**Análise Bayesiana de dados de sobrevivência
com função de risco em forma de U**

Vadirene de Fátima Barbosa

Orientador: *Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Área: Ciência de Computação e Matemática Computacional.

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da Defesa: 26/09/2003

Visto do Orientador:

USP – São Carlos
Outubro/2003

Agradecimentos

Acima de tudo, agradeço a Deus pela saúde que me permite dedicar ao trabalho.

Ao Prof. Jorge Alberto Achcar, pela orientação objetiva, paciência e disponibilidade. Por compartilhar comigo toda a sua rica experiência profissional e conduzir este trabalho com otimismo.

Aos professores Francisco Louzada Neto e Reiko Aoki pelas valiosas sugestões no exame de qualificação.

Às colegas funcionárias da secretaria de pós-graduação, Laura, Elizabete e Ana Paula as quais são sempre prestativas e amáveis comigo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao meu grande amor Gilberto, tanto pela cumplicidade emocional nos momentos difíceis, quanto pelos valiosos ensinamentos e discussões profissionais durante todo o meu período de mestrado.

À minha mãe Conceição e meus irmãos Vanderlei, Vanessa e David, por acreditarem em mim e sempre estarem ao meu lado.

Às colegas Valéria, Cilene, Wruick, Juliano, Fabrício, Andréa, Lucas, Vera e Sandra, pelo apoio durante os cursos e disciplinas.

Enfim, gostaria de agradecer a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Em especial aos amores de minha vida, Gilberto, meus pais e meus irmãos

Resumo

Neste trabalho, é apresentada uma análise Bayesiana de dados de confiabilidade ou dados médicos cuja população está sujeita a duas causas de falha e só é possível observar o mínimo entre os dois tempos de falha. Estas falhas podem ser falha precoce e falha por envelhecimento e geralmente, nestas situações as funções de risco apresentam forma de U, exigindo uma análise mais complexa com uso de modelos mais elaborados como Weibull-Exponenciada (Mudholkar, 1995), Gama generalizada (Stacy, 1982), ou modelos de mistura de distribuições paramétricas. Na maioria dos casos existe dependência entre os dois tempos de falha e o uso de um modelo que incorpore esta dependência se faz necessária. Desta forma, propomos a utilização da distribuição bivariada de Ryu (1993) que assume dependência entre os tempos. Um dos objetivos principais deste trabalho está relacionado à análise Bayesiana de dados com observações censuradas, na presença ou não de covariáveis sob as suposições citadas. No contexto Bayesiano foram utilizadas técnicas de simulação via Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC).

Abstract

In this work, we develop a Bayesian analysis for lifetime data where the population is submitted to two causes of failures and it is possible to observe only the minimum between these two lifetimes. These failures could be precocce or aging and generally, in these situations, the hazard functions have a U form (bathtub form), and we need more general models like the exponentiated-Weibull (Mudholkar, 1995), generalized Gamma (Stacy, 1982) or mixtures of parametric distributions.

In general, we have in these situations dependence between these two failures. In this case, we propose the use of the bivariate distribution of Ryn (1993) that assumes dependence between the failures. We use MCMC (Markov Chain Monte Carlo) methods to obtain a Bayesian analysis of these models in the presence or not of covariates.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Preliminares	1
1.2	Apresentação dos Capítulos	3
2	Modelos com Funções de Risco em Forma de U	5
2.1	Família de Distribuições Weibull Exponenciada	5
2.2	Família de distribuições IDB	6
2.3	Distribuição Potência Exponencial	7
2.4	Modelo Bivariado de Ryu	8
2.4.1	Modelo de Ryu	8
2.4.2	Modelo de Ryu para Tempo de Falha Precoce e Falha por Envel- hecimento	10
2.4.3	Modelo Generalizado de Ryu	12
2.4.4	Modelo Generalizado de Ryu para Tempo de Falha Precoce e Falha por Envelhecimento	14

3	Função de Verossimilhança	16
3.1	Dados Observados Completos e na Ausência de Covariável	16
3.1.1	Modelo Weibull Exponenciada	17
3.1.2	Modelo IDB	17
3.1.3	Modelo Potência Exponencial	17
3.1.4	Modelo de Ryu	17
3.1.5	Modelo Generalizado de Ryu	18
3.2	Dados Observados Completos e na Presença de Covariável	18
3.2.1	Introdução de Covariável ao Modelo de Ryu	19
3.2.2	Modelo de Ryu	20
3.2.3	Modelo Generalizado de Ryu	20
3.3	Dados Censurados à Direita na Presença de Covariável	21
3.3.1	Modelo de Ryu	21
3.3.2	Modelo Generalizado de Ryu	22
4	Análise Bayesiana	23
4.1	Dados Observados Completos e Ausência de Covariáveis	23
4.1.1	Modelo Weibull exponenciada	23
4.1.2	Modelo IDB	24
4.1.3	Modelo Potência Exponencial	25

4.1.4	Modelo de Ryu	26
4.1.5	Introdução de uma Variável Artificial (ou Latente)	27
4.1.6	Modelo Generalizado de Ryu	28
4.2	Dados Observados Completamente na Presença de Covariáveis	30
4.2.1	Modelo de Ryu	30
4.2.2	Modelo Generalizado de Ryu	31
4.3	Dados Censurados à Direita na Presença de Covariáveis	33
4.3.1	Introdução de Variáveis Artificiais (ou Latentes)	33
4.3.2	Modelo de Ryu	34
4.3.3	Modelo Generalizado de Ryu	35
4.3.4	Método Bayesiano para seleção de Modelos	37
5	Aplicações	38
5.1	Exemplo 1 - Dados Observados Completos e na Ausência de Covariável	39
5.1.1	Weibull Exponenciada	40
5.1.2	Modelo HDB	41
5.1.3	Modelo Potência Exponencial	41
5.1.4	Modelo de Ryu	42
5.1.5	Modelo Generalizado de Ryu	42
5.1.6	Discriminação dos Modelos para os dados de Aarset	44

5.2	Exemplo 2 - Dados Observados Completamente com Covariável	45
5.2.1	Conjunto de Dados Simulados	45
5.2.2	Conjunto de Dados Reais	48
5.3	Exemplo 3 - Dados Censurados à Direita com Covariável	50
5.3.1	Modelo de Ryu	50
5.3.2	Modelo de Ryu Generalizado	50
6	Conclusões gerais	53
	Apêndice A:Dados Simulados	55
	Apêndice B:Algoritmo Metropolis-Hastings	57
	Apêndice C: Critério de Convergência	59
	Apêndice D: Programa Computacional	62
	Referências Bibliográficas	69

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preliminares

Em análise de dados de sobrevivência é muito comum situações onde o tempo de vida associado à uma causa particular não ser observado, mas somente ser conhecido o tempo de vida mínimo entre todas as causas possíveis de falha, incluindo a causa particular de interesse. Muitas vezes, a causa particular de falha não é indicada para os tempos de sobrevivência observados.

Um caso especial é dado por unidades ou componentes fabricados numa linha de produção onde há uma pequena proporção de componentes com algum defeito de fabricação que leva à falha precoce do componente e uma grande proporção de componentes sem defeito de fabricação que falham por envelhecimento ou desgaste natural. Assim, há interesse em modelos que incorporam essas duas causas de falhas: falhas precoces e falhas por envelhecimento.

Neste caso, a função de risco (ver por exemplo, Kalbfleisch e Prentice, 1980) pode ter uma forma de banheira ou U, e os modelos paramétricos usuais como as distribuições de Weibull, Exponencial, Gama entre outros, não são adequados para analisar os dados.

A mesma situação é encontrada para dados médicos onde podemos ter dois ou mais

riscos competitivos que levam à morte do paciente.

Assim, o tempo observado é dado por $T = \min(T_1, T_2)$, onde T_1 é o tempo de vida até a falha devido à causa defeito de fabricação e T_2 é o tempo de vida até a falha devido ao envelhecimento.

Muitas distribuições são introduzidas para modelar esse tipo de dados tais como a família de distribuições Gama generalizada proposta por Stacy (1982), a família Potência-Exponencial formulada por Smith & Bain (1975). Uma revisão para modelos com função de risco na forma de U é dada por Rajarshi & Rajarshi (1988). Uma ampla variedade de métodos de estimação e testes de hipóteses tais como o método dos momentos, mínimos quadrados ponderados e máxima verossimilhança foram discutidos para esses modelos (ver por exemplo, Rajarshi & Rajarshi (1988), Hjorth (1980)). Mudholkar et al (1995) apresenta uma generalização da família de distribuição Weibull chamada família de distribuição Weibull exponenciada que além de incluir distribuições com funções de risco em forma de U e unimodal também admite uma ampla classe de distribuições com riscos monótonos computacionalmente conveniente para análise de dados com censuras. Modelos de múltiplos riscos Weibull-múltiplo são introduzidos por Berger & Sun (1993,1996) e Lonzada-Neto (1999).

Chan & Meeker (1997) assumem que T_1 e T_2 são independentes e T_1 tem função distribuição $p F_1(t, \theta_1)$ e T_2 tem função distribuição $F_2(t, \theta_2)$, isto é, $F(t, \theta) = P(T \leq t) = 1 - (1 - p F_1(t, \theta_1)) (1 - F_2(t, \theta_2))$, onde $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Na prática, em geral T_1 e T_2 não são duas variáveis aleatórias independentes, uma vez que a causa de falha envelhecimento (ou desgaste) pode agir sob o tempo até a falha precoce. Neste caso, considera-se uma distribuição de sobrevivência bivariada, como por exemplo, a distribuição bivariada introduzida por Ryu (1993) que é uma extensão do modelo de Marshall & Olkin (1967).

Em geral, pode-se encontrar dificuldades para obter inferências clássicas para esse tipo de modelo especialmente com dados censurados. O uso de métodos Bayesianos para esse tipo de modelo pode ser de grande aplicabilidade, especialmente usando métodos MCMC (Monte Carlo em Cadeias de Markov). Entre esses métodos de simulação, pode-se destacar o algoritmo Gibbs sampling (ver por exemplo, Gelfand & Smith, 1990) e o

algoritmo Metropolis-Hastings (ver, por exemplo, Smith & Roberts, 1993).

1.2 Apresentação dos Capítulos

Para obtenção de quantidades a posteriori de interesse, será considerado a introdução de variáveis latentes (ver por exemplo, Tanner & Wong, 1987) para simplificar as distribuições condicionais necessárias para o algoritmo Gibbs sampling.

Considerando dados gerados e dados reais, é considerado o modelo de Ryu e outros modelos usados para riscos em forma de U. Neste caso, serão usados critérios Bayesianos de discriminação de modelos.

No Capítulo 2, são introduzidos alguns modelos que admitem função de risco em forma de U. Em especial, apresenta-se o modelo Bivariado de Ryu(1993) subdividido em dois modelos: o primeiro, Modelo de Ryu o qual tem função de risco crescente e o segundo, Modelo generalizado o qual admite função de risco também em forma de U.

No Capítulo 3, apresenta-se as funções de verossimilhança dos modelos abordados no Capítulo 1 e discutidos os procedimentos para análise clássica para dados sem censura.

Ainda no Capítulo 3, explicita-se as funções de verossimilhança para o Modelo de Ryu e Modelo de Ryu Generalizado nos casos em que considera-se dados observados completamente com covariável e dados censurados à direita com covariável

No Capítulo 4, apresenta-se uma análise bayesiana para dados sem censuras para os modelos introduzidos no Capítulo 2. Apresenta-se ainda uma análise Bayesiana para o Modelo de Ryu e Ryu Generalizado para dados observados completamente com presença de covariável e dados censurados à direita com presença de covariável.

No Capítulo 5, são introduzidos três exemplos numéricos para exemplificar os procedimentos propostos. No primeiro exemplo, considera-se os modelos introduzidos no Capítulo 2, com ajuste dos modelos para dados reais sem censura. No segundo exemplo, considera-se o Modelo de Ryu e Modelo Generalizado de Ryu com ajuste dos modelos para dados sem censura e com covariável. No Exemplo 3, considera-se também estes dois

últimos modelos com ajuste para dados censurados à direita e com covariável.

Finalmente, no capítulo 6 apresenta-se algumas conclusões do trabalho de modo geral.

Alguns objetivos mais importantes do nosso trabalho são:

- (i) Considerar modelos que admitem funções de risco em forma de U para dados de confiabilidade. Em especial, verificar a aplicabilidade do Modelo Bivariado de Ryu para populações as quais o tempo observado é o mínimo entre o tempo de falha precoce e o tempo de falha por envelhecimento.
- (ii) Uso de métodos MCMC para uma análise Bayesiana dos modelos propostos.
- (iii) Considerar métodos bayesianos para discriminar os modelos propostos.
- (iv) Aplicações de dados reais.

Capítulo 2

Modelos com Funções de Risco em Forma de U

Nesta seção apresenta-se algumas das famílias de distribuições com funções de Risco em forma de U.

2.1 Família de Distribuições Weibull Exponenciada

A distribuição Weibull Exponenciada com parâmetros α, θ e σ para o tempo de vida T tem função de densidade dada por

$$f(t) = \frac{\alpha\theta}{\sigma} \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right]^{\theta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \left(\frac{t}{\sigma} \right)^{\alpha-1}, 0 < t < \infty, \quad (2.1)$$

onde $\alpha > 0$, $\theta > 0$ são parâmetros de forma e $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala. A função de sobrevivência de T denotada por $S(t) = P(T \geq t)$ é dada por

$$S(t) = 1 - \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right]^\theta, t > 0. \quad (2.2)$$

A função de risco de T , definida por $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$, é obtida pelas expressões (2.1) e (2.2) é dada por

$$h(t) = \frac{\alpha\theta \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha\right\}\right]^{\theta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha\right\} \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha-1}}{\sigma \left[1 - \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha\right\}\right)^\theta\right]}. \quad (2.3)$$

O modelo Weibull Exponenciada apresenta funções de risco da forma de U, unimodal e monótona. Isto é, o risco tem forma,

- (i) monótona crescente se $\alpha \geq 1$ e $\alpha\theta \geq 1$,
- (ii) monótona decrescente se $\alpha \leq 1$ e $\alpha\theta \leq 1$,
- (iii) forma de banheira se $\alpha > 1$ e $\alpha\theta < 1$ e
- (iv) unimodal de $\alpha < 1$ e $\alpha\sigma > 1$.

