
Otimização de consumo de combustível em
veículos usando um modelo simplificado de
trânsito e sistemas com saltos markovianos

Diogo Henrique de Melo

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Diogo Henrique de Melo

Otimização de consumo de combustível em veículos usando um modelo simplificado de trânsito e sistemas com saltos markovianos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA.*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

USP – São Carlos
Janeiro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M528o Melo, Diogo Henrique de
Otimização do Consumo de combustível em veículos
usando um modelo simplificado de trânsito e sistemas
com saltos markovianos / Diogo Henrique de Melo;
orientador Eduardo Fontoura Costa. -- São Carlos,
2016.
119 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Ciências de Computação e Matemática
Computacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Controle ótimo. 2. Modelagem matemática. 3.
Sistemas com saltos markovianos. I. Costa, Eduardo
Fontoura, orient. II. Título.

Diogo Henrique de Melo

**Optimization of fuel consumption in vehicles using a
simplified traffic model and Markov jump system**

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

**USP – São Carlos
January 2017**

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por todas as portas que se abriram para que eu pudesse realizar este trabalho e por toda a força em momentos de dificuldades.

Aos meus pais, Carlos e Marinete, por todos os seus esforços e apoio para que eu pudesse chegar até este momento. Agradeço por serem minha base e por não me deixarem desistir, devo tudo a vocês.

Ao meu orientador, Dr. Eduardo Fontoura Costa, por toda sua atenção, paciência, ensinamentos, conselhos, apoio e críticas que enriqueceram este trabalho e principalmente minha formação.

Aos meus amigos do Kikos: Mayksu, Eriveltu, Marcela, Carol, Baianão, Punho, Filosão, Caião, Rich, Cureza Neto, Bixão entre outros que me ajudaram a superar dificuldades e tornaram meus dias mais alegres com boas partidas de PES, poker e truco e principalmente com muita conversa, churrasco e cerveja. A todos os amigos de laboratório pelos momentos alegres e por toda a contribuição, e aos amigos Leandro Lopes, Geander, Diego, Xuxão e outros por toda ajuda, conversa e paciência.

Agradeço em especial aos amigos Eriveltu, Maykon e Bertolucci por toda ajuda em momentos críticos deste trabalho.

Também gostaria de agradecer a minha namorada Lorrana, por todo apoio, motivação, paciência em momentos difíceis, e por estar sempre ao meu lado sendo meu combustível.

À Universidade de São Paulo (USP) e seus funcionários pelas condições de trabalho e a infraestrutura fornecida.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro da bolsa de mestrado (processos 2014/13852 – 8 e 2013/19380 – 8).

Melo, D. H. **Otimização de consumo de combustível em veículos usando um modelo simplificado de trânsito e sistemas com saltos markovianos** 2016. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos - SP.

Esta dissertação aborda o problema de redução do consumo de combustível para veículos. Com esse objetivo, realiza-se o levantamento de um modelo estocástico e de seus parâmetros, o desenvolvimento de um controlador para o veículo, e análise dos resultados. O problema considera a interação com o trânsito de outros veículos, que limita a aplicação de resultados antes disponíveis. Para isto, propõe-se modelar a dinâmica do problema de maneira aproximada, usando sistemas com saltos markovianos, e levantar as probabilidades de transição dos estados da cadeia através de um modelo mais completo para o trânsito no percurso.

Palavras-chave: programação dinâmica, saltos markovianos, cadeias de Markov e controle ótimo.

Abstract

Melo, D. H. **Optimization of fuel consumption in vehicles using a simplified traffic model and Markov jump system** 2016. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos - SP.

This dissertation deals with control of vehicles aiming at the fuel consumption optimization, taking into account the interference of traffic. Stochastic interferences like this and other real world phenomena prevents us from directly applying available results. We propose to employ a relatively simple system with Markov jumping parameters as a model for the vehicle subject to traffic interference, and to obtain the transition probabilities from a separate model for the traffic. This dissertation presents the model identification, the solution of the new problem using dynamic programming, and simulation of the obtained control.

Keywords: dynamic programming, Markov jump parameters, Markov chains, optimal control.

Lista de Siglas

GPS	(Sistema de Posicionamento Global) <i>Global Positioning System</i>
IMR	(Índice de Melhora Relativa) <i>Index Relative Improvement</i>
MEST	(Modelo Estocástico Sujeito a Trânsito) <i>Stochastic Model Subject to Traffic</i>
MPT	(Matriz de Probabilidade de Transição) <i>Transition Probability Matrix</i>
MSM	(Modelo com Saltos Markovianos) <i>Jump Markov Model</i>
PD	(Programação Dinâmica) <i>Dynamic Programming</i>
PDE	(Programação Dinâmica Estocástica) <i>Stochastic Dynamic Programming</i>
PO	(Percurso Objetivo) <i>Purpose Route</i>
SLSM	(Sistemas Lineares com Saltos Markovianos) <i>Jump Markov Linear System</i>
SSM	(Sistema com Saltos Markovianos) <i>Jump Markov System</i>
VO	(Veículo Objetivo) <i>Purpose Vehicle</i>

Lista de Figuras

1.1	<i>Fases do projeto do controlador em Affonso e Costa (2011).</i>	13
1.2	<i>Simulação usando o controle obtido por Affonso e Costa (2011).</i>	14
3.1	<i>Mapa do trecho real utilizado como percurso.</i>	28
3.2	<i>Ajustes dos vetores auxiliares em função do tempo de entrada do VO.</i>	30
3.3	<i>Interação do VO com o trânsito no percurso.</i>	32
4.1	<i>Percurso usando MPT setorizada em função da velocidade.</i>	38
4.2	<i>Fluxograma completo das fases do projeto do controle.</i>	40
5.1	<i>Simulação do VO usando controle determinístico.</i>	45
5.2	<i>Simulação do VO usando controle do piloto automático adaptado.</i>	47
5.3	<i>Trajatória de um veículo ao longo tempo.</i>	50
5.4	<i>Trajórias de n veículos ao longo tempo.</i>	51
5.5	<i>Definição do tempo de entrada do VO no percurso com trânsito.</i>	52
5.6	<i>Definição do tempo de entrada do VO no percurso.</i>	53
5.7	<i>Obtendo a distância entre o VO e o próximo veículo a sua frente.</i>	53
5.8	<i>Exemplo do VO no percurso.</i>	54
5.9	<i>Simulação do VO com trânsito de 5 veículos.</i>	56
5.10	<i>Simulação do VO com trânsito de 10 veículos.</i>	57
5.11	<i>Simulação do VO com trânsito de 40 veículos.</i>	58
5.12	<i>Setorização do PO.</i>	59
6.1	<i>Curva de altitude versus distância em relação ao início do percurso considerado.</i>	68
6.2	<i>Simulação do VO usando controle determinístico.</i>	69
6.3	<i>Simulação usando \hat{c}^1.</i>	70
6.4	<i>Simulação usando controle \hat{c}^5.</i>	72
6.5	<i>Simulação usando controle \hat{c}^{10}.</i>	73
6.6	<i>Simulação usando controle \hat{c}^{20}.</i>	74
6.7	<i>Simulação usando controle \hat{c}^{40}.</i>	75
6.8	<i>Simulação usando controle \hat{c}^{80}.</i>	76
6.9	<i>Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^1.</i>	77
6.10	<i>Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^{10}.</i>	78
6.11	<i>Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^{20}.</i>	79
6.12	<i>Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^{80}.</i>	80

Lista de Tabelas

5.1	Tempo em função do número de pontos na malha para o modelo determinístico.	43
5.2	Tipos de veículos que fazem a composição do percurso.	48
5.3	Tempo computacional para simular percurso em função da intensidade de trânsito.	59
5.4	MPT para intensidade de trânsito de 5 veículos.	61
5.5	MPT para intensidade de trânsito de 10 veículos.	62
5.6	MPT para intensidade de trânsito de 40 veículos.	62
5.7	Tempo em função do número de pontos na malha para o modelo estocástico. . .	64
6.1	Custos da simulação no cenário determinístico.	81
6.2	Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 5$	81
6.3	Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 10$	82
6.4	Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 20$	83
6.5	Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 40$	83
6.6	Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 80$	84
A.1	Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 1$	95
A.2	Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 5$	99
A.3	Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 10$	103
A.4	Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 20$	108
A.5	Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 40$	112
A.6	Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 80$	116

1	Introdução	11
1.1	Contextualização e motivação	11
1.2	Justificativa	15
1.3	Objetivos	16
1.4	Estrutura do trabalho	16
2	Fundamentação Teórica	17
2.1	Resumo do capítulo	17
2.2	Conceitos Fundamentais	18
2.3	Programação Dinâmica	18
2.3.1	Programação Dinâmica Estocástica	19
2.4	Sistemas com saltos markovianos	20
2.4.1	Processos estocásticos	20
2.4.1.1	Processos markovianos	20
2.4.2	Sistemas lineares com saltos markovianos	22
2.5	Simuladores de trânsito	22
2.6	Considerações Finais	24
3	Formulação do Problema	25
3.1	Resumo do capítulo	25
3.2	Modelo do Veículo Objetivo	25
3.3	Função Objetivo	26
3.4	Modelo para o trânsito no percurso	27
3.5	Modelo para interação dos veículos	30
3.6	Modelo estocástico sujeito a trânsito	32
3.7	Considerações finais	34
4	Solução Proposta	35
4.1	Resumo do capítulo	35
4.2	Modelo com saltos markovianos	35
4.3	Matrizes de probabilidade de transição	37
4.4	Programação dinâmica estocástica	38
4.5	Testes e avaliação dos resultados	39
4.6	Considerações finais	40

5	Elementos da Implementação e Definição do Caso a ser Estudado	41
5.1	Resumo do capítulo	41
5.2	Modelo Determinístico	42
5.2.1	Simulação do Veículo Objetivo no percurso sem trânsito	44
5.2.1.1	Controle Determinístico	44
5.2.1.2	Piloto Automático Adaptado	46
5.3	Modelo para o Trânsito	48
5.3.1	Variabilidade do trânsito	48
5.3.2	Composição do trânsito	50
5.4	Modelo para Veículo Objetivo interagindo com o Trânsito	52
5.4.1	Simulação do Veículo Objetivo no percurso com trânsito	55
5.5	Matriz de Probabilidade de Transição	59
5.6	Modelo com Saltos Markovianos	63
5.7	Considerações finais	64
6	Análise de Resultados	67
6.1	Resumo do capítulo	67
6.2	Simulação no cenário determinístico	68
6.3	Simulação no cenário sujeito a trânsito	81
6.4	Considerações finais	84
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	87
7.1	Conclusões	87
7.2	Principais contribuições	88
7.3	Trabalhos futuros	88
	Referências Bibliográficas	91
A	Matrizes de Probabilidade de Transição	95

Introdução

1.1 Contextualização e motivação

Nas últimas décadas a frota de veículos vem crescendo em todo mundo e pode-se estimar que hoje existam mais de 1 bilhão de veículos circulando pelas ruas em todo o planeta. No Brasil não é diferente, segundo dados do Departamento Nacional de Trânsito, de 2012 a 2016, houve um aumento anual em torno de 3% na frota, chegando à marca de mais de 62 milhões veículos, considerando apenas carros, caminhões e caminhonetes ¹. A estimativa é de que se chegue a 130 milhões de veículos até o ano de 2050 ².

Em decorrência deste aumento no número de veículos, aumenta-se também o consumo de combustíveis fósseis e conseqüentemente a emissão de poluentes na atmosfera, afetando a qualidade do ar (Rhys-Tyler, Legassick e Bell (2011)). Os veículos automotores têm significativa participação na degradação da qualidade do ar e, devido a queima de combustíveis, são os maiores responsáveis pela emissão de dióxido de carbono e outro gases do efeito estufa (Silva, Souza e Pereira (2015)), cuja principal conseqüência é a retenção do calor na atmosfera, fazendo com que a temperatura do planeta aumente, causando grande desequilíbrio no ecossistema e grandes alterações climáticas.

Além disso, a poluição atmosférica está relacionada a diversos problemas de saúde, à diminuição da expectativa de vida, ao aumento no risco de arritmias e infarto, bronquite aguda, asma e outras doenças pulmonares. Pesquisas baseadas nos níveis de poluição registrados em 2011

¹Disponível em: <<http://www.denatran.gov.br/frota2016.htm>> Acessado em 06/04/2016

²Disponível em: <<http://www.epe.gov.br/Estudos/Documents/DEA%2013-14%20Demanda%20de%20Energia%202050.pdf>> Acessado em 06/04/2016

apontam que no período de 2012 a 2030, 246 mil pessoas morrerão por problemas relacionados à poluição atmosférica, sendo um total de 953 mil internações e um custo de mais de R\$1,6 bilhão (Rodrigues et al. (2015)).

Outro fator que vale ser ressaltado é quanto a escassez de combustíveis fósseis. Segundo a Agência Internacional de Energia em 2010 ³, a produção de petróleo atingirá seu pico em 2035, sendo que o tempo para esgotar toda a reserva disponível é em torno de 40 anos (Shafiee e Topal (2009)).

É evidente a importância da implantação de novas políticas e tecnologias voltadas para a redução do consumo de combustível em todo o mundo, tendo em vista que isto é um problema econômico, ambiental e de saúde pública. Pesquisas com essa vertente têm sido cada vez mais necessárias e relevantes.

Abordagens relacionadas a veículos híbridos são bastante frequentes (Cipollone et al. (2014), Revoredo (2007) e Odeim et al. (2014)). Os veículos elétricos híbridos são aqueles alimentados por duas fontes diferentes: um motor a combustão interna e um motor elétrico que tem a função de reduzir o esforço do motor a combustão, e desta forma reduz-se o consumo e a emissão de poluentes. Alguns trabalhos mostram que é possível otimizar a relação entre os motores tratando o fluxo de combustível (Pérez et al. (2006) e Hofman, Ebbesen e Guzzella (2012)).

Há também algumas tecnologias que foram desenvolvidas com a finalidade de reduzir o consumo de veículos automotores de combustão interna implementadas por empresas automobilísticas em que um econômetro (marcador que indica uma faixa sugestiva de consumo) auxilia o usuário a manter-se dentro da faixa de consumo desejada. Outra tecnologia é a que informa ao motorista o consumo em km/L instantaneamente, permitindo ao motorista tentar manter-se em uma faixa mais baixa de consumo. Porém, estas tecnologias são restritas e não levam em conta aspectos relacionados ao trecho em que o veículo se encontra e quais as condições de tráfego que ele enfrenta.

Uma abordagem interessante refere-se à minimização de consumo de combustível aproveitando, simplesmente, o gerenciamento das energias potencial gravitacional e cinética ao longo de um percurso (através do controle da velocidade do veículo), de forma que não é necessária nenhuma alteração no veículo. Além disso, pode ser aplicada em diversos tipos de veículos, incluindo de combustão interna ou híbridos, leves ou pesado. Essa abordagem foi tratada por nosso grupo de pesquisa do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP, em que foi usado um modelo relativamente simples para representar o veículo, permitindo o levantamento de parâmetros de forma rápida e eficiente (Affonso e Costa (2011)), enquanto outras abordagens utilizam, por exemplo, complexas equações termodinâmicas (Dias (2013) e Guzzella e Sciarretta (2007)), dificultando o ajuste dos parâmetros.

No trabalho de Affonso e Costa (2011) foi obtido um controlador para o veículo através de Programação Dinâmica (PD) (Bertsekas (1995), Bellman e Stuart (1962), Arenales, Armentano

³Disponível em: <<http://www.worldenergyoutlook.org/media/weowebsite/2010/weo2010es/portuguese.pdf>>
Acessado em 21/06/2016

e Yanasse (2007) e Kirk (2012)), fase denominada offline, e em seguida foi montado um sistema denominado "aconselhador inteligente de velocidade" para sistemas Android que informa, de acordo com a posição e velocidade do veículo, a velocidade ótima para os instantes seguintes baseada no controlador obtido. Esta fase é denominada online, veja a Figura 1.1.

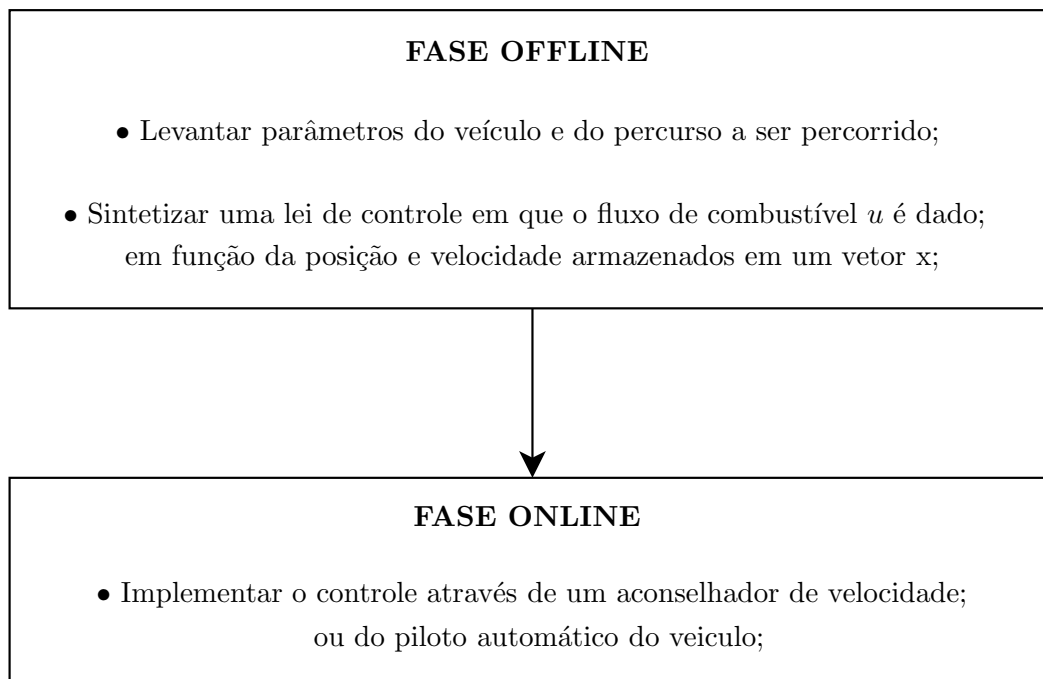


Figura 1.1 – Fases do projeto do controlador em Affonso e Costa (2011).

Testes utilizando veículos reais em trajetos de aproximadamente 20 km apresentaram economia média de 5% comparado com o uso do piloto automático convencional, mantendo fixo o tempo de realização do percurso; se eliminarmos esta restrição de tempo, pode-se obter até 20% de economia. Contudo, o modelo empregado desconsidera eventuais interferências provenientes de trânsito e os testes foram realizados em horários e trechos com baixa intensidade de veículos.

A Figura 6.2 apresenta o gráfico da altitude e da velocidade determinada pelo controle determinístico de Affonso e Costa (2011) em função do tempo ao longo de um percurso. É possível verificar o aproveitamento da energia potencial gravitacional em setores de subida para que o veículo ganhe velocidade.

Ao longo do texto, denota-se por Veículo Objetivo (VO) o veículo cujo consumo de combustível deseja-se minimizar.

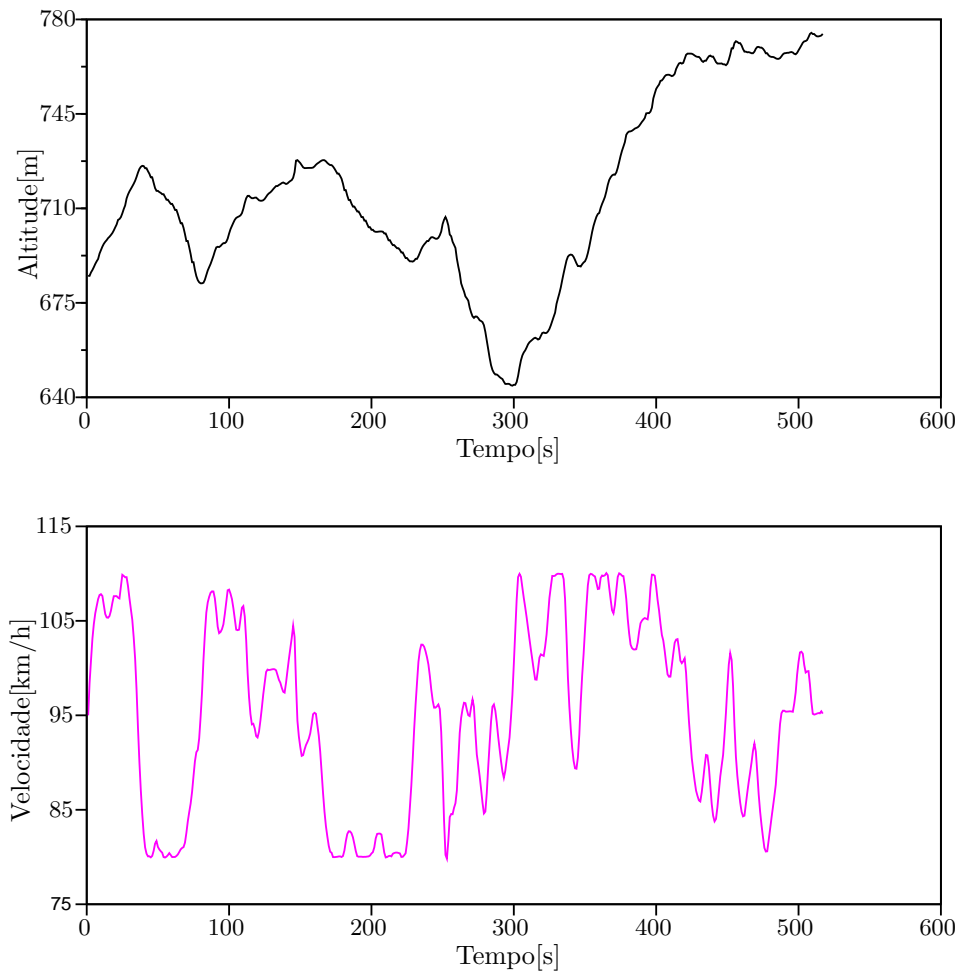


Figura 1.2 – Simulação usando o controle obtido por Affonso e Costa (2011).

Desta maneira, um dos objetivos deste trabalho é desenvolver modelos relativamente simples, que utilizem poucos parâmetros que possam ser facilmente ajustados, como o usado por Affonso e Costa (2011), para minimizar o consumo de combustível do VO que se desloca em um percurso que está sujeito à interferência de fenômenos que forçam a alteração da velocidade do veículo; neste trabalho, considera-se o trânsito de outros veículos, que força frenagens no VO, mas a abordagem e os resultados podem ser adaptados para outros problemas, como a presença de animais, semáforos e acidentes na pista.

Para tanto, é proposto o Modelo Estocástico Sujeito a Trânsito (MEST) que, pela sua não linearidade e complexidade, é aproximado por um modelo estocástico que utiliza saltos markovianos, denominado Modelo com Saltos Markovianos (MSM); uma parte do MEST envolve as interações do VO com outros veículos, permitindo simular várias missões do VO no percurso e com isso estimar as Matrizes de Probabilidade de Transição (MPT) que fazem parte do MSM. Deseja-se ainda testar a solução do MSM no MEST para verificar a eficiência do controlador obtido e comparar seu desempenho frente ao controle determinístico obtido pelo Modelo de Af-

fonso e Costa (2011). Vale ressaltar que, desta maneira a fase offline em que as soluções são pre-computadas (antes da execução da missão pelo VO) passa a considerar além de posição, velocidade e altitude num dado instante, estatísticas de trânsito para sintetizar a função g que determina a ação de controle.

1.2 Justificativa

Muitos problemas de otimização podem ser resolvidos usando ferramentas provenientes da PD, que pode ser aplicada para solucionar situações de controle bastante gerais, sendo determinísticas ou estocásticas (Bertsekas (1995)), lineares ou não lineares (Kirk (2012) e Cruz, Cardoso e Takahashi (2006)).

Desta maneira, a inclusão da aleatoriedade no modelo desenvolvido por Affonso e Costa (2011) pode ser resolvida utilizando Programação dinâmica estocástica (PDE) (Bertsekas (1995)), tornando possível a obtenção de um controlador estocástico para o veículo.

A estocacidade gerada pela inclusão de trânsito no percurso é dada pelo fato do veículo estar sujeito a sofrer alterações repentinas em sua velocidade, ou seja, a cada instante de tempo pode existir uma probabilidade do veículo entrar em modo de frenagem, que pode variar de acordo com a velocidade do veículo que se encontra a sua frente. Esse processo pode ser modelado utilizando cadeias de Markov de ordem variável e MSMs. Estes modelos fornecem modelos para problemas vulneráveis a alterações abruptas de comportamento (Val e Basar (1999) e Sworder e Rogers (1983)).

Um MSM pode exigir o levantamento de probabilidades de transição de estado e, para tanto, a utilização de um modelo que simule o percurso de um veículo em um trecho sujeito a trânsito é necessária, pois seria muito custoso estimar com qualidade as probabilidades através de testes reais (uma vez que boas estimativas usualmente exigem muitas amostras e repetições, ou seja, precisaríamos percorrer o trecho escolhido centenas de vezes). Essa é a motivação para o desenvolvimento do MEST neste trabalho.

De fato, existem diversos simuladores disponíveis na literatura (Tavares (2010), Loureiro (2010) e Maerivoet e Moor (2005)), porém, o modelo do veículo proposto por Affonso e Costa (2011) pode ser usado como base para adaptar um modelo que simule um percurso sujeito a outros veículos. O mesmo modelo pode ser utilizado para realização de testes para verificar a eficiência do controle estocástico no MEST. Além disto, os simuladores existentes que foram sondados por nós não permitem todos ajustes desejados, ou tem complexidade incompatível com o problema aqui tratado.

No caso deste trabalho, o desenvolvimento do MSM para representar as aleatoriedades do trânsito e o desenvolvimento de um modelo que simule o deslocamento de um veículo em um percurso sujeito ao tráfego de outros veículos, viabilizam o levantamento de parâmetros para este modelo e permitem a resolução do problema via PDE e a obtenção de um controle ótimo estocástico para o veículo, controle que é testado no MEST.

1.3 Objetivos

Como objetivo geral deste trabalho pretende-se:

- Otimizar o consumo de combustível de um veículo que se desloca em um percurso sujeito à interferência de trânsito.

Para atingirmos o objetivo geral, alguns objetivos específicos são pretendidos, tais como:

- **Modelo que simula o percurso:** Desenvolver um modelo que permita simular repetidas vezes os trajetos de diversos veículos a fim de obter informações sobre suas interações, principalmente quanto à quantidade de frenagens e suas intensidades.
- **Formulação do problema:** Formular um problema que represente o deslocamento de um veículo ao longo de um percurso sujeito à interferência do trânsito de outros veículos, cujo consumo deve ser minimizado, denotado MEST.
- **Modelo aproximado:** Desenvolver um problema de otimização aproximado que utilize sistemas com saltos markovianos para representar o deslocamento de um veículo em um percurso sujeito à interferência de outros veículos, denotado por MSM.
- **Solução por PDE:** Com o MSM desenvolvido e seus parâmetros estimados através do modelo que simula o percurso, nosso objetivo é resolver o problema de minimização do consumo de combustível utilizando ferramentas de PDE.
- **Análise de resultados:** Analisar os resultados obtidos e fazer um levantamento quantitativo e qualitativo dos efeitos da inclusão do trânsito no percurso, comparando estes com a solução do problema determinístico. Verificar a eficiência do controle estocástico obtido através do MSM no MEST.

1.4 Estrutura do trabalho

A estrutura deste trabalho é descrita a seguir.

O Capítulo 2 traz a fundamentação teórica deste trabalho, destacando os principais elementos teóricos usados na elaboração e desenvolvimento deste projeto.

No Capítulo 3, desenvolve-se a formulação do problema, em que os modelos para o veículo, para o percurso e para a interação entre os veículos é destacado. Um problema de otimização é apresentado, porém devido a sua complexidade, um segundo modelo aproximado é considerado, como explica o Capítulo 4.

O Capítulo 5 traz elementos da implementação dos modelos e dados numéricos do caso particular estudado, cujo os resultados são apresentados e discutidos no Capítulo 6.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões e algumas possibilidades de trabalhos futuros.

Fundamentação Teórica

2.1 Resumo do capítulo

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica referente ao contexto em que o projeto se aplica.

A Seção 2.2 traz uma introdução aos conceitos fundamentais referentes à resolução de problemas de otimização em cenários estocásticos. Nesse aspecto, a técnica de Programação Dinâmica, a estimativa de parâmetros via simulação de Monte Carlo e os SSM são brevemente discutidos. Destaca-se como esses elementos possibilitam a obtenção de um controle ótimo para o veículos em um percurso sujeito a eventos aleatórios.

As Seções 2.3, 2.4 e 2.5 abordam de maneira mais detalhada a PD e seus elementos, os SSM e cadeias de Markov e os simuladores de trânsito, necessários para as simulações de Monte Carlo, respectivamente.

A compreensão destes tópicos é de grande importância para o entendimento do projeto proposto.

Enfim, a última seção apresenta as considerações finais que evidenciam a importância dos temas abordados ao longo do capítulo para a execução deste projeto, cujo o foco é novamente destacado.

2.2 Conceitos Fundamentais

Um problema de otimização consiste em definir uma política de ação de controle que busque atender um conjunto de restrições e que minimize os custos desta operação (Arenales, Armentano e Yanasse (2007)).

Esses problemas podem se apresentar de dois tipos: determinísticos ou estocásticos. Problemas determinísticos são aqueles em que todos os seus parâmetros são conhecidos, ou seja, antes de determinar a ação de controle todas as informações do problema são conhecidas. Já os problemas estocásticos possuem parâmetros aleatórios, o que faz com que as informações do problema dependam de algumas probabilidades (Kumar e Varaiya (2015)).

Em problemas de otimização em que há estocacidade, muitas vezes é preciso realizar a estimativa dos parâmetros aleatórios para que seja possível a resolução e a definição de uma ação de controle ótima. Nesse sentido, o método de Monte Carlo, que consiste na obtenção de valores numéricos baseados em um grande número de amostras aleatórias (Hastings (1970)), pode ajudar a estimar probabilidades e assim problemas estocásticos podem ser resolvidos via PDE, como apresentado na Seção 2.3.1.

Em particular, o foco deste trabalho está na obtenção de uma ação de controle ótima para um problema de otimização estocástico.

Em suma, deseja-se minimizar o consumo de um veículo que se desloca em uma rodovia sujeito a eventos aleatórios devido ao trânsito de outros veículos e para tanto deve-se modelar o problema, levantar parâmetros e obter uma ação de controle através de PDE. Para a modelagem de situações sujeitas a mudanças repentinas pode-se utilizar SSM (Costa, Fragoso e Marques (2006)) e o levantamento de parâmetros pode ser realizado via simulação (utilizando um simulador para o percurso) por método de Monte Carlo.

Nas seções seguintes apresentam-se as fundamentações teóricas referentes à PD, SSM e simuladores de trânsito.

2.3 Programação Dinâmica

Nesta seção destacam-se elementos da PD, tais como conceitos básicos e formulação matemática padrão, abordando situações de otimização determinísticas e estocásticas.

A PD é mais do que uma técnica que pode ser empregada para resolver diversas classes de problemas (Amini, Weymouth e Jain (1990), Song et al. (2015) e Diban et al. (2016)) é uma abordagem conceitual que procura subdividir um problema em subproblemas de menor complexidade e interligados, o que permite que a solução ótima do problema seja obtida de maneira recursiva, isto é, em cada estágio busca-se a solução ótima de cada subproblema, que depende apenas da solução do subproblema anterior (Stern et al. (2000)).

