**"ESTABILIDADE ABSOLUTA DOS MÉTODOS LINEARES
DE PASSO MÚLTIPLO PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS
DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE"**

MAURÍLIO BOAVENTURA

ORIENTADOR: Dr. JOSÉ ALBERTO CUNINATO

**Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências de
Computação e Matemática Computacional.**

SÃO CARLOS - 1989

Aos meus pais, Maria José e Armando, e a minha esposa Inês

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. José Alberto Cuminato por sua orientação dedicada, segura e simpática durante todo o período de preparação deste Trabalho.

Aos colegas do DANE e do Departamento de Matemática do IBILCE-UNESP, em especial às Professoras Aldenice Brito Pereira e Eliana Xavier Linhares de Andrade, pela colaboração e incentivo.

Aos Professores Alagacone Sri Ranga, Célia Maria Finazzi de Andrade, Marielza Jorge Fávaro e Neide Maria Bertoldi Franco do Departamento de Computação e Estatística do ICMEC-USP, pelos ensinamentos, colaboração e incentivos.

Aos amigos Heloisa Helena Marino da Silva e Paulo Fernando de Arruda Mancera, colegas de curso.

Aos professores, funcionários e colegas do ICMEC-USP, pela colaboração, estímulo e companheirismo.

A Maria Noêmia Thomazello, por gentilmente ter colaborado na revisão de parte da redação deste Trabalho.

às entidades CAPES e CNPq, pelo auxílio recebido.

às entidades CNPq e FAPESP, pela ajuda ao IBILCE-UNESP na obtenção de equipamentos, dos quais me beneficieei.

GLOSSÁRIO

ℓ^1 : representa o espaço das seqüências $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

ℓ^{∞} : representa o espaço das seqüências $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $|a_n| < C, \forall n \geq 0$.

C_0 : representa o espaço das seqüências $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$L^1(0, \infty)$: representa o espaço das funções contínuas $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\int_0^{\infty} |a(s)| ds < \infty.$$

■ : indica final de demonstração

∀ : indica qualquer que seja.

* : representa a operação de convolução para seqüências e funções:

- convolução de funções

$$c(t) = (a*b)(t) = \int_0^t a(t-s)b(s)ds, \quad \forall t \geq 0.$$

- convolução de seqüências

$$c_n = (a*b)_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j}b_j, \quad \forall n \geq 0.$$

ABSTRACT

The main purpose of this work is to show that linear multistep methods for Ordinary Differential Equations may be transformed into quadrature rules and how the stability properties of such methods is carried over to the context of numerical solution of Volterra Integral Equations. It is also shown that difficulties arise when we try to extended the class of test problems.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0 - INTRODUÇÃO	I
CAPÍTULO 1 - RESULTADOS PRELIMINARES	1
1.1. Considerações iniciais	1
1.2. Teorema da Existência e Unicidade de Solução	2
1.3. Teorema de Inversão de Wiener	7
1.4. Teorema de Hausdorff	20
1.4.1. Funções de variação limitada	20
1.4.2. Sequências de momentos	23
1.4.3. Teorema de Hausdorff	35
CAPÍTULO 2 - INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS	37
2.1. Solução por regras de quadratura	37
2.2. Solução por regras de quadratura redutíveis	39
CAPÍTULO 3 - ESTABILIDADE PARA A EQUAÇÃO LINEAR	56
3.1. Conceito de Estabilidade Absoluta	56
3.2. Análise da estabilidade de alguns métodos	61
3.2.1. Regra do trapézio repetida	61
3.2.2. Regra de Simpson repetida e trapézio	62
3.2.3. Regra do trapézio com regra de Simpson repetida	63
3.2.4. Regra de Simpson repetida com regra de Simpson 3/8	64
3.2.5. Regra de Simpson 3/8 repetida com regra de Simpson	65

3.3. Definições e resultados sobre estabilidade absoluta	65
CAPÍTULO 4 - ESTABILIDADE ABSOLUTA DOS MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO	73
4.1. Considerações iniciais	73
4.2. Versão discreta do teorema de Paley-Wiener	77
4.3. Resultados sobre estabilidade dos métodos lineares de passo múltiplo	88
4.4. Sistemas de Equações Integrais de Volterra de segunda espécie	101
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS NUMÉRICOS	116
5.1. Considerações iniciais	116
5.2. Aplicação do método de Simpson	118
5.3. Aplicação do método de Adams-Bashforth de 2 passos	120
5.4. Aplicação do método de Adams-Moulton de 3 passos	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	124

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar que os métodos lineares de passo múltiplo, para o tratamento de Problema de Valor Inicial de Equações Diferenciais Ordinárias, podem ser transformados em regras de quadratura, e como as propriedades de estabilidade de tais métodos se traduzem em estabilidade no contexto de solução numérica de Equações Integrais de Volterra. Também, mostrar as dificuldades decorrentes da tentativa de generalização da classe de problemas testes.

A solução numérica de uma equação integral de Volterra de segunda espécie, da forma:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds \quad (t \geq 0),$$

pode ser encontrada por métodos diretos, aqueles que são obtidos aproximando o termo integral por alguma regra de quadratura; e por métodos de quadratura redutíveis, que são obtidos de métodos lineares de passo múltiplo para o tratamento de Problemas de Valor Inicial de Equações Diferenciais Ordinárias.

Antes de aplicarmos um método numérico a uma equação integral, devemos nos certificar de que a solução da equação discretizada comporta-se como a solução do problema original. Em particular, desejamos saber se a solução numérica converge para zero ou permanece limitada se a solução exata

também apresenta o mesmo comportamento. Portanto, se faz necessário o desenvolvimento da teoria da estabilidade numérica dos métodos de discretização. Essa teoria aplica-se, em geral, para classes especiais de equações testes. Neste campo, muito esforço tem sido dispendido sobre a "equação teste básica":

$$y(t) = y_0 + \lambda \int_0^t y(s) ds \quad (\operatorname{Re}(\lambda) < 0),$$

que se reduz à equação diferencial ordinária:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0.$$

É natural que, equações que se reduzem a equações diferenciais ordinárias sejam propostas, uma vez que estas são casos especiais das equações integrais de Volterra.

Em aplicações, frequentemente encontramos equações integrais do tipo convolução:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t-s)f(s, y(s))ds \quad (t \geq 0).$$

Na análise da estabilidade, a seguir, consideraremos o caso linear:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t-s)y(s)ds \quad (t \geq 0).$$

Aplicando um método linear de passo múltiplo (ρ, σ) , chamado método (ρ, σ) -reduzível, para a equação linear acima, obtemos uma equação linear

discreta de convolução:

$$y_n = g_n + h \sum_{j=0}^n u_{n-j} K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0).$$

Nosso objetivo é a análise da estabilidade dessa equação.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 apresentamos os tipos básicos de equações integrais de Volterra, condições de existência e unicidade de solução para equações lineares de segunda espécie, os teoremas de inversão de Wiener e de Hausdorff que serão utilizados em capítulos posteriores, na demonstração de resultados importantes.

No Capítulo 2 descrevemos resumidamente os métodos de quadratura e mostramos como se obtém métodos (ρ, σ) -reduzíveis, para equações integrais de Volterra de segunda espécie, mostrando também que esses métodos são adequados ao tratamento de equações integrais.

No Capítulo 3 fazemos um breve histórico sobre o conceito de estabilidade absoluta e uma análise da mesma para a equação teste básica.

No Capítulo 4 apresentamos a versão discreta de resultados sobre o comportamento assintótico da solução de equações integrais de Volterra de tipo convolução, resultados sobre estabilidade absoluta dos métodos lineares de passo múltiplo para equações integrais de Volterra de segunda espécie e extensão dos resultados apresentados nos itens anteriores para sistemas de equações integrais de Volterra.

Finalmente, no capítulo 5 mostramos resultados numéricos obtidos da aplicação de métodos lineares de passo múltiplo à uma equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo de convolução.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As Equações Integrais de Volterra são classificadas em equações de primeira espécie,

$$\int_0^t K(t,s,y(s))ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1.1)$$

de segunda espécie,

$$y(t) - \int_0^t K(t,s,y(s))ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1.2)$$

e equações de terceira espécie,

$$f(t)y(t) - \int_0^t K(t,s,y(s))ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.1.3)$$

Nas equações (1.1.1), (1.1.2) e (1.1.3), as funções K , g e f são conhecidas e a função y deve ser determinada (ref. [BRUNNER-86]).

O presente trabalho está voltado principalmente para a análise

das propriedades de estabilidade das Equações Integrais Lineares de Volterra de segunda espécie, isto é, as equações da forma:

$$y(t) - \int_0^t K(t,s)y(s)ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1.4)$$

onde T é uma constante fixa;

$y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, é a função incógnita;

$g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, é uma função contínua e

$K(t,s)$ é uma função contínua para $0 \leq s \leq t \leq T$.

A função $K(t,s)$ é chamada núcleo. Se $K(t,s)$ puder ser expressa na forma $K(t,s) = K(t-s)$, então diremos que a equação é do tipo convolução.

Neste capítulo mostraremos três resultados importantes que serão utilizados posteriormente. O primeiro resultado é o Teorema de Existência e Unicidade de Solução das Equações Integrais Lineares de Volterra de Segunda Espécie, que é essencial para o nosso trabalho. O segundo é o Teorema de Inversão de Wiener; tal teorema será utilizado na demonstração de importantes resultados. Finalmente, o terceiro resultado é o Teorema de Hausdorff, referente a sequências de momentos.

1.2. TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Provaremos nesta seção que uma equação satisfazendo as condições da equação (1.1.4) admite uma única solução. Para tal precisamos dos seguintes resultados auxiliares:

TEOREMA 1.2.1. ([LIMA-70])

Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ converge uniformemente para uma função $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, então f é integrável e vale:

$$\int_a^b f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(s)ds. \quad \blacksquare$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em [LIMA-70].

O próximo resultado é conhecido como Desigualdade de Gronwall.

LEMA 1.2.1. ([BURTON-83])

Sejam $f, g : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ funções contínuas e seja c uma constante não negativa. Se

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

então

$$f(t) \leq c \cdot \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad \blacksquare$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [BURTON-83]

Mostraremos agora o teorema que garante a existência e a unicidade da solução, da equação integral (1.1.4).

TEOREMA 1.2.2. ([BURTON-83])

Sejam $g: [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $K: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ funções contínuas, onde $0 < \alpha \leq \infty$, $\Omega = \{(t, s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ e $T < \infty$. Se $0 < T < \alpha$, então a equação:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t, s)y(s)ds,$$

admite uma única solução $y(t)$ em $[0, T]$.

Prova :

Definimos uma sequência de funções $\{y_n(t)\}$ em $[0, T]$ por

$$\begin{cases} y_1(t) = g(t), \\ y_{n+1}(t) = g(t) + \int_0^t K(t, s)y_n(s)ds, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Sejam $L = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$ e $M = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |K(t, s)|$.

Consideremos a série:

$$y_1(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)), \quad (1.2.2)$$

e observe que suas somas parciais satisfazem:

$$s_n(t) = y_1(t) + \sum_{k=1}^n (y_{k+1}(t) - y_k(t)) = y_{n+1}(t).$$

Mostraremos agora, por indução, que:

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq \frac{L(Mt)^n}{n!}. \quad (1.2.3)$$

Para $n = 1$ em (1.2.1), temos:

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &= |g(t) + \int_0^t K(t,s)y_1(s)ds - g(t)| \\ &= \left| \int_0^t K(t,s)g(s)ds \right| \leq \int_0^t |K(t,s)| |g(s)|ds \leq \\ &\leq LMt, \end{aligned}$$

assim, mostramos que (1.2.3) é válido para $n = 1$. Supondo agora que (1.2.3) seja válido para $n = k$, isto é,

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq \frac{L(Mt)^k}{k!},$$

provaremos que também é válido para $n = k + 1$, ou seja,

$$|y_{k+2}(t) - y_{k+1}(t)| = |g(t) + \int_0^t K(t,s)y_{k+1}(s)ds - g(t) - \int_0^t K(t,s)y_k(s)ds|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^t K(t,s)(y_{k+1}(s) - y_k(s)) ds \right| \\
&\leq M \int_0^t |y_{k+1}(s) - y_k(s)| ds \\
&\leq M \int_0^t \frac{L(Ms)^k}{k!} ds \\
&= \frac{L(Mt)^{k+1}}{(k+1)!} .
\end{aligned}$$

Segue assim que cada termo da série (1.2.2) é majorado por $\frac{L(Mt)^n}{n!}$, o qual é um termo da série de Taylor de e^{Mt} que converge uniforme e absolutamente em $[0, T]$. Assim, a série (1.2.2) é uniformemente convergente em $[0, T]$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(t) = y_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1}(t) - y_k(t)) = y(t).$$

Agora,

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(t) = g(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t K(t,s) y_n(s) ds.$$

Pelo TEOREMA 1.2.1.,

$$\begin{aligned}
y(t) &= g(t) + \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} K(t,s) y_n(s) ds \\
&= g(t) + \int_0^t K(t,s) y(s) ds.
\end{aligned}$$

Portanto, $y(t)$ é uma solução de (1.1.4).

Para mostrar que $y(t)$ é a única solução de (1.1.4), vamos supor que existam duas, $y(t)$ e $z(t)$ definidas em $[0, T]$. Então, de (1.1.4) obtemos:

$$y(t) - z(t) = \int_0^t K(t, s)(y(s) - z(s))ds.$$

Assim,

$$|y(t) - z(t)| \leq M \int_0^t |y(s) - z(s)| ds,$$

que está na forma da desigualdade de Gronwall (LEMA 1.2.1.) com $c = 0$.

$$\text{Consequentemente, } |y(t) - z(t)| \leq ce^{Mt} = 0.$$

Portanto, a solução é única. ■

1.3. TEOREMA DE INVERSÃO DE WIENER

O Teorema de Wiener é um resultado sobre séries de Fourier absolutamente convergente. Para demonstrá-lo precisamos de alguns resultados preliminares sobre esse assunto. Para isso, consideremos uma função contínua $f(t)$ com série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad \text{no intervalo } [0, 2\pi],$$

onde cada coeficiente c_n é determinado pela seguinte expressão:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

A função $g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ius} ds$ é conhecida como transformada de Fourier da função f , no ponto u . Como podemos observar $c_n = \sqrt{2\pi} g(n)$.

DEFINIÇÃO 1.3.1

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = C < \infty$, então diremos que $f(t)$ tem série de Fourier absolutamente convergente, chamaremos de A a classe de tais funções e colocaremos: $C = A(f)$.

Para a classe das funções com série de Fourier absolutamente convergente temos os seguintes resultados:

LEMA 1.3.1. ([WIENER-33])

Se $f(t)$ e $g(t) \in A$, então $f(t) + g(t) \in A$ e $f(t)g(t) \in A$ e:

- 1) $A(f + g) \leq A(f) + A(g)$;
- 2) $A(f \cdot g) \leq A(f) \cdot A(g)$.

Prova:

$$\text{Sejam } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} \text{ e } g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{int}.$$

$$1) \quad A(f+g) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n + d_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |d_n| = A(f) + A(g).$$

$$2) \quad A(f.g) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^n d_{n-j} c_j \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |d_{n-j}| |c_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-j}|$$

Onde consideramos $d_{n-j} = 0$ para $n-j < 0$. Logo,

$$A(f.g) \leq A(f).A(g).$$

Voltaremos agora às funções com série de Fourier absolutamente convergente, onde o termo c_0 excede a soma dos módulos de todos os outros termos. Tais funções surgem de uma função arbitrária com série de Fourier absolutamente convergente somada a uma constante suficientemente grande.

LEMA 1.3.2. ([WIENER-33])

$$\text{Se } f(t) \in A \text{ e } \left| \int_{-N}^N f(s) ds \right| > N.A(f) \text{ então } \frac{1}{f(t)} \in A.$$

Prova :

$$\text{Por hipótese, } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} \text{ com } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = A(f) < \infty.$$

Logo,

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{c_0} \left[\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{c_0} e^{int}} \right]$$

$$= \frac{1}{c_0} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{c_0} e^{int} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{c_0} e^{int} \right]^2 - \dots \right].$$

Usando o LEMA 1.3.1., temos que:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{f}\right) &\leq \frac{1}{|c_0|} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_n}{c_0} \right| + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_n}{c_0} \right| \right]^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{|c_0|} \left[\frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_n}{c_0} \right|} \right] = \frac{1}{|c_0| - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|} = \\ &= \frac{1}{2|c_0| - \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|} = \frac{1}{2|c_0| - A(f)} = \frac{N}{2N|c_0| - NA(f)} = \\ &= \frac{N}{\left| \int_{-N}^N f(s) ds \right| - NA(f)} < \infty. \end{aligned}$$

LEMA 1.3.3. ([WIENER-33])

Se $f(t) \in A$ e $g_{a,b,c,d}(t)$ é definida por:

$$g_{a,b,c,d}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -N-\epsilon \leq t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{se } a \leq t \leq b; \\ 1 & \text{se } b \leq t \leq c; \\ \frac{d-t}{d-c} & \text{se } c \leq t \leq d; \\ 0 & \text{se } d \leq t \leq N-\epsilon \end{cases}$$

então, $f(t) \cdot g_{a,b,c,d}(t) \in A$ se $a < b < c < d$.

Prova:

O gráfico da função $g_{a,b,c,d}$ é:

O n -ésimo coeficiente de Fourier da função $g_{a,b,c,d}(t)$ é da ordem de n^{-2} , e portanto a série é absolutamente convergente. Logo, pelo LEMA 1.3.1. temos que $f(t) \cdot g_{a,b,c,d}(t) \in A$. ■

Para demonstrarmos o próximo resultado, precisaremos de algumas propriedades auxiliares. Tais propriedades podem ser encontradas, por exemplo, em [WIENER-33].

Propriedade 1.3.1:

Dado $\epsilon > 0$, existem constantes A e B positivas, que independem de ϵ , tal que:

$$\left| \frac{\cos(t\epsilon) - \cos(2t\epsilon)}{t^2 \epsilon} \right| \leq \frac{A}{B + t^2}.$$

Propriedade 1.3.2:

Se f é uma função integrável em $(-\infty, \infty)$, então:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(s-\eta) - f(s)| ds = 0.$$

Propriedade 1.3.3:

Se f é uma função contínua definida em $(-\infty, \infty)$, se anulando em $(-\infty, -\varepsilon)$ e (ε, ∞) , e $g(u)$ é a transformada de Fourier da f em $(-\infty, \infty)$, então

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} |g(n)| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)| ds.$$

LEMA 1.3.4. ([WIENER-33])

Se $f(t) \in A$, $\eta > 0$ e $f(t_0) = 0$, então podemos escolher $\varepsilon > 0$ tão pequeno que:

$$A(f(t) \cdot g_{t_0-2\varepsilon, t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon, t_0+2\varepsilon}(t)) < \eta.$$

Prova:

Sem perda de generalidade, podemos tomar $t_0 = 0$. Assim,

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0.$$

$$\text{Seja } g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{int}.$$

A transformada de Fourier da função $g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)$, assumindo que ela se anula fora do intervalo $(-\pi, \pi)$, é dada por:

$$g_1(u) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(u\varepsilon) - \cos(2u\varepsilon)}{u^2 \varepsilon}.$$

Temos que $d_n = \sqrt{2\pi} g_1(n)$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |d_n| &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sqrt{2\pi} g_1(n) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| 2 \frac{\cos(n\varepsilon) - \cos(2n\varepsilon)}{n^2 \varepsilon} \right| \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(n\varepsilon) - \cos(2n\varepsilon)}{n^2 \varepsilon} \right|. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 1.3.1, temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{B + n^2} = K < \infty.$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n| \leq K$, onde K é uma constante que independe de ε .

