(1-\alpha)-k} \leq T^{s(1-\alpha)-k}$ e, por (1.8), $h_i \leq \gamma T N^{-1}$ para $1 \leq i \leq N-1$. Sejam agora s e k tais que $s(1-\alpha)-k < 0$ (aqui claramente existem tais valores, por exemplo, $s=k=1$). Desde que a sequência da malha é quase-uniforme, achamos, para $i > 1$,

$$t_i \geq t_1 = h_0 \geq h_{\min} \geq \frac{h}{\gamma} \geq \gamma^{-1} T N^{-1},$$

e daí usando (1.8),

$$\begin{aligned}
h_i^m t_i^{s(1-\alpha)-k} &\leq (\gamma T)^m N^{-m} (\gamma^{-1} T)^{s(1-\alpha)-k} N^{-(s(1-\alpha)-k)} \\
&= (\gamma T)^m (\gamma^{-1} T)^{s(1-\alpha)-k} N^{-(m+s(1-\alpha)-k)} \\
&\leq (\gamma T)^m (\gamma^{-1} T)^{s(1-\alpha)-k} N^{-(1-\alpha)}, \quad 1 \leq i \leq N-1,
\end{aligned}$$

desde que $m+s(1-\alpha)-k \geq s(1-\alpha) \geq 1-\alpha > 0$, para todo k com $1 \leq k \leq m$, $s \geq 1$ e $\alpha \in (0, 1)$. $\square$

Teorema 3.2. [BRUNNER - 85].

Sejam as funções g e K em (3.11) pertencentes a $C^m(I)$ e $C^m(S)$ respectivamente, com $m \geq 1$, e suponha que nenhuma das funções é identicamente nula. Então existe $\bar{h} > 0$ tal que a equação de colocação

(3.9) define, para cada $h \in (0, \bar{h})$, uma única aproximação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$. O erro induzido por esta aproximação satisfaz, para qualquer escolha dos parâmetros de colocação $\{c_j\}$ com $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$, e para toda sequência de malha quase-uniforme,

$$\|e\|_{\infty} = O(N^{-(1-\alpha)}). \quad (3.14)$$

O expoente $1-\alpha$ é o melhor possível, no sentido de que este não pode ser substituído por qualquer número maior que $1-\alpha$.

Prova.

Para facilitar a notação, suponha que α é racional: $\alpha = p/q$, com p e q primos entre si. Então, por (3.3) a solução de (3.11) em σ_n tem a forma:

$$y(t_n + vh_n) = \sum_{s=0}^{q-1} v_s(t_n + vh_n)(t_n + vh_n)^{s(1-\alpha)}, \quad (3.15)$$

onde $v_s \in C^m(I)$ ($s=0, \dots, q-1$). Sobre o intervalo inicial $\sigma_0 = [t_0, t_1]$ (onde $t_0=0$) a solução exata (3.15) não é continuamente diferenciável (a menos que $y(t) \equiv 0$). Este caso foi excluído por hipótese, pois $g(t) \not\equiv 0$ e $K(t,s) \not\equiv 0$. Não obstante, desde que $v_s \in C^m(I)$ podemos fazer o desenvolvimento em série de Taylor para v_s em torno do ponto t_n , obtendo para $n=0$ a seguinte expressão,

$$v_s(t_0 + vh_0) = \sum_{l=1}^m c_{0,l}^{(s)} v^{l-1} + h_0^m R_{0,s}(v), \quad t_0 + vh_0 \in \sigma_0, \quad v \in [0,1] \quad (3.16)$$

com,

$$c_{0,l}^{(s)} := \frac{v_s^{(l-1)}(t_0)}{(l-1)!} h_0^{l-1} \quad e$$

$$R_{0,s}(v) := \frac{v_s^{(m)}(\xi_{0,s})}{m!} v^m \quad (t_0 < \xi_{0,s} < t_0 + vh_0).$$

Substituindo (3.16) em (3.15), e fazendo

$$(t_0 + vh_0)^{s(1-\alpha)} = h_0^{s(1-\alpha)} [1 + (v^{s(1-\alpha)} - 1)],$$

(notar que $t_0=0$), obtemos:

$$y(t_0 + vh_0) = \sum_{l=1}^m c_{0,l} v^{l-1} + h_0^{1-\alpha} C_0(v) + h_0^m R_0(v), \quad v \in [0, 1] \quad (3.17)$$

onde,

$$c_{0,l} := \sum_{s=0}^{q-1} h_0^{s(1-\alpha)} c_{0,l}^{(s)},$$

$$C_0(v) := \sum_{s=1}^{q-1} h_0^{(s-1)(1-\alpha)} (v^{s(1-\alpha)} - 1) \sum_{l=1}^m c_{0,l}^{(s)} v^{l-1} \quad e$$

$$R_0(v) := \sum_{s=0}^{q-1} h_0^{s(1-\alpha)} R_{0,s}(v) v^{s(1-\alpha)}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, se $1 \leq n \leq N-1$, então $t_n > 0$; e desde que a solução exata y de (3.11) é m -vezes continuamente diferenciável para todo $t \in [t_n, T]$, podemos então escrever (desenvolvendo em série de Taylor):

$$y(t_n + vh_n) = \sum_{l=1}^m c_{n,l} v^{l-1} + h_n^m R_n(v), \quad (3.19)$$

onde,

$$c_{n,l} := \frac{y^{(l-1)}(t_n)}{(l-1)!} h_n^{l-1}, \quad e$$

$$R_n(v) := \frac{y^{(m)}(t_n + \theta v h_n)}{m!} v^m, \quad (0 < \theta < 1). \quad (3.20)$$

Suponha agora que a restrição da aproximação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ ao subintervalo σ_n é dada por

$$u_n(t_n + vh_n) = \sum_{l=1}^m \alpha_{n,l} v^{l-1}, \quad t_n + vh_n \in \sigma_n.$$

Deste modo, o erro $e := y - u$ (com $e_n := y - u_n$ denotando o erro de colocação restrito ao subintervalo σ_n) assume a seguinte forma:

$$e_n(t_n + vh_n) = \begin{cases} \sum_{l=1}^m \beta_{0,l} v^{l-1} + h_0^{1-\alpha} C_0(v) + h_0^m R_0(v), & n=0 \\ \sum_{l=1}^m \beta_{n,l} v^{l-1} + h_n^m R_n(v), & 1 \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (3.21)$$

onde $\beta_{n,1} := c_{n,1}^{-\alpha}$ ($1 \leq m$, $0 \leq n \leq N-1$).