2.2 Família de distribuições IDB

A distribuição IDB (Increasing, Decreasing, Bathtub) proposta por Hjort(1980) com dois parâmetros de forma e um de escala pode descrever dados de tempos de vida com taxa de falha crescente, decrescente, constante e forma de U. A família considerada é definida por sua função de sobrevivência

$$S(t) = \frac{e^{-\frac{\delta t^2}{2}}}{(1 + \beta t)^{\frac{\theta}{\beta}}}, \quad (2.4)$$

onde $\delta > 0$, $\theta > 0$ e $\beta > 0$. A correspondente função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(t) = \frac{(1 + \beta t)\delta t + \theta}{(1 + \beta t)^{\frac{\theta}{\beta}+1}} e^{-\frac{\delta t^2}{2}}, t > 0. \quad (2.5)$$

A função de risco $h(t) = \frac{f(t)}{s(t)}$ é dada por

$$h(t) = \delta t + \frac{\theta}{1 + \beta t}. \quad (2.6)$$

De (2.6) temos alguns casos especiais da distribuição IDB:

- (a) distribuição de Rayleigh (distribuição Weibull) se $\theta = 0$,
- (b) distribuição exponencial (distribuição Weibull) se $\delta = \beta = 0$,
- (c) distribuição com risco decrescente se $\delta = 0$,
- (d) distribuição com risco crescente se $\delta \geq \theta\beta$,
- (e) distribuição com risco na forma de U se $0 < \delta < \theta\beta$.

2.3 Distribuição Potência Exponencial

Smith e Bain (1975,1976) apresentaram uma família de distribuição chamada Potência exponencial com dois parâmetros como uma distribuição alternativa para dados de tempos de vida com taxa de falha em forma de U. A função de densidade de probabilidade é dada por,

$$f(t) = \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} \exp \left\{ 1 - \exp \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} + \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right\}, t > 0, \quad (2.7)$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. A função distribuição acumulada é dada por

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ 1 - \exp \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right\}. \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8) a função risco é dada por

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right), \quad t > 0, \quad (2.9)$$

onde a função de risco tem forma de U se $0 < \beta < 1$.

2.4 Modelo Bivariado de Ryu

Ryu (1993), generaliza o cenário físico considerado por Marshall & Olkin (1967) admitindo choques que produzem efeitos de forma acumulativa aumentando o risco de falha. O modelo bivariado de Ryu tem densidade marginal com taxa de falha crescente e a densidade conjunta indica que um par de sistemas antigo tem menor probabilidade de sobrevivência do que um novo par, sendo que os choques se acumulam com o passar do tempo. Ao contrário do modelo de Marshall & Olkin, o modelo de Ryu é absolutamente contínuo.

2.4.1 Modelo de Ryu

Neste caso, Ryu (1993), considera T_1 e T_2 os tempos de falha dos sistemas 1 e 2, respectivamente, como sendo variáveis aleatórias dependentes. Sendo assim, a função densidade do modelo bivariado de Ryu é dada por:

Para $t_1 > t_2$,

$$f(t_1, t_2) =$$

$$\begin{aligned} & \bar{F}(t_1, t_2) \left(\lambda_2 + \lambda_{12} e^{-\beta_1(t_1 - t_2)} - \frac{\lambda_{12} (\beta_1 e^{-\beta_1(t_1 - t_2)} + \beta_2 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right) \\ & \left(\lambda_1 + \lambda_{12} - \lambda_{12} e^{-\beta_1(t_1 - t_2)} + \beta_1 \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} (e^{-\beta_1(t_1 - t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2}) \right) + \\ & + \bar{F}(t_1, t_2) \left(\beta_1 \lambda_{12} e^{-\beta_1(t_1 - t_2)} - \frac{\beta_1 \lambda_{12} (\beta_1 e^{-\beta_1(t_1 - t_2)} + \beta_2 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right), \end{aligned}$$

Para $t_1 \leq t_2$,

$$f(t_1, t_2) =$$

$$\begin{aligned} & \bar{F}(t_1, t_2) \left(\lambda_1 + \lambda_{12} e^{-\beta_2(t_2-t_1)} - \frac{\lambda_{12}(\beta_2 e^{-\beta_2(t_2-t_1)} + \beta_1 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right) \\ & \left(\lambda_2 + \lambda_{12} - \lambda_{12} e^{-\beta_2(t_2-t_1)} + \beta_2 \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} (e^{-\beta_2(t_2-t_1)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2}) \right) + \\ & + F(t_1, t_2) \left(\beta_2 \lambda_{12} e^{-\beta_2(t_2-t_1)} - \frac{\beta_2 \lambda_{12}(\beta_2 e^{-\beta_2(t_2-t_1)} + \beta_1 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\bar{F}(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$.

Note que se $\lambda_{12} = 0$, então T_1 e T_2 são variáveis aleatórias independentes, onde T_i tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_i, i = 1, 2$.

A função de sobrevivência conjunta é dada por:

$$\begin{aligned} & \text{Para } t_2 < t_1, \\ & P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \\ & \exp \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1 - \lambda_2 t_2 + \frac{\lambda_{12}(1 - e^{-\beta_1(t_1-t_2)})}{\beta_1} + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_1(t_1-t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\}, \\ & \text{Para } t_1 \leq t_2, \\ & P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \\ & \exp \left\{ -(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2 - \lambda_1 t_1 + \frac{\lambda_{12}(1 - e^{-\beta_2(t_2-t_1)})}{\beta_2} + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_2(t_2-t_1)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Note que quando $\beta_1 \uparrow \infty$ e $\beta_2 \uparrow \infty$, a função de sobrevivência conjunta reduz-se à distribuição exponencial bivariada de Marshall e Olkin (1967):

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \exp \{ -(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_{12} \max(t_1, t_2)) \}.$$

A função de sobrevivência para T_i é dada por

$$P(T_i > t) = \exp \left\{ -\lambda_i t - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}(1 - e^{-\beta_i t})}{\beta_i} \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Figura 2.1: Função densidade (2.13): (..... $\beta_i = 0,5$; - - - $\beta_i \uparrow \infty$).

A função densidade para T_i é dada por

$$f_{T_i}(t) = [\lambda_i + \lambda_{12}(1 - e^{-\beta_i t})] \exp \left\{ -\lambda_i t - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12} \{1 - e^{-\beta_i t}\}}{\beta_i} \right\}. \quad (2.13)$$

Observa-se que se $\beta_i \uparrow \infty$, a distribuição reduz-se à distribuição exponencial com taxa de risco constante $\lambda_i + \lambda_{12}$ (ver Figura 2.1).

A função de risco é dada por

$$h_i(t) = \lambda_i + \lambda_{12}(1 - e^{-\beta_i t}), i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Note que $h_i(t)$ é crescente em t , a menos que $\beta_i \uparrow \infty$.

2.4.2 Modelo de Ryu para Tempo de Falha Precoce e Falha por Envelhecimento

Considerando uma situação em que os dados são tempos de falha de unidades de uma população para os quais não se tem informação sobre a causa de falha, representa-se então o tempo de falha de cada unidade por $T = \min(T_1, T_2)$. Isto é, tem-se dois riscos competitivos para falhas $T = \min(T_1, T_2)$, para o qual

- (a) T_1 representa o tempo de falha precoce;

(b) T_2 representa o tempo de falha por envelhecimento.

Considerando então $T = \min(T_1, T_2)$ com uma distribuição de três parâmetros :
 $\theta_1 = \frac{\lambda_{12}}{(\beta_1 + \beta_{12})}$; $\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$; $\theta_3 = \beta_1 + \beta_2$, onde $\theta_1 \theta_3 = \lambda_{12}$ mede a correlação entre as causas de falha.

Nesta parametrização, a função densidade é escrita na forma:

$$f(t) = (\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t}) \exp \left\{ \theta_1 - \theta_2 t - \theta_1 e^{-\theta_3 t} \right\}, t \geq 0. \quad (2.15)$$

A função de sobrevivência é dada por

$$S(t) = P(T > t) = \exp \left\{ \theta_1 - \theta_2 t - \theta_1 e^{-\theta_3 t} \right\}. \quad (2.16)$$

A função de risco é dada por

$$h(t) = \theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t}. \quad (2.17)$$

É importante observar as seguintes características da função de risco:

- (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \theta_2$;
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \theta_2 - \theta_1 \theta_3$.

Observar que $\theta_2 - \theta_1 \theta_3 \leq h(t) \leq \theta_2$ e que $h(t)$ é uma função crescente em t . Na Figura 2.2 temos casos específicos da função de risco da distribuição de Ryn.

Observar ainda que,

- (c) Se θ_3 é grande, $h(t)$ converge rápido para θ_2 ; assim, as unidades rapidamente mudam da taxa de falha $\theta_2 - \theta_1 \theta_3$ para θ_2 ;
- (d) Se θ_3 é pequeno, $h(t)$ demora para mudar da taxa de falha $\theta_2 - \theta_1 \theta_3$ para θ_2 .

Figura 2.2: Função de risco da distribuição de Ryu (— — — $\theta_1 = 0,022$; $\theta_2 = 0,41$ e $\theta_3 = 10$; ..... $\theta_1 = 0,22$; $\theta_2 = 0,41$ e $\theta_3 = 1$)

2.4.3 Modelo Generalizado de Ryu

O modelo bivariado de Ryu pode ter a forma generalizada com função de sobrevivência conjunta dada por

Para $t_2 < t_1$,

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) =$$

$$\exp \left\{ -\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12} t_1 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{\beta_1 (t_1 - t_2)})}{\beta_1} + \frac{\lambda_{12} (e^{\beta_1 (t_1 - t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\},$$

Para $t_1 \leq t_2$,

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) =$$

$$\exp \left\{ -\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12} t_2 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{\beta_2 (t_2 - t_1)})}{\beta_2} + \frac{\lambda_{12} (e^{\beta_2 (t_2 - t_1)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\}. \quad (2.18)$$

Note que, quando $\alpha_1 \rightarrow 1$ e $\alpha_2 \rightarrow 1$, as expressões anteriores reduzem-se à (2.11).

A função densidade conjunta para (T_1, T_2) , fixando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, (ver 2.10), é dada por

(i) Para $t_1 > t_2$,

$$f(t_1, t_2) = \bar{F}(t_1, t_2) [\lambda_2 + a_1 \lambda_{12} - c(\beta_1 a_1 + \beta_2 b)] \times [\lambda_1 + \lambda_{12} - \lambda_{12} a_1 + \beta_1 c(a_1 - b)] +$$

$$+ F(t_1, t_2) [\beta_1 \lambda_{12} a_1 - \beta_1 c(\beta_1 a_1 + \beta_2 b)],$$

(ii) Para $t_1 \leq t_2$,

$$f(t_1, t_2) = \overline{F}(t_1, t_2) [\lambda_1 + a_2 \lambda_{12} - c(\beta_2 a_2 + \beta_1 b)] \times [\lambda_2 + \lambda_{12} - \lambda_{12} a_2 + \beta_2 c(a_2 - b)] + \\ + \overline{F}(t_1, t_2) [\beta_2 \lambda_{12} a_2 - \beta_2 c(\beta_2 a_2 + \beta_1 b)],$$

onde $F(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$, $a_1 = e^{-\beta_1(t_1-t_2)}$; $a_2 = e^{-\beta_2(t_1-t_2)}$; $b = e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2}$;
 $c = \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2}$.

A função de sobrevivência para T é dada por,

$$P(T > t) = \exp \{a - \lambda_{12} t - b_1 t^{\alpha_1} - b_2 t^{\alpha_2} - a e^{-ct}\}.$$

onde,

$$(a, b_1, b_2, c) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_{12}}{\beta_1}, \lambda_1, 0, \beta_1\right), & \text{se } T = T_1; \\ \left(\frac{\lambda_{12}}{\beta_2}, 0, \lambda_2, \beta_2\right), & \text{se } T = T_2; \\ \left(\frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_1 + \beta_2\right), & \text{se } T = \min(T_1, T_2). \end{cases}$$

Assim, as densidades para T_1 , T_2 e $T = \min(T_1, T_2)$ são dadas por,

$$f(t) = \left\{ \lambda_{12} + b_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + b_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} - a c e^{-ct} \right\} \exp \left\{ a - \lambda_{12} t - b_1 t^{\alpha_1} - b_2 t^{\alpha_2} - a e^{-ct} \right\}. \quad (2.19)$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto,

$$(i) \quad f(t_1) = \left\{ \lambda_{12} + \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} - \lambda_{12} e^{-\beta_1 t_1} \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_1} - \lambda_{12} t_1 - \lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_1} e^{-\beta_1 t_1} \right\}. \quad (2.20)$$

$$(ii) \quad f(t_2) = \left\{ \lambda_{12} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} - \lambda_{12} e^{-\beta_2 t_2} \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_2} - \lambda_{12} t_2 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_2} e^{-\beta_2 t_2} \right\}. \quad (2.21)$$

(iii) Se $T = \min(T_1, T_2)$, temos,

$$f(t) = \left\{ \lambda_{12} + \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} - \lambda_{12} e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right\} \times \\ \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} - \lambda_{12} t - \lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right\}. \quad (2.22)$$

2.4.4 Modelo Generalizado de Ryu para Tempo de Falha Precoce e Falha por Envelhecimento

Seja $T = \min(T_1, T_2)$ o tempo de vida de um componente, onde T_1 e T_2 são dois riscos competitivos. Considere a parametrização $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}$; onde $\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2$.

A função de sobrevivência para $T = \min(T_1, T_2)$ é dada por

$$P(T > t) = \exp \left\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} \left(1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right) \right\}. \quad (2.23)$$

A densidade para $T = \min(T_1, T_2)$ é da forma:

$$f(t) = \left\{ \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} \left(1 - e^{-\beta_{12}t} \right) \right\} \times \\ \exp \left\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} \left(1 - e^{-\beta_{12}t} \right) \right\}. \quad (2.24)$$

A função de risco é dada por,

$$h(t) = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} \left(1 - e^{-\beta_{12}t} \right). \quad (2.25)$$

Na Figura 2.3, temos casos especiais da função de risco (2.25). Observamos uma grande flexibilidade de ajuste.