Agora, a transformada de Fourier da função $g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(e^{imt} - 1)$, é dada por:

$$g_2(u) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\cos((u-m)\varepsilon) - \cos(2(u-m)\varepsilon)}{(u-m)^2 \varepsilon} - \frac{\cos(u\varepsilon) - \cos(2u\varepsilon)}{u^2 \varepsilon} \right).$$

$$= g_1(u-m) - g_1(u).$$

$$\text{Assim, } d_{n-m} - d_n = \sqrt{2H} g_2(n).$$

$$\text{Logo, } \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-m} - d_n| = \sqrt{2H} \sum_{n=0}^{\infty} |g_2(n)|.$$

Pela Propriedade 1.3.3, temos que $\exists K_1 > 0$, de modo que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-m} - d_n| &\leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |g_2(u)| du \\ &= K_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{H}} \left(\frac{\cos((u-m)\epsilon) - \cos(2(u-m)\epsilon)}{(u-m)^2 \epsilon} - \frac{\cos(u\epsilon) - \cos(2u\epsilon)}{u^2 \epsilon} \right) \right| du. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 1.3.2, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-m} - d_n| &\leq K_1 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{H}} \frac{\cos((u-m)\epsilon) - \cos(2(u-m)\epsilon)}{(u-m)^2 \epsilon} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos(u\epsilon) - \cos(2u\epsilon)}{u^2 \epsilon} \right| du = 0. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que existe N suficientemente grande e $\eta > 0$, suficientemente pequeno, de modo que:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n| < \eta \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-m} - d_n| < \eta, \quad \text{para } m \leq N.$$

Seja $f(t) \cdot g_{-2s, -s, s, 2s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^n d_{n-j} c_j \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{\infty} d_{n-j} c_j \right|$$

onde consideramos $d_{n-j} = 0$, quando $n-j < 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N d_{n-j} c_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} d_{n-j} c_j \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N d_{n-j} c_j \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} d_{n-j} c_j \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N d_{n-j} c_j \right| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |c_j| \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-j}| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N d_{n-j} c_j \right| + \eta K_1 \\ &\leq \eta K_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N d_{n-j} c_j - \sum_{j=0}^N d_{n-j} + \sum_{j=0}^N d_n c_j \right| \\ &\leq \eta K_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N (d_{n-j} - d_n) c_j \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^N d_n c_j \right| \\ &\leq \eta K_1 + \sum_{j=0}^N |c_j| \sum_{n=0}^{\infty} |d_{n-j} - d_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |d_n| \left| \sum_{j=0}^N c_j \right| \end{aligned}$$

$$\leq \eta K1 + \eta K2 + K3 \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j - \sum_{j=N+1}^n a_j \right|$$

$$= \eta K1 + \eta K2 + K3 \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \right| \leq \eta K1 + \eta K2 + \eta K3$$

$$= \eta K4.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 0.$$

Isto é, dado $\eta > 0$, podemos escolher $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, de modo que:

$$A(f(t)g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)) < \eta.$$

LEMA 1.3.5. (WIENER-331)

Se $f(t) \in A$ e $f(t_0) \neq 0$, então existe uma função $g(t)$ coincidindo com $f(t)$ em alguma vizinhança de t_0 , pertencendo a A , e tal que $\frac{1}{g(t)} \in A$.

Prova:

Sem perda de generalidade podemos tomar $t_0 = 0$ e supor $f(0) > 0$. Definimos a função $g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)$ como no LEMA 1.3.3., e definimos a função:

$$g(t) = f(0) + g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(f(t) - f(0)).$$

Pelo lema 1.3.4. podemos tomar ε bastante pequeno, de modo que:

$$A(g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(f(t) - f(0))) < \eta.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(f(t) - f(0)) dt \right| &= \left| \int_{-R}^R \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} dt \right| \\ &\leq \int_{-R}^R \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| e^{int} dt = \int_{-R}^R \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| dt < \int_{-R}^R \eta dt = 2R\eta. \end{aligned}$$

Logo,

$$-2R\eta < \int_{-R}^R g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(f(t) - f(0)) dt < 2R\eta.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R g(t) dt \right| &= \left| \int_{-R}^R (f(0) + g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(f(t) - f(0))) dt \right| \\ &\geq \int_{-R}^R f(0) dt + \int_{-R}^R g_{-2\varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon}(t)(f(t) - f(0)) dt \\ &> 2Rf(0) - 2R\eta. \end{aligned}$$

Temos que:

$$A(g) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < f(0) + \eta.$$

Logo,

$$NA(g) < Nf(0) + N\eta.$$

Se tomarmos $\eta < \frac{f(0)}{3}$, temos:

$$\left| \int_{-N}^N g(t) dt \right| > 2Nf(0) - 2N\eta > 2Nf(0) - 2N \frac{f(0)}{3} = \frac{4Nf(0)}{3},$$

e temos ainda que:

$$NA(g) < Nf(0) + \frac{Nf(0)}{3} = \frac{4Nf(0)}{3}.$$

Logo,

$$\left| \int_{-N}^N g(t) dt \right| > \frac{4Nf(0)}{3} > NA(g).$$

Pelo LEMA 1.3.2. temos que $\frac{1}{g(t)} \in A$ e pela definição da função

g , temos que $f(t) = g(t)$ para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. ■

LEMA 1.3.6. ([WIENER-33])

Se $f(t)$ tem a propriedade de sempre que $t_0 \in [-N, N]$, existe um intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e uma função $g(t) \in A$, tal que $g(t) = f(t)$ para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, então $f(t) \in A$.

Prova:

Pelo teorema de Heine-Borel podemos cobrir o intervalo $(-H, H)$ por um número finito de intervalos abertos $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Sejam estes intervalos (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , ..., (a_n, b_n) , e sejam

$$a_1 < b_n - 2H < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < b_3 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_1 + 2H.$$

Fazendo $a_n = a_0 + 2H$; $b_n = b_0 + 2H$, $a_{n+1} = 2H + a_1$, $b_{n+1} = 2H + b_1$.

Seja $g_k(t)$ a função $g(t)$ coincidindo com $f(t)$ sobre (a_k, b_k) , para $k = 1, 2, \dots, n$. Então:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n f(t) g_{a_k, b_{k-1}, a_{k+1}, b_k}(t), \quad \text{pois:}$$

$$\sum_{k=1}^n g_{a_k, b_{k-1}, a_{k+1}, b_k}(t) = 1.$$

Logo,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n g_k(t) g_{a_k, b_{k-1}, a_{k+1}, b_k}(t),$$

onde supomos que essas funções são periódicas de período $2H$. O lema segue dos LEMAS 1.3.1. e 1.3.3.. ■

Finalmente, demonstraremos o Teorema de Inversão de Wiener.

TEOREMA 1.3.1.

Se $f(t) \in A$ e não se anula em $(-R, R)$, então $\frac{1}{f(t)} \in A$.

Prova:

Este teorema é consequência imediata dos LEMAS 1.3.5. e 1.3.6. ■

1.4. TEOREMA DE HAUSDORFF

O teorema de Hausdorff estabelece condições necessárias e suficientes para que uma sequência numérica possa ser escrita como uma sequência de momentos.

Para uma melhor compreensão desse resultado, exporemos a seguir alguns conceitos e resultados sobre funções de variação limitada e sequências de momentos.

1.4.1. FUNÇÕES DE VARIAÇÃO LIMITADA

DEFINIÇÃO 1.4.1. ([KOLMOGOROV-76])

Uma função $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de variação limitada se existir uma constante $C \geq 0$ tal que, para qualquer partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$,

$$\sum_{k=1}^n |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})| \leq C. \quad (1.4.1)$$

Observamos que se α é uma função de variação limitada, então existem os limites laterais à esquerda e à direita em qualquer ponto $t \in (a,b)$, e ainda que esses limites são iguais, exceto em um conjunto enumerável de pontos, isto é, o conjunto dos pontos de descontinuidade é enumerável (ref.[BARTLE-83]).

A próxima definição nos diz qual é a variação de uma função de variação limitada.

DEFINIÇÃO 1.4.2. ([KOLMOGOROV-76])

Dada uma função α de variação limitada, o supremo das somas em (1.4.1), tomado sobre o conjunto das partições finitas de $[a,b]$, chama-se variação de α em $[a,b]$ e denota-se por $V[\alpha]_a^b$. Assim,

$$V[\alpha]_a^b = \sup \sum_{k=1}^n |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})|.$$

Um outro conceito necessário é o de normalização de uma função de variação limitada.

DEFINIÇÃO 1.4.3. ([WIDDER-46])

Dizemos que uma função $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada é normalizada se

$$\alpha(a) = 0;$$

$$\alpha(t) = \frac{\alpha(t+) + \alpha(t-)}{2}, \quad a < t < b.$$

Onde $\alpha(t+)$ representa o limite à direita de α no ponto t e

$\alpha(t-)$ representa o limite à esquerda de α no ponto t .

A normalização de uma função $\alpha(t)$ não altera o valor da integral de uma função contínua integrada em relação a $\alpha(t)$. Mais precisamente temos os seguintes resultados:

TEOREMA 1.4.1. ([WIDDER-46])

Se $f(t)$ é contínua e $\alpha(t)$ é de variação limitada em $[a,b]$ e assume um valor constante C em um conjunto de pontos E , o qual inclui os pontos finais a e b e é denso em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(s) d\alpha(s) = 0.$$

Prova:

Esse resultado é consequência imediata da definição de integral. O limite na definição de integral existe independente da maneira de subdivisões do intervalo $[a,b]$. Logo, podemos escolher os pontos (t_k) em E ; assim, o limite é seguramente zero. ■

TEOREMA 1.4.2. ([WIDDER-46])

Se $f(t)$ é contínua e $\alpha(t)$ é de variação limitada em $[a,b]$, então existe uma função normalizada $\alpha^*(t)$ de variação limitada em $[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(s) d\alpha(s) = \int_a^b f(s) d\alpha^*(s).$$

Prova:

Podemos definir $\alpha^*(t)$ por:

$$\alpha^*(a) = 0;$$

$$\alpha^*(t) = \frac{\alpha(t+) + \alpha(t-)}{2} - \alpha(a), \quad a < t < b;$$

$$\alpha^*(b) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Temos que $\alpha^*(t)$ é normalizada, logo, pelo TEOREMA 1.4.1.

concluimos que:

$$\int_a^b f(s) d[\alpha(s) - \alpha(a) - \alpha^*(s)] = 0.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(s) d\alpha(s) = \int_a^b f(s) d\alpha^*(s).$$

1.4.2. SEQUÊNCIAS DE MOMENTOS

DEFINIÇÃO 1.4.4. ([WIDDER-46])

Uma sequência numérica $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, é dita de momentos se for possível definir uma função $\alpha(t)$ de variação limitada no intervalo $(0,1)$, de modo que:

$$\mu_n = \int_0^1 s^n d\alpha(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estamos interessados em encontrar uma classe de seqüências que podem ser representadas como seqüências de momentos.

Introduziremos agora algumas notações sobre seqüências, que nos auxiliarão nos resultados subsequentes.

DEFINIÇÃO 1.4.5.

$$\Delta^k \mu_k = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \mu_{k+n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

DEFINIÇÃO 1.4.6.

$$\lambda_{k,m}(t) = \binom{k}{m} t^m (1-t)^{k-m} \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots).$$

DEFINIÇÃO 1.4.7.

$$\lambda_{k,m} = \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \Delta^{k-m} \mu_m \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots).$$

DEFINIÇÃO 1.4.8.

O polinômio de Bernstein $\hat{E}_k[f(t)]$ para a função $f(t)$, definida no intervalo $(0,1)$, é dado por:

$$\hat{E}_k[f(t)] = \sum_{m=0}^k f\left(\frac{m}{k}\right) \lambda_{k,m}(t).$$

Vamos agora definir uma classe especial de seqüências:

DEFINIÇÃO 1.4.9.

Chamaremos de M a classe das seqüências numéricas $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem a seguinte condição:

$$\exists L > 0 \quad / \quad \sum_{m=0}^k |\lambda_{k,m}| < L \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A próxima definição se refere ao operador de momentos de um polinômio. Para isso consideremos um polinômio de grau máximo n ,

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

DEFINIÇÃO 1.4.10.

O operador de momentos do polinômio $P_n(t)$, com relação a uma seqüência $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$, é definido por:

$$M[P_n(t)] = \sum_{k=0}^n a_k \mu_k.$$

Se a seqüência $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ puder ser expressa como uma seqüência de momentos, então

$$M[P_n(t)] = \int_0^1 P_n(s) d\alpha(s).$$

Observamos que $ME\lambda_{k,m}(t) = \lambda_{k,m}$.

Demonstraremos a seguir um resultado sobre operador de momentos.

Antes, porém, precisaremos de um resultado preliminar.

LEMA 1.4.1. ([WIDDER-46])

Se n é um inteiro positivo, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{kt-i}{k-i} = t^n, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Prova:

Isto é óbvio, desde que cada termo do produtório aproxima t no intervalo $[0,1]$. ■

TEOREMA 1.4.3. ([WIDDER-46])

Se a sequência $(\mu_n)_{n=0}^{\infty} \in M$, então $\mu_n = \lim_{k \rightarrow \infty} ME_k[t^n]$,
 $n = 0, 1, 2, \dots$

Prova:

Desenvolvendo t^n pelo binômio de Newton, para $k > n > 0$, temos:

$$t^n = t^n[(1-t) + t]^{k-n} = \sum_{m=0}^{k-n} \binom{k-n}{m} t^{n+m}(1-t)^{k-n-m}$$

$$= \sum_{m=n}^k \frac{(k-n)!}{(m-n)!(k-m)!} t^m (1-t)^{k-m}$$

$$= \sum_{m=n}^k \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)k(k-1)\dots(k-n+1)(k-n)!}{k(k-1)\dots(k-n+1)(k-m)!m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)!} t^m (1-t)^{k-m}$$

$$= \sum_{m=n}^k \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)k!}{k(k-1)\dots(k-n+1)(k-m)!m!} t^m (1-t)^{k-m}$$

$$= \sum_{m=n}^k \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} \binom{k}{m} t^m (1-t)^{k-m}$$

$$= \sum_{m=n}^k \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} \lambda_{k,m}(t).$$

Logo,

$$\mu_n = ME[t^n] = \sum_{m=n}^k \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} \lambda_{k,m}.$$

Temos que:

$$ME_k[t^n] = ME \left[\sum_{m=0}^k \left(\frac{m}{k}\right)^n \lambda_{k,m}(t) \right] = \sum_{m=0}^n \left(\frac{m}{k}\right)^n \lambda_{k,m}.$$

Assim,

$$\mu_n = ME_k[t^n] = \sum_{m=n}^k \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} \lambda_{k,m} = \sum_{m=0}^k \left(\frac{m}{k}\right)^n \lambda_{k,m}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=n}^k \left[\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} - \left(\frac{m}{k}\right)^n \right] \lambda_{k,m} - \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{m}{k}\right)^n \lambda_{k,m} \\
&= \sum_{m=n}^k \left[\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} - y^n \right] \lambda_{k,m} - \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{m}{k}\right)^n \lambda_{k,m},
\end{aligned}$$

onde $y = \frac{m}{k}$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pelo LEMA 1.4.1. podemos determinar $k_0 > 0$ tal que, para todo $k > k_0$,

$$\left| \frac{ky(ky-1)\dots(ky-n+1)}{k(k-1)\dots(k-n+1)} - y^n \right| < \varepsilon \quad (y = \frac{m}{k}, m=n, n+1, \dots, k),$$

e tal que

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{m}{k}\right)^n \lambda_{k,m} \right| < \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{n}{k}\right)^n |\lambda_{k,m}| = \left(\frac{n}{k}\right)^n \sum_{m=0}^{n-1} |\lambda_{k,m}| <$$

$$\left(\left(\frac{n}{k}\right)^n L < \varepsilon, k > k_0.$$

Logo,

$$|\mu_n - \text{MIB}_k[t^n]| < L\varepsilon + \varepsilon, k > k_0.$$

Portanto, temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{MIB}_k[t^n] = \mu_n, \quad n=1,2,\dots.$$

Se $n=0$, então $\mu_0 = \text{MIB}_k[1]$.

Demonstraremos a seguir um resultado que estabelece as condições necessária e suficiente para que $(\mu_n)_0^\infty$ seja uma sequência de momentos, antes porém, precisaremos de dois resultados preliminares. Tais resultados são denominados, respectivamente, o primeiro e o segundo teorema de Helly e podem ser encontrados em [KOLMOGOROV-76].

TEOREMA 1.4.4. ([KOLMOGOROV-76])

Sejam as funções $\alpha_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n=0,1,2,\dots$, de variação limitada, suponhamos que elas convergem para uma função $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se as variações das funções α_n admitirem um majorante, isto é, $V[\alpha_n]_a^b \leq C$ para todo n , então a função α também será de variação limitada e qualquer que seja a função contínua f , vale a relação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(s) d\alpha_n(s) = \int_a^b f(s) d\alpha(s).$$

TEOREMA 1.4.5. ([KOLMOGOROV-76])

De qualquer conjunto infinito de funções (α_n) $n \geq 0$, definidas em um intervalo $[a,b]$, satisfazendo as condições:

$\max | \alpha_n(t) | \leq C$ e $V[\alpha_n(t)]_a^b \leq K$ (C e K independentes de n)
pode-se extrair uma subsequência convergente em cada ponto do intervalo $[a,b]$.

TEOREMA 1.4.6. ([WIDDER-46])

Uma sequência $(\mu_n)_0^\infty$ é de momentos se e somente se pertence a M .

Prova:

Suponhamos primeiramente que $(\mu_n)_0^\infty$ seja uma sequência de momento. Dai,

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^k |\lambda_{k,m}| &= \sum_{m=0}^k \left| \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \Delta^{k-m} \mu_m \right| \\
 &= \sum_{m=0}^k \left| \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \Delta^{k-m} \int_0^1 s^m d\alpha(s) \right| \\
 &= \sum_{m=0}^k \left| \binom{k}{m} \int_0^1 (-1)^{k-m} s^m d\alpha(s) \right| \\
 &= \sum_{m=0}^k \left| \binom{k}{m} \int_0^1 s^m (1-s)^{k-m} d\alpha(s) \right| \\
 &= \sum_{m=0}^k \left| \int_0^1 \binom{k}{m} s^m (1-s)^{k-m} d\alpha(s) \right| \\
 &\leq \sum_{m=0}^k \int_0^1 \left| \binom{k}{m} s^m (1-s)^{k-m} d\alpha(s) \right| \\
 &= \sum_{m=0}^k \int_0^1 \binom{k}{m} s^m (1-s)^{k-m} |d\alpha(s)| \\
 &= \int_0^1 \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} s^m (1-s)^{k-m} |d\alpha(s)|
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 |d\alpha(s)| = V[\alpha(s)]_0^1.$$

Logo,

$$\sum_{m=0}^k |\lambda_{k,m}| \leq V[\alpha(t)]_0^1.$$

Portanto, podemos concluir que a sequência $(\mu_n)_0^\infty$ pertence a M.

Para mostrar que se a sequência pertence a M, ela é de momentos, vamos definir uma função escada $\alpha_k(t)$ que é normalizada e tem seus saltos $\lambda_{k,m}$ nos pontos $\frac{m}{k}$,

$$\alpha_k\left(\frac{m}{k} +\right) - \alpha_k\left(\frac{m}{k} -\right) = \lambda_{k,m} \quad (m=0,1,2,\dots,k-1);$$

$$\alpha_k(0+) = \lambda_{k,0};$$

$$\alpha_k(0) = 0;$$

$$\alpha_k(1-) = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{k,m};$$

$$\alpha_k(1) = \sum_{m=0}^k \lambda_{k,m} = \mu_0.$$

Logo,

$$MR_k[t^n] = \int_0^1 s^n d\alpha_k(s),$$

pelo TEOREMA 1.4.3.

$$\mu_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 s^n d\alpha_k(s).$$

A variação total de $\alpha_k(t)$ é $\sum_{m=0}^k |\lambda_{k,m}| < L$, para qualquer k , e

pelo TEOREMA 1.4.5. temos que existe uma subsequência $(\alpha_{k_j}(t))_{j=0}^{\infty}$ da sequência $(\alpha_k(t))_0^{\infty}$, convergindo para a função $\alpha(t)$, de variação limitada em $0 \leq t \leq 1$.

Mas $\mu_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 s^n d\alpha_{k_j}(s)$, $n=0,1,2,3,\dots$ e portanto do TEOREMA

1.4.6. temos que $\mu_n = \int_0^1 s^n d\alpha(s)$. O que prova esse resultado. ■

LEMA 1.4.2. ([WIDDER-46])

Se $\alpha^*(t)$ é uma função normalizada de variação limitada em $(0,1)$, tal que

$$\int_0^1 s^n d\alpha^*(s) = 0, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad (1.4.2)$$

então $\alpha^*(t)$ é identicamente nula em $0 \leq t \leq 1$.