Subtraindo a equação de colocação (3.7) (com $k(t,s,y)=K(t,s)y$) da equação integral (3.11) (com $t=t_{n,j}$), obtemos

$$\begin{aligned} e_n(t_{n,j}) = & h_n^{1-\alpha} \int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} K_{n,j}(t_n + v h_n) e_n(t_n + v h_n) dv + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} K_{n,j}(t_i + v h_i) e_i(t_i + v h_i) dv, \\ & 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aqui, $K_{n,j}(s) := K(t_{n,j}, s)$. As expressões para os erros e_i dados em (3.21) podem ser usados em (3.22) para derivar uma relação de recorrência para as componentes dos vetores $\beta_n := (\beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,m})^T \in \mathbb{R}^m$ ($0 \leq n \leq N-1$):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \beta_{n,l} \left\{ c_j^{1-1} - h_n^{1-\alpha} \int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} K_{n,j}(t_n + v h_n) v^{1-1} dv \right\} = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \sum_{l=1}^m \beta_{i,l} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} K_{n,j}(t_i + v h_i) v^{1-1} dv + q_{n,j} \\ 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde os termos residuais $q_{n,j}$ são dados por:

$$\begin{aligned} q_{n,j} := & -h_n^m R_n(c_j) + h_n^{1-\alpha} \int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} K_{n,j}(t_n + v h_n) (h_n^m R_n(v)) dv + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} K_{n,j}(t_i + v h_i) (h_i^m R_i(v)) dv + \\ & + h_0^{1-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_0}{h_0} - v \right)^{-\alpha} K_{n,j}(t_0 + v h_0) \left[h_0^{1-\alpha} C_0(v) + \right. \\ & \left. + h_0^m R_0(v) \right] dv. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para o intervalo inicial σ_0 obtemos,

$$\sum_{l=1}^m \beta_{0,l} \left\{ c_j^{1-1} - h_0^{1-\alpha} \int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} K_{0,j}(t_0 + v h_0) v^{1-1} dv \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= h_0^{1-\alpha} \left\{ -C_0(c_j) - h_0^{m-1+\alpha} R_0(c_j) + \right. \\
&\quad \left. + h_0^{1-\alpha} \int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} K_{0,j}(t_0 + v h_0) \left[C_0(v) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + h_0^{m-1+\alpha} R_0(v) \right] dv \right\} =: q_{0,j}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Agora devemos demonstrar que as normas $\|\beta_n\|_1 := \sum_{l=1}^m |\beta_{n,l}|$

satisfazem a desigualdade de Gronwall discreta generalizada da forma (1.2):

$$\|\beta_n\|_1 \leq C_0 h^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^{-\alpha} \|\beta_i\|_1 + C_1 \|q_n\|_1, \quad n=0, \dots, N-1, \quad (3.26)$$

onde $q_n := (q_{n,1}, \dots, q_{n,m})^T$ é o vetor cujas componentes são definidas por (3.24) e (3.25). De acordo com o Teorema 1.2, esta desigualdade implicará que,

$$\|\beta_n\|_1 = O(\|q_n\|_1), \quad n=0, \dots, N-1, \quad (3.27)$$

desde que as constantes C_0 e C_1 são finitas, quando $h \rightarrow 0^+$, com Nh limitado.

Para demonstrar (3.26), escrevemos (3.23) em uma forma mais compacta usando notação matricial (ver a análise feita de (2.21) em diante). Para $0 \leq i \leq n-1$, definimos matrizes $D_{n,i}(\alpha)$, de ordem $m \times p$, por

$$D_{n,i}(\alpha) := \left[\int_0^1 \left[\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right]^{-\alpha} K_{n,j}(t_i + v h_i) v^{l-1} dv \right], \quad (3.28)$$

onde $1 \leq j, l \leq m$. Além disso, sejam

$$D_{n,n}(\alpha) := \left[\int_0^j (c_j - v)^{-\alpha} K_{n,j}(t_n + v h_n) v^{l-1} dv \right], \quad 1 \leq j, l \leq m$$

e,

$V := (c_j^{l-1})$ que denota a matriz de Vandermonde de ordem m associada com os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ satisfazendo $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$. A relação de recorrência (3.23) pode então ser escrita como :

$$\left[V h_n^{1-\alpha} D_{n,n}(\alpha) \right] \beta_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} D_{n,i}(\alpha) \beta_i + q_n, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (3.29)$$

Aqui observamos que, desde que o núcleo $K(t,s)$ é contínuo segue que é limitado em S ; a matriz $V-h_n^{1-\alpha} D_{n,n}(\alpha)$ possui uma inversa uniformemente limitada para todo N suficientemente grande com diâmetro h suficientemente pequeno para algum $\bar{h}$ positivo. Consequentemente, existe uma constante finita C_1 , independente de h e N , tal que

$$\|(V-h_n^{1-\alpha} D_{n,n}(\alpha))^{-1}\|_1 \leq C_1, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (3.30)$$

Para estes valores de h , (3.29) define uma única sequência de vetores $\{\beta_n\}$ que são dados por,

$$\beta_n = \left[V-h_n^{1-\alpha} D_{n,n}(\alpha) \right]^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} D_{n,i}(\alpha) \beta_i + q_n \right\}. \quad (3.31)$$

O Lema 3.1 nos permitirá derivar limitantes superiores para as matrizes $D_{n,i}(\alpha)$ introduzidas em (3.28). Se K_0 é tal que $|K(t,s)| \leq K_0$ para todo $(t,s) \in S$, então (pelo Lema 3.1) achamos que,

$$\|D_{n,i}(\alpha)\|_1 \leq C(\alpha) (n-i)^{-\alpha}, \quad i=0, \dots, n-1, \quad (3.32)$$

com $C(\alpha) := mK_0 \gamma^\alpha \frac{(1+\gamma)^\alpha}{1-\alpha}$.

Portanto, usando as estimativas (3.30) e (3.32) em (3.31), obtemos

$$\|\beta_n\|_1 \leq C_0 h^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^{-\alpha} \|\beta_i\|_1 + C_1 \|q_n\|_1, \quad n=0, \dots, N-1, \quad (3.33)$$

com $C_0 := C_1 C(\alpha)$. Esta expressão representa a desigualdade generalizada discreta de Gronwall da forma (1.2); e como foi dito anteriormente, esta desigualdade implica (3.27); isto é,

$$\|\beta_n\|_1 = O(\|q_n\|_1), \quad n=0, \dots, N-1.$$

Finalmente, determinaremos limitantes superiores para as normas $\|q_n\|_1$. Consideremos primeiro (3.25): desde que as funções v_s em (3.15) estão todas em $C^m(I)$, as equações (3.16) e (3.17) dão $\|q_0\|_1 = O(h_0^{1-\alpha}) = O(N^{-(1-\alpha)})$, desde que $h_0 \leq h \leq \gamma TN^{-1}$. Agora obteremos uma estimativa similar para $\|q_n\|_1$, $n > 0$. É claro de (3.24) que a ordem de $\|q_n\|_1$ será determinada essencialmente pelas ordens dos termos residuais $h_i^m R_i(v)$, com $R_i(v)$ definido por (3.18) e (3.20). Para $i \geq 1$ estes termos envolvem a m -ésima derivada da solução y . Segue então de

(3.19), (3.15) e usando a regra do produto de Leibniz (Teorema 1.4) que estas derivadas tem a forma:

$$y^{(m)}(t) = v_0^{(m)}(t) + \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left[\begin{matrix} s(1-\alpha) \\ k \end{matrix} \right] k! v_s^{(m-k)}(t) t^{s(1-\alpha)-k}$$

Em consequência, fazendo

$$\gamma_{m,k}^{(s)} := \binom{m}{k} \left[\begin{matrix} s(1-\alpha) \\ k \end{matrix} \right] k!, \quad M_{s,\mu} := \max\{|v_s^{(\mu)}(t)| : t \in I\},$$

temos que,

$$h_i^m |R_i(v)| \leq h_i^m \left\{ M_{0,m} + \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{k=0}^m |\gamma_{m,k}^{(s)}| M_{s,m-k} (t_i + \theta_i v h_i)^{s(1-\alpha)-k} \right\}$$

$$i \geq 1, \quad v \in [0,1], \quad \text{e } \theta_i \in (0,1). \quad (3.34)$$

Desde que (aplicando o Teorema 1.5)

$$(t_i + \theta_i v h_i)^{s(1-\alpha)-k} = t_i^{s(1-\alpha)-k} + O(h_i), \quad i \geq 1,$$

vemos que a ordem de $h_i^m R_i(v)$ dependerá das ordens de $h_i^m t_i^{s(1-\alpha)-k}$, ($k=0, \dots, m$), conforme foi mostrado no Lema 3.3.