Um problema de PD ou controle ótimo tem como objetivo otimizar as ações de um operador capaz de influenciar um sistema, de modo geral procura-se definir uma regra de decisão ótima

que minimize o custo total de uma operação. As decisões são tomadas em estágios, de modo que deve haver um equilíbrio entre o baixo custo de uma decisão no presente com a inconveniência de um alto custo no futuro, fato que é considerado na técnica de PD (Bertsekas (1995))

Em geral, a aplicação da PD é baseada principalmente no princípio de otimalidade de Bellman em que as tomadas de decisão futuras dependem apenas do estado atual e podem ser feitas independente das decisões passadas.

Dado o problema de minimização

$$J = C_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} C_k(x_k, u_k), \quad (2.1)$$

em que x_k é uma variável de estado, u_k a ação de controle e N o horizonte (também dizemos N estágios). A PD o subdivide em N subproblemas de minimização definidos da seguinte forma

$$\begin{cases} V_N(x_N) = C_N(x_N) \\ V_k(x_k) = \min_u [C_k(x_k, u_k) + V_{k+1}(f(x_k, u_k))] \end{cases} \quad (2.2)$$

Então, pelo princípio de Bellman, tem-se que: $V_0(x)$ é o mínimo da função objetivo J e se h_0, \dots, h_{N-1} atendem os mínimos em u então, $u_k = h(x_k)$ é solução ótima.

A verificação da validade consiste em supor que dada uma subpolítica da política de tomada de decisão ótima, se essa subpolítica não for ótima então existe uma melhor que completaria o restante da política considerada, e logo a política inicial poderia ser melhorada, o que contraria a hipótese da política ser ótima (Stern et al. (2000)). A demonstração formalizada da otimalidade do algoritmo da PD pode ser verificada em Bertsekas (1995) ou em Kumar e Varaiya (2015).

A utilização da técnica de PD em problemas de otimização se mostra bastante eficiente em situações complexas onde o problema apresenta uma evolução no tempo, de modo que possa ser subdividido.

2.3.1 Programação Dinâmica Estocástica

Destaca-se nesta seção problemas de PD que envolvem algum fator aleatório em sua formulação, o que chamamos de problema de PDE.

Dentro da PDE duas variações emergem, uma na qual a observação do estado é total e outra em que a observação do estado é parcial, ou seja, algumas informações sobre o estado do sistema não podem ser determinadas no instante atual. Este segundo caso pode ser reduzido a um problema de observação total de estado, como pode ser consultado em Kumar e Varaiya (2015), porém focam-se neste trabalho situações onde a observação do estado é total.

Dessa maneira, temos que a equação dinâmica pode possuir elementos aleatórios e ser dada por

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \quad (2.3)$$

em que w_k é um parâmetro aleatório. Assim, temos a seguinte formulação das funções valor, dadas recursivamente por

$$\begin{cases} V_N(x_N) = C_N(x_N) \\ V_k(x_k) = \min_u E \{C_k(x_k, u, w_k) + V_{k+1}(f(x_k, u, w_k))\}, \end{cases} \quad (2.4)$$

em que o símbolo E denota valor esperado, e assim, o funcional de custo é dado por

$$J = E \left\{ C_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} C_k(x_k, u_k) \right\} \quad (2.5)$$

A verificação da otimalidade do algoritmo da PDE também pode ser consultada em Kumar e Varaiya (2015).

2.4 Sistemas com saltos markovianos

Nesta seção apresenta-se algumas definições relacionadas aos SSM e aos processos estocásticos.

2.4.1 Processos estocásticos

Pode-se definir um processo estocástico como um processo que evolui no tempo de maneira probabilística, dessa forma, define-se como um conjunto de variáveis randômicas $X(t)$ indexadas por um parâmetro $t \in T$ (Terra (2006)), onde t representa muitas vezes o tempo.

Processos estocásticos podem ser utilizados para descrever um procedimento de um sistema operando sobre algum período de tempo, com isso a variável $X(t)$ pode representar o estado do sistema no tempo t e assim tem-se que $X(t)$ é definida em um espaço denominado **Espaço de Estados**.

Quanto a um processo estocástico, pode-se classificá-lo em relação ao estado, que pode ser discreto (O espaço de estados é enumerável e finito) ou contínuo (O espaço de estados é não enumerável e/ou infinito), e em relação ao tempo, que assim como o estado, pode ser discreto ou contínuo.

Dentre as diferentes características que um processo estocástico pode assumir, a seguir são destacados aqueles com propriedades markovianas, denominados **Processos markovianos**.

2.4.1.1 Processos markovianos

Um processo estocástico é dito markoviano quando o conjunto de estados futuros depende apenas do estado presente, isto é, estados passados são irrelevantes para se determinar o estado futuro, desde que o estado presente seja conhecido. Assim, tem-se

$$P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_0) = x_0] = P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k], \quad (2.6)$$

para todo $t_i \in \{0, 1, \dots, k, k+1\}$ e toda sequência $k_0, k_1, \dots, k_t, k_{t+1}$. Ao longo deste trabalho, é usado o índice k para representar a discretização do tempo, ou seja, $X(t_k) = X(k)$, por questão de simplicidade.

Pela Equação 2.6 pode-se dizer que a probabilidade de qualquer evento futuro, para qualquer que seja o passado e o estado presente, depende apenas do estado presente e a probabilidade $P[X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k]$ é denominada **Probabilidade de Transição** e representa a probabilidade do estado futuro ser x_{k+1} dado que o estado atual é x_k .

Uma **Cadeia de Markov** é um processo markoviano que possui um conjunto de variáveis randômicas $X(k)$ em um espaço discreto e se o tempo também é discreto, denomina-se **Cadeia de Markov em Tempo Discreto**.

Denota-se ao longo deste trabalho, por simplicidade, por p_{ij} a probabilidade do estado migrar do estado i para o estado j do instante k para o instante $k+1$, respectivamente. Assim, dada uma cadeia de Markov com n estados, as probabilidades de transição podem ser exibidas como uma matriz quadrada $P = [p_{ij}]$, chamada **Matriz de Probabilidade de Transição** da cadeia de Markov dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

e que possui a seguinte propriedade

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1. \quad (2.8)$$

A propriedade representada pela Equação 2.8 diz que se um sistema encontra-se em um estado i a soma das probabilidades de transição de todos os possíveis estados é de 100%, ou seja, se o sistema encontra-se no estado i no instante k estará em algum estado j no instante $k+1$.

Para exemplificar, considere que um veículo ao se deslocar por uma rodovia esteja sujeito aos estados 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sendo que o estado 1 representa uma situação sem frenagem e os estados de 2 a 6 representem diferentes intensidades de frenagem. Dado o estado atual do veículo, existem probabilidades de no instante seguinte ele visitar cada um dos estados 6 estados, e essas probabilidades dependem apenas do estado atual do veículo, não importando os estados passados.

Para maiores detalhes sobre cadeias de markov veja Terra (2006), Grigoletti (2011) e Kemeny, Snell et al. (1960). Aplicações podem ser consultadas em Bueno (2008).

2.4.2 Sistemas lineares com saltos markovianos

Nesta seção apresenta-se uma breve discussão sobre os sistemas lineares com saltos markovianos (SLSM).

Um SSM pode ser definido como um sistema que possui parâmetros sujeitos a mudanças aleatórias, onde essas mudanças dependem apenas do estado atual do sistema e não das informações passadas do estado. Geralmente são utilizados para representar fenômenos sujeitos a falhas (Costa, Fragoso e Marques (2006)).

De modo geral, considere uma cadeia de Markov de tempo discreto com estado $r_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ no tempo k . Denotando a probabilidade de transição $P(r_{k+1} = j | r_k = i)$ por p_{ij} , e a MPT por P , assim a evolução do MJLS pode ser descrita pelas equações

$$x_{k+1} = A_{r_k} x_k + B_{r_k} u_k + F_{r_k} w_k \quad (2.9)$$

$$y_k = C_{r_k} x_k + G_{r_k} v_k, \quad (2.10)$$

em que x_k é o estado do sistema no instante k , u a entrada de controle, w um ruído, y a saída controlada e A, B, C, D, F e G são matrizes de dimensões apropriadas.

Para exemplificar, voltamos ao exemplo do veículo que se desloca em uma rodovia e que a cada instante k sua posição x e velocidade v no instante seguinte são dadas pelo sistema dinâmico

$$x_{k+1} = x_k + v_k \quad (2.11)$$

$$v_{k+1} = a_{r_k} \cdot f(x_k, v_k, u_k), \quad (2.12)$$

em que f é uma função que usada para determinar a velocidade do veículo levando em conta sua posição, velocidade atual e ação de controle. Observe que a_{r_k} determina uma limitação na velocidade do veículo que depende do estado de frenagem $r_k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ no qual ele se encontra, o que torna esse sistema com sistema com saltos nos parâmetros. Note que no exemplo acima o sistema pode ser não linear dependendo da definição da função f .

2.5 Simuladores de trânsito

Em muitas pesquisas, principalmente naquelas relacionadas a trânsito, existe a necessidade de realizar testes de hipóteses, levantar estimativas de dados ou até compreender alguns efeitos devido a mudanças propostas. Para tais necessidades o uso de simuladores pode ser bastante eficaz e satisfatório, uma vez que testes reais, além de perigosos e financeiramente inviáveis, teriam que ser feitos em grandes escalas para um levantamento aceitável de estatística.

Neste trabalho é necessária a obtenção de estatísticas de trânsito referentes ao deslocamento de um veículo ao longo de um percurso sujeito a diferentes taxas de intensidade de trânsito e também a verificação de um veículo ao longo de um percurso usando uma ação de controle predefinida o que torna o uso de simuladores imprescindível.

Os simuladores de trânsito são baseados nas Teorias de Fluxo de Tráfego, que são modelos matemáticos que visam estudar e descrever as relações entre os veículos, vias, sinalizações e outros componentes (Tavares (2010) e Loureiro (2010)).

Ainda segundo Tavares (2010), essas teorias podem ser abordadas seguindo alguns critérios, como tipo de variável, nível de detalhes, representação do processo, operacionalização e escala de aplicação.

O tipo de variável se refere ao tempo a ser transcorrido, que pode ser contínuo ou discreto. O nível de detalhes, que está relacionado ao detalhamento das entidades envolvidas na modelagem, pode ter uma abordagem microscópica, que possui um alto nível de detalhes e trata cada entidade de maneira individual e cuja a modelagem que mais se evidencia é a chamada Car Following Model (Jiang, Wu e Zhu (2001)), que visa a interação entre veículos consecutivos baseado na distância e diferença de velocidade entre eles. A abordagem macroscópica possui um baixo nível de detalhes e busca compreender o tráfego como um todo, já a abordagem mesoscópica traz elementos microscópicos e macroscópicos e analisa as entidades como um todo, porém em blocos.

A representação do processo caracteriza-se pelas variáveis do problema e suas classificações sob aspectos determinísticos ou estocásticos. A operacionalização refere-se à abordagem do problema, se é analítica ou simulada e por fim a escala de aplicação busca definir o escopo da abordagem, isto é, o cenário a ser estudado, cidade, rua, avenida, rodovia, entre outros.

Existem na literatura diversos simuladores de trânsito que consideram os diferentes critérios listados acima (Nagel e Schreckenberg (1992), Tavares (2010) e Loureiro (2010)) e muitos são baseados em autômatos celulares (Maerivoet e Moor (2005) e Lima (2007)), que consistem basicamente em definir uma malha uni-dimensional, um conjunto de estados, um conjunto de células e um operador que analisa a célula e o estado atual e determina o próximo estado do sistema.

Em relação aos simuladores, busca-se neste trabalho o desenvolvimento de um simulador que aborde o trânsito de maneira microscópica, ou seja, que detalhe o comportamento de cada veículo individualmente e busque estimativas decorrentes da interação entre um veículo específico e o trânsito ao longo do percurso, de modo que esta interação tenha regras predefinidas que considerem as características dos veículos e do percurso, algo semelhante como o proposto na teoria de autômatos celulares.

Esse simulador deve considerar o tempo como variável discreta e a possibilidade de variáveis aleatórias. A escala de aplicação concentra-se em uma rodovia, descrita nos capítulos seguintes.

Vale ressaltar que dos simuladores pesquisados, não foi possível encontrar algum que satisfizesse às necessidades deste projeto e, por este motivo foi proposto o desenvolvimento de um modelo simplificado que simula um dado percurso e realiza o levantamento de dados estatísticos relacionados a um dado veículo a cada simulação.

2.6 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordados tópicos como PD, SSM e simuladores de trânsito. Os elementos básicos, a formulação padrão e uma breve discussão sobre a aplicação da técnica de PD e dos SSM foram apresentadas além das diferentes abordagens que podem ser dadas na modelagem de um simulador de trânsito.

Para o problema a ser estudado, trata-se de um problema de otimização estocástico de tempo discreto e horizonte finito em que a técnica de PD pode ser aplicada, pois o problema possui característica markoviana e pode ser subdividido, ou seja, é possível definir variáveis de estado de modo que o estado seguinte do sistema dependa apenas do estado atual e não de estados passados. Um modelo para o problema de otimização é desenvolvido e devido a sua complexidade decorrentes de fatores aleatórios é aproximado por um SSM, que modela as possíveis mudanças repentinas do sistema devido ao trânsito.

Por se tratar de um problema estocástico, algumas estimativas de parâmetros podem ser necessárias e para tanto um simulador de trânsito que permita simular repetidas vezes um dado percurso pode auxiliar na obtenção de estatísticas.

Desta forma, os elementos apresentados nesta seção auxiliaram no desenvolvimento deste projeto, cuja formulação e solução proposta são apresentadas nos capítulos seguintes.

Formulação do Problema

3.1 Resumo do capítulo

Neste capítulo é destacado a formulação do problema de otimização apresentado no Capítulo 1, denotado por MEST. Na Seção 3.2 mostram-se abordagens relacionadas ao modelo do VO (aquele cujo consumo deseja-se otimizar) baseadas em Affonso e Costa (2011) em que há ausência de trânsito. O modelo foi modificado para representar eventualidades com a inserção de outros veículos no percurso. A Seção 3.3 traz a formulação da função objetivo do problema de otimização.

Na Seção 3.4 é apresentado o modelo para o trânsito no percurso, que consiste em utilizar o modelo determinístico de Affonso e Costa (2011) para cada veículo que compõem o trânsito. A Seção 3.5 apresenta o modelo para a interação destes veículos no percurso.

A formulação do problema de otimização é composta de elementos dos modelos para o VO, da função objetivo, do trânsito no percurso e da interação entre estes veículos, como destacado na Seção 3.6.

3.2 Modelo do Veículo Objetivo

A seguir apresenta-se o modelo para o VO. A versão determinística de Affonso e Costa (2011) apresenta um modelo para um veículo que se desloca em uma rodovia na ausência de trânsito. Esta versão foi aprimorada de modo a ter um modelo que passe a considerar eventuais interferências decorrente do trânsito.

Este modelo é baseado em Affonso e Costa (2011) e consiste, basicamente, nas variáveis de estado $x(k)$ e $v(k)$ representando posição e velocidade do veículo em um instante discretizado $t = k\Delta_t$, sendo Δ_t o período amostral, na entrada de controle $u(k)$ representando o fluxo de combustível do veículo, e na função $h(x)$ que descreve a altitude do trajeto em um ponto x e pode ser obtida através dos dados das posições geográficas referentes ao percurso, coletados através de um aplicativo de uso não comercial desenvolvido e denominado *Economic Advisor*.

É adotado um modelo simples, baseado em curva de potência e no balanço de energia, ao contrário de modelos como os de Guzzella e Sciarretta (2007) que contém equações termodinâmicas complexas e envolvem um grande número de parâmetros, de forma que esta abordagem permite cálculos rápidos e facilidade no levantamento de poucos parâmetros. Essencialmente, tem-se:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + v(k), \\ v(k+1) &= (a_{i(k)}) \cdot f(x(k), v(k), u(k)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, com N o número de estágios (ou períodos amostrais) e v_k e x_k sendo variáveis de valores contínuos e discretas em relação ao tempo. A função f é definida por

$$f(x(k), v(k), u(k)) = \begin{cases} \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{P(v(k), u(k)) - c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } a_{i(k)} = 1 \\ \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{-c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } a_{i(k)} \neq 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

em que \hat{g} é a aceleração da gravidade e $\Delta_h(k)$ é a diferença de altitude nos instantes k e $k+1$. Tem-se ainda que $a_{i(k)} \in [0, 1]$ representa a taxa de redução de velocidade decorrente de uma eventual frenagem e a função $P(u, v)$ descreve a potência fornecida ou absorvida pelo motor em função da velocidade v e do controle u , de modo $P(u, v) = 0$ quando o veículo está em frenagem ($a_{i(k)} \neq 1$), isto é, o motor deixa de fornecer potência e o efeito da potência absorvida é incorporada no modelo através da variável $a_{i(k)}$. A potência pode ser obtida por interpolação da curva de potência fornecida pelo fabricante.

Os valores de u , $0 \leq u \leq 1$, representam a relação entre o fluxo de entrada de combustível e o fluxo máximo. Os únicos parâmetros são m , a massa do veículo, e c_2 , um coeficiente de perda de energia cinética por atrito, que foi ajustado baseado em dados reais.

3.3 Função Objetivo

A meta do VO é concluir um dado percurso minimizando o fluxo de combustível de modo que sejam respeitados os limites de velocidade preestabelecidos, o tempo para a realização do percurso e as condições terminais do veículo de posição e velocidade.

Com base nisso é definido o funcional J , chamado de custo ou critério de desempenho,

$$J = \gamma\alpha(x_N)(x_N - x_{meta})^2 + \beta(v_N - v_{meta})^2 + \sum_{k=0}^N (u(k)\Delta_t + p_v(k)), \quad (3.3)$$

sendo

$$p_v(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } v_{\min} \leq v(k) \leq v_{\max} \\ \delta, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.4)$$

o termo que penaliza violações de velocidade no percurso, em que v_{\min} e v_{\max} representam a velocidade mínima e máxima desejada, x_{meta} e v_{meta} são a posição final a ser atingida pelo veículo e a velocidade desejada no instante final, respectivamente, a função escalar α é definida como $\alpha(x) = 1$ sempre que $x < x_{meta}$ e $\alpha(x) = 0$ caso contrário, γ e β são constantes de ponderação. Assim, o custo não só reflete o consumo de combustível, mas também a ocorrência de diferenças entre o estado final desejado e o alcançado.

A seguir destacam-se o modelo para o trânsito no percurso e o modelo para a interação entre os veículos no percurso. De modo geral, para o modelo do trânsito no percurso define-se o percurso a ser realizado, a intensidade de trânsito, suas características e o tempo de entrada de cada um deles no percurso, como destacado na Seção 3.4. Utilizando o modelo para o trânsito, cria-se regra de interação entre o VO e o trânsito, como traz a seção 3.5.

3.4 Modelo para o trânsito no percurso

O modelo para o trânsito é composto do percurso com início e fim (também chamado missão, na literatura) e dos veículos que nele transitam. Foi adotado como percurso um trecho real de rodovia como ilustrado na Fig. 3.1 e discutido no Capítulo 5.

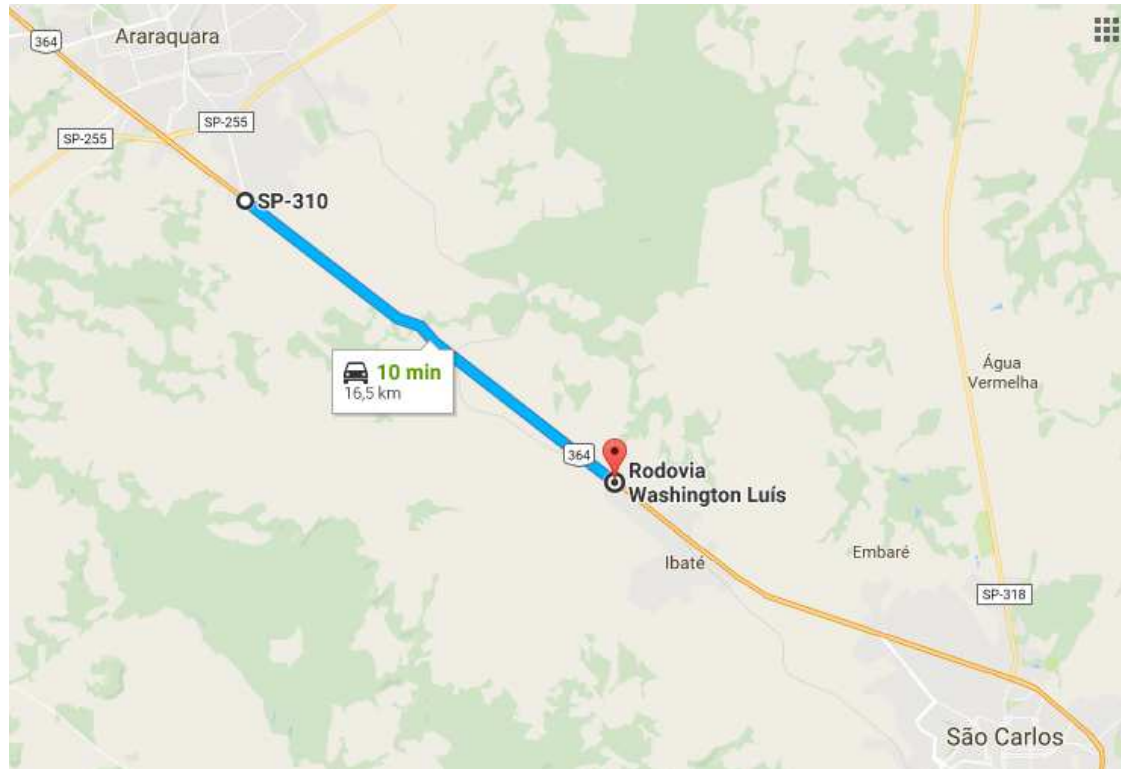


Figura 3.1 – Mapa do trecho real utilizado como percurso.
 Fonte: Google. Dados de mapa: Google, DigitalGlobe.

Além do percurso, os outros elementos que compõem o modelo do trânsito são os tipos dos veículos que usualmente transitam naquele trecho de rodovia (e seus respectivos modelos matemáticos) e os instantes de tempo em que entram no percurso, como descrito a seguir.

Para a criação dos diferentes tipos de veículos utiliza-se o modelo de Affonso e Costa (2011). Com esse modelo é possível simular a trajetória de um veículo ao longo de um dado percurso, para isso basta fornecer um vetor de velocidade para o veículo ou uma entrada de controle u para o modelo. Assim pode-se obter a posição e velocidade do veículo a cada instante de tempo, obtendo sua trajetória. Parâmetros como massa e curva de potência definem diferentes veículos e o vetor de velocidade ou a ação de controle podem determinar diferentes tipos de condutores, permitindo assim variar os tipos de veículos no percurso.

Com todos os parâmetros necessários (como curva de potência, massa, coeficientes de perda de energia cinética por atrito e ação de controle) é possível simular diferentes trajetórias ao longo do percurso, e além disso, informações relacionadas ao fluxo de combustível liberado, velocidade, posição e altitude de cada veículo em cada instante k podem ser analisadas através dos vetores u , v , x e h , respectivamente. Vale ressaltar que estas trajetórias se referem aos deslocamentos de veículos em um percurso livre de trânsito, pois nenhum fator externo além das características do trecho interferem em seus comportamentos, ou seja, utiliza-se a hipótese de que os veículos inseridos no percurso (que fazem a composição do trânsito) não interagem entre si, ou seja, a ultrapassagem entre eles é instantânea.

Com os $i \in \mathbb{N}$ diferentes tipos de veículos e de condutores criados é necessário estabelecer o tempo de entrada $s_i \in \mathbb{N}$ de cada um no percurso. A diferença entre estes tempos de entrada são definidos através de sorteios aleatórios seguindo uma distribuição exponencial em que a taxa λ é dada por:

$$\lambda = \frac{n_{\text{car}}}{t_{\text{car}}} \quad (3.5)$$

em que n_{car} representa o número médio de veículos que entram no percurso t_{car} é o tempo médio para realização do percurso obtido através de simulação; sendo assim, ao simular o trânsito milhares de vezes temos uma média de n_{car} veículos no percurso, completando-o em média num tempo t_{car} .

Vale ressaltar que os tempos de entradas de cada veículo são tratados de maneira inteira, sendo assim é feito um processo de arredondamento. Se T é o tempo sorteado entre veículos, então o tempo \hat{T} ajustado ao grid k (com período amostral $\Delta_t = 1.1$) é dado por

$$\hat{T} = \Delta_t \text{ round}(T/\Delta_t). \quad (3.6)$$

Com os tempos de entrada definidos, criam-se vetores auxiliares x_{Ai} e v_{Ai} para cada um dos i veículos que entram no percurso, de modo que

$$x_{Ai}(k) = x_i(k + s_f - s_i), \quad (3.7)$$

$$v_{Ai}(k) = v_i(k + s_f - s_i), \quad (3.8)$$

sendo s_f o tempo de entrada do último veículo no percurso. Estes vetores armazenam, respectivamente, a posição e a velocidade de cada veículo no percurso quando o último veículo entrar, ou seja, quando o último veículo a entrar no percurso estiver na posição $x(1)$ tem-se a posição e a velocidade do veículo i neste mesmo instante analisando apenas os vetores $x_{Ai}(1)$ e $v_{Ai}(1)$. Com isso é possível analisar a distância entre os veículos e a diferença de velocidade entre eles em cada instante de tempo k , veja Figura 3.2

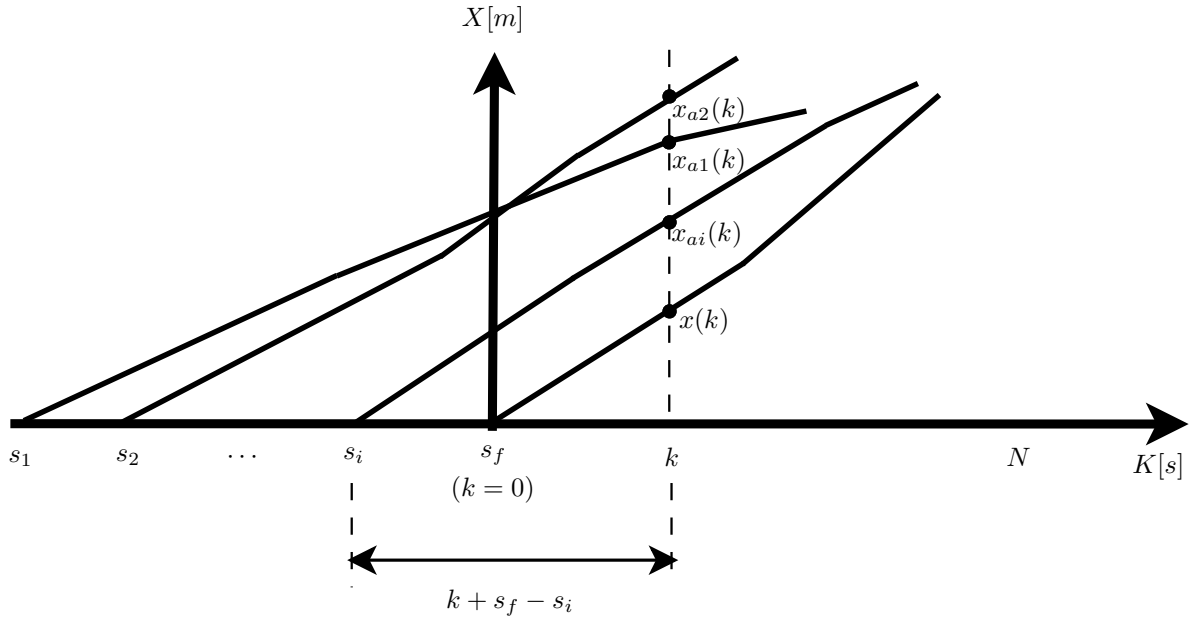


Figura 3.2 – Ajustes dos vetores auxiliares em função do tempo de entrada do VO.

3.5 Modelo para interação dos veículos

Para tratar a interação do VO com o trânsito considera-se que este, ao encontrar um veículo à sua frente, tenha que passar por um processo de redução de velocidade, que vai depender da diferença de velocidade entre eles, de modo que quanto maior essa diferença, maior a redução de velocidade do VO, caracterizando uma frenagem mais brusca.

Para a composição do trânsito no percurso utiliza-se as informações referentes às simulações dos i veículos utilizando o modelo para o veículo (Seção 3.2) como destacado na Seção 3.4 e define-se uma matriz $M_{prox} \in \mathbb{R}^{2 \times i}$ que armazena a posição e a velocidade de todos os veículos inseridos no percurso a cada instante de tempo k da seguinte forma: A primeira linha da matriz contém a posição e a segunda linha possui a velocidade de cada veículo no instante k de forma ordenada com base na posição dos veículos, dessa forma a i -ésima coluna da matriz informa a posição (linha 1) e a velocidade (linha 2) do i -ésimo veículo a ser encontrado no percurso no instante k . Assim, tem-se

$$M_{prox}(k) = \begin{bmatrix} m_{11}(k) & m_{12}(k) & \cdots & m_{1i}(k) \\ m_{21}(k) & m_{22}(k) & \cdots & m_{2i}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

em que a primeira linha encontra-se ordenada de forma crescente para cada instante k .

Desta forma, pode-se acessar em cada instante k qual a posição e a velocidade do próximo veículo a frente do VO e assim realizar, quando necessário, as reduções de velocidade referentes às frenagens.

Além disso, deve-se considerar as situações em que um veículo é ultrapassado, o que é tratado da seguinte maneira: o VO se aproxima do próximo veículo a sua frente, evidentemente com velocidade maior, quando a distância entre eles é menor que uma distância mínima permitida definida o veículo inicia um processo de redução de velocidade, baseado na diferença de velocidade entre eles, esse processo é repetido até que essa diferença seja menor que uma margem definida, o que caracteriza que o VO já esta apto a retomar sua velocidade sem qualquer restrição, deixando em alguns instantes o veículo que esta à sua frente para trás, veja a Figura 3.3. Com isso o veículo ultrapassado deixa de ser relevante ao VO, pois assume-se que um veículo ultrapassado é mais lento e não ultrapassaria o VO novamente. Desta maneira, é necessária a criação de dois vetores, que armazenam as informações referentes apenas ao próximo veículo à frente em cada instante k :

$$x_{prox}(k) = \begin{cases} m_{11}(k), & \text{se } 0 \leq x_{obj}(k) < m_{11}(k) \\ m_{12}(k), & \text{se } m_{11}(k) \leq x_{obj}(k) < m_{12}(k) \\ \vdots \\ m_{1i}(k), & \text{se } m_{1(i-1)}(k) \leq x_{obj}(k) < m_{1i}(k) \end{cases} \quad (3.10)$$

e

$$v_{prox}(k) = \begin{cases} m_{21}(k), & \text{se } x_{prox}(k) = m_{11}(k) \\ m_{22}(k), & \text{se } x_{prox}(k) = m_{12}(k) \\ \vdots \\ m_{2i}(k), & \text{se } x_{prox}(k) = m_{1i}(k) \end{cases} \quad (3.11)$$

em que $x_{obj}(k)$ e $x_{prox}(k)$ são as posições do VO e do próximo veículo à frente do VO no instante k , respectivamente, e v_{prox} é a velocidade do próximo veículo a frente. Com isto, o modelo do VO em um percurso sujeito a trânsito passa a ser dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + v(k), \\ v(k+1) &= \begin{cases} f(x(k), v(k), u(k)), & \text{se } \Delta_x(k) > d_{min} \\ g(\Delta_v(k)) \cdot f(x(k), v(k), u(k)), & \text{se } \Delta_x(k) \leq d_{min} \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

em que f é dada como em (3.2) e $\Delta_v(k) = v(k) - v_{prox}(k)$ é a diferença de velocidade entre o VO e o próximo veículo à sua frente, $\Delta_x(k) = x(k) - x_{prox}(k)$ é a distância entre o VO e o próximo veículo à sua frente no instante k , d_{min} é a distância mínima permitida sem iniciar um processo de frenagem e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função que associa a cada variação de velocidade entre o VO e o próximo veículo a sua frente, a redução de velocidade a ser feita no próximo instante e é definida por

$$g(\Delta_v(k)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta_v(k) < l_0 \\ a_1, & \text{se } l_0 \leq \Delta_v(k) \leq l_1 \\ a_2, & \text{se } l_1 < \Delta_v(k) \leq l_2 \\ \vdots \\ a_n, & \text{se } \Delta_v(k) > l_{n-1} \end{cases}, \quad (3.13)$$

sendo $a_1, \dots, a_n \in]0, 1[$ representando o percentual de redução da velocidade do VO, e l_0, \dots, l_{n-1} são as variações que determinam a redução percentual da velocidade, sendo que, quando $\Delta_v(k) < l_0$ temos $g(\Delta_v(k)) = 1$ com a interpretação de que o veículo não precisa reduzir sua velocidade, pois a diferença de velocidade é pequena.