Figura 2.3: Funções de risco 2.25 com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$, respectivamente. $(I = RG(10; 5; 1; 0, 1; 0, 1; 0, 9), II = RG(1, 5; 1, 5; 1; 0, 1; 0, 1; 0, 2), III = RG(5; 0, 5; 1; 0, 1; 0, 1; 0, 2), IV = RG(4; 2, 2; 0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 2))$.

Capítulo 3

Função de Verossimilhança

A informação que os dados contêm a respeito dos parâmetros do modelo é expressa a partir da função de verossimilhança, e pode-se escrevê-la para os diferentes esquemas amostrais.

3.1 Dados Observados Completos e na Ausência de Covariável

Considerando-se uma amostra aleatória $T_1, \dots, T_n$, observada completamente (dados sem censuras). A função de verossimilhança para o modelo de sobrevivência pode ser escrita na forma,

$$L(\Theta|t) = \prod_{i=1}^n (f_{t_i}|\Theta), \quad (3.1)$$

onde Θ representa o vetor de parâmetros do modelo e $(f_{t_i}|\Theta)$ é a função densidade de probabilidade do modelo.

3.1.1 Modelo Weibull Exponenciada

A função de verossimilhança de $\Theta = (\alpha, \theta, \sigma)$ para o modelo Weibull-Exponenciada com função densidade de probabilidade (2.1) é dada por

$$L(\Theta|t) = \alpha^n \theta^n \sigma^{-n\alpha} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right]^{\theta-1}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Modelo IDB

A função de verossimilhança para $(\Theta := \delta, \beta, \theta)$ para o modelo IDB com função densidade de probabilidade (2.5) é dada por

$$L(\Theta|t) = \exp \left\{ - \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \right\} \prod_{i=1}^n \left[\frac{(1 + \beta t) \delta t_i + \theta}{(1 + \beta t)^{\beta+1}} \right]. \quad (3.3)$$

3.1.3 Modelo Potência Exponencial

A função de verossimilhança para $\Theta = (\alpha, \beta)$ para o modelo Potência-Exponencial com função densidade de probabilidade (2.7) é dada por,

$$L(\Theta|t) = \beta^n \alpha^{-n\beta} \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \exp \left\{ n + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right\}. \quad (3.4)$$

3.1.4 Modelo de Ryu

A função de verossimilhança para $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ para o Modelo de Ryu, considerando $T = \min(T_1, T_2)$ e a função densidade dada em (2.15) é dada por,

$$L(\Theta|t) = \left\{ \prod_{i=1}^n (\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t_i}) \right\} \exp \left\{ \theta_1 n - \theta_2 \sum_{i=1}^n t_i - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-\theta_3 t_i} \right\}. \quad (3.5)$$

3.1.5 Modelo Generalizado de Ryu

A função de verossimilhança para $\Theta = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12})$ para o Modelo Generalizado de Ryu, considerando $T = \min(T_1, T_2)$ e função densidade dada em (2.24) pode ser escrita na forma

$$L(\Theta|t) = \prod_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 f_j(t_i | \Theta) \right\} S(t_i | \Theta), \quad (3.6)$$

onde,

$$\begin{cases} f_1(t | \Theta) = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1}; \\ f_2(t | \Theta) = \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1}; \\ f_3(t | \Theta) = \lambda_{12} (1 - e^{-\beta_{12} t}). \end{cases} \quad (3.7)$$

Considerando a função de sobrevivência dada em (2.23), pode-se escrever a função de verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\Theta|t) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \lambda_{12} + \lambda_1 \alpha_1 t_i^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t_i^{\alpha_2-1} - \lambda_{12} e^{-\beta_{12} t_i} \right\} \times \\ &\exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_1 t_i^{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \lambda_2 t_i^{\alpha_2} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} (1 - e^{-\beta_{12} t_i}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2 Dados Observados Completos e na Presença de Covariável

Considerando-se uma amostra aleatória $T_1, \dots, T_n$ observada completamente (dados sem censura) e que, associado a T_i , exista um vetor de covariáveis $x_i^t = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$; $i = 1, \dots, n$; $k \geq 2$. A função de verossimilhança para o modelo de sobrevivência pode ser escrita na forma,

$$L(\Theta|t, x) = \prod_{i=1}^n f(t_i | \Theta, x_i), \quad (3.9)$$

onde Θ representa o vetor de parâmetros do modelo e $f(t_i|\Theta, x_i)$ é a função densidade de probabilidade do modelo na presença de uma covariável.

3.2.1 Introdução de Covariável ao Modelo de Ryu

Uma questão de interesse aqui é verificar a influência de covariável associada aos dados estudados na mudança da taxa de risco do Modelo de Ryu (2.4.1). Isto é motivado pelo fato já observado em (2.4.2) onde a taxa de risco do modelo muda do limite inferior $\theta_2 = \theta_1\theta_3$ para o superior θ_2 lentamente ou rapidamente, conforme diminui ou aumenta o valor do parâmetro θ_3 . Sendo assim, há interesse em observar a influência de covariável diretamente no parâmetro θ_3 .

Em análise de sobrevivência, as covariáveis podem ser introduzidas no modelo por meio de diferentes formas. Uma forma bastante utilizada é dada por (ver Lawless 1982, p. 283)

$$g(x) = e^{x^t \beta_j}, \quad (3.10)$$

onde β_j representa o vetor de parâmetros da regressão e $x^t = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis regressoras.

Para o Modelo de Ryu (2.4.1) a função de risco definida em (2.17), considerando a presença de covariáveis introduzidas no modelo de acordo com (3.10), considerando ainda que a covariável influencie diretamente o parâmetro θ_3 , ou seja,

$$\theta_3 = e^{\beta x}, \quad (3.11)$$

onde β representa o vetor de parâmetros da regressão e $x = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis regressoras pode ser escrita da forma:

$$h(t|x) = \theta_2 = \theta_1 e^{\beta x - c^t x^t t}. \quad (3.12)$$

Para o Modelo Generalizado de Ryu (2.4.3) a função de risco definida em (2.25),

considerando a presença de covariáveis introduzidas no modelo de acordo com (3.10), considerando ainda que a covariável influencie diretamente o parâmetro β_{12} , ou seja,

$$\beta_{12} = e^{\beta x}, \quad (3.13)$$

onde β representa o vetor de parâmetros da regressão e $x = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis regressoras pode ser escrita da forma:

$$h(t|x) = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1 - e^{-e^{\beta x} t}). \quad (3.14)$$

Poderiam ser considerados outros modelos de regressão para os Modelos de Ryu e Generalizado de Ryu, afetando também os outros parâmetros de cada Modelo. Aqui, porém, será assumido que a covariável $\mathbf{x}$ afeta somente o parâmetro θ_3 , no caso do Modelo de Ryu, e somente β_{12} no caso do Modelo Generalizado de Ryu.

3.2.2 Modelo de Ryu

Para o Modelo de Ryu (2.4.1), assumindo a relação (3.11), a função de verossimilhança para $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \beta)$, considerando $T = \min(T_1, T_2)$ numa amostra observada completa (dados sem censura) é dada por,

$$L(\Theta|(t, \mathbf{x})) = \left\{ \prod_{i=1}^n (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i - e^{\beta x_i} t_i}) \right\} \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{i=1}^n t_i + n\theta_1 - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{\beta x_i - e^{\beta x_i} t_i} \right\}. \quad (3.15)$$

3.2.3 Modelo Generalizado de Ryu

Para o Modelo Generalizado de Ryu (2.4.3), assumindo a relação (3.13), a função de verossimilhança para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta$, considerando $T = \min(T_1, T_2)$, é dada por

$$L(\Theta|t, x) = \prod_{i=1}^n \left(\lambda_1 \alpha_1 t_i^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t_i^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} (1 - e^{-e^{\beta x_i} t_i}) \right) \times$$

$$\exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_1 t_i^{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \lambda_2 t_i^{\alpha_2} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n t_i + \lambda_{12} \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i} (1 - e^{-e^{\beta x_i} t_i}) \right\}. \quad (3.16)$$

3.3 Dados Censurados à Direita na Presença de Co-variável

Considerando-se uma amostra aleatória $T_1, \dots, T_n$ onde T_i representa o tempo de falha ou tempo de censura de cada indivíduo em estudo e que, associado a T_i , exista um vetor de covariáveis $x_i^T = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$; $i = 1, \dots, n$; $k \geq 2$. Denotando o número de falhas observadas por r , os conjuntos de indivíduos que falharam e foram censurados, respectivamente por, F e C e seja Θ o vetor de parâmetros da distribuição $f(t_i | \Theta, x_i)$. A função de verossimilhança é dada por,

$$L(\Theta | t, x) = \prod_{i \in F} f(t | \Theta, x) \prod_{i \in C} S(t | \Theta, x), \quad (3.17)$$

onde $f(t | \Theta, x)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória T e $S(t | \Theta, x)$ é a função de sobrevivência dado a covariável x .

3.3.1 Modelo de Ryu

Para o Modelo de Ryu (2.4.1), considerando $T = \min(T_1, T_2)$ com censura à direita, considerando ainda a relação (3.11), onde $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$; $k \geq 2$, a função de verossimilhança para θ_1 , θ_2 e β é dada por,

$$L(\Theta | (t, x)) = \left\{ \prod_{i=1}^r (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i - e^{\beta x_i} t_i}) \right\} \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{i=1}^n t_i + n\theta_1 - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{\beta x_i - e^{\beta x_i} t_i} \right\}. \quad (3.18)$$

3.3.2 Modelo Generalizado de Ryu

Para o Modelo Generalizado de Ryu (2.4.3), considerando $T = \min(T_1, T_2)$ com censura à direita, e a relação (3.13), onde $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$; $k \geq 2$, a função de verossimilhança para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2$ e β é dada por,

$$L(\Theta|t, x) = \prod_{i=1}^r \left(\lambda_1 \alpha_1 t_i^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t_i^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} \left(1 - e^{-e^{\beta x_i} t_i} \right) \right) \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_1 t_i^{\alpha_1} - \sum_{i=1}^n \lambda_2 t_i^{\alpha_2} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n t_i + \lambda_{12} e^{-\beta x_i} (1 - e^{-e^{\beta x_i} t_i}) \right\}. \quad (3.19)$$

As estimativas dos vetores de parâmetros dos modelos podem ser obtidas por maximização direta da função log-verossimilhança via métodos numéricos de resolução de sistemas não lineares. As inferências podem ser feitas com base na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, isto é, $\hat{\underline{\theta}} \sim \mathcal{N}(\underline{\theta}; I^{-1}(\hat{\underline{\theta}}))$; onde $I(\underline{\theta})$ é a matriz de informação de Fisher.

Capítulo 4

Análise Bayesiana

Considerando a função de verossimilhança dada por (3.17) e uma densidade a priori $\pi(\theta)$, a densidade a posteriori é dada por,

$$\pi(\theta \mid D) = \frac{L(\theta)\pi(\theta)}{\int L(\theta)\pi(\theta)d\theta}, \quad (4.1)$$

onde $D = (t_1, \dots, t_n)$ representa o conjunto de dados considerados.

4.1 Dados Observados Completos e Ausência de Co-variáveis

4.1.1 Modelo Weibull exponenciada

Para inferência bayesiana vamos considerar as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \theta &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \sigma &\sim \Gamma(a_3, b_3), \end{aligned} \quad (4.2)$$

com a_i e b_i conhecidos, $i = 1, 2, 3$, onde $\Gamma(a_i, b_i)$ denota uma distribuição gama com média $\frac{a_i}{b_i}$ e variância $\frac{a_i}{(b_i)^2}$. Além disso, supor que α , θ e σ são independentes.

Combinando (3.2) e (4.2) obtém a distribuição a posteriori conjunta para α , θ e σ dada por

$$\pi(\alpha, \theta, \sigma \mid \mathcal{D}) \propto \alpha^{n+a_1-1} \theta^{n+a_2-1} \sigma^{-n\alpha+a_3-1} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha - b_1 \alpha - b_2 \theta - b_3 \sigma \right\} \times \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right)^{\theta-1}. \quad (4.3)$$

As distribuições condicionais completas necessárias para o algoritmo de Gibbs são dadas por:

$$\pi(\alpha \mid \theta, \sigma, \mathcal{D}) \propto \alpha^{n+a_1-1} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha - b_1 \alpha \right\} \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right)^{\theta-1}, \quad (4.4)$$

$$\pi(\theta \mid \alpha, \sigma, \mathcal{D}) \propto \theta^{n+a_2-1} \exp \{-b_2 \theta\} \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right)^{\theta-1}, \quad (4.5)$$

$$\pi(\sigma \mid \alpha, \theta, \mathcal{D}) \propto \sigma^{-n\alpha+a_3-1} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha - b_3 \sigma \right\} \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \right)^{\theta-1}. \quad (4.6)$$

4.1.2 Modelo IDB

Para inferência bayesiana considera-se as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned} \delta &\sim \Gamma(c_1, d_1), \\ \beta &\sim \Gamma(c_2, d_2), \\ \theta &\sim \Gamma(c_3, d_3), \end{aligned} \quad (4.7)$$

com c_i e d_i conhecidos, $i = 1, 2, 3$, supor ainda que δ , β e θ são independentes entre elas.

Combinando (3.3) e (4.7) obtém a distribuição a posteriori conjunta para δ , β e θ , dada por

$$\pi(\delta, \beta, \theta \mid \mathcal{D}) \propto \delta^{c_1-1} \beta^{c_2-1} \theta^{c_3-1} \exp \left\{ -d_1 \delta - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2} - d_2 \beta - d_3 \theta \right\} \Psi_n(\delta, \beta, \theta), \quad (4.8)$$

onde $\Psi_n(\delta, \beta, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{(1+\beta t) \delta t_i + \theta}{(1+\beta t)^{\frac{y_i}{\beta} + 1}}$.