Portanto, em (3.34) para $\alpha \in (0,1)$ existe pelo menos um par (s,k) , com $1 \leq k \leq m$, $s \geq 1$, tal que $s(1-\alpha)-k < 0$. Consequentemente, (3.34) fornece (usando o Lema 3.3):

$$h_i^m |R_i(v)| = O\left[N^{-(1-\alpha)}\right], \quad v \in [0,1] \quad (1 \leq i \leq N-1).$$

Se agora usarmos os resultados (3.34), Lema 3.3 e Lema 3.2 em (3.24) verificamos que,

$$|q_{n,j}| = O\left[N^{-(1-\alpha)}\right], \quad 1 \leq j \leq m \quad (1 \leq n \leq N-1),$$

e assim,

$$\|q_n\|_1 = O\left[N^{-(1-\alpha)}\right], \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (\text{quando } h \rightarrow 0^+, Nh \leq \gamma T). \quad (3.35)$$

Para levar a prova do Teorema 3.2 a sua conclusão, retornamos

a (3.21). De (3.27) e (3.35) temos que $\|\beta_n\|_1 = O(N^{-(1-\alpha)})$ para todo n . Assim,

$$|e_n(t_n + v h_n)| \leq \|\beta_n\|_1 + O\left(N^{-(1-\alpha)}\right) = O\left(N^{-(1-\alpha)}\right),$$

$t_n + v h_n \in \sigma_n$, $0 \leq n \leq N-1$ (quando $N \rightarrow \infty$, $Nh \leq \gamma T$). Isto é equivalente a (3.14). $\square$

Observação 3.3.

Para referência posterior, nós observamos que no início da prova do Teorema 3.2 até (3.31) não fizemos uso da hipótese de que a sequência de malha $\{\Delta_N\}$ é quase-uniforme: a única condição que impusemos é que o diâmetro da malha h vá para zero quando N (o número de subintervalos definido por Δ_N) vai para infinito. Portanto, os argumentos usados na prova deste Teorema até (3.31) serão válidos para o caso da malha graduada (Teorema 4.1 do Cap. IV).

3.3. CONCLUSÃO.

A aproximação por colocação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ para a solução exata da equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular, bem como uma análise de convergência foram apresentadas. Se $g \in C^m(I)$ e $K \in C^m(S)$, a solução exata y da equação integral (3.11) é m -vezes continuamente diferenciável em $(0, T]$. Em $t=0$ suas derivadas são, em geral, não limitadas. Como consequência disto, obtivemos que a aproximação por colocação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ tem ordem de convergência $\|y - u\|_\infty = O(N^{-(1-\alpha)})$.

CAPÍTULO IV

MÉTODO DE COLOCAÇÃO USANDO MALHA GRADUADA PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE COM NÚCLEO FRACAMENTE SINGULAR

Vimos no Capítulo III, que se considerarmos equações de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular da forma $(t-s)^{-\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$, e se empregarmos sequências de malha quase-uniforme, então a ordem de convergência da aproximação por colocação é $O\left(N^{-(1-\alpha)}\right)$. A questão agora é como obter ordem ótima de convergência ?

Uma maneira de construir aproximação por colocação de ordem elevada usando malha uniforme ou quase-uniforme é obtido mudando o espaço dos polinômios splines para o **espaço não polinomial spline**. Os elementos deste novo espaço refletem o comportamento da solução exata da equação (3.5) perto de $t=0$ (ver por exemplo [TE RIELE-82] e [BRUNNER-83]).

Uma outra alternativa pode ser considerada: colocação no espaço polinomial spline $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ usando **malha graduada**. A motivação para o uso de malha graduada na aproximação de funções não suaves da forma $f(t)=t^\beta$ ($\beta > 0$) em $[0,1]$ por funções polinomiais splines foi dada por [RICE-69]. Esta idéia foi subsequentemente adaptada para gerar aproximações de ordem elevada para métodos de Galerkin, integração produto e colocação por splines para a solução de equações integrais de Fredholm de segunda espécie com núcleo fracamente singular, ver por exemplo [SCHNEIDER-81], [VAINIKKO-81], e [GRAHAM-82]. Métodos de colocação para equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular usando malha graduada foram analisadas por [BRUNNER-85].

Antes de apresentar o Teorema de convergência ótima, estabelecemos para malha graduada, o análogo do Lema 3.1. Assim,

Lema 4.1.

Considere uma sequência de malha graduada $\Delta_N^{(r)}$ dada por (1.9). Se os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ satisfazem $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$; então para $0 < \alpha < 1$ e $i=0, \dots, n-1$ ($n \leq N-1$), tem-se

$$\int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} v^{1-1} dv < \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha}, \quad j, l=1, \dots, m \quad (4.1)$$

Prova:

Pode-se ver que a desigualdade (3.12) na prova do Lema 3.1 é verdadeira para malha graduada. Portanto, a primeira parte da prova do Lema 3.1 é feita aqui sem nenhuma mudança.

Agora, para a malha graduada (1.9) com $r \geq 1$, temos

$$\frac{t_n - t_i}{h_i} = \frac{h_{n-1} + \dots + h_i}{h_i} \geq \frac{(n-i)h_i}{h_i} = n-i,$$

desde que $0 < h_0 < \dots < h_{N-1}$ ($=h$). Além disso, para $i \leq n-2$, temos

$$\begin{aligned} 1 - \theta_{n,i} \left(\frac{t_n - t_i}{h_i} \right)^{-1} &\geq 1 - \left(\frac{t_n - t_i}{h_i} \right)^{-1} \geq 1 - \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{h_i} \right)^{-1} = \\ &= 1 - \left(1 + \frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^{-1} \geq 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e isto conduz a,

$$\left[1 - \theta_{n,i} \left(\frac{t_n - t_i}{h_i} \right)^{-1} \right]^{-\alpha} \leq 2^\alpha < \frac{2^\alpha}{1-\alpha}. \quad \text{Substituindo em (3.12)}$$

obtemos,

$$I_{n,i}(\alpha) < \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha}, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad \square$$

Lema 4.2.

Seja $\Delta_N^{(r)}$ uma malha graduada da forma (1.9). Então, para todos os inteiros k, v e s satisfazendo $1 \leq k \leq v \leq m$, e $s \geq 1$, temos

$$h_i^v t_i^{s(1-\alpha)-k} \leq CN^{-v} = O(N^{-v}), \quad 1 \leq i \leq N-1;$$

onde $C := r^v 2^{v(r-1)} T^{v-k+s(1-\alpha)}$.