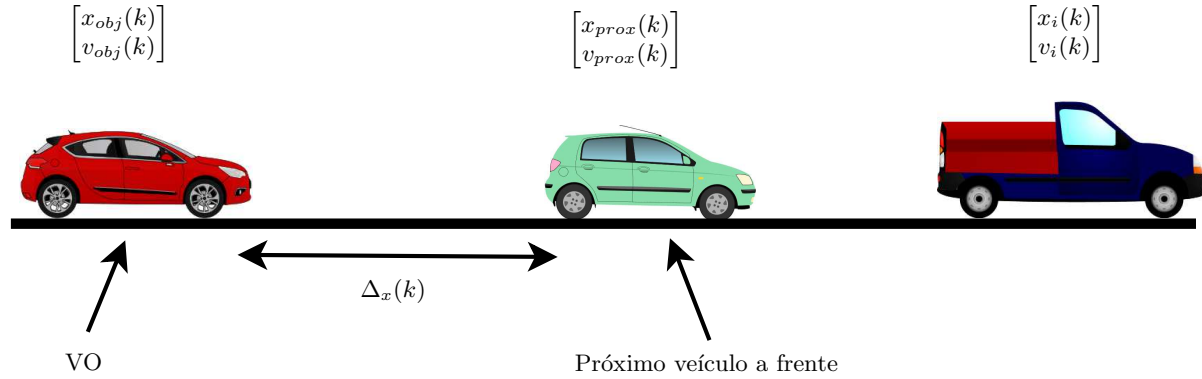


Figura 3.3 – Interação do VO com o trânsito no percurso.
Imagens de clip art obtidas do sítio “Openclipart”, <https://openclipart.org>.

Desta maneira, a velocidade do VO vai depender do veículo que está à sua frente, sendo necessário analisar a distância e a variação de velocidade entre eles para dar início a um processo de frenagem, simulando o deslocamento de um veículo em um percurso sujeito a interferência de trânsito.

Com os modelos apresentados nas seções anteriores tem-se as ferramentas necessárias para a formulação do problema de otimização a ser resolvido, apresentado a seguir.

3.6 Modelo estocástico sujeito a trânsito

Nesta seção destaca-se a formulação do problema de otimização de consumo de combustível de um veículo que se desloca em um percurso sujeito à interferência do trânsito. Em suma, deseja-se que o veículo complete um percurso gastando o mínimo de combustível sem violar os limites de velocidade pré-estabelecidos.

O modelo consiste em utilizar ferramentas apresentadas nas seções 3.2 - 3.5 para compor elementos do modelo referentes ao veículo e ao percurso, respectivamente. Essencialmente, tem-se:

$$\min E \left\{ \gamma \alpha (x_N) (x_N - x_{meta})^2 + \beta (v_N - v_{meta})^2 + \sum_{k=1}^N (u(k) + p_v(k)) \right\} \quad (3.14)$$

$$\text{sujeito a } x(k+1) = x(k) + v(k), \quad (3.15)$$

$$v(k+1) = \begin{cases} f(x(k), v(k), u(k)), & \text{se } \Delta_x(k) > d_{min} \\ g_k \cdot f(x(k), v(k), u(k)), & \text{se } \Delta_x(k) \leq d_{min} \end{cases}, \quad (3.16)$$

$$g_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta_v(k) < l_0 \\ a_1, & \text{se } l_0 \leq \Delta_v(k) \leq l_1 \\ a_2, & \text{se } l_1 < \Delta_v(k) \leq l_2 \\ \vdots \\ a_n, & \text{se } \Delta_v(k) > l_{n-1} \end{cases}, \quad (3.17)$$

$$a_i \in [0, 1], \quad (3.18)$$

$$u(k) = z_k(x(k), v(k), g_k), \quad (3.19)$$

$$Im(z_k) \subset [0, 1], \quad (3.20)$$

$$f_k = \begin{cases} \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{P(v(k), u(k)) - c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } \Delta_x(k) > d_{min} \\ \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{-c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } \Delta_x(k) \leq d_{min}, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$M_{prox}(k) = \begin{bmatrix} m_{11}(k) & m_{12}(k) & \cdots & m_{1i}(k) \\ m_{21}(k) & m_{22}(k) & \cdots & m_{2i}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$x_{prox}(k) = \begin{cases} m_{11}(k), & \text{se } 0 \leq x(k) < m_{11}(k) \\ m_{12}(k), & \text{se } m_{11}(k) \leq x(k) < m_{12}(k) \\ \vdots \\ m_{1i}(k), & \text{se } m_{1(i-1)}(k) \leq x(k) < m_{1i}(k) \end{cases} \quad (3.23)$$

$$v_{prox}(k) = \begin{cases} m_{21}(k), & \text{se } x_{prox}(k) = m_{11}(k) \\ m_{22}(k), & \text{se } x_{prox}(k) = m_{12}(k) \\ \vdots \\ m_{2i}(k), & \text{se } x_{prox}(k) = m_{1i}(k) \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\Delta_v(k) = v(k) - v_{prox}(k), \quad (3.25)$$

$$\Delta_x(k) = x(k) - x_{prox}(k), \quad (3.26)$$

$$p_v(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } v_{min} \leq v(k) \leq v_{max} \\ \delta, & \text{Caso contrário,} \end{cases} \quad (3.27)$$

em que as restrições (3.15)-(3.21) estão relacionadas à dinâmica do veículo sendo o parâmetro d_{min} representa a distância mínima permitida para que o VO permaneça atrás do próximo veículo à sua frente sem iniciar um processo de frenagem, que reduz sua velocidade em função da diferença de velocidade entre eles através da função $g_k = g(\Delta_v(k))$, em que a_1, a_2, \dots, a_n representam as taxas de redução de velocidade.

O termo $p_{v(k)} = \mathbf{1}_{v(k) < v_{\min}} + \mathbf{1}_{v(k) > v_{\max}}$ é um termo que penaliza situações em que o veículo viola os limites de velocidade máximo e mínimo permitido. As restrições (3.22)-(3.24) determinam a posição e a velocidade do próximo veículo à frente do VO em cada instante de tempo k . Enfim, os termos $\gamma\alpha(x_N)(x_N - x_{meta})^2$ e $\beta(v_N - v_{meta})^2$ na função objetivo (3.14) são penalizações que forçam com que o veículo cumpra o percurso e o conclua a uma velocidade predefinida, respectivamente.

Observe que o problema de otimização (3.14)-(3.26) é um problema não linear bastante complexo. A Restrição (3.22), assim como x_{prox} e v_{prox} , envolvem variáveis aleatórias cujas distribuições não conhecemos (e avaliamos que seu levantamento seria bastante árduo e demandaria muito tempo). Note que g_k forma um processo estocástico complexo envolvendo as Equações (3.22)-(3.24), que por sua vez envolvem equações da forma (3.1)-(3.2), uma para cada veículo que compõem o trânsito.

Por este motivo é proposto neste trabalho um problema aproximado para o problema formulado acima que utiliza um modelo com saltos markovianos, cuja a solução será testada no problema original.

3.7 Considerações finais

Neste capítulo foram abordados um modelo matemático dinâmico que representa o deslocamento de um veículo ao longo de um percurso e um modelo que representa sua interação com o trânsito. Estes modelos levam em conta parâmetros que podem ser facilmente ajustados, como massa e curva de potência e os dados do percurso podem ser obtidos por *Global Positioning System (GPS)* (Masumoto (1993)).

Em linhas gerais, esses modelos serviram de base para a formulação do problema, apresentado na Seção 3.6, cujo a complexidade, não linearidade e estocasticidade podem dificultar, ou até mesmo inviabilizar sua resolução usando ferramentas de otimização, em especial PD e cuja ação de controle, caso obtida, seria inviável do ponto de vista de aplicação. A solução proposta é o desenvolvimento de um modelo aproximado, apresentado na Seção 4.2, que possui observação completa de estado, cujo solução pode ser testada no Modelo Original.

Solução Proposta

4.1 Resumo do capítulo

Neste capítulo é abordada a solução para o problema formulado no Capítulo 3, que como destacado, trata-se de um modelo não linear e estocástico e por este motivo é proposta a adoção de um modelo aproximado para este problema. Além disso, o desenvolvimento deste modelo possibilitou a obtenção de um controlador que dependia apenas das informações do VO, o que possibilita a prática.

Inicialmente é apresentado o MSM que consiste em um modelo estocástico que utiliza SSM para representar as aleatoriedades do trânsito. A Seção 4.3 apresenta a estrutura das MPT de estado e suas estimativas. A solução do modelo aproximado por PDE é discutido na Seção 4.4 e a proposta de testes e análises de resultados é apresentada na Seção 4.5.

4.2 Modelo com saltos markovianos

Para tratar a inserção de trânsito, é considerado que o modelo do veículo a ser construído esteja sujeito a eventos aleatórios de redução de velocidade, ou seja, existe a cada instante de tempo uma probabilidade do veículo sair de um estado de velocidade livre para um estado em que tenha que passar por um processo de redução de velocidade, que pode ser leve ou brusco, dependendo da velocidade do veículo que esteja à frente. Esses eventos intervenientes são modelados por cadeias de Markov, permitindo considerável flexibilidade ao modelo destes eventos, e assim,

tem-se um modelo com saltos markovianos na forma

$$v(k) = a_{r(k)}v_d(k), \quad (4.1)$$

em que $v(k)$ é a velocidade do veículo no instante k , $v_d(k)$ é uma variável relacionada com a velocidade no instante k cujo valor é dado como no modelo determinístico apresentado na Seção (3.2), $r(k)$ é o estado de uma cadeia de Markov assumindo valores em um conjunto finito S (que representa o número de estados possíveis para a cadeia de Markov), e a_i são valores conhecidos para cada $i \in S$, sendo que existe uma probabilidade p_{ij} de migrar do estado i para o estado $j \in S$. Desta forma, os efeitos do trânsito na condução do veículo podem ser modelados pela equação (4.1) composta por (3.1), obtendo assim um sistema não linear com saltos markovianos dado por

$$v(k+1) = a_{r(k)}f(v(k), x(k), u(k)). \quad (4.2)$$

Esses sistemas têm sido muito estudados nas últimas décadas, principalmente na versão linear, pois fornecem modelos para problemas vulneráveis a alterações abruptas de comportamento, por exemplo em virtude de falha, perturbações ambientais repentinas, etc., que aparecem em diversas aplicações, vide por exemplo Sworder e Rogers (1983) e Val e Basar (1999). Ainda, apresentam propriedades interessantes e úteis, por exemplo, o primeiro e segundo momentos do estado evolui no tempo respeitando uma equação simples, determinística, como apresentado em Costa, Fragoso e Marques (2005), e a caracterização de problemas com custo quadrático é dada por equações interconectadas de Riccati.

Para exemplificar, considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com $a_1 = 1$, $a_2 = 0,85$, $a_3 = 0,87$, $a_4 = 0,9$, $a_5 = 0,95$, $a_6 = 0,98$ e que a MPT $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ seja dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz, o veículo tem 1% de chance de iniciar um processo de frenagem (quando está em situação normal $r = 1$), sendo este processo formado por uma visita ao estado $r = 2$ que reduz em 15% a velocidade e em seguida visita consecutivamente os estados $r = 3$, $r = 4$, $r = 5$ e $r = 6$, cada um dos quais reduzem a velocidade em 13%, 10%, 5% e 2%, respectivamente; o processo leva 5 instantes amostrais, ou seja, 5 segundos. Na Seção 4.3 apresentam-se as técnicas para levantar as probabilidades de transição da cadeia.

O problema de otimização aproximado pode, finalmente, ser formalizado matematicamente como

$$\min_{z_k=z_1, \dots, z_N} E \left\{ \gamma \alpha(x_N)(x_N - x_{meta})^2 + b(v_N - v_{meta})^2 + \sum_{k=1}^N (u(k)\Delta_t + p_{v(k)}) \right\} \quad (4.3)$$

$$\text{sujeito a } x(k+1) = x(k) + v(k), \quad (4.4)$$

$$v(k+1) = a_{r(k)} \cdot f(x(k), v(k), u(k)), \quad (4.5)$$

$$r(k) = \{1, 2, \dots, S\} \quad (4.6)$$

$$a_i \in [0, 1] \quad (4.7)$$

$$u(k) \in [0, 1], \quad (4.8)$$

$$u(k) = z_k(x(k), v(k), r(k)), \quad (4.9)$$

$$Im(z_k) \subset [0, 1], \quad (4.10)$$

$$f_k = \begin{cases} \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{P(v(k), u(k)) - c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } r(k) = 1 \\ \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{-c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } r(k) \neq 1, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1i} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2i} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

sendo que x_{meta} , v_{meta} , α , γ , b , v_{min} , v_{max} e $p_{v(k)}$ dadas como em (3.3), $r(k)$ representa os possíveis estados de frenagem para o veículo, a_i os percentuais de redução de velocidade referente a cada um dos veículos e P_{ij} representa a MPT de estado, a qual é destacada na próxima seção.

Observe que a ação de controle $u(k) = z_k(x(k), v(k), r(k))$ depende apenas da posição, velocidade e estado de frenagem do VO, informações que dependem apenas de VO, o que é viável do ponto de vista prático.

4.3 Matrizes de probabilidade de transição

Nesta seção destacam-se as MPT de estado da cadeia de Markov utilizadas no MSM apresentado na seção anterior.

O fato de o percurso conter trechos (que também chamamos de setores) de subida e descida, e o VO poder transitar em diferentes velocidades, fatores estes que influenciam fortemente na interação entre o VO e o trânsito, nos motivou a usar matrizes de probabilidade diferentes para cada setor e para diferentes faixas de velocidade do VO, como descrito na sequência.

Matriz de probabilidade setorizada em função da velocidade

A MPT utilizada neste trabalho consiste em considerar que a probabilidade de transição de estado do veículo está relacionada ao setor do percurso em que o veículo se encontra e à sua velocidade, desta forma temos que $\mathbb{P} = [p_{ij}(x, v)]$, como ilustra a Figura 4.1, em que P_N^{vn} representa a MPT para a velocidade vn no setor N .

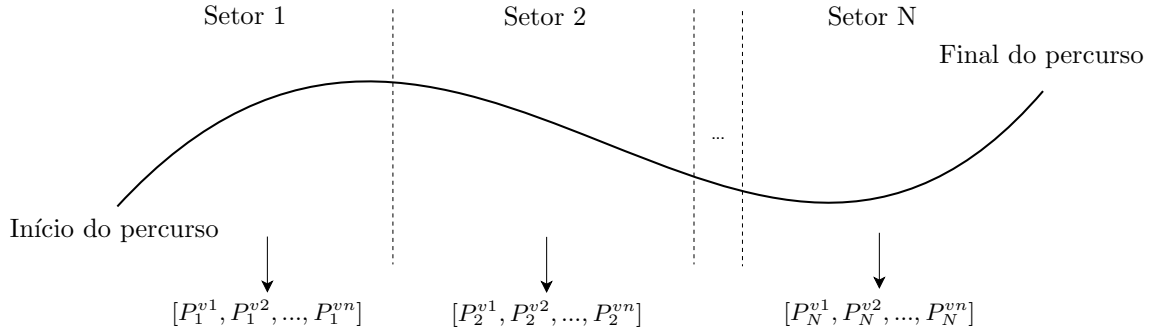


Figura 4.1 – Percurso usando MPT setorizada em função da velocidade.

Desta maneira, a restrição (4.12) do MSM apresentado na Seção 4.2 é alterada por:

$$P_{ij}(x(k), v(k)) = \begin{bmatrix} p_{11}(x(k), v(k)) & p_{12}(x(k), v(k)) & \cdots & p_{1i}(x(k), v(k)) \\ p_{21}(x(k), v(k)) & p_{22}(x(k), v(k)) & \cdots & p_{2i}(x(k), v(k)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{i1}(x(k), v(k)) & p_{i2}(x(k), v(k)) & \cdots & p_{ij}(x(k), v(k)) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Para a obtenção das MPT apresentadas acima é proposto realizar simulações de Montecarlo, ou seja, simular repetidas vezes a realização do percurso a ser percorrido pelo VO, utilizando diferentes velocidades constantes para diferentes intensidades de tráfego e armazenando as informações referentes às transições de estado do veículo, o que permite levantar estimativas. A simulação do percurso pode ser feita utilizando a implementação do Modelo para o percurso, apresentado nas Seções 3.4 e 3.5, como destacado no Capítulo 5.

Na seção seguinte é discutida a técnica de PDE para a resolução do problema de otimização aproximado (4.3)-(4.12), (4.13).

4.4 Programação dinâmica estocástica

Nesta seção é discutida a proposta de resolução do problema de otimização apresentado na Seção 4.2. Este problema pode ser resolvido por PDE, através da formulação padrão, calculando as

seguintes *funções valor* de forma recursiva:

$$\begin{aligned} W_N(x, v, i) &= \gamma\alpha(x)(x - x_{meta})^2 + \beta(v - v_{meta})^2 \\ W_k(x, v, i) &= \min_u \{u \cdot \Delta_t + E[W_k(a_{r(k+1)}f(x, v, u)) | r(k) = i]\}, \\ &= \min_u \left\{ u \cdot \Delta_t + \sum_{j=1}^N p_{ij} W_k(a_j f(x, v, u)) \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

para $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$, $i \in \{1, 2, \dots, S\}$ e p_{ij} representa a probabilidade do veículo migrar de um estado de Markov $r(k) = i$ para $r(k + 1) = j$, sendo essa probabilidade dada por (4.13) e a , α , β , x_{meta} e v_{meta} são dados como na Seção 3.3.

Os valores de x e v são escalares definidos em intervalos convenientes, por exemplo, $v \in [60 \ 120]$ significando que a velocidade pode variar entre 60 km/h e 120 km/h. Esses intervalos definem a composição da malha de busca para a solução do problema, de modo que é necessário definir um incremento ϵ para determinar a quantidade de pontos desta malha, ou seja,

$$v \in \{60, 60 + \epsilon, 60 + 2\epsilon, \dots, 60 + n\epsilon\},$$

em que $60 + n\epsilon \leq 120$. Sendo assim, a busca pela solução ótima será feita dentro de todas as combinações possíveis dos estados x , v e θ do veículo, representando posição, velocidade e estado de frenagem, respectivamente, de modo que ação de controle é uma função dada por:

$$u^* = \phi(x, v, r), \quad (4.15)$$

em que, dado o estado do veículo, é possível obter melhor ação de controle para aquela situação.

4.5 Testes e avaliação dos resultados

Apresentamos aqui as propostas referentes à avaliação dos resultados. Deve-se ressaltar que o objetivo do trabalho é otimizar o consumo de combustível em um veículo que se desloca em um percurso sujeito ao trânsito de outros veículos, para tanto foi formulado o problema de otimização apresentado na Seção 3 que devido a sua complexidade foi aproximado pelo modelo apresentado na Seção 4.2, que pode ser resolvido via PDE, o que foi discutido na Seção 4.4.

Em todo projeto de controle, depois de sintetizado o controle $u_k = \phi(x_k, v_k, r_k)$, deve-se testá-lo através de simulações e, quando possível, na prática. O teste é ainda mais importante quando o projeto envolve algum tipo de aproximação, como no caso deste trabalho. Dessa maneira, são propostas uma análise qualitativa e uma análise quantitativa do controlador estocástico.

A avaliação qualitativa consiste em analisar o desempenho do controlador estocástico no cenário determinístico, ou seja, em um percurso sem a presença de trânsito ($n_{car} = 0$). Essa análise permite inferir os efeitos da inserção da intensidade de trânsito no controlador obtido, ou seja, conforme varia-se a intensidade de trânsito no percurso para a obtenção do controlador,

quais os efeitos que esse controle sofre em um cenário determinístico e quais suas diferenças para o controlador determinístico obtido pelo modelo de Affonso e Costa (2011).

Em relação à avaliação quantitativa, espera-se verificar a eficiência do controle estocástico no problema original (Capítulo 3), comparando seu desempenho com o controlador determinístico de Affonso e Costa (2011) e com um piloto automático convencional, que mantém o carro com velocidade constante ao longo do percurso. Essas análises consistem em simular repetidas vezes a realização do percurso a fim de obter um custo médio para cada tipo de controlador sob diferentes intensidades de trânsito.

Além do custo em si, analisamos também os termos que o compõe, com especial atenção para o consumo de combustível.

4.6 Considerações finais

Em suma, a solução proposta para o problema de otimização apresentado no Capítulo 3 consiste no desenvolvimento de um modelo aproximado que utiliza MPT de estado e que pode ser resolvido usando técnicas de PDE. A solução (o controlador) será avaliada de maneira qualitativa e quantitativa, veja a Figura 4.2, conforme será descrito detalhadamente no Capítulo 6.

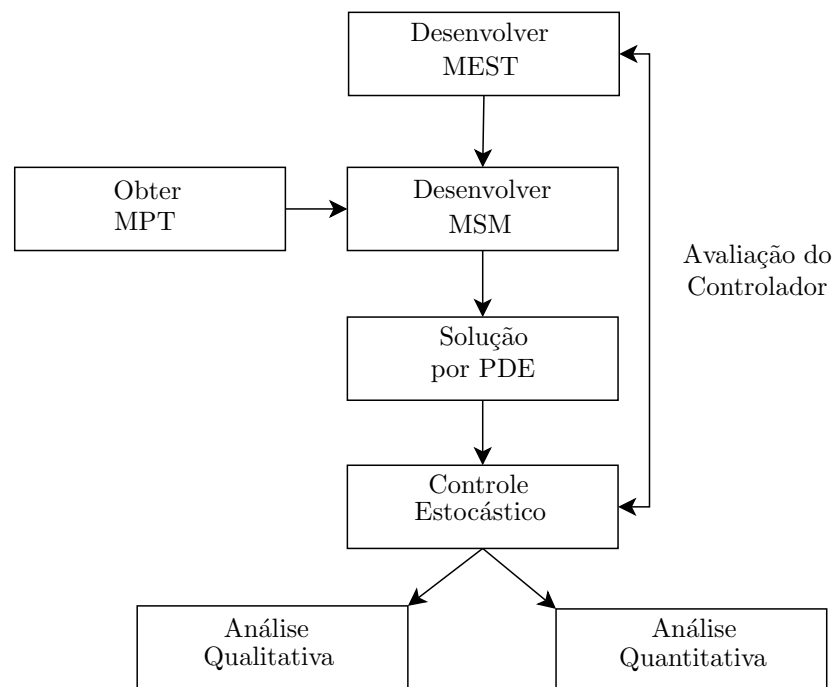


Figura 4.2 – Fluxograma completo das fases do projeto do controle.

Tendo em vista a formulação do problema a ser resolvido e da solução proposta para o mesmo, o capítulo seguinte apresenta elementos da implementação dos modelos propostos e os dados numéricos referentes ao caso estudado.

Elementos da Implementação e Definição do Caso a ser Estudado

5.1 Resumo do capítulo

Neste capítulo são abordadas as ferramentas e as técnicas utilizadas para realizar a implementação dos modelos apresentados nos Capítulos 3 e 4, além das definições numéricas do caso estudado. Os modelos foram implementados em linguagem Scilab/Matlab e C, usando um computador com sistema operacional Windows 8.1, com processador Intel i7 (3.4 GHz) e 64 GB de memória RAM.

A Seção 5.2 apresenta uma discussão sobre a implementação do modelo determinístico apresentado na Seção 3.2, analisando seus parâmetros e a obtenção de controladores: um que considera que o VO está em percurso livre de trânsito e deseja completá-lo sem violar limites de velocidade com uma velocidade média determinada e um controle que procura manter o veículo a uma velocidade constante, simulando um piloto automático.

As Seções 5.3 e 5.4 tratam da implementação do modelo que simula o trânsito no percurso e do modelo que define a interação do VO com outros veículos, respectivamente. A simulação do veículo em um percurso sujeito ao trânsito de outros veículos permite a estimativa de parâmetros para a cadeia de Markov do MSM, assuntos abordados nas Seções 5.5 e 5.6.

As simulações e testes computacionais são realizados utilizando dados de um percurso de aproximadamente 15000 metros, da Rodovia SP-310, entre as cidades de Araraquara-SP e São Carlos-SP (veja a Figura 3.1), denotado ao longo do texto por Percurso Objetivo (PO), cujo os dados de posição geográfica são obtidos de maneira offline, conforme detalhado na Seção 5.2.

5.2 Modelo Determinístico

O modelo determinístico, apresentado na Seção 3.2, consiste em representar o deslocamento de um veículo em um percurso com ausência de trânsito. Esse modelo permite a obtenção de um controlador para o veículo, visando concluir um dado percurso otimizando o consumo através da minimização do funcional de custo J , dado pela Equação (3.3).

Esse problema de otimização pode ser resolvido por PD, o que necessita da definição de uma malha de busca de solução para os possíveis estados do veículo (posição, velocidade e fluxo de combustível). Algumas penalizações devem ser ajustadas a fim de garantir que o percurso seja cumprido dentro de um tempo determinado e a uma velocidade final desejada, sempre dentro dos limites de velocidade pré estabelecidos.

Quanto aos parâmetros, são feitas as seguintes considerações: temos parâmetros que fornecidos ao veículo, tais como curva de potência, massa e velocidade média e outros ao percurso, tais como as coordenadas de posição geográfica e a extensão, informações que são necessárias para que seja definida a malha de busca da solução ótima. Esses parâmetros permitem que o modelo determinístico, reescrito abaixo, seja resolvido por PD e encontre o controle ótimo $u^* = \phi(x, v)$.

$$\min \quad J \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a } x(k+1) = x(k) + v(k), \quad (5.2)$$

$$v(k+1) = a_i(k)f(x(k), v(k), u(k)), \quad (5.3)$$

$$u(k) \in [0, 1], \quad (5.4)$$

$$f_k = \begin{cases} \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{P(v(k), u(k)) - c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } a_i(k) = 1 \\ \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{-c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } a_i(k) \neq 1, \end{cases} \quad (5.5)$$

em que podemos considerar $a_i(k) = 1$ no caso determinístico, pois neste cenário o veículo não está sujeito a entrar em processo de frenagem.

Abaixo é feita uma breve discussão sobre os parâmetros do modelo.

- **Potência , massa e outros parâmetros:** podem ser obtidos de trabalhos anteriores (como Affonso e Costa (2011)) ou de manuais e revistas especializadas.
- **Velocidade média desejada para a realização do percurso:** Esta informação é fundamental para que o tempo de realização do percurso seja definido, assim o veículo busca otimizar o consumo e completar o percurso dentro do tempo desejado.
- **Coordenadas e extensão:** As coordenadas de posições geográficas do percurso são importantes para que seja possível determinar a cada instante amostral a altitude do veículo, representado por $\Delta_h(k)$, o que permite otimizar levando em conta essas características do

percurso. Essas coordenadas podem ser obtidas via aplicativo de uso não comercial desenvolvido pelo nosso grupo de pesquisa ou por aplicativos de mapas como o *Google maps*¹, ou mesmo por cartas topológicas comerciais. A extensão do percurso deve ser definida dentro dos limites em que as coordenadas foram obtidas.

- **Definição de malha:** A definição da malha é importante para a qualidade da solução a ser obtida, pois um maior número de elementos na malha normalmente fornece soluções mais refinadas. Porém, um número excessivo de pontos podem impactar significativamente no tempo de solução. No problema determinístico, os estados considerados são apenas a posição x e a velocidade v do veículo, dessa forma, é necessário definir os intervalos e o número de pontos para estes estados e para a ação de controle u , assim tem-se

$$\begin{aligned} x(k) &\in [x_{g1}, x_{g2}, \dots, x_{gS}], & \text{sendo } x_{gS} &= x_{g1} + (n_x - 1)\epsilon_x, \\ v(k) &\in [v_{g1}, v_{g2}, \dots, v_{gR}], & \text{sendo } v_{gR} &= v_{g1} + (n_v - 1)\epsilon_v, \\ u(k) &\in [0, 2\epsilon_u, \dots, (n_u - 1)\epsilon_u], & \text{sendo } (n_u - 1)\epsilon_u &\leq 1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que n_x , n_v , e n_u são o número de pontos na malha de x , v e u , respectivamente, e definem os valores dos incrementos $\epsilon_x = \frac{x_{gS} - x_{g1}}{n_x}$, $\epsilon_v = \frac{v_{gR} - v_{g1}}{n_v}$ e $\epsilon_u = \frac{1}{n_u}$.

O número de pontos na malha interfere diretamente no tempo computacional para a obtenção do controle ótimo, como mostra a Tabela 5.1, que apresenta o tempo computacional para as implementações feitas em linguagem Scilab e em linguagem C para percursos de 7000² metros. Dessa maneira, a definição da quantidade de pontos é feita de modo que a solução tenha qualidade e seja obtida em um tempo relativamente pequeno.

Tabela 5.1 – Tempo em função do número de pontos na malha para o modelo determinístico.

Número de pontos	Tempo de execução (s) - Scilab	Tempo de execução (s) - C
30	887.01	0.66
40	2037.75	1.20
50	3956.98	2.12
60	6774.96	3.54
80	15760.25	8.20
100	n/d	14.40

- **Penalizações:** As penalizações devem ser ajustadas de modo que seus valores não tenham um impacto muito predominante na solução do problema. Penalizações mal definidas também podem levar a problemas numéricos (por exemplo, no computador, o valor do consumo pode acabar desaparecendo ao ser somado com um termo de ordem muito alta).

¹disponível em: <<https://www.google.com.br/maps>> Acessado em 30/08/2016

²neste teste foi tomado um percurso pequeno para que as execuções em Scilab não fossem excessivamente demoradas.

As penalizações referentes à variação de velocidade permitida v_{max} e v_{min} , podem ser ajustadas a fim de evitar multas e riscos de acidentes ².

A seguir apresentam-se alguns resultados provenientes da implementação do modelo determinístico e da simulação do VO usando os controladores obtidos.

5.2.1 Simulação do Veículo Objetivo no percurso sem trânsito

A implementação do modelo determinístico proposto por Affonso e Costa (2011) tem como objetivo gerar um controle ótimo para o veículo sem considerar o fator trânsito e um controle que simule um piloto automático e busque manter o veículo a uma velocidade média. O intuito de obter estes simuladores é realizar comparações entre eles e o controle estocástico.