As distribuições condicionais completas são dadas por:

$$\pi(\delta \mid \beta, \theta, \mathcal{D}) \propto \delta^{c_1-1} \exp \left\{ -d_1 \delta - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2} \right\} \Psi_n(\delta, \beta, \theta), \quad (4.9)$$

$$\pi(\beta \mid \delta, \theta, \mathcal{D}) \propto \beta^{c_2-1} e^{-d_2 \beta} \Psi_n(\delta, \beta, \theta), \quad (4.10)$$

$$\pi(\theta \mid \beta, \mathcal{D}) \propto \theta^{c_3-1} e^{-d_3 \theta} \Psi_n(\delta, \beta, \theta). \quad (4.11)$$

4.1.3 Modelo Potência Exponencial

Considere as densidades a priori para α e β independentes dadas por

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \Gamma(e_1, f_1), \\ \beta &\sim \Gamma(e_2, f_2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

com e_i e f_i conhecidos, $i = 1, 2$.

Combinando (3.4) e (4.12), pelo teorema de Bayes pode-se mostrar que a densidade a posteriori conjunta é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta \mid \mathcal{D}) \propto \beta^{n+e_2-1} \alpha^{-n\beta+e_1-1} \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \exp \left\{ n + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n e \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - f_1 \alpha - f_2 \beta \right\}. \quad (4.13)$$

As condicionais completas necessárias para o algoritmo Gibbs são dadas por

$$\pi(\alpha \mid \beta, \mathcal{D}) \propto \alpha^{-n\beta+e_1-1} \exp \left\{ n + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n e (t_i/\alpha)^\beta - f_1 \alpha \right\}, \quad (4.14)$$

$$\pi(\beta \mid \alpha, \mathcal{D}) \propto \beta^{n+e_2-1} \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \exp \left\{ n + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n e (t_i/\alpha)^\beta - f_2 \beta \right\}. \quad (4.15)$$

4.1.4 Modelo de Ryu

Novamente vamos considerar o modelo de Ryu com dados $T = \min(T_1, T_2)$. Para inferência bayesiana considera-se as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \theta_2 &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \theta_3 &\sim \Gamma(a_3, b_3),\end{aligned}\tag{4.16}$$

onde a_i e b_i são conhecidos, assumir também que θ_1, θ_2 e θ_3 são independentes.

Combinando (3.5) e (4.16), obtém a distribuição a posteriori conjunta para θ_1, θ_2 e θ_3 a qual é dada por

$$\begin{aligned}\pi(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \mathcal{D}) &\propto \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1\theta_1} \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2\theta_2} \theta_3^{a_3-1} e^{-b_3\theta_3} \left\{ \prod_{i=1}^n (\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t_i}) \right\} \times \\ &\exp \left\{ \theta_1 n - \theta_2 \sum_{i=1}^n t_i - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-\theta_3 t_i} \right\}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

As condicionais completas necessárias para o algoritmo de Gibbs são dadas por,

$$\pi(\theta_1 \mid \theta_2, \theta_3, \mathcal{D}) \propto \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1\theta_1} \times \Psi_1(\underline{\theta}),\tag{4.18}$$

com

$$\Psi_1(\underline{\theta}) = \exp \left\{ \theta_1 n - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-\theta_3 t_i} + \sum_{i=1}^n \ln(\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t_i}) \right\},$$

$$\pi(\theta_2 \mid \theta_1, \theta_3, \mathcal{D}) \propto \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2\theta_2} \times \Psi_2(\underline{\theta}),\tag{4.19}$$

com

$$\Psi_2(\underline{\theta}) = \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n \ln(\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t_i}) \right\},$$

$$\pi(\theta_3 \mid \theta_1, \theta_2, \mathcal{D}) \propto \theta_3^{a_3-1} e^{-b_3\theta_3} \times \Psi_3(\underline{\theta}),\tag{4.20}$$

com

$$\Psi_3(\underline{\theta}) = \exp \left\{ -\theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-\theta_3 t_i} + \sum_{i=1}^n \ln(\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t_i}) \right\}.$$

Observa-se que neste caso, pode-se utilizar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar amostras da distribuição a posteriori conjunta.

4.1.5 Introdução de uma Variável Artificial (ou Latente)

Para simplificar as distribuições à posteriori podemos considerar a introdução de variáveis latentes $\underline{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i})$, $i = 1, \dots, n$ as quais transformam o modelo em componentes independentes. Deste modo, o cálculo das densidades marginais à posteriori de Θ , necessárias para a implementação dos algoritmos de simulação de amostras do tipo MCMC, são bastante facilitados. A variável $\underline{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i})$, $i = 1, \dots, n$ segue uma distribuição multinomial, onde $v_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, 3$ se t_i for considerado como originado de uma população com função de densidade de probabilidade f_j e $\sum_{j=1}^3 v_{ij} = 1$. Deste modo, $\underline{v}_i \sim MULT(h_{1i}, h_{2i}, h_{3i})$, $i = 1, 2, \dots, n$, uma distribuição multinomial de parâmetros h_{1i} , h_{2i} e h_{3i} , onde,

$$h_{ij} = \frac{f_j(t_i | \underline{\theta})}{\sum_{j=1}^3 f_j(t_i | \underline{\theta})},$$

onde $j = 1, 2, 3$; $\sum_{j=1}^3 h_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Assim,

$$\pi(\underline{v}_i | h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}) \propto h_{1i}^{v_{1i}} h_{2i}^{v_{2i}} h_{3i}^{v_{3i}}, \text{ onde } h_{3i} = 1 - h_{1i} - h_{2i}.$$

Portanto,

$$\pi(\underline{v}_i | h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}) \propto \prod_{j=1}^3 \left[\frac{f_j^{v_{ji}}(t_i | \underline{\theta})}{\sum_{j=1}^3 f_j(t_i | \underline{\theta})} \right],$$

pois, $\sum_{j=1}^3 v_{ji} = 1$.

Observar que a introdução dessas variáveis latentes é usada no método iterativo dado o valor dos parâmetros em cada iteração. Para cada iteração subsequente, deve-se gerar novas variáveis latentes, como será feito usando métodos MCMC na análise bayesiana do modelo proposto.

4.1.6 Modelo Generalizado de Ryu

Neste modelo, considerou-se a introdução de variáveis artificiais, descrita na seção 4.1.5. A função de verossimilhança para Θ é dada por

$$L(\Theta | \underline{t}, \underline{e}) \propto \lambda_1^{r_1} \alpha_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \alpha_2^{r_2} \lambda_{12}^{r_{12}} \times \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\beta_{12} t_i}\right)^{c_{12}} \times \exp \left\{ \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} - \lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n t_i + n \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} \sum_{i=1}^n e^{-\beta_{12} t_i} \right\}, \quad (4.21)$$

onde, $r_j = \sum_{i=1}^n v_{ji}$; $j = 1, 2, 3$; $R_j = \sum_{i=1}^n v_{ji} \ln(t_i)$; $j = 1, 2$.

Considerando para $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$ as distribuições a priori dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \alpha_2 &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \beta_{12} &\sim \Gamma(a_3, b_3), \\ \lambda_1 &\sim \Gamma(a_4, b_4), \\ \lambda_2 &\sim \Gamma(a_5, b_5), \\ \lambda_{12} &\sim \Gamma(a_6, b_6), \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde a_i, b_i , $i = 1, \dots, 6$ são conhecidos. As distribuições condicionais a posteriori completas necessárias para o algoritmo Gibbs-Sampling e Metropolis-Hastings são dadas por,

$$\pi(\alpha_1 | \Theta_{(-1)}, \underline{t}, \underline{e}) \propto \alpha_1^{r_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \times \Psi_1(\Theta), \quad (4.23)$$

onde,

$$\Psi_1(\Theta) = \exp \left\{ r_1 \ln \alpha_1 + \alpha_1 R_1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right\}.$$

$$\pi(\alpha_2 \mid \Theta_{(2)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \times \Psi_2(\Theta), \quad (4.24)$$

onde,

$$\Psi_2(\Theta) = \exp \left\{ r_2 \ln \alpha_2 + \alpha_2 R_2 - \lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right\}.$$

$$\pi(\beta_{12} \mid \Theta_{(3)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \beta_{12}^{a_3-1} e^{-b_3 \beta_{12}} \times \Psi_3(\Theta), \quad (4.25)$$

onde,

$$\Psi_3(\Theta) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n v_{3i} \ln (1 - e^{-\beta_{12} t_i}) + \frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} \left(n - \sum_{i=1}^n e^{\beta_{12} t_i} \right) \right\}.$$

$$\pi(\lambda_1 \mid \Theta_{(4)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_4 + r_1, b_4 + \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right), \quad (4.26)$$

$$\pi(\lambda_2 \mid \Theta_{(5)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_5 + r_2, b_5 + \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} \right), \quad (4.27)$$

$$\pi(\lambda_{12} \mid \Theta_{(6)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_6 + r_3, b_6 + \sum_{i=1}^n t_i + \frac{1}{\beta_{12}} \sum_{i=1}^n e^{\beta_{12} t_i} - \frac{n}{\beta_{12}} \right), \quad (4.28)$$

onde, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, e
 $\Theta_{(i)} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \theta_6)$.

Pode-se observar que α_1 , α_2 e β_{12} podem ser gerados usando o algoritmo Metropolis-Hastings.

4.2 Dados Observados Completamente na Presença de Covariáveis

4.2.1 Modelo de Ryu

Novamente considerando o modelo de Ryu, com parâmetros $(\theta_1, \theta_2, \beta)$ onde β é dado em (3.11), com dados observados completamente $t_i = \min(t_{1i}, t_{2i})$ e que, associado a T_i , exista um vetor de covariáveis $x_i^t = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$. Para inferência bayesiana considera-se as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \theta_2 &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \beta &\sim \Gamma(a_3, b_3),\end{aligned}\tag{4.29}$$

onde a_i e b_i são conhecidos, assumir também que θ_1, θ_2 e β são independentes.

A posteriori conjunta para θ_1, θ_2 e β , onde $\theta_3 = e^{\beta x}$ é dada por,

$$\begin{aligned}\pi(\theta_1, \theta_2, \beta \mid \mathcal{D}) &\propto \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1 \theta_1} \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2 \theta_2} \beta^{a_3-1} e^{-b_3 e^{\beta x_i}} \left\{ \prod_{i=1}^n (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} t_i}) \right\} \times \\ &\exp \left\{ \theta_1 n - \theta_2 \sum_{i=1}^n t_i - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-e^{\beta x_i} t_i} \right\}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

As distribuições condicionais completas para o algoritmo de Gibbs são dadas por,

$$\pi(\theta_1 \mid \theta_2, \beta, \mathcal{D}) \propto \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1 \theta_1} \times \Psi_1(\underline{\theta}),\tag{4.31}$$

com

$$\Psi_1(\underline{\theta}) = \exp \left\{ \theta_1 n - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-e^{\beta x_i} t_i} + \sum_{i=1}^n \ln (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} t_i}) \right\},$$

$$\pi(\theta_2 \mid \theta_1, \beta, \mathcal{D}) \propto \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2 \theta_2} \times \Psi_2(\underline{\theta}),\tag{4.32}$$

com

$$\Psi_2(\underline{\theta}) = \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n \ln (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\alpha_1 x_i} t_i}) \right\},$$

$$\pi(\beta \mid \theta_1, \theta_2, \mathcal{D}) \propto e^{\beta x_i a_{i+1}-1} e^{-b_3 e^{\beta x_i}} \times \Psi_3(\theta), \quad (4.33)$$

com

$$\Psi_3(\underline{\theta}) = \exp \left\{ -\theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-e^{\beta x_i} t_i} + \sum_{i=1}^n \ln (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} t_i}) \right\}.$$

Observa-se que neste caso, pode-se usar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar amostras da distribuição a posteriori conjunta.

4.2.2 Modelo Generalizado de Ryu

Neste modelo, considerou-se a introdução de variáveis artificiais, descrita na seção (4.1.5). A função de verossimilhança para Θ é dada por

$$L(\Theta \mid \underline{t}, \underline{v}) \propto \lambda_1^{r_1} \alpha_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \alpha_2^{r_2} \lambda_{12}^{r_3} \times \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-e^{\beta x_i} t_i} \right)^{v_{3i}} \times \\ \exp \left\{ \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} - \lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n t_i + n \frac{\lambda_{12}}{e^{\beta x_i}} - \frac{\lambda_{12}}{e^{\beta x_i}} \sum_{i=1}^n e^{-e^{\beta x_i} t_i} \right\}, \quad (4.34)$$

onde, $r_j = \sum_{i=1}^n v_{ji}$; $j = 1, 2, 3$. $R_j = \sum_{i=1}^n v_{ji} \ln(t_i)$; $j = 1, 2$.

Considerar para $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, a distribuição a priori dada por,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \alpha_2 &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \beta &\sim \Gamma(a_3, b_3), \\ \lambda_1 &\sim \Gamma(a_4, b_4), \\ \lambda_2 &\sim \Gamma(a_5, b_5), \\ \lambda_{12} &\sim \Gamma(a_6, b_6), \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde a_i, b_i são conhecidos. Para escrever as distribuições condicionais a posteriori, definir

$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, e

$\Theta_{(i)} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \theta_6)$. Assim, temos,

$$\pi(\alpha_1 \mid \Theta_{(1)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \times \Psi_1(\Theta), \quad (4.36)$$

onde,

$$\Psi_1(\Theta) = \exp \left\{ r_1 \ln \alpha_1 + \alpha_1 R_1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right\},$$

$$\pi(\alpha_2 \mid \Theta_{(2)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \times \Psi_2(\Theta), \quad (4.37)$$

onde,

$$\Psi_2(\Theta) = \exp \left\{ r_2 \ln \alpha_2 + \alpha_2 R_2 - \lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} \right\},$$

$$\pi(\beta \mid \Theta_{(3)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto e^{\beta x_i} \alpha_3^{-1} e^{-b_3 e^{\beta x_i}} \times \Psi_3(\Theta), \quad (4.38)$$

onde,

$$\Psi_3(\Theta) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n v_{3i} \ln \left(1 - e^{-e^{\beta x_i} t_i} \right) + \frac{\alpha_{12}}{e^{\beta x_i}} \left(n - \sum_{i=1}^n e^{e^{\beta x_i} t_i} t_i \right) \right\},$$

$$\pi(\lambda_1 \mid \Theta_{(4)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_4 + r_1, b_4 + \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right), \quad (4.39)$$

$$\pi(\lambda_2 \mid \Theta_{(5)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_5 + r_2, b_5 + \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} \right), \quad (4.40)$$

$$\pi(\lambda_{12} \mid \Theta_{(6)}, \underline{t}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_6 + r_3, b_6 + \sum_{i=1}^n t_i + \frac{1}{e^{\beta x_i}} \sum_{i=1}^n e^{e^{\beta x_i} t_i} - \frac{n}{e^{\beta x_i}} \right). \quad (4.41)$$

Observa-se que α_1 , α_2 e β serão gerados usando o algoritmo Metropolis-Hastings.