Prova:

Usando (1.10), e o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned} h_i &= t_{i+1} - t_i = ((i+1)^r - i^r) t_i = i^r ((1+i^{-1})^r - 1) T N^{-r} = \\ &= r i^{r-1} (1+\theta_i i^{-1})^{r-1} T N^{-r}, \quad 0 < \theta_i < 1. \end{aligned}$$

Isto implica que,

$$h_i \leq r 2^{r-1} T i^{r-1} N^{-r}, \quad i=1, \dots, N-1.$$

Usando novamente (1.10), este último resultado conduz a

$$\begin{aligned} h_i^v t_i^{s(1-\alpha)-k} &\leq (r 2^{r-1} T)^v i^{v(r-1)} N^{-vr} (i^r T N^{-r})^{s(1-\alpha)-k} \\ &= C i^{v(r-1)+rs(1-\alpha)-rk} N^{-vr-rs(1-\alpha)+rk} \\ &= C i^{r(v-k)+rs(1-\alpha)-v} N^{-r(v-k)-rs(1-\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde a constante C é definida como no enunciado deste Lema. De (4.2), com $r=m/1-\alpha$, obtemos

$$h_i^v t_i^{s(1-\alpha)-k} \leq C \left(\frac{i}{N} \right)^{r(v-k)} i^{ms-v} N^{-ms},$$

onde o expoente de i satisfaz $ms-v \geq ms-m = m(s-1) \geq 0$, desde que $s \geq 1$. Segue que, para todo $i \leq N$ e $1 \leq k \leq v \leq m$,

$$h_i^v t_i^{s(1-\alpha)-k} \leq C N^{ms-v} N^{-ms} = C N^{-v} \quad \square$$

Agora apresentamos o Teorema de convergência ótima considerando a equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular,

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} K(t,s) y(s) ds, \quad t \in I, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.3)$$

Teorema 4.1.

Sejam as funções g e K em (4.3) de classe $C^m(I)$ e $C^m(S)$ respectivamente ($m \geq 1$), e assumamos que nenhuma das funções é identicamente nula. Se $\Delta_N^{(r)}$ é a malha graduada definida por (1.9), então a correspondente equação de colocação (3.9) define para todo N suficientemente grande, uma única aproximação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$. O erro induzido por esta aproximação satisfaz,

$$\|e\|_{\infty} = O(N^{-m}), \quad (4.4)$$

e, isto é verdade para todos os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ satisfazendo $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$.

Prova:

De acordo com a observação 3.3 feita no Capítulo III, a primeira parte da prova do Teorema 3.2, até inclusive (3.31), é também válida para malha graduada, desde que, como temos notado $h \rightarrow 0^+$ quando $N \rightarrow \infty$.

Agora, a mudança na prova deste Teorema está na estimativa para as normas $\|q_n\|_1$ em (3.33). Vamos demonstrar (usando o Lema 4.2) que escolhendo $r = m/1 - \alpha$, conseguimos $\|q_n\|_1 = O(N^{-m})$. Com efeito, consideremos o limitante para os termos $h_i^m |R_i(v)|$ obtido em (3.34): pelo Lema 4.2 com $v=m$, deduzimos que existe uma constante Q_m (dependendo de α) tal que,

$$h_i^m |R_i(v)| \leq Q_m N^{-m} = O(N^{-m}), \quad v \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Usando este último resultado em (3.24) encontramos a seguinte estimativa,

$$\|q_n\|_1 = O(N^{-m}), \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (\text{quando } N \rightarrow \infty),$$

Além disso, de (3.25) temos,

$$\|q_0\|_1 = O(h_0^{1-\alpha}) \quad (4.5)$$

Por outro lado, de (1.10) temos que $h_0 = TN^{-r}$ com $r = m/1 - \alpha$. Assim,

$$h_0^{1-\alpha} = T^{1-\alpha} N^{-r(1-\alpha)} = T^{1-\alpha} N^{-m};$$

e portanto, por (4.5) obtemos $\|q_0\|_1 = O(N^{-m})$.

Finalmente, usando (3.27) e argumentos análogos aos da prova do Teorema 3.2, temos

$$\|\beta_{n,1}\| = O(N^{-m}), \quad n=0, \dots, N-1 \quad (\text{quando } N \rightarrow \infty).$$

Assim, por (3.21), obtemos

$$|e_{n,n}(t_n + v h_n)| = O(N^{-m}),$$

uniformemente para $v \in [0,1]$ e $n=0, \dots, N-1$. Isto, é equivalente a afirmação (4.4) dada no Teorema 4.1. $\square$

4.1. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE COLOCAÇÃO.

Temos assumido que as integrais em (3.8) podem ser resolvidas exatamente. Nas aplicações práticas, muitas vezes não é possível resolver estas integrais analiticamente. Em consequência, temos que aproxima-las por processos de quadratura apropriados. Suponhamos então que as integrais em (3.8) são aproximadas por fórmulas de quadratura da seguinte forma,

$$\hat{\Phi}_{n,1}^{(j)}[\hat{u}_1; \alpha] := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\mu_1} W_{j,1}^{(n,i)}(\alpha) k(t_{n,j}, t_i + d_{1,i} h_1, u_1(t_i + d_{1,i} h_1)), & 0 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{i=1}^{\mu_0} W_{j,1}(\alpha) k(t_{n,j}, t_n + d_{j,1} h_n, u_n(t_n + d_{j,1} h_n)), & i=n \end{cases} \quad (4.6)$$

Os parâmetros caracterizando as abscissas de quadratura em (4.6) são da forma

$$0 \leq d_1 < \dots < d_{\mu_1} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq d_{j,1} < \dots < d_{j,\mu_0} \leq c_j \quad (j=1, \dots, m)$$

onde μ_0 e μ_1 são inteiros (dados) maiores ou iguais a 1 (usualmente, $\mu_0 \leq m$, $\mu_1 \leq m$). Além disso, os pesos de quadratura em (4.6) são dados por,

$$W_{j,1}^{(n,1)}(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_1}{h_1} - v \right)^{-\alpha} \lambda_1(v) dv, \quad i=0, \dots, n-1$$

$$j=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, \mu_1 \quad (4.7)$$

$$W_{j,1}(\alpha) = \int_0^c (c_j - v)^{-\alpha} \lambda_{j,1}(v) dv, \quad j=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, \mu_0$$

$$(4.8)$$

onde $\lambda_1(v)$ e $\lambda_{j,1}(v)$ são, respectivamente, os polinômios fundamentais de Lagrange associados com os parâmetros de quadratura; isto é,

$$\lambda_1(v) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{\mu_1} \frac{v - d_k}{d_1 - d_k}, \quad (4.9)$$

$$\lambda_{j,1}(v) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{\mu_0} \frac{v - d_{j,k}}{d_{j,1} - d_{j,k}}, \quad (4.10)$$

Em outras palavras, temos considerado a discretização da equação de colocação exata (3.9) por fórmulas de quadratura baseadas em **integração produto**.

Em consequência, usando as aproximações (4.6) na equação de colocação (3.9) obtemos a **equação de colocação discretizada completa**,

$$\hat{u}_n(t_{n,j}) = g(t_{n,j}) + h_n^{1-\alpha} \hat{\Phi}_{n,n}^{(j)}[\hat{u}_n; \alpha] + \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i; \alpha],$$

$$j=1, \dots, m \quad (n=0, \dots, N-1). \quad (4.11)$$

A equação (4.11) determina, para toda malha com diâmetro de malha suficientemente pequeno, uma única aproximação $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$.

Devido aos erros introduzidos na aproximação das integrais (3.8) por (4.6), $\hat{u}$ será distinta da solução u de (3.9). Desde que, sobre o subintervalo σ_n a aproximação $\hat{u}$ é dada por

$$\hat{u}_n(t_n + v h_n) = \sum_{j=1}^m \hat{Y}_{n,j} L_j(v), \quad t_n + v h_n \in \sigma_n, \quad (4.12)$$

onde $\hat{Y}_{n,j} := \hat{u}_n(t_{n,j})$, (4.11) constitui uma sequência de N sistemas de

equações algébricas para os vetores $\hat{Y}_n := (\hat{Y}_{n,1}, \dots, \hat{Y}_{n,m})^T \in \mathbb{R}^m$, $n=0, \dots, N-1$. Uma vez que $\hat{Y}_n$ é determinado, (4.12) permitirá a avaliação de $\hat{u}$ em σ_n .