Nesta seção apresentam-se alguns resultados referentes à simulação do VO em um percurso sem trânsito utilizando o controlador determinístico (Seção 5.2.1.1) e o piloto automático (5.2.1.2).

Os testes e as simulações apresentadas utilizam como percurso o PO, destacado anteriormente, cuja a escolha foi feita devido ao fato de ser um percurso que possui trechos de acilidade e declividade, apresentando diversificação, uma característica de muitas rodovias brasileiras.

5.2.1.1 Controle Determinístico

Para realizar a simulação apresentada na Figura 5.1 é obtido um controlador determinístico utilizando uma malha com 80 pontos para cada estado, ou seja, utiliza-se $n_x = n_v = n_u = 80$, pois para malhas com um número maior de pontos a solução teve variações pouco significativas, porém gastava-se um maior tempo computacional. Quanto às penalizações: foram adotadas penalizações para violação de velocidade fora do intervalo $[80, 110]$ (visando uma questão de segurança) e para evitar que o veículo conclua o percurso com velocidade diferente da velocidade média determinada, que é de 95 km/h. Vale ressaltar que os gráficos referentes a velocidade e fluxo de combustível, que são grandezas discretizadas, foram obtidos usando interpolação entre os pontos e apresentados de forma contínua para melhor visualização.

A simulação realizada considerou como VO um veículo que possui as características de um carro de motor 1.6 com 110 cavalos de potência (HP) e massa de 1210 kg.

²Os v_{max} e v_{min} podem ser definidos próximos e de v_{pa} para se obter um controlador simulando um piloto automático do veículo ajustado na velocidade v_{pa}

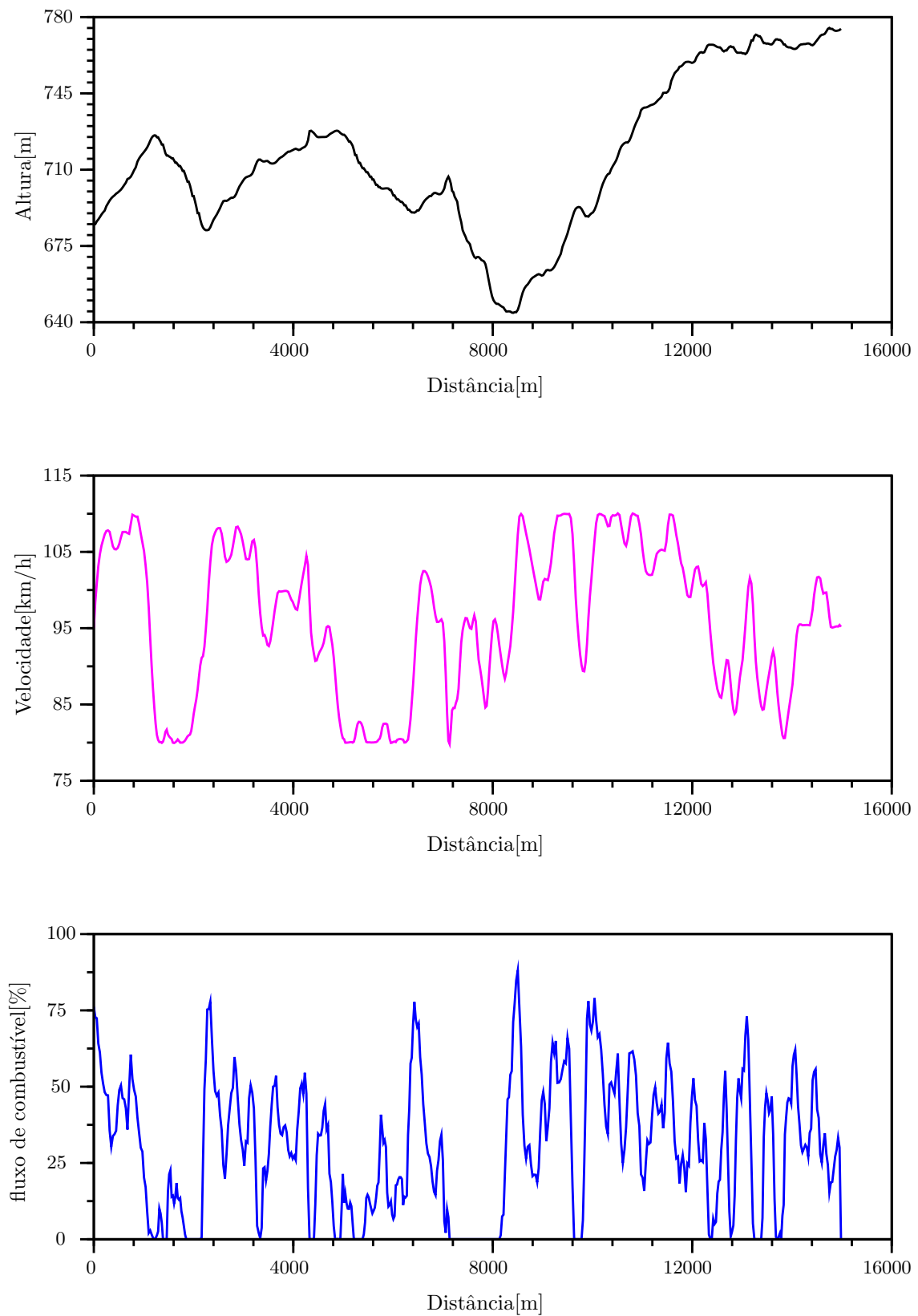


Figura 5.1 – Simulação do VO usando controle determinístico.

Analisando a Figura 5.1, nota-se que o controlador faz com que o veículo busque aproveitar ao máximo trechos de declividade para reduzir o fluxo de combustível, aproveitando a energia potencial gravitacional, como pode ser observado nas distâncias de 2000m e 8000m do percurso. Além disso, é possível notar que as maiores acelerações são dadas instantes antes de iniciar um trecho de aclividade, pois iniciar subidas com velocidade baixa significa estar em baixa rotação.

Discussões mais aprofundadas sobre os efeitos qualitativos do controlador são discutidas no Capítulo 6. A seguir, tem-se resultados obtidos para o controlador que simula um piloto automático.

5.2.1.2 Piloto Automático Adaptado

Para a obtenção de uma ação de controle que procurasse manter o veículo próximo de uma velocidade foi usado o modelo determinístico com restrições mais justas para a variação de velocidade. Para a simulação apresentada na Figura 5.2, foi utilizado para o veículo os mesmos parâmetros do veículo da simulação do controle determinístico apresentado na Seção 5.2.1.1, a diferença está na restrição adotada para a variação de velocidade que neste caso penaliza velocidades que não pertencem ao intervalo [93,97].

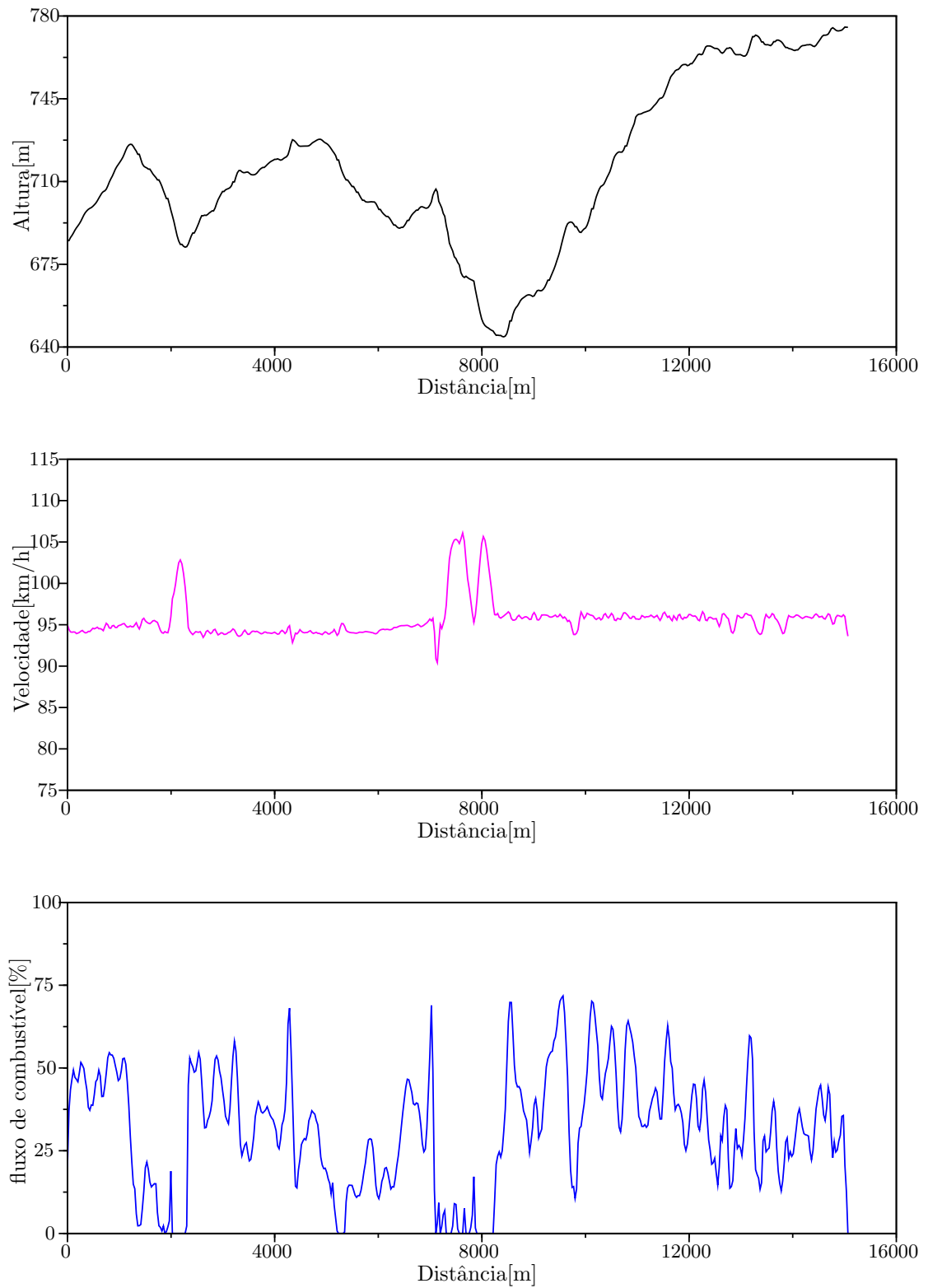


Figura 5.2 – Simulação do VO usando controle do piloto automático adaptado.

Observe que o veículo manteve uma velocidade com menor variação, entre 91km/h e 105km/h, sendo que a maior parte do percurso o veículo respeitou os limites pré estabelecidos e se mantendo a 95 km/h, que é a velocidade ajustada para o piloto automático. Note que os picos de velocidade são obtidos em setores de descida, pelo fato do piloto automático não possuir freio.

Desta maneira, pode-se obter um controlador para diferentes tipos de veículos apenas fazendo ajustes nos parâmetros do veículo (curva de potência e massa), para diferentes condutores basta definir regras de penalização visando obter determinado comportamento (penalizações de velocidade, intervalos de velocidade e velocidade média no percurso) e em diferentes percursos, apenas fornecendo diferentes dados de posição geográfica.

5.3 Modelo para o Trânsito

Como apresentado na Seção 3.4, o modelo para o trânsito no percurso consiste em definir o número médio de veículos e em seguida determinar suas características, gerar suas trajetórias e determinar seus tempos de entrada no percurso, definidos de maneira aleatória seguindo uma distribuição exponencial.

Nesta Seção são apresentados elementos da implementação do modelo que simula o trânsito no percurso, destacando sua variabilidade quanto ao tipo de veículo (carro 1.0, carro 1.6, caminhão leve e caminhão pesado) e tipo de condutor (com diferentes ações de controle e/ou diferentes velocidades médias no percurso).

5.3.1 Variabilidade do trânsito

A variabilidade do trânsito é obtida através da variação de parâmetros relacionados ao veículo e da ação de controle empregada. Nesta seção apresentam-se os diferentes tipos de veículos e condutores que fazem a composição do trânsito a ser considerada neste trabalho.

Em relação aos tipos de veículos que foram criados através da modificação de parâmetros como curva de potência e massa, temos 9 tipos diferentes, como mostra a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Tipos de veículos que fazem a composição do percurso.

Tipo	Potência máxima (HP)	Massa (kg)	Representação
1	185	8700	Caminhão pequeno
2	200	9500	Caminhão médio
3	300	12000	Caminhão grande
4	76	1204	Carro 1.0
5	76	1204	Carro 1.0
6	76	1204	Carro 1.0
7	110	1210	Carro 1.6
8	128	1210	Carro 1.6
9	128	1210	Carro 1.6

As curvas de potência podem ser obtidas por dados fornecidos por fabricantes, assim como a massa dos veículos, que podem sofrer alterações decorrentes da ocupação do veículo. Observe que alguns veículos possuem características semelhantes, como os veículos de tipo 4 a 6 e os do tipo 8 e 9, porém representam tipos de condutores diferentes, ou seja, com uma ação controle diferente que faz com que tenham um comportamento diferente ao longo do percurso, como destacado a seguir.

Veículo do Tipo 1: Tem as características de um caminhão pequeno que busca completar o percurso minimizando o consumo, ou seja, busca aproveitar trechos de declividade para não acelerar. Seu controlador foi obtido utilizando o modelo determinístico apresentado na Seção 5.2 e sua velocidade média no percurso é de 80km/h e varia entre 60 e 105 km/h, sendo as menores velocidades encontradas em subidas. Em resumo, trata-se de um condutor que visa minimizar o custo de sua viagem.

Veículo do Tipo 2: Tem as características de um caminhão médio que busca completar o percurso minimizando o consumo, ou seja, busca aproveitar trechos de declividade para não acelerar. Sua velocidade ao longo do percurso varia entre 60 e 100 km/h, sendo as menores velocidades encontradas em subidas. Sua velocidade média no percurso será de 75km/h.

Veículo do Tipo 3: Representa um caminhão pesado, que faz o percurso aproveitando trechos de descida para ganhar bastante velocidade, chegando em alguns momentos a mais de 115 km/h, o que compensa sua lentidão em subidas, onde chega a 55 km/h. Sua velocidade média é de 80km/h.

Veículo do Tipo 4: Trata-se de um veículo de motor 1.0 que completa o percurso variando sua velocidade entre 70 e 100 km/h, com uma velocidade média de 85km/h. Podemos dizer que se trata de um motorista bastante cauteloso e sem muita pressa de chegar ao destino.

Veículo do Tipo 5: Tem-se outro veículo de motor 1.0, porém com um perfil mais instável, pois trafega em alta velocidade em alguns momentos e em velocidade baixa em outros, variando entre 70 e 110 km/h e com velocidade média de 90km/h.

Veículo do Tipo 6: Este tipo de veículo, que também representa um de motor 1.0 tem um comportamento mais constante ao longo do percurso, pois tenta manter sua velocidade média de 95 km/h, tendo pequenas variações que vão de 80 a 105 km/h em alguns momentos de bastante aclividade e declividade, respectivamente, porém na maior parte do percurso se mantém em torno dos 95km/h. Seu controlador simula um piloto automático, como o apresentado na Seção 5.2.1.2.

Veículo do Tipo 7: Tem características semelhantes ao veículo do Tipo 6, porém representa um veículo de motor 1.6, que por ter maior potência, consegue se manter mais próximo de sua velocidade média de 90 km/h, tendo variações de no máximo 10 km/h.

Veículo do Tipo 8: Tem-se outro veículo de motor 1.6, porém este se desloca com velocidade média de 95km/h e varia sua velocidade entre 80km/h e 110km/h e busca realizar o percurso aproveitando trechos de declividade para economizar combustível.

Veículo do Tipo 9: Representa um veículo de motor 1.6 que busca completar o percurso com velocidade constante de 100 km/h, porém, em trecho de grande declividade excede essa velocidade, chegando a 110 km/h.

Com os diferentes tipos de veículos definidos, na Seção seguinte são apresentadas as ferramentas utilizadas para construir a composição do trânsito.

5.3.2 Composição do trânsito

A composição consiste em simular individualmente através do modelo de Affonso e Costa (2011) cada um dos 9 tipos de veículos apresentados na seção anterior ao longo do PO. Em cada simulação é possível obter a posição x e a velocidade v de cada veículo em função do instante k e assim tem-se para cada um dos veículos um par de vetores associado

$$x_i = [0, x_i(2), x_i(3), \dots, x_i(2N)] \quad (5.7)$$

$$v_i = [v_i(1), v_i(2), v_i(3), \dots, v_i(2N)], \quad (5.8)$$

que juntos formam a trajetória de cada um dos i veículos, veja a Figura 5.3, em que x_{alvo} representa a posição final do percurso.

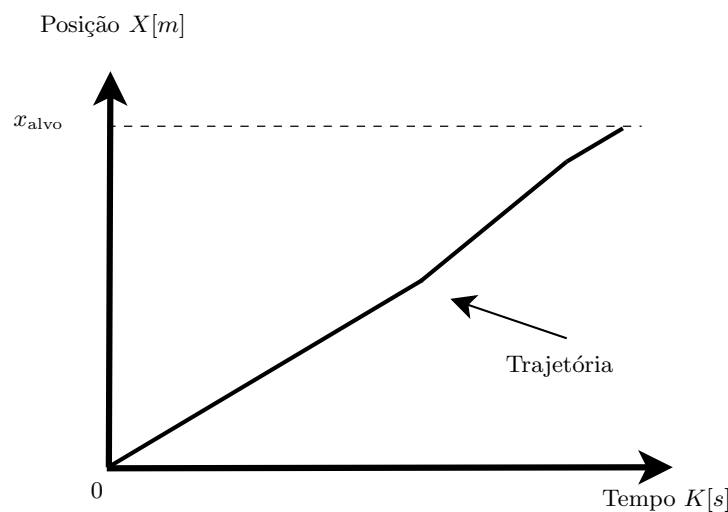


Figura 5.3 – Trajetória de um veículo ao longo tempo.

Com as trajetórias de cada veículo geradas, é necessário definir o número de veículos no percurso e sortear seus tempos de entrada, conforme apresentado na Seção 3.4 e exemplificado na Figura 3.2, em seguida sorteia-se os tipos de veículos seguindo uma distribuição equiprovável, e então o veículo é simulado de acordo com o modelo de Affonso e Costa (2011). Dessa forma, cada um dos i veículos tem suas trajetórias definidas e assim pode-se criar os vetores auxiliares xa_i e va_i que fazem com que a posição e a velocidade destes veículos sejam conhecidas em função do instante em que o VO entrar no percurso ($k = 0$). Assim,

$$xa_i(k) = \begin{cases} x_i(k + s_f - s_i), & \text{se } k + s_f - s_i > 0 \\ 0, & \text{se } k + s_f - s_i \leq 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$va_i(k) = \begin{cases} v_i(k - s_f - s_i), & \text{se } k + s_f - s_i > 0 \\ 0, & \text{se } k + s_f - s_i \leq 0, \end{cases}, \quad (5.10)$$

permitem representar as trajetórias de todos os $i \in \mathbf{N}$ veículos de acordo com o tempo de entrada de cada um no percurso, como mostra a Figura 5.4, em que $s_1, s_2, s_3, \dots, s_i$ são os tempos de entrada dos Veículos 1, 2, 3, \dots , i , respectivamente, e s_f o tempo do último veículo a entrar no percurso, no caso o VO.

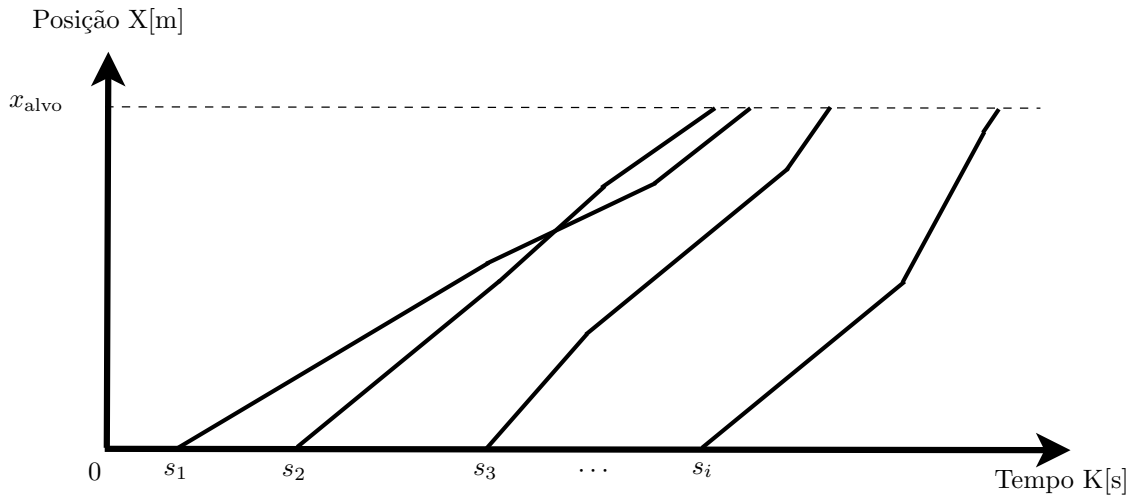


Figura 5.4 – Trajetórias de n veículos ao longo tempo.

Note que na Figura 5.4 ocorre uma ultrapassagem entre o Veículo 1 e 2, porém ela ocorre instantaneamente sem que haja nenhum tipo de regra para que isso aconteça. As regras de ultrapassagem são consideradas apenas para o VO interagindo com os veículos no percurso, conforme tratado na Seção 5.4.

Os tipos de veículos apresentados juntamente com as diferentes características dos condutores fazem com que o trânsito seja diversificado e com características relativamente realistas. A definição dos tempos de entrada de cada veículo no percurso depende de uma distribuição exponencial que visa garantir que ao longo do percurso, durante as realizações, tenha um nú-

mero médio de veículos pré estabelecido n_{car} . Esse modelo para o trânsito permite saber, a cada instante de tempo, a posição e velocidade de todos os veículos no percurso, dados que são necessários para o modelo que trata da interação do VO com o trânsito, discutido na seção seguinte.

5.4 Modelo para Veículo Objetivo interagindo com o Trânsito

Esta seção trata da interação do VO com o trânsito no percurso, destacando os parâmetros do modelo apresentado na Seção 3.5. Inicialmente é necessário definir as características do VO a realizar o percurso: este será escolhido dentre os 9 veículos apresentados na Seção 5.3.1. Em seguida é necessário definir a composição do trânsito no percurso, assim como na Seção 5.3.2, e as regras de frenagem, que consistem em implementar as Equações 4.4-4.7 para que o VO reduza sua velocidade ao encontrar outro veículo a sua frente.

Dada a composição do trânsito, é necessário definir o tempo de entrada do s_f do VO no percurso, veja a Figura 5.5.

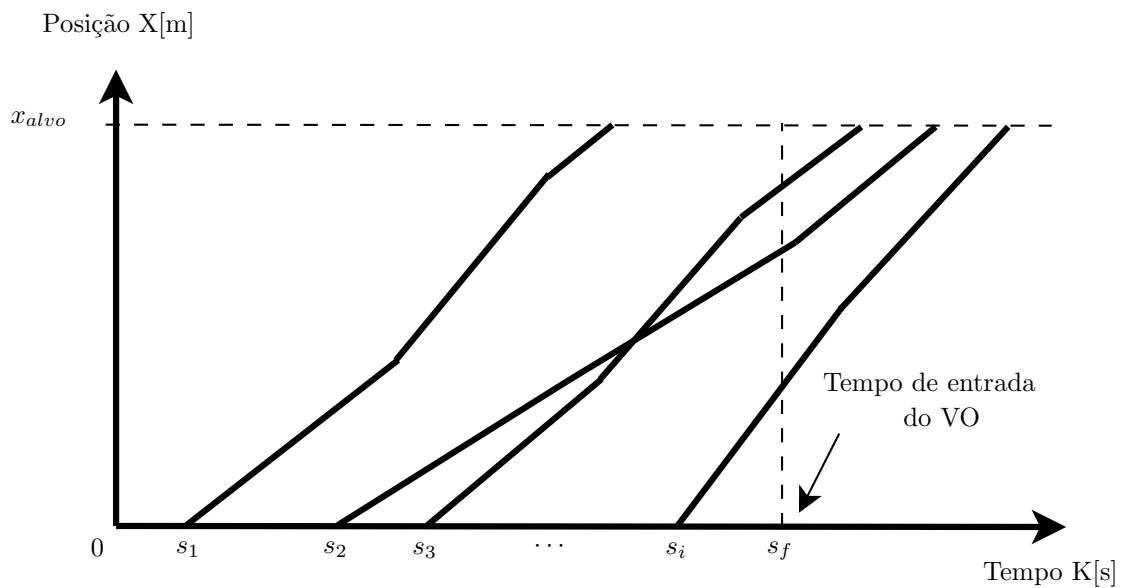


Figura 5.5 – Definição do tempo de entrada do VO no percurso com trânsito.

Com a inserção do VO no percurso, os vetores que armazenam a posição e a velocidade dos veículos que compõem o trânsito são ajustados, de modo que suas informações fiquem em função do tempo de entrada do VO no percurso, assim o instante s_f se remete ao instante $k = 0$ da simulação do VO. As informações referentes aos outros veículos são relevantes a partir deste instante, assim como mostra a Figura 5.6.

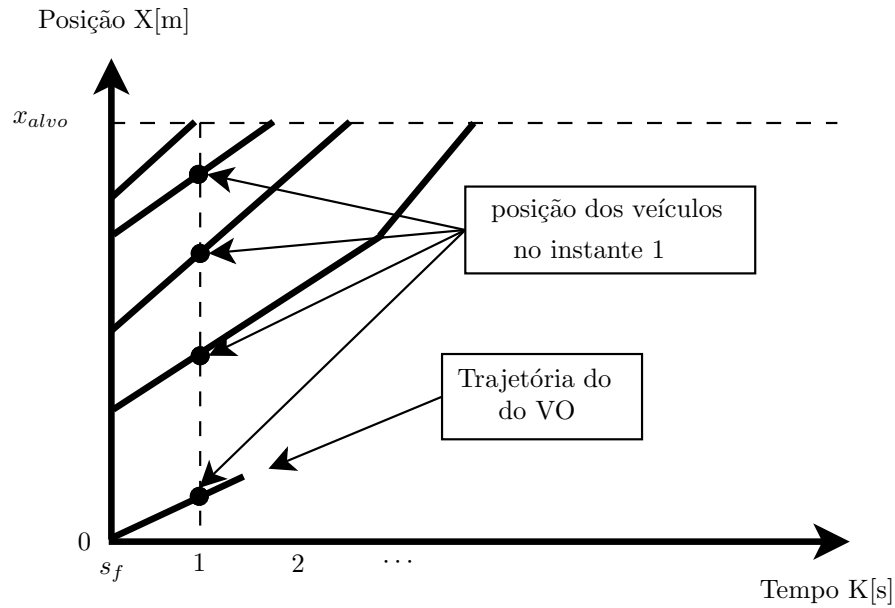


Figura 5.6 – Definição do tempo de entrada do VO no percurso.

Assim, a cada instante de tempo k é possível obter informações referentes ao próximo veículo a frente do VO e verificar a distância $\Delta_x(k)$ entre eles, pois a partir dela as regras de frenagem das Equação 3.5 são ativadas, veja Figura 5.7.

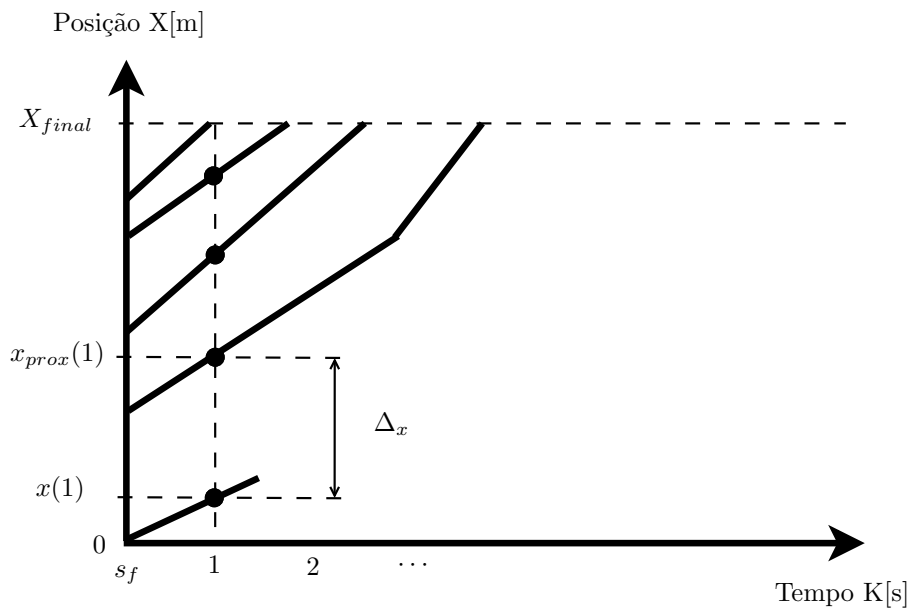


Figura 5.7 – Obtendo a distância entre o VO e o próximo veículo a sua frente.

As informações sobre a posição e velocidade dos veículos que compõem o trânsito no percurso são armazenadas na matriz $M_{prox}(k)$ que é atualizada a cada instante k , como exemplificado a seguir: a Figura 5.8 apresenta a posição dos veículos A, B, C, D e E nos instantes de tempo $k = 0$ (instante em que o VO entra no percurso) e $k = 30$. Em cada instante de tempo uma matriz

M_{prox} é definida de acordo com a posição e velocidade destes veículos e assim pode-se definir o próximo veículo a frente do VO e a distância entre eles.

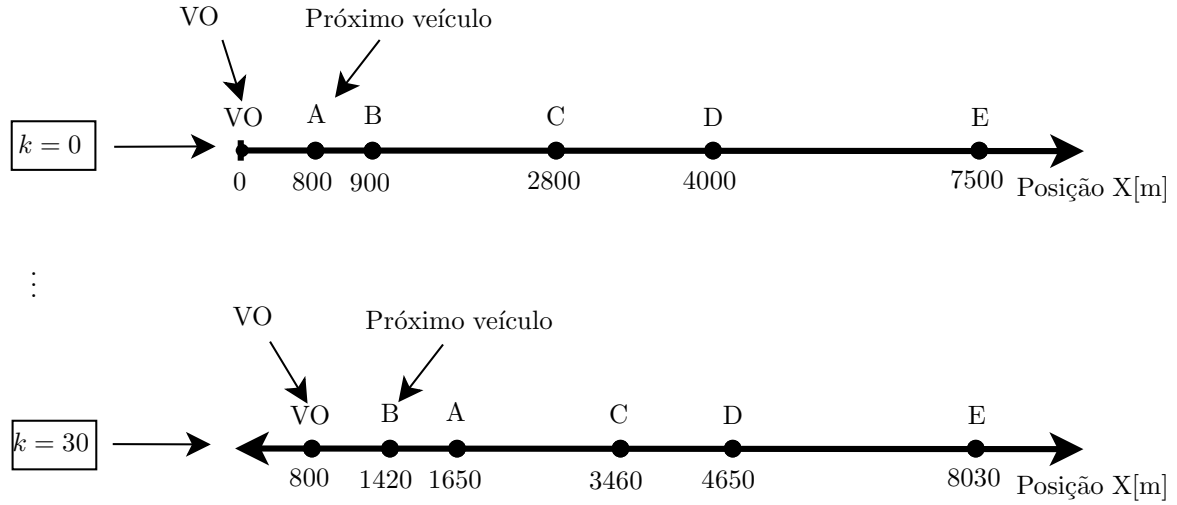


Figura 5.8 – Exemplo do VO no percurso.