4.3 Dados Censurados à Direita na Presença de Co-variáveis

4.3.1 Introdução de Variáveis Artificiais (ou Latentes)

No caso em que os dados apresentam censura, para simplificar as distribuições à posteriori dos Modelo de Ryu e Ryu Generalizado, foi considerada a introdução variáveis artificiais $\mathbf{w}$ (ver por exemplo, Tanner & Wong, 1987), que transforma uma função de verossimilhança de dados incompletos para uma função de verossimilhança de dados iid (independentes e identicamente distribuídos). Gera-se independentemente para cada observação, $i = 1, \dots, n$ um componente (w_i) da variável $\mathbf{W}$, que é truncada em t_{ih} para o caso em que a observação for censurada à direita e $w_i = t_i$ se for observado exatamente (sem censura) (ver Kuo & Peng, 1995). Portanto, considerando o seguinte roteiro:

- (i) se o tempo de vida do i -ésimo indivíduo for observado exatamente em t_i , considerando $w_i = t_i$ e a função de verossimilhança pode ser escrita como em (4.27) para o Modelo de Ryu e (4.30) para o Modelo Generalizado de Ryu;
- (ii) se o tempo de vida do i -ésimo indivíduo for censurado à direita em t_{ih} , então pode-se gerar w_i da densidade truncada:

$$f(w_i)/[1 - F(t_{ih})], I[t_{ih} < w_i < \infty],$$

ou seja,

$$w_i = F^{-1}F(t_{ih}|\mathbf{x},\Theta) + U[1 - F(t_{ih}|\mathbf{x},\Theta)],$$

onde, $U \sim U(0, 1)$ e $F(t_{ih}|\mathbf{x},\Theta)$ é a função distribuição acumulada do modelo de t_{ih} dado $\mathbf{x}$ e Θ , sendo Θ o vetor de parâmetros do modelo.

Como nem sempre consegue-se obter analiticamente a F^{-1} , dado $\mathbf{x}$, t_{ih} e Θ , considera-se,

- (i) calcula-se $F(t_{ih}|\mathbf{x},\Theta)$;
- (i) gera-se um valor de U de uma distribuição $U(0,1)$;
- (iii) calcula-se $v_i = F(t_{ih}|\mathbf{x},\Theta) + U[1 - F(t_{ih}|\mathbf{x},\Theta)]$, na forma, $w_i = F^{-1}(v_i)$, ou seja, w_i é a única raiz de $F(w_i) = v_i$.

Para encontrar os valores de w_i foi utilizado o método numérico de Newton. Gera-se w_i independentemente para cada observação; portanto a função de verossimilhança do modelo é dada por,

$$L(\Theta|(\mathbf{W}, \mathbf{x})) = \prod_{i=1}^n \{f(w_i|\mathbf{x}_i, \Theta)\}. \quad (4.42)$$

4.3.2 Modelo de Ryu

Considerando a introdução da variável artificial descrita em (4.3.1), pode-se escrever a função de verossimilhança para o modelo de Ryu na forma:

$$L(\Theta|(\mathbf{W}, \mathbf{x})) = \left\{ \prod_{i=1}^n (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i - e^{\beta x_i} w_i}) \right\} \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{i=1}^n w_i + n\theta_1 - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{\beta x_i - e^{\beta x_i} w_i} \right\}. \quad (4.43)$$

Para inferência bayesiana considera-se as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \theta_2 &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \beta &\sim \Gamma(a_3, b_3), \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde a_i e b_i são conhecidos, assumir também que θ_1, θ_2 e β são independentes.

Combinando (4.43) e (4.44), obtém-se a distribuição a posteriori conjunta para θ_1, θ_2 e β a qual é dada por

$$\pi(\theta_1, \theta_2, \beta | \mathcal{D}) \propto \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1\theta_1} \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2\theta_2} \beta^{a_3-1} e^{-b_3\beta} \left\{ \prod_{i=1}^n (\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} w_i}) \right\} \times$$

$$\exp \left\{ \theta_1 n - \theta_2 \sum_{i=1}^n w_i - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i} w_i \right\}.$$

As distribuições condicionais completas para o algoritmo de Gibbs são dadas por,

$$\pi(\theta_1 \mid \theta_2, \beta, \mathcal{D}) \propto \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1 \theta_1} \times \Psi_1(\underline{\theta}), \quad (4.45)$$

com

$$\Psi_1(\underline{\theta}) = \exp \left\{ \theta_1 n - \theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i} w_i + \sum_{i=1}^n \ln(\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} w_i}) \right\},$$

$$\pi(\theta_2 \mid \theta_1, \beta, \mathcal{D}) \propto \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2 \theta_2} \times \Psi_2(\underline{\theta}), \quad (4.46)$$

com

$$\Psi_2(\underline{\theta}) = \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{i=1}^n w_i + \sum_{i=1}^n \ln(\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} w_i}) \right\},$$

$$\pi(\beta \mid \theta_1, \theta_2, \mathcal{D}) \propto e^{\beta x_i a_3 - 1} e^{-b_3 e^{\beta x_i}} \times \Psi_3(\underline{\theta}), \quad (4.47)$$

com

$$\Psi_3(\underline{\theta}) = \exp \left\{ -\theta_1 \sum_{i=1}^n e^{-e^{\beta x_i} w_i} + \sum_{i=1}^n \ln(\theta_2 - \theta_1 e^{\beta x_i} e^{-e^{\beta x_i} w_i}) \right\}.$$

Pode-se observar que neste caso, é necessário usar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar amostras da distribuição a posteriori conjunta.

4.3.3 Modelo Generalizado de Ryu

Para o modelo (2.4.4), considerando a introdução das variáveis artificiais $\mathbf{v}$ descrita em (4.1.5) e $\mathbf{w}$ descrita em (4.3.1), considerando presença de censura à direita e um vetor $\mathbf{x}$ de covariáveis associado a cada t , a função de verossimilhança para Θ é dada por

$$L(\Theta \mid (\mathbf{W}, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \propto \lambda_1^{r_1} \alpha_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \alpha_2^{r_2} \lambda_{12}^{r_3} \times \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\beta_{12} w_i} \right)^{v_{3i}} \times \\ \exp \left\{ \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n w_i^{\alpha_1} - \lambda_2 \sum_{i=1}^n w_i^{\alpha_2} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n w_i + n \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} - \lambda_{12} e^{\beta_{12}} \sum_{i=1}^n e^{-e^{\beta_{12} w_i}} \right\}, \quad (4.48)$$

onde, $r_j = \sum_{i=1}^n v_{ji}$; $j = 1, 2, 3$. $R_j = \sum_{i=1}^n v_{ji} \ln(w_i)$; $j = 1, 2$.

Considerando para $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, a distribuição a priori dada por:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \alpha_2 &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \beta &\sim \Gamma(a_3, b_3), \\ \lambda_1 &\sim \Gamma(a_4, b_4), \\ \lambda_2 &\sim \Gamma(a_5, b_5), \\ \lambda_{12} &\sim \Gamma(a_6, b_6),\end{aligned}\tag{4.49}$$

onde a_i, b_i são conhecidos. As distribuições condicionais a posteriori completas são dadas abaixo.

Definindo-se, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, e $\Theta_{(i)} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \theta_6)$, temos,

$$\pi(\alpha_1 \mid \Theta_{(1)}, \underline{w}, \underline{v}) \propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \times \Psi_1(\Theta),\tag{4.50}$$

onde,

$$\Psi_1(\Theta) = \exp \left\{ r_1 \ln \alpha_1 + \alpha_1 R_1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n w_i^{\alpha_1} \right\},$$

$$\pi(\alpha_2 \mid \Theta_{(2)}, \underline{w}, \underline{v}) \propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \times \Psi_2(\Theta),\tag{4.51}$$

onde,

$$\Psi_2(\Theta) = \exp \left\{ r_2 \ln \alpha_2 + \alpha_2 R_2 - \lambda_2 \sum_{i=1}^n w_i^{\alpha_2} \right\},$$

$$\pi(\beta \mid \Theta_{(3)}, \underline{w}, \underline{v}) \propto e^{\beta x_i a_3 - 1} e^{-b_3 e^{\beta x_i}} \times \Psi_3(\Theta),\tag{4.52}$$

onde,

$$\Psi_3(\Theta) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n v_{3i} \ln \left(1 - e^{-e^{\beta x_i} w_i} \right) + \frac{\alpha_{12}}{e^{\beta x_i}} \left(n - \sum_{i=1}^n e^{e^{\beta x_i} w_i} \right) \right\},$$

$$\pi(\lambda_1 \mid \Theta_{(4)}, \underline{w}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_4 + r_1, b_4 + \sum_{i=1}^n w_i^{\alpha_1} \right),\tag{4.53}$$

$$\pi(\lambda_2 \mid \Theta_{(5)}, \underline{w}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_5 + r_2, b_5 + \sum_{i=1}^n w_i^{\alpha_2} \right), \quad (4.54)$$

$$\pi(\lambda_{12} \mid \Theta_{(6)}, \underline{w}, \underline{v}) \propto \Gamma \left(a_6 + r_3, b_6 + \sum_{i=1}^n w_i + \frac{1}{e^{\beta x_i}} \sum_{i=1}^n e^{e^{\beta x_i} w_i} - \frac{n}{e^{\beta x_i}} \right), \quad (4.55)$$

Observa-se que α_1 , α_2 e β serão gerados usando o algoritmo Metropolis-Hastings.

4.3.4 Método Bayesiano para seleção de Modelos

Em análise Bayesiana, para seleccionar o modelo que melhor se ajusta a cada conjunto de dados, podemos utilizar a técnica das densidades preditivas condicionais ordenadas (CPO) para $t_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ dado $\underline{t}_{(i)} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$.

A densidade preditiva para t_i dado o vector $\underline{t}_{(i)}$ é dada por:

$$C_i = f(t_i \mid \underline{t}_{(i)}) = \int f(t_i \mid \theta) \pi(\theta \mid \underline{t}_{(i)}) d\theta, \quad (4.56)$$

onde $\pi(\theta \mid \underline{t}_{(i)})$ é a densidade a posteriori de θ dado $\underline{t}_{(i)}$.

Utilizando as amostras geradas pelo algoritmo Gibbs Sampling-Metropolis, $f(t_i \mid \underline{t}_{(i)})$ pode ser aproximada pela estimativa de Monte Carlo,

$$\widehat{f(t_i \mid \underline{t}_{(i)})} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R f(t_i \mid \theta^{(r)}), \quad (4.57)$$

onde R é o número de amostras $\theta^{(r)}$ geradas pelo algoritmo.

Pode-se utilizar C_i para seleccionar os modelos. Uma forma é considerar gráficos de C_i versus i , ($i = 1, \dots, n$) para os diferentes modelos, onde maiores valores de C_i indicam o melhor modelo. Outra forma é escolher o modelo cujo produto de C_i seja máximo, ou seja, $C(l) = \prod_{i=1}^n C_i(l)$, onde l é o índice do modelo. Neste trabalho, são considerados: $l = 1$ = Weibull exponenciada, $l = 2$ = Modelo IDB, $l = 3$ = Potência exponencial, $l = 4$ = Modelo de Ryu e $l = 5$ = Generalizado de Ryu.

Capítulo 5

Aplicações

Nesta seção apresenta-se 3 exemplos de aplicação para ilustrar a metodologia proposta.

No primeiro exemplo, para os dados observados completos e sem covariável da Tabela(5.1), foram considerados os modelos Weibull- Exponenciada (2.1), Modelo IIB (2.2), Potência Exponencial (2.3), Modelo de Ryu (2.4.2) e Modelo Generalizado de Ryu (2.4.4).

No segundo exemplo, para os dados simulados com covariável, chamados aqui de Dados I (ver Apêndice A, Tabela 6), foram considerados o Modelo de Ryu e o Modelo Generalizado de Ryu. Em segundo lugar, para os dados na Tabela (5.2.2), foi ajustado o Modelo Generalizado de Ryu.

No terceiro exemplo, para os dados com covariável e censurados à direita, chamados aqui de Dados II (ver Apêndice A, Tabela 6.1), também foram considerados o Modelo de Ryu e o Modelo Generalizado de Ryu.

Para cada distribuição considerada para os dados foi feita uma análise clássica baseada em estimadores de máxima verossimilhança e intervalos de confiança assintóticos e uma análise Bayesiana com o uso de priori informativa. As estimativas de máxima verossimilhança foram encontradas utilizando a rotina NLPRR do módulo IML-SAS (Sta-

tistical Analysis System) que utiliza o método iterativo de Newton-Raphson para maximizar a função objetivo. Para a análise Bayesiana foi utilizado o OX -An Object-Oriented Matrix Language para o modelo Generalizado de Ryu, e para os demais modelos o módulo IML-SAS através do método de simulação MCMC, mais especificamente algoritmo Gibbs-Sampling (ver por exemplo, Gelfand & Smith, 1990) e Metropolis-Hastings(ver por exemplo, Smith & Roberts, 1993).

Para o ajuste dos modelos Weibull-Exponenciada, IDB, Potência-Exponencial, e Modelo de Ryu, no primeiro exemplo, foram geradas duas cadeias separadas de 10.000 iterações das quais excluiu-se as 2000 primeiras, considerando-se as iterações de 5 em 5, totalizando uma amostra final com $S = 3202$ pontos. Para o ajuste do Modelo Generalizado de Ryu, e para o Modelo de Ryu nos exemplos 2 e 3, foram geradas 3 cadeias separadas de 10.000 iterações das quais excluiu-se as 5000 primeiras, considerando as iterações de 10 em 10, totalizando uma amostra final com $S = 1503$ pontos.