Agora, desejamos procurar a ordem de convergência da aproximação $\hat{u}$ por colocação. Sejam então $\hat{e} := y - \hat{u}$ e $\varepsilon := u - \hat{u}$, onde u e $\hat{u}$ denotam, respectivamente, as soluções de (3.9) e (4.11). Desde que $\hat{e} = (y - u) + (u - \hat{u})$, temos que

$$\|\hat{e}\|_\infty \leq \|e\|_\infty + \|\varepsilon\|_\infty \quad (4.13)$$

A ordem de $\|e\|_\infty$ em (4.13) é dado pelo Teorema 4.1 e a ordem da perturbação ε (devido a discretização completa de (3.9) por integração numérica) dependerá essencialmente da escolha de μ_0 e μ_1 em (4.6), conforme será mostrado no Teorema 4.2.

Antes vamos apresentar dois Lemas que serão úteis na prova do Teorema 4.2.

Lema 4.3.

Os pesos de quadratura $\{W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha)\}$ definidos por (4.7) satisfazem

$$|W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha)| \leq W(\alpha) (n-i)^{-\alpha}, \quad j=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, \mu_1 \quad (4.14)$$

($i < n$)

onde a constante $W(\alpha)$ é dada por,

$$W(\alpha) := \frac{2^\alpha}{1-\alpha} \Lambda_1, \text{ para sequências de malha graduada.}$$

Aqui, Λ_1 denota a constante de Lebesgue (definição 1.2) associada aos parâmetros de quadratura $\{d_1, \dots, d_{\mu_1}\}$.

Prova:

De (4.7) temos,

$$W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right)^{-\alpha} \lambda_l(v) dv, \quad i=0, \dots, n-1$$

$j=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, \mu_1$

onde $\lambda_l(v)$ são os polinômios fundamentais de Lagrange dados em (4.9). Como $\lambda_l(v)$ são polinômios de grau menor o igual a $\mu_1 - 1$, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
W_{j,1}^{(n,1)}(\alpha) &= \int_0^1 \left[\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right]^{-\alpha} \left[\sum_{p=0}^{\mu_1-1} a_p v^p \right] dv \\
&= \sum_{p=0}^{\mu_1-1} a_p \int_0^1 \left[\frac{t_{n,j} - t_i}{h_i} - v \right]^{-\alpha} v^p dv.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.1 nesta última integral, temos

$$\begin{aligned}
W_{j,1}^{(n,1)}(\alpha) &\leq \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\mu_1-1} a_p \\
&= \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\mu_1-1} a_p 1^p = \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \lambda_1(1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|W_{j,1}^{(n,1)}(\alpha)| &\leq \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} |\lambda_1(1)| \leq \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \sum_{l=1}^{\mu_1} |\lambda_l(1)| \\
&\leq \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \max \left\{ \sum_{l=1}^{\mu_1} |\lambda_l(v)| : v \in [0,1] \right\} \\
&= \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \Lambda_1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|W_{j,1}^{(n,1)}(\alpha)| \leq \frac{2^\alpha}{1-\alpha} (n-i)^{-\alpha} \Lambda_1. \quad \square$$

Lema 4.4.

Com as hipóteses do Teorema 4.1, temos

$$\sum_{i=0}^n h_i^{1-\alpha} \|r_{n,i}\|_1 = \mathcal{O}(N^{-\mu}), \quad n=0, \dots, N-1 \quad (4.15)$$

onde $\mu := \min(\mu_0 + 1 - \alpha, \mu_1)$.

Prova:

Sejam

$$E_{n,i}^{(j)}[u_i; \alpha] := \phi_{n,i}^{(j)}[u_i; \alpha] - \hat{\phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i; \alpha], \quad n=0, \dots, N-1 \quad (4.16)$$

os erros de quadratura. De acordo com as hipóteses impostas sobre as

fórmulas de quadratura (4.7) , (4.8) e sobre o núcleo $K(t,s)$, estes erros de quadratura são limitados. Mais precisamente, temos

$$|E_{n,i}^{(j)}[u_1; \alpha]| \leq \begin{cases} C_1 h_1^{\mu_1} \int_0^1 \left(\frac{t_{n,j} - t_1}{h_1} - v \right)^{-\alpha} dv, & 0 \leq i \leq n-1 \\ C_0 h_1^{\mu_0} \int_0^{c_j} (c_j - v)^{-\alpha} dv, & i=n \quad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \quad (4.17)$$

onde C_0 e C_1 são constantes finitas apropriadas. Para ver isto, lembramos que as fórmulas de quadratura (4.6), (4.7) e (4.8) foram obtidas substituindo a parte suave do integrando em (3.8) por um polinômio interpolador de grau $\mu_1 - 1$ (se $i \leq n-1$), ou de grau $\mu_0 - 1$ (se $i=n$). Assim, para $i \leq n-1$, seja

$$\varphi_{n,j}(t_1 + v h_1) := K_{n,j}(t_1 + v h_1) u_1(t_1 + v h_1),$$

e denotemos por $\psi_{n,j}(t_1 + v h_1)$ o polinômio de aproximação (de grau μ_1) para $\varphi_{n,j}$ com respeito aos pontos $\{t_1 + d_s h_1 : 1 \leq s \leq \mu_1\}$. Desde que $\varphi_{n,j}$ tem derivadas contínuas de ordem m sobre σ_1 , o erro de interpolação tem a seguinte forma,

$$\varphi_{n,j}(t_1 + v h_1) - \psi_{n,j}(t_1 + v h_1) = \varphi_{n,j}^{(\mu_1)}(\xi_1) h_1^{\mu_1} \prod_{s=1}^{\mu_1} \frac{v - d_s}{\mu_1!}, \quad \xi_1 \in \sigma_1$$

para todo $\mu_1 \leq m$, (uma expressão análoga é válida para $i=n$, com μ_1 substituído por μ_0). De acordo com (4.7) e (4.8), $E_{n,i}^{(j)}[u_1; \alpha]$ é igual ao produto da integral pelos erros de interpolação acima, onde as funções pesos são como em (4.7) e (4.8); e assim, (4.17) segue imediatamente. Consequentemente obtemos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n h_i^{1-\alpha} \|r_{n,i}\|_1 &= h_n^{1-\alpha} \|r_{n,n}\|_1 + \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \|r_{n,i}\|_1 \leq \\ &\leq C(\alpha) \left\{ h^{\mu_0+1-\alpha} + h^{\mu_1} \sum_{i=0}^{n-1} \left[(t_n - t_i)^{1-\alpha} - (t_n - t_{i+1})^{1-\alpha} \right] \right\} = \\ &= C(\alpha) \left\{ h^{\mu_0+1-\alpha} + h^{\mu_1} t_n^{1-\alpha} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq C(\alpha)h^\mu \left\{ h^{\mu_0+1-\alpha-\mu} + T^{1-\alpha} h^{\mu_1-\mu} \right\},$$

onde $C(\alpha) := \max \left\{ \frac{mc_0}{1-\alpha}, \frac{mc_1}{1-\alpha} \right\}$, e $\mu := \min(\mu_0+1-\alpha, \mu_1)$. Finalmente, desde que o coeficiente de h^μ é uniformemente limitado, temos estabelecido (4.15). $\square$

Teorema 4.2.