Prova:

Por hipótese $\alpha(0) = 0$.

Para $n=0$ em (1.4.2), obtemos que $\alpha^*(1) = 0$.

Integrando por partes a equação (1.4.2), obtemos:

$$\int_0^1 s^n \alpha(s) ds = 0 \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.3)$$

Se $\beta(t) = \int_0^t \alpha^*(s) ds$ para $0 \leq t \leq 1$, então de (1.4.2), com

$n = 0$, temos que $\beta(1) = 0$, e:

$$\int_0^1 s^n \beta(s) ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{s^{n+1}}{n+1} \alpha(s) ds = 0. \quad (1.4.4)$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, pelo teorema da aproximação de Weierstrass sabemos que existe um polinômio $\hat{P}(t)$ que aproxima a função contínua $\overline{\beta(t)}$, conjugada de $\beta(t)$, com um erro menor que ε , isto é,

$$| \overline{\beta(t)} - P(t) | < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.4.5)$$

De (1.4.4) e (1.4.5) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\beta(s)|^2 ds &= \int_0^1 \beta(s) [\overline{\beta(s)} - P(s)] ds = \left| \int_0^1 \beta(s) [\overline{\beta(s)} - P(s)] ds \right| \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |\beta(s)| ds. \end{aligned}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra que $\beta(t)$ é identicamente nula em $0 \leq t \leq 1$.

De (1.4.4) vemos que $\alpha(t)$ é nula em todos os pontos de continuidade. Desde que estes pontos são densos em $(0,1)$ e que para todo $t \in (0,1)$ existem $\alpha^*(t+)$ e $\alpha^*(t-)$, é evidente que

$$\alpha(t+) = \alpha(t-) = \alpha(t) = 0 \quad (0 < t < 1).$$

Portanto, $\alpha^*(t)$ é identicamente nula em $[0,1]$. ■

Consideremos, do TEOREMA 1.4.6., a função $\alpha^*(t)$, que é a normalização da função $\alpha(t)$. No conjunto dos pontos de continuidade de $\alpha(t)$, temos que $\alpha(t) = \alpha^*(t)$, isto é, existe uma subsequência $(\alpha_{k_j})_{j=0}^{\infty}$ da sequência de funções $(\alpha_k(t))_0^{\infty}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_{k_j}(t) = \alpha^*(t)$.

Agora o lema demonstrado anteriormente, nos garante que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(t) = \alpha^*(t), \text{ nos pontos de continuidade de } \alpha^*(t).$$

Desde que toda subsequência de $(\alpha_k(t))_0^{\infty}$ aproxima $\alpha^*(t)$ nos pontos de continuidade. Esse fato pode ser facilmente verificado:

Dadas duas subsequências quaisquer $(\alpha_{k_j}^1(t))$ e $(\alpha_{k_i}^1(t))$ de $(\alpha_k(t))$, temos que ambas possuem subsequências convergentes.

Sejam: $\alpha_{k_j}^1(t) \rightarrow \alpha(t)$ e $\alpha_{k_i}^1(t) \rightarrow \beta(t)$. Logo,

$$\mu_n = \int_0^1 s^n d\alpha(s) = \int_0^1 s^n d\beta(s).$$

Assim,

$$\int_0^1 s^n d(\alpha(s) - \beta(s)) = 0.$$

Logo, pelo LEMA 1.4.2. temos que $\alpha(t) - \beta(t) = 0$; isto é, $\alpha(t) = \beta(t)$.

1.4.3. TEOREMA DE HAUSDORFF

DEFINIÇÃO 1.4.11.

A sequência $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ é dita completamente monotônica se seus elementos são não negativos e a diferença sucessiva entre eles é alternadamente não positiva e não negativa, isto é,

$$(-1)^k \Delta^k \mu_n \geq 0 \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Uma definição análoga é dada por:

$$\lambda_{k,m} \geq 0 \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Essa classe de sequências pertence a M , pois:

$$\sum_{m=0}^k |\lambda_{k,m}| = \sum_{m=0}^k \lambda_{k,m} = \mu_0 = L.$$

Passemos agora ao Teorema de Hausdorff.

TEOREMA 1.4.7. ([WIDDER-46])

A sequência $(\mu_n)_0^\infty$ pode ser expressa como uma sequência de momentos $\mu_n = \int_0^1 s^n d\alpha(s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\alpha(t)$ é não decrescente e limitada para $0 \leq t \leq 1$ se e somente se é completamente monotônica.

Prova:

Por hipótese, temos que $(\mu_n)_0^\infty$ é uma sequência de momentos.

Logo,

$$(-1)^k \Delta^k \mu_n = \int_0^1 (-1)^k \Delta^k s^n d\alpha(s) = \int_0^1 s^n (1-s)^k d\alpha(s) \geq 0.$$

Para demonstrar a condição suficiente, lançamos do TEOREMA 1.4.6. que garante que uma sequência pode ser representada como uma sequência de momentos com $\alpha(t)$ de variação limitada. Mostramos anteriormente que se $\alpha(t)$ é normalizada, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(t) = \alpha(t)$. Desde que os saltos de $\alpha(t)$ $\lambda_{k,m}$ são não negativos segue que $\alpha(t)$ é não decrescente se cuidadosamente definida nos pontos de descontinuidade. ■

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Consideremos a equação (1.1.4):

$$y(t) - \int_0^t K(t,s)y(s)ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Queremos determinar uma aproximação $\tilde{y}(t)$ para a solução $y(t)$ sobre a malha de pontos:

$$I_h := \{ t_n / t_n = t_0 + nh, n = 0(1)m, m = [T/h] \}.$$

Tal aproximação pode ser determinada por um método numérico.

2.1. SOLUÇÃO POR REGRAS DE QUADRATURA

Fazendo $t = nh$, em (1.1.4), obtemos a seguinte equação:

$$y(nh) - \int_0^{nh} K(nh,s)y(s)ds = g(nh). \quad (2.1.1)$$

Aproximando o termo integral em (2.1.1) por uma regra de

quadratura, da forma:

$$\int_0^{nh} \phi(s) ds \approx h \sum_{j=0}^n \omega_{nj} \phi(jh), \quad n = 0(1)m, \quad (2.1.2)$$

a equação (2.1.1) pode ser escrita como:

$$\tilde{y}(nh) - h \sum_{j=0}^n \omega_{nj} K(nh, jh) \tilde{y}(jh) = g(nh),$$

onde $\tilde{y}(nh)$ é uma aproximação para $y(nh)$. Assim, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= g(0), \\ -h\omega_{10}K(h,0)\tilde{y}(0) + (1-h\omega_{11}K(h,h))\tilde{y}(h) &= g(h), \\ -[h\omega_{20}K(2h,0)\tilde{y}(0) + h\omega_{21}K(2h,h)\tilde{y}(h)] + (1-h\omega_{22}K(2h,2h))\tilde{y}(2h) &= g(2h), \\ &\vdots \\ -\sum_{j=0}^{m-1} h\omega_{mj}K(mh,jh)\tilde{y}(jh) + (1-h\omega_{mm}K(mh,mh))\tilde{y}(mh) &= g(mh), \end{aligned}$$

que pode ser resolvido iterativamente, determinando a sequência de valores $\tilde{y}(0)$, $\tilde{y}(h)$, $\tilde{y}(2h)$, ..., $\tilde{y}(mh)$. Note que o valor $\tilde{y}(0) = g(0)$ está sujeito apenas a erros de arredondamento.

A precisão obtida ao resolver este sistema depende da escolha do tamanho do passo h , da regra de quadratura empregada (2.1.2) e do comportamento das funções envolvidas.

2.2. SOLUÇÃO POR REGRAS DE QUADRATURA REDUTÍVEIS

Existe uma forte similaridade entre as Equações Integrais de Volterra e as Equações Diferenciais Ordinárias, pois as últimas se reduzem a casos particulares das primeiras.

Quando aplicamos um método linear de passo múltiplo com coeficientes reais α_j , β_j , $j = 0(1)k$, ao problema de quadratura,

$$y'(t) = f(t), \quad y(t_0) = 0,$$

obtemos a seguinte relação:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j-k} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{n+j-k}), \quad n \geq 0, \quad (2.2.1)$$

para valores y_n que são aproximações de $y(t_n)$ e $y(t_n) = \int_{t_0}^{t_n} f(s)ds$.

Admitindo que os valores iniciais $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ são obtidos pela aplicação de uma regra de quadratura, da forma:

$$y_i = h \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{ij} f(t_j), \quad i = 0(1)k-1,$$

então y_n , definido por (2.2.1), é uma combinação linear de $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$, ou seja,

$$y_n = h \sum_{j=0}^n \omega_{nj} f(t_j), \quad n \geq k,$$

obtendo, com isso, uma regra de quadratura, para a solução de $y(t) = \int_0^t f(s)ds$.

As quadraturas construídas desta maneira são chamadas (ρ, σ) -redutíveis, onde $\rho(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j$ e $\sigma(\xi) = \sum_{j=0}^k \beta_j \xi^j$ são, respectivamente, o primeiro e o segundo polinômio característico associado ao método linear de passo múltiplo (ver [WOLKENFELT-82]).

Passemos agora a construir regras de quadratura redutíveis para Equações Integrais de Volterra de segunda espécie. Consideremos para isto um método linear de passo múltiplo,

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j-k} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j-k}, y_{n+j-k}), \quad n \geq 0, \quad (2.2.2)$$

onde os valores iniciais $y_{-k}, \dots, y_{-1}$ são conhecidos.

Faremos as seguintes suposições sobre o método (ρ, σ) :

- ρ e σ não têm raízes comuns;
- $\rho(1) = 0$ e $\sigma(1) = \rho'(1)$, isto é, o método é consistente;
- nenhuma raiz de $\rho(\xi)$ tem módulo maior que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples, ou seja, o método é zero-estável.

Um método linear de passo múltiplo nestas condições é convergente (Ver [LAMBERT-73]).

A equação integral (1.1.2),

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds, \quad t \geq 0,$$

pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$y(t) = F_n(t) + \int_{t_n}^t K(t,s,y(s))ds,$$

onde

$$F_n(t) = g(t) + \int_0^{t_n} K(t,s,y(s))ds. \quad (2.2.3)$$

Observamos que $y(t_n) = F_n(t_n)$, sobre a malha de pontos de discretização. Assim, podemos aplicar o método (2.2.2) para o problema de quadratura (2.2.3), que reescrevemos na forma:

$$F_n(t) - g(t) = \int_0^{t_n} K(t,s,y(s))ds,$$

obtendo a seguinte relação:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j (\tilde{F}_{n+j-k}(t) - g(t)) = h \sum_{j=0}^k \beta_j K(t, t_{n+j-k}, y_{n+j-k}),$$

onde $\tilde{F}_{n+j-k}(t)$ denota uma aproximação para $F_{n+j-k}(t)$, $j = 0(1)k$.

Considerando o fato de que o método é consistente, isto é,

$$\rho(1) = \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \text{ obtemos:}$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \tilde{F}_{n+j-k}(t) = h \sum_{j=0}^k \beta_j K(t, t_{n+j-k}, y_{n+j-k}), \quad (2.2.4)$$

onde $\tilde{F}_n(t_n)$ aproxima o valor de $y(t_n)$, e as funções iniciais $\tilde{F}_{-k}, \dots, \tilde{F}_{-1}$, são obtidas pela aplicação de uma regra de quadratura,

$$\tilde{F}_i(t) = g(t) + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{ij} K(t, t_j, y_j), \quad -k \leq i \leq -1, \quad t \geq 0. \quad (2.2.5)$$

O lema a seguir mostra que a equação (2.2.4), com funções iniciais (2.2.5), pode ser escrita como uma regra de quadratura.

LEMA 2.2.1. (LUBICH-831)

O método linear de passo múltiplo (2.2.4), com funções iniciais (2.2.5), pode ser escrito como uma regra de quadratura,

$$y_n = g(t_n) + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K(t_n, t_j, y_j) + h \sum_{j=0}^k \omega_{n-j} K(t_n, t_j, y_j), \quad n \geq 0, \quad (2.2.6)$$

onde os pesos ω_n, w_{nj} ($n \geq 0, -k \leq j \leq -1$) são limitados e ainda os ω_n são

os coeficientes da série de potências $\omega(\xi) = \frac{\tilde{\sigma}(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n$, com

$$\tilde{\rho}(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^{k-j} \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}(\xi) = \sum_{j=0}^k \beta_j \xi^{k-j}.$$

Prova:

Sejam $K_n = K(., t_n, y_n)$ $n \geq -k$, e as séries:

$$\tilde{F}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n \xi^n \quad e \quad K(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n.$$

Escrevendo as equações (2.2.4) para $n = 0, 1, 2, \dots$ e multiplicando-as, respectivamente, por $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \dots$, obtemos:

$$(\alpha_0 \tilde{F}_{-k} + \alpha_1 \tilde{F}_{-k+1} + \dots + \alpha_k \tilde{F}_0) \xi^0 = h(\beta_0 K_{-k} + \beta_1 K_{-k+1} + \dots + \beta_k K_0) \xi^0$$

$$(\alpha_0 \tilde{F}_{-k+1} + \alpha_1 \tilde{F}_{-k+2} + \dots + \alpha_k \tilde{F}_1) \xi^1 = h(\beta_0 K_{-k+1} + \beta_1 K_{-k+2} + \dots + \beta_k K_1) \xi^1$$

$$(\alpha_0 \tilde{F}_{-k+2} + \alpha_1 \tilde{F}_{-k+3} + \dots + \alpha_k \tilde{F}_2) \xi^2 = h(\beta_0 K_{-k+2} + \beta_1 K_{-k+3} + \dots + \beta_k K_2) \xi^2$$

$\vdots$

$$(\alpha_0 \tilde{F}_{-1} + \alpha_1 \tilde{F}_0 + \dots + \alpha_k \tilde{F}_{k-1}) \xi^{k-1} = h(\beta_0 K_{-1} + \beta_1 K_0 + \dots + \beta_k K_{k-1}) \xi^{k-1}$$

$$(\alpha_0 \tilde{F}_0 + \alpha_1 \tilde{F}_1 + \dots + \alpha_k \tilde{F}_k) \xi^k = h(\beta_0 K_0 + \beta_1 K_1 + \dots + \beta_k K_k) \xi^k$$

$$(\alpha_0 \tilde{F}_1 + \alpha_1 \tilde{F}_2 + \dots + \alpha_k \tilde{F}_{k+1}) \xi^{k+1} = h(\beta_0 K_1 + \beta_1 K_2 + \dots + \beta_k K_{k+1}) \xi^{k+1}$$

$\vdots$

Somando todas as equações, obtemos:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \xi^k (\tilde{F}_0 \xi^0 + \tilde{F}_1 \xi^1 + \dots) + \alpha_1 \xi^{k-1} (\tilde{F}_0 \xi^0 + \tilde{F}_1 \xi^1 + \dots) + \dots + \\ & \alpha_k \xi^0 (\tilde{F}_0 \xi^0 + \tilde{F}_1 \xi^1 + \dots) = h[\beta_0 \xi^k (K_0 \xi^0 + K_1 \xi^1 + \dots) + \beta_1 \xi^{k-1} (K_0 \xi^0 + K_1 \xi^1 + \dots) + \dots + \\ & \beta_k \xi^0 (K_0 \xi^0 + K_1 \xi^1 + \dots)] + (h\beta_0 K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-1}) \xi^{k-1} + (h\beta_0 K_{-2} + h\beta_1 K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-2} - \alpha_1 \tilde{F}_{-1}) \xi^{k-2} + \\ & \dots + (h\beta_0 K_{-k} + h\beta_1 K_{-k+1} + \dots + h\beta_{k-1} K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-k} - \alpha_1 \tilde{F}_{-k+1} - \dots - \alpha_{k-1} \tilde{F}_{-1}) \xi^0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 (\alpha_0 \xi^k + \alpha_1 \xi^{k-1} + \dots + \alpha_k \xi^0) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n \xi^n &= h(\beta_0 \xi^k + \beta_1 \xi^{k-1} + \dots + \beta_k \xi^0) \sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n + \\
 (h\beta_0 K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-1}) \xi^{k-1} &+ (h\beta_0 K_{-2} + hK_{-2} + h\beta_1 K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-2} - \alpha_1 \tilde{F}_{-1}) \xi^{k-2} + \dots + \\
 (h\beta_0 K_{-k} + h\beta_1 K_{-k+1} + \dots + h\beta_{k-1} K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-k} - \alpha_1 \tilde{F}_{-k+1} - \dots - \alpha_{k-1} \tilde{F}_{-1}) \xi^0.
 \end{aligned}$$

Logo, podemos representar esta expressão na forma compacta por:

$$\tilde{\rho}(\xi) \tilde{F}(\xi) = h\tilde{\sigma}(\xi) K(\xi) + P(\xi) \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned}
 \text{onde } P(\xi) &= (h\beta_0 K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-1}) \xi^{k-1} + (h\beta_0 K_{-2} + h\beta_1 K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-2} - \alpha_1 \tilde{F}_{-1}) \xi^{k-2} + \dots \\
 &+ (h\beta_0 K_{-k} + h\beta_1 K_{-k+1} + \dots + h\beta_{k-1} K_{-1} - \alpha_0 \tilde{F}_{-k} - \alpha_1 \tilde{F}_{-k+1} - \dots - \\
 &\alpha_{k-1} \tilde{F}_{-1}) \xi^0,
 \end{aligned}$$

usando as funções iniciais (2.2.5) na expressão de $P(\xi)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 P(\xi) &= [h\beta_0 K_{-1} - \alpha_0 (g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} K_j)] \xi^{k-1} + [h\beta_0 + h\beta_1 K_{-1} - \alpha_0 (g + \\
 &h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-2j} K_j) - \alpha_1 (g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} K_j)] \xi^{k-2} + \dots + \\
 &[h\beta_0 K_{-k} + h\beta_1 K_{-k+1} + \dots + h\beta_{k-1} K_{-1} - \alpha_0 (g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-kj} K_j) - \\
 &\alpha_1 (g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-k+1j} K_j) + \dots + \alpha_{k-1} (g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} K_j)] \xi^0
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
P(\xi) = & [h\beta_0 R_{-1} - \alpha_0 h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} R_j] \xi^{k-1} + [h\beta_0 R_{-2} + h\beta_1 R_{-1} - \alpha_0 h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-2j} R_j \\
& - \alpha_1 h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} R_j] \xi^{k-2} + \dots + [h\beta_0 R_{-k} + h\beta_1 R_{-k+1} + \dots \\
& + h\beta_{k-1} R_{-1} - \alpha_0 h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-kj} - \alpha_1 h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-k+1j} R_j - \dots \\
& - \alpha_{k-1} h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} R_j] \xi^0 - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots \\
& + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] g,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
P(\xi) = & h[K_{-1}(\beta_0 \xi^{k-1} + \beta_1 \xi^{k-2} + \dots + \beta_{k-1} \xi^0)] + \dots + \\
& h[K_{-k+1}(\beta_0 \xi^1 + \beta_1 \xi^0) + h[K_{-k} \beta_0 \xi^0] - h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} R_j (\alpha_0 \xi^{k-1} + \\
& \alpha_1 \xi^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} \xi^0) - h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-2j} R_j (\alpha_0 \xi^{k-2} + \dots + \alpha_{k-2} \xi^0) \\
& - \dots - h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-kj} (\alpha_0 \xi^0) - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + \\
& (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] g.
\end{aligned}$$

Consideremos os seguintes polinômios:

$$R_{k-1}(\xi) = \beta_0 \xi^{k-1} + \beta_1 \xi^{k-2} + \dots + \beta_{k-1} \xi^0;$$

$$R_{k-2}(\xi) = \beta_0 \xi^{k-2} + \beta_1 \xi^{k-3} + \dots + \beta_{k-2} \xi^0;$$

⋮

$$B_1(\xi) = \beta_0 \xi^1 + \beta_1 \xi^0;$$

$$B_0(\xi) = \beta_0 \xi^0;$$

$$A_{k-1}(\xi) = \alpha_0 \xi^{k-1} + \alpha_1 \xi^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} \xi^0;$$

$$A_{k-2}(\xi) = \alpha_0 \xi^{k-2} + \alpha_1 \xi^{k-3} + \dots + \alpha_{k-2} \xi^0;$$

⋮

$$A_1(\xi) = \alpha_0 \xi^1 + \alpha_1 \xi^0;$$

$$A_0(\xi) = \alpha_0 \xi^0.$$

Observamos que:

- A_{k+j} , $j = -k, -k+1, \dots, -1$, são polinômios de grau máximo $k-1$ e dependem somente dos coeficientes do polinômio $\rho(\xi)$.