Com base na Figura 5.8, temos no instante $k = 0$,

$$M_{prox}(0) = \begin{bmatrix} 800 & 900 & 2800 & 4000 & 7500 \\ v_A(0) & v_B(0) & v_C(0) & v_D(0) & v_E(0) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\Delta_x(0) = 800, \quad (5.12)$$

e para o instante $k = 30$,

$$M_{prox}(30) = \begin{bmatrix} 1420 & 1650 & 3460 & 4650 & 8030 \\ v_B(30) & v_A(30) & v_C(30) & v_D(30) & v_E(30) \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\Delta_x(30) = 620, \quad (5.14)$$

em que $v_A(k)$, $v_B(k)$, $v_C(k)$, $v_D(k)$ e $v_E(k)$ representam a velocidade dos veículos A, B, C, D e E no instante k , respectivamente, e $\Delta_x(k)$ a distância entre o VO e o próximo veículo a sua frente no instante k .

Neste trabalho as regras de frenagem foram adotadas baseadas em cálculos que visavam situações extremas e o tempo necessário para que um veículo em alta velocidade reduza sua velocidade a ponto de evitar colisão com um veículo lento que se encontra à sua frente. Com esse objetivo, foram definidos:

- A distância mínima permitida para iniciar o processo de frenagem d_{min} foi definida 80 metros, a partir de dados do Código de Trânsito Brasileiro ¹, que recomenda uma distância

¹Disponível em: <<http://www.ctbdigital.com.br/?p=Comentarios-Registro=64campo-busca=artigo=192>> Acessado em 08/06/2016

mínima de tempo de 2 segundos entre os veículos, ou seja, se um veículo está a 110km/h, deve se manter a pelo menos 60 metros de distância do veículo a sua frente, logo esta recomendação é seguida em nossos testes.

- Quanto às taxas de redução de velocidade, são determinadas pela função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que depende de Δ_v , e é definida da seguinte forma

$$g(\Delta_v) = \begin{cases} 0,98, & \text{se } \Delta_v < 10,8 \\ 0,95, & \text{se } 10,8 \leq \Delta_v \leq 28,8 \\ 0,90, & \text{se } 28,8 < \Delta_v \leq 43,2 \\ 0,87, & \text{se } 43,2 < \Delta_v \leq 57,6 \\ 0,85, & \text{se } \Delta_v > 57,6 \end{cases} \quad (5.15)$$

em que as faixas de velocidade são indicadas em km/h .

Vale ressaltar que cada um dos níveis de frenagem representa um estado da cadeia de Markov do modelo apresentado na Seção 4.2 e durante as simulações da realização do percurso é contabilizado as transições entre estes estados, o que possibilita o levantamento de probabilidades.

5.4.1 Simulação do Veículo Objetivo no percurso com trânsito

Aqui apresentam-se alguns gráficos e comentários referentes às simulações do VO interagindo com o trânsito no percurso. Para tanto, define-se como VO um veículo do Tipo 8, apresentado na Seção 5.3.2, e como percurso o PO, descrito no início deste capítulo.

Em cada uma das realizações apresentadas foram variados parâmetros como a velocidade média do VO no percurso e a intensidade de trânsito no mesmo, como mostram as Figuras 5.9, 5.10 e 5.11, que apresentam o VO (trajetória em magenta) com velocidade média 80 e 110 km/h sujeito ao trânsito de em média 5, 10 e 40 veículos (trajetórias em preto), respectivamente. Devemos ressaltar que o número médio de veículos no percurso é utilizado para determinar a taxa de inserção de veículo, e que realizações com n veículos no percurso terão em média n veículos, podendo esse número variar a cada simulação.

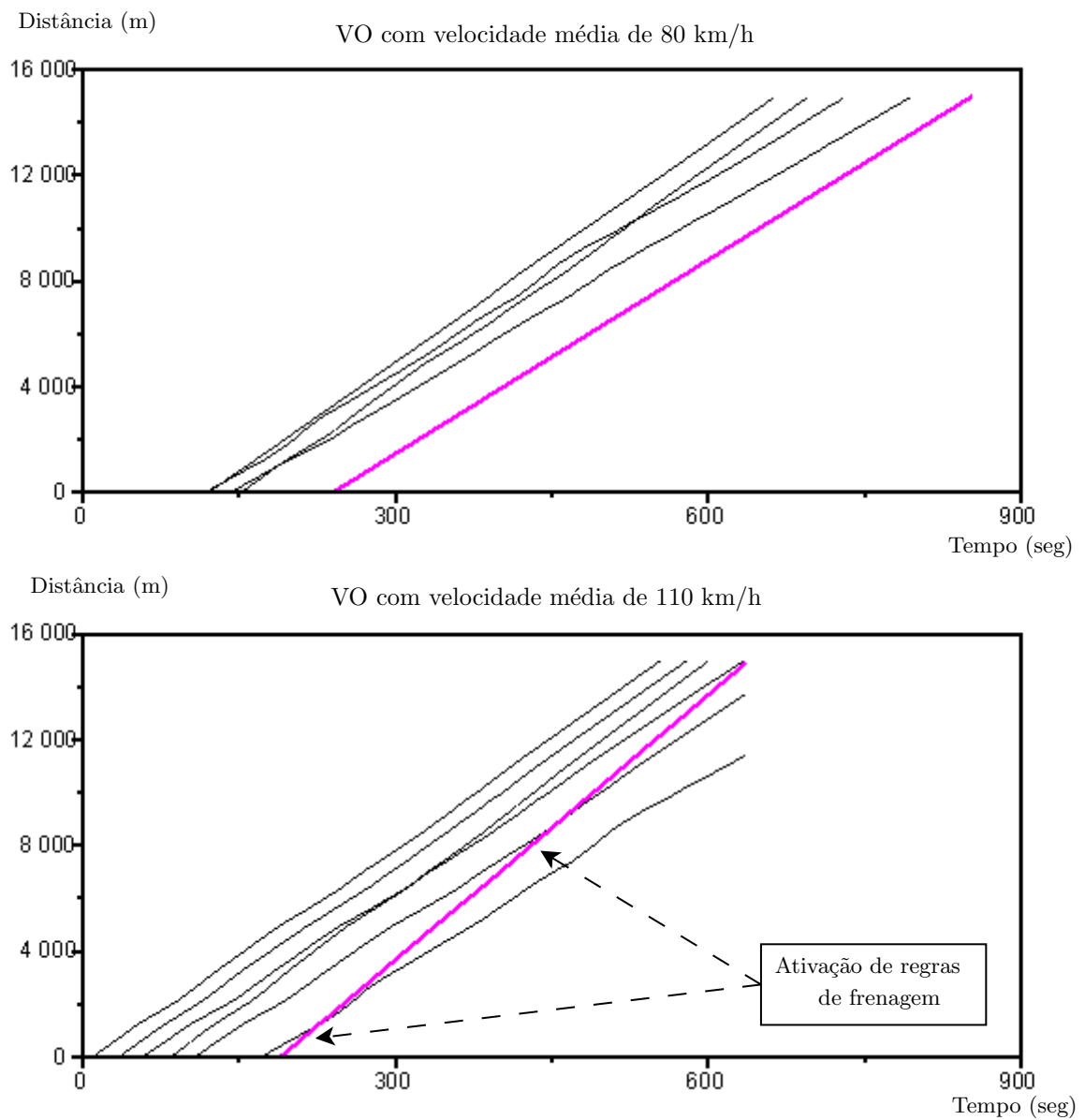


Figura 5.9 – Simulação do VO com trânsito de 5 veículos.

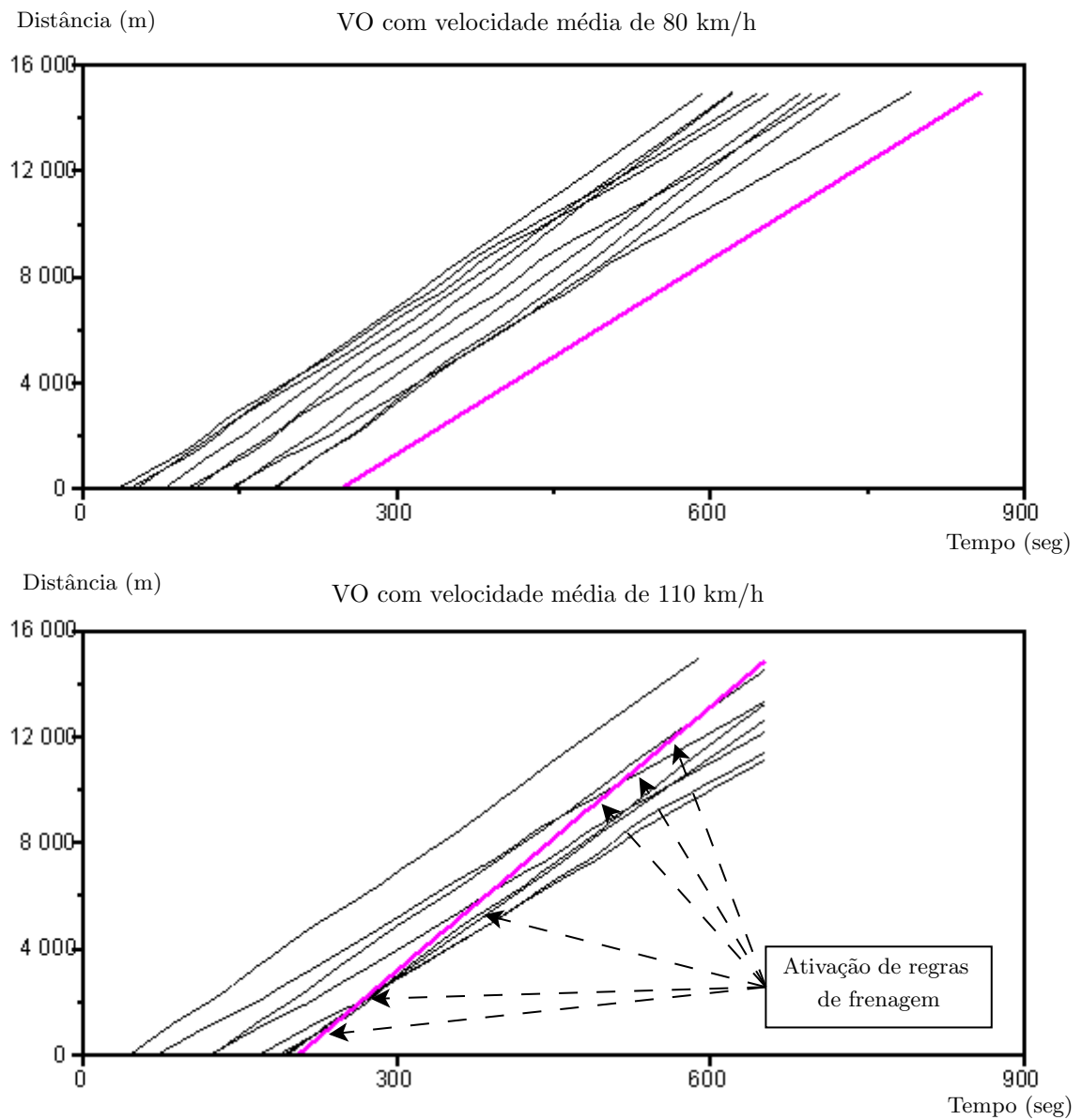


Figura 5.10 – Simulação do VO com trânsito de 10 veículos.

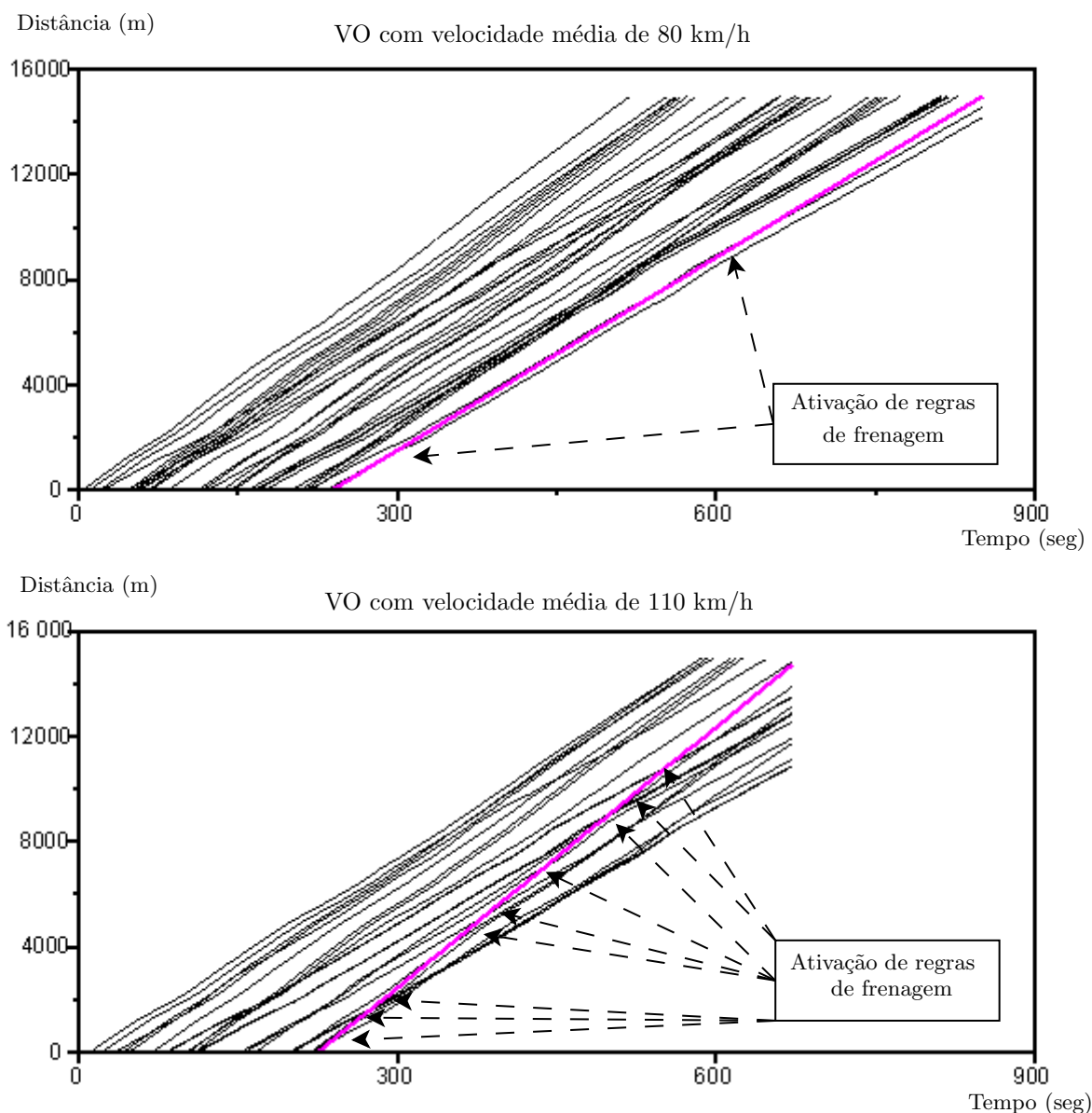


Figura 5.11 – Simulação do VO com trânsito de 40 veículos.

Nas Figuras 5.9, 5.10 e 5.11 podemos observar que nas realizações em que o VO está a 80 km/h de média o número de vezes em que o veículo entra em estado de frenagem é menor do que nas realizações em que a velocidade média é 110 km/h, mostrando que, de fato, a velocidade do veículo interfere nas chances dele entrar em um processo de frenagem.

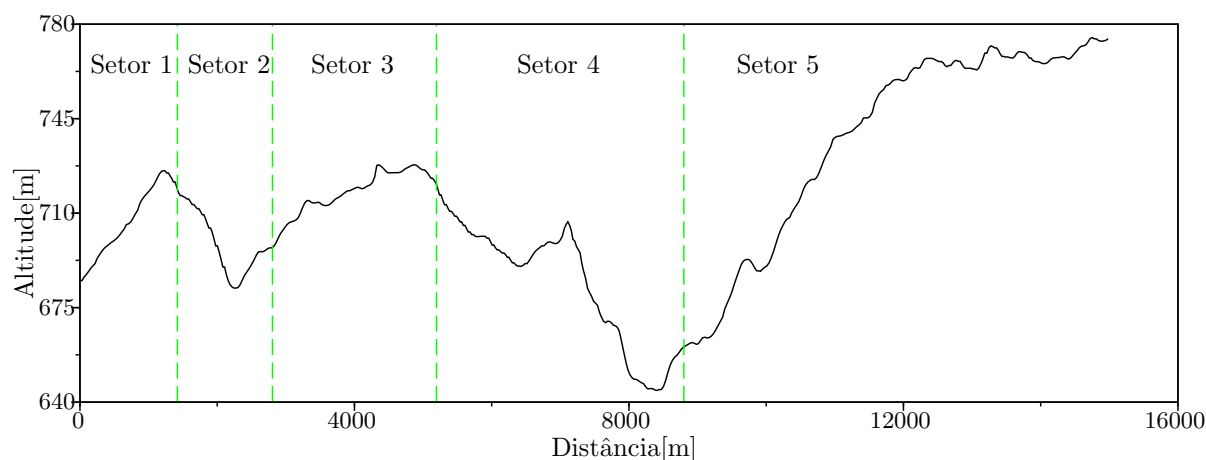
O tempo computacional para simular a realização do percurso varia de acordo com o número de veículos que compõem o trânsito, como mostra a Tabela 5.3. Vale ressaltar que as trajetórias dos veículos que compõem o trânsito são geradas previamente e que o modelo implementado considera apenas a interação do VO com o percurso. A implementação e simulação são feitas em linguagem Scilab.

Tabela 5.3 – Tempo computacional para simular percurso em função da intensidade de trânsito.

Número de realizações	Veículos no percurso	Tempo de execução (s)
100	1	5.38
100	2	11.30
100	5	24.59
100	10	44.85
100	20	94.31
100	40	185.86
100	80	358.47

5.5 Matriz de Probabilidade de Transição

Nesta seção apresentam-se elementos relacionados à obtenção das MPT de estado. Essas matrizes são obtidas via simulação de Monte Carlo, onde para cada o levantamento de cada MPT é adotado o número de 10^4 realizações do percurso. Conforme proposto na Seção 4.3, inicialmente é feita a setorização do PO de acordo com as características de aclividade e declividade, assim como mostra a Figura 5.12.

**Figura 5.12** – Setorização do PO.

Além do setor em que o veículo se encontra, as MPT também dependem da velocidade, porém, a malha com as possíveis velocidades que o VO pode possuir é bastante extensa, o que inviabiliza para este trabalho a obtenção de matrizes associadas a cada uma delas.

Desta maneira, cria-se uma malha auxiliar para a velocidade com uma menor quantidade de pontos e caso o veículo esteja a uma velocidade v que não seja um elemento na malha, é feita uma interpolação linear (*spline* linear) usando a velocidade anterior e a velocidade posterior a v que tiveram MPT estimada. Em suma, dada a posição x do veículo e sua velocidade v a

probabilidade de transição é dada por:

$$p_{ij}(x, v) = (1 - \omega)p_{ij}(x, [v]_r) + \omega p_{ij}(x, [v]_{r+1}), \quad (5.16)$$

sendo $r \in \mathbb{N}$ a posição do elemento na malha auxiliar da velocidade anterior à atual a possuir matriz estimada, isto é,

$$[v]_r \leq v \leq [v]_{r+1} \quad (5.17)$$

em que ω é dado por

$$\omega = \frac{v - [v]_r}{[v]_{r+1} - [v]_r}. \quad (5.18)$$

Para este trabalho adota-se uma malha auxiliar de velocidade com 4 pontos, sendo eles referentes às velocidades de 80, 90, 100 e 110 km/h e as MPT foram obtidas utilizando as ocorrências das 10^4 realizações feitas pelo VO ao longo do PO para cada uma das velocidades da malha auxiliar e para cada número médio de veículos no setor. Essencialmente, levantamos as seguintes matrizes:

- **Matriz de ocorrências:** Entre cada iteração é verificado o estado anterior r_{k-1} e o atual r_k do veículo e desta forma cria-se uma matriz M_o das ocorrências dessas transições, em que cada coeficiente \hat{m}_{ij} representa o número de ocorrências obtidas da transição do estado $r_{k-1} = i$ para o estado $r_k = j$.
- **Matriz de probabilidades:** Para obter as probabilidades \mathbb{P} associadas a cada transição de estado utiliza-se o estimador natural de probabilidades em que é feita a razão entre cada coeficiente de M_o e o somatório dos elementos da linha em que esse coeficiente se encontra, ou seja, neste caso em que temos 6 estados possíveis para frenagem, tem-se

$$p_{ij} \cong \frac{\hat{m}_{ij}}{\sum_{j=1}^6 \hat{m}_{ij}},$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

As Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam algumas das MPT estimadas, em que cada matriz se refere a uma determinada intensidade de trânsito no percurso, em um setor do PO específico e com uma velocidade média determinada.

Tabela 5.4 – MPT para intensidade de trânsito de 5 veículos.

Veículos	Setor	Vel. (km/h)	Matriz de probabilidade					
5	2	80	0.999298	0.000000	0.000000	0.000000	0.000465	0.000236
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.457627	0.542373
			0.989744	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.010256
5	2	110	0.994567	0.000000	0.001303	0.002211	0.001734	0.000184
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.012750	0.000000	0.000000	0.934426	0.052823	0.000000
			0.004881	0.000000	0.000000	0.009763	0.985356	0.000000
			0.003605	0.000000	0.000000	0.000000	0.630121	0.366273
			0.943990	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.056010
5	5	110	0.984843	0.000000	0.000290	0.010224	0.004451	0.000193
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.004435	0.000000	0.000000	0.891353	0.104213	0.000000
			0.005660	0.000000	0.000000	0.117782	0.875415	0.001143
			0.002368	0.000000	0.000000	0.000270	0.659528	0.337834
			0.151366	0.000000	0.000000	0.000028	0.000412	0.848193

A Tabela 5.4 apresenta duas MPT relacionadas ao segundo setor do PO, obtidas através das 10^4 realizações do percurso feita pelo VO a uma velocidade de 80 e 110 km/h. Note que a probabilidade do veículo entrar em um processo de frenagem, ou seja, sair do Estado 1 é de menos de 0,08% se o veículo percorre o percurso a 80 km/h, porém, para um velocidade média de 110 km/h esse percentual aumenta para mais de 0,5%. Outro fator a ser destacado é em relação ao setor em que o veículo se encontra, observe pela Figura 5.12 que o Setor 2 é um trecho de declividade e o Setor 5 de aclividade, fato que eleva a probabilidade de entrar em estado de frenagem para mais de 1,5%.

Observando as Tabelas 5.5 e 5.6 podemos notar o efeito da intensidade de trânsito nas probabilidades, de modo que para o Setor 2, trafegando a 110 km/h a probabilidade de entrar em um processo de frenagem aumenta de 0,5% para 1,1% e depois para aproximadamente 4% para intensidades de trânsito de 5, 10 e 40 veículos, respectivamente.

Tabela 5.5 – MPT para intensidade de trânsito de 10 veículos.

Veículos	Setor	Vel. (km/h)	Matriz de probabilidade					
10	2	80	0.998536	0.000000	0.000000	0.000000	0.000950	0.000514
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.002086	0.000000	0.000000	0.000000	0.446298	0.551616
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10	2	110	0.989330	0.000000	0.002441	0.004527	0.003252	0.000450
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.018411	0.000000	0.000000	0.934109	0.047481	0.000000
			0.009066	0.000000	0.000000	0.016388	0.974198	0.000349
			0.005024	0.000000	0.000000	0.000084	0.634567	0.360325
			0.983639	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.016361
10	5	110	0.982867	0.000000	0.000383	0.011334	0.005118	0.000298
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.012759	0.000000	0.000000	0.861244	0.125997	0.000000
			0.013138	0.000000	0.000000	0.119073	0.867003	0.000786
			0.005711	0.000000	0.000000	0.000563	0.655280	0.338446
			0.373774	0.000000	0.000000	0.000043	0.000501	0.625682

Tabela 5.6 – MPT para intensidade de trânsito de 40 veículos.

Veículos	Setor	Vel. (km/h)	Matriz de probabilidade					
40	2	80	0.994305	0.000000	0.000000	0.000000	0.003617	0.002078
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.004056	0.000000	0.000000	0.000000	0.453759	0.542185
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
40	2	110	0.960504	0.000000	0.007731	0.015540	0.013245	0.002980
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.048984	0.000000	0.000000	0.897701	0.048650	0.004665
			0.033056	0.000000	0.000000	0.025860	0.934450	0.006634
			0.017512	0.000000	0.000000	0.002440	0.622581	0.357468
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
40	5	110	0.959746	0.000000	0.001014	0.021848	0.015635	0.001757
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
			0.031746	0.000000	0.000000	0.855159	0.108466	0.004630
			0.033393	0.000000	0.000000	0.131996	0.827603	0.007009
			0.015865	0.000000	0.000007	0.002267	0.634722	0.347138
			1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

5.6 Modelo com Saltos Markovianos

O MSM, apresentado na Seção 4.2 considera o deslocamento de um veículo sujeito à mudança repentina de estado devido a probabilidade de frenagem ocasionada pelo trânsito de outros veículos. Esse modelo, reescrito abaixo, permite a obtenção de um controlador que considere eventuais frenagens e faça com que o veículo complete o percurso minimizando o consumo.

$$\min_{z_k=z_1, \dots, z_N} E \left\{ \gamma \alpha(x_N)(x_N - x_{meta})^2 + b(v_N - v_{meta})^2 + \sum_{k=1}^N (u(k)\Delta_t + p_{v(k)}) \right\} \quad (5.19)$$

$$\text{sujeito a } x(k+1) = x(k) + v(k), \quad (5.20)$$

$$v(k+1) = a_{r(k)} \cdot f(x(k), v(k), u(k)), \quad (5.21)$$

$$r(k) = \{1, 2, \dots, S\} \quad (5.22)$$

$$a_i \in [0, 1] \quad (5.23)$$

$$u(k) \in [0, 1], \quad (5.24)$$

$$u(k) = c_k(x(k), v(k), r(k)), \quad (5.25)$$

$$Im(c_k) \subset [0, 1], \quad (5.26)$$

$$f_k = \begin{cases} \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{P(v(k), u(k)) - c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } r(k) = 1 \\ \sqrt{v(k)^2 - 2\hat{g}\Delta_h(k) + 2\Delta_t \left(\frac{-c_2 v(k)^2}{m} \right)}, & \text{se } r(k) \neq 1, \end{cases} \quad (5.27)$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1S} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2S} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{iS} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

Conforme destacado no Capítulo 4, este modelo pode ser resolvido por PDE, desde que seja definida uma malha de busca para os possíveis estados do veículo (posição, velocidade, estado de frenagem e fluxo de combustível), as penalizações para a violação de restrições e alguns parâmetros para o percurso e para o VO.

Neste trabalho, foram ajustados $S = 6$, e a_i como descrito em (5.15). O valor S determina a dimensão da MPT e portanto é relevante para a questão do problema de dimensionalidade da PDE e do tempo computacional para soluções e simulações. Contudo, se por um lado aumentar S traz consequências no aspecto computacional, por outro lado torna o modelo mais preciso. Assim, como regra geral, foi sugerido iniciar com dimensão relativamente alta, e caso sejam obtidas probabilidades muito pequenas para alguns estados de Markov, então estes podem ser fundidos com estados vizinhos, diminuindo S .

Em comparação com o modelo determinístico apresentado na Seção 5.2, os parâmetros adicionados ao MSM são o número de estados de frenagem e o número de veículos a ser considerado na composição do trânsito, que juntos definem a MPT a ser utilizada no modelo, permitindo

a obtenção do controle estocástico $u^*(x, v, \theta)$. Quanto aos parâmetros fazemos as seguintes observações:

- **Estados de frenagem:** esse estado, utilizado no MSM pela restrição 5.22, consiste em determinar as diferentes formas de frenagem que o veículo pode estar sujeito. De modo geral, consiste em definir de quantas maneiras o veículo pode reduzir sua velocidade de um instante para o próximo sendo essa redução relacionada à diferença de velocidade entre o VO e o próximo veículo à sua frente.
- **Veículos no percurso:** o número médio de veículos no percurso, n_{car} , tem grande influência sobre a MPT. De fato, lembrando que a MPT é estimada por simulação usando o modelo do trânsito, temos que quanto maior n_{car} maior é a chance do VO encontrar um veículo à suas frente e iniciar um processo de frenagem.

É importante observar que, neste trabalho, não foi definido livremente os elementos da MPT ou, em outras palavras, não se tem acesso aos valores de seus elementos e sim ao ao parâmetro n_{car} , que é um parâmetro fundamental do trabalho.

O aumento do número de pontos na malha aumentou a complexidade do problema e fez com que o tempo computacional para a obtenção do controle ótimo também aumentasse em relação ao modelo determinístico, como traz a Tabela 5.7 abaixo, que apresenta o tempo computacional para a obtenção do controlador estocástico para um veículo em um percurso de 7000 metros e com 6 diferentes estados de frenagem, sendo a MPT já definida (note que a intensidade de trânsito não interfere no tempo, apenas na MPT a ser usada no modelo).

Tabela 5.7 – Tempo em função do número de pontos na malha para o modelo estocástico.

Número de pontos	Tempo de execução (s) - Scilab	Tempo de execução (s) - C
30	14606.55	3.83
40	35001.79	8.24
50	n/d	15.49
60	n/d	26.58
80	n/d	51.77
100	n/d	117.74

A seguir algumas considerações finais sobre este capítulo.

5.7 Considerações finais

A implementação dos modelos para o trânsito no percurso e para a interação do VO com os demais veículos permitiu o levantamento de probabilidades de transição via simulação de Monte Carlo. Essas matrizes são utilizadas no MSM e permitem a obtenção de um controlador estocástico.

Em resumo, com a implementação do modelo determinístico obtém-se um controlador que considera apenas os estados posição e velocidade para determinar a ação de controle, desconsiderando eventuais frenagens decorrente do trânsito de outros veículos. Já o controlador estocástico leva em consideração este fato, e define sua ação de controle tendo conhecimento da atual situação de frenagem do veículo.

O capítulo seguinte apresenta uma análise do comportamento desses controladores em função da intensidade de trânsito no percurso, e uma análise comparativa dos custos da realização do percurso utilizando diferentes controladores e condições de trânsito no percurso.

Análise de Resultados

6.1 Resumo do capítulo

Apresenta-se neste capítulo uma análise dos resultados deste projeto. Esta análise possui elementos quantitativos, que visam os custos provenientes de cada ação de controle obtida utilizando o modelo determinístico, apresentado na Seção 3.2, e o modelo estocástico proposto, apresentado na Seção 4.2, e qualitativos, que abordam o comportamento destes controladores para diferentes taxas de veículos (n_{car}) a serem consideradas no percurso. Denotaremos por $\hat{c}^{n_{\text{car}}}$ o controlador estocástico sintetizado para um trânsito de n_{car} veículos no percurso.

A Seção 6.2 destaca os resultados referentes à simulação, no cenário determinístico, dos controladores estocásticos obtidos utilizando diferentes MPT, ou seja, em um percurso sem a interferência de outros veículos. É feita uma análise que visa compreender os efeitos da inserção do trânsito na obtenção do controlador e os custos das simulações também são apresentados.