Sejam g e K em (4.3) m -vezes continuamente diferenciáveis em seus respectivos domínios. Assuma que u e $\hat{u}$ (elementos de $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$) denotam as soluções de (3.9) e (4.11) respectivamente, onde as fórmulas de quadratura (4.6) foram usadas. Então, para seqüências de malha graduada, $\epsilon := u - \hat{u}$ satisfaz,

$$\|\epsilon\|_\infty = O(N^{-\mu}), \quad (4.18)$$

onde $\mu := \min(\mu_0+1-\alpha, \mu_1)$.

Prova:

Subtraindo (4.11) de (3.9), e tendo em vista que $k(t,s,y) = K(t,s)y$, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon_n(t_{n,j}) &= h_n^{1-\alpha} \hat{\Phi}_{n,n}^{(j)}[\epsilon_n; \alpha] + \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\epsilon_i; \alpha] + \\ &+ \sum_{i=0}^n h_i^{1-\alpha} E_{n,i}^{(j)}[u_i; \alpha], \quad (1 \leq j \leq m; 0 \leq n \leq N-1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde ϵ_n é a restrição de ϵ ao subintervalo σ_n , e $E_{n,i}^{(j)}[u_i; \alpha]$ são os erros de quadratura definido em (4.16). Desde que $\epsilon_n \in P_{m-1}$, podemos escrever,

$$\epsilon_n(t_n + v h_n) = \sum_{l=1}^m L_l(v) \epsilon_n(t_{n,l}), \quad t_n + v h_n \in \sigma_n \quad (4.20)$$

onde $L_l(v)$ representa o l -ésimo polinômio fundamental de Lagrange para os parâmetros de colocação. Os termos $\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\epsilon_i; \alpha]$ em (4.19) são deste modo da seguinte forma,

$$\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\varepsilon_i; \alpha] = \begin{cases} \sum_{l=1}^m \left[\sum_{s=1}^{\mu_1} W_{j,s}^{(n,l)}(\alpha) k_{n,j}(t_i + d_{s,i} h_i) L_l(d_s) \right] \varepsilon_i(t_{i,1}), & 0 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{l=1}^m \left[\sum_{s=1}^{\mu_0} W_{j,s}(\alpha) k_{n,j}(t_n + d_{j,s} h_n) L_l(d_{j,s}) \right] \varepsilon_n(t_{n,1}), & i=n \end{cases} \quad (1 \leq j \leq m)$$

onde $k_{n,j}(\cdot) = k(t_{n,j}, \cdot)$.

Seja agora $Q_{n,i}(\alpha)$ ($0 \leq i \leq n \leq N-1$) a matriz quadrada de ordem m , cujos elementos são,

$$Q_{j,l}^{(n,i)}(\alpha) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{\mu_1} W_{j,s}^{(n,l)}(\alpha) k_{n,j}(t_i + d_{s,i} h_i) L_l(d_s), & 0 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{s=1}^{\mu_0} W_{j,s}(\alpha) k_{n,j}(t_n + d_{j,s} h_n) L_l(d_{j,s}), & i=n \end{cases} \quad (4.21)$$

($1 \leq j, l \leq m$)

e defina os vetores,

$$r_{n,i} := \left[E_{n,i}^{(1)}[u_i; \alpha], \dots, E_{n,i}^{(m)}[u_i; \alpha] \right]^T \quad \text{e} \quad \eta := \left[\varepsilon_i(t_{i,1}), \dots, \varepsilon_i(t_{i,m}) \right]^T$$

Com esta notação a equação (4.19) assume a seguinte forma,

$$\left[I_m - h_n^{1-\alpha} Q_{n,n}(\alpha) \right] \eta_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} Q_{n,i}(\alpha) \eta_i + \sum_{i=0}^n h_i^{1-\alpha} r_{n,i}, \quad (4.22)$$

onde I_m é a matriz identidade. Consideremos primeiro a matriz multiplicada por η_n : desde que os elementos da matriz $Q_{n,n}(\alpha)$ são limitados (isto segue da limitação do núcleo $K(t,s)$ e dos pesos de quadratura (4.8)), e desde que $h_n \leq h = O(N^{-1})$, $n=0, \dots, N-1$; existe uma constante finita Q'_0 não dependendo de h , tal que, para todo N suficientemente grande,

$$\| (I_m - h_n^{(1-\alpha)} Q_{n,n}(\alpha))^{-1} \|_1 \leq Q'_0, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (4.23)$$

O Lema 4.3 nos permite derivar limitantes superiores para as normas $\|Q_{n,i}(\alpha)\|_1$. Por (4.21) achamos que,

$$\|Q_{n,i}(\alpha)\|_1 = \max \left\{ \sum_{j=1}^m |q_{j,1}^{(n,i)}(\alpha)| : i=1, \dots, m \right\} \leq Q(\alpha)(n-i)^{-\alpha},$$

$$i=0, \dots, n-1. \quad (n \leq N-1)$$

com a constante $Q(\alpha)$ dependendo do limite superior K_0 para $|K(t,s)|$ e da constante de Lebesgue Λ_1 . De (4.22), usando (4.23) e a estimativa para $\|Q_{n,i}(\alpha)\|$, obtemos

$$\|\eta_n\|_1 \leq Q_0 h^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^{-\alpha} \|\eta_i\|_1 + Q'_0 \sum_{i=0}^n h_i^{1-\alpha} \|r_{n,i}\|_1, \quad (4.24)$$

com $Q_0 := Q'_0 Q(\alpha)$. A expressão (4.24) é a desigualdade de Gronwall discreta generalizada desejada; segue que, em analogia a (3.27), a ordem das normas $\|\eta_n\|_1$ serão dadas pela ordem das expressões $\sum_{i=0}^n h_i^{1-\alpha} \|r_{n,i}\|_1$, conforme foi mostrado no Lema 4.4. Desde que o diâmetro h satisfaz $h = O(N^{-1})$, segue que $\|\eta_n\|_1 = O(N^{-\mu})$. Além disso, (4.20) implica,

$$\varepsilon_n(t_n + v h_n) \leq \sum_{l=1}^m |L_l(v)| |\varepsilon_n(t_{n,l})| \leq \Lambda_1 \|\eta_n\|_1 = O(N^{-\mu}),$$

uniformemente para $t_n + v h_n \in \sigma_n$ e $n=0, \dots, N-1$ (quando $h \rightarrow 0^+$, com $Nh \leq T$). Isto é equivalente a afirmação (4.18) dada no Teorema 4.2. $\square$

Agora podemos derivar um resultado (análogo ao Corolário 2.1) sobre a ordem de convergência da aproximação $\hat{u}$ definida pela equação de colocação discretizada completa (4.11); assim,

Corolário 4.1.

Sejam g e K em (4.3) satisfazendo as condições estabelecidas no Teorema 4.2. Suponha que as fórmulas de quadratura (4.6) usadas para obter a equação de colocação discretizada completa (4.11) correspondem a:

$$\mu_0 = \mu_1 = m, \quad d_1 = c_1, \quad d_{j,l} = c_{j,l} = c_j c_l \quad (j, l=1, \dots, m) \quad (4.25)$$

com pesos de quadratura dados por (4.7) e (4.8). Então a aproximação por colocação resultante $\hat{u} \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ conduz ao erro $\hat{e} := y - \hat{u}$ satisfazendo,

$$\|\hat{e}\|_\infty = O(N^{-m}),$$

considerando malha graduada definida em (1.9).