A convergência das amostras geradas pelo algoritmo Gibbs com Metropolis-Hastings foi monitorada utilizando o método proposto por Gelman & Rubin (1992) o qual baseia-se na técnica de análise de variância. Para cada modelo são apresentados um resumo das estimativas, onde em cada tabela apresenta-se as médias a posteriori, intervalos de credibilidade de 95% , as estimativas dos fatores de redução de escala potencial $\hat{R}$ (veja, Gelman & Rubin, 1992), onde observou-se convergência para todas as amostras ($\sqrt{\hat{R}} < 1.1$), estimativas de máxima verossimilhança (EMV) e intervalos de confiança assintóticos, respectivamente.

5.1 Exemplo 1 - Dados Observados Completos e na Ausência de Covariável

Neste exemplo, foi considerado o conjunto de 50 dados introduzidos por Aarset (1987), consistindo dos tempos de vida de 50 componentes (ver Tabela 5.1). Aos dados foram ajustados os os modelos Weibull- Exponenciada (2.1), Modelo IDB (2.2), Potência Exponencial (2.3), Modelo de Ryu (2.4.1) e Modelo Generalizado de Ryu (2.4.3) e ao final foi considerado um método Bayesiano para seleção de modelos baseado nas preditivas

ordenadas já apresentado na seção (4.3.4)

Tabela(5.1): *Tempos de vida de 50 componentes*

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6	7	11	12	18	18
18	18	18	21	32	36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	67	72	75	79	82	82	83	84	84	84	85
85	85	85	85	86	86									

As estatísticas descritivas do conjunto de dados apresentados na Tabela (1) são dadas por: média = 45,6860; mediana = 48,5000; variância = 1078.

5.1.1 Weibull Exponenciada

Considerando o modelo (2.1) foram utilizadas as densidades a priori (4.2) com $\alpha \sim \Gamma(265, 100)$, $\theta \sim \Gamma(8, 52)$, $\sigma \sim \Gamma(26492, 290)$. A Tabela (5.1.1) apresenta as médias a posteriori, intervalos de credibilidade de 95% , as estimativas dos fatores de redução de escala potencial $\hat{R}$ (veja, Gelman e Rubin, 1992), estimativas de máxima verossimilhança e intervalos de confiança assintóticos, respectivamente.

Tabela (5.1.1). *Sumário a posteriori e E.M.V para o modelo Weibull-exponenciada*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
α	2.8565	(2.5137;3.1613)	0.9998	5.4122	(5.4114;5.4130)
θ	0.2136	(0.1155;0.2946)	0.9997	0.1269	(0.1148;0.1390)
σ	91.1892	(90.1352;92.2589)	0.9998	91.5055	(91.5046;91.5063)

Observa-se na Tabela (5.1.1) que $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$ indicando a convergência . Nota-se ainda uma grande diferença entre os valores estimados no caso bayesiano e os valores dos *E.M.V*, especialmente para α . Diferentes valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori não levaram a resultados muito diferentes.

5.1.2 Modelo IDB

Considerando o modelo (2.2), foram utilizadas as densidades a priori (4.7), isto é, $\delta \sim \Gamma(33.30, 73770)$, $\beta \sim \Gamma(0.88, 1.29)$, $\theta \sim \Gamma(1.48, 7.30)$. A Tabela (5.1.2) apresenta as médias a posteriori, intervalos de credibilidade de 95% , as estimativas dos fatores de redução de escala potencial $\hat{R}$ (veja, Gelmann e Rubin, 1992), estimativas de máxima verossimilhança e intervalos de confiança assintóticos, respectivamente.

Tabela (5.1.2). *Sumário a posteriori e E.M.V para o modelo IDB*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
δ	0.0006	(0.0005;0.0008)	0.9997	0.0004	(0.0003;0.0005)
β	2.7575	(2.4243;3.0359)	1.001	2.5546	(0.7988;4.3104)
θ	0.1502	(0.0942;0.2284)	1.0019	0.1814	(0.0859;0.2769)

Observa-se na Tabela (5.1.2) que $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$ indicando a convergência. Observa-se também que as estimativas bayesianas e clássicas são bastante parecidas, porém com o comprimento do intervalo de credibilidade 95% menor do que o intervalo de confiança 95%. A mudança dos hiperparâmetros das distribuições a priori para δ , β e θ não levaram à grandes diferenças nas inferências a posteriori.

5.1.3 Modelo Potência Exponencial

Considerando o modelo (2.3) foram utilizadas as densidades a priori (4.12) com $\alpha \sim \Gamma(739.15, 10)$, $\beta \sim \Gamma(82.28, 100)$. A Tabela (5.1.3) apresenta as médias a posteriori, intervalos de credibilidade de 95% , as estimativas dos fatores de redução de escala potencial $\hat{R}$ (veja, Gelmann e Rubin, 1992), estimativas de máxima verossimilhança e intervalos de confiança assintóticos, respectivamente.

Tabela (5.1.3). *Sumário a posteriori e E.M.V para o modelo Potência exponencial*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
α	74.0088	(68.8836;79.1357)	0.9997	73.91483	(68.36374;79.4659)
β	0.8342	(0.6930;0.8982)	1.0005	0.82809	(0.75369;0.90248)

Observa-se na Tabela (5.1.3) que $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$ indicando a convergência . Observa-se também que as estimativas bayesiana e clássicas são bastante parecidas neste caso.

5.1.4 Modelo de Ryu

Considerando o modelo (4), foram utilizadas as densidades a priori (4.16) gama com $\theta_1 \sim \Gamma(20000; 100)$, $\theta_2 \sim \Gamma(280; 1000)$ e $\theta_3 \sim \Gamma(1, 82952; 100000)$. Os valores escolhidos para os hiperparâmetros foram baseados a partir de uma cuidadosa análise preliminar dos dados. A Tabela (5.1.4) apresenta os resumos das estimativas encontradas para o modelo de Ryu.

A Figura 5.1 apresenta as densidades a posteriori marginais para θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Tabela (5.1.4): *Sumário a posteriori e E.M.V para o modelo de Ryu*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
θ_1	201,4074	(198,6175;203,8958)	1,0002	201,2109	(198,2515;204,1704)
θ_2	0,2617	(0,2376;0,2949)	1,0005	0,2338	(0,1478;0,3197)
θ_3	0,0010	(0,0010;0,0011)	0,9999	0,00109	(0,0006;0,0015)

5.1.5 Modelo Generalizado de Ryu

Considerando o modelo (5), foram utilizadas as densidades a priori (4.22) com $\alpha_1 \sim \Gamma(100; 100)$, $\alpha_2 \sim \Gamma(100; 100)$, $\beta_{12} \sim \Gamma(100; 100)$, $\lambda_1 \sim \Gamma(100; 1000)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(100;$

1000), $\lambda_{12} \sim \Gamma(200; 1000)$. Os valores dos hiperparâmetros foram escolhidos a partir de uma análise preliminar dos dados. A Tabela (5.1.5) apresenta os resumos das estimativas encontradas para o modelo Generalizado de Ryu. Neste caso, não foi possível encontrar as estimativas de máxima verossimilhança pelo método adotado previamente para os outros modelos. Observa-se aqui um problema numérico de convergência. Assim, a análise Bayesiana do modelo é muito importante para a obtenção das inferências. Uma análise de sensibilidade foi utilizada considerando outros valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori.

Tabela (5.1.5). *Sumário a posteriori para o modelo Generalizado de Ryu*

	Gibbs-Metropolis		
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$
α_1	0,1987	(0,17177;0,22772)	0,99947
α_2	0,48163	(0,36831;0,64187)	1,00525
β_{12}	0,89737	(0,72355;1,08605)	1,00138
λ_1	0,09300	(0,07657;0,11138)	0,99918
λ_2	0,08648	(0,06358;0,10722)	1,00312
λ_{12}	0,01131	(0,00621;0,01538)	1,00134

Figura 5.1: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo de Ryu para os dados de Aarset.

Figura 5.2: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo Generalizado de Ryu para os dados de Aarset.

5.1.6 Discriminação dos Modelos para os dados de Aarset

Para seleccionar o melhor modelo, foi utilizada a técnica escrita na seção (5.2.2). Com isso, foram calculados os valores de $C(l) = 1/\Pi_l^m + C_l(l)$, onde l indexa modelo ($l = 1$, Weibull exponenciada; $l = 2$, modelo IDB; $l = 3$, Potência exponencial; $l = 4$, modelo de Ryu; $l = 5$, Generalizado de Ryu). Os resultados estão na Tabela (5.1.6).

Figura 5.3: Funções de risco para diferentes modelos com as estimativas bayesianas para os dados de Aarset.

Observa-se na Tabela (5.1.6) que o melhor modelo é o Generalizado de Ryu. A

Figura (5.3) apresenta as funções de risco para vários modelos.

Assim, conclui-se que o uso do Modelo Generalizado de Ryu leva à grandes ganhos na obtenção de melhores inferências considerando os dados da Tabela (5.1).

Tabela (5.1.6). *Valores do índice geral $C(l)$*

Modelo	$C(l) = \prod_{i=1}^n C_i(l)$
1	1,17e-101
2	1,28e-100
3	1,01e-102
4	1,72e-115
5	2,33e-096

5.2 Exemplo 2 - Dados Observados Completamente com Covariável

Neste exemplo, primeiramente, para os dados simulados com covariável, chamados aqui de Dados I (ver Apêndice A, Tabela 6), foram ajustados o Modelo de Ryu e o Modelo Generalizado de Ryu.

Em segundo lugar, para os dados na Tabela (5.2.2), foram ajustados o Modelo Generalizado de Ryu.

5.2.1 Conjunto de Dados Simulados

Neste exemplo, considerando os dados simulados com covariável, chamados aqui de Dados I (ver Apêndice A, Tabela (6)), foram ajustados o Modelo de Ryu e o Modelo Generalizado de Ryu e escolhido o melhor modelo.

Modelo de Ryu

Considerando o modelo (2.4.1), foram utilizadas as densidades a priori (4.29) com $\theta_1 \sim \Gamma(8000, 10000)$, $\theta_2 \sim \Gamma(9500, 10000)$, $\beta \sim \Gamma(1000, 10000)$. A Tabela (5.2.1) apresenta os resumos das estimativas encontradas para o Modelo de Ryu. Neste caso, não obteve-se os resultados clássicos assintóticos precisos, especialmente no caso do parâmetro β .

A Figura (5.4) apresenta as densidades a posteriori marginais para os parâmetros do modelo.

Tabela (5.2.1). *Sumário a posteriori para o Modelo de Ryu para dados 2*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
θ_1	0.8011	(0.7836;0.8187)	1.0042	0.8202	(0.7486;0.8917)
θ_2	0.9510	(0.9319;0.9704)	1.0001	0.8955	(0.8645;0.9263)
β	0.1011	(0.0950;0.1074)	1.0031	0.001	(-0.063457;0.063457)

Figura 5.4: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo de Ryu estimados em (5.2.1).

Modelo Generalizado de Ryu

Considerando o modelo (2.4.3), foram utilizadas as densidades a priori (4.35) com $\alpha_1 \sim \Gamma(365; 100)$, $\alpha_2 \sim \Gamma(293; 1000)$, $\beta \sim \Gamma(573; 1000)$, $\lambda_1 \sim \Gamma(11.5; 1000)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(34; 1000)$, $\lambda_{12} \sim \Gamma(610; 1000)$. A Tabela (5.2.2) apresenta os resumos das estimativas encontradas para o Modelo Generalizado de Ryu. Neste caso, as estimativas bayesianas e clássicas são bastante parecidas. A Figura (5.5) apresenta as densidades a posteriori marginais para os parâmetros do modelo.

Tabela (5.2.2). *Sumário a posteriori para o Modelo Generalizado de Ryu*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
α_1	3.6610	(3.2970;4.0236)	0.99947	3.653	(3.1866;4.1195)
α_2	0.2951	(0.2607;0.3280)	1.00525	0.2932	(0.2038;0.3826)
β	0.5791	(0.5331;0.6263)	1.00138	0.5732	(0.4265;0.7201)
λ_1	0.0139	(0.0084;0.0208)	0.99947	0.0115	(0.0033;0.0197)
λ_2	0.0347	(0.0246;0.0465)	1.00525	0.0339	(0.0215;0.0464)
λ_{12}	0.4726	(0.4379;0.5089)	1.00134	0.6106	(0.5445;0.6767)

Para escolher o melhor modelo foi utilizada a técnica de seleção de modelos descrita na Seção 4.3.4. Os resultados estão na Tabela (5.2.3).

Tabela (5.2.3). *Valores do índice geral $C(t)$*

Modelo	$C(t) = \prod_{i=1}^n C_i(t)$
4	8,46e-121
5	1,61e-094

Na Tabela (5.2.3) observa-se que o melhor modelo é o Modelo Generalizado de Ryu.

Figura 5.5: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do Modelo Generalizado de Ryu estimados em (5.2.2)

5.2.2 Conjunto de Dados Reais

Neste exemplo, foram considerados os dados da Tabela (5.2.4), que representa os tempos de sobrevivência e a contagem do número de glóbulos brancos de 17 pacientes que vieram a óbito em circunstâncias de leucemia *myelogenous* (Feigl & Zelen, 1965). Os tempos de sobrevivência, t_i são dados em semanas a partir da data do diagnóstico da doença e a variável regressora x_i representa o $\log_{10}$ (número de glóbulos brancos), na ocasião do diagnóstico.

Considerando o Modelo Generalizado de Ryu, foram utilizadas as densidades a priori (4.35) com $\alpha_1 \sim \Gamma(56; 100)$, $\alpha_2 \sim \Gamma(286; 100)$, $\beta \sim \Gamma(217; 1000)$, $\lambda_1 \sim \Gamma(65, 5; 1000)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(1; 100000)$, $\lambda_{12} \sim \Gamma(1; 10000)$. A Tabela (5.2.5) apresenta os resumos das estimativas encontradas para o modelo Generalizado de Ryu.

Foi utilizada uma análise de sensibilidade, considerando outros valores dos hiperparâmetros das distribuições a priori. Neste caso, observou-se que o aumento da variabil-

idade na escolha dos hiperparâmetros ocasiona problemas de convergência.