- B_{k+j} , $j = -k, -k+1, \dots, -1$, são polinômios de grau máximo $k-1$ e dependem somente dos coeficientes do polinômio $\sigma(\xi)$.

Logo,

$$\begin{aligned} P(\xi) &= h \sum_{j=-k}^{-1} B_j B_{k+j}(\xi) E_j - h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-1j} B_j A_{k-1}(\xi) - h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-2j} A_{k-2}(\xi) - \dots \\ &\quad - h \sum_{j=-k}^{-1} w_{-kj} A_0(\xi) - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] q \\ &= h \sum_{j=-k}^{-1} B_{k-j}(\xi) E_j - h \sum_{i=-k}^{-1} \sum_{j=-k}^{-1} w_{ij} B_j A_{k+i}(\xi) - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \\ &\quad + \dots + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] q \end{aligned}$$

$$= h \sum_{j=-k}^{-1} (B_{k+j}(\xi) - \sum_{i=-k}^{-1} w_{ij} A_{k+i}(\xi)) E_j - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] g.$$

$$\text{Seja } P_j(\xi) = (B_{k+j}(\xi) - \sum_{i=-k}^{-1} w_{ij} A_{k+i}(\xi)), \quad j = -k, -k+1, \dots, -1,$$

então, os $P_j(\xi)$ são polinômios de grau máximo $k-1$ e dependem somente das regras de quadratura iniciais e do método linear de passo múltiplo (ρ, σ) .

Logo,

$$P(\xi) = h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) E_j - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] g,$$

e usando o fato de que $\rho(1) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) E_j - [\alpha_0 \xi^{k-1} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0] g \\ &= h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) E_j + \frac{g}{1-\xi} [(1-\xi)(-\alpha_0 \xi^{k-1} - (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} - \dots - (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-2}) \xi - (\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) \xi^0)] \\ &= h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) E_j + \frac{g}{1-\xi} [(1-\xi)(-\alpha_0 \xi^{k-1} - (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + (\alpha_{k-1} + \alpha_k) \xi + \alpha_k \xi^0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) K_j + \frac{g}{1-\xi} (-\alpha_0 \xi^{k-1} + \alpha_0 \xi^k - (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + (\alpha_0 + \alpha_1) \xi^{k-2} + \dots + (\alpha_{k-1} + \alpha_k) \xi - (\alpha_{k-1} + \alpha_k) \xi^2 + \alpha_k \xi^0 - \alpha_k \xi^1] \\
&= h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) K_j + \frac{g}{1-\xi} [\alpha_0 \xi^k + \alpha_1 \xi^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} \xi + \alpha_k \xi^0] \\
&= h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) K_j + \frac{\tilde{\rho}(\xi)}{1-\xi} g,
\end{aligned}$$

isto é,

$$P(\xi) = h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) K_j + \frac{\tilde{\rho}(\xi)}{1-\xi} g.$$

Substituindo a expressão de $P(\xi)$ em (2.2.7), obtemos:

$$\tilde{\rho}(\xi) \tilde{F}(\xi) = h \tilde{\sigma}(\xi) K(\xi) + h \sum_{j=-k}^{-1} P_j(\xi) K_j + \frac{\tilde{\rho}(\xi)}{1-\xi} g,$$

isto é,

$$\tilde{F}(\xi) = \frac{1}{1-\xi} g + h \sum_{j=-k}^{-1} \frac{P_j(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} K_j + h \frac{\tilde{\sigma}(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} K(\xi).$$

Considerando $\frac{P_j(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{nj} \xi^n$ para $j=-k, \dots, -1$ e $\frac{\tilde{\sigma}(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \xi^n$

e observando que $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = \frac{1}{1-\xi}$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n g + h \sum_{j=-k}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w_{nj} K_j \xi^n + h \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K_j + h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K_j - \tilde{F}_n \right) \xi^n = 0.$$

Como esta soma é igual a zero para todo $|\xi| < 1$, concluímos que:

$$g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K_j + h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K_j - \tilde{F}_n = 0 \quad n \geq 0,$$

logo,

$$\tilde{F}_n = g + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K_j + h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K_j \quad n \geq 0.$$

Avaliando esta identidade no ponto t_n , obtemos:

$$y_n = g(t_n) + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K(t_n, t_j, y_j) + h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K(t_n, t_j, y_j).$$

Além disso, os coeficientes da série $\frac{1}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \xi^n = r(\xi)$

satisfazem uma relação de recorrência com polinômio característico $\hat{\rho}(\xi)$,

isto é,

$$\frac{1}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \xi^n \quad \text{ou seja} \quad 1 = \tilde{\rho}(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} r_n \xi^n.$$

Logo,

$$1 = (\alpha_k + \alpha_{k-1}\xi + \dots + \alpha_0\xi^k)(r_0 + r_1\xi + r_2\xi^2 + \dots + r_k\xi^k + \dots)$$

Portanto,

$$r_0\alpha_k = 1$$

$$r_1\alpha_k + r_0\alpha_{k-1} = 0$$

$$r_2\alpha_k + r_1\alpha_{k-1} + r_0\alpha_{k-2} = 0$$

$\vdots$

$$r_{n+k}\alpha_k + r_{n+k-1}\alpha_{k-1} + \dots + r_{n+1}\alpha_1 + r_n\alpha_0 = 0$$

$\vdots$

Consequentemente, usando o fato de que o método (ρ, σ) é zero-estável, podemos concluir que os coeficientes r_n são limitados. Logo, os coeficientes das séries:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{nj}\xi^n = P_j(\xi)r(\xi) \text{ para } j=-k, \dots, -1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n\xi^n = \tilde{\rho}(\xi)r(\xi)$$

são limitados. O que completa a demonstração

■

Este resultado nos mostra que os métodos lineares de passo múltiplo são adequados para o tratamento numérico de Equações Integrais de Volterra, uma vez que podem ser transformados em regras de quadratura. Tais equações podem ser resolvidas de forma iterativa, determinando uma sequência de aproximações para $y(t)$, $t \geq 0$.

A regra de quadratura obtida do método (ρ, σ) é dada por:

$$y_n = g(t_n) + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K(t_n, t_j, y_j) + h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K(t_n, t_j, y_j), \quad t \geq 0.$$

E como podemos perceber pela demonstração do LEMA 2.2.1., os pesos w_{nj} e ω_n são dados por:

$$\omega(\xi) = \frac{\tilde{\sigma}(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n$$

$$w_j(\xi) = \frac{P_j(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{nj} \xi^n, \quad j = -k, -k+1, \dots, -1.$$

Para efeito ilustrativo faremos a seguir dois exemplos: o primeiro usando o método de passo múltiplo do Trapézio e o segundo o método de Simpson, calculando valores iniciais pela regra de quadratura do Trapézio.

Exemplo 2.2.1:

Consideremos o método do Trapézio: $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$.

Os polinômios característicos são dados por:

$$\rho(\xi) = \xi - 1 \quad \text{e} \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2},$$

consequentemente, $\tilde{\rho}(\xi) = 1 - \xi$ e $\tilde{\sigma}(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi$.

Vamos agora calcular os pesos ω_n . Temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\sigma}(\xi)}{\rho(\xi)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi}{1 - \xi} = \frac{1}{2} + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots$$

$$\Rightarrow (\omega_n) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, \dots\right).$$

Passemos agora a calcular os pesos $w_{n,-1}$. Para isso calculemos antes o polinômio $\hat{P}_{-1}(\xi)$; como é mostrado na demonstração do LEMA 2.2.1.:

$$P_{-1}(\xi) = B_0(\xi) - \sum_{i=-1}^{-1} w_{i,-1} A_{1+i}(\xi) = B_0(\xi) = \beta_0 = \frac{1}{2},$$

pois o peso $w_{-1,-1} = 0$, devido ao fato de que o método do trapézio não exige cálculo de valores iniciais por regras de quadratura. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{n,-1} \xi^n = \frac{P_{-1}(\xi)}{\rho(\xi)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\xi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 + \dots$$

$$\Rightarrow (w_{n,-1}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right).$$

Portanto o método de quadratura obtido é dado por:

$$\begin{aligned} y_n = & g(t_n) + h \frac{1}{2} K(t_n, t_{-1}, y_{-1}) + h K(t_n, t_0, y_0) + h K(t_n, t_1, y_1) \\ & + \dots + h \frac{1}{2} K(t_n, t_n, y_n), \end{aligned}$$

que é a regra de quadratura do trapézio repetida.

Nesse exemplo partimos do método linear de passo múltiplo do trapézio e obtivemos a regra de quadratura do trapézio. Isso ocorre porque o método do trapézio não exige o cálculo do valor inicial y_{-1} através de alguma regra de quadratura.

EXEMPLO 2.2.2

Consideremos o método de Simpson:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n).$$

Calculemos o valor inicial y_{-1} , através da regra de quadratura do trapézio:

$$y_{-1} = y_{-2} + \frac{h}{2}(y_{-1} + y_{-2}).$$

Os polinômios característicos associados ao método de Simpson são dados por:

$$\rho(\xi) = \xi^2 - 1 \quad \text{e} \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{3}.$$

Consequentemente:

$$\tilde{\rho}(\xi) = 1 - \xi^2 \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}(\xi) = \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{3}.$$

Calculemos os pesos ω_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n = \frac{\tilde{\sigma}(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{3}\xi^2}{1 - \xi^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\xi + \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{2}{3}\xi^4 + \dots$$

$$\Rightarrow (w_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots \right).$$

Cálculo dos $(w_{n,-2})$:

Para isso calculemos $P_{-2}(\xi)$:

$$P_{-2}(\xi) = (B_0(\xi) - \sum_{i=-1}^{-2} w_{i,-2} A_{2+i}(\xi)) = B_0(\xi) - \frac{1}{2} A_1(\xi)$$

$$= \beta_0 - \frac{1}{2} \alpha_0 \xi - \frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \xi.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{n,-2} \xi^n = \frac{P_{-2}(\xi)}{\rho(\xi)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \xi}{1 - \xi^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{3} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^3 + \frac{1}{3} \xi^4 + \dots$$

$$\Rightarrow (w_{n,-2}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right).$$

Cálculo dos $(w_{n,-1})$:

Para isso calculemos $P_{-1}(\xi)$:

$$P_{-1}(\xi) = B_1(\xi) - \sum_{i=-1}^{-2} w_{i,-1} A_{2+i}(\xi)$$

$$= B_1(\xi) - w_{-1,-1} A_1(\xi) - w_{-2,-1} A_0(\xi)$$

$$= \beta_0 \xi + \beta_1 - \frac{1}{2} (\alpha_0 \xi + \alpha_1) = \frac{1}{3} \xi + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \xi$$

$$= \frac{5}{6}t + \frac{4}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{n,-1} t^n = \frac{P_{-1}(t)}{\rho(t)} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{6}t}{1-t^2} = \frac{4}{3} + \frac{5}{6}t + \frac{4}{3}t^2 + \frac{5}{6}t^3 + \frac{4}{3}t^4 + \dots$$

$$\Rightarrow (w_{n,-1}) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \dots \right).$$

Portanto, a regra de quadratura é dada por:

$$y_0 = g_0 + h\left(\frac{1}{3}K(t_0, t_{-2}, y_{-2}) + \frac{4}{3}K(t_0, t_{-1}, y_{-1}) + \frac{1}{3}K(t_0, t_0, y_0)\right)$$

$$y_1 = g_1 + h\left(\frac{1}{2}K(t_1, t_{-2}, y_{-2}) + \frac{5}{6}K(t_1, t_{-1}, y_{-1}) + h\left(\frac{4}{3}K(t_1, t_0, y_0) + \frac{1}{3}K(t_1, x_1, y_1)\right)\right)$$

$$y_2 = g_2 + h\left(\frac{1}{3}K(t_2, t_{-2}, y_{-2}) + \frac{4}{3}K(t_2, t_{-1}, y_{-1}) + h\left(\frac{2}{3}K(t_2, t_0, y_0) + \frac{4}{3}K(t_2, t_1, y_1) + \frac{1}{3}K(t_2, t_2, y_2)\right)\right)$$

$$y_3 = g_3 + h\left(\frac{1}{2}K(t_3, t_{-2}, y_{-2}) + \frac{5}{6}K(t_3, t_{-1}, y_{-1}) + h\left(\frac{4}{3}K(t_3, t_0, y_0) + \frac{2}{3}K(t_3, t_1, y_1) + \frac{4}{3}K(t_3, t_2, y_2) + \frac{1}{3}K(t_3, t_3, y_3)\right)\right).$$

⋮

CAPÍTULO 3

ESTABILIDADE PARA A EQUAÇÃO LINEAR

Neste capítulo, descreveremos a teoria clássica de estabilidade dos métodos de quadratura aplicados à equação $y(t) = 1 + \lambda \int_0^t y(s)ds$, cuja solução exata é $y(t) = e^{\lambda t}$. Inicialmente apresentaremos o conceito de estabilidade absoluta de um esquema computacional para cálculo de um conjunto de valores; em seguida analisaremos esse conceito de estabilidade para algumas regras de quadratura aplicadas à equação teste acima, e finalmente mostraremos algumas definições e resultados da teoria de estabilidade absoluta de Equações Diferenciais Ordinárias. Essa teoria é utilizada no estudo da estabilidade de Equações Integrais de Volterra e será utilizada posteriormente. O conteúdo desse capítulo está baseado nos trabalhos de Baker ([BAKER-76] e [BAKER-78]) e Lambert ([LAMBERT-73]).

3.1. CONCEITO DE ESTABILIDADE ABSOLUTA

Discutimos, no capítulo anterior, fórmulas que permitem o cálculo dos valores $\tilde{y}(ih)$, $i=1,2,3,\dots$ como aproximações para a solução da equação (1.1.4).

Muitas vezes pode ocorrer, ao implementar tais métodos em um

computador, que os erros em $\tilde{y}(ih)$ cresçam com i . Entretanto, em muitos casos podemos esperar que boa precisão seja mantida.

Neste capítulo vamos procurar identificar a origem do crescimento dos erros no cálculo dos valores da aproximação da solução $y(t)$. Esperamos encontrar classes de equações onde o crescimento desordenado dos erros seja evitado, particularmente quando o crescimento de tais erros é devido à escolha de métodos numéricos. Observamos que, na prática, obtemos valores $\hat{y}(ih)$ ao invés de $\tilde{y}(ih)$, devido aos erros de arredondamento.

A introdução de erros de truncamento local e de arredondamento resulta num problema perturbado. A equação de diferenças resultante da aplicação de um método numérico pode ser mal condicionada e assim, uma pequena perturbação pode levar a um crescimento desordenado dos erros na solução do problema.

Dizemos que um esquema computacional apresenta instabilidade prática se o mesmo faz com que os erros provenientes de arredondamento e ou truncamento local sejam ampliados. Para algumas equações, as que podem ser integradas exatamente por uma regra de quadratura, os erros de truncamento local desaparecem e qualquer crescimento de erros, no cálculo da solução aproximada $\hat{y}(t)$, através de um esquema computacional, é inteiramente devido ao efeito da instabilidade numérica combinada com erros de arredondamento da aritmética aproximada.

A noção de estabilidade, no sentido aqui empregado, está relacionada com o cálculo dos valores $\hat{y}(ih)$ com um tamanho de passo $h > 0$ fixo, quando $i \rightarrow \infty$, usando aritmética de precisão finita.

Um método iterativo para calcular uma sequência de valores $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots$, pode ser definido em termo da função:

$$\tilde{\phi}(\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde resolvemos a k-ésima equação para determinar o valor de $\tilde{\phi}_k$ em função dos valores $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_{k-1}$, determinados anteriormente.

Daremos agora uma definição que se refere ao efeito da introdução de uma perturbação isolada em $\tilde{\phi}_k$. Estaremos nos referindo ao efeito em $\tilde{\phi}_{k+r}$ ($r = 1, 2, \dots$), de uma perturbação isolada ξ_k em $\tilde{\phi}_k$, sendo que $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_{k-1}$ permanecem inalterados.

DEFINIÇÃO 3.1.1. ([BAKER-76])

Um esquema computacional para calcular iterativamente um certo conjunto de valores $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots$ é chamado absolutamente estável se a introdução de uma perturbação isolada ξ_k em $\tilde{\phi}_k$, para qualquer $k > 0$, onde $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_{k-1}$ permanecem inalterados, resulta em alterações $\eta_{k+1}^k, \eta_{k+2}^k, \dots$, nos valores $\tilde{\phi}_{k+1}, \tilde{\phi}_{k+2}, \dots$, de modo que:

$$|\eta_{k+r}^k| \leq \rho |\xi_k|, \quad r = 1, 2, \dots,$$

para algum $\rho \in [0, 1]$. Se $\rho \in [0, 1)$, a estabilidade é chamada estrita.

A definição anterior se refere ao comportamento de um esquema computacional iterativo, quando um erro isolado é introduzido no k-ésimo estágio. Ela não reflete a situação na prática, onde erros de truncamento são introduzidos em cada estágio dos cálculos e causam outras perturbações.

O uso de algoritmos absolutamente estáveis assegura que os erros não vão crescer exageradamente, quando uma perturbação isolada é introduzida em algum estágio. Entretanto, pode ocorrer um crescimento linear dos erros,

uma vez que uma perturbação isolada no k-ésimo estágio pode ser seguida pela introdução de novos erros, que vão se somando em cada estágio dos cálculos.

Quando aplicamos um método numérico a uma equação integral, o mesmo pode ser considerado um esquema computacional absolutamente estável para determinação de aproximações da solução $\tilde{y}(h)$, $\tilde{y}(2h)$, $\tilde{y}(3h)$, ..., em alguns casos e absolutamente instável em outros. Essa propriedade depende principalmente das condições da equação. Por esta razão, é desejável identificar classes de equações de modo que um dado método numérico conduza a um esquema computacional absolutamente estável.

Durante muito tempo, para análise da estabilidade absoluta de Equações Integrais de Volterra, foram utilizados modelos de Equações Diferenciais Ordinárias, que são casos particulares de Equações de Volterra.

Consideremos uma Equação Diferencial Autônoma, isto é, uma equação da forma:

$$y'(t) = f(y(t)). \quad (3.1.1)$$

Observamos que toda Equação Diferencial Ordinária pode ser colocada na forma autônoma, através de uma mudança de variáveis.

Uma perturbação $\varphi(t)$ na solução de (3.1.1), resulta na equação:

$$(y(t) + \varphi(t))' = f(y(t) + \varphi(t)).$$

Desenvolvendo o lado direito desta equação em série de Taylor, obtemos:

$$y'(t) + \varphi'(t) = f(y(t)) + \varphi(t)f'(y(t)) + o(\varphi^2(t)).$$

Esta equação pode ser aproximada por:

$$y'(t) + \varphi'(t) = f(y(t)) + \varphi(t)f'(y(t)),$$

isto é,

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)).$$

Supondo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é localmente constante, obtemos a equação modelo:

$$\varphi'(t) = \lambda \varphi(t). \quad (3.1.2)$$

A equação (3.1.2) tem servido de modelo para o estudo da estabilidade absoluta de E.D.O..

Para análise da estabilidade de Equações de Volterra, é utilizada a equação teste correspondente:

$$y(t) - \lambda \int_0^t y(s) ds = 1, \quad t \geq 0,$$

cuja solução exata é $y(t) = \exp(\lambda t)$.

Vamos agora analisar a estabilidade absoluta de diferentes métodos numéricos aplicados à equação teste acima.

Sabemos que as aproximações para a solução da equação são procuradas na malha de pontos $I_h = \{ h, 2h, 3h, \dots, Nh \}$, para um dado $h > 0$. Conhecemos também o valor inicial $\tilde{y}(0) = 1$.

3.2. ANÁLISE DO CONCEITO DE ESTABILIDADE DE ALGUNS MÉTODOS

Aqui, analisaremos a propriedade de estabilidade absoluta de algumas regras de quadratura obtidas pela combinação de fórmulas de quadratura mais conhecidas, tais como regra do Trapézio e regras de Simpson. Analisaremos principalmente as restrições na escolha dos tamanhos de passo que tornam os esquemas absolutamente estáveis. Aqui, seguimos a notação de Baker ([BAKER-76] e [BAKER-78]).