Prova:

Usando (4.13), Teorema 4.1 e Teorema 4.2 (com $\mu=m$), obtemos

$$\|\hat{e}\|_{\infty} \leq \|e\|_{\infty} + \|\varepsilon\|_{\infty} = O(N^{-m}) + O(N^{-m}) = O(N^{-m}). \quad \square$$

Antes de apresentar um exemplo, reescreveremos (4.6) correspondentes a (4.25). Usando (4.12), a expressão (4.6) assume a seguinte forma,

$$\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i; \alpha] = \begin{cases} \sum_{l=1}^m W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha) k(t_{n,j}, t_{i,l}, \hat{Y}_{i,l}), & 0 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{l=1}^m W_{j,l}(\alpha) k(t_{n,j}, t_n + c_j c_l h_n, \sum_{s=1}^m L_s(c_j c_l) \hat{Y}_{n,s}), & i=n \end{cases} \quad (4.26)$$

onde os pesos de quadratura são,

$$W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha) = \int_0^1 \left[\frac{t_{n,j} - t_{i,l}}{h_i} - v \right]^{-\alpha} L_l(v) dv, \quad i=0, \dots, n-1 \\ (j, l=1, \dots, m) \quad (4.27)$$

$$W_{j,l}(\alpha) = c_j^{1-\alpha} \int_0^1 (1-v)^{-\alpha} L_l(v) dv, \quad (j, l=1, \dots, m) \quad (4.28)$$

4.2. EXEMPLO NUMÉRICO.

Consideremos a seguinte equação integral,

$$y(t) = 1 + \int_0^t \lambda(t-s)^{-\alpha} y(s) ds, \quad t \in I := [0, 1]; \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.29)$$

A solução exata de (4.29) é dada por (ver [BAKKE-86]),

$$y(t) = E_{1-\alpha}(\lambda \Gamma(1-\alpha) t^{1-\alpha}), \quad t \in I; \text{ onde,}$$

$$E_{\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\beta)} \quad \text{denota a função Mittag-Leffler e } \Gamma \text{ é a}$$

função gamma (ver [ABRAMOWITZ-70]).

Para $0 < \alpha < 1$ obtemos a seguinte solução não suave,

$$y(t) = 1 + \frac{\lambda}{1-\alpha} t^{1-\alpha} + \text{termos suaves. Portanto,}$$

$y'(t) = O(t^{-\alpha})$ quando $t \rightarrow 0^+$; enquanto que $y(t)$ é suave em $(0, 1]$.

A equação integral (4.29) foi resolvida numericamente para $\lambda = -1$ e $\alpha \in \{1/3, 1/2\}$ por colocação em $S_1^{(-1)}(Z_N)$ (de onde $m=2$), usando como parâmetros de colocação os pontos de Gauss-Legendre,

$$c_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, c_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}. \text{ Os pesos de quadratura (4.27) e (4.28) são}$$

$$W_{j,1}^{(n,1)}(\alpha) = b(\alpha) \left\{ \left[\frac{t_{n,j} - t_1}{h_1} \right]^{1-\alpha} \left[(2-\alpha)c_2 - \frac{t_{n,j} - t_1}{h_1} \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{t_{n,j} - t_{i+1}}{h_1} \right]^{1-\alpha} (2-\alpha)(c_2 - 1) - \frac{t_{n,j} - t_{i+1}}{h_1} \right\},$$

$$W_{j,2}^{(n,1)}(\alpha) = b(\alpha) \left\{ \left[\frac{t_{n,j} - t_1}{h_1} \right]^{1-\alpha} \left[\frac{t_{n,j} - t_1}{h_1} - (2-\alpha)c_1 \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{t_{n,j} - t_{i+1}}{h_1} \right]^{1-\alpha} \left[\frac{t_{n,j} - t_{i+1}}{h_1} - (2-\alpha)(c_1 - 1) \right] \right\},$$

$$j=1,2; (0 \leq i \leq n-1)$$

$$W_{j,1}(\alpha) = b(\alpha) c_j^{1-\alpha} [(2-\alpha)c_2 - 1],$$

$$W_{j,2}(\alpha) = b(\alpha) c_j^{1-\alpha} [1 - (2-\alpha)c_1]; \quad j=1,2$$

$$\text{onde, } b(\alpha) := \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(c_2 - c_1)}.$$

A correspondente equação de colocação discretizada completa (4.11) é,

$$\hat{Y}_{n,j} = \tilde{F}_n(t_{n,j}) + h_n^{1-\alpha} \left\{ W_{j,1}(\alpha) k \left[t_{n,j}, t_n + c_1 c_j h_n, L_1(c_1 c_j) \hat{Y}_{n,1} + \right. \right. \\ \left. \left. + L_2(c_1 c_j) \hat{Y}_{n,2} \right] + W_{j,2}(\alpha) k \left[t_{n,j}, t_n + c_2 c_j h_n, L_1(c_2 c_j) \hat{Y}_{n,1} + \right. \right. \\ \left. \left. + L_2(c_2 c_j) \hat{Y}_{n,2} \right] \right\}$$

$$+L_2(c_j c_2) \hat{Y}_{n,2} \Big\} \Big\}, \quad j=1,2; \quad n=0,1,\dots,N-1,$$

onde,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(t_{n,j}) := & g(t_{n,j}) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{1-\alpha} \left\{ W_{j,1}^{(n,i)}(\alpha) k(t_{n,j}, t_{i,1}, \hat{Y}_{i,1}) + \right. \\ & \left. + W_{j,2}^{(n,i)}(\alpha) k(t_{n,j}, t_{i,2}, \hat{Y}_{i,2}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{com, } L_1(v) = \frac{c_2^{-v}}{c_2 - c_1} \quad \text{e} \quad L_2(v) = \frac{v - c_1}{c_2 - c_1}.$$

A Tabela 4.1 mostra, para cada N , os erros máximos em $\bar{Z}_N$, e observamos que a ordem de convergência da aproximação por colocação é $O(N^{-2})$ com $r=2/(1-\alpha)$.

TABELA 4.1

N	$(\alpha=1/3, r=3)$	$(\alpha=1/2, r=4)$
5	9.70 E-03	1.49 E-02
10	2.74 E-03	4.81 E-03
20	7.19 E-04	1.45 E-03

TABELA 4.2

N	$h_{\min}$ $(\alpha=1/3)$	$h_{\max}$	$h_{\min}$ $(\alpha=1/2)$	$h_{\max}$
5	8.00 E-03	0.488	1.60 E-03	0.590
10	1.00 E-03	0.271	1.00 E-04	0.344
20	1.25 E-04	0.143	6.25 E-06	0.185

Comentário.

Na Tabela 4.2 mostramos os valores do tamanho do passo mínimo e máximo (isto é $h' = h_{\min} = h_0$, $h = h_{\max} = h_{N-1}$) para a malha graduada usada nos cálculos acima. Estes valores também mostram a limitação prática

quando usamos este tipo de malha; por exemplo, para $\alpha=1/2$ (valor que aparece com mais frequência nos problemas práticos) achamos que $h_0=N^{-2m}T$ (ver 1.10 com $r>1$). Assim, se trabalharmos com polinômios splines cúbicos ($m=4$) com $T=1$ e $N=100$, temos que inicializar o método de colocação sobre um intervalo cujo comprimento é $h_0=100^{-8}=10^{-16}$, obtendo desta forma o tamanho do passo inicial muito pequeno. Em consequência, para valores fixos de α e m , o tamanho do passo inicial $h_0=TN^{-r}$ torna-se pequeno quando N cresce, criando desta forma um sério problema de arredondamento contaminando possivelmente o subsequente processo recursivo.

Damos a seguir o algoritmo utilizado para resolver a equação (4.29),

Passo 1. Gerar os pontos da malha graduada t_n , $n=0,1,\dots,N-1$.