Na Seção 6.3 apresentam-se os desempenhos dos controladores determinístico e estocástico no percurso sujeito a trânsito, representado pelo modelo da Seção 3.6. Procura-se, com isso, verificar a eficiência do controlador estocástico em cenários estocásticos.

Por fim, a Seção 6.4 traz uma breve discussão dos resultados apresentados nas seções anteriores.

6.2 Simulação no cenário determinístico

Nesta seção são apresentados e discutidos os comportamentos dos controladores estocásticos obtidos considerando diferentes valores para n_{car} em um cenário determinístico, ou seja, sem trânsito ao longo do PO.

A Figura 6.1 apresenta altitude do PO em função da distância a ser percorrida, assim como a setorização do mesmo. Vale ressaltar que a setorização foi feita de acordo com a característica de aclividade ou declividade do trecho e que para cada setor existe uma MPT dependente da velocidade do veículo, conforme discutido no Capítulo 4.

As MPT referentes a n_{car} igual a 1, 5, 10, 20, 40 e 80 podem ser verificadas no Apêndice A deste trabalho.

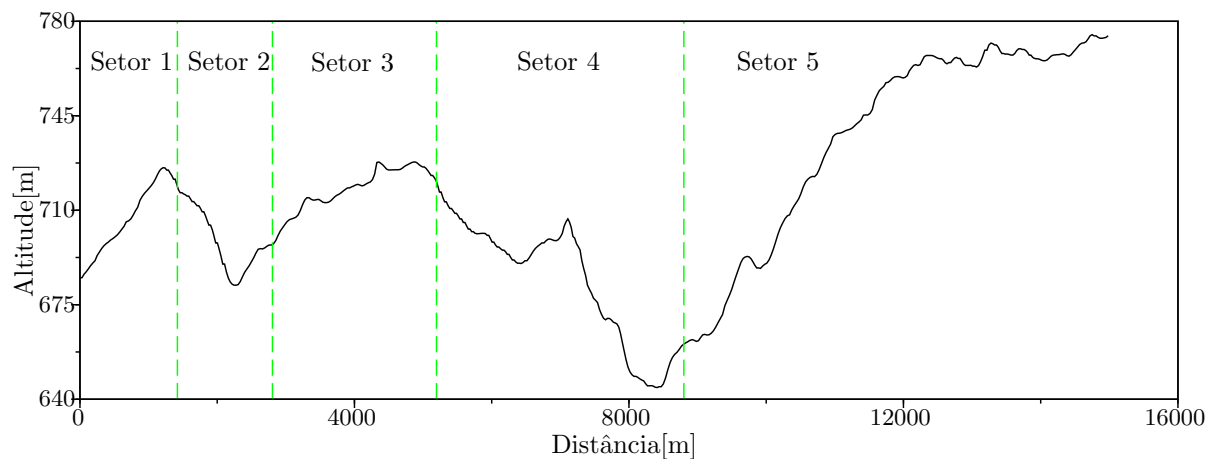


Figura 6.1 – Curva de altitude versus distância em relação ao início do percurso considerado.

As simulações desenvolvidas buscam compreender os efeitos do modelo de trânsito no comportamento do controlador estocástico. Para estabelecer tais relações, é feita uma comparação entre os controladores e os efeitos dos mesmos na velocidade do veículo controlado ao longo do percurso, como apresentado nas figuras a seguir.

Inicialmente é feita uma análise do comportamento do controlador determinístico, representado na Figura 6.2. A Figura apresenta gráficos referentes à velocidade e ação de controle do VO em função da distância percorrida e pode-se observar que este controlador utiliza ao máximo os limites de velocidade (mínima de 80km/h e máxima de 110km/h) para otimizar o consumo.

Nota-se também que o controlador faz com que o veículo chegue ao final de setores de aclividade com velocidade e fluxo de combustível baixos, de modo a aproveitar a declividade a frente para ganhar velocidade sem precisar usar combustível.

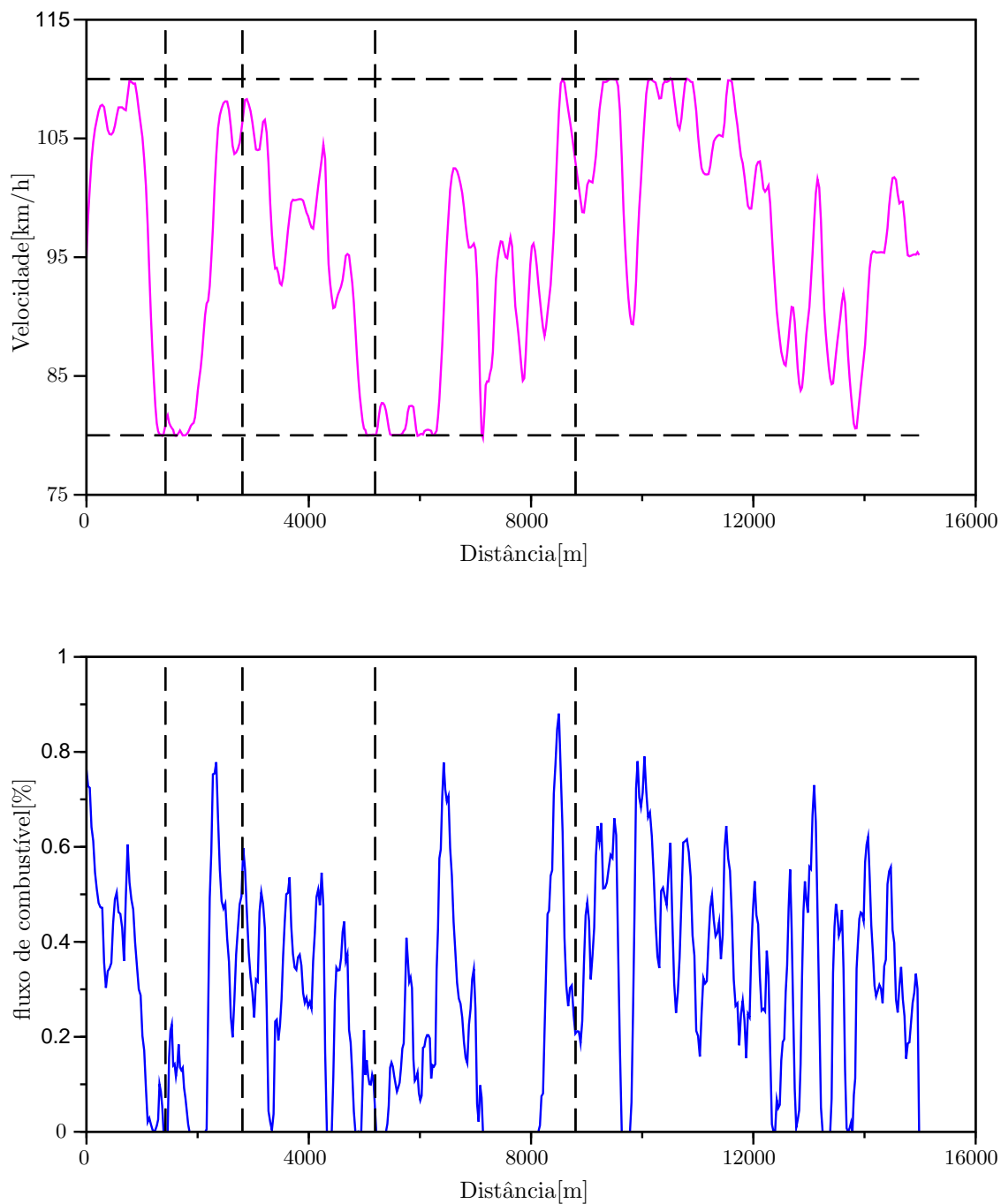


Figura 6.2 – Simulação do VO usando controle determinístico.

As Figuras 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 mostram, respectivamente, informações de velocidade e fluxo de combustível do VO ao longo do PO, utilizando controladores \hat{c}^1 , \hat{c}^5 , \hat{c}^{10} , \hat{c}^{20} , \hat{c}^{40} e \hat{c}^{80} . Vale lembrar que a velocidade e o fluxo de combustível são variáveis de estado contínuas em seus valores e discretas no tempo e que a continuidade de seus gráficos é resultado de interpolação, feita para uma melhor visualização dos mesmos.

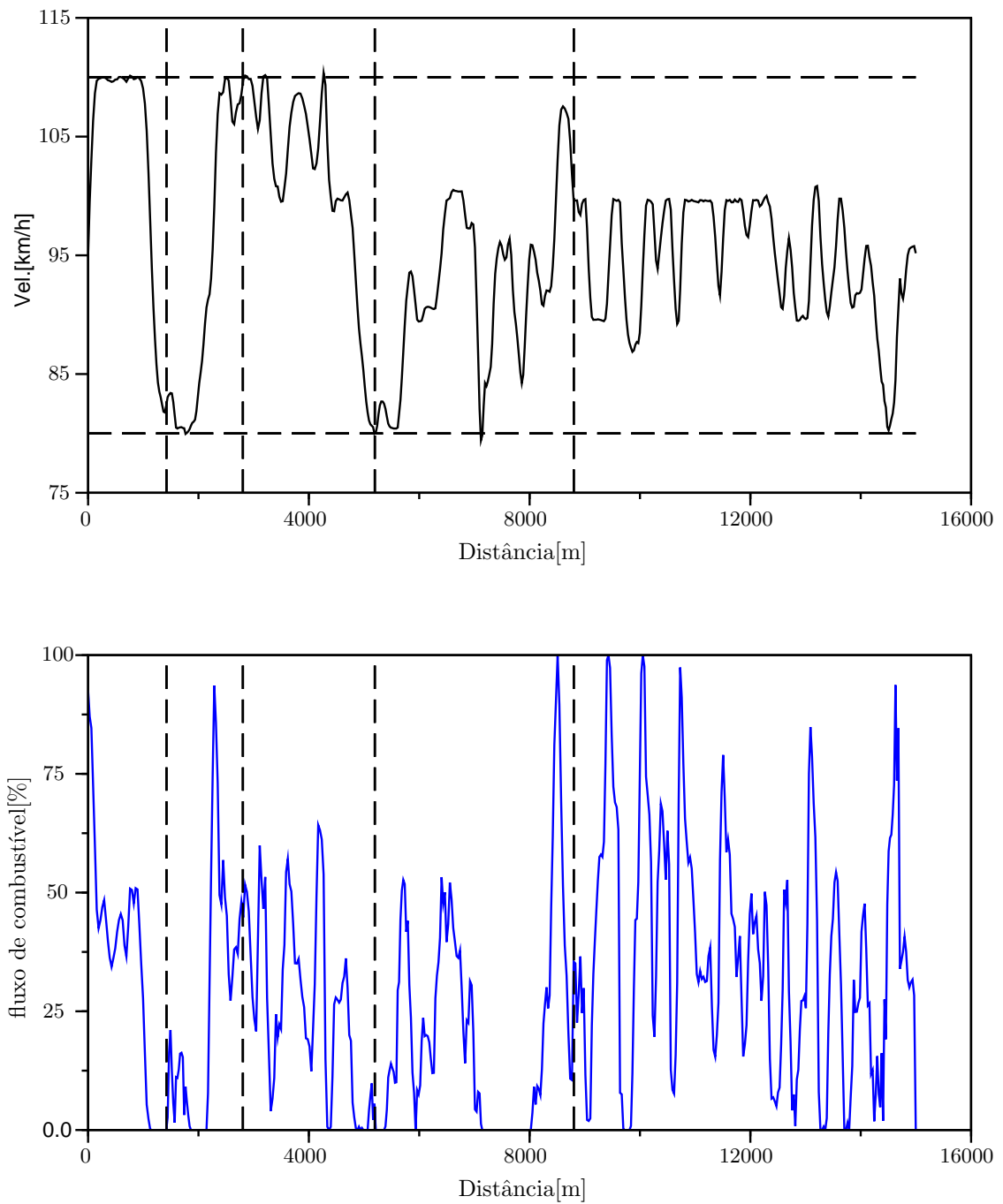


Figura 6.3 – Simulação usando \hat{c}^1 .

Observe que a inserção de 1 veículo no percurso fez com que o controlador sofresse uma leve alteração, porém em alguns setores o comportamento se aproxima muito do determinístico, como nos Setores 2 e 3.

No último setor, nota-se que as velocidades se mantêm numa faixa entre 90 e 100 km/h, sendo sempre limitadas por 100 km/h que corresponde às matrizes com maiores probabilidade de frenagem; a interpretação é que a solução ótima evitou velocidades altas num trecho de subida em que a probabilidade de frenagem é alta para velocidades acima de 100 km/h.

Em outras palavras, o controlador ótimo estocástico explorou as diferenças entre as MPTs. De fato, é típico de soluções ótimas explorar nuances do modelo, contudo aqui a nuance é fruto de uma hipótese simplificadora (de setorização da MPT em faixa de velocidade), que não corresponde no problema real, de maneira que o comportamento do controle ótimo acabou refletindo demasiadamente uma hipótese pouco real. Como trabalho futuro, seria importante melhorar este aspecto aumentando a quantidade de faixas de velocidade ou realizando um esquema mais elaborado de interpolação (por exemplo por *splines* cúbicos ao invés de *splines* lineares, usadas aqui).

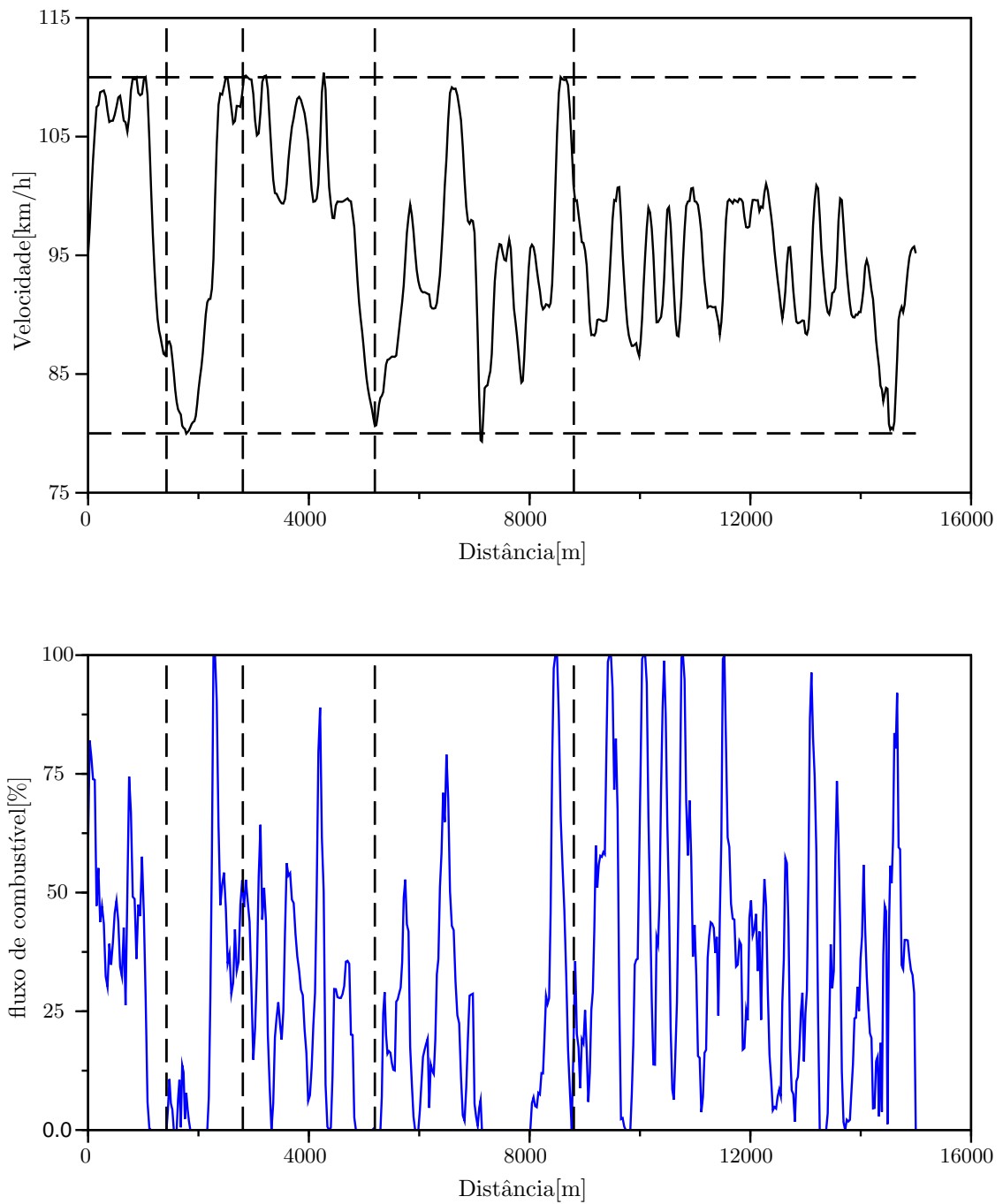


Figura 6.4 – Simulação usando controle \hat{c}^5 .

Pouco muda quando se considera o controlador \hat{c}^5 em relação ao caso com \hat{c}^1 , como se vê comparando as Figuras 6.3 e 6.4.

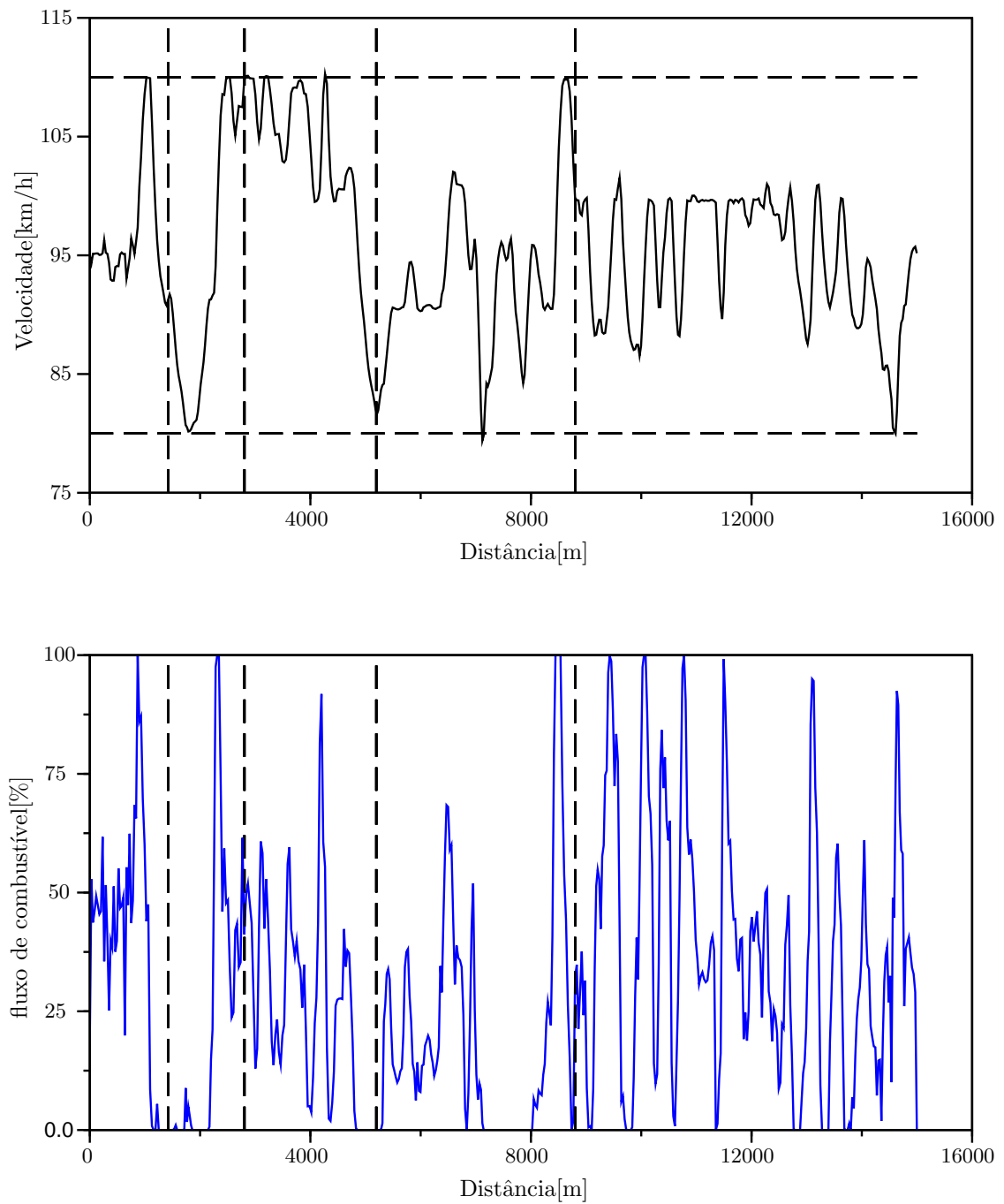


Figura 6.5 – Simulação usando controle \hat{c}^{10} .

Nota-se, uma vez mais, redução de velocidade para abaixo de 100 km/h em alguns trechos de subida, com a mesma interpretação dada anteriormente (evitar percorrer subidas em alta velocidade); esse comportamento pode ser visto na Figura 6.5.

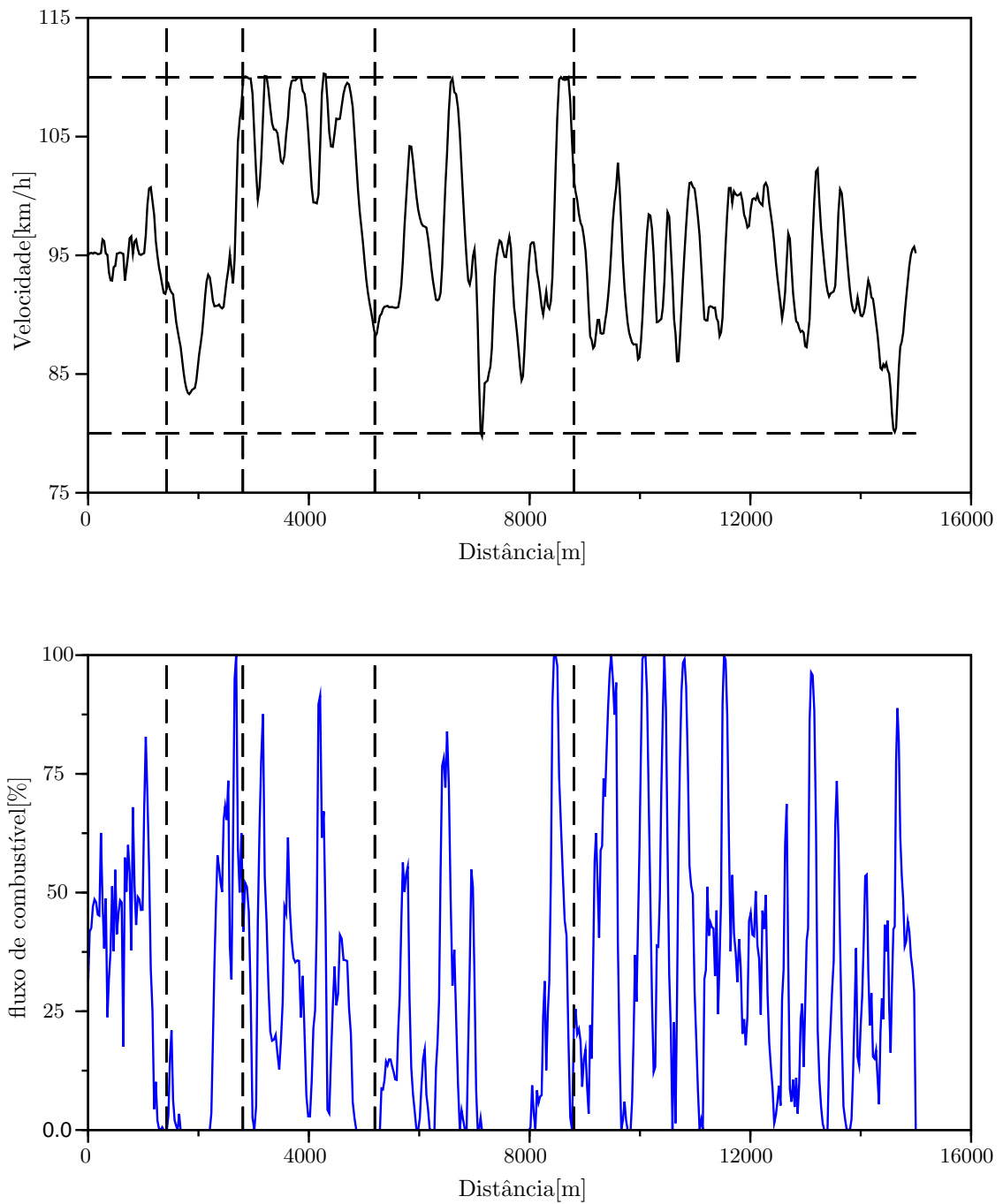


Figura 6.6 – Simulação usando controle \hat{c}^{20} .

Nota-se que os controladores \hat{c}^{10} e \hat{c}^{20} têm características mais distantes do controle determinístico, principalmente no setor inicial.

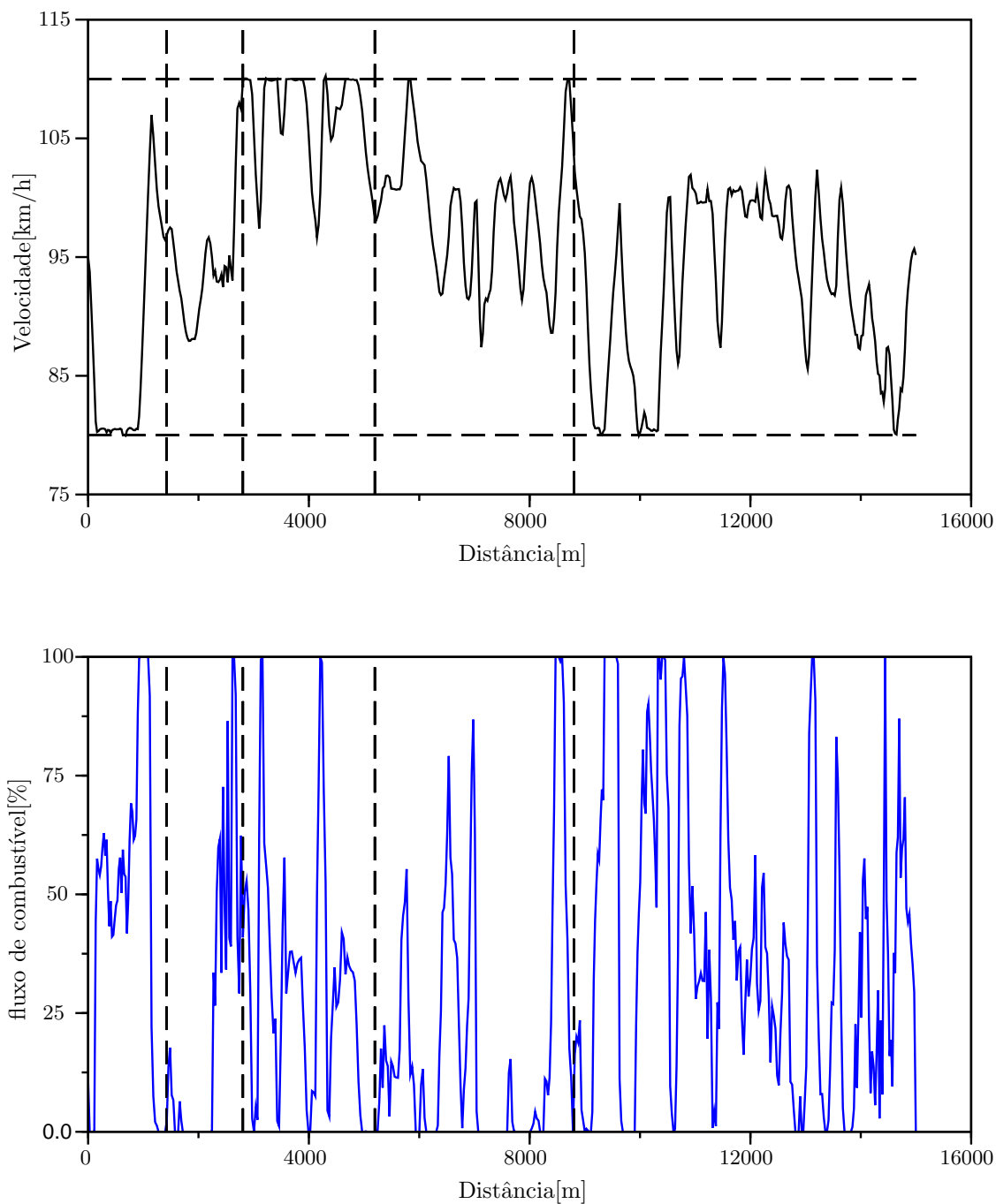


Figura 6.7 – Simulação usando controle \hat{c}^{40} .

Os controladores \hat{c}^{40} e \hat{c}^{80} , Figuras 6.7 e 6.8, respectivamente, buscam manter o VO em baixa velocidade em setores de subida, como pode ser observado nos setores 1 e 5, em que o veículo fica próximo dos 80 km/h.

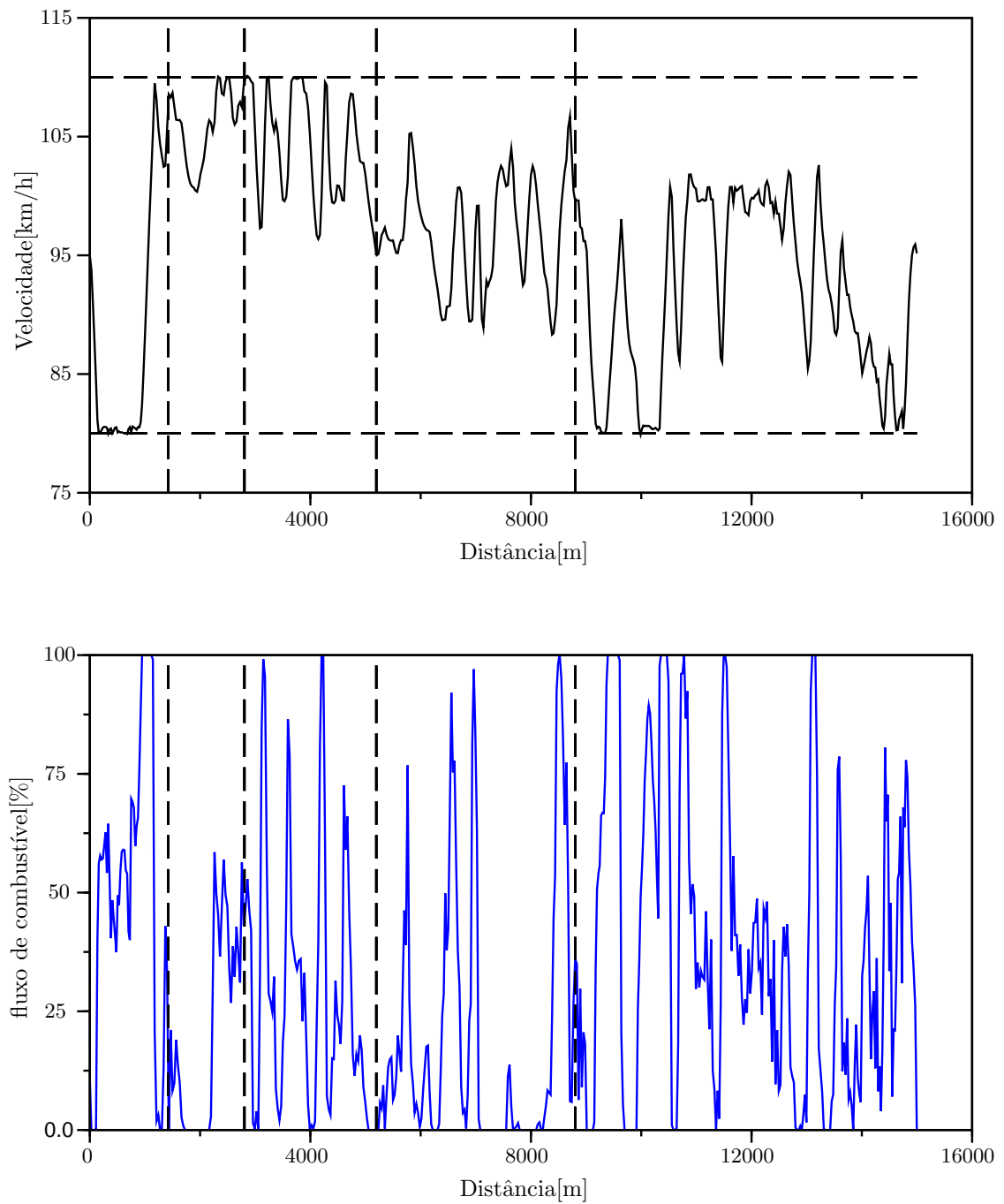


Figura 6.8 – Simulação usando controle \hat{c}^{80} .