3.2.1. REGRA DO TRAPÉZIO REPETIDA

Empregando a regra do trapézio repetida para a equação teste, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\tilde{y}(ih) - \lambda h \sum_{j=0}^i w_{ij} \tilde{y}(jh) = 1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

onde os pesos w_{ij} são dados pela tabela:

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	...
1	1/2	1/2				
2	1/2	1	1/2			
3	1/2	1	1	1/2		
4	1/2	1	1	1	1/2	
⋮						

Escrevendo as $(r+1)$ -ésima e r -ésima equações e calculando a diferença entre elas, obtemos a relação:

$$\tilde{y}((r+1)h) = \gamma \tilde{y}(rh), \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h}{1 - \frac{1}{2}\lambda h}.$$

Assim, uma perturbação ξ_r em $\tilde{y}(rh)$ produzirá uma perturbação $\gamma^k \xi_r$ em $\tilde{y}((r+k)h)$.

Logo, o esquema é absolutamente estável se $|\gamma| < 1$, e isto ocorre sempre que $\lambda h < 0$.

Portanto, o esquema é estável para $\lambda h \in (-\infty, 0)$.

3.2.2. REGRA DE SIMPSON REPETIDA E TRAPÉZIO

Quando empregamos a regra de Simpson repetida combinada com a regra do Trapézio no final, se necessário, para a equação teste, cujos pesos são dados pela tabela:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	...
1	1/2	1/2					
2	1/3	4/3	1/3				
3	1/3	4/3	5/6	1/2			
4	1/3	4/3	2/3	4/3	1/3		
5	1/3	4/3	2/3	4/3	5/6	1/2	
⋮							

obtemos as seguintes relações:

$$\tilde{y}((2r+1)h) = r\tilde{y}(2rh), \quad r = 1, 2, 3, \dots, e$$

$$\tilde{y}((r+2)h) = r\tilde{y}(rh), \quad r = 2, 4, 6, \dots;$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h}{1 - \frac{1}{2}\lambda h} \quad \text{e} \quad r = \frac{1 + \frac{7}{6}\lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2}{1 - \frac{5}{6}\lambda h + \frac{1}{6}(\lambda h)^2}.$$

Logo, este esquema é absolutamente estável para $|\gamma| < 1$ e $|r| < 1$, e isto ocorre sempre que $\lambda h \in [-6, 0)$.

3.2.3. REGRA DO TRAPÉZIO COM REGRA DE SIMPSON REPETIDA

O uso da regra do Trapézio no início, quando necessário, combinado com o uso da regra de Simpson repetida, cujos pesos são dados pela tabela:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	...
1	1/2	1/2						
2	1/3	4/3	1/2					
3	1/2	5/6	4/3	1/3				
4	1/3	4/3	2/3	4/3	1/3			
5	1/2	5/6	4/3	2/3	4/3	1/3		
6	1/3	4/3	2/3	4/3	2/3	4/3	1/3	
⋮								

resulta na seguinte relação:

$$(1 - \frac{1}{3}\lambda h)\tilde{y}_{r+1} - \frac{4}{3}\lambda h\tilde{y}_r - (1 + \frac{1}{3}\lambda h)\tilde{y}_{r-1} = 0,$$

que produz um esquema instável, pois as raízes desta equação têm módulo maior que um para qualquer $\lambda h \neq 0$.

3.2.4. REGRA DE SIMPSON REPETIDA COM REGRA DE SIMPSON 3/8

Os pesos da regra de Simpson repetida combinados com os da regra de Simpson 3/8, no final, se necessário, são dados pela tabela:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
1	1/2	1/2						
2	1/3	4/3	1/3					
3	3/8	9/8	9/8	3/8				
4	1/3	4/3	2/3	4/3	1/3			
5	1/3	4/3	17/24	9/8	9/8	3/8		
6	1/3	4/3	2/3	4/3	2/3	4/3	1	
7	1/3	4/3	2/3	4/3	17/24	9/8	9/8	3/8
...								

O emprego de tal regra resulta num esquema absolutamente estável para $\lambda h \in [-2, 0)$.

Entretanto, o uso da regra de Simpson 3/8 no início, se necessário, com a regra de Simpson repetida, resulta num esquema instável.

3.2.5. REGRA DE SIMPSON 3/8 REPETIDA COM REGRA DE SIMPSON

O uso da regra de Simpson 3/8 repetida combinado com o uso da regra de Simpson no final, caso haja necessidade, cujos pesos são dados pela tabela:

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
5	3/8	9/8	9/8	17/24	4/3	1/3				
6	3/8	9/8	9/8	3/4	9/8	9/8	3/8			
7	3/8	9/8	9/8	17/24	4/3	2/3	4/3	1/3		
8	3/8	9/8	9/8	3/4	9/8	9/8	17/24	4/3	1/3	
⋮										

resulta num esquema estável para $\lambda h \in [-1.5, 0)$.

Contudo, a regra de Simpson no início, se necessário, combinada com a regra de Simpson 3/8 repetida, resulta num esquema instável.

3.3. DEFINIÇÕES E RESULTADOS SOBRE ESTABILIDADE ABSOLUTA

Apresentaremos a seguir algumas definições e resultados sobre estabilidade absoluta dos métodos lineares de passo múltiplo, aplicados à equação básica $y' = \lambda y$ ou, equivalentemente, $y(t) = y_0 + \lambda \int_0^t y(s) ds$, necessários ao entendimento de resultados que serão apresentados no próximo capítulo.

Um dado método linear de passo múltiplo pode ser considerado

absolutamente estável para determinados tamanhos de passo e instável para outros.

As próximas definições se referem à determinação da região que contém os tamanhos de passos que tornam os métodos lineares de passo múltiplo absolutamente estáveis, e podem ser encontradas em Lambert ([LAMBERT-73]).

DEFINIÇÃO 3.3.1.

A região de estabilidade D de um método linear de passo múltiplo (p, σ) é o conjunto de todos os valores $z = \lambda h$, para os quais a solução numérica y_n da equação teste básica tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

DEFINIÇÃO 3.3.2.

Um método linear de passo múltiplo é chamado A -estável se o semiplano esquerdo $\text{Re}(z) < 0$ está contido na região de estabilidade D do método.

DEFINIÇÃO 3.3.3.

Um método linear de passo múltiplo é chamado fortemente estável se existe um disco no semiplano esquerdo, tocando a origem, contido na região de estabilidade D do método.

DEFINIÇÃO 3.3.4.

Um método linear de passo múltiplo é chamado $A(\alpha)$ -estável se a região de estabilidade D contém o setor $|\arg(z) - \pi| < \alpha$.

Se transformarmos o método linear de passo múltiplo (ρ, σ) em uma regra de quadratura redutível ω , a região de estabilidade D , desse novo esquema, pode ser determinada pelo seguinte resultado:

LEMA 3.3.1. ([LUBICH-83])

$z \neq 0$ está em D se e somente se $z\omega(\xi) \neq 1$ para $|\xi| \leq 1$.

Prova:

$z \neq 0, z \in D \iff$ as raízes de $\rho(\xi) - z\sigma(\xi)$ (polinômio de estabilidade associado ao método (ρ, σ)) tem módulo menor que 1 $\iff$

$\rho(\xi) - z\sigma(\xi) \neq 0$ para $|\xi| \geq 1 \iff \frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)} \neq z$ para $|\xi| \geq 1$, pois ρ e σ não

têm raízes comuns) $\iff 1 \neq z \frac{A_k \xi^k + A_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \beta_0 \xi^0}{\alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \alpha_0 \xi^0}$, para $|\xi| \geq 1$

$$\iff 1 \neq z \frac{\frac{A_k \xi^k + A_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \beta_0 \xi^0}{\xi^k}}{\frac{\alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \alpha_0 \xi^0}{\xi^k}}, \text{ para } |\xi| \geq 1$$

$$\iff 1 \neq z \frac{A_k \left(\frac{1}{\xi}\right)^0 + A_{k-1} \left(\frac{1}{\xi}\right)^1 + \dots + \beta_0 \left(\frac{1}{\xi}\right)^k}{\alpha_k \left(\frac{1}{\xi}\right)^0 + \alpha_{k-1} \left(\frac{1}{\xi}\right)^1 + \dots + \alpha_0 \left(\frac{1}{\xi}\right)^k}, \text{ para } |\xi| \geq 1$$

$$\iff 1 \neq z \frac{\tilde{\sigma}(\bar{\xi})}{\tilde{\rho}(\bar{\xi})}, \text{ para } |\bar{\xi}| \leq 1, \text{ onde } \bar{\xi} = \frac{1}{\xi} \text{ e } |\xi| \geq 1. \quad \blacksquare$$

Muitos dos resultados apresentados no próximo capítulo são relacionados com funções e seqüências definidas positivas. A seguir

apresentaremos as definições e propriedades elementares sobre esse assunto, que serão muito utilizadas posteriormente. Tais resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [DONOGHUE-69].

DEFINIÇÃO 3.3.5.

Uma função contínua $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada definida positiva se

$$\sum_{i,j} a(x_i - x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0,$$

para quaisquer seqüências finitas (x_n) e (z_n) ($x_n \in \mathbb{R}$ e $z_n \in \mathbb{C}$).

DEFINIÇÃO 3.3.6.

Uma seqüência $(a_n)_{-\infty}^{\infty}$ é chamada definida positiva se

$$\sum_{i,j} a_{i-j} z_i \bar{z}_j \geq 0,$$

para qualquer seqüência complexa finita (z_n) .

DEFINIÇÃO 3.3.7.

Uma função contínua $a: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada definida positiva se sua extensão de Hermite:

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} a(t) & t \geq 0 \\ \overline{a(-t)} & t \leq 0 \end{cases},$$

é definida positiva.

As funções definidas positiva são caracterizadas pelo seguinte resultado, que é conhecido como Teorema de Bochner, ver por exemplo [BRUNNER-87].

LEMA 3.3.2. ([BRUNNER-87])

$a(t)$ é uma função definida positiva se e somente se

$$\operatorname{Re} \int_0^{\infty} a(s) e^{-ws} ds \geq 0, \quad \text{para } \operatorname{Re}(w) > 0.$$

DEFINIÇÃO 3.3.8.

Uma seqüência $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ é chamada definida positiva se sua extensão de Hermite:

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} a_n, & n > 0 \\ a_0 + \overline{a_0}, & n = 0 \\ \overline{a_{-n}}, & n < 0 \end{cases},$$

é definida positiva.

Observamos que se $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência definida positiva então $a_0 > 0$ e $|a_n| \leq a_0, \quad \forall n \geq 0$.

LEMA 3.3.3. ([DONOGHUE-69])

Se $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ são seqüências definidas positivas, então $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$, $(a_n b_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(ca_n)_{n=0}^{\infty}$ são também definidas positivas, para $c \geq 0$. ■

LEMA 3.3.4. ([DONOGHUE-69])

Seja $h > 0$. Se $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ e $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ são definidas positivas, então a seqüência $(w_n a(nh))_{n=0}^{\infty}$ é também definida positiva. ■

O lema a seguir caracteriza as seqüências definidas positivas. Ele é conhecido por caracterização de Toeplitz-Caratheodory e pode ser encontrado em [NEVANLINNA-76].

LEMA 3.3.5. ([NEVANLINNA-76])

A seqüência $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$ é definida positiva se e somente se é limitada e

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \geq 0 \quad \text{para} \quad |\xi| \leq 1. \quad \blacksquare$$

O próximo Lema diz respeito a métodos lineares de passo múltiplo fortemente estáveis.

LEMA 3.3.6. ([LUBICH-83])

O método linear de passo múltiplo (ρ, σ) é fortemente estável

(com um disco de estabilidade de raio R) se e somente se existe um número $C > 0$ tal que $(\omega_0 + C, \omega_1, \omega_2, \dots)$ é uma sequência definida positiva. C e R são relacionados por $C = \frac{1}{2R}$ e $(\omega_n)_0^\infty$ são os pesos da regra de quadratura associados ao método (p, σ) .

Prova:

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um disco aberto de raio R (tocando a origem).

A aplicação $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{z}$, leva cada elemento de D no semiplano $\operatorname{Re}(z) < -C$, onde $C = \frac{1}{2R}$.

Pelo LEMA 3.3.1. temos que:

$$z \in D \iff zw(\xi) \neq 1 \text{ para } |\xi| \leq 1, z \in D \iff w(\xi) \neq \frac{1}{z}$$

para $|\xi| \leq 1, z \in D \iff w(\xi)$ está no semiplano $\operatorname{Re}(z) \geq -C \iff$

$$\operatorname{Re}(w(\xi)) \geq -C = -\frac{1}{2R}, \text{ para } |\xi| \leq 1 \iff \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n + C \geq 0 \text{ para } |\xi| \leq 1$$

$\iff$ a sequência $(\omega_0 + C, \omega_1, \omega_2, \dots)$ é definida positiva (pela caracterização de Toeplitz-Catatheodory, LEMA 3.3.5.) ■

Em particular se $R = \infty$, temos o seguinte corolário:

LEMA 3.3.7. (LUBICH-831)

O método linear de passo múltiplo (ρ, σ) é A-estável se e somente se $(\omega_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência definida positiva. ■

CAPÍTULO 4

ESTABILIDADE ABSOLUTA DOS MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLOS

4.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Como vimos anteriormente, a teoria clássica da estabilidade absoluta para equações integrais de Volterra é baseada na equação teste linear, que é bastante restrita, e por essa razão é importante o desenvolvimento de uma teoria de estabilidade baseada em uma equação mais geral, mais abrangente.

O conceito de estabilidade para Equações Integrais de Volterra, como descrito no capítulo anterior, é derivado do estudo de Equações Diferenciais Ordinárias. Em termos práticos, para sistemas de equações, este conceito pode ser esquematizado da seguinte maneira:

Dado o problema $y' = Ay$, onde A é uma matriz constante $n \times n$ com autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1(1)n$, então a solução $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Aplicando, igualmente, um método para a solução deste problema, no qual usamos um determinado tamanho de passo $h > 0$, com $h\lambda_i$, $i = 1(1)n$, contido na região de estabilidade do método, então a solução numérica $y_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Esta estrutura pode ser representada pelo seguinte diagrama, dado por Lambert ([LAMBERT-86]):

A introdução de uma perturbação φ numa vizinhança da solução $y(t)$ do problema não linear $y'(t) = f(t, y(t))$, como vimos anteriormente, comporta-se como a solução da equação linear:

$$\varphi' = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\varphi, \quad (4.1.1)$$

onde supomos que a matriz Jacobiana $\frac{\partial f}{\partial y}$ é avaliada em um ponto t fixo e numa solução dada y .

Surgem então as seguintes perguntas:

- Para analisar a estabilidade da equação (4.1.1), basta supor que $\frac{\partial f}{\partial y}$ tenha autovalores λ_i distintos, com $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad i = 1(1)n, \forall t \geq t_0$?
- Este fato faz com que a solução $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$?
- Aplicando um determinado método numérico, usando um tamanho de passo $h > 0$, com $h\lambda_i \quad i = 1(1)n$, contido na região de estabilidade absoluta do método, a solução numérica $y_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$?

Recentes estudos no desenvolvimento da teoria de estabilidade absoluta para Equações Diferenciais Ordinárias mostram que as respostas às

questões acima nem sempre são verdadeiras, como podemos observar no exemplo que segue, dado por Lambert ([LAMBERT-86]):

Exemplo 4.1.1.

Seja $y' = A(t)y$, $y \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{onde } A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4(1+t)} & \frac{1}{(1+t)^2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4(1+t)} \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $A(t)$ são:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4(1+t)} + \frac{i}{2(1+t)} \quad e$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4(1+t)} - \frac{i}{2(1+t)},$$

portanto, $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ para todo $t \geq 0$.

A solução geral deste problema é dada por $y(t) = A_1 Y_1 + A_2 Y_2$,

$$\text{onde } Y_1 = \begin{bmatrix} (1+t)^{-3/4} \\ (-1/2)(1+t)^{1/4} \end{bmatrix}$$

$$e \quad Y_2 = \begin{bmatrix} (1+t)^{-3/4} \ln(1+t) \\ (1+t)^{1/4} (1 - 0.5 \ln(1+t)) \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\|y(t)\| \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$.

Como podemos observar por este exemplo, a análise da estabilidade absoluta baseada no estudo da equação linearizada não é suficiente nem mesmo para a classe de Equações Diferenciais Ordinárias lineares, quanto mais para Equações de Volterra mais abrangentes.

Recentes avanços vêm ocorrendo no desenvolvimento da teoria de estabilidade absoluta para Equações Integrais de Volterra, particularmente para equações com núcleo de convolução, ou seja, equações da forma:

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_0^t K(t-s)y(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (4.1.2)$$

Como vimos, no capítulo 2, aplicando um método linear de passo múltiplo para esta equação, obtemos uma equação linear discreta:

$$y_n = g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n-j} K_{n-j} y_j,$$

onde,

$$g_n = g(t_n) + \lambda h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K_{n-j} y_j.$$

LUBICH ([LUBICH-83]) explorou a equação discretizada acima, onde $(w_{nn} K_{nn})_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$ é uma sequência definida positiva, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ e $g_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e mostrou vários resultados sobre a estabilidade numérica para essas equações. O autor trabalhou principalmente com métodos lineares de passo múltiplo fortemente estáveis, em particular A-estáveis, e métodos $A(\alpha)$ -estáveis.

Neste capítulo, mostraremos avanços nesse campo de pesquisa, devidos a LUBICH. Na primeira seção, do capítulo em questão, mostraremos resultados sobre o comportamento assintótico da solução da equação linear de convolução discretizada, baseados na versão contínua de Teoremas de Paley-Wiener; depois apresentaremos os resultados sobre a estabilidade dos métodos lineares de passo múltiplos aplicados a equações com núcleo de convolução e finalmente mostraremos a extensão dos resultados apresentados nos itens anteriores para sistemas de equações com núcleo de convolução.

4.2. VERSÃO DISCRETA DE UM TEOREMA DE PALEY-WIENER

Discutiremos aqui o comportamento assintótico da solução de equações lineares discretas de tipo convolução.

Paley e Wiener ([PALEY-34]) deram o seguinte resultado sobre a estabilidade assintótica de Equações de Volterra do tipo convolução:

TEOREMA 4.2.1. ([PALEY-34])

Consideremos a Equação Linear de Volterra:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t-s)y(s)ds \quad (t \geq 0),$$

onde o núcleo $K(t) \in L^1(0, \infty)$, então

$$y(t) \rightarrow 0, \text{ quando } g(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

se e somente se

$$\int_0^t e^{-\omega s} K(s) ds \neq 1 \quad \text{para} \quad \operatorname{Re}(\omega) \geq 0.$$

Estamos interessados na análise da estabilidade numérica das equações integrais de Volterra. A versão discreta desse Teorema, onde colocamos $\xi = e^{-\omega}$, é dada por:

TEOREMA 4.2.2. ([LUBICH-83])

Consideremos a Equação Linear de Volterra discreta:

$$y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0), \quad (4.2.1)$$

onde o núcleo $(K_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$. Então,

$$y_n \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad g_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.2)$$

se e somente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n \neq 1 \quad \text{para} \quad |\xi| \leq 1. \quad (4.2.3)$$

Prova:

Provaremos que (4.2.2) implica em (4.2.3), por redução ao absurdo. Para isso suponhamos que $\exists \xi_0, |\xi_0| \leq 1$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi_0^n = 1$.

Mostraremos que $\exists g_n \rightarrow 0$ mas a solução y_n de (4.2.1) e tal que $y_n \not\rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Seja } y_n = \xi_0^{-n}. \text{ Definimos } g_n = y_n - \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j$$

Temos que $y_n \not\rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e y_n é solução de (4.2.1) pela própria definição de g_n . Mostremos que $g_n \rightarrow 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} g_n &= y_n - \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j = \xi_0^{-n} - \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^{-j} \\ &= \xi_0^{-n} \left(1 - \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^{n-j} \right) = \xi_0^{-n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} K_j \xi_0^j - \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^{n-j} \right) \\ &= \xi_0^{-n} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} K_j \xi_0^j \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$|g_n| = \left| \xi_0^{-n} \sum_{j=n+1}^{\infty} K_j \xi_0^j \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} K_j \xi_0^{j-n} \right|$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j \xi_0^{j-n}| = \sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j| \cdot |\xi_0^{j-n}|$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j|.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j| \rightarrow 0$, pois $(K_n)_0^{\infty} \in \ell^1$.