Na Tabela (5.2.5) observa-se novamente que as estimativas clássicas não são precisas, especialmente nos casos dos parâmetros λ_2, λ_{12} . Os métodos Bayesianos são, portanto, bastante importante para estimar os parâmetros do modelo.

Tabela(5.2.4): *Tempos de Sobrevivência*

t_i	wbc^*	x_i	t_i	wbc^*	x_i
65	2300	3.36	143	7000	3.85
156	750	2.88	56	9400	3.97
100	4300	3.63	26	32000	4.51
134	2600	3.41	22	35000	4.54
16	6000	3.78	1	100000	5.00
108	10500	4.02	1	100000	5.00
121	10000	4.00	5	52000	4.72
4	17000	4.23	65	100000	5.00
39	5400	3.73	—	—	—

Tabela (5.2.5). *Sumário a posteriori para o Modelo Generalizado de Ryu*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
α_1	0.5611	(0.4309;0.7047)	0,9999	0.5603	(0.4099;0.7105)
α_2	2.8599	(2.5495;3.1963)	1,0002	2.8629	(2.6018;3.1239)
β	0.2170	(0.1889;0.2466)	1,0013	0.2171	(-3.1720;3.6063)
λ_1	0.065	(0.0505;0.0821)	0,99998	0.0655	(0.0340;0.0969)
λ_2	0.01×10^{-8}	(0.0126;0.3466)	1.0002	$0.1e^{-9}$	(-1.84e ⁻⁸ ;2.02e ⁻⁶)
λ_{12}	$0.01e^{-6}$	(0.0025;0.3781)	1,0010	0.00001	(-0.0003;0.0034)

5.3 Exemplo 3 - Dados Censurados à Direita com Covariável

Neste Exemplo, foi considerado um conjunto de dados (ver Apêndice A, Tabela 6.1) simulados ao qual ajustou-se o Modelo de Ryu e o Modelo de Ryu Generalizado.

5.3.1 Modelo de Ryu

Considerando o modelo (2.4.2) foram utilizadas as densidades a priori (4.44) com $\theta_1 \sim \Gamma(65000, 10000)$, $\theta_2 \sim \Gamma(8500, 10000)$, $\beta \sim \Gamma(1000, 10000)$. A Tabela (5.3.1) apresenta os resumos das estimativas Bayesianas encontradas para o Modelo de Ryu. Novamente, neste caso, observa-se que as estimativas clássicas assintóticas não são precisas, principalmente no caso do parâmetro β .

A Figura 5.6 apresenta as densidades a posteriori marginais para os parâmetros do modelo.

Tabela (5.3.1). *Sumário a posteriori para Modelo de Ryu dados 1*

	Gibbs-Metrópolis			M.V	
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$	EMV	IC 95 %
θ_1	0.6511	(0.6253;0.6670)	1.0041	0.9284	(0.8538;1.003)
θ_2	0.8510	(0.8330;0.8694)	1.0032	1.0028	(0.9681;1.037)
β	0.1011	(0.0950;0.1074)	1.0004	0.0001	(-0.0589;0.0589)

5.3.2 Modelo de Ryu Generalizado

Considerando o modelo (2.4.4), foram utilizadas as densidades a priori (4.49) com $\alpha_1 \sim \Gamma(365; 100)$, $\alpha_2 \sim \Gamma(29.3; 100)$, $\beta \sim \Gamma(57.3; 100)$, $\lambda_1 \sim \Gamma(11.5; 10000)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(28; 1000)$, $\lambda_{12} \sim \Gamma(610; 1000)$. A Tabela (5.3.2), apresenta os resumos das estimativas

Bayesianas encontradas para o Modelo Generalizado de Ryu. Neste caso, não foi possível encontrar as estimativas de máxima verossimilhança através do método adotado.

Tabela (5.3.2). *Sumário a posteriori para o Modelo Generalizado de Ryu dados 1*

Gibbs-Metrópolis			
	Média	ICred. 95 %	$\hat{R}$
α_1	3.7242	(3.3346;4.0959)	0.99947
α_2	0.2970	(0.2012;0.4130)	1.00525
β	0.5731	(0.4350;0.7296)	1.00138
λ_1	0.0072	(0.0048;0.0098)	0.99947
λ_2	0.0367	(0.0252;0.0504)	1.00525
λ_{12}	0.5187	(0.4785;0.5591)	1.00134

Para escolher o melhor modelo foi utilizada a técnica de seleção de modelos descrita na Seção 4.3.4. Os resultados estão na Tabela (5.3.3).

Tabela (5.3.3). *Valores do índice geral $C(l)$*

Modelo	$C(l) = \prod_{i=1}^n \hat{C}_i(l)$
4	1.04e-125
5	4.73e-88

Na Tabela (5.3.3) observa-se que o melhor modelo é o Modelo Generalizado de Ryu.

Figura 5.6: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo de Ryu para as estimativas da Tabela (5.3.1)

Figura 5.7: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo Generalizado Ryu para as estimativas da Tabela (5.3.2).

Capítulo 6

Conclusões gerais

O uso de métodos MCMC para a análise Bayesiana de dados de sobrevivência com função de risco em forma de U (banheira) pode simplificar a obtenção das inferências de interesse para diferentes modelos paramétricos usados para analisar os dados.

Também foi observado que os modelos de Ryn e Ryn Generalizado podem ser bem ajustados a vários conjuntos de dados de sobrevivência com funções de risco em forma de U, conforme observa-se nos exemplos de aplicação introduzidos na seção (5).

Foram considerados também para o Modelo de Ryn e Modelo Generalizado de Ryn a presença de covariáveis e observações censuradas.

Assim tem-se uma nova classe de modelos para ser usada em análise de dados de sobrevivência.

Quanto às amostras geradas pelo algoritmo Gibbs sampling com Metropolis-Hastings, na maioria dos casos rapidamente foi verificada a convergência das amostras, todavia, para o Modelo de Ryn observou-se a necessidade de considerar novas reparametrizações afim de conseguir convergência mais rapidamente.

Além disso, podem ser utilizadas outras distribuições a priori para os parâmetros incorporando informações de especialistas ou de análise preliminar dos dados.

Na discriminação dos diferentes modelos a técnica Bayesiana baseada nas distribuições preditivas ordenadas proporciona muita facilidade em selecionar modelos.

Apêndice A

Dados Simulados

Neste apêndice são apresentados os conjuntos de dados simulados utilizados no capítulo (5).

A Tabela (6) representa o conjunto de Dados I, que consiste de 200 observações $t_1, \dots, t_n$ simulados a partir da distribuição dos mínimos do Modelo de Ryu, no qual foi considerado $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.2, 0.4, 1.0)$. O vetor de covariável $x_1, \dots, x_n$ foi incorporado aleatoriamente ao conjunto de dados simulados.

A Tabela (6.1) apresenta o conjunto de Dados II, que consiste de 200 observações $t_1, \dots, t_n$ simulados a partir da distribuição dos mínimos do Modelo de Ryu, no qual foi considerado $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.2, 0.4, 1.0)$. O vetor de covariável $x_1, \dots, x_n$ e a suposição de censura à direita foi incorporado aleatoriamente ao conjunto de dados simulados.

Tabela 6. Dados simulados - Dados I

t	x	t	x	t	x	t	x	t	x	t	x	t	x	t	x
0.2378	1	0.2385	1	0.3348	1	0.3925	1	0.4186	1	0.4384	1	0.4529	1	0.4551	1
3.8678	0	3.9529	0	3.9897	0	4.2687	0	4.2925	0	4.2938	0	4.4956	0	4.6199	0
0.4699	1	0.4785	1	0.5196	1	0.5231	1	0.5414	1	0.5542	1	0.5644	1	0.6570	1
0.6697	1	0.6846	1	0.6893	1	0.7023	1	0.7194	1	0.7347	1	0.7980	1	0.8019	1
0.8091	1	0.8129	1	0.8266	1	0.8512	1	0.8636	1	0.8914	1	0.9146	1	0.9314	1
0.9583	1	0.9655	1	0.9700	1	0.9715	1	0.9750	1	0.9965	1	0.9992	1	1.0089	1
0.0007	1	0.0073	1	0.0249	1	0.0266	1	0.0460	1	0.0715	1	0.1745	1	0.1749	1
1.0360	1	1.0451	1	1.0570	1	1.0873	1	1.0884	1	1.1115	1	1.1123	1	1.1143	1
1.1238	1	1.1246	1	1.1351	1	1.1450	1	1.1601	1	1.1639	1	1.1728	1	1.2248	1
1.2284	1	1.2431	1	1.2491	1	1.2565	1	1.2684	1	1.2741	1	1.2981	1	1.3299	1
3.4283	0	3.4315	0	3.4800	0	3.5525	0	3.6319	0	3.6645	0	3.8076	0	3.8515	0
1.3334	1	1.3903	1	1.3973	1	1.4097	1	1.4451	1	1.4705	1	1.4742	1	1.4826	1
1.4829	1	1.4895	1	1.4913	1	1.4940	1	1.5139	1	1.5146	1	1.5168	1	1.5530	1
2.9664	1	3.1023	0	3.1421	0	3.1731	0	3.1816	0	3.2910	0	3.3082	0	3.4162	0
1.5561	1	1.5567	1	1.5651	1	1.5789	1	1.5874	1	1.5900	1	1.6051	1	1.6266	1
1.6600	1	1.6744	1	1.6762	1	1.6957	1	1.7194	1	1.7228	1	1.7229	1	1.7387	1
1.7596	1	1.7795	1	1.7835	1	1.8054	1	1.8067	1	1.8380	1	1.8635	1	1.8746	1
1.8758	1	1.9177	1	1.9200	1	1.9552	1	1.9663	1	1.9786	1	1.9923	1	2.0058	1
2.0094	1	2.0121	1	2.0132	1	2.0377	1	2.0410	1	2.0515	1	2.0743	1	2.0774	1
2.1065	1	2.1259	1	2.1456	1	2.1474	1	2.1562	1	2.1584	1	2.1668	1	2.2140	1
2.2274	1	2.2340	1	2.2367	1	2.2989	1	2.3063	1	2.3065	1	2.3174	1	2.3734	1
2.3911	1	2.4016	1	2.4052	1	2.4169	1	2.4214	1	2.4308	1	2.4354	1	2.5026	1
2.5072	1	2.5086	1	2.5149	1	2.5319	1	2.5450	1	2.5611	1	2.5708	1	2.5900	1
2.6261	1	2.6273	1	2.6690	1	2.6822	1	2.6875	1	2.7119	1	2.7357	1	2.7651	1
2.7812	1	2.8047	1	2.8237	1	2.8366	1	2.8412	1	2.8706	1	2.8832	1	2.9078	1

Tabela 6.1. Dados simulados - Dados II

t	x	t	x	t	x	t	x	t	x	t	x	t	x	t	x
0.0007 1	0.0073 1	0.0249 1	0.0266 1	0.0460 1	0.0715 1	0.1745 1	0.1749 1								
0.2378 1	0.2385 1	0.3348 1	0.3925 1	0.4186 1	0.4384 1	0.4529 1	0.4551 1								
0.4699 1	0.4785 1	0.5196 1	0.5231 1	0.5414 1	0.5542 1	0.5644 1	0.6570 1								
0.6697 1	0.6846 1	0.6893 1	0.7023 1	0.7194 1	0.7347 1	0.7980 1	0.8019 1								
0.8091 1	0.8129 1	0.8266 1	0.8512 1	0.8636 1	0.8914 1	0.9146 1	0.9314 1								
0.9583 1	0.9655 1	0.9700 1	0.9715 1	0.9750 1	0.9965 1	0.9992 1	1 ⁺ (37) 1								
1.5139 0	1.5146 0	1.5168 0	1.5530 0	1.5561 0	1.5567 0	1.5651 0	1.5789 0								
1.5874 0	1.5900 0	1.6051 0	1.6266 0	1.6600 0	1.6744 0	1.6762 0	1.6957 0								
1.7194 0	1.7228 0	1.7229 0	1.7387 0	1.7596 0	1.7795 0	1.7835 0	1.8054 0								
1.8067 0	1.8380 0	1.8635 0	1.8746 0	1.8758 0	1.9177 0	1.9200 0	1.9552 0								
1.9663 0	1.9786 0	1.9923 0	2.0058 0	2.0094 0	2.0121 0	2.0132 0	2.0377 0								
2.0410 0	2.0515 0	2.0743 0	2.0774 0	2.1065 0	2.1259 0	2.1456 0	2.1474 0								
2.1562 0	2.1584 0	2.1668 0	2.2140 0	2.2274 0	2.2340 0	2.2367 0	2.2989 0								
2.3063 0	2.3065 0	2.3174 0	2.3734 0	2.3911 0	2.4016 0	2.4052 0	2.4169 0								
2.4214 0	2.4308 0	2.4354 0	2.5026 0	2.5072 0	2.5086 0	2.5149 0	2.5319 0								
2.5450 0	2.5611 0	2.5708 0	2.5900 0	2.6261 0	2.6273 0	2.6690 0	2.6822 0								
2.6875 0	2.7119 0	2.7357 0	2.7651 0	2.7812 0	2.8047 0	2.8237 0	2.8366 0								
2.8412 0	2.8706 0	2.8832 0	2.9078 0	2.9664 0	3 ⁺ (23) 0	-	-								

Apêndice B

Algoritmo Metropolis-Hastings

Quando as densidades condicionais marginais $\pi(\theta_\rho | \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{\rho-1}^{(1)}, \mathbf{w}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{x})$, não apresentam uma forma padrão conhecida, uma alternativa então é o uso do algoritmo Metropolis-Hastings.

Suponhamos então que desejamos simular amostras de uma destas distribuições condicionais não padronizadas, devemos explorar uma forma conhecida de $\pi(\bullet)$ (densidade à posteriori) para especificar uma densidade geradora de candidatos por exemplo, se $\pi(\Theta) \propto f(\Theta) \Psi(\Theta)$, onde $f(\Theta)$ é uma densidade conhecida que pode ser simulada e $\Psi(\Theta)$ é uniformemente limitado, daí consideramos $f(\Theta)$ como sendo o núcleo de transição do algoritmo para geração de candidatos.