Passo 2. Para cada $n=0,1,\dots,N-1$, resolver um sistema de m equações algébricas para $\hat{Y}_{n,j}$ ($n=0,1,\dots,N-1$; $j=1,\dots,m$), segundo a equação de colocação discretizada completa (4.11). A fórmula de quadratura utilizada é dada por (4.26).

Passo 3. Determinar a aproximação $\hat{u}_n$ em σ_n mediante (4.12).

Passo 4. Calcular o erro da aproximação, isto é,

$$|\hat{e}(t_n)| = |y(t_n) - \hat{u}_n(t_n)|, \quad t_n \in \bar{Z}_N, \quad n=1,\dots,N.$$

Passo 5. Tomar $\max\{|\hat{e}(t_n)| : t_n \in \bar{Z}_N, n=1,\dots,N\}$.

4.3. CONCLUSÃO.

O método de colocação para aproximar a solução das equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular, bem como uma análise de convergência com respeito a malha graduada foram apresentadas. Além disso, determinamos o tipo de fórmulas de quadratura que devemos usar para aproximar as integrais (3.8), para obter a equação de colocação discretizada completa (4.11). Finalmente, foram apresentados resultados numéricos para verificar a ordem de convergência teórica apresentada neste Capítulo, bem como chamar a atenção sobre as dificuldades práticas que podem ocorrer quando consideramos malhas mais finas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho fizemos uma análise da convergência para a solução aproximada (pelo método de colocação polinomial spline) de equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo regular (limitado) onde a suavidade da solução é determinada pela suavidade do núcleo k e da função forçante g . Quando trabalhamos com núcleos fracamente singular, a solução resultante é tipicamente não suave no ponto inicial do intervalo de integração (isto é, suas derivadas tornam-se não limitadas). Isto significa que se desejarmos de um método numérico uma ordem de convergência elevada, temos que considerar, de alguma forma, o comportamento singular da solução exata perto deste ponto. Malha graduada foi usada para este propósito.

Devemos ressaltar também que as desigualdades de Gronwall no caso discreto tiveram uma importância fundamental na análise de convergência do método numérico apresentado aqui. Por outro lado, a análise de convergência feita neste trabalho pode ser estendida para as equações integrais de Volterra não lineares.

Consideramos muito importantes (sob o ponto de vista prático) os Capítulos II e IV, pois neles apresentamos a prova de convergência do método de colocação polinomial spline usando quadratura numérica.

Em geral, a escolha da regra de quadratura depende da suavidade do núcleo. Assim, usamos regra de quadratura interpolatória para núcleos suficientemente suaves (Capítulo II). Para núcleos menos

suaves consideramos a técnica de integração produto (Capítulo IV).

Nossa intenção foi mostrar as idéias essenciais das interconexões entre as equações de colocação exata e discretizada e suas correspondentes aproximações. Desta maneira, vimos que para núcleos suficientemente suaves, a ordem de convergência do método discreto resultante é a mesma do método exato. Para núcleos não suficientemente suaves isto geralmente não é verdadeiro. Nesse caso devemos usar técnicas de quadratura mais sofisticadas (integração produto) em vez de quadratura interpolatória.

BIBLIOGRAFIA

- [ABRAMOWITZ - 70] - ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Applied Mathematical Series, 55, Washington (Dover, New York), 1970.
- [BAKKE - 86] - BAKKE, V.L. & JACKIEWICZ, Z. : Stability Analysis of Product θ -Methods for Abel Integral Equations of the Second Kind. Numer. Math., 48, 127-136, 1986.
- [BLOM - 87] - BLOM, J.G. & BRUNNER, H.: The Numerical Solution of Nonlinear Volterra Integral Equations of the Second Kind by Collocation and Iterated Collocation. SIAM J.Sci.Stat.Comput.8, 806-830, 1987.
- [BRUNNER - 82] - BRUNNER, H.: On Collocation Approximations for Volterra Equations with weakly Singular Kernels. In: Baker & Miller, 409-420, 1982.
- [BRUNNER - 83] - BRUNNER, H.: Nonpolynomial Spline Collocation for Volterra Equations with Weakly Singular Kernels, SIAM J. Numer. Anal., 20, 1106-1119, 1983.
- [BRUNNER - 85] - BRUNNER, H.: The Numerical Solution of Weakly Singular Volterra Equations by Collocation on Graded Meshes. Math. Comp. 45, 417-437, 1985.

- [BRUNNER - 86] - BRUNNER, H. & HOUWEN, P.J. van der. : The
Numerical Solution of Volterra Equations. CWI
Monographs 3 (North-Holland, Amsterdam, 1986).

- [DE BOOR - 78] - DE BOOR, C.: A Practical Guide to Splines.
Springer-Verlag, New-York-Heidelberg-Berlin, 1978

- [GRAHAM - 82] - GRAHAM, I.G.: Galerkin Methods for Second Kind
Integral Equations with Singularities. Math.
Comp., 39, 519-533, 1982.

- [HANDELSMAN - 72] - HANDELSMAN, R.A. & OLMSTEAD, W.E. : Asymptotic
Solution to a Class of Nonlinear Volterra
Integral Equations. SIAM J. Appl. Math., 22,
373-384, 1972.

- [ISAACSON - 66] - ISAACSON, E. & KELLER, H.B. : The Analysis of
Numerical Methods. Wiley, New York, 1966.

- [KRYLOV - 62] - KRYLOV, V. I.: Approximate Calculation of
Integrals. Macmillan, London, 1962.

- [MCKEE - 82] - MCKEE, S.: Generalized Discrete Gronwall Lemmas.
Z. Angew. Math. Mech., 62, 429-434, 1982.

- [MILLER - 71a] - MILLER, R.K.: Nonlinear Volterra Integral . W.A.
Benjamin, Menlo Park, CA., 1971.

- [MILLER - 71b] - MILLER, R.K. & FELDSTEIN, A.: Smoothness of
Solutions of Volterra Integral Equations with
Weakly Singular Kernels. SIAM J. Math. Anal., 2,
242-258, 1971.

- [OLMSTEAD - 77] - OLMSTEAD, W.E.: A Nonlinear Integral Equations
Associated with gas absorption in a Liquid.
Z. Angew. Math. Phys., 28, 513-523, 1977.

- [RICE - 69] - RICE J.R. : On The Degree of Convergence of Nonlinear Spline Approximation. In: Approximation with Special Emphasis on Spline Functions (I.J. Schoenberg, Ed.), Academic Press, New York, 349-365, 1969.

- [RIVLIN - 69] - RIVLIN T.J.: An Introduction to the Approximation of Function. Blaisdell Publishing Company, New York, 1969.

- [SCHNEIDER - 81] - SCHNEIDER C. : Product Integration for Weakly Singular Integral Equations. Math. Comp. 36, 207-213, 1981.

- [SCHUMAKER - 81] - SCHUMAKER, L.L.: Spline Functions: Basic Theory. Wiley, New York, 1981.

- [TE RIELE - 82] - TE RIELE, H.J.J. : Collocation Methods for Weakly Singular Second Kind Volterra Integral Equations with Non-smooth Solution. IMA J. Numer. Anal., 2, 437-449, 1982.

- [VAINIKKO - 81] - VAINIKKO, G. & UBA, P.: A Piecewise Polynomial Approximation to the Solution of an Integral Equation with weakly Singular Kernel. J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 22, 431-438, 1981.

- [YOSIDA - 60] - YOSIDA, K. : Lectures on Differential and Integral Equations. Interscience Publishers, New York, 1960.