Portanto, $g_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. O que contradiz (4.2.2).

Para mostrar que (4.2.3) implica em (4.2.2), consideremos as séries formais de potências:

$$K(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n, \quad g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n \quad \text{e} \quad y(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \xi^n.$$

Em termos dessas séries a equação discreta de Volterra (4.2.1) conduz a expressão:

$$y(\xi) = g(\xi) + K(\xi)y(\xi),$$

ou equivalentemente,

$$y(\xi) = \frac{g(\xi)}{1 - K(\xi)},$$

pois $1 - K(\xi) \neq 0$, por hipótese.

Considerando $r(\xi) = \frac{1}{1 - R(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \xi^n$ temos, pelo teorema de inversão de Wiener (TEOREMA 1.2.1.), que $(r_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$. Logo,

$$y_n = \sum_{j=0}^n g_{n-j} r_j, \quad \text{com } (g_n)_{n=0}^{\infty} \in C_0 \quad \text{e} \quad (r_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n g_{n-j} r_j.$

Provaremos agora que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Sabemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |r_n| < \infty \quad \text{e} \quad g_n \rightarrow 0.$$

Então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 > 0$ tal que para $n \geq n_0$ temos:

$$\sum_{j=n_0}^n |r_j| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g_n| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado, tomamos $n \geq 2n_0$. Então,

$$\left| \sum_{j=0}^n g_{n-j} r_j \right| = \left| \sum_{j=0}^{n_0} g_{n-j} r_j + \sum_{j=n_0}^n g_{n-j} r_j \right|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \sum_{j=0}^{n_0} g_{n-j} r_j \right| + \left| \sum_{j=n_0}^n g_{n-j} r_j \right| \\
& < \varepsilon \sum_{j=0}^{n_0} |r_j| + \max_n |g_n| \sum_{j=n_0}^n |r_j| \\
& = C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon = C \varepsilon,
\end{aligned}$$

onde C , C_1 e C_2 são constantes.

$$\text{Portanto } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n g_{n-j} r_j = 0. \quad \blacksquare$$

Na demonstração acima, quando mostramos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, provamos que a operação de convolução de uma sequência no ℓ^1 com outra em C_0 , resulta em uma sequência em C_0 , ou seja, $\ell^1 * C_0 \subset C_0$.

Existe também um resultado que garante a limitação da solução da equação discretizada.

COROLÁRIO 4.2.1. ([LUBICH-83])

Consideremos a equação (4.2.1), onde $(k_n) \in \ell^1$, então

$$y_n \text{ é limitada, sempre que } g_n \text{ for limitada} \quad (4.2.4)$$

se e somente se (4.2.3) for válida.

Prova:

Demonstraremos primeiro que (4.2.4) implica em (4.2.3). Para isso consideremos a equação (4.2.1):

$$y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j, \quad n \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_0 &= g_0 + K_0 y_0 & \Rightarrow g_0 &= (1 - K_0) y_0, \\ y_1 &= g_1 + K_1 y_0 + K_0 y_1 & \Rightarrow g_1 &= K_1 y_0 + (1 - K_0) y_1, \\ y_2 &= g_2 + K_2 y_2 + K_1 y_1 + K_0 y_2 & \Rightarrow g_2 &= K_2 y_0 + K_1 y_1 + (1 - K_0) y_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, vemos que dada uma sequência $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, a sequência $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ pode ser determinada de maneira única, desde que $1 - K_0 \neq 0$. Portanto a expressão (4.2.4) pode ser reformulada da seguinte maneira:

O operador linear limitado no ℓ^{∞} ,

$T: y \rightarrow g = y - Ky$ é inversível.

T é obviamente contínuo, pelo teorema da aplicação aberta, T^{-1} é limitado isto é, $\|T^{-1}g\|_{\ell^{\infty}} < \infty$.

Seja $T^{-1}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n$. Então se $y = T^{-1}g$, onde $(g_n)_{n=0}^{\infty} \in C_0$, temos

que:

$$y_0 = (T^{-1}g)_0 = b_0 g_0$$

$$y_1 = (T^{-1}g)_1 = b_1 g_0 + b_0 g_1$$

⋮

$$y_n = (T^{-1}g)_n = b_n g_0 + b_{n-1} g_1 + \dots + b_0 g_n$$

⋮

Mostraremos agora que a sequência $(b_n)_0^\infty \in \ell^1$, para isto consideremos a sequência de funções:

$$g^{(n)} = (g_0^{(n)}, g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_n^{(n)}, 0, \dots),$$

onde $g_j^{(n)} = \text{sinal}(b_{n-j})$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Assim, } T^{-1}g^{(n)} = \sum_{j=0}^n b_{n-j} g_j = \sum_{j=0}^n |b_j|.$$

Portanto, como T^{-1} é limitado $\|T^{-1}g^{(n)}\|_{\ell^\infty} < C < \infty$, independente de n , e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{-1}g^{(n)}\|_{\ell^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < C < \infty$, ou seja, a sequência $(b_n)_0^\infty \in \ell^1$.

Vamos agora mostrar que a sequência solução $y_n \rightarrow 0$, quando $g_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. De fato,

$$y_n = \sum_{j=0}^n b_{n-j} g_j,$$

como $(g_n)_0^\infty \in C_0$ e $(b_n)_0^\infty \in \ell^1$, foi demonstrado no TEOREMA 4.2.2. que nessas

condições $y_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, pelo TEOREMA 4.2.2., concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n \neq 1$ para

$$|\xi| \leq 1.$$

Por outro lado, para mostrarmos (4.2.4), temos que as equações discretas de Volterra conduzem a:

$$y(\xi) = g(\xi) + K(\xi)y(\xi),$$

ou equivalentemente,

$$y(\xi) = \frac{g(\xi)}{1 - K(\xi)} = r(\xi)g(\xi).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|y\|_{\ell^\infty} &= \|r * g\|_{\ell^\infty} \leq \|r\|_{\ell^\infty} \|g\|_{\ell^\infty} \leq \\ &\leq \|r\|_{\ell^1} \|g\|_{\ell^\infty}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|y\|_{\ell^\infty} = \|r\|_{\ell^1} \|g\|_{\ell^\infty}.$$

Portanto, se g_n é limitada e $(r_n)_0^\infty \in \ell^1$, temos que y_n é limitada. ■

A suposição sobre o núcleo $(K_n)_0^\infty$ pertencer ao ℓ^1 pode ser enfraquecida. Basta que $(K_n - K_\infty)_0^\infty \in \ell^1$, para alguma constante $K_\infty \neq 0$.

COROLÁRIO 4.2.2. ([LUBICH-83])

Consideremos a equação discreta de Volterra (4.2.1), onde $(K_n - K_\infty)_0^\infty \in \ell^1$ para algum $K_\infty \neq 0$, e $K_\infty \in \mathbb{C}$; então

$y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $\forall g_n = g_n - g_{n-1} \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente, se e somente se (4.2.3) for válido.

Observações:

1. Em (4.2.3), $K(\xi)$ é interpretado como $\sum_{n=0}^{\infty} (K_n - K_\infty) \xi^n + \frac{K_\infty}{1-\xi}$.
2. $y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre implica em $\forall g_n \rightarrow 0$ (é limitada), respectivamente.

Prova:

Consideremos a equação de Volterra discreta (4.2.1),

$$y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0),$$

que é equivalente a,

$$y(\xi) = g(\xi) + K(\xi)y(\xi)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \xi)(1 - K(\xi))y(\xi) = (1 - \xi)g(\xi)$$

$\Leftrightarrow$ denotando $(1 - \xi)(1 - K(\xi))$ por $(1 - u(\xi))$, obtemos:

$$y(\xi) - u(\xi)y(\xi) = g(\xi) - \xi g(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n u_{n-j} y_j \right) \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-1} \xi^n, \quad \text{onde tomamos } g_{-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(y_n - \sum_{j=0}^n u_{n-j} y_j - g_n + g_{n-1} \right) \xi^n = 0, \quad \forall |\xi| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow y_n - \sum_{j=0}^n u_{n-j} y_j = g_n, \quad \forall n \geq 0. \quad (4.2.5)$$

Isso demonstra que a equação (4.2.2) é equivalente a equação (4.2.1). O que nos permite demonstrar o teorema para essa segunda equação. Para esse efeito provemos que as hipóteses dos TEOREMA 4.2.1. e do COROLÁRIO 4.2.1. estão satisfeitas.

Os coeficientes da série de potências:

$$1 - u(\xi) = (1 - \xi)(1 - K(\xi)) = (1 - \xi) \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (K_n - K_{\infty}) \xi^n \right) - K_{\infty}$$

pertencem ao ℓ^1 .

$$\text{E ainda } u(\xi) \neq 1 \text{ se e somente se } \sum_{n=0}^{\infty} (K_n - K_{\infty}) \xi^n - \frac{K_{\infty}}{1-\xi} \neq 1.$$

Portanto, aplicando o TEOREMA 4.2.2. e o COROLÁRIO 4.2.1. para a equação:

$$y_n - \sum_{j=0}^n u_{n-j} y_j = v_n,$$

que é equivalente a equação (4.2.1), temos o resultado. ■

4.3. RESULTADOS SOBRE ESTABILIDADE DOS MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO

Neste item estudaremos o comportamento assintótico de soluções numéricas obtidas pela aplicação de métodos lineares de passo múltiplo, com tamanho de passo $h > 0$ fixo, para a seguinte classe de equações integrais de Volterra de tipo convolução:

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_0^t K(t-s)y(s)ds \quad (t \geq 0), \quad (4.3.1)$$

onde $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ e o núcleo contínuo $K(t) \in L^1(0, \infty)$ é uma função definida positiva com $(K(nh))_0^\infty \in \ell^1$.

Como vimos pelo LEMA 2.2.1., aplicando um método linear de passo múltiplo à equação (4.3.1), obtemos uma equação discreta de tipo convolução:

$$y_n = g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n-j} K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0),$$

onde $g_n = g(t_n) + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n,j} K_{n-j} y_j$ e $K_n = K(nh)$ é uma sequência definida positiva pertencente ao ℓ^1 .

Para esta classe de funções temos o seguinte resultado sobre a estabilidade da solução numérica:

TEOREMA 4.3.1. (ILUBICH-83)

Aplicando um método linear de passo múltiplo fortemente estável a equação (4.3.1), onde assumimos sem perda de generalidade que $K(0) = 1$, pois K é definida positiva. Então a solução numérica satisfaz $y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente, e λh estiver contido no disco de estabilidade do método.

Prova:

Seja $C = \frac{1}{2R}$, onde R é o raio do disco de estabilidade do método. Pelos LEMAS 3.3.4. e 3.3.6. temos que $((\omega_0 + C)K_0, \omega_1 K_1, \omega_2 K_2, \dots)$ é uma sequência definida positiva. Pela caracterização de Toeplitz-Caratheodory (LEMA 3.3.5) temos que:

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} K_n \omega_n \xi^n \geq -CK_0, \text{ para } |\xi| \leq 1.$$

Logo, para todo λh pertencente ao disco de estabilidade do método

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n \neq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda h} \right), \text{ para } |\xi| \leq 1.$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n \neq \frac{1}{\lambda h}, \quad \text{para } |\xi| \leq 1 \text{ e para } \lambda h \text{ no disco de}$$

estabilidade do método.

Isto é exatamente a condição de Paley-Wiener para a equação:

$$y_n = g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K_{n-j} y_j, \quad (n \geq 0) \quad (4.3.2)$$

onde

$$g_n = g(t_n) + \lambda h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K_{n-j} y_j.$$

Como $K_n \rightarrow 0$, pois $(K_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$, e os pesos w_{nj} são limitados, concluímos que $g_n \rightarrow 0$ (é limitada) se e somente se $g(t_n) \rightarrow 0$ (é limitada), respectivamente.

Aplicando o TEOREMA 4.2.2. e o LEMA 4.2.1. à equação (4.3.2) temos que $y_n \rightarrow 0$ (é limitada). O que demonstra este resultado. ■

E como um corolário desse teorema, temos:

TEOREMA 4.3.2. ([LUBICH-83])

Aplicando um método linear de passo múltiplo A-estável a equação integral (4.3.1), onde assumimos que $K(0) = 1$, então:

$y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente.

Prova:

A prova deste teorema é idêntica à do teorema anterior. Lembramos apenas que o raio do disco de estabilidade dos métodos A-estáveis é $R = \infty$ e portanto $C = 0$. ■

A recíproca desse teorema também é válida, desde que o método linear de passo múltiplo utilizado seja fortemente estável, como assegura o corolário abaixo.

COROLÁRIO 4.3.1. (ILUBICH-83)

Se $y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente, para alguma equação integral com núcleo $K(t)$ contínuo definido positivo não nulo pertencente ao espaço $L^1(0, \infty)$ e para todo λh , com $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ e $h > 0$, então o método é A-estável.

Prova:

Sejam $K(0) = 1$ (sem perda de generalidade) e $h > 0$. Então, pelo TEOREMA 4.2.2. temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n \neq \frac{1}{z}, \text{ para } |\xi| \leq 1 \text{ e } z \in D,$$

onde D é o disco de estabilidade do método. Logo,

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n \geq 0, \text{ para } |\xi| \leq 1.$$

Isto é,

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K(nh) \xi^n \geq 0, \text{ para } |\xi| \leq 1.$$

E isso implica em:

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n \geq 0, \text{ para } |\xi| \leq 1 \text{ e } h \rightarrow 0.$$

Pelo LEMA 3.3.5. temos que $(\omega_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência definida positiva, e pelo LEMA 3.3.7. concluímos que o método é A-estável. ■

Temos ainda, um outro corolário do TEOREMA 4.3.2. Neste resultado a hipótese sobre o núcleo $K(t) \in L^1(0, \infty)$ pode ser enfraquecida. Basta que $(K(t) - K_{\infty}) \in L^1(0, \infty)$, para algum $K_{\infty} \neq 0$.

TEOREMA 4.3.3. ([LUBICH-83])

Se aplicamos um método linear de passo múltiplo A-estável a uma equação integral com núcleo definido positivo, onde $(K(t) - K_{\infty}) \in L^1(0, \infty)$ para algum $K_{\infty} \neq 0$, então a solução numérica $y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $v_y(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente.

Prova:

Seja $b_n = K_n - K_{\infty}$. Quando aplicamos um método linear de passo múltiplo à equação (4.3.1), obtemos a equação:

$$y_n = g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n-j} K_{n-j} y_j$$

$$= g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n-j} b_{n-j} y_j + \sum_{j=0}^n w_{n-j} K_{\infty} y_j,$$

onde,

$$g_n = g(t_n) + \lambda h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} b_{n-j} y_j + \lambda h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K_{\infty} y_j.$$

Logo,

$$g_n = f_n + \lambda h K_{\infty} \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} y_j,$$

onde,

$$f_n = g(t_n) + \lambda h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} b_{n-j} y_j.$$

$$\text{Agora } \nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

$$= g(t_n) - g(t_{n-1}) + \lambda h \sum_{j=-k}^{-1} (w_{nj} b_{n-j} - w_{n-1,j} b_{n-1-j}) y_j.$$

Portanto $\nabla f_n \rightarrow 0$ (é limitada) $\iff \nabla g(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), pois quando $n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow 0$ e assim o somatório acima é seguramente zero, no limite.

Multiplicando a expressão de g_n por ξ^n , para $n = 0, 1, 2, \dots$, e somando todas as equações obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n + \lambda h K_{\infty} \sum_{j=-k}^{-1} y_j \sum_{n=0}^{\infty} w_{nj} \xi^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n + \lambda h K_{\infty} \frac{P(\xi)}{\rho(\xi)},$$

onde $P(\xi)$ é um polinômio.

$$\text{Considerando } f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n, \quad g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n \quad \text{e}$$

$$(\omega K)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n, \text{ da expressão de } y_n \text{ obtemos:}$$

$$y(\xi) = g(\xi) + \lambda h (\omega K)(\xi) y(\xi)$$

$$= f(\xi) + \lambda h K_{\infty} \frac{P(\xi)}{\rho(\xi)} + \lambda h (\omega K)(\xi) y(\xi).$$

Desta forma:

$$y(\xi)(1 - \lambda h (\omega K)(\xi)) = \frac{f(\xi)\tilde{\rho}(\xi) + \lambda h K_{\infty} P(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)}$$

$$\Rightarrow y(\xi) = \frac{f(\xi)\tilde{\rho}(\xi) + \lambda h K_{\infty} P(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)(1 - \lambda h (\omega K)(\xi))}$$

Observe que $(\omega K)(\xi) \neq \frac{1}{\lambda h}$ para $|\xi| \leq 1$ e que as raízes de $\tilde{\rho}(\xi)$ têm módulo maior ou igual a 1. Portanto, o denominador acima só poderá se anular nas raízes de $\tilde{\rho}(\xi)$ com módulo igual a 1. Demonstraremos a seguir que esse fato não ocorre.

$$y(\xi) = \frac{f(\xi)\tilde{\rho}(\xi) + \lambda h K_{\infty} P(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)(1 - \lambda h (\omega K)(\xi))} = \frac{f(\xi)\tilde{\rho}(\xi) + \lambda h K_{\infty} P(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)(1 - \lambda h (\omega b)(\xi) - \lambda h K_{\infty} \omega(\xi))}$$

$$= \frac{f(\xi)\tilde{\rho}(\xi) + \lambda h E_{\infty} P(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi)(1 - \lambda h(\omega b)(\xi) - \lambda h E_{\infty} \tilde{\sigma}(\xi)/\tilde{\rho}(\xi))}$$

$$= \frac{f(\xi)\tilde{\rho}(\xi) + \lambda h E_{\infty} P(\xi)}{\tilde{\rho}(\xi) - \lambda h \tilde{\rho}(\xi)(\omega b)(\xi) - \lambda h E_{\infty} \tilde{\sigma}(\xi)}$$

Da última expressão concluímos que seu denominador não se anula nos zeros de $\tilde{\rho}(\xi)$, pois $\tilde{\rho}(\xi)$ e $\tilde{\sigma}(\xi)$ não possuem raízes comuns. Ainda, pelo fato dos coeficientes de $(\omega b)(\xi)$ estarem no ℓ^1 , temos que os coeficientes de $\tilde{\rho}(\xi) - \lambda h \tilde{\rho}(\xi)(\omega b)(\xi) - \lambda h E_{\infty} \tilde{\sigma}(\xi)$ estão no ℓ^1 . Podemos então aplicar o teorema da inversão de Wiener (TEOREMA 1.2.1.) para concluir que os coeficientes de

$$r(\xi) = \frac{1}{\tilde{\rho}(\xi) - \lambda h \tilde{\rho}(\xi)(\omega b)(\xi) - \lambda h E_{\infty} \tilde{\sigma}(\xi)}, \text{ estão no } \ell^1.$$

Logo,

$$y(\xi) = r(\xi)(\tilde{\rho}(\xi)f(\xi) + \lambda h E_{\infty} P(\xi)).$$

Como $(1-\xi)$ é um divisor de $\tilde{\rho}(\xi)$, temos:

$$y(\xi) = r(\xi)(q(\xi)(1-\xi)f(\xi) + \lambda h E_{\infty} P(\xi)),$$

onde $q(\xi)$ é um polinômio.

Sejam:

$$r_1(\xi) = r(\xi)q(\xi) \quad \text{e} \quad r_2(\xi) = \lambda h E_{\infty} P(\xi)r(\xi).$$

Os coeficientes de $r_1(\xi)$ e $r_2(\xi)$ estão no ℓ^1 . Logo,

$$y(\xi) = r_1(\xi)\tilde{v}f(\xi) + r_2(\xi), \quad \text{onde } \tilde{v}f(\xi) = (1-\xi)f(\xi),$$

isto é,

$$y_n = \sum_{j=0}^n r_{n-j}^1 \nabla f_j + r_n^2.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $r_n^2 \rightarrow 0$ e $\sum_{j=0}^n r_{n-j}^1 \nabla f_j \rightarrow 0$, pois

$l^1 * C_0 \subset C_0$, conforme observamos na demonstração do TEOREMA 4.2.2..