Neste caso, a probabilidade de movimento só exige o cálculo da função $\Psi(\Theta)$, dado por:

$$\pi(\bullet) = \min \left\{ 1, \frac{\Psi(\Theta^{(m+1)})}{\Psi(\Theta^{(m)})} \right\}$$

A respeito da escolha da locação e da escala das distribuições geradoras, devemos saber que:

- a variabilidade da densidade geradora de candidatos afeta o comportamento da cadeia em pelo menos 2 dimensões, uma é a "taxa de aceitação" (porcentagem de vezes que uma mudança é feita para um novo ponto), e a outra é a região do espaço amostral que é coberto pela cadeia:

- se a variabilidade for muito grande, alguns dos candidatos gerados estarão distantes do valor atual e terão probabilidade pequena de aceitação (pois a ordenada do candidato é pequena em relação a ordenada perto da moda), e podendo assim convergir para um valor distante da moda. Isto acontece porque as distribuições condicionais são na maioria multimodais;

- a redução desta variabilidade corrige esse problema, mas se for muito pequena, a cadeia levará muito tempo para cobrir o suporte da densidade.

Apêndice C

Critério de Convergência

Para verificarmos se as amostras geradas pelos algoritmos amostrador de Gibbs com Metropolis-Hastings estão realmente convergindo para uma distribuição estacionária, utilizamos um algoritmo baseado na técnica proposta por Gelman e Rubin (1992), o qual considera pelo menos $k = 2$ cadeias paralelas com valores iniciais amostrados de uma distribuição bem comportada. Após as cadeias atingirem estacionariedade digamos na n -ésima iteração, consideramos então uma seleção $(\theta_j, \theta_{j+h}, \dots, \theta_{j+Nh})$ como uma amostra aleatória da distribuição desejada. Devemos assumir h razoavelmente grande de tal forma que 2 valores sucessivos de θ sejam independentes, assim teremos uma amostra *iid* (independente e identicamente distribuídos).

A convergência da simulação iterativa é monitorada estimando o fator em que a escala da distribuição deva ser reduzida se as simulações são feitas até o limite quando o número de iterações tende para o infinito ($N \rightarrow \infty$).

Se cada sequência tem comprimento $M + N$, descartamos as M primeiras amostras e ficamos com as N últimas, daí calculamos:

$$\frac{U}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{\theta}_{(i)} - \bar{\theta}_{..})^2}{(k-1)}$$

onde, $\bar{\theta}_{(i)}$ são as k médias baseadas nas N últimas iterações da sequência e,

$$W = \frac{\sum_{i=1}^k s_i^2}{k}$$

onde

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (\bar{\theta}_{(i,j)} - \bar{\theta}_{..})^2}{N-1}$$

Podemos observar que $\frac{U}{N}$ representa a variabilidade entre as k sequências e w representa a média das k variâncias dentro das sequências. Portanto, temos que a variância e a média da distribuição estacionária podem ser estimadas por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N-1}{N} W + \frac{1}{N} U$$

$$\hat{\mu} = \bar{\theta}_{..}$$

Portanto temos que a distribuição de θ condicionada aos dados tem aproximadamente uma distribuição t-Student com média $\mu = \bar{\theta}_{..}$ e desvio padrão dado por:

$$s = \sqrt{\hat{\nu}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{U}{kN}}$$

e graus de liberdade:

$$(g.l.) = \frac{2\hat{\nu}^2}{VAR(\nu)}$$

onde,

$$VAR(\nu) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \frac{1}{k} VAR(\sigma^2) + \left(\frac{k+1}{kN}\right)^2 +$$

$$\frac{2}{k-1} U^2 + \left(\frac{2(k+1)(N-1)}{kN}\right) \frac{N}{k} [cov(\sigma^2, \bar{\theta}_{i..}^2) - 2\bar{\theta}_{..}^2 cov(\sigma^2, \bar{\theta}_{i..})]$$

Com as variâncias e covariâncias estimadas, podemos estimar o fator de redução de escala potencial por:

$$\sqrt{R} = \sqrt{\left(\frac{\hat{\nu}}{\bar{W}}\right) \left(\frac{(g.l.)}{((g.l.)-2)}\right)};$$

esperamos que este valor convirja para 1 à medida que o número de iterações tende para o infinito ($N \rightarrow \infty$), caso não ocorra, devemos considerar mais simulações para melhorar a inferência sobre a distribuição de interesse, ou seja quando $\sqrt{R} \approx 1$ Geman & Rubin (1992) argumentam que as amostras selecionadas convergem em distribuição para a distribuição condicionada aos dados, e os pontos amostrais são *iid* (independentes e identicamente distribuídos).

Apêndice D

Programa Computacional

Neste apêndice, apresentamos um exemplo de programa computacional utilizado neste trabalho.

```

/*****
ENTRADA DE DADOS
*****/
data dados;
infile "dados.dat";
input t x@@;
run; proc iml;
use dados;
read all Vart,x;
n =nrow(t);
/***** Metropolis-Hastings *****/
ac1=0; ac2=0; ac3=0;
theta1=0.13; theta2=0.55; beta=0.51;
a1=150; b1=1000; a2=650; b2=1000; a3=50; b3=100;
ncadeias=3; niter=10000; burn = 1; passo = 1; n = nrow(t);
thet1out = j(niter,ncadeias,0); thet2out = j(niter,ncadeias,0);
betaout =j(niter,ncadeias,0);
/*****/
start funcao;
```



```

w1[k]=(1-exp(-theta2#w[k]+theta1-theta1#exp(-exp(beta#x[k])#w[k])))-
    v[k];
w2[k]=(theta2-theta1#exp(beta#x[k]-exp(beta#x[k])#w[k]))#
exp(-theta2#w[k]+theta1-theta1#exp(-exp(beta#x[k])#w[k]))+1e-5;
w3[k]= w1[k]/w2[k];
w4[k]=abs(w[k]-w3[k]);
w[k]=w4[k];
finish;
/*****/

    start newton; run funcao;
do vez=1 to maxiter
while (abs(w4[k])>1e-3);
run funcao;
end;
finish;
/*****/
maxiter=5; v=j(200,1,.); w=j(200,1,.);w1=w;
w2=w1;w3=w1;w4=w3;w5=w4;w6=w5;
/*****/
do j=1 to ncadeias;
do i=1 to niter;
/***** dados não censurados 1 parte *****/
do k=1 to 85;
v[k]=t[k];
w[k]=t[k];
end;
/***** calculo de v[k] *****/
do k=86 to 129;
v[k]=(1-exp(-theta2#t[k]+theta1-theta1#exp(-exp(beta#x[k])#t[k])))+
uniform(k)#exp(-theta2#t[k]+theta1- theta1#exp(-exp(beta#x[k])#t[k]));
end;
/***** ordenar v[k] *****/
do m=86 to 128;
do k=86 to 128;

```

```

if v[k]>v[k+1] then
do;
aux=v[k];
v[k]=v[k+1];
v[k+1]=aux;
end;
end;
end;
/***** calculo de wi *****/
do k=86 to 129;
w[k]=t[k-1];
run newton;
end;
/*****
/***** dados não censurados 2 parte *****/
do k=130 to 193;
v[k]=t[k];
w[k]=t[k];
end;
/***** calculo de v[k] *****/
do k=194 to 200;
v[k]=(1-exp(-theta2#t[k]+theta1-theta1#exp(-exp(beta#x[k])#t[k]))) +
uniform(k)#exp(-theta2#t[k]+theta1-theta1#exp(-exp(beta#x[k])#t[k]));
end;
/***** ordenar v[k] *****/
do m=194 to 199;
do k=194 to 199;
if v[k]>v[k+1] then
do;
aux=v[k];
v[k]=v[k+1];
v[k+1]=aux;
end;
end;
end;

```

```

end;
/***** calculo de wi *****/
do k=194 to 200;
w[k]=t[k-1];
run newton;
end;
/*****Metropolis-Hastings*****/
/***** /* theta1 */ *****/
theta1c=rangam(1,a1+1)/b1;
p1 = exp((-theta1c#n-theta1c#sum(exp(-exp(beta#x)#w)))+
sum(log(theta2-theta1c# exp(beta#x-exp(beta#x)#w))));
p2 = exp((-theta1#n-theta1#sum(exp(-exp(beta#x)#w)))+
sum(log(theta2-theta1# exp(beta#x-exp(beta#x)#w))));
prod1=p1-p2;
phi1=exp(prod1);
M1=min(phi1,0.99999);
U1=ranbin(1,1,M1);
theta1=theta1c#U1 + theta1#(1-U1);
if theta1=theta1c
then do;
ac1=ac1+1;
end;
else do;
ac1=ac1;
end;
end;
/*****
/* theta2 */
theta2c=rangam(1,a2+1)/b2+1e-3;
p1 = exp(-theta2c#sum(w)+sum(log(theta2c-theta1#exp(beta#x-
exp(beta#x)#w))));
p2 =exp(-theta2#sum(w)+sum(log(theta2-theta1#exp(beta#x-
exp(beta#x)#w))));
prod1=p1-p2;
phi1=exp(prod1);

```

```

M2=min(phi1,0.99999);
U2=ranbin(1,1,M2);
theta2=theta2c#U2 + theta2#(1-U2);
if theta2=theta2c then do;
ac2=ac2+1;
end;
else do; ac2=ac2;
end;
/***** /* beta */ *****/
betac=rangam(1,a3+1)/b3+1e-3;
p1 =exp(theta1#sum(exp(-exp(betac#x)#w))+
sum(log(theta2-theta1#exp(betac#x-exp(betac#x)#w)))));
p2 = exp(theta1#sum(exp(-exp(beta#x)#w))+
sum(log(theta2-theta1#exp(beta#x-exp(beta#x)#w)))));
prod1=p1-p2;
phi1=exp(prod1);
M3=min(phi1,0.99999);
U3=ranbin(1,1,M3);
beta=betac#U3 + beta#(1-U3);
if beta=betac then do;
ac3=ac3+1;
end;
else do; ac3=ac3;
end;
thet1out[i,j]= theta1;
thet2out[i,j]= theta2;
betaout[i,j]= beta;
theta1=thet1;
theta2=thet2;
beta=beta;
/*print theta1c theta1 theta2c theta2 betac beta U1 M1 U2 M2 U3 M3;*/
end;
end;
medthet1=mean(thet1out[:,j]);

```

```
medthet2=mean(thet2out[:,]);
medbeta=mean(betaout[:,]);
print medthet1 medthet2 medbeta ac1 ac2 ac3;
thet1out = thet1out[do(burn,niter,passo),];
thet2out = thet2out[do(burn,niter,passo),];
betaout= betaout[do(burn,niter,passo),];
create saida1 from thet1out;
append from thet1out;
create saida2 from thet2out;
append from thet2out;
create saida3 from betaout;
append from betaout;
quit;
quit; /*****/
```

Referências bibliográficas

- AARSETT, M.V.** *How to identify a bathtub hazard rate.* IEEE Transactions on Reliability, R-36, p. 106-108, 1987.
- BERGER, J.,O.; SUN, D.** *Bayesian analysis for the Poly-Weibull distribution.* Journal of the American Statistical Association, 88, p. 1412-1418, 1993.
- BERGER, J.,O.; SUN, D.** *Bayesian inference for a class of Poly-Weibull distributions.* In Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics - essays in Honor of Arnold Zellner, Edited by Berry, D.,A., Chaloner, K.M. and Geweke, J.K.,101-113, New York: Wiley, 1996.
- CHAN,V; MEEKER, W.Q.** *A Failure time model for infant mortality and wearout failure modes.* Iowa State University, Ames, 1997.
- FEIGL, P.; ZELEN,M.** *Estimation of exponential survival probabilities with concomitant information.* Biometrics, 21:826-838, 1965.
- GELFAND, A.E; SMITH, A.F.M.** *Sampling based approaches to calculating marginal densities.* Journal of the American Statistical Association, 85, p. 398-409, 1990.
- GELMAN, A.; RUBIN, B. D.** *Inference from iterative Simulation Using Multiple Sequences.* Statistical Science, n.4, p. 457-511, 1992.
- HJORTH, U.** *A Reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub shaped failure rates.* Technometrics, 22, p. 99-107, 1980.
- KALBFLEISCH, J.D.; PRENTICE, R.L.** *The statistical analysis of failure data.* New York: Wiley, 1980.
- KUO, L.;PENG,F.** *A mixture-model approach to the analysis of survival data.* Technical Report Number 95-31. dep. of Statistics Universidade of Connecticut, Storrs, 1995.
- LOUZADA-NETO, F.** *Polyhazard regression models for lifetime data.* Biometrics, 55, p. 1281-1285, 1999.
- MARSHALL, A.,W.; OLKIN, I.** *A multivariate exponential distribution.* Journal of the American Statistical Association, 62, p. 30-44, 1967.

MOESHBERGER, M.L. *Life teste under dependent competing causes of failure.* it-shape Technometrics, 16, p. 39-47, 1974.

MUDHOLKAR, G.S; SRIVASTAVA, D.K.,FREIMER,M. *The Exponenciaded Weibull family. A reanalysis of the bus - motor - failure data.* Tecnometrics , 4, p. 436-445, 1995.

MUDHOLKAR G.,S.; SRIVASTAVA, D.D; KOLLIA, G.,D. *A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data.* Journal of the American Satistical Association , 91, p. 1575-1583, 1996.

RAJARSHI, S.; RAJARSHI, M.,B. *Bathtub distributions: a review.* Communication in Statistics - Theory Methods, 17, p. 2597-2621, 1988.

RYU, K. *An extension of Marshall and Olkin's bivariate exponencial distribution.* Journal of the american Statistical Association, 424, p. 1458-1465, 1993.

SMITH,R.M.;BAIN,L.J. *An Exponential Power Life Testing Distribution.* Communications in Statistics. Part A - Theory and Methods, 4, p. 469-481, 1975.

SMITH,A.F.M; ROBERTS, G.O. *Bayesian computation via Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods.* Journal of the Royal Statistical Society B, 55, p. 3-23, 1993.

STACY,E.W. *A gencralization of the Gamma distribution.* Annals of Statistics, 33, p. 1187-1192, 1982.

TANNER, M.A.; WONG, W.H. *The calculation of posterior distributions via data argumentation with discussion.*Journal of the American Statistical Association, 82, p. 528-550, 1987.