Visando aprofundar a comparação, as Figuras 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 as velocidades ao longo tempo obtidas pelo controle determinístico e os controladores \hat{c}^1 , \hat{c}^{10} , \hat{c}^{20} e \hat{c}^{80} .

Como se vê pelas figuras, em relação ao controlador determinístico (gráfico da velocidade em magenta), o controlador \hat{c}^1 (gráfico da velocidade em azul) sofre alteração na sua velocidade, como mostra a Figura 6.9.

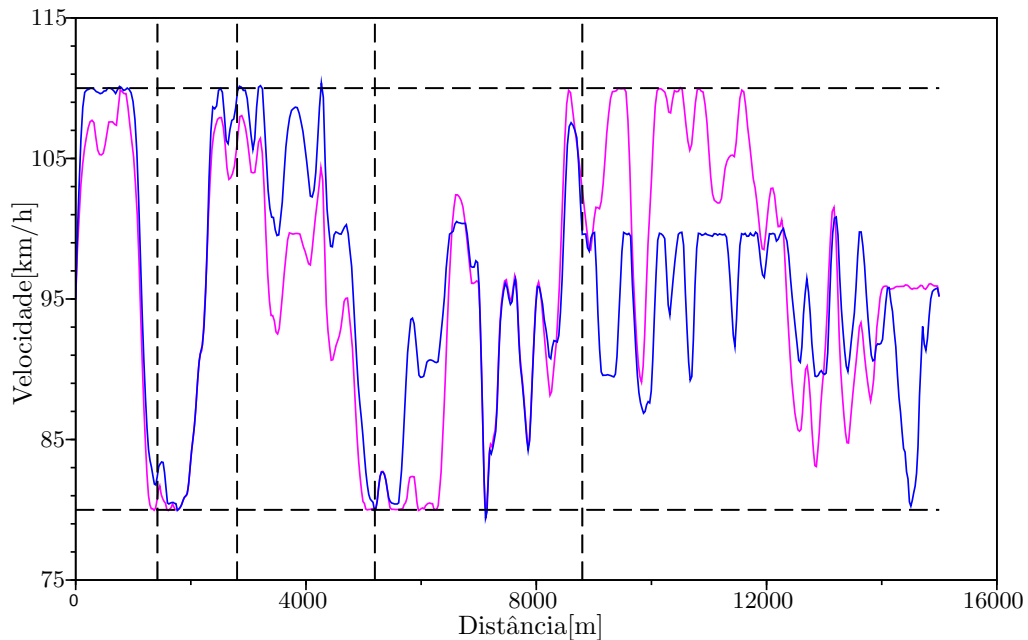


Figura 6.9 – Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^1 .

É possível observar que a inserção de 1 veículo no trânsito do percurso fez com que o controlador não explorasse ao máximo os limites de velocidade nos instantes finais, isso devido ao fato de que existe mais probabilidade de frenagem naquele setor e que quanto maior a velocidade, maior é esta probabilidade.

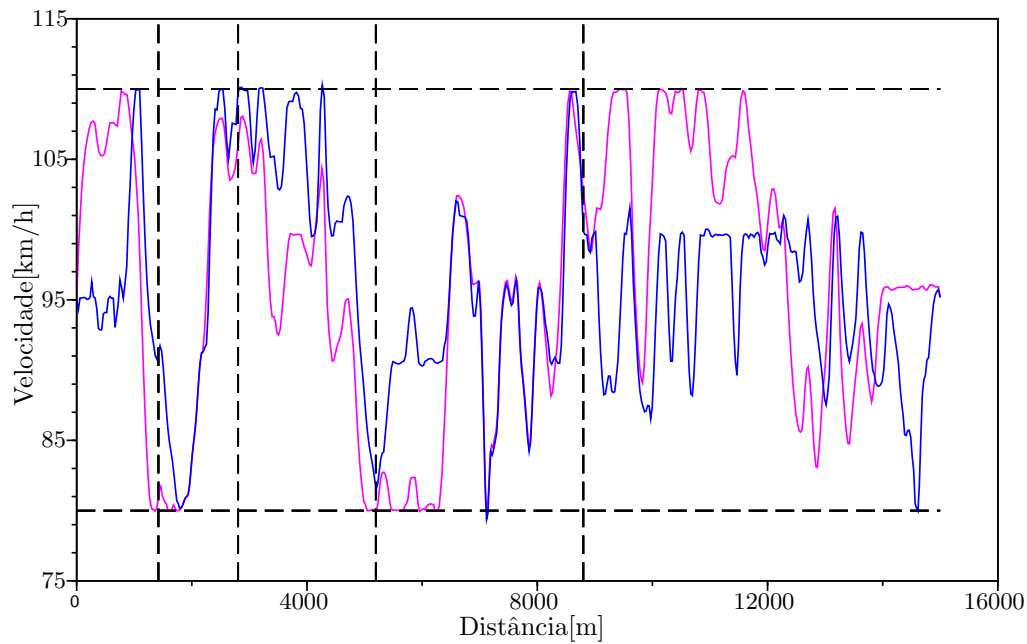


Figura 6.10 – Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^{10} .

As Figuras 6.10 e 6.11 comparam, respectivamente, a velocidade obtida pela ação do controle determinístico (gráfico da velocidade em magenta) e estocásticos \hat{c}^{10} e \hat{c}^{20} (gráficos da velocidade em azul). Através delas, pode-se reforçar que o aumento de n_{car} faz com que o controlador evite cada vez mais os limites máximo e mínimo de velocidade e busque manter o veículo em uma faixa de velocidade entre 90km/h e 100km/h, principalmente nos setores de maior probabilidade de frenagem, nestes casos, setores 1 e 5.

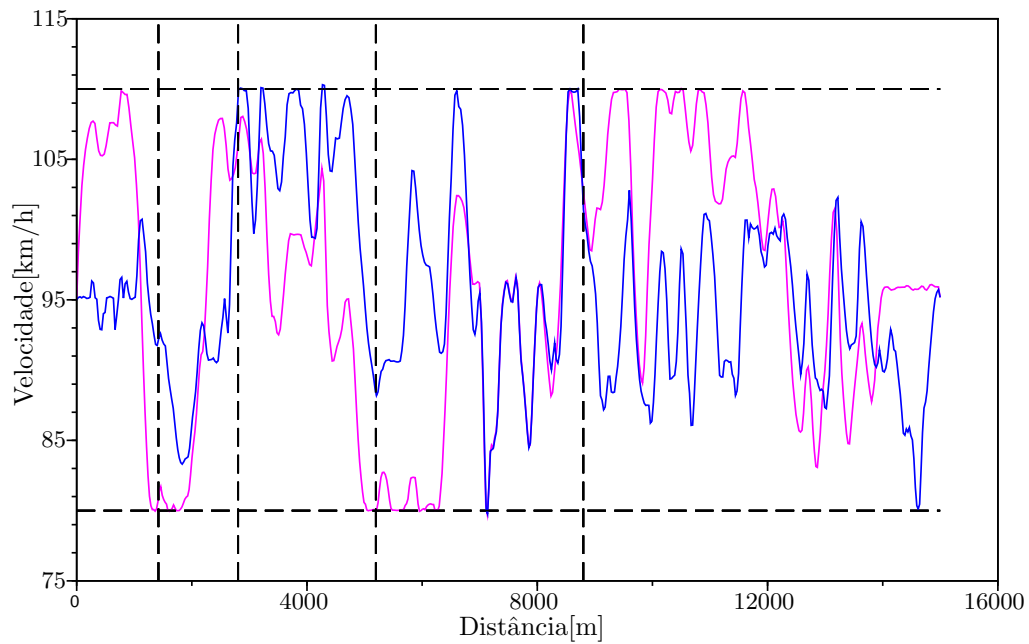


Figura 6.11 – Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^{20} .

Ao comparar o controlador determinístico com o controlador estocástico \hat{c}^{80} , Figura 6.12, pode-se observar que devido às altas probabilidades de frenagem nos setores 1 e 5, o controle estocástico mantém o veículo com velocidade baixa nesses setores, porém pelo fato de que o veículo tem um tempo para concluir o percurso, essa baixa velocidade é compensada nos setores 2 e 3, onde o veículo aumenta sua velocidade devido às suas baixas probabilidades quando comparada com os outros setores.

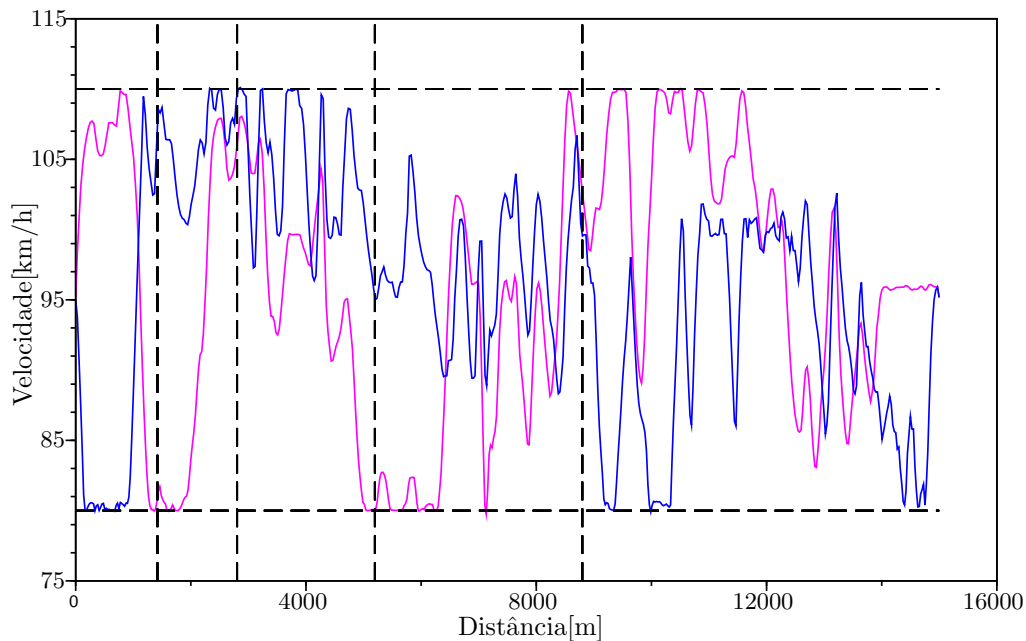


Figura 6.12 – Comparação entre os controles determinístico e \hat{c}^{80} .

De modo geral, pode-se verificar que a inserção do trânsito no percurso fez com que a ação de controle ótimo tivesse um comportamento que consistia em evitar situações em que a probabilidade de frenagem era alta, de modo a respeitar os limites de velocidade e a velocidade média no percurso.

A Tabela 6.1 apresenta os custos relacionados à ação de controle em cada simulação e o percentual de aumento i_d nos custos em relação ao controle determinístico.

As simulações foram feitas usando, além do controle determinístico, obtido para cenários sem a presença de trânsito, os controladores \hat{c}^1 , \hat{c}^5 , \hat{c}^{10} , \hat{c}^{20} , \hat{c}^{40} , \hat{c}^{80} e para o controlador que simula um piloto automático, como apresentado na Seção 5.2.1.2. Podemos interpretar esses custos como sendo o gasto total de combustível usando cada um dos controladores para percorrer o PO sem trânsito.

Tabela 6.1 – Custos da simulação no cenário determinístico.

Controle	Custo combust.	i_d
Determin.	162.70	0%
Piloto Aut.	176.02	+7.57%
\hat{c}^1	167.29	+2.82%
\hat{c}^5	169.08	+3.92%
\hat{c}^{10}	170.02	+4.50%
\hat{c}^{20}	173.66	+6.73%
\hat{c}^{40}	186.44	+14.59%
\hat{c}^{80}	188.23	+15.69%

Analisando a tabela, pode-se verificar que os controladores que consideram maior n_{car} têm um custo total maior, de modo que estes controladores se mostram com baixa eficiência em cenário determinísticos, assim como o controlador que representa um piloto automático.

6.3 Simulação no cenário sujeito a trânsito

Apresentam-se nesta seção os resultados referentes às simulações utilizando os controladores determinístico e estocásticos para o VO no PO, sujeito ao trânsito de outros veículos. Vale ressaltar que para cada controle utilizado, os resultados apresentados se referem a uma média das 10^4 realizações do percurso.

De modo geral, busca-se verificar a eficiência do controlador obtido através da resolução do MSM (veja Seção 4.2) no MEST (veja Seção 3.6), frente ao controlador determinístico.

As tabelas a seguir apresentam os custos médios de cada controlador relacionados à penalização de velocidade, que refere-se às violações da velocidade mínima e máxima permitida ao longo do percurso, à penalização terminal, que penaliza as realizações em que o controlador não entrega o veículo dentro do tempo determinado e a uma velocidade requerida, e ao consumo de combustível. Vale destacar que a função objetivo é a soma destes custos.

Tabela 6.2 – Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 5$.

Controle	Penal. v	Custo terminal	Custo combust.	Custo F.O.
Determin.	12.65	126.16	171.96	310.76
Piloto Autom.	7.38	19.11	184.48	210.97
\hat{c}^1	4.08	10.44	173.47	187.99
\hat{c}^5	1.00	2.54	180.06	183.60
\hat{c}^{10}	1.98	4.91	180.38	187.27
\hat{c}^{20}	0.49	1.54	193.74	195.77
\hat{c}^{40}	0.38	23.71	206.67	230.76
\hat{c}^{80}	0.61	10.28	207.69	218.58

Analisando os resultados da Tabela 6.2, pode-se observar que os controladores que consideram os maiores valores de n_{car} (\hat{c}^{20} , \hat{c}^{40} e \hat{c}^{80}) são os menos penalizados por violar os limites de

velocidade. Isto pode ser explicado devido ao fato de que esses controladores evitam os limites de velocidade, assim, mesmo com eventuais frenagens, eles não violam a velocidade mínima, o que não ocorre com o controle determinístico, que por explorar ao máximo os limites de velocidade, está mais sujeito a violá-las quando passa por um processo de frenagem.

Outro fator a ser destacado é quanto ao consumo de combustível. Nota-se que o menor consumo no cenário com $n_{\text{car}} = 5$ é obtido pelo veículo com o controle determinístico. Esse fato pode ser compreendido pela baixa ocorrência de frenagens no cenário com $n_{\text{car}} = 5$ ao longo do percurso. Por se tratar de um número baixo de veículos, as situações de frenagens são raras e desta forma temos um cenário quase determinístico, logo, espera-se que nesta situação o controle determinístico tenha menor consumo.

Quanto ao custo da função objetivo, pode-se observar que o controlador \hat{c}^5 teve melhor resultado no cenário com $n_{\text{car}} = 5$, e quando comparado com o controle determinístico, todos os controles estocásticos apresentam melhor desempenho, pois esses controladores, por serem sintetizados considerando a possibilidade de frear, não violam os limites de velocidade e tem maior chance de entregar o veículo dentro do tempo pré-estabelecido.

Tabela 6.3 – Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 10$.

Controle	Penal. v	Custo terminal	Custo combust.	Custo F.O.
Determin.	1.21	81.75	172.70	255.66
Piloto Autom.	0.49	4.77	183.61	188.87
\hat{c}^1	0.38	1.90	174.51	176.79
\hat{c}^5	0.03	1.30	180.66	181.99
\hat{c}^{10}	0.33	1.94	181.10	183.37
\hat{c}^{20}	0.03	0.64	194.34	195.01
\hat{c}^{40}	0.04	21.96	206.98	228.98
\hat{c}^{80}	0.10	8.92	207.99	217.01

A Tabela 6.3 apresenta os resultados referentes à simulação dos controladores no cenário sujeito ao trânsito de 10 veículos ao longo do percurso ($n_{\text{car}} = 10$). A análise da tabela permite destacar que novamente o controlador determinístico teve o menor consumo de combustível, porém apresentou um custo de penalizações maior que os outros controladores, o que tornou a função objetivo de maior valor.

Nesse cenário o controlador que teve o melhor desempenho foi o controlador \hat{c}^1 , pois sua função objetivo teve o menor valor dentre todas. Uma provável explicação para este fato é que o número de ocorrências para 10 veículos em média no percurso ainda é baixo, pois o PO tem extensão de 15000 metros e assim esse controlador obteve melhor desempenho.

Outro fator a ser destacado é quanto a diminuição do custo de penalização dos limites de velocidade em relação ao cenário com $n_{\text{car}} = 5$. O fato de haver mais veículos no percurso faz com que o VO entre, por mais vezes, em estados de frenagem e tenha que permanecer certo tempo atrás do veículo à sua frente, assim ele fica com menor flexibilidade para explorar os limites de velocidade, o que diminui os eventos em que ele as viola.

Tabela 6.4 – Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 20$.

Controle	Penal. v	Custo terminal	Custo combust.	Custo F.O.
Determin.	0.03	45.55	181.51	227.09
Piloto Autom.	0.09	5.19	190.04	195.32
\hat{c}^1	0.02	1.25	177.24	178.51
\hat{c}^5	0.02	1.58	182.72	184.32
\hat{c}^{10}	0.06	1.78	183.33	185.17
\hat{c}^{20}	0.03	0.88	195.78	196.69
\hat{c}^{40}	0.09	19.92	207.72	227.73
\hat{c}^{80}	0.05	8.62	208.63	217.30

Em relação aos resultados referentes às simulações no cenário com $n_{\text{car}} = 20$ mostrados na Tabela 6.4, pode-se ressaltar que o controle determinístico não é o que tem menor consumo, isso se dá pelo fato de que o número de veículos no percurso passou a fazer com o que o veículo entrasse em estado de frenagem um número mais significativo de vezes, e assim o cenário não seria tão próximo do determinístico.

O controlador \hat{c}^1 novamente teve o melhor desempenho, tanto no consumo de combustível, quanto no custo da função objetivo.

Tabela 6.5 – Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 40$.

Controle	Penal. v	Custo terminal	Custo combust.	Custo F.O.
Determin.	0.07	18.59	195.91	214.57
Piloto Autom.	0.17	8.92	200.69	209.78
\hat{c}^1	0.05	1.48	181.38	182.91
\hat{c}^5	0.02	1.68	185.97	187.67
\hat{c}^{10}	0.05	1.94	187.20	189.19
\hat{c}^{20}	0.07	1.77	198.17	200.01
\hat{c}^{40}	0.12	16.72	208.83	225.67
\hat{c}^{80}	0.04	7.36	209.68	217.08

A Tabela 6.5 apresenta os custos relacionados ao cenário com $n_{\text{car}} = 40$. Esse aumento no número de veículos fez com que os controladores estocásticos \hat{c}^1 , \hat{c}^5 e \hat{c}^{10} tivessem menor consumo de combustível que o veículo que usa o controle determinístico. Novamente o melhor desempenho ficou com o controlador \hat{c}^1 .

Tabela 6.6 – Custos médios das simulações com $n_{\text{car}} = 80$.

Controle	Penal. v	Custo terminal	Custo combust.	Custo F.O.
Determin.	0.12	8.55	222.31	230.97
Piloto Autom.	0.28	11.95	218.98	231.21
\hat{c}^1	0.08	2.35	188.94	191.37
\hat{c}^5	0.06	2.45	192.28	194.79
\hat{c}^{10}	0.06	2.36	194.84	197.25
\hat{c}^{20}	0.17	4.12	203.06	207.35
\hat{c}^{40}	0.16	12.43	210.98	223.56
\hat{c}^{80}	0.02	5.29	211.67	216.99

Observando a Tabela 6.6, que apresenta os resultados referentes ao cenário com $n_{\text{car}} = 80$, pode-se observar que o pior desempenho foi do controlador determinístico, tanto no consumo de combustível quanto no custo da função objetivo.

Novamente o melhor desempenho ficou para o controlador \hat{c}^1 , porém é possível perceber que o aumento da intensidade de trânsito tem feito sua eficiência diminuir em relação ao demais.

É possível notar que a sensibilidade dos controles que consideram os maiores intensidades de trânsito em relação ao aumento de n_{car} é menor, basta observar o consumo de combustível do veículo com o controle determinístico no cenário com $n_{\text{car}} = 80$ aumentou 28,72% em relação ao custo no cenário com $n_{\text{car}} = 10$, enquanto isso os veículos que usam os controladores \hat{c}^1 , \hat{c}^{10} e \hat{c}^{80} tiveram um aumento de 8.26%, 7.88% e 1.76%, respectivamente. Ou seja, os controladores sintetizados para as maiores intensidades de trânsito são mais estáveis ao aumento do trânsito no percurso.

6.4 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados os resultados deste trabalho.

Na Seção 6.2 foi feita uma análise de carácter qualitativo com o intuito de compreender os efeitos da inserção do trânsito nos controladores. Os resultados mostraram que controladores sintetizados para maiores intensidades de trânsito (n_{car}), ou seja, sujeito a uma maior probabilidade de entrar em estado de frenagem, tendem a ter um comportamento que evita situações onde a probabilidade de frenagem é grande, dessa forma visam manter o VO com menor velocidade em setores de aclividade (devido a maior probabilidade de frear nestes setores com altas velocidades).

A Seção 6.3 apresentou análises de carácter quantitativo. De modo geral, os custos das simulações do VO controlado são discutidos e comparações entre os controladores são realizadas. É possível verificar a eficiência do controle estocástico frente ao determinístico em cenários sujeito ao trânsito de outros veículos. Analisando o índice de melhora relativa (IMR), que é dado por

$$\text{IMR} = \frac{U_{DE} - U_{EE}}{U_{DE} - U_{DD}}$$

em que U_{DE} e U_{EE} representam os gastos de combustível usando os controladores determinístico e estocástico no cenário estocástico e U_{DD} o gasto de combustível do controlador determinístico no cenário determinístico (solução ótima), podemos observar que o consumo do controlador estocástico, quando comparado com o determinístico, foi mais próximo do consumo ótimo em torno de 31%, 52%, e 61% nos cenários com $n_{\text{car}} = 20$, $n_{\text{car}} = 40$ e $n_{\text{car}} = 80$, respectivamente.

Desta forma algumas conclusões deste trabalho foram levantadas e são apresentadas no capítulo seguinte, assim como possibilidades de trabalhos futuros que visam complementar este projeto.

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Este trabalho teve como objetivo otimizar o consumo de um veículo ao longo de um percurso sujeito ao trânsito. Baseado no modelo proposto por Affonso e Costa (2011), o desafio da pesquisa foi desenvolver um modelo de otimização que incluísse a interação com outros veículos e fosse, ao mesmo tempo, viável tanto do ponto de vista computacional como de implementação prática - o controlador obtido leva em conta apenas a velocidade e a posição do VO, o que pode ser obtido por qualquer aparelho de telefone ou também por módulos GPS de baixo custo, não necessitando de alterações/adaptações do VO.

Para isto, objetivos específicos foram alcançados, tais como o desenvolvimento do modelo que simula o percurso, que foi baseado no modelo de Affonso e Costa (2011) e usado para definir trajetória de veículos e levantamento de estatísticas; a formulação do problema de otimização, denotado por MEST, que devido a sua complexidade foi aproximado por um segundo modelo, chamado MSM; a resolução do MSM via PDE e a obtenção de controladores estocásticos sintetizados para diferentes intensidades de trânsito no percurso; e por fim, a análise dos resultados das simulações sob aspectos qualitativos e quantitativos.

Com base nestas análises, foi possível verificar a melhora na solução em cenários sujeito a trânsito. Analisando o IMR, podemos observar em alguns cenários que o consumo obtido com o controlador estocástico ficou até 61% mais próximo do consumo "ideal"(obtido com controle determinístico ótimo no cenário sem trânsito) quando comparado com a solução do controle determinístico no mesmo cenário.

É possível observar também que os controladores sintetizados para cenários com maiores intensidades de trânsito tendem a dar demasiada prioridade para concluir o percurso sem violações das penalizações e também a evitar estados (velocidades e posições em certos trechos do percurso) ligados a grande chance de frenagem. Em resumo, tendem a priorizar pouco a economia de combustível e um dos fatores que influenciam este comportamento é a forma como as MPT foram abordadas.

Outro fato a ser destacado sobre os controladores estocásticos projetados para maiores intensidades é a sua robustez quanto às variações na intensidade de trânsito, no sentido que seus desempenhos variam relativamente pouco quando aplicados em diferentes cenários de trânsito. Para uma variação na intensidade de veículos de 10 para 80, o custo do controlador determinístico aumentou 28%, enquanto o controlador estocástico variou apenas 1.76%.

Os controladores projetados para menores intensidades de trânsito tiveram os melhores resultados em termos de gasto de combustível. Por outro lado, mostraram-se menos robustos a variações.

7.2 Principais contribuições

Pode-se destacar como principal contribuição deste trabalho os modelos desenvolvidos para representar o deslocamento de um veículo ao longo de um percurso sujeito a trânsito, em que os parâmetros levados em consideração podem ser facilmente ajustados, tanto no modelo estocástico sujeito a trânsito, quanto no modelo com saltos markovianos. Os modelos podem ser adaptados para capturar outras interferências / perturbações, e em especial o MSM pode ser facilmente adaptado para representar fenômenos aleatórios como presença de animais na pista, chuva e vento.

Vale destacar como contribuição secundária o simulador de trânsito simplificado desenvolvido, pois além de possuir parâmetros de fácil ajuste, permite a construção de cenários de trânsito com considerável diversidade de veículos e tipos de condutores. O simulador pode ser facilmente adaptado ao caso em que todos veículos interagem entre si.

7.3 Trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, alguns pontos deste trabalho podem ser aprimorados, expandidos ou aprofundados. Vale ressaltar que as sugestões abaixo não foram verificadas neste trabalho devido ao tempo de execução do mesmo e por não serem foco deste projeto de pesquisa.

Os resultados deste projeto mostraram que os controladores obtidos para maiores intensidades de trânsito não possuem os melhores desempenhos nos cenários em que foram sintetizados, por exemplo, o controlador obtido para uma intensidade de trânsito de 20 veículos tem o seu melhor desempenho no cenário com $n_{car} = 10$. Isto pode ocorrer devido às aproximações que foram realizadas no processo de interpolação das MPTs ao obter cada controlador. De fato, no projeto

foi adotado uma discretização de 4 possíveis velocidades para as matrizes de probabilidade, e a partir delas as probabilidades para outras velocidades são obtidas via interpolação linear (ou mais precisamente, por *splines* lineares). Dois pontos que podem ser explorados são, a expansão da discretização, que pode considerar probabilidades de um número maior de velocidades, e o processo interpolação, que pode ser feito usando outras técnicas (como *splines* cúbicas livres).

Outro ponto que pode ser verificado é em relação à setorização do percurso, neste projeto foram adotados 5 setores, escolhidos por características de aclividade e declividade, porém, devido ao tempo de execução deste trabalho, outras configurações não foram testadas. Uma subsetorização dos setores adotados pode apresentar resultados mais refinados.

Além de ajustes relacionados às MPTs e à setorização do percurso, outro fator que vale a pena ser expandido é em relação ao impacto das penalizações de velocidade e estado terminal.

Na linha de simuladores, um aprimoramento do simulador de trânsito simplificado desenvolvido neste projeto poderia enriquecer os dados estatísticos utilizados na sintetização dos controladores. Esse aprimoramento pode considerar regras mais refinadas de frenagem, a interação entre os veículos que compõem o trânsito no percurso e rodovias com mais de uma faixa de rolagem.

Por fim, outras duas abordagens são evidenciadas: primeiramente, empregar cenários com mais de um veículo controlado, ou seja, o processo de otimização seria feito considerando mais do que um VO. Segundo, considerar a aplicação prática destes controladores em veículos reais, ou seja, explorar o desenvolvimento de pilotos automáticos inteligentes capazes de determinar a velocidade ótima do veículo a cada instante de tempo dentro de uma margem de variação permitida.

Referências Bibliográficas

- AFFONSO, P. H.; COSTA, E. F. Otimização de consumo de combustível em percurso de automóvel. In: *Congresso de Matemática Aplicada e Computacional Sudeste (pôster)*. Uberlândia: [s.n.], 2011. p. 1.
- AMINI, A. A.; WEYMOUTH, T. E.; JAIN, R. C. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, v. 12, n. 9, p. 855–867, 1990.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; YANASSE, H. *Pesquisa Operacional para cursos de engenharia*. [S.l.]: Editora Campus, 2007.
- BELLMAN, R. E.; STUART, E. D. *Applied Dynamic Programming*. [S.l.]: RAND Corporation, 1962.
- BERTSEKAS, D. P. *Dynamic programming and optimal control*. [S.l.]: Athena Scientific Belmont, MA, 1995. v. 1.
- BUENO, F. Cadeias de markov. 2008.
- CIPOLLONE, R. et al. Model based design and optimization of a fuel cell electric vehicle. *Energy Procedia*, Elsevier, v. 45, p. 71–80, 2014.
- COSTA, E. F.; do Val, J. B. R. Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems. *International Journal of Control, Special Issue on Switched and Polytopic Linear Systems*, v. 75, n. 16/17, p. 1282–1292, 2002.
- COSTA, E. F.; do Val, J. B. R.; FRAGOSO, M. D. A new approach to detectability of discrete-time infinite Markov jump linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 43, n. 6, p. 2132–2156, 2005.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-40, p. 2076–2088, 1995.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*. New York: Springer-Verlag, 2005.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-time Markov jump linear systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

- CRUZ, A.; CARDOSO, R. T. N.; TAKAHASHI, R. H. C. Uma abordagem via programação dinâmica não-linear para o problema do controle biológico de pragas numa lavoura. *Anais do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2006.
- DIAS, J. E. A. Modelagem longitudinal e controle de velocidade de um carro autônomo. *Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em <http://www.ppgce.ufmg.br>*, 2013.
- DIBAN, P. et al. Optimal biomass plantation replanting policy using dynamic programming. *Journal of Cleaner Production*, Elsevier, v. 126, p. 409–418, 2016.
- GRIGOLETTI, P. S. Cadeias de markov. *Recuperado em*, v. 19, n. 10, p. 2014, 2011.
- GUZZELLA, L.; SCIARRETTA, A. *Vehicle propulsion systems*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 1.
- HASTINGS, W. K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 57, n. 1, p. 97–109, 1970.
- HOFMAN, T.; EBBESEN, S.; GUZZELLA, L. Topology optimization for hybrid electric vehicles with automated transmissions. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 61, n. 6, p. 2442–2451, 2012.
- JIANG, R.; WU, Q.; ZHU, Z. Full velocity difference model for a car-following theory. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 1, p. 017101, 2001.
- KEMENY, J. G.; SNELL, J. L. et al. *Finite markov chains*. [S.l.]: van Nostrand Princeton, NJ, 1960. v. 356.
- KIRK, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2012.
- KUMAR, P. R.; VARAIYA, P. *Stochastic systems: Estimation, identification, and adaptive control*. [S.l.]: SIAM, 2015. v. 75.
- LIMA, E. B. Modelos microscópicos para simulação do tráfego baseados em autômatos celulares. *Dissertação de mestrado, Universidade Federal Fluminense*, 2007.
- LOUREIRO, L. F. S. C. Simulação rodoviária em tempo real para aplicações interactivas. 2010.
- MAERIVOET, S.; MOOR, B. D. Cellular automata models of road traffic. *Physics Reports*, Elsevier, v. 419, n. 1, p. 1–64, 2005.
- MASUMOTO, Y. *Global positioning system*. [S.l.]: Google Patents, 1993. US Patent 5,210,540.
- NAGEL, K.; SCHRECKENBERG, M. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de physique I*, EDP Sciences, v. 2, n. 12, p. 2221–2229, 1992.
- ODEIM, F. et al. Power management optimization of fuel cell/battery hybrid vehicles with experimental validation. *Journal of Power Sources*, Elsevier, v. 252, p. 333–343, 2014.
- PÉREZ, L. V. et al. Optimization of power management in an hybrid electric vehicle using dynamic programming. *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, v. 73, n. 1, p. 244–254, 2006.