Portanto, $y_n \rightarrow 0$. ■

LUBICH apresentou um exemplo, no qual mostra que a classe de equações integrais com núcleo definido positivo não preserva a região de estabilidade D do método. Tal exemplo é exibido a seguir:

EXEMPLO 4.3.1.

A fórmula BDF de 5-passo é conhecida como $A(51^0)$ -estável. Os pesos da quadratura associada são:

$$w_0 = \frac{60}{137}, w_1 = \frac{300}{137} w_0, 2w_0, \dots$$

Aplicando este método com tamanho de passo $h = 1$, à equação

$$(4.2.1) \text{ com } \lambda < 0 \quad e \quad K(t) = \begin{cases} 2-t & (0 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t \geq 2) \end{cases},$$

que é uma função não negativa, não crescente, convexa e definida positiva; obtemos:

$$\lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n = \lambda \omega_0 (2 + \frac{300}{137} \xi) = 1 \quad \text{para algum } |\xi| < 1, \text{ quando}$$

$|\lambda|$ é escolhido bastante grande. ■

O exemplo acima mostra que nem sempre a aplicação de um método $A(\alpha)$ -estável (no sentido de Equações Diferenciais) a uma equação integral resulta num esquema estável para todo λh na região $A(\alpha)$ -estabilidade.

As regiões de $A(\alpha)$ -estabilidade de um método para equações diferenciais e integrais coincidem quando resolvemos a equação:

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_0^t K(t-s)y(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (4.3.3)$$

onde o núcleo $K(t)$ é uma função contínua no ℓ^1 e é completamente monotônica. Para demonstrar este resultado, usaremos o seguinte fato:

LEMA 4.3.1.

Seja $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência completamente monotônica, com $K(0) = 1$. E seja $(z_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$. Então,

$\sum_{n=0}^{\infty} K_n z_n$ está contida na envoltória convexa de:

$$\{ \sum_{n=0}^{\infty} z_n s^n / 0 \leq s \leq 1 \}.$$

Prova:

Pelo teorema de Hausdorff (TEOREMA 1.4.7.) existe uma função limitada não decrescente $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que K_n pode ser representada como uma sequência de momentos:

$$K_n = \int_0^1 s^n d\alpha(s) = \lim_{\Pi} \sum_i s_i^n [\alpha(s_{i+1}) - \alpha(s_i)],$$

onde o limite é tomado sobre as partições $\Pi = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ do intervalo $[0,1]$. Observamos que:

$$\alpha(s_{i+1}) - \alpha(s_i) \geq 0,$$

$$\sum_i (\alpha(s_{i+1}) - \alpha(s_i)) = \alpha(1) - \alpha(0) = K_0 = 1.$$

Daqui,

$$\sum_i (\alpha(s_{i+1}) - \alpha(s_i)) \sum_{n=0}^{\infty} z_n s_i^n$$

está contida na envoltória convexa de $\{ \sum_{n=0}^{\infty} z_n s^n / 0 \leq s \leq 1 \}$, e assim, o limite também está, pois esta é fechada. Então,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} z_n s^n d\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \int_0^1 s^n d\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z_n.$$

TEOREMA 4.3.4.

Aplicando um método linear de passo múltiplo $A(\alpha)$ -estável à equação (4.3.3), onde assumimos que a curva de localização de raízes do método,

$$(\rho/\sigma)(e^{it}) \quad (0 \leq t \leq H), \text{ está contida no semi-plano } H, \quad (4.3.4)$$

onde $H = \{w/ -\alpha \leq \arg(w) \leq H-\alpha\} \cup \{\infty\}$. Então a solução numérica satisfaz:

$y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g(t_n) \rightarrow 0$ (é limitada), respectivamente, e $|\arg(\lambda) - H| < \alpha$.

Fig.1. curva $(\rho/\sigma)(e^{it})$

Obs: Segundo LUBICH a suposição (4.3.4) é satisfeita para praticamente todos os métodos importantes $A(\alpha)$ -estáveis, em particular para fórmulas BDF.

Prova:

Sabemos que o conjunto $E = \{ (\rho/\sigma)(\xi), |\xi| \geq 1 \}$ é o complemento da região de estabilidade D do método. Desde que o método é $A(\alpha)$ -estável, E é um subconjunto de $H \cup \bar{H}$, onde $\bar{H}$ é o semi-plano conjugado de H .

Pelo teorema da aplicação aberta, (4.3.4) implica que:

$\frac{\rho(re^{it})}{\sigma(re^{it})}$ está em H para $r \geq 1$ e $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dai,

$$\begin{aligned} \frac{\rho(re^{it})}{\sigma(re^{it})} &= \frac{\rho(re^{it})}{\sigma(re^{it})} \cdot \frac{\overline{\rho(re^{it})}}{\overline{\rho(re^{it})}} \cdot \frac{\overline{\sigma(re^{it})}}{\overline{\sigma(re^{it})}} \\ &= \frac{\|\rho(re^{it})\|}{\|\sigma(re^{it})\|} \cdot \frac{\overline{\sigma(re^{it})}}{\overline{\rho(re^{it})}} \\ &= \frac{\|\rho(re^{it})\|}{\|\sigma(re^{it})\|} \cdot \frac{\overline{\sigma(re^{it})}}{\overline{\rho(re^{it})}} \cdot \frac{(e^{it}/r)^k}{(e^{it}/r)^k} \\ &= \frac{\|\rho(re^{it})\|}{\|\sigma(re^{it})\|} \cdot \frac{\tilde{\sigma}(e^{it}/r)}{\tilde{\rho}(e^{it}/r)} \end{aligned}$$

isto é,

$\frac{\tilde{\sigma}(e^{it}/r)}{\tilde{\rho}(e^{it}/r)}$ está em H , para $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dai,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n r^n e^{int} \in H, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n r_1^n e^{int} r^n \in H, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 < r_1 \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Seja $z_n = \omega_n r_1^n e^{int}$. Então $(z_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$.

Pelo LEMA 4.3.1., $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n r_1^n e^{int} \in H$, $0 \leq r_1 < 1$, $0 \leq t \leq \pi$.

Logo,

$$\lim_{r_1 \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n r_1^n e^{int} \in H \quad (\text{pois } H \text{ é fechado}).$$

Desta forma $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n \in H\bar{H}$ para $|\xi| \leq 1$.

Logo, se $|\arg(\lambda) - \pi| < \alpha$, então $\lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n \neq 1$ para $|\xi| \leq 1$.

Pelo TEOREMA 4.2.2. e pelo COROLÁRIO 4.2.1. temos que $y_n \rightarrow 0$ (é limitado), sempre que $q_n \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente. Agora, $q_n \rightarrow 0$ (é limitada) se e somente se $q(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente. ■

4.4. SISTEMAS DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE

Nesta seção estenderemos os resultados das seções anteriores para sistemas de equações integrais.

O teorema de Paley-Wiener para sistemas de equações integrais lineares de tipo convolução é:

TEOREMA 4.4.1. ([LUBICH-83])

Consideremos o sistema de equações integrais de Volterra:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t-s)y(s)ds \quad (t \geq 0) \quad \text{em } \mathbb{C}^d,$$

onde a função núcleo $K(t) \in L^1(0, \infty)$; então:

$$y(t) \rightarrow 0, \text{ sempre que } g(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

se e somente se

$$\det \left[I - \int_0^\infty e^{-ws} K(s)ds \right] \neq 0 \quad \text{pra } \operatorname{Re}(w) \geq 0.$$

A versão discreta desse teorema é:

TEOREMA 4.4.2. ([LUBICH-83])

Consideremos o sistema discreto de Equações de Volterra:

$$y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0) \quad \text{em } \mathbb{C}^d, \quad (4.4.1)$$

onde o núcleo $(K_n)_0^\infty \in \ell^1$; então:

$$y_n \rightarrow 0, \text{ sempre que } g_n \rightarrow 0, \quad (4.4.2)$$

se e somente se

$$\det \left[I - \sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n \right] \neq 0 \quad \text{para } |\xi| \leq 1. \quad (4.4.3)$$

Observação: Uma sequência de matrizes pertence ao ℓ^1 , quando todas as sequências formadas pelos elementos correspondentes da sequência de matrizes estão no ℓ^1 .

Prova:

Mostraremos (4.4.3) por redução ao absurdo.

Suponhamos que $\sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi^n$ tem um autovalor 1, para algum $|\xi_0| \leq 1$,

isto é, $\det(I - \sum_{n=0}^{\infty} K_n \xi_0^n) = 0$. Denotando por v o autovetor correspondente,

tomando $y_n = \xi_0^{-n} v \rightarrow 0$, e definindo g_n por :

$$g_n = y_n - \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j = \xi_0^{-n} v - \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^j v$$

temos que $y_n = \xi_0^n v$ é solução de (4.4.1) e mostraremos a seguir que $g_n \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} g_n &= \xi_0^{-n} v - \xi_0^{-n} \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^{n-j} v = \xi_0^{-n} \left(I - \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^{n-j} \right) v \\ &= \xi_0^{-n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} K_j \xi_0^j - \sum_{j=0}^n K_{n-j} \xi_0^{n-j} \right) v = \xi_0^{-n} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} K_j \xi_0^j \right) v \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} K_j \xi_0^{j-n} v. \end{aligned}$$

Logo,

$$|g_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} K_j \xi_0^{j-n} v \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j| |v| |\xi_0|^{j-n} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j| |v|.$$

Portanto,

$$|g_n| \leq |v| \sum_{j=n+1}^{\infty} |K_j| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

ou seja,

$g_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Observe no entanto que $y_n \not\rightarrow 0$, o que contradiz (4.4.2).

Por outro lado, para mostrar (4.4.2) fazemos:

$$y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j,$$

isto é,

$$y(\xi) = g(\xi) + K(\xi)y(\xi).$$

Por hipótese, temos que:

$$(I - K(\xi)) \in \mathcal{L}^1 \quad \text{e} \quad \det(I - K(\xi)) \neq 0.$$

Logo,

$$(I - K(\xi))^{-1} = \frac{\text{adj}(I - K(\xi))}{\det(I - K(\xi))} \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto,

$$y(\xi) = \frac{\text{adj}(I - K(\xi))}{\det(I - K(\xi))} g(\xi),$$

ou seja,

$$y_n \rightarrow 0, \text{ sempre que } g_n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ pois } \mathcal{L}^1 * C_0 \subset C_0. \quad \blacksquare$$

O seguinte resultado garante a limitação da solução da equação discretizada (4.4.1).

COROLÁRIO 4.4.1. ([LUBICH-83])

Consideremos o sistema discreto de equações de Volterra (4.4.1).

Então,

$$y_n \text{ é limitada, sempre que } g_n \text{ for limitada,} \quad (4.4.4)$$

se e somente se (4.4.3) for válida.

Prova:

Demonstraremos primeiro que (4.4.4) implica em (4.4.3). Para isso consideremos o sistema discreto (4.4.1):

$$y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j, \quad n \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_0 &= g_0 + K_0 y_0 & \Rightarrow g_0 &= (I - K_0) y_0, \\ y_1 &= g_1 + K_1 y_0 + K_0 y_1 & \Rightarrow g_1 &= K_1 y_0 + (I - K_0) y_1, \\ y_2 &= g_2 + K_2 y_0 + K_1 y_1 + K_0 y_2 & \Rightarrow g_2 &= K_2 y_0 + K_1 y_1 + (I - K_0) y_2, \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Logo, vemos que uma dada sequência de vetores $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, a sequência $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ pode ser determinada de maneira única, desde que $\det(I - K_0) \neq 0$.

Portanto, a expressão (4.4.4) pode ser reformulada da seguinte maneira:

O operador linear limitado no $(\ell^{\infty})^d$,

$T: y \rightarrow g = y - Ky$ é inversível.

T é obviamente contínuo, pelo teorema da aplicação aberta, T tem inversa limitada. isto é, $\|T^{-1}g\|_{(\ell^\infty)^d} < \infty$.

Seja $T^{-1}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \xi^n$. Então, se $y = T^{-1}g$, onde $(g_n)_0^\infty \in C_0$,

temos que:

$$(T^{-1}g)_0 = B_0 g_0 = y_0$$

$$(T^{-1}g)_1 = B_1 g_0 + B_0 g_1 = y_1$$

$\vdots$

$$(T^{-1}g)_n = B_n g_0 + B_{n-1} g_1 + \dots + B_0 g_n = y_n$$

$\vdots$

Mostraremos agora que a sequência de matrizes $(B_n)_0^\infty \in \ell^1$, para isso consideremos a sequência de funções $g^{(n)} = (g_0^{(n)}, g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_n^{(n)},$

$$0, \dots), \text{ onde } g_j^{(n)} = \begin{bmatrix} \text{sinal } b_{11}^{(n-j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Assim, } \sum_{j=0}^n B_{n-j} g_j^{(n)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n |b_{11}^{(j)}| \\ s_2 \\ \vdots \\ s_d \end{bmatrix} = S, \text{ onde } s_k = \sum_{j=0}^n b_{kj}^{(n-j)} g_j^{(n)},$$

$k = 2, \dots, n$.

Portanto, como $\|T^{-1}g\|_{(\ell^\infty)^d} < C < \infty$, independente de n , segue

que $\|S\|_{(\ell^\infty)^d} < \infty$. Note que $S_2, S_3, \dots, S_d$ são limitados. Assim, temos

que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |b_{11}^{(n)}| < C < \infty$, ou seja, a sequência $(b_{11}^{(n)})_0^\infty \in \ell^1$.

Repetindo o mesmo raciocínio, escolhendo sequências de funções g_s apropriadas, chegaremos que as sequências $(b_{12}^{(j)})_0^\infty, (b_{13}^{(j)})_0^\infty, \dots, (b_{dd}^{(j)})_0^\infty$ estão no ℓ^1 . Assim a sequência de matrizes $(B_n)_0^\infty \in \ell^1$.

Mostraremos agora que a sequência solução $y_n \rightarrow 0$, quando $g_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. De fato,

$$y_n = \sum_{j=0}^n B_{n-j} g_j,$$

como $(g_n)_0^\infty \in C_0$ e $(B_n)_0^\infty \in \ell^1$, foi demonstrado no TEOREMA 4.2.2., que nessas condições $y_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

A demonstração acima é válida quando os coeficientes do sistema (4.4.1) são reais, para o caso complexo a demonstração exige uma pequena modificação, basta tomar sequências de funções g_s , da seguinte maneira:

$$g_j^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{b_{11}^{(n-j)}}}{||b_{11}^{(n-j)}||} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ para mostrar que a sequência } (b_{11}^{(n)})_0^\infty \in \ell^1;$$

$$g_j^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{b_{12}^{(n-j)}}}{\|b_{12}^{(n-j)}\|} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ para mostrar que a sequência } (b_{12}^{(n)})_0^\infty \in \ell^1;$$

E assim por diante, até mostrar que a sequência de matrizes $(B_n)_0^\infty \in \ell^1$. Isso produzirá (4.4.3).

Agora a demonstração da condição de (4.4.4) é análoga à demonstração para o caso escalar. ■

Voltaremos agora nossa atenção para situações mais gerais, onde $(K_n - K_\infty)_0^\infty \in \ell^1$, para alguma matriz K_∞ arbitrária não nula. O sistema de equações de Volterra (4.4.1) pode ser transformado de tal maneira que a matriz K_∞ de ordem d , tenha a seguinte forma:

$$K_\infty = \begin{bmatrix} 0_{k \times d} \\ K_{\ell \times d}^1 \end{bmatrix}_{d \times d}, \quad (4.4.5)$$

onde, ℓ é a dimensão do espaço complementar ao nulo e $k=\ell-d$ é a dimensão do nulo.

Após o sistema sofrer esta transformação a função g terá a seguinte expressão:

$$g_n = \begin{bmatrix} (g_n^0)_{k \times d} \\ (g_n^1)_{\ell \times d} \end{bmatrix}.$$

Para esta equação temos o seguinte resultado:

COROLÁRIO 4.4.2. ([LUBICH-83])

Consideremos o sistema de equações de Volterra (4.4.1), onde assumimos que $(K_n - K_\infty)_0^\infty \in \ell^1$, para alguma matriz K_∞ , a qual tem a forma (4.4.5). Então

$y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g_n^0, v_n^1 \rightarrow 0$ (forem limitadas), respectivamente. (4.4.6)

se e somente se,

$$(1 - \xi)^d \det(I - K(\xi)) \neq 0 \text{ para } |\xi| \leq 1. \quad (4.4.7)$$

Observações:

1. Se K_∞ é uma matriz não singular, então as condições (4.4.3) e (4.4.7) são equivalentes. Pois, para $\xi \neq 1$ (4.4.7) implica trivialmente em (4.4.3). Veja que $(1 - \xi)^d \det(I - K(\xi)) = \det((1 - \xi)(I - K(\xi))) = \det((1 - \xi)(I - \sum_{n=0}^{\infty} (K_n - K_\infty) \xi^n) - K_\infty)$. Portanto para $\xi=1$, temos que $(1-\xi)^d \det(I - K(\xi)) = \det(K_\infty) \neq 0$. Portanto $\det(I - K(1)) = \infty$.
3. Para o seguinte exemplo, onde K não é inversível, as condições (4.4.3) e (4.4.7) não são equivalentes:

$$y_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sum_{j=0}^n y_j.$$

A solução y_n é tal que $y_n \rightarrow 0$, enquanto que (4.4.3) é satisfeito. Isso ocorre pois $K_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin \ell^1$ e $\exists K_\infty$ tal que $(K_n - K_\infty) \in \ell^1$ mas $\det(K_\infty) = 0$.

Prova: (COROLÁRIO 4.4.2.)

O sistema de equações $y_n = g_n + \sum_{j=0}^n K_{n-j} y_j$, $n \geq 0$, pode ser

reescrito como:

$$(I - K(\xi))y(\xi) = g(\xi).$$

Multiplicando as ℓ últimas linhas desse sistema por $(1 - \xi)$, obtemos:

$$(I - U(\xi))y(\xi) = \begin{bmatrix} g^0(\xi) \\ (1-\xi)g^1(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.4.8)$$

onde $U(\xi)$ representa uma matriz com seus elementos sendo séries de potências com coeficientes no ℓ^1 .

Como $(1-\xi)^\ell \det(I - K(\xi)) = \det(I - U(\xi))$, temos que $\det(I - U(\xi)) \neq 0$, para $|\xi| \leq 1$, se e somente se (4.4.7) for satisfeito.

De (4.4.8) obtemos:

$$y_n - \sum_{j=0}^n u_{n-j} y_j = \begin{bmatrix} g_n^0 \\ 1 \\ v g_n^1 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a equação 4.4.1.

Aplicando o TEOREMA 4.4.2. e o COROLÁRIO 4.4.1. temos o

resultado, ou seja,

$$y_n \rightarrow 0 \text{ (é limitada), sempre que } g_n^0 \rightarrow 0, \text{ } v_n^1 \rightarrow 0, \text{ (forem}$$

limitadas), respectivamente. ■

Voltaremos agora à questão de estabilidade dos métodos lineares de passo múltiplos para sistemas de equações integrais. Antes porém, precisamos estender as definições de seqüências e funções definidas positiva, para espaços de dimensão maior que 1.

DEFINIÇÃO 4.4.1.

Uma função contínua $K: \mathbb{R} \rightarrow M_d$, onde M_d é o conjunto das matrizes complexas $d \times d$, é chamada definida positiva se a função $\langle K(\cdot)v, v \rangle$ é definida positiva para todo $v \in \mathbb{C}^d$, onde $\langle, \rangle$ denota um produto interno em $\mathbb{C}^d$.

DEFINIÇÃO 4.4.2.

Uma seqüência de matrizes $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ é chamada definida positiva, se a seqüência de números complexos $\langle K_n v, v \rangle$ é definida positiva para todo $v \in \mathbb{C}^d$.

Consideremos agora a seguinte classe de sistemas de equações de Volterra:

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_0^t K(t-s)y(s)ds \quad (t \geq 0) \quad \text{em } \mathbb{C}^d, \quad (4.4.9)$$

onde $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ e a matriz $K(t) \in L^1(0, \infty)$, com $(K(nh))_0^\infty \in \ell^1$ e $K(t)$ é uma função definida positiva, com respeito a algum produto interno.