- REVOREDO, T. C. *Modelagem e Gerenciamento de Potência de um Veículo elétrico Híbrido de Célula a Combustível*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Do Rio de Janeiro, 2007.
- RHYS-TYLER, G.; LEGASSICK, W.; BELL, M. The significance of vehicle emissions standards for levels of exhaust pollution from light vehicles in an urban area. *Atmospheric Environment*, Elsevier, v. 45, n. 19, p. 3286–3293, 2011.
- RODRIGUES, C. G. et al. Projeção da mortalidade e internações hospitalares na rede pública de saúde atribuíveis à poluição atmosférica no estado de são paulo entre 2012 e 2030. *Revista Brasileira de Estudos de População*, v. 32, n. 3, p. 489–510, 2015.
- SHAFIEE, S.; TOPAL, E. When will fossil fuel reserves be diminished? *Energy policy*, Elsevier, v. 37, n. 1, p. 181–189, 2009.
- SILVA, A. V. do N.; SOUZA, W. M.; PEREIRA, S. V. Emissão de gases poluentes por veículos automotivos em recife-pe (pollutant gas emission by automotive vehicles in recife-pe). *Revista Brasileira de Geografia Física*, v. 8, n. 2, p. 253–267, 2015.
- SONG, Z. et al. Optimization for a hybrid energy storage system in electric vehicles using dynamic programming approach. *Applied Energy*, Elsevier, v. 139, p. 151–162, 2015.
- STERN, J. M. et al. *Otimização e Processos Estocásticos Aplicados à Economia e Finanças*. [S.l.]: UFSC, 2000.
- SWORDER, D. D.; ROGERS, R. O. An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 28, n. 10, p. 971–978, 1983.
- TAVARES, L. D. Um simulador de tráfego urbano baseado em autômatos celulares. *Dissertação de mestrado*, UFMG, 2010.
- TERRA, M. L. c. Cadeias de markov. *Bahia: Universidade Estadual de Santa Cruz*, 2006.
- VAL, J. do; BASAR, T. Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 23, p. 1099–1131, 1999.

Matrizes de Probabilidade de Transição

Apresentam-se aqui as MPTs obtidas via simulação de Monte Carlo, na qual foram simuladas 10^4 realizações no PO para realizar as estimativas conforme apresentado na Seção 4.3.

As Tabelas A.1, A.2, A.3, A.4, A.5 e A.6 apresentam as matrizes de referentes às intensidades de trânsito de 1, 5, 10, 20, 40 e 80 veículos em média no percurso.

Tabela A.1 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 1$.

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
1	80	$\begin{bmatrix} 0.999958 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000009 & 0.000033 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.500000 & 0.500000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	90	$\begin{bmatrix} 0.999912 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000077 & 0.000011 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.586433 & 0.413567 \\ 0.960177 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.039823 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.1 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 1$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
1	100	$\begin{bmatrix} 0.999830 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000050 & 0.000094 & 0.000026 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.697148 & 0.302852 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	110	$\begin{bmatrix} 0.999723 & 0.000000 & 0.000026 & 0.000157 & 0.000094 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.002364 & 0.000000 & 0.000000 & 0.089835 & 0.907801 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.705367 & 0.294633 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	80	$\begin{bmatrix} 0.999673 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000239 & 0.000087 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.451852 & 0.548148 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	90	$\begin{bmatrix} 0.999222 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000566 & 0.000212 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.681736 & 0.318264 \\ 0.991632 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.008368 \end{bmatrix}$
2	100	$\begin{bmatrix} 0.998542 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000491 & 0.000823 & 0.000144 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.007463 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.992537 & 0.000000 \\ 0.001786 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.675000 & 0.323214 \\ 0.980998 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.019002 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.1 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 1$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
2	110	$\begin{bmatrix} 0.997663 & 0.000000 & 0.000483 & 0.001110 & 0.000674 & 0.000070 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.957983 & 0.042017 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002695 & 0.997305 & 0.000000 \\ 0.001300 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.640026 & 0.358674 \\ 0.940397 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.059603 \end{bmatrix}$
3	80	$\begin{bmatrix} 0.999928 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000072 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	90	$\begin{bmatrix} 0.999482 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000345 & 0.000173 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.295359 & 0.704641 \\ 0.723404 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.003040 & 0.273556 \end{bmatrix}$
3	100	$\begin{bmatrix} 0.998624 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000077 & 0.001142 & 0.000157 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.644224 & 0.355776 \\ 0.676322 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.323678 \end{bmatrix}$
3	110	$\begin{bmatrix} 0.997050 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002062 & 0.000868 & 0.000020 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.014963 & 0.985037 & 0.000000 \\ 0.000660 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.628628 & 0.370712 \\ 0.350299 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001331 & 0.648370 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.1 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 1$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
4	80	0.999881	0.000000	0.000000	0.000000	0.000011	0.000108
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.437500	0.562500
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	90	0.999393	0.000000	0.000000	0.000000	0.000383	0.000224
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.454206	0.545794
		0.397516	0.000000	0.000000	0.000000	0.003549	0.598935
4	100	0.998266	0.000000	0.000000	0.000246	0.001208	0.000280
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.000810	0.000000	0.000000	0.000000	0.595547	0.403644
		0.301932	0.000000	0.000000	0.000000	0.008052	0.690016
4	110	0.994567	0.000000	0.001303	0.002211	0.001734	0.000184
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.012750	0.000000	0.000000	0.934426	0.052823	0.000000
		0.004881	0.000000	0.000000	0.009763	0.985356	0.000000
		0.003605	0.000000	0.000000	0.000000	0.630121	0.366273
		0.943990	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.056010
5	80	0.999849	0.000000	0.000000	0.000000	0.000038	0.000113
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.086207	0.913793
		0.853061	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.146939

Continuação na próxima página

Tabela A.1 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 1$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
5	90	0.998364	0.000000	0.000000	0.000004	0.001488	0.000144
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.000300	0.000000	0.000000	0.000000	0.441812	0.557888
		0.146898	0.000000	0.000000	0.000000	0.000299	0.852803
5	100	0.995674	0.000000	0.000000	0.000575	0.003158	0.000592
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.019108	0.980892	0.000000
		0.000994	0.000000	0.000000	0.000000	0.674093	0.324913
		0.113397	0.000000	0.000000	0.000000	0.000135	0.886468
5	110	0.986290	0.000000	0.000186	0.008784	0.004524	0.000216
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.784810	0.215190	0.000000
		0.000583	0.000000	0.000000	0.121371	0.877696	0.000350
		0.000427	0.000000	0.000000	0.000213	0.656460	0.342900
		0.077224	0.000000	0.000000	0.000000	0.000379	0.922397

Tabela A.2 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 5$.

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
1	80	0.999033	0.000000	0.000000	0.000000	0.000178	0.000789
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.457399	0.542601
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Continuação na próxima página

Tabela A.2 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 5$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
1	90	0.997929	0.000000	0.000000	0.000000	0.001867	0.000204
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.001151	0.000000	0.000000	0.000000	0.614116	0.384733
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	100	0.996392	0.000000	0.000000	0.001082	0.002152	0.000374
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.001825	0.000000	0.000000	0.000000	0.998175	0.000000
		0.000926	0.000000	0.000000	0.000000	0.704335	0.294739
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	110	0.994586	0.000000	0.000602	0.003148	0.001665	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.011765	0.000000	0.000000	0.980392	0.007843	0.000000
		0.002121	0.000000	0.000000	0.089608	0.908271	0.000000
		0.001690	0.000000	0.000000	0.000130	0.703405	0.294775
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	80	0.999298	0.000000	0.000000	0.000000	0.000465	0.000236
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.457627	0.542373
		0.989744	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.010256
2	90	0.998015	0.000000	0.000000	0.000000	0.001371	0.000614
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.001749	0.000000	0.000000	0.000000	0.665063	0.333188
		0.961131	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.038869

Continuação na próxima página

Tabela A.2 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 5$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
2	100	0.996288	0.000000	0.000000	0.001325	0.001979	0.000407
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.006472	0.000000	0.000000	0.000000	0.993528	0.000000
		0.002160	0.000000	0.000000	0.000000	0.666091	0.331749
		0.957320	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.042680
2	110	0.994567	0.000000	0.001303	0.002211	0.001734	0.000184
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.012750	0.000000	0.000000	0.934426	0.052823	0.000000
		0.004881	0.000000	0.000000	0.009763	0.985356	0.000000
		0.003605	0.000000	0.000000	0.000000	0.630121	0.366273
		0.943990	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.056010
3	80	0.999797	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000203
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.863436	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.136564
3	90	0.998791	0.000000	0.000000	0.000000	0.000828	0.000382
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.319417	0.680583
		0.930077	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.069923
3	100	0.996563	0.000000	0.000000	0.000159	0.002746	0.000531
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.002736	0.000000	0.000000	0.000000	0.632632	0.364631
		0.811855	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.188145

Continuação na próxima página

Tabela A.2 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 5$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
3	110	0.994169	0.000000	0.000000	0.003712	0.002044	0.000074
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.006367	0.000000	0.000000	0.010744	0.982889	0.000000
		0.002494	0.000000	0.000000	0.000000	0.637192	0.360315
		0.669106	0.000000	0.000000	0.000000	0.000357	0.330537
4	80	0.999697	0.000000	0.000000	0.000000	0.000031	0.000272
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.375000	0.625000
		0.952484	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.047516
4	90	0.998618	0.000000	0.000000	0.000000	0.000846	0.000536
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000475	0.000000	0.000000	0.000000	0.476010	0.523515
		0.780467	0.000000	0.000000	0.000000	0.002161	0.217373
4	100	0.996137	0.000000	0.000000	0.000468	0.002772	0.000623
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.001876	0.000000	0.000000	0.000000	0.998124	0.000000
		0.002793	0.000000	0.000000	0.000000	0.595918	0.401289
		0.439992	0.000000	0.000000	0.000000	0.005524	0.554484
4	110	0.993125	0.000000	0.000213	0.003051	0.003527	0.000085
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.009174	0.000000	0.000000	0.784404	0.206422	0.000000
		0.003015	0.000000	0.000000	0.092080	0.904905	0.000000
		0.003015	0.000000	0.000000	0.000052	0.632389	0.364544
		0.328222	0.000000	0.000000	0.000048	0.004936	0.666794

Continuação na próxima página

Tabela A.2 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 5$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
5	80	$\begin{bmatrix} 0.999608 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000093 & 0.000299 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.108949 & 0.891051 \\ 0.846491 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.153509 \end{bmatrix}$
5	90	$\begin{bmatrix} 0.997735 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000014 & 0.001992 & 0.000259 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000870 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.460621 & 0.538509 \\ 0.370813 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000843 & 0.628344 \end{bmatrix}$
5	100	$\begin{bmatrix} 0.993230 & 0.000000 & 0.000004 & 0.001289 & 0.004515 & 0.000961 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.003272 & 0.000000 & 0.000000 & 0.014724 & 0.981595 & 0.000409 \\ 0.002539 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.675131 & 0.322330 \\ 0.200211 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000251 & 0.799539 \end{bmatrix}$
5	110	$\begin{bmatrix} 0.984843 & 0.000000 & 0.000290 & 0.010224 & 0.004451 & 0.000193 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.004435 & 0.000000 & 0.000000 & 0.891353 & 0.104213 & 0.000000 \\ 0.005660 & 0.000000 & 0.000000 & 0.117782 & 0.875415 & 0.001143 \\ 0.002368 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000270 & 0.659528 & 0.337834 \\ 0.151366 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000028 & 0.000412 & 0.848193 \end{bmatrix}$

Tabela A.3 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 10$.

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
-------	------------------------	-------------------------

Continuação na próxima página

Tabela A.3 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 10$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
1	80	0.997359	0.000000	0.000000	0.000000	0.000469	0.002172
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.462451	0.537549
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	90	0.994727	0.000000	0.000000	0.000000	0.004364	0.000909
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.001209	0.000000	0.000000	0.000000	0.597301	0.401491
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	100	0.990844	0.000000	0.000000	0.002384	0.005576	0.001196
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.005988	0.000000	0.000000	0.000000	0.994012	0.000000
		0.007914	0.000000	0.000000	0.000186	0.694600	0.297300
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	110	0.986584	0.000000	0.001377	0.007384	0.004641	0.000015
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.008247	0.000000	0.000000	0.981443	0.010309	0.000000
		0.010893	0.000000	0.000000	0.085512	0.903322	0.000272
		0.008573	0.000000	0.000000	0.000520	0.688986	0.301922
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	80	0.998536	0.000000	0.000000	0.000000	0.000950	0.000514
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.002086	0.000000	0.000000	0.000000	0.446298	0.551616
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Continuação na próxima página

Tabela A.3 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 10$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
2	90	0.996041	0.000000	0.000000	0.000000	0.002696	0.001263
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.003068	0.000000	0.000000	0.000000	0.667324	0.329608
		0.996301	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.003699
2	100	0.993092	0.000000	0.000000	0.002349	0.003576	0.000983
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.015343	0.000000	0.000000	0.000000	0.984657	0.000000
		0.005127	0.000000	0.000000	0.000244	0.660400	0.334229
		0.994842	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.005158
2	110	0.989330	0.000000	0.002441	0.004527	0.003252	0.000450
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.018411	0.000000	0.000000	0.934109	0.047481	0.000000
		0.009066	0.000000	0.000000	0.016388	0.974198	0.000349
		0.005024	0.000000	0.000000	0.000084	0.634567	0.360325
		0.983639	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.016361
3	80	0.999602	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000398
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	90	0.997766	0.000000	0.000000	0.000000	0.001487	0.000747
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000534	0.000000	0.000000	0.000000	0.309995	0.689471
		0.961538	0.000000	0.000000	0.000000	0.000520	0.037942

Continuação na próxima página

Tabela A.3 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 10$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
3	100	0.993767	0.000000	0.000000	0.000335	0.004832	0.001066
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.011765	0.000000	0.000000	0.000000	0.988235	0.000000
		0.004329	0.000000	0.000000	0.000000	0.633070	0.362601
		0.962224	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.037776
3	110	0.989866	0.000000	0.000000	0.006365	0.003564	0.000205
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.008617	0.000000	0.000000	0.019501	0.971655	0.000227
		0.004897	0.000000	0.000000	0.000171	0.624509	0.370423
		0.926093	0.000000	0.000000	0.000000	0.000141	0.073766
4	80	0.999388	0.000000	0.000000	0.000000	0.000066	0.000547
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.401235	0.598765
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	90	0.997554	0.000000	0.000000	0.000000	0.001434	0.001012
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.003166	0.000000	0.000000	0.000000	0.460276	0.536557
		0.957215	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.042785
4	100	0.993840	0.000000	0.000000	0.000749	0.004351	0.001059
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.010321	0.000000	0.000000	0.000000	0.988532	0.001147
		0.005448	0.000000	0.000000	0.000070	0.582385	0.412098
		0.891979	0.000000	0.000000	0.000000	0.000865	0.107156

Continuação na próxima página

Tabela A.3 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 10$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
4	110	0.989252	0.000000	0.000336	0.004802	0.005414	0.000195
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.008621	0.000000	0.000000	0.681034	0.310345	0.000000
		0.012079	0.000000	0.000000	0.096635	0.891286	0.000000
		0.006005	0.000000	0.000000	0.000239	0.626373	0.367383
		0.718204	0.000000	0.000000	0.000000	0.002691	0.279105
5	80	0.999261	0.000000	0.000000	0.000000	0.000160	0.000579
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.054118	0.945882
		0.985162	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.014838
5	90	0.996626	0.000000	0.000000	0.000025	0.002791	0.000558
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.008820	0.000000	0.000000	0.000000	0.472995	0.518186
		0.834008	0.000000	0.000000	0.000000	0.000112	0.165879
5	100	0.991802	0.000000	0.000006	0.001562	0.005277	0.001352
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.006498	0.000000	0.000000	0.017544	0.974984	0.000975
		0.004587	0.000000	0.000000	0.000025	0.670178	0.325210
		0.619998	0.000000	0.000000	0.000000	0.000202	0.379801
5	110	0.982867	0.000000	0.000383	0.011334	0.005118	0.000298
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.012759	0.000000	0.000000	0.861244	0.125997	0.000000
		0.013138	0.000000	0.000000	0.119073	0.867003	0.000786
		0.005711	0.000000	0.000000	0.000563	0.655280	0.338446
		0.373774	0.000000	0.000000	0.000043	0.000501	0.625682

Tabela A.4 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 20$.

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
1	80	$\begin{bmatrix} 0.995922 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000823 & 0.003253 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.004545 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.463636 & 0.531819 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	90	$\begin{bmatrix} 0.990790 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.007283 & 0.001927 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.004241 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.600827 & 0.394932 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	100	$\begin{bmatrix} 0.986816 & 0.000000 & 0.000000 & 0.003066 & 0.008231 & 0.001887 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.015128 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.983307 & 0.001565 \\ 0.010104 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000250 & 0.693828 & 0.295818 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	110	$\begin{bmatrix} 0.980446 & 0.000000 & 0.002001 & 0.011010 & 0.006910 & 0.000367 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.008734 & 0.000000 & 0.000000 & 0.970524 & 0.020742 & 0.000000 \\ 0.016253 & 0.000000 & 0.000000 & 0.080674 & 0.901891 & 0.001182 \\ 0.011111 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001181 & 0.686667 & 0.301042 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	80	$\begin{bmatrix} 0.997088 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001877 & 0.001035 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.001045 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.451647 & 0.547308 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.4 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 20$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
2	90	$\begin{bmatrix} 0.995239 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002605 & 0.002156 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.008304 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.658444 & 0.333252 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	100	$\begin{bmatrix} 0.989386 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002436 & 0.006020 & 0.002158 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.019006 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.978558 & 0.002437 \\ 0.011025 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000319 & 0.657128 & 0.331528 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	110	$\begin{bmatrix} 0.982900 & 0.000000 & 0.003467 & 0.007505 & 0.005066 & 0.001062 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.022664 & 0.000000 & 0.000000 & 0.933112 & 0.043671 & 0.000553 \\ 0.021850 & 0.000000 & 0.000000 & 0.023733 & 0.951780 & 0.002637 \\ 0.011249 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001738 & 0.625297 & 0.361716 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	80	$\begin{bmatrix} 0.999271 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000729 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	90	$\begin{bmatrix} 0.996589 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002010 & 0.001401 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.001605 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.297941 & 0.700455 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.4 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 20$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
3	100	0.989036	0.000000	0.000000	0.000625	0.008041	0.002298
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.012793	0.000000	0.000000	0.000000	0.985075	0.002132
		0.007651	0.000000	0.000000	0.000000	0.627596	0.364753
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	110	0.982753	0.000000	0.000000	0.010594	0.006135	0.000518
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.017059	0.000000	0.000000	0.018842	0.962699	0.001400
		0.008758	0.000000	0.000000	0.000252	0.621322	0.369668
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	80	0.998845	0.000000	0.000000	0.000000	0.000139	0.001016
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.002976	0.000000	0.000000	0.000000	0.389881	0.607143
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	90	0.995020	0.000000	0.000000	0.000000	0.002753	0.002227
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.004345	0.000000	0.000000	0.000000	0.464789	0.530866
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	100	0.989355	0.000000	0.000000	0.001338	0.007068	0.002239
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.011696	0.000000	0.000000	0.000000	0.987005	0.001300
		0.008662	0.000000	0.000000	0.000000	0.579715	0.411624
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Continuação na próxima página

Tabela A.4 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 20$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
4	110	0.983865	0.000000	0.000482	0.007021	0.008096	0.000536
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.026585	0.000000	0.000000	0.697342	0.276074	0.000000
		0.016833	0.000000	0.000000	0.085677	0.896482	0.001008
		0.010633	0.000000	0.000000	0.000420	0.622681	0.366266
		0.993411	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.006589
5	80	0.998521	0.000000	0.000000	0.000000	0.000309	0.001170
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.078292	0.921708
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	90	0.995144	0.000000	0.000000	0.000044	0.003638	0.001174
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.006033	0.000000	0.000000	0.000000	0.479439	0.514528
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	100	0.987368	0.000000	0.000012	0.002585	0.007352	0.002683
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
		0.015206	0.000000	0.000000	0.017407	0.964386	0.003001
		0.008201	0.000000	0.000000	0.000000	0.663417	0.328382
		0.982403	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.017597
5	110	0.977302	0.000000	0.000622	0.012972	0.008375	0.000729
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.008991	0.000000	0.000000	0.885115	0.105894	0.000000
		0.021278	0.000000	0.000000	0.128193	0.848639	0.001890
		0.010765	0.000000	0.000009	0.000747	0.645196	0.343282
		0.921232	0.000000	0.000000	0.000000	0.000074	0.078694

Tabela A.5 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 40$.

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
1	80	$\begin{bmatrix} 0.990304 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001615 & 0.008081 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.005338 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.456702 & 0.537960 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	90	$\begin{bmatrix} 0.980304 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.015584 & 0.004112 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.006528 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.591854 & 0.401618 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	100	$\begin{bmatrix} 0.964722 & 0.000000 & 0.000000 & 0.008694 & 0.020470 & 0.006115 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.020155 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.975238 & 0.004607 \\ 0.015326 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000623 & 0.688725 & 0.295326 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	110	$\begin{bmatrix} 0.949267 & 0.000000 & 0.004577 & 0.027006 & 0.018906 & 0.000245 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.030344 & 0.000000 & 0.000000 & 0.935266 & 0.033041 & 0.001349 \\ 0.023927 & 0.000000 & 0.000000 & 0.081792 & 0.890039 & 0.004242 \\ 0.015324 & 0.000000 & 0.000000 & 0.003096 & 0.680347 & 0.301233 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	80	$\begin{bmatrix} 0.994550 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.003506 & 0.001944 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.007234 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.455481 & 0.537284 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.5 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 40$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
2	90	$\begin{bmatrix} 0.985376 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.009501 & 0.005124 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.012334 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.655406 & 0.332260 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	100	$\begin{bmatrix} 0.973298 & 0.000000 & 0.000000 & 0.008168 & 0.013641 & 0.004893 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.039232 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.951715 & 0.009053 \\ 0.016056 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001347 & 0.641156 & 0.341440 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	110	$\begin{bmatrix} 0.960221 & 0.000000 & 0.008012 & 0.015991 & 0.012779 & 0.002997 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.045396 & 0.000000 & 0.000000 & 0.902724 & 0.049287 & 0.002594 \\ 0.034241 & 0.000000 & 0.000000 & 0.025052 & 0.933705 & 0.007001 \\ 0.017580 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002258 & 0.624268 & 0.355895 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	80	$\begin{bmatrix} 0.998612 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001388 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	90	$\begin{bmatrix} 0.991662 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.005599 & 0.002739 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.002715 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.269944 & 0.727341 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.5 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 40$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
3	100	0.977105	0.000000	0.000000	0.001038	0.017089	0.004768
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.017105	0.000000	0.000000	0.000000	0.980263	0.002632
		0.014476	0.000000	0.000000	0.000000	0.617289	0.368234
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	110	0.963226	0.000000	0.000000	0.021132	0.014251	0.001391
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.030714	0.000000	0.000000	0.016707	0.947618	0.004961
		0.014508	0.000000	0.000000	0.000605	0.615252	0.369635
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	80	0.997848	0.000000	0.000000	0.000000	0.000259	0.001892
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.009934	0.000000	0.000000	0.000000	0.365894	0.624172
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	90	0.990565	0.000000	0.000000	0.000000	0.004829	0.004606
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.009915	0.000000	0.000000	0.000000	0.460560	0.529525
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	100	0.977793	0.000000	0.000000	0.002305	0.015016	0.004886
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.020793	0.000000	0.000000	0.000000	0.973046	0.006161
		0.013829	0.000000	0.000000	0.000176	0.570065	0.415931
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Continuação na próxima página

Tabela A.5 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 40$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
4	110	0.964166	0.000000	0.000817	0.015064	0.018548	0.001404
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.037783	0.000000	0.000000	0.678841	0.282116	0.001259
		0.028386	0.000000	0.000000	0.078617	0.888555	0.004441
		0.017084	0.000000	0.000000	0.001135	0.614765	0.367015
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	80	0.997230	0.000000	0.000000	0.000000	0.000548	0.002222
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.001361	0.000000	0.000000	0.000000	0.063308	0.935330
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	90	0.988835	0.000000	0.000000	0.000073	0.008649	0.002443
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.025157	0.000000	0.000000	0.000000	0.968553	0.006289
		0.008310	0.000000	0.000000	0.000000	0.473102	0.518587
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	100	0.975155	0.000000	0.000022	0.004275	0.014522	0.006025
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.024390	0.000000	0.000000	0.000000	0.975610	0.000000
		0.021769	0.000000	0.000000	0.018749	0.952687	0.006795
		0.013690	0.000000	0.000000	0.000010	0.653113	0.333187
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	110	0.959453	0.000000	0.000995	0.022107	0.015743	0.001701
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.022911	0.000000	0.000000	0.847709	0.118598	0.010782
		0.031790	0.000000	0.000000	0.132142	0.830003	0.006066
		0.016102	0.000000	0.000013	0.002174	0.635069	0.346643
		0.999112	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000888

Tabela A.6 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{\text{car}} = 80$.

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
1	80	$\begin{bmatrix} 0.984782 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.003246 & 0.011972 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.011266 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.461903 & 0.526831 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	90	$\begin{bmatrix} 0.967974 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.027599 & 0.004427 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.008979 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.602662 & 0.388360 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	100	$\begin{bmatrix} 0.942172 & 0.000000 & 0.000000 & 0.014592 & 0.034134 & 0.009102 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.032752 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.951752 & 0.015496 \\ 0.014258 & 0.000000 & 0.000000 & 0.001499 & 0.686135 & 0.298108 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
1	110	$\begin{bmatrix} 0.915161 & 0.000000 & 0.006987 & 0.045866 & 0.031335 & 0.000651 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.032165 & 0.000000 & 0.000000 & 0.911666 & 0.049928 & 0.006241 \\ 0.035169 & 0.000000 & 0.000000 & 0.076865 & 0.871460 & 0.016506 \\ 0.016992 & 0.000000 & 0.000000 & 0.006314 & 0.680069 & 0.296625 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	80	$\begin{bmatrix} 0.989928 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.006546 & 0.003525 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.008520 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.450972 & 0.540508 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.6 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 80$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade
2	90	$\begin{bmatrix} 0.974954 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.016684 & 0.008361 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.019371 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.650146 & 0.330483 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	100	$\begin{bmatrix} 0.951617 & 0.000000 & 0.000000 & 0.013256 & 0.024324 & 0.010803 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.049021 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.924881 & 0.026098 \\ 0.021823 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002789 & 0.627754 & 0.347634 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
2	110	$\begin{bmatrix} 0.929877 & 0.000000 & 0.012160 & 0.026387 & 0.024823 & 0.006753 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.053974 & 0.000000 & 0.000000 & 0.864951 & 0.069460 & 0.011615 \\ 0.039927 & 0.000000 & 0.000000 & 0.032377 & 0.907296 & 0.020399 \\ 0.023287 & 0.000000 & 0.000000 & 0.004594 & 0.612001 & 0.360118 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	80	$\begin{bmatrix} 0.997234 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.002766 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$
3	90	$\begin{bmatrix} 0.983535 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.011484 & 0.004981 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.007049 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.258428 & 0.734523 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$

Continuação na próxima página

Tabela A.6 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 80$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
3	100	0.956573	0.000000	0.000000	0.001729	0.030372	0.011325
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.024555	0.000000	0.000000	0.000000	0.958510	0.016935
		0.018752	0.000000	0.000000	0.000000	0.609425	0.371823
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	110	0.932617	0.000000	0.000000	0.037087	0.026984	0.003312
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.041530	0.000000	0.000000	0.015939	0.926278	0.016253
		0.020010	0.000000	0.000000	0.001449	0.608451	0.370090
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	80	0.996188	0.000000	0.000000	0.000000	0.000630	0.003182
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.012839	0.000000	0.000000	0.000000	0.338802	0.648359
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	90	0.982639	0.000000	0.000000	0.000000	0.008589	0.008773
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.012022	0.000000	0.000000	0.000000	0.439348	0.548630
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	100	0.957972	0.000000	0.000000	0.003860	0.027673	0.010496
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.035297	0.000000	0.000000	0.000000	0.940138	0.024565
		0.019248	0.000000	0.000000	0.000362	0.558578	0.421813
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Continuação na próxima página

Tabela A.6 – Matrizes de probabilidade de transição para $n_{car} = 80$

Setor	Velocidade média(km/h)	Matriz de Probabilidade					
4	110	0.934411	0.000000	0.001412	0.025748	0.034951	0.003478
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.041667	0.000000	0.000000	0.658019	0.279874	0.020440
		0.039502	0.000000	0.000000	0.075317	0.869719	0.015462
		0.022676	0.000000	0.000000	0.002722	0.609048	0.365553
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	80	0.994270	0.000000	0.000000	0.000000	0.001047	0.004683
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.003168	0.000000	0.000000	0.000000	0.081309	0.915523
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	90	0.978575	0.000000	0.000000	0.000105	0.016777	0.004543
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.004525	0.000000	0.000000	0.000000	0.972851	0.022624
		0.012969	0.000000	0.000000	0.000000	0.460216	0.526816
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	100	0.952940	0.000000	0.000031	0.007493	0.026121	0.013414
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.018868	0.000000	0.000000	0.000000	0.886792	0.094340
		0.035002	0.000000	0.000000	0.014526	0.926132	0.024339
		0.020082	0.000000	0.000000	0.000051	0.641943	0.337924
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	110	0.927063	0.000000	0.001782	0.037214	0.029754	0.004186
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.041453	0.000000	0.000000	0.802564	0.133761	0.022222
		0.045000	0.000000	0.000000	0.134075	0.800608	0.020317
		0.022065	0.000000	0.000060	0.004771	0.626029	0.347075
		1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000