Aplicando um método linear de passo múltiplo à equação (4.4.9), obtemos o sistema discreto de equações de tipo convolução:

$$y_n = g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n-j} K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0), \quad (4.4.10)$$

onde g_n é definido por:

$$g_n = g(t_n) + \lambda h \sum_{j=0}^n w_{n-j} K_{n-j} y_j, \quad \text{com } K_n = K(nh).$$

A seguir provaremos propriedades desta equação de diferenças, semelhantes às do caso unidimensional.

LEMA 4.4.1.

Para toda matriz K , seu espectro está contido no conjunto $\{ \langle Kv, v \rangle / \|v\| = 1 \}$.

Prova:

seja $p \in \text{espectro}(K)$.

$$p \in \text{espectro}(K) \iff \exists x \neq 0 / Kx = px.$$

$$\text{Seja } v = \frac{x}{\|x\|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle Kv, v \rangle &= \left\langle K \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle Kx, x \rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle px, x \rangle = \\ &= \frac{p}{\|x\|^2} \langle x, x \rangle = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} p = p. \\ &= p.\end{aligned}$$

Portanto,

$$p \in \{ \langle Kv, v \rangle / \|v\| = 1 \}.$$

TEOREMA 4.4.3. (ILUBICH-83)

Aplicando um método linear de passo múltiplo fortemente estável ao sistema de equações (4.4.10), onde assumimos sem perda de generalidade, que $\|K(0)\| \leq 1$. Então a solução numérica satisfaz:

$y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente, e λh pertencer ao disco de estabilidade do método.

Prova:

Seja $C = \frac{1}{2R}$, onde R é o raio do disco de estabilidade do método. Pelos LEMAS 3.3.4. e 3.3.6. temos que $((\omega_0 + C)\langle K_0 v, v \rangle, \omega_1 \langle K_1 v, v \rangle, \dots)$ é uma sequência definida positiva para todo $v \in \mathbb{C}^d$.

E pela caracterização de Toeplitz-Caratheodory (LEMA 3.3.5.):

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \langle K_n v, v \rangle \xi^n \geq -C \langle K_0 v, v \rangle, \quad \text{para } |\xi| \leq 1 \text{ e } v \in \mathbb{C}^d.$$

Entretanto,

$\langle K_0 v, v \rangle \leq 1$ para $\|v\| = 1$, pois pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vem:

$$|\langle K_0 v, v \rangle| \leq \|K_0 v\| \|v\| \leq \|K_0\| \leq 1.$$

Temos ainda que $\langle K_0 v, v \rangle$ é sempre positivo, pois o primeiro elemento de uma sequência definida positiva é positivo. Logo,

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \langle K_n v, v \rangle \xi^n \geq -C, \quad \text{para } |\xi| \leq 1 \text{ e } \|v\| = 1, v \in \mathbb{C}^d.$$

Daqui, temos que:

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n v, v \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \langle K_n v, v \rangle \xi^n \neq \frac{1}{\lambda h}, \quad \text{para } |\xi| \leq 1,$$

$\|v\| = 1$ e para todo λh pertencente ao disco de estabilidade, uma vez que:

$$\frac{1}{\lambda h} \text{ está no semiplano } \operatorname{Re}(z) < -C, \quad C > 0 \text{ e}$$

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \xi^n v, v \right\rangle \text{ está no semiplano } \operatorname{Re}(z) \geq -C.$$

Desde que para toda matriz K , seu espectro pertence ao conjunto $\{\langle Kv, v \rangle / \|v\| = 1\}$, isso implica que :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \langle K_n v, v \rangle \xi^n \right) v \neq \frac{1}{\lambda h} v, \quad \|v\| = 1 \text{ e } |\xi| \leq 1,$$

ou seja,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \zeta^n - \frac{1}{\lambda h} I \right) v \neq 0, \quad \|v\| \neq 1.$$

Logo, este sistema admite uma única solução se e somente se

$$\det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n K_n \zeta^n - \frac{1}{\lambda h} I \right) \neq 0, \text{ que é a condição de Paley-Wiener para o sistema de}$$

equações:

$$y_n = g_n + \lambda h \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} K_{n-j} y_j \quad (n \geq 0).$$

Agora aplicando o COROLÁRIO 4.4.1. e o TEOREMA 4.4.2. temos o resultado. ■

Como um corolário desse resultado, quando $R = \infty$, temos:

TEOREMA 4.4.4. ([LUBICH-83])

Aplicando um método linear de passo múltiplo A-estável ao sistema de equações (4.4.10). Então a solução numérica satisfaz:

$y_n \rightarrow 0$ (é limitada), sempre que $g(t_n) \rightarrow 0$ (for limitada), respectivamente.

Prova

A demonstração desse resultado é idêntica à demonstração do Teorema anterior, apenas lembramos que o raio do disco de estabilidade dos métodos A-estáveis é $R = \infty$ e consequentemente $C = 0$. ■

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Apresentaremos aqui alguns resultados numéricos de métodos lineares de passo múltiplos aplicados à equação integral linear de Volterra de segunda espécie:

$$y(t) = \frac{10+11t}{1+t} - 10e^{-t} - 10 \int_0^t e^{-(t-s)} y(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (5.1.1)$$

cujas solução exata é $y(t) = \frac{t}{(1+t)^2}$.

Como vimos no capítulo 2, os métodos lineares de passo múltiplo podem ser reduzidos a regras de quadratura:

$$y_n = g(t_n) + h \sum_{j=-k}^{-1} w_{nj} K(t_n, t_j, y_j) + h \sum_{j=0}^n w_{n-j} K(t_n, t_j, y_j), \quad t \geq 0.$$

Na qual os pesos (w_n) , $(w_{n,-k})$, ..., $(w_{n,-1})$ são obtidos a partir do método linear de passo múltiplo empregado e das regras de quadratura utilizadas nos cálculos dos valores iniciais. A demonstração do LEMA 2.2.1., do capítulo 2,

mostra claramente como esses pesos podem ser determinados.

Como podemos observar, a equação apresentada acima satisfaz às hipóteses do TEOREMA 4.3.1., ou seja,

- $\lambda = -10$, consequentemente $\text{Re}(\lambda) < 0$;
- o núcleo $K(t,s) = e^{-(t-s)}$ é uma função definida positiva do $L^1(0,\infty)$;
- a função $g(t) = \frac{10+11t}{(1+t)^2} - 10e^{-t} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Portanto pelo Teorema de Paley-Wiener (TEOREMA 4.2.1.), sabemos que o comportamento assintótico da solução teórica $y(t)$ dessa equação tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. E pelo TEOREMA 4.3.1. sabemos que a solução numérica $y_n \rightarrow 0$, quando nh pertence ao disco de estabilidade do método.

Ilustraremos este capítulo com os seguintes métodos: método de Simpson, método de Adams-Bashforth de 2 passos e método de Adams-Moulton de 3 passos.

Em todos esses exemplos, calculamos os valores iniciais pela regra de quadratura do Trapézio composta:

$$\int_0^T g(s)ds = h\left(\frac{1}{2}g(0) + g(h) + g(2h) + \dots + \frac{1}{2}g(T)\right).$$

Os cálculos foram feitos em microcomputador compatível com a linha IBM-PC, de 16 bits. ~~Os programas foram desenvolvidos em linguagem~~ Pascal.

5.2. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SIMPSON

Aplicamos à equação (5.1.1), o método de Simpson, e calculamos os valores iniciais pela regra de quadratura do Trapézio.

O método linear de passo múltiplo de Simpson para calcular a solução de P.V.I. de Equações Diferenciais Ordinárias é dado por:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n).$$

Os pesos da regra de quadratura redutível obtida do método de simpson, usando a regra de quadratura do Trapézio para cálculo dos valores iniciais, são:

$$(\omega_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots \right)$$

$$(w_{n,-2}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots \right)$$

$$(w_{n,-1}) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \dots \right).$$

Mostramos na tabela abaixo os erros, em valor absoluto, obtidos ao empregar esse método à equação (5.1.1):

$h \backslash t$	10	20	30	40	50
0.05	1.86542×10^{-2}	1.01950×10^{-2}	7.00683×10^{-3}	5.33655×10^{-3}	4.30903×10^{-3}
0.1	1.78373×10^{-2}	9.81407×10^{-3}	6.74094×10^{-3}	5.13243×10^{-3}	4.14300×10^{-3}
0.2	1.66710×10^{-2}	9.06702×10^{-3}	6.21981×10^{-3}	4.73244×10^{-3}	3.91889×10^{-3}
0.25	1.60296×10^{-2}	8.70210×10^{-3}	5.96536×10^{-3}	4.53719×10^{-3}	3.66052×10^{-3}
0.5	2.58596×10^{-2}	8.92757×10^{-3}	5.06366×10^{-3}	3.66533×10^{-3}	2.92444×10^{-3}
1.0	1.28357×10^{-2}	4.62475×10^{-3}	2.94122×10^{-3}	2.20873×10^{-3}	1.77426×10^{-3}

$h \backslash t$	60	70	80	90	100
0.05	3.61320×10^{-3}	3.11082×10^{-3}	2.73107×10^{-3}	2.43393×10^{-3}	2.19511×10^{-3}
0.1	3.47387×10^{-3}	2.99058×10^{-3}	2.62531×10^{-3}	2.33955×10^{-3}	2.10989×10^{-3}
0.2	3.20089×10^{-3}	2.75501×10^{-3}	2.41814×10^{-3}	2.15467×10^{-3}	1.94297×10^{-3}
0.25	3.05531×10^{-3}	2.64007×10^{-3}	2.31000×10^{-3}	2.06447×10^{-3}	1.86153×10^{-3}
0.5	2.44415×10^{-3}	2.10145×10^{-3}	1.84338×10^{-3}	1.64181×10^{-3}	1.47999×10^{-3}
1.0	1.48311×10^{-3}	1.27407×10^{-3}	1.11668×10^{-3}	9.93901×10^{-4}	8.95441×10^{-4}

Como é conhecido, o método de Simpson é absolutamente instável. Embora, os erros apresentados nos pontos considerados foram relativamente pequenos, observamos que com a diminuição do tamanho do passo h , houve um pequeno aumento no erro, considerando o mesmo ponto. Isso já era esperado devido a instabilidade do método.

Este método é equivalente a calcular a solução numérica da equação (5.1.1), pela aplicação da regra de quadratura de Simpson combinada com o uso da regra do Trapézio no início, quando necessário.

Já havíamos mostrado, no capítulo 3, que esse método é absolutamente instável, quando aplicado à equação teste linear básica, e esse efeito é confirmado para a equação de convolução.

5.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH DE 2 PASSOS

O método de Adams-Bashforth de 2-passos é dado por:

$$y_{n+2} - y_n = h \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{3}{2} f_n \right).$$

O raio do disco de estabilidade absoluta desse método é $R = \frac{2}{3}$.

D: disco de estabilidade do método.

Os pesos da regra de quadratura redutível obtida desse método, onde os valores iniciais são calculados pela regra de quadratura do trapézio, são:

$$(w_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right)$$

$$(w_{n,-2}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots \right)$$

$$(w_{n,-1}) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots \right).$$

Abaixo mostramos uma tabela contendo os erros , em valores absolutos, obtidos da aplicação desse método, calculando os valores iniciais pela regra de quadratura do trapézio.

$h \backslash t$	10	20	30	40	50
0.05	2.65440×10^{-3}	1.51108×10^{-3}	1.05445×10^{-3}	8.09471×10^{-4}	6.56786×10^{-4}
0.1	5.41019×10^{-3}	3.08161×10^{-3}	2.15086×10^{-3}	1.65135×10^{-3}	1.33997×10^{-3}
0.2	1.34965×10^{01}	3.03054×10^{05}	6.86922×10^{08}	7.82798×10^{11}	9.93951×10^{13}
0.25	3.57012×10^{03}	6.10113×10^{07}	5.28920×10^{11}	1.86113×10^{16}	1.40984×10^{21}
0.5	2.30677×10^{03}	8.50818×10^{06}	1.54996×10^{10}	4.46594×10^{14}	3.13066×10^{18}
1.0	1.97830×10^{01}	2.00020×10^{02}	6.75380×10^{05}	3.16321×10^{06}	9.26732×10^{07}

$h \backslash t$	60	70	80	90	100
0.05	5.52533×10^{-4}	4.76831×10^{-4}	4.19368×10^{-4}	3.74261×10^{-4}	3.37914×10^{-4}
0.1	1.12733×10^{-3}	9.72918×10^{-4}	8.55694×10^{-4}	7.63675×10^{-4}	6.89521×10^{-4}
0.2	1.60157×10^{18}	3.69549×10^{21}	4.27812×10^{24}	6.79306×10^{26}	8.45843×10^{30}
0.25	6.15201×10^{25}	2.22325×10^{30}	7.21894×10^{34}	2.16984×10^{39}	6.10814×10^{43}
0.5	9.32169×10^{21}	3.95218×10^{25}	6.76529×10^{29}	4.14324×10^{33}	9.14301×10^{36}
1.0	9.26732×10^{07}	4.20005×10^{09}	4.96278×10^{10}	1.26480×10^{12}	6.11715×10^{13}

Observamos que para os passos: 1, 0.5, 0.25 e 0.2, o erro calculado é muito grande. Esse fato não nos surpreende pois o método é absolutamente instável para esses tamanhos de passos. Agora para os passos $h = 0.05$ e $h = 0.1$, os erros são relativamente pequenos, o que já era esperado pois λh está contido na região de estabilidade do método.

5.4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ADAMS-MOULTON DE 3 PASSOS

O método de Adams-Moulton de 3 passos é:

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n).$$

O raio do disco de estabilidade é $R = 1.5$.

D: disco de estabilidade do método.

Os pesos da regra de quadratura redutível são:

$$(w_n) = \left(\frac{9}{24}, \frac{28}{24}, \frac{23}{24}, 1, 1, 1, \dots \right)$$

$$(w_{n,-3}) = \left(\frac{13}{24}, \frac{13}{24}, \frac{13}{24}, \frac{13}{24}, \frac{13}{24}, \frac{13}{24}, \dots \right)$$

$$(w_{n,-2}) = \left(\frac{19}{24}, \frac{20}{24}, \frac{20}{24}, \frac{20}{24}, \frac{20}{24}, \frac{20}{24}, \dots \right)$$

$$(w_{n,-1}) = \left(\frac{31}{24}, \frac{26}{24}, \frac{27}{24}, \frac{27}{24}, \frac{27}{24}, \frac{27}{24}, \dots \right).$$

Aplicando este método à equação (5.1.1), obtivemos os seguintes erros, em valores absolutos, nos pontos considerados:

$h \backslash t$	10	20	30	40	50
0.05	8.89060×10^{-9}	5.52825×10^{-9}	4.00248×10^{-9}	3.13493×10^{-9}	2.57592×10^{-9}
0.1	1.37122×10^{-7}	8.51902×10^{-8}	6.16534×10^{-8}	4.82787×10^{-8}	3.96638×10^{-8}
0.2	2.04017×10^{-6}	1.26534×10^{-6}	9.15027×10^{-7}	7.16202×10^{-7}	5.88230×10^{-7}
0.25	4.80533×10^{-6}	2.97755×10^{-6}	2.15235×10^{-6}	1.68429×10^{-6}	1.38314×10^{-6}
0.5	2.23299×10^{-4}	4.22617×10^{-5}	2.87232×10^{-5}	2.24222×10^{-5}	1.83997×10^{-5}
1.0	1.12652×10^{-3}	4.52165×10^{-4}	3.21819×10^{-4}	2.50983×10^{-4}	2.05678×10^{-4}

$h \backslash t$	60	70	80	90	100
0.05	2.18588×10^{-9}	1.89833×10^{-9}	1.67759×10^{-9}	1.50281×10^{-9}	1.36100×10^{-9}
0.1	3.36546×10^{-8}	2.92251×10^{-8}	2.58252×10^{-8}	2.31336×10^{-8}	2.09498×10^{-8}
0.2	4.99008×10^{-7}	4.33266×10^{-7}	3.82818×10^{-7}	3.42887×10^{-7}	3.10495×10^{-7}
0.25	1.17323×10^{-6}	1.01859×10^{-6}	8.99938×10^{-7}	8.06030×10^{-7}	7.29861×10^{-7}
0.5	1.55996×10^{-5}	1.35385×10^{-5}	1.19581×10^{-5}	1.07080×10^{-5}	9.69438×10^{-6}
1.0	1.74211×10^{-4}	1.51086×10^{-4}	1.33377×10^{-4}	1.19382×10^{-4}	1.08044×10^{-4}

Os tamanhos de passos que estão no disco de estabilidade do método são 0.05, 0.1, 0.2 e 0.25. Contudo observamos que para todos os tamanhos de passos considerados, o erro foi bastante pequeno, e assim podemos considerar que a solução numérica obtida é bastante satisfatória.

Para os tamanhos de passo fora da região de estabilidade do método nada podemos concluir, em alguns casos a solução numérica obtida pode ser considerada razoável ou mesmo muito boa, e em outros pode ser considerada insatisfatória ou péssima.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BAKER-77] - BAKER, C.T.H., The numerical Treatment of Integral Equations, Claredon Press, Oxford, 1977.
- [BAKER-86] - BAKER, C.T.H., The State of the art in the Numerical Treatment of Integral Equations, em [ISERLES-86].
- [BAKER-78] - BAKER, C.T.H. & KEECH, M.S., Stability Regions in the Numerical Treatmente of Volterra Equations, SIAM - Journal on Numerical Analysis, Volume 15, N.2, 394-417, 1978.
- [BAKER-82] - BAKER, C.T.H. & MILLER, G.F., Treatment of Integral Equations by Numerical Methods, Academic Press, Londres, 1982.
- [BARTLE-83] - BARTLE, R. G., Elementos de Análise Real, Editora Campos, Rio de Janeiro, 1983.
- [BRUNNER-82] - BRUNNER, H., A Survey of Recent Advances in the Numerical Treatment of Volterra Integral and Integro-Differential Equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 8, N.3, 213-229, 1982.
- [BRUNNER-86] - BRUNNER, H. & VAN DER HOUWEN, P.J., The Numerical Solution of Volterra Equations, North-Holland, 1986.

- [BURTON-83] - BURTON, T.A., Volterra Integral and Differential Equations, Academic Press, New York, 1983.
- [DONOGHUE-69] - DONOGHUE JR, W.F., Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, 1969.
- [ISERLES-86] - ISERLES, A. & POWELL, M.J.D., The State of the Art in Numerical Analysis, Claredon Press, Oxford, 1986.
- [HONIG-70] - HONIG, C. H., Análise Funcional e Aplicações, IME-USP, 1970.
- [HOUWEN-82] - HOUWEN, P.J. & RIELE, H.J.J., Linear Multistep Methods For Volterra Integral Equations of the Second Kind, em [BAKER-82].
- [KOLMOGOROV-76] - KOLMOGOROV, A.N. & FOMIN, S.V., Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional, Editora Mir, Moscú, 1976.
- [LAMBERT-73] - LAMBERT, J.D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, 1973.
- [LAMBERT-86] - LAMBERT, J.D., Developments in Stability Theory for Ordinary Differential Equations, em [ISERLES-86].
- [LIMA-70] - LIMA, E.L., Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$, Brasília, Ed. Universidade de Brasília; São Paulo, Ed. E.Blucher Ltda, 1970.

- [LUBICH-83] - LUBICH, Ch., On the Stability of Linear Multistep Methods for Volterra Convolution Equations, IMA-Journal of Numerical Analysis, N.3, 439-465, 1983.
- [NEVANLINNA-76] - NEVANLINNA, O., On the Numerical Solution of Some Volterra Equations on Infinite Intervals, Report Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1976.
- [PALEY-34] - PALEY, R.E. & WIENER, N., Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society, 1934.
- [PITT-85] - PITT, H.R., Measure and Integration for Use, Claredon Press, Oxford, 1985.
- [WIDDER-46] - WIDDER, N.D., The Laplace Transform, Academic Press, Oxford, 1946.
- [WIENER-33] - WIENER, N., The Fourier Transform and Its Applications, Claredon Press, New York, 1933.
- [WOLKENFELT-82] - WOLKENFELT, P.H.M., The Construction of Reducible Quadrature Rules for Volterra Integral and Integro-Differential Equations, IMA-Journal of Numerical Analysis, N.2, 131-152, 1982.

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO