ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ALGUMAS EQUAÇÕES

INTEGRAIS DO TIPO VOLTERRA

NEIDE MARIA BERTOLDI FRANCO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ALGUMAS EQUAÇÕES

INTEGRAIS DO TIPO VOLTERRA

NEIDE MARIA BERTOLDI FRANCO

Orientador: Prof.Dr. Sean McKee

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Car-
los da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Doutor
em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1982

Ao Wilson, Renata e Juliana

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Sean Mckee pela orientação segura e dedicada e também pela confiança em mim depositada.

A todos os amigos do ICMSC-USP pelo apoio e incentivo, em especial, à Professora Dra. Célia Maria Finazzi de Andrade e ao Professor Dr. Luiz Augusto da Costa Ladeira pela boa vontade que demonstraram em discutir conosco assuntos relacionados com este trabalho.

À Maria Cristina de Oliveira Dinato e Sueli Aparecida Honório Ferreira que cuidadosamente datilografaram este trabalho e ao Sr. José Augusto Evaristo Filho pelo acurado serviço de impressão.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelas instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

NUMERICAL SOLUTION OF SOME INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE

Neide Maria Bertoldi Franco

Adviser: Prof.Dr. Sean McKee

ABSTRACT

This thesis is concerned with the numerical solution of three integral equations of Volterra type.

Chapter 1 presents some basic notation and mathematical results. Chapter 2 is concerned with linear multistep methods for the direct solution of Volterra integral equations of the first kind with a kernel identically equal to zero when $t = s$. A numerical method for solving a non-linear singular integral equation describing the temperature distribution of the surface of a projectile moving through a laminar boundary layer is discussed in Chapter 3. The convergence of this product integration method is given. Chapter 4 generalises the previous chapter for a method of order n . Finally Chapter 5 treats a numerical method for a non-linear integral equation arising from non-linear waves in shock tubes.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO 1

Notação e Preliminares	1
------------------------------	---

1.1 - Métodos lineares de passo múltiplo para equações integrais de Volterra de 1 ^a espécie.....	1
---	---

1.2 - Alguns resultados da análise	9
--	---

CAPÍTULO 2

Métodos lineares de passo múltiplo para equações integrais de Volterra de 1^a espécie com $k(t, t) \equiv 0$

2.1 - Introdução	13
------------------------	----

2.2 - Método numérico	15
-----------------------------	----

2.3 - Decomposição da matriz Ψ_h	17
---	----

2.4 - Estabilidade	22
--------------------------	----

2.5 - Convergência	24
--------------------------	----

2.6 - A condição da raiz	30
--------------------------------	----

2.7 - Exemplos	31
----------------------	----

2.8 - Resultados numéricos	42
----------------------------------	----

2.9 - Conclusão	46
-----------------------	----

CAPÍTULO 3

Solução numérica de uma particular equação integral singular não linear de Volterra de 2^a espécie

3.1 - Introdução	49
------------------------	----

3.2 - Método numérico	50
3.3 - Um Lema de Gronwall no caso discreto	53
3.4 - Consistência	61
3.5 - Limitação para $ w_{ij} $	64
3.6 - Convergência	69
3.7 - Resultados numéricos	70
3.8 - Conclusão	71

CAPÍTULO 4

Métodos do tipo integração produto de ordem elevada

4.1 - Introdução	73
4.2 - Método numérico	73
4.3 - Consistência	77
4.4 - Limitação para $ w_{ij} $	81
4.5 - Convergência	92
4.6 - Resultados numéricos	95
4.7 - Conclusão	97

CAPÍTULO 5

Uma equação integral de Volterra proveniente da propagação de ondas não lineares em tubos

5.1 - Introdução	99
5.2 - Equação transformada	101
5.3 - Métodos numéricos	103
5.4 - Resultados numéricos	108
5.5 - Conclusão	110

APÊNDICE I

Dificuldade em provar a convergência no caso em que a equação (2.1.1) está sujeita às condições $\frac{\partial^n k}{\partial t^n}(t,t) \equiv 0$,
 $n = 0, 1, \dots, q$ 111

APÊNDICE II

Esboço da prova de convergência para a equação integral de Volterra proveniente da propagação de ondas não lineares em tubos 119

BIBLIOGRAFIA 127

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO

Muitos problemas em física matemática, os quais são tradicionalmente formulados em termos de equações diferenciais ordinárias e parciais, podem ser expressos em termos de equações integrais de Volterra. Estas podem ser classificadas como segue:

Equação de 1ª espécie:
$$\int_a^t k(t,s)y(s)ds = f(t)$$

Equação de 2ª espécie:
$$y(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)y(s)ds$$

onde, em ambas, as funções $f(t)$ e $k(t,s)$ são dadas. Estas equações são chamadas não singulares se o núcleo $k(t,s)$ não tem singularidade no domínio de integração; caso contrário, são chamadas singulares. Convém salientar que mesmo neste caso a integral pode ser calculada.

O objetivo do presente trabalho é expor métodos de solução numérica para equações integrais de Volterra. Os métodos apresentados fornecem uma solução aproximada da equação sempre sobre um conjunto discreto de pontos e não sobre um conjunto contínuo.

No capítulo 1 apresentamos algumas notações básicas e resultados matemáticos, os quais achamos necessários para a compreensão dos capítulos posteriores.

No capítulo 2 apresentamos métodos lineares de passo múltiplo para determinação de solução numérica de equações integrais lineares de Volterra de 1ª espécie, cujo núcleo $k(t,s) \equiv 0$ quando $t = s$. A partir de uma particular decomposição da matriz do algoritmo de discretização estabelecemos os conceitos de zero-estabilidade e zero-estabilidade fraca. Supondo que o erro de truncamento local possui uma expansão assintótica com um certo número de termos, apresentamos dois teoremas, os quais mostram a relação entre esse número e a ordem de convergência do método nos casos em que este é zero-estável ou fracamente zero-estável. Construímos alguns exemplos de métodos zero-estável e fracamente zero-estável a partir de métodos lineares de passo múltiplo bem conhecidos, e apresentamos resultados numéricos correspondentes.

Solução numérica de uma equação integral singular não linear de Volterra de 2ª espécie, deduzida por Lighthill (1950) para descrever a distribuição de temperatura da superfície de um projétil movendo-se através da camada limite laminar a altas velocidades Mach, encontra-se no capítulo 3. O método proposto é um método numérico do tipo integração produto simples, obtido através da substituição da função incôgnita do integrando por constantes. Demonstramos que o método obtido é convergente. Um lema de Gronwall no caso discreto é demonstrado. Apresentamos os resultados numéricos obtidos em forma de gráfico.

No capítulo 4, apresentamos métodos do tipo integração produto de ordem elevada para se determinar solução numérica da equação integral singular não linear de Volterra de 2ª espécie, deduzida por Lighthill. O método proposto é obtido subs-

tituindo-se a função incôgnita do integrando por apropriados polinômios de interpolação de grau n , $n \geq 1$. Mostramos que o método é consistente de ordem $n+1$ e apresentamos um teorema que nos garante convergência de ordem $n+1$. Finalmente, apresentamos gráfico da solução numérica no caso em que $n = 1$.

Uma equação integral de Volterra proveniente da propagação de ondas não lineares em tubos é estudada no capítulo 5. Usando fórmula de inversão do tipo Abel, integrando uma vez e fazendo uma integração por partes reescrevemos a equação original numa forma mais conveniente. Apresentamos dois métodos numéricos do tipo integração produto simples. O primeiro é obtido da equação original através da substituição da função incôgnita do integrando por constantes e o segundo é obtido da equação transformada substituindo-se a função incôgnita do integrando por constantes e sua primeira derivada por $[y(t_{j+1}) - y(t_j)]/h$. Resultados numéricos correspondente ao primeiro método são apresentados.

No apêndice I apresentamos uma análise (particular) da dificuldade em provar a convergência de métodos de passo múltiplo para equações integrais de Volterra de primeira espécie com

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (t, t) \equiv 0, \quad n = 0, 1, \dots, q$$

para algum inteiro $q \geq 1$.

Um esboço de prova de convergência do método do tipo integração produto simples para equação integral de Volterra proveniente da propagação de ondas não lineares em tubos encon-

tra-se no Apêndice II.

Apresentamos ao final, uma bibliografia para interessados no assunto

CAPÍTULO 1

NOTAÇÃO E PRELIMINARES

Introduzimos algumas notações básicas e conceitos matemáticos que julgamos necessários ao desenvolvimento do presente trabalho.

1.1 - Métodos lineares de passo múltiplo para equações integrais de Volterra de 1ª espécie

Consideremos uma equação integral linear de Volterra de 1ª espécie:

$$(1.1.1) \quad \int_a^t k(t,s)y(s)ds = f(t)$$

com $f(a) = 0$.

Seja $k(t,s)$ uma função real contínua definida no domínio $a \leq s \leq t \leq b$, com derivadas parciais $\frac{\partial k}{\partial t}(t,s)$ contínuas; $k(t,t) \neq 0$ e $f(t)$ uma função real de variável real continuamente diferenciável em $[a,b]$.

Suponhamos que (1.1.1) tenha uma única solução contínua.

Para obtermos solução numérica de (1.1.1), discretizemos o intervalo $[a,b]$, isto é, para cada inteiro N , definimos a malha:

$$\{ t_i = a + ih ; h = \frac{b-a}{N} ; i = 0, 1, \dots, N \}$$

e definimos a função: $\Delta_h : C[a, b] \rightarrow R^{N+1}$, isto é,

$$\begin{aligned} \Delta_h g(t) &= (g(a), g(a+h), \dots, g(b-h), g(b))^t \\ &= \{ g(a+ih) \}_{i=0}^N \end{aligned}$$

Consideremos a forma discretizada da equação integral

$$(1.1.2) \quad \int_{t_0}^{t_n} k(t_n, s) y(s) ds = f(t_n)$$

Os métodos para solução numérica de (1.1.1) que consideramos aqui são conhecidos como métodos lineares de passo múltiplo (ou métodos de k-passos). Eles envolvem a troca de integrais por regras de quadratura numérica.

Métodos de k-passos para solução de (1.1.1) foram considerados por: Kobayasi (1967), Linz (1967 e 1969), Anderson e White (1971), Gladwin (1972 e 1979), Gladwin e Jeltsch (1974), Holyhead, McKee e Taylor (1975), Holyhead e McKee (1976), Andrade (1977), Baker e Keech (1978), McKee (1979).

Definição 1.1.1: (Linz (1967))

Dizemos que regras de quadratura numérica com pesos w_{nj} são fórmulas tais que, para qualquer função $g(x) \in C[a, b]$, temos

$$\int_{t_0}^{t_n} g(s) ds \approx h \sum_{j=0}^n w_{nj} g(t_j)$$

Assim, se a integral em (1.1.2) é trocada por regra de quadratura numérica, então uma solução aproximada é definida por:

$$h \sum_{j=0}^n w_{nj} k_{nj} y_j = f_n \quad ; \quad n = r, r+1, \dots$$

Se $y_0, y_1, \dots, y_{r-1}$ são conhecidos, esta equação pode ser resolvida para se determinar y_r . Assim, a solução aproximada é determinada em um ponto de cada vez.

Podemos então definir o algoritmo de discretização da seguinte forma:

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} \phi_h y &= 0 \quad ; \quad \text{onde } \phi_h: \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}, \text{ com} \\ [\phi_h y]_n &= \begin{cases} h(y_n - \tilde{y}_n) & ; \quad 0 \leq n < r \\ h \sum_{j=0}^n w_{nj} k_{nj} y_j - f_n & ; \quad r \leq n \leq N \end{cases} \end{aligned}$$

onde:

$\tilde{y}_n$, $0 \leq n < r$ são valores iniciais dados; y_n e f_n são aproximações para $y(t_n)$ e $f(t_n)$, respectivamente,

$k_{nj} = k(t_n, t_j)$ e w_{nj} são os pesos da regra de quadratura.

Em notação matricial, temos:

$$\phi_h y = h \psi_h y - g \quad ; \quad \text{onde}$$

$$g = (h\tilde{y}_0, \dots, h\tilde{y}_{r-1}, f_r, f_{r+1}, \dots, f_N)^t,$$

$$y = (y_0, \dots, y_{r-1}, y_r, \dots, y_N)^t \quad e$$

$\psi_h = (\psi_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, N$ é matriz triangular inferior.

Note que devemos utilizar somente regras de quadratura que possuam função peso $w_{nn} \neq 0$, pois desde que $k(t, t) \neq 0$, Ψ_h será não singular para todo h .

Em métodos de k -passos, a expressão total de quadratura é baseada em repetidas regras de quadratura igualmente espaçadas de h definidas sobre $k+1$ pontos. A expressão total da quadratura

$$(1.1.4) \quad h \sum_{j=0}^n w_{nj}^k y_j$$

é a soma da "fórmula inicial", sobre $k'+1$ pontos:

$$(1.1.5) \quad h \sum_{i=0}^{k'} \alpha_i^k y_i$$

com a "fórmula final", sobre $k''+1$ pontos:

$$(1.1.6) \quad h \sum_{i=0}^{k''} \beta_i^k y_{n-i}$$

e com a "fórmula principal repetida":

$$(1.1.7) \quad h \sum_{m=0}^q \sum_{i=0}^k \gamma_i^k y_{n, k'+km+i}$$

onde $q = (n - k - k' - k'')/k$

Note que a fórmula inicial de k' -passos e a fórmula final de k'' -passos devem ser escolhidas de tal modo que q seja um inteiro.

As expressões (1.1.5), (1.1.6) e (1.1.7) aproximam

$$\int_{t_0}^{t_{k'}} k(t_n, s) y(s) ds ; \int_{t_{n-k''}}^{t_n} k(t_n, s) y(s) ds \text{ e}$$

$$\int_{t_{km+k'}}^{t_{k(m+1)+k'}} k(t_n, s) y(s) ds$$

respectivamente.

Os valores $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ são escolhidos ciclicamente de conjuntos de no máximo k convenientes fórmulas de integração. Por exemplo, se $k = 2$, os valores de $\{\alpha_i\}$ podem ser escolhidos como sendo a função peso da regra do trapézio e da regra de Simpson usadas alternadamente. O valor de k pode então ser escolhido igual a zero e não há necessidade de usarmos uma regra de quadratura final.

Observe que podemos usar diferentes regras de quadratura para diferentes valores de n , variando a "fórmula principal repetida" e/ou a "fórmula final". As regras, em geral, são aplicadas ciclicamente e a "fórmula inicial" pode também variar ciclicamente, com ciclo igual ou diferente.

Além disso, é necessário escolhermos métodos de passo múltiplo, os quais em algum sentido aproximam a equação integral. Para este fim, damos a definição seguinte.

Definição 1.1.2: (Holyhead, McKee e Taylor (1975))

Dizemos que a discretização ϕ_h é consistente de ordem p num ponto $y(t) \in C[a, b]$ se, para todo $h \in (0, h_0]$ e para todo $n \geq r$,

$$| [h\psi_h \Delta_h y - \Delta_h (\int_a^t k(t, s) y(s) ds)]_n | < Ch^p$$

onde C é independente de h .

A seguir, damos um exemplo de $\phi_h y = 0$, consistindo da regra de Simpson como fórmula principal repetida e da regra de Simpson 3/8 usada alternadamente como fórmula final. Não existe fórmula inicial.

Exemplo 1.1.1:

Para efeito de simplicidade, consideremos $k(t,s) \equiv 1$.

Assim:

$$h \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & & & & & \\ \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & (\frac{1}{3} + \frac{3}{8}) & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) & \frac{4}{3} & (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) & \frac{4}{3} & (\frac{1}{3} + \frac{3}{8}) & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}y_0 \\ \tilde{h}y_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

Observe que, além das fórmulas do tipo fechado, podemos também empregar fórmulas com pontos fora do intervalo de integração, como as descritas em Andrade (1977), das quais o método de Adams-Moulton é um exemplo.

Definição 1.1.3: (McKee (1979))

Dizemos que a matriz Ψ_h tem fator de repetição de linhas ℓ , se ℓ é o menor inteiro tal que existem inteiros γ_1 , γ_2 e γ_3 , independentes de N , com

$$w_{ij} = w_{i-\ell, j} \quad ; \quad i \geq \gamma_1 \quad ; \quad j \geq \gamma_2 \quad ; \quad i-j \geq \gamma_3$$

onde os w_{ij} são os pesos da fórmula de quadratura (1.1.4).

Definição 1.1.4: (McKee (1979))

Dizemos que a matriz Ψ_h tem fator de repetição de colunas m , se m é o menor inteiro tal que existe um inteiro γ_1 , independente de N , com

$$w_{ij} = w_{i+m, j+m} \quad , \quad j \geq \gamma_1 \quad (i-j \geq 0)$$

onde os w_{ij} são os pesos da fórmula de quadratura (1.1.4).

Definição 1.1.5: (Andrade (1977))

Dizemos que o método ϕ_h é m -cíclico se o fator de repetição de colunas de Ψ_h é m . Se $m = 1$ o método é dito não cíclico.

Assim, no exemplo 1.1.1 temos que o fator de repetição de linhas é $\ell = 1$ (com $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 = 3$), o fator de repetição de colunas é $m = 2$ (com $\gamma_1 = 2$) e o método é 2-cíclico.

Definição 1.1.6: (McKee (1979))

Definimos matriz de diferenciação por:

$$D_h^\ell = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & -1 & 0 \dots 0 & 1 \\ & & & & & & & & -1 & 0 \dots 0 & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & -1 & 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} r \text{ linhas} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \ell \text{ linhas} \end{matrix} \quad (N+1) \times (N+1)$$

A matriz D_h^ℓ consiste de 1 na diagonal, -1 na ℓ -ésima sub-diagonal a partir da $(r+1)$ -ésima coluna. Todos os outros elementos são nulos.

Na literatura de análise numérica encontramos frequentemente o seguinte Lema de Gronwall no caso discreto.

Lema 1.1.1: (Linz (1969))

Se x_j , $j = 0, 1, \dots, N$ é uma seqüência de números reais com

$$|x_i| \leq hM \sum_{j=0}^{i-1} |x_j| + \delta \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

onde $M > 0$ é em geral independente de $h (= 1/N)$; $\delta > 0$, então

$$|x_i| \leq (hM|x_0| + \delta)e^{Mih} ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

O principal valor deste lema é que ele é muito empregado para demonstrar a convergência de solução discreta de alguns algoritmos de discretização.

1.2 - Alguns resultados da análise

Teorema 1.2.1: "Teorema do valor médio para integrais impróprias"

Seja $f(x)$ contínua em $a \leq x \leq b$ e $g(x)$ contínua em $a \leq x < b$ tal que $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$ não existe, mas $g(x)$ é integrável no sentido impróprio em $a \leq x \leq b$. Se $g(x)$ não muda de sinal em $a \leq x < b$, então existe no mínimo um ponto ξ entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi_0) \int_a^b g(x)dx$$

Prova:

Pelo segundo teorema do valor médio para integrais (veja, por exemplo, Apostol (1958)) temos que, para $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \xi_n \in (a, b)$ tal que:

$$(1.2.1) \quad \int_a^{b-1/n} f(x)g(x)dx = f(\xi_n) \int_a^{b-1/n} g(x)dx$$

Formamos então uma sequência $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in (a, b)$ e vale (1.2.1). Mas toda sequência real limitada pos

sui uma sub-sequência convergente. Portanto, existe uma sub-sequência $\{\xi_{n_j}\}$ tal que $\{\xi_{n_j}\}$ converge para $\xi_0 \in (a,b)$.

Admitindo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b-1/n} f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx ; \text{ e que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b-1/n} g(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

podemos considerar

$$\int_a^{b-1/n_j} f(x)g(x)dx = f(\xi_{n_j}) \int_a^{b-1/n_j} g(x)dx$$

e assim, passando ao limite, obtemos:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi_0) \int_a^b g(x)dx$$

onde ξ_0 está entre a e b .

Definição 1.2.1: (*)

A função beta, $B(z,w)$, é definida para $R(z) > 0$, $R(w) > 0$, ($z = x + iy$; $w = \alpha + in$), por:

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$$

e é conhecida como integral de Euler de 1ª espécie.

Definição 1.2.2: (*)

A função gama, $\Gamma(z)$, é definida para $R(z) > 0$, ($z = x + iy$), por:

(*) (veja, por exemplo, Spain e Smith (1970)).

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

e é conhecida como integral de Euler de 2ª espécie.

Observação 1.2.1:

A função $B(z, w)$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Se $w = 1-z$ temos que:

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \quad \text{e, portanto,}$$

$$B(z, w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \quad \text{desde que } \Gamma(1) = 1.$$

CAPÍTULO 2

MÉTODOS LINEARES DE PASSO MÚLTIPLO PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE
VOLTERRA DE 1^a ESPÉCIE COM $k(t,t) \equiv 0$.

2.1 - Introdução

Seja $k(t,s)$ uma função real contínua definida em $T \equiv \{a \leq s \leq t \leq b\}$, suficientemente derivável e $f(t)$ uma função real contínua definida em $[a,b]$, suficientemente derivável.

Consideremos a equação integral, na incógnita $y(s)$,

$$(2.1.1) \quad \int_a^t k(t,s)y(s)ds = f(t)$$

com

$$(2.1.2) \quad k(t,t) = 0 ; \quad \frac{\partial k}{\partial t}(t,t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in [a,b]$$

e

$$(2.1.3) \quad f(a) = f'(a) = 0$$

Esta é uma equação integral linear de Volterra de 1^a espécie.

Para demonstrar que (2.1.1) tem uma única solução é usual assumir que $k(t,t) \neq 0$ (Yosida (1960)) e então, diferenciando (2.1.1), obtemos uma equação integral de Volterra de 2^a espécie, a qual tem uma única solução contínua. Neste caso,

entretanto, é necessário diferenciar (2.1.1) duas vezes para obter uma equação integral de Volterra de 2^a espécie.

De fato: seja $y(s)$ uma solução contínua de (2.1.1), então, diferenciando duas vezes, temos que $y(s)$ satisfaz a equação:

$$(2.1.4) \quad \frac{\partial k}{\partial t}(t,t)y(t) + \int_a^t \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t,s)y(s)ds = f''(t)$$

Desde que $\frac{\partial k}{\partial t}(t,t) = k^{(1)}(t,t) \neq 0$, $t \in [a,b]$, temos que (2.1.4) é equivalente à equação integral de Volterra de 2^a espécie:

$$(2.1.5) \quad y(t) + \int_a^t (k^{(2)}(t,s)/k^{(1)}(t,t))y(s)ds = \\ = f''(t)/k^{(1)}(t,t)$$

a qual tem uma única solução contínua.

Agora, desde que exigimos $f(a) = f'(a) = 0$, (2.1.1) pode ser obtida de (2.1.5) por integração e, em consequência, a solução de (2.1.5) também satisfaz (2.1.1). Assim, (2.1.1) tem uma única solução contínua.

Para equações integrais de Volterra de 1^a espécie com $k(t,t) \neq 0$, Holyhead, McKee e Taylor (1975) provaram, sob suposição de continuidade mínima exigida para demonstrar a existência de solução, que consistência de ordem p aliada a zero-estabilidade implica em convergência de ordem $p-1$. Mais tarde, McKee (1979) mostrou que, assumindo maior continuidade para o núcleo $k(t,s)$ e para a função forçante $f(t)$, é possível obter convergência de ordem p .

Este capítulo é dedicado à determinação de solução numérica de equações integrais lineares de Volterra de 1ª espécie, cujo núcleo $k(t,s) \equiv 0$ para $t = s$, através de métodos lineares de passo múltiplo. Estabelecemos os conceitos de zero-estabilidade e de zero-estabilidade fraca. Com a suposição de que o erro de truncamento local possui uma expansão assintótica com um certo número de termos, mostramos a relação entre esse número e a ordem de convergência do método, nos casos em que este é zero-estável ou fracamente zero-estável.

2.2 - Método Numérico

O método numérico que propomos aqui para obtermos solução numérica de (2.1.1) sujeita às condições (2.1.2) e (2.1.3) é conhecido como método linear de passo-múltiplo.

Seja $h \in (0, h_0]$, $h_0 > 0$, e seja N um inteiro tal que $h = \frac{b-a}{N}$.

Definimos a função:

$$\Delta_h : C[a,b] \rightarrow R^{N+1}, \text{ isto é}$$

$$\Delta_h f(t) = (f(a), f(a+h), \dots, f(b))^t$$

e o algoritmo de discretização:

$$\phi_h y = 0; \text{ onde } \phi_h : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1} \text{ é dado por:}$$

$$(2.2.1) \quad [\phi_h y]_n = \begin{cases} h(y_n - \tilde{y}_n) & ; 0 \leq n < r \\ h \sum_{j=0}^n w_{n+1,j} k_{n+1,j} y_j - f_{n+1} & ; r \leq n \leq N \end{cases}$$

onde $\tilde{y}_n$ são valores iniciais dados para $y(t_n)$; $0 \leq n < r$, y_n e f_n são aproximações para $y(t_n)$ e $f(t_n)$ respectivamente; $k_{nj} = k(t_n, t_j)$ e w_{nj} são os pesos da regra de quadratura.

Restringimos nossa atenção a regras de quadratura que possuam função peso $w_{n+1,n} \neq 0$, $r \leq n \leq N$.

Note que, usando o algoritmo de discretização (2.2.1), obtemos a solução aproximada y_j , $j = r, r+1, \dots, N$ em um ponto de cada vez.

Usando notação matricial, podemos escrever o algoritmo (2.2.1) da seguinte forma:

$$(2.2.2) \quad \phi_h y = h \psi_h y - g$$

onde

$$g = (h\tilde{y}_0, h\tilde{y}_1, \dots, h\tilde{y}_{r-1}, f_{r+1}, \dots, f_{N+1})^t$$

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{r-1}, y_r, \dots, y_N)^t$$

e ψ_h é matriz triangular inferior.

A expressão total da quadratura

$$h \sum_{j=0}^n w_{n+1,j} k_{n+1,j} y_j$$

é a soma de fórmula inicial, fórmula final e fórmula principal repetida, como descrita na seção 1.1.

Definição 2.2.1:

A discretização ϕ_h é consistente de ordem p com uma expansão assintótica de $(s + 1)$ termos da solução $y(t)$

da equação (2.1.1), se para $n = r, r+1, \dots, N$, $\exists q_\ell(t) \in C^\ell[a, b]$, $\ell = 0, 1, \dots, s$ (independente de h e N) tal que

$$(2.2.3) \quad [h \Psi_h \Delta_h y(t) - g]_n = [h^p \sum_{j=0}^s h^j (\Delta_h q_{s-j}(t)) + O(h^{p+s+1})]_n$$

Definição 2.2.2:

Os valores iniciais (ou métodos) são convergentes de ordem p se, para $n = 0, 1, \dots, r-1$, $\exists \tilde{q}(t) \in C^0[a, b]$, (independente de h e N) tal que

$$(2.2.4) \quad [\Delta_h y(t) - \tilde{y}]_n = h^p [\Delta_h \tilde{q}(t)]_n$$

A fim de definirmos os conceitos de zero-estabilidade e zero-estabilidade fraca, precisamos decompor a matriz Ψ_h . Assim:

2.3 - Decomposição da Matriz Ψ_h

Consideremos as seguintes identidades:

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} k(t_{n+1}, t_j) &= k(t_j, t_j) + (n+1-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \\ &+ [k(t_{n+1}, t_j) - k(t_j, t_j) - (n+1-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j)] \end{aligned}$$

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} k(t_{n+1}, t_j) &= k(t_j, t_j) + (n+1-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \\ &+ \frac{((n+1-j)h)^2}{2!} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3.2) \quad & + [k(t_{n+1}, t_j) - k(t_j, t_j) - \\
 & - (n+1-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) - \\
 & - \frac{((n+1-j)h)^2}{2!} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j)]
 \end{aligned}$$

Usando (2.3.1) podemos escrever:

$$(2.3.3) \quad \Psi_h = E_r + U_h^{(0)} K_h^{(0)} + h U_h^{(1)} K_h^{(1)} + h^2 U_h^{(2)}$$

onde

$E_r = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$ com os primeiros r elementos iguais a 1

$K_h^{(i)} = \text{diag}(k_{00}^{(i)}, k_{11}^{(i)}, \dots, k_{NN}^{(i)})$ com

$$k_{jj}^{(i)} = \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t_j, t_j), \quad i = 0, 1$$

$U_h^{(i)}, i = 0, 1$ é matriz triangular inferior dada

por:

$$(2.3.4) \quad (U_h^{(i)})_{nj} = \begin{cases} \frac{(n+1-j)^i}{i!} w_{n+1,j} & ; r \leq n \leq N ; 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

e

$$(2.3.5) \quad (U_h^{(2)})_{nj} = \begin{cases} w_{n+1,j} [k_{n+1,j} - k_{jj} - (n+1-j)k_{jj}^{(1)}] / h^2, & r \leq n \leq N, 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

Consideremos uma pequena modificação de ϕ_h consistindo da substituição das r primeiras equações por $h^2 k_{nn}^{(1)}(y_n - \tilde{y}_n) = 0$, $n = 0, 1, \dots, r-1$. Então, lembrando que $K_h^{(0)} \equiv 0$, podemos escrever (2.3.3) na seguinte forma:

$$(2.3.6) \quad \psi_h = h(E_r + U_h^{(1)})K_h^{(1)} + h^2 U_h^{(2)}$$

Pré-multiplicando (2.3.6) por $(D_h^\ell)^2$, onde D_h^ℓ é a matriz de diferenciação dada na definição 1.1.6, obtemos:

$$(2.3.7) \quad (D_h^\ell)^2 \psi_h = \frac{1}{h} (A_h K_h^{(1)} + h B_h^k)$$

onde

$$A_h = (h D_h^\ell)^2 (E_r + U_h^{(1)}) \quad \text{e} \quad B_h^k = (h D_h^\ell)^2 U_h^{(2)}$$

Em forma de diagrama, temos:

$$(D_h^\ell)^2 \psi_h = \frac{1}{h} \left\{ \begin{bmatrix} \text{Diagram 1} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \text{Diagram 2} \end{bmatrix} \right\}$$

É importante observar que a largura da banda de A_h é independente de N . Assim, denotaremos a largura da banda de A_h por $k+1$.

A matriz A_h é de particular importância e, além disso, observamos que ela pode ser escrita na seguinte forma:

$$A_h = \begin{bmatrix} E & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A \end{bmatrix} \quad (N+1) \times (N+1)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \dots & \alpha_k^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^{(m)} & \alpha_1^{(m)} & \dots & \alpha_k^{(m)} \end{bmatrix}$$

onde m é fator de repetição de colunas (Def. 1.1.4).

De maneira análoga, usando a identidade (2.3.2), podemos escrever:

$$\psi_h = E_r + U_h^{(0)} K_h^{(0)} + h U_h^{(1)} K_h^{(1)} + h^2 U_h^{(2)} K_h^{(2)} + h^3 U_h^{(3)}$$

onde as matrizes E_r e $K_h^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ são as matrizes já definidas anteriormente e as matrizes $U_h^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ e $U_h^{(3)}$ são definidas de modo semelhante a (2.3.4) e (2.3.5) respectivamente.

Considerando a mesma modificação de ϕ_h nas r primeiras equações, e o fato de que $K_h^{(0)} \equiv 0$, obtemos:

$$(2.3.8) \quad \psi_h = h(E_r + U_h^{(1)})K_h^{(1)} + h^2 U_h^{(2)}K_h^{(2)} + h^3 U_h^{(3)}$$

A pré-multiplicação de (2.3.8) por $(D_h^\ell)^3$ resulta em

$$(2.3.9) \quad (D_h^\ell)^3 \psi_h = \frac{1}{h^2} [\mathcal{A}_h K_h^{(1)} + h \beta_h K_h^{(2)} + h^2 \mathcal{C}_h^k]$$

onde

$$\mathcal{A}_h = (hD_h^\ell)^3 (E_r + U_h^{(1)}) ; \beta_h = (hD_h^\ell)^3 U_h^{(2)} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_h^k = (hD_h^\ell)^3 U_h^{(3)}$$

Em forma de diagrama, temos:

$$(D_h^\ell)^3 \psi_h = \frac{1}{h^2} \left\{ \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right] + h \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \right] + h^2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \right] \right\}$$

Observe que a largura da banda de $\mathcal{A}_h$ e β_h são independentes de N e, desde que denotamos por $k+1$ a largura da banda de A_h , temos que a largura da banda de ambas, $\mathcal{A}_h$ e β_h é $k+\ell+1$, onde ℓ é o fator de repetição de linhas (Def. 1.1.3).

Agora, podemos definir:

2.4 - Estabilidade

Enquanto a consistência controla o erro local em ca da passo, a estabilidade controla a forma pela qual o erro se propaga quando o número de passos aumenta.

Definição 2.4.1:

A discretização ϕ_h é zero-estável se $\exists M > 0$, independente de $h \in (0, h_0]$ para algum $h_0 > 0$, tal que

$$(2.4.1) \quad \|A_h^{-1}\|_{\infty} \leq M$$

Definição 2.4.2:

A discretização ϕ_h é fracamente zero-estável se $\exists M > 0$, independente de $h \in (0, h_0]$ para algum $h_0 > 0$ tal que

$$(2.4.2) \quad \max_{0 \leq n, j \leq N} |(A_h^{-1})_{nj}| \leq M$$

Observe que (2.4.2) implica em

$$(2.4.3) \quad h \|A_h^{-1}\|_{\infty} \leq M' \quad ; \quad \text{onde } M' = (b-a)M$$

Antes de estudarmos a convergência do método proposto, retornemos à definição 2.2.1. Para efeito de simplicidade consideramos, daqui em diante, a definição 2.2.1 sem o termo complementar. Então a pré-multiplicação de (2.2.3) por $(D_h^{\ell})^2$ resulta em:

$$\begin{aligned}
 (2.4.4) \quad [(D_h^\ell)^2 (h \Psi_h \Delta_h y(t) - g)]_n &= h^p \left[\sum_{j=0}^s h^j (D_h^\ell)^2 \Delta_h q_{s-j}(t) \right]_n \\
 &= h^{p+s-2} [\Delta_h Q_0(t)]_n ; \quad n \geq r
 \end{aligned}$$

para alguma função $Q_0(t) \in C^0[a, b]$.

Para exemplificar esse resultado, consideremos $s = 1$. Assim:

$$\begin{aligned}
 [(D_h^\ell)^2 (h \Psi_h \Delta_h y(t) - g)]_n &= h^p [(D_h^\ell)^2 \Delta_h q_1(t) + \\
 &\quad + h (D_h^\ell)^2 \Delta_h q_0(t)]_n
 \end{aligned}$$

Mas desde que $q_1(t) \in C^1[a, b]$, temos que $(D_h^\ell)^2 \Delta_h q_1(t) = h^{-1} q_1'(\xi)$; $a < \xi < b$; onde $q_1'(t) \in C^0[a, b]$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 [(D_h^\ell)^2 (h \Psi_h \Delta_h y(t) - g)]_n &= h^p [h^{-1} q_1'(t) + \\
 &\quad + h (D_h^\ell)^2 \Delta_h q_0(t)]_n \\
 &= h^{p-1} [\Delta_h Q_0(t)]_n ; \quad n \geq r
 \end{aligned}$$

para alguma função $Q_0(t) \in C^0[a, b]$.

De maneira análoga, pré-multiplicando (2.2.3) por $(D_h^\ell)^3$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 (2.4.5) \quad [(D_h^\ell)^3 (h \Psi_h \Delta_h y(t) - g)]_n &= h^p \left[\sum_{j=0}^s h^j (D_h^\ell)^3 \Delta_h q_{s-j}(t) \right]_n \\
 &= h^{p+s-3} [\Delta_h Q_0(t)]_n ; \quad n \geq r
 \end{aligned}$$

para alguma função $Q_0(t) \in C^0[a, b]$.

2.5 - Convergência

Apresentamos a seguir dois teoremas que relacionam a ordem de consistência e a zero-estabilidade ou a zero-estabilidade fraca do método ϕ_h com a ordem de convergência.

Teorema 2.5.1:

Suponha que a discretização ϕ_h é consistente de ordem p com uma expansão assintótica de $s+1$ termos, com $0 \leq s \leq 2$, e que os valores iniciais (ou métodos) são convergentes de ordem $p+s-2$. Então, se o método é zero-estável, ele é convergente de ordem $p+s-2$.

Prova:

Temos que o algoritmo $\phi_h y = 0$ é dado por:

$$h\Psi_h y - g = 0$$

Pré-multiplicando por $(D_h^\ell)^2$ obtemos:

$$h(D_h^\ell)^2 \Psi_h y - (D_h^\ell)^2 g = 0$$

Usando a decomposição de Ψ_h dada por (2.3.6) e lembrando que a aplicação de $(D_h^\ell)^2$ a essa decomposição resulta em (2.3.7), podemos escrever:

$$h\left[\frac{1}{h}(A_h K_h^{(1)} + hB_h^k)\right]y - (D_h^\ell)^2 g = 0$$

Assim, obtemos:

$$(2.5.1) \quad (A_h K_h^{(1)} + hB_h^k)y = (D_h^\ell)^2 g$$

Por outro lado, a consistência suposta mais a convergência dos valores iniciais, nos permitem escrever:

$$[h^p \Delta_h y(t) - g]_n = \begin{cases} h^2 [\Delta_h y(t) - \tilde{y}]_n = h^{p+s} [\Delta_h \tilde{q}(t)]_n & ; \quad n < r \\ h^p \sum_{j=0}^s h^j [\Delta_h q_{s-j}(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases}$$

Pré-multiplicando por $(D_h^\ell)^2$ e usando os mesmos argumentos com os quais obtivemos (2.5.1), resulta em

$$\begin{aligned} & [(A_h K_h^{(1)} + h B_h^k) \Delta_h y(t)]_n - [(D_h^\ell)^2 g]_n = \\ & = \begin{cases} h^{p+s} [(D_h^\ell)^2 \Delta_h \tilde{q}(t)]_n & ; \quad n < r \\ h^p \sum_{j=0}^s h^j [(D_h^\ell)^2 \Delta_h q_{s-j}(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases} \end{aligned}$$

De acordo com (2.4.4), temos:

$$(2.5.2) \quad [(A_h K_h^{(1)} + h B_h^k) \Delta_h y(t)]_n = (D_h^\ell)^2 g + h^{p+s-2} [\Delta_h Q_0(t)]_n$$

para $0 \leq n \leq N$.

Observe que para $0 \leq n < r$, identificamos

$$[h^2 (D_h^\ell)^2 \Delta_h \tilde{q}(t)]_n \equiv [\Delta_h Q_0(t)]_n$$

Subtraindo (2.5.2) de (2.5.1), obtemos:

$$[A_h K_h^{(1)} (y - \Delta_h y(t)) + h B_h^k (y - \Delta_h y(t))]_n = -h^{p+s-2} [\Delta_h Q_0(t)]_n$$

ou

$$[y - \Delta_h y(t)]_n = [(A_h K_h^{(1)})^{-1} \{h B_h^k (\Delta_h y(t) - y) - h^{p+s-2} \Delta_h Q_0(t)\}]_n$$

Tomando em módulo ambos os membros, obtemos

$$| [y - \Delta_h y(t)]_n | \leq h \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} | (K_h^{(1)})_{ii}^{-1} | | | A_h^{-1} | |_\infty \max_{0 \leq i, j \leq N} | (B_h^k)_{ij} | \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^n | [y - \Delta_h y(t)]_j | \right\} + h^{p+s-2} \max_{0 \leq i \leq N} | (K_h^{(1)})_{ii}^{-1} | | | A_h^{-1} | |_\infty$$

$$\max_{0 \leq j \leq N} | [\Delta_h Q_0(t)]_j |$$

Note que supomos $\max_{a \leq s \leq t \leq b} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s) \right|$ uniformemen-

te limitada tal que $\max_{0 \leq i, j \leq N} | (B_h^k)_{ij} |$ é uniformemente limitada.

Lembrando a definição de zero-estabilidade, observamos que existem constantes C_1 e C_2 , independentes de h , tais que

$$| [y - \Delta_h y(t)]_n | \leq h C_1 \sum_{j=0}^n | [y - \Delta_h y(t)]_j | + C_2 h^{p+s-2}$$

Para h suficientemente pequeno, obtemos:

$$| [y - \Delta_h y(t)]_n | \leq \frac{h C_1}{1 - h C_1} \sum_{j=0}^{n-1} | [y - \Delta_h y(t)]_j | + \frac{C_2}{1 - h C_1} h^{p+s-2}$$

A aplicação do Lema 1.1.1, fornece:

$$| [y - \Delta_h y(t)]_n | \leq \left\{ \frac{h C_1}{1 - h C_1} | [y - \Delta_h y(t)]_0 | + \frac{C_2}{1 - h C_1} h^{p+s-2} \right\} \exp \left[\frac{C_1 N h}{1 - h C_1} \right]$$

Assim, podemos concluir que convergência de ordem $p+s-2$ é obtida.

Teorema 2.5.2:

Suponha que a discretização ϕ_h é consistente de ordem p com uma expansão assintótica de $s+1$ termos com $0 \leq s \leq 3$, e que os valores iniciais (ou métodos) são convergentes de ordem $p+s-3$. Então, se o método é fracamente zero-estável, ele é convergente de ordem $p+s-3$.

Prova:

Consideremos a discretização ϕ_h com a decomposição de ψ_h dada por (2.3.8). Segundo (2.3.9), temos que a pré-multiplicação por $(D_h^\ell)^3$ resulta em

$$(2.5.3) \quad \frac{1}{h} [\mathcal{A}_h K_h^{(1)} + h\beta_h K_h^{(2)} + h^2 \mathcal{C}_h^k] y = (D_h^\ell)^3 g$$

Combinando consistência e convergência dos valores iniciais, temos:

$$[h\psi_h \Delta_h y(t) - g]_n = \begin{cases} h^{p+s-1} [\Delta_h \tilde{q}(t)]_n & ; \quad n < r \\ h^p \sum_{j=0}^s h^j [\Delta_h q_{s-j}(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases}$$

Pré-multiplicando por $(D_h^\ell)^3$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [(\mathcal{A}_h K_h^{(1)} + h\beta_h K_h^{(2)} + h^2 \mathcal{C}_h^k) \Delta_h y(t)]_n - [(D_h^\ell)^3 g]_n = \\ & = \begin{cases} h^{p+s-1} [(D_h^\ell)^3 \Delta_h \tilde{q}(t)]_n & ; \quad n < r \\ h^p \sum_{j=0}^s h^j [(D_h^\ell)^3 \Delta_h q_{s-j}(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases} \end{aligned}$$

De acordo com (2.4.5) temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [(\mathcal{A}_h K_h^{(1)} + h\beta_h K_h^{(2)} + h^2 \mathcal{G}_h^k) \Delta_h y(t)]_n - [(D_h^\ell)^3 g]_n = \\ & = \begin{cases} h^{p+s-4} [\Delta_h Q_0(t)]_n & ; \quad n < r \\ h^{p+s-3} [\Delta_h Q_0(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases} \end{aligned}$$

onde, como no teorema 2.5.1, identificamos:

$$[h^3 (D_h^\ell)^3 \Delta_h \tilde{q}(t)]_n \equiv [\Delta_h Q_0(t)]_n \quad ; \quad 0 \leq n < r$$

Portanto:

$$\begin{aligned} & [(\mathcal{A}_h K_h^{(1)} + h\beta_h K_h^{(2)} + h^2 \mathcal{G}_h^k) \Delta_h y(t)]_n = h [(D_h^\ell)^3 g]_n + \\ (2.5.4) \quad & + \begin{cases} h^{p+s-3} [\Delta_h Q_0(t)]_n & ; \quad n < r \\ h^{p+s-2} [\Delta_h Q_0(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases} \end{aligned}$$

Subtraindo (2.5.4) de (2.5.3), obtemos:

$$\begin{aligned} & [\mathcal{A}_h K_h^{(1)} (y - \Delta_h y(t)) + (h\beta_h K_h^{(2)} + h^2 \mathcal{G}_h^k) (y - \Delta_h y(t))]_n = \\ & = \begin{cases} -h^{p+s-3} [\Delta_h Q_0(t)]_n & ; \quad n < r \\ -h^{p+s-2} [\Delta_h Q_0(t)]_n & ; \quad n \geq r \end{cases} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & [y - \Delta_h y(t)]_n = [(\mathcal{A}_h K_h^{(1)})^{-1} h (\beta_h K_h^{(2)} + h \mathcal{G}_h^k) (\Delta_h y(t) - y)]_n - \\ & - \begin{cases} [(\mathcal{A}_h K_h^{(1)})^{-1} \Delta_h Q_0(t)]_n h^{p+s-3} & ; \quad n < r \\ [(\mathcal{A}_h K_h^{(1)})^{-1} \Delta_h Q_0(t)]_n h^{p+s-2} & ; \quad n \geq r \end{cases} \end{aligned}$$

Lembrando que β_h é uma matriz em banda de largura $k+l+1$, tomando em módulo ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & |[y - \Delta_h y(t)]_n| \leq \\
 & \leq h \max_{0 \leq i \leq N} |(K_h^{(1)})_{ii}^{-1}| \{ (k+l+1) \max_{0 \leq i, j \leq N} |(\mathcal{A}_h^{-1})_{ij}| \\
 & \max_{0 \leq i, j \leq N} |(\beta_h)_{ij}| \max_{0 \leq i \leq N} |(K_h^{(2)})_{ii}| + \\
 & + h \|\mathcal{A}_h^{-1}\|_{\infty} \max_{0 \leq i, j \leq N} |(\mathcal{C}_h^k)_{ij}| \sum_{j=0}^n |[\Delta_h y(t) - y]_j| + \\
 & + h^{p+s-3} \max_{0 \leq i \leq N} |(K_h^{(1)})_{ii}^{-1}| \{ \sum_{j=0}^{r-1} |(\mathcal{A}_h^{-1})_{nj}| [\Delta_h Q_0(t)]_j + \\
 & + h \sum_{j=r}^n |(\mathcal{A}_h^{-1})_{nj}| [\Delta_h Q_0(t)]_j \}
 \end{aligned}$$

Agora, supondo que $\max_{a \leq s \leq t \leq b} |\frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t, s)|$ é uniformemente

limitada tal que $\max_{0 \leq i, j \leq N} |(\mathcal{C}_h^k)_{ij}|$ é uniformemente limitada, e lembrando a definição de zero-estabilidade fraca (veja (2.4.2) e (2.4.3)), observamos que existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$|[y - \Delta_h y(t)]_n| \leq h C_1 \sum_{j=0}^n |[y - \Delta_h y(t)]_j| + C_2 h^{p+s-3}$$

Assim, para h suficientemente pequeno temos, usando os argumentos finais da prova do Teorema 2.5.1, que convergência de ordem $p+s-3$ é obtida.

2.6 - A condição da raiz

Na prática, a análise da estabilidade de um determinado método pode ser feita com certa facilidade se relacionarmos a idéia de A_h^{-1} e $\mathcal{A}_h^{-1}$ limitadas com a condição da raiz, isto é, a exigência de que determinado polinômio tenha suas raízes dentro ou sobre o círculo unitário. Tais relações, que estão bastante detalhadas em McKee (1979), serão dadas a seguir.

Primeiramente apresentamos alguns requisitos necessários.

À matriz A_h de (2.3.7) associamos as m matrizes companheiras:

$$(2.6.1) \quad G_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{\alpha_0^{(j)}}{\alpha_k^{(j)}} & -\frac{\alpha_1^{(j)}}{\alpha_k^{(j)}} & \dots & -\frac{\alpha_{k-1}^{(j)}}{\alpha_k^{(j)}} \end{pmatrix}; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

e definimos

$$(2.6.2) \quad G_{A_h} = G_m G_{m-1} \dots G_1$$

Definimos $G_{\mathcal{A}_h}$ de modo semelhante.

Teorema 2.6.1:

Existe M , independente de $h = (b-a)/N$, tal que

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq M$$

se e somente se todos os auto-valores de G_{A_h} estão estritamente dentro do círculo unitário.

Teorema 2.6.2:

Existe M , independente de $h = (b-a)/N$, tal que

$$\max_{0 \leq i, j \leq N} |(A_h^{-1})_{ij}| \leq M$$

se e somente se os auto-valores de G_{A_h} estão estritamente dentro ou sobre o círculo unitário, sendo que os que estão sobre o círculo unitário devem ser simples.

Observação 2.6.1:

Se ao calcularmos os auto-valores de G_{A_h} encontrarmos auto-valores (simples) sobre o círculo unitário, devemos então calcular os auto-valores de G_{A_h} e verificar se estes satisfazem o Teorema 2.6.2. Nesse caso, diremos que o método é fracamente zero-estável.

2.7 - Exemplos

Apresentamos agora alguns métodos bem conhecidos

com as correspondentes análises da estabilidade e, portanto, convergência.

Exemplo 2.7.1:

Consideremos a regra do trapézio para resolver (2.1.1), sujeita à condição (2.1.2). Temos então:

$$\phi_h y = 0 \quad ; \quad \text{onde}$$

$$[\phi_h y]_n = h \left[\frac{1}{2} k(t_{n+1}, t_0) y_0 + \sum_{j=1}^n k(t_{n+1}, t_j) y_j \right] - f_{n+1}$$

$$0 \leq n \leq N$$

ou na forma matricial

$$h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} k_{10} & & & & \\ \frac{1}{2} k_{20} & k_{21} & & & \\ \frac{1}{2} k_{30} & k_{31} & k_{32} & & \\ \frac{1}{2} k_{40} & k_{41} & k_{42} & k_{43} & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

É interessante notar que, neste caso, não precisamos de valores iniciais.

A análise da estabilidade deve ser feita a partir de A_h , de modo que seguiremos o roteiro da seção 2.3.

Usando a decomposição (2.3.3) podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \psi_h &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \\ & & & \frac{1}{2} & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00} & & & & \\ & k_{11} & & & \\ & & k_{22} & & \\ & & & k_{33} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} + \\
 &+ h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} \cdot 2 & 1 & & \\ & & \frac{1}{2} \cdot 3 & 2 & 1 \\ & & & \frac{1}{2} \cdot 4 & 3 & 2 & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k'_{00} & & & & \\ & k'_{11} & & & \\ & & k'_{22} & & \\ & & & k'_{33} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} + \\
 &+ h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} k''(\zeta_0^0, t_0) & & & & \\ \frac{1}{2} \cdot 2^2 k''(\zeta_0^1, t_0) & k''(\zeta_1^1, t_1) & & & \\ \frac{1}{2} \cdot 3^2 k''(\zeta_0^2, t_0) & 2^2 k''(\zeta_1^2, t_1) & k''(\zeta_2^2, t_2) & & \\ \frac{1}{2} \cdot 4^2 k''(\zeta_0^3, t_0) & 3^2 k''(\zeta_1^3, t_1) & 2^2 k''(\zeta_2^3, t_2) & k''(\zeta_3^3, t_3) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Note que, nesse caso, E_r é a matriz nula; e que o fator de repetição de linhas de $U_h^{(0)}$ é $l = 1$.

Assim:

$$D_h^1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Agora, $A_h = (hD_h^1)^2 U_h^{(1)}$. Portanto:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 2 & 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{4} \cdot 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Neste caso, $m = 1$ e $G_{A_h} = G_1 = 0$. Assim, G_{A_h} possui apenas um auto-valor que é $\lambda_1 \equiv 0$. Logo, as raízes de G_{A_h} estão no interior do círculo unitário, o que implica $\|A_h^{-1}\|_{\infty} \leq M$ (Teorema 2.6.1). Portanto, a regra do trapézio é zero-estável e convergente. Isto é um contraste surpreendente com a regra do trapézio para resolver (2.1.1) com $k(t,t) \neq 0$; a regra, nesse caso, é somente fracamente zero-estável, tendo uma raiz igual a -1 , e embora convergente (Holyhead e McKee, 1976), não tem região de estabilidade absoluta (Jones e McKee).

Exemplo 2.7.2:

Consideremos agora a aplicação da regra de Simpson finalizada alternadamente por ela mesma e pela regra $3/8$ de Simpson.

Em forma matricial, temos:

$$h \begin{pmatrix} h k_{00}^{(1)} & & & & \\ \frac{1}{3} k_{20} & \frac{4}{3} k_{21} & & & \\ \frac{3}{8} k_{30} & \frac{9}{8} k_{31} & \frac{9}{8} k_{32} & & \\ \frac{1}{3} k_{40} & \frac{4}{3} k_{41} & \frac{2}{3} k_{42} & \frac{4}{3} k_{43} & \\ \frac{1}{3} k_{50} & \frac{4}{3} k_{51} & (\frac{1}{3} + \frac{3}{8}) k_{52} & \frac{9}{8} k_{53} & \frac{9}{8} k_{54} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 k_{00}^{(1)} \tilde{y}_0 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

A decomposição de ψ_h mostra que $U_h^{(0)}$ tem fator de repetição de linhas $\ell = 1$. Note que, nesse caso, temos um valor inicial. Portanto, $r = 1$. Assim

$$D_h^1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & -1 & 1 & \\ & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & \vdots & & & \ddots \\ & \vdots & & & & \ddots \\ & \vdots & & & & & \ddots \\ & \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Desde que $A_h = (hD_h^1)^2 (E_1 + U_h^{(1)})$, podemos escrever:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{3} \cdot 2 & \frac{4}{3} & & & \\ \frac{3}{8} \cdot 3 & \frac{9}{8} \cdot 2 & \frac{9}{8} & & \\ \frac{1}{3} \cdot 4 & \frac{4}{3} \cdot 3 & \frac{2}{3} \cdot 2 & \frac{4}{3} & \\ \frac{1}{3} \cdot 5 & \frac{4}{3} \cdot 4 & \frac{17}{24} \cdot 3 & \frac{9}{8} \cdot 2 & \frac{9}{8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & & & & \\ -\frac{5}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{9}{8} & & & & & \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{4}{3} & & & & \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{9}{8} & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{4}{3} & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{9}{8} & \\ \vdots & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Note que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

e portanto $m = 2$, como esperado

Assim, temos as matrizes:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{16} & -\frac{5}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{27} & -\frac{14}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix}$$

Assim:

$$G_{A_h} = G_2 \cdot G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{16} & -\frac{5}{8} & \frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{24} & \frac{5}{36} & -\frac{19}{72} \end{pmatrix}$$

com auto-valores: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -0.7384167$ e $\lambda_4 = 0.150472$; indicando zero-estabilidade e, em consequência, convergência.

Mais uma vez, é de interesse notar que este método

para resolver (2.1.1) com $k(t,t) \neq 0$ é decididamente zero-ins_utável e, portanto, não convergente (Linz, 1969); ou por uma aplicação direta dos resultados de Holyhead, McKee e Taylor (1975).

Exemplo 2.7.3:

Neste exemplo, consideramos novamente a regra de Simpson como fórmula principal repetida, mas agora o método é iniciado pela aplicação alternada da regra de Simpson e pela regra 3/8 de Simpson.

Assim, em forma matricial, temos:

$$h \begin{pmatrix} h k_{00}^{(1)} & & & & \\ \frac{1}{3} k_{20} & \frac{4}{3} k_{21} & & & \\ \frac{3}{8} k_{30} & \frac{9}{8} k_{31} & \frac{9}{8} k_{32} & & \\ \frac{1}{3} k_{40} & \frac{4}{3} k_{41} & \frac{2}{3} k_{42} & \frac{4}{3} k_{43} & \\ \frac{3}{8} k_{50} & \frac{9}{8} k_{51} & \frac{9}{8} k_{52} & (\frac{3}{8} + \frac{1}{3}) k_{53} & \frac{4}{3} k_{54} \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 k_{00}^{(1)\sim} y_0 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

A decomposição de ψ_h mostra que $U_h^{(0)}$ tem fator de repetição de linhas $\ell = 2$. Note que, nesse caso, temos também apenas um valor inicial. Portanto, novamente $r = 1$.

Assim:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \frac{1}{3} \cdot 2 \quad \frac{4}{3} \\
 \frac{3}{8} \cdot 3 \quad \frac{9}{8} \cdot 2 \quad \frac{9}{8} \\
 \frac{1}{3} \cdot 4 \quad \frac{4}{3} \cdot 3 \quad \frac{2}{3} \cdot 2 \quad \frac{4}{3} \\
 \frac{3}{8} \cdot 5 \quad \frac{9}{8} \cdot 4 \quad \frac{9}{8} \cdot 3 \quad \frac{17}{24} \cdot 2 \quad \frac{4}{3} \\
 \frac{1}{3} \cdot 6 \quad \frac{4}{3} \cdot 5 \quad \frac{2}{3} \cdot 4 \quad \frac{4}{3} \cdot 3 \quad \frac{2}{3} \cdot 2 \quad \frac{4}{3} \\
 \frac{3}{8} \cdot 7 \quad \frac{9}{8} \cdot 6 \quad \frac{9}{8} \cdot 5 \quad \frac{17}{24} \cdot 4 \quad \frac{4}{3} \cdot 3 \quad \frac{2}{3} \cdot 2 \quad \frac{4}{3} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \\
 \frac{9}{8} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{9}{8} \\
 -\frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \\
 -\frac{3}{2} \quad -\frac{9}{4} \quad 0 \quad \frac{17}{12} \quad \frac{4}{3} \\
 0 \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad 0 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \\
 0 \quad 0 \quad -\frac{9}{8} \quad -\frac{17}{12} \quad 0 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{4}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad 0 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad 0 \quad \frac{4}{3} \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

Assim

$$G_{\mathcal{A}_h} = G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cujos auto-valores são: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = \frac{-1 + \sqrt{3} i}{2}$ e

$\lambda_4 = \frac{-1 - \sqrt{3} i}{2}$, todos com módulo 1. Logo, as raízes de $G_{\mathcal{A}_h}$

estão todas sobre o círculo unitário, o que implica

$\max_{0 \leq i, j \leq N} |(\mathcal{A}_h^{-1})_{ij}| \leq M$ (Teorema 2.6.2). Assim, o método é fraca

mente zero-estável e, portanto, convergente.

Note que, neste exemplo, temos que a largura da banda de A_h é $k+1 = 3$ e que a largura da banda de $\mathcal{A}_h$ é $5 = k+2+1 = k+l+1$.

2.8 - Resultados numéricos

Antes de darmos os resultados numéricos, observe-mos que a aplicação direta dos métodos dados na seção 2.7 a equações da forma (2.1.1), sujeita a (2.1.2), aparentemente faz com que os valores de $k_{n+1,n}^{-1}$ não permaneçam limitados quando $h \rightarrow 0$ (isto é, para valores pequenos de h) desde que, nesses casos $k_{n+1,n}$ são valores muito pequenos. De fato,

$k_{n+1,n} \sim O(h)$ quando $h \rightarrow 0$. Mas o numerador de

$$(f_{n+1} - h \sum_{j=0}^{n-1} w_{n+1,j} k_{n+1,j} y_j) / h w_{n+1,n} k_{n+1,n}$$

com $O(h^2)$ também tende a zero. Assim, y_n permanece um número limitado como já era de se esperar pela análise da convergência. É lógico que na prática isto pode causar um mau condicionamento, exigindo os cálculos em precisão dupla quando h é particularmente pequeno.

2.8.1 - Consideremos a seguinte equação

$$\int_0^t \sin(t-s)y(s)ds = 1 - \cos t \quad ; \quad 0 \leq s \leq t \leq 1$$

cuja solução exata é $y(s) = 1$. A aplicação dos métodos dos exemplos 2.7.1, 2.7.2 e 2.7.3 resultam, respectivamente, as tabelas 1, 2 e 3.

TABELA 1

Erro		
h	t = 0,5	t = 1,0
0,1	$0,83 \cdot 10^{-3}$	$0,83 \cdot 10^{-3}$
0,01	$0,83 \cdot 10^{-5}$	$0,83 \cdot 10^{-5}$
0,05	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$
0,005	$0,21 \cdot 10^{-5}$	$0,21 \cdot 10^{-5}$

TABELA 2

Erro		
h	t = 0.5	t = 1.0
0.1	$0.45 \cdot 10^{-6}$	$0.32 \cdot 10^{-5}$
0.01	$0.33 \cdot 10^{-9}$	$0.33 \cdot 10^{-9}$
0.05	$0.20 \cdot 10^{-6}$	$0.21 \cdot 10^{-6}$
0.005	$0.21 \cdot 10^{-10}$	$0.22 \cdot 10^{-10}$

TABELA 3

Erro		
h	t = 0.5	t = 1.0
0.1	$0.21 \cdot 10^{-5}$	$0.20 \cdot 10^{-5}$
0.01	$0.21 \cdot 10^{-9}$	$0.21 \cdot 10^{-9}$
0.05	$0.13 \cdot 10^{-6}$	$0.13 \cdot 10^{-6}$
0.005	$0.14 \cdot 10^{-10}$	$0.15 \cdot 10^{-10}$

2.8.2 - Consideremos agora a seguinte equação

$$\int_0^t \text{sen}(t-s)y(s)ds = 0.5(e^{-t} - \cos t + \text{sen} t) \quad ;$$

$$0 \leq s \leq t \leq 1$$

cuja solução exata é $y(t) = e^{-t}$. Novamente, a aplicação dos métodos dos exemplos 2.7.1, 2.7.2 e 2.7.3 resultam as tabelas 4, 5 e 6.

TABELA 4

Erro		
h	t = 0.5	t = 1.0
0.1	$0.10 \cdot 10^{-2}$	$0.61 \cdot 10^{-3}$
0.01	$0.10 \cdot 10^{-4}$	$0.61 \cdot 10^{-5}$
0.05	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$
0.005	$0.25 \cdot 10^{-5}$	$0.15 \cdot 10^{-5}$

TABELA 5

Erro		
h	t = 0.5	t = 1.0
0.1	$0.68 \cdot 10^{-5}$	$0.58 \cdot 10^{-5}$
0.01	$0.74 \cdot 10^{-9}$	$0.68 \cdot 10^{-9}$
0.05	$0.43 \cdot 10^{-6}$	$0.41 \cdot 10^{-6}$
0.005	$0.35 \cdot 10^{-10}$	$0.43 \cdot 10^{-10}$

TABELA 6

Erro		
h	t = 0.5	t = 1.0
0.1	$0.68 \cdot 10^{-5}$	$0.58 \cdot 10^{-5}$
0.01	$0.74 \cdot 10^{-9}$	$0.68 \cdot 10^{-9}$
0.05	$0.43 \cdot 10^{-6}$	$0.41 \cdot 10^{-6}$
0.005	$0.35 \cdot 10^{-10}$	$0.43 \cdot 10^{-10}$

Como pode-se notar, essas tabelas confirmam a ordem de convergência esperada, isto é, ordem 2 para a regra do trapézio e ordem 4 para os métodos dos exemplos 2.7.2 e 2.7.3.

2.9 - Conclusão

Neste capítulo mostramos como métodos de passo múltiplo para equações integrais de Volterra com $k(t,t) \equiv 0$ devem ser modificados tal que eles sejam bem definidos. Provamos a convergência para métodos zero-estáveis e fracamente zero-estáveis. Alguns exemplos para ilustrar a análise da zero-estabilidade e da zero-estabilidade fraca foram dados e resultados numéricos para verificar a veracidade dos Teoremas foram apresentados.

O objetivo original desse trabalho foi o de estudar métodos de passo múltiplo para equações integrais de Volterra de 1ª espécie com

$$\frac{\partial^n k}{\partial t^n}(t,t) \equiv 0 \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, q$$

para algum inteiro q .

Entretanto, encontramos que métodos análogos a (2.2.1) falham na convergência e parece não existir um caminho óbvio de como modificá-los, de tal modo a se obter convergência. Uma análise (particular) da dificuldade em provar a convergência encontra-se no Apêndice I.

Por outro lado, existe um meio de se resolver o citado problema, isto é, se o núcleo $k(t,s)$ e suas q deriva-

das parciais são identicamente nulas quando $t = s$, podemos usar os métodos apresentados na seção 2.7; para isso basta diferenciar o problema contínuo q vezes antes de aplicá-los.

É claro que, apesar da convergência de métodos de discretização para equações integrais de Volterra de 1ª espécie não singulares ser agora bem conhecida, é sempre aconselhável, quando possível, reduzir uma equação de 1ª espécie a uma de 2ª espécie, onde todo método linear de passo múltiplo consistente é convergente (Linz (1967)).

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UMA PARTICULAR EQUAÇÃO INTEGRAL SINGULAR NÃO LINEAR DE VOLTERRA DE 2ª ESPÉCIE

3.1 - Introdução

Em um voo estável de uma aeronave, projétil ou outro corpo na atmosfera, o bordo de ataque da superfície dianteira permanece laminar mesmo a altas velocidades Mach. Lighthill (1950), equacionando a transferência de calor para a superfície do projétil com a radiação emitida por ele, deduziu para o importante caso de altas velocidades Mach a equação integral singular não linear de Volterra de 2ª espécie, que em forma não dimensional é apresentada por

$$(3.1.1) \quad F(z)^4 = - \frac{1}{2z^{1/2}} \int_0^z \frac{F'(z_1)}{(z^{3/2} - z_1^{3/2})^{1/3}} dz_1 ; F(0) = 1$$

Aqui $F(z)$ é uma medida não dimensional da temperatura da superfície da parede sobre a temperatura do fluxo principal, e é uma função de variável não dimensional z que mede a distância a partir da ogiva.

Lighthill (1950) obteve, através de expansão em série, duas soluções: uma para z pequeno e outra para z grande demonstrando assim a existência de solução. Ele expôs essas duas curvas sobrepostas, isto é, no mesmo gráfico e argumentou

que eram suficientemente corretas para prever a temperatura na superfície da parede.

De acordo com Noble (1964), usando fórmula de inversão do tipo Abel e integração duas vezes, não é difícil mostrar que a equação (3.1.1) pode ser reescrita numa forma mais conveniente, isto é

$$(3.1.2) \quad F(w) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^w \frac{z[F(z)]^4}{(w^{3/2} - z^{3/2})^{2/3}} dz$$

O objetivo do presente capítulo é o de apresentar um método numérico do tipo integração produto para se determinar solução numérica de (3.1.2) e demonstrar que o método proposto é convergente. Reduzindo-se suficientemente a amplitude da malha, pode-se obter resultados tão precisos quanto se deseje. Um Lema do tipo de Gronwall é demonstrado e isso nos permite uma prova elegante da convergência.

3.2 - Método numérico

Consideremos a equação integral de Volterra

$$(3.2.1) \quad y(t) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^t \frac{s[y(s)]^4}{(t^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds ; t \in [0,1]$$

O método numérico que propomos aqui para obtermos solução numérica de (3.2.1) é o de substituir $[y(s)]^4$ por $[y(t_j)]^4$ para $s \in [t_j, t_{j+1}]$.

Seja $t = t_i = ih$ onde h é a amplitude da malha

e é definida tal que $Nh = t_N = 1$ para algum inteiro N .

Definimos o operador restrição

$$\Delta_h: C[0,1] \rightarrow R^{N+1}$$

tal que

$$\Delta_h \phi(t) = (\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_N))^t.$$

Podemos reescrever a equação (3.2.1) na forma:

$$(3.2.2) \quad y(t_i) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[y(s)]^4}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

Se y_i denota uma aproximação para $y(t_i)$ em $t = t_i$, obtemos para $i = 1, 2, \dots, N$ que:

$$y_i = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h \sum_{j=0}^{i-1} y_j^4 \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

Isso nos permite definir formalmente o algoritmo de discretização $\phi_h y = 0$ como segue

$$(3.2.3) \quad [\phi_h y]_i = \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_i = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h \sum_{j=0}^{i-1} w_{ij} y_j^4 \end{cases} ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

onde

$$(3.2.4) \quad w_{ij} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

Observe que o algoritmo de discretização (3.2.3) fornece a solução aproximada y_i , $1 \leq i \leq N$ em um ponto de cada vez.

Usando notação matricial, podemos escrever:

$$(3.2.5) \quad \phi_h y = y - e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h A_N y^4$$

onde $y^4 = (y_0^4, y_1^4, \dots, y_N^4)^t$

$$e = (1, 1, \dots, 1)^t$$

e

$$(A_N)_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & , \quad i > j \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

O método (3.2.3) é um método integração produto simples. Métodos de ordem mais elevada podem ser facilmente obtidos substituindo-se $[y(s)]^4$ por algum polinômio de interpolação de ordem mais elevada. Por exemplo, podemos substituir $[y(s)]^4$ em (3.2.2) por

$$\frac{1}{h} \{ (t_{j+1} - s)[y(t_j)]^4 - (t_j - s)[y(t_{j+1})]^4 \}$$

para $s \in [t_j, t_{j+1}]$ e o método resultante é de ordem 2. Entretanto, se um polinômio de interpolação de ordem $n(\geq 2)$, digamos

$$(3.2.6) \quad \sum_{k=-1}^{n-1} \prod_{\substack{\ell=-1 \\ \ell \neq k}}^{n-1} \frac{(t_{j-\ell} - s)}{(t_{j-\ell} - t_{j-k})} [y(t_{j-k})]^4$$

é usado, então surgem problemas quando tentamos aproximar integrais da forma

$$(3.2.7) \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[y(s)]^4}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

para j pequeno, desde que aproximações para $y(-h)$, $y(-2h)$, ... são necessárias.

Para essas integrais, estes problemas podem ser evitados escolhendo-se polinômios de interpolação apropriados sobre os pontos $t_0, t_1, \dots, t_n$; os valores de $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}$ evidentemente são exigidos como dados. Para j suficientemente grande, isto é, $j > n-1$ podemos voltar a usar (3.2.6) para aproximar (3.2.7). A análise desses métodos de ordem mais elevada não é essencialmente mais difícil do que o caso de ordem simples, mas tem uma notação mais complexa. Assim, esses métodos serão analisados no próximo capítulo. Neste capítulo, consideramos somente o algoritmo de discretização (3.2.3).

O próximo lema irá nos auxiliar na demonstração da convergência do método proposto. Assim

3.3 - Um Lema de Gronwall no caso discreto

Lema 3.3.1:

Se x_j ; $j = 0, 1, \dots, N$ é uma sequência de números reais, satisfazendo

$$|x_0| \leq \delta$$

$$(3.3.1) \quad |x_i| \leq hM \left\{ \frac{|x_0|}{i} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} |x_j| \right\} + \delta ;$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

onde $M > 0$ é em geral independente de $h = (1/N)$; $\delta > 0$,

então

$$|x_i| \leq \delta [1 + hM + 2M + 2 h^{3/2} M^2 + \frac{2}{3} h^{3/2} M^3 B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \\ + \frac{2}{3} M^2 B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \frac{8\sqrt{3}}{27} \pi h M^3 B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})] e^{\left[\frac{8\sqrt{3}}{27} \pi M^3 B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right]}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

(Note que a convenção usual de $\sum_{j=1}^k \equiv 0$ se $k < 1$ será utilizada aqui).

Prova:

Temos que:

$$|x_k| \leq hM \left\{ \frac{|x_0|}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} |x_i| \right\} + \delta, \quad k=1, 2, \dots, N \\ \leq \frac{hM}{k} |x_0| + hM \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} \left[hM \frac{|x_0|}{i} + \right. \\ \left. + hM \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} |x_j| + \delta \right] + \delta, \quad \text{usando (3.3.1).}$$

Portanto

$$|x_k| \leq hM \frac{|x_0|}{k} + (hM)^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} |x_0| + \\ + (hM)^2 \sum_{i=2}^{k-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{ij}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3} (i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} |x_j| + \\ + \delta hM \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} + \delta$$

Fazendo mudança de somatório, obtemos

$$\begin{aligned}
 |x_k| &\leq \frac{hM}{k} |x_0| + h^{3/2} M^2 \left\{ h^{1/2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} \right\} |x_0| \\
 (3.3.2) \quad &+ (hM)^2 \sum_{j=1}^{k-2} \left\{ \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{i}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3} (i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} \right\} |x_j| + \\
 &+ \delta M \left\{ h \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} \right\} + \delta
 \end{aligned}$$

Analisemos agora cada uma das expressões entre chaves da desigualdade (3.3.2).

Temos que

$$\begin{aligned}
 h^{1/2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} &\leq h^{1/2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i^{1/2}}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3}} = \\
 &= h \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t_i^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_i^{3/2})^{2/3}} \leq \int_0^{t_k} \frac{s^{1/2}}{(t_k^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds = 2t_k^{1/2}
 \end{aligned}$$

Note que, na última desigualdade, consideramos o somatório como uma soma de Riemann (parcial). Para calcular a integral, fizemos as seguintes mudanças de variáveis:

$$1^\circ) \quad s = t_k u$$

$$2^\circ) \quad 1 - u^{3/2} = z$$

Agora

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{i}{(k^{3/2} - i^{3/2})^{2/3} (i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} = \\
 (3.3.4) \quad &= h \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{t_i}{(t_k^{3/2} - t_i^{3/2})^{2/3} (t_i^{3/2} - t_j^{3/2})^{2/3}} \leq \\
 &\leq t_k^{1/2} h \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{t_i^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_i^{3/2})^{2/3} (t_i^{3/2} - t_j^{3/2})^{2/3}} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq t_k^{1/2} \int_{t_j}^{t_k} \frac{s^{1/2}}{(t_k^{3/2} - s^{3/2})^{2/3} (s^{3/2} - t_j^{3/2})^{2/3}} ds = \\
 (3.3.4) \quad & = \frac{2}{3} \frac{t_k^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \int_0^1 (1-u)^{1/3-1} u^{1/3-1} du = \\
 & = \frac{2}{3} \frac{t_k^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (\text{Def. 1.2.1})
 \end{aligned}$$

Aqui fizemos a seguinte mudança de variável:

$$s^{3/2} - t_j^{3/2} = u(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})$$

Observe que, na última desigualdade da expressão (3.3.4), consideramos o somatório como a soma de duas somas de Riemann (parciais) (veja figura 1), onde a área achuriada representa o somatório.

figura 1

Finalmente

$$(3.3.5) \quad h \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t_i^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_i^{3/2})^{2/3}} \leq h t_k^{1/2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t_i^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_i^{3/2})^{2/3}} \leq$$

$$(3.3.5) \quad \leq t_k^{1/2} \int_0^{t_k} \frac{s^{1/2}}{(t_k^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds = 2t_k, \text{ usando (3.3.3).}$$

Substituindo (3.3.3), (3.3.4) e (3.3.5) em (3.3.2), obtemos:

$$\begin{aligned} |x_k| &\leq \frac{hM}{k} |x_0| + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2} |x_0| + \\ &+ \frac{2}{3} hM^2 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} |x_j| + \\ &+ 2\delta M t_k + \delta \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (3.3.6) \quad |x_k| &\leq \frac{2}{3} hM^2 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} |x_j| + \\ &+ \delta (hM + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2} + 2Mt_k + 1); \text{ desde que} \end{aligned}$$

$$|x_0| \leq \delta \quad \text{e} \quad \frac{hM}{k} |x_0| \leq hM |x_0| \leq hM\delta$$

Substituindo o valor de $|x_j|$ dado por (3.3.1) com i trocado por j), em (3.3.6), obtemos

$$\begin{aligned} |x_k| &\leq \frac{2}{3} hM^2 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \left\{ \frac{hM}{j} |x_0| + \right. \\ &+ hM \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{t_\ell}{(t_j^{3/2} - t_\ell^{3/2})^{2/3}} |x_\ell| + \delta \left. \right\} + \\ &+ \delta (1 + hM + 2Mt_k + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2}) = \\ &= \frac{2}{3} (hM)^3 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} |x_0| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} h^2 M^3 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{j=2}^{k-2} \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{t_j t_\ell}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3} (t_j^{3/2} - t_\ell^{3/2})^{2/3}} x_\ell + \\
 & + \frac{2}{3} h M^2 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \delta + \\
 & + \delta (1 + hM + 2Mt_k + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2})
 \end{aligned}$$

Fazendo mudança de somatório, obtemos:

$$\begin{aligned}
 |x_k| & \leq \frac{2}{3} h^{3/2} M^3 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \left\{ h^{3/2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \right\} |x_0| + \\
 & + \frac{2}{3} h M^3 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{\ell=1}^{k-3} t_\ell \left\{ h \sum_{j=\ell+1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3} (t_j^{3/2} - t_\ell^{3/2})^{2/3}} \right\} |x_\ell| + \\
 & + \frac{2}{3} M^2 t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \left\{ h \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \right\} \delta + \\
 & + \delta (1 + hM + 2Mt_k + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2})
 \end{aligned}$$

(3.3.7)

Analisemos as expressões entre chaves da desigualdade acima. Temos que

$$\begin{aligned}
 h^{3/2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} & \leq h^{3/2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{j^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} = \\
 & = h \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \leq \int_0^{t_k} \frac{s^{1/2}}{(t_k^{3/2} - s^{3/2})^{1/3}} ds = t_k
 \end{aligned}$$

(3.3.8)

Agora

$$h \sum_{j=\ell+1}^{k-2} \frac{t_j}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3} (t_j^{3/2} - t_\ell^{3/2})^{2/3}} \leq$$

$$\leq h t_k^{1/2} \sum_{j=\ell+1}^{k-2} \frac{t_j^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3} (t_j^{3/2} - t_\ell^{3/2})^{2/3}} \leq$$

$$\leq t_k^{1/2} \int_{t_\ell}^{t_k} \frac{s^{1/2}}{(t_k^{3/2} - s^{3/2})^{1/3} (s^{3/2} - t_\ell^{3/2})^{2/3}} ds =$$

(3.3.9)

$$= \frac{2}{3} t_k^{1/2} \int_0^1 (1-u)^{2/3-1} u^{1/3-1} du =$$

$$= \frac{2}{3} t_k^{1/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} t_k^{1/2} ; \text{ desde que, pela Obs.}$$

$$1.2.1, \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

O resultado das expressões (3.3.8) e (3.3.9) foram obtidos considerando-se o somatório e as mudanças de variáveis de maneira análoga àquelas com as quais obtivemos (3.3.3) e (3.3.4) respectivamente.

Finalmente, temos:

$$h \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \leq h t_k^{1/2} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{t_j^{1/2}}{(t_k^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3}} \leq$$

(3.3.10)

$$\leq t_k^{1/2} \int_0^{t_k} \frac{s^{1/2}}{(t_k^{3/2} - s^{3/2})^{1/3}} ds = t_k^{3/2}, \text{ usando (3.3.8).}$$

Substituindo (3.3.8), (3.3.9) e (3.3.10) em (3.3.7), obtemos que

$$|x_k| \leq \frac{2}{3} h^{3/2} M^3 t_k^{3/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) |x_0| +$$

$$+ \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} h M^3 t_k^2 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{\ell=1}^{k-3} |x_\ell| +$$

$$+ \frac{2}{3} M^2 t_k^2 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \delta + \delta(1 + hM + 2Mt_k + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2})$$

Agora, desde que $|x_0| \leq \delta$, temos que

$$|x_k| \leq \frac{8\sqrt{3}}{27} \pi h M^3 t_k^2 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sum_{\ell=1}^{k-3} |x_\ell| +$$

$$+ \delta [1 + hM + 2Mt_k + 2h^{3/2} M^2 t_k^{1/2} + \frac{2}{3} h^{3/2} M^3 t_k^{3/2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{2}{3} M^2 t_k^2 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)]$$

Trocando k por i , podemos escrever que

$$(3.3.11) \quad |x_i| \leq hM' \sum_{\ell=0}^{i-1} |x_\ell| + \delta'$$

onde

$$M' = \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} M^3 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

e

$$\delta' = \delta [1 + hM + 2M + 2h^{3/2} M^2 + \frac{2}{3} h^{3/2} M^3 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{2}{3} M^2 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)] \quad \text{desde que } t_i \leq t_N = 1$$

A desigualdade (3.3.11) está agora na forma com a qual o Lema 1.1.1 pode ser aplicado; assim, obtemos que:

$$|x_i| \leq (hM' |x_0| + \delta') e^{M' i h}$$

ou seja,

$$|x_i| \leq \delta [1 + hM + 2M + 2h^{3/2} M^2 + \frac{2}{3} h^{3/2} M^3 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{2}{3} M^2 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} hM^3 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)] e^{\left[\frac{8\sqrt{3}\pi}{27} M^3 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right] i};$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Analiseemos agora a consistência do método proposto.

Assim

3.4 - Consistência

Teorema 3.4.1:

Se existe M_1 independente de h , tal que para todo

$i \geq 1$

$$|[\Delta_h y(t) - e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h A_N \Delta_h [y(t)]^4]_i| \leq M_1 h$$

então o método é consistente de ordem 1 .

Prova:

Podemos considerar apenas

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_i} \frac{s[y(s)]^4}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[y(t_j)]^4}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| = \\ & = \left| \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s\{[y(s)]^4 - [y(t_j)]^4\}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| \leq \\ & \leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s|[y(s)]^4 - [y(t_j)]^4|}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \end{aligned}$$

$$\text{Seja } I_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s|[y(s)]^4 - [y(t_j)]^4|}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \leq$$

$$\leq L \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s |y(s) - y(t_j)|}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

usando a continuidade de Lipschitz da função $f(y) = y^4$.

Supondo que a função $y(t) \in C^2[0,1]$, podemos escrever:

$$I_j \leq L \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s |y(t_j) + (s-t_j)y'(t_j) + \frac{(s-t_j)^2}{2!}y''(\xi(s)) - y(t_j)|}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

onde $\xi(s) \in (t_j, t_{j+1})$. Assim

$$I_j \leq L(I_j^1 + I_j^2) \quad \text{onde}$$

$$I_j^1 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s(s-t_j) |y'(t_j)|}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

e

$$I_j^2 = \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s(s-t_j)^2 |y''(\xi(s))|}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

Agora

$$I_j^1 \leq \max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \{s^{1/2}(s-t_j)\} |y'(t_j)| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds =$$

$$= t_{j+1}^{1/2} h |y'(t_j)| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$t_i^{3/2} - s^{3/2} = u$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
 (3.4.1) \quad & \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds = 2[(t_i^{3/2} - t_j^{3/2})^{1/3} - (t_i^{3/2} - t_{j+1}^{3/2})^{1/3}] = \\
 & = 2h^{1/2}[(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]
 \end{aligned}$$

Portanto

$$I_j^1 \leq 2h^{3/2} |y'(t_j)| t_{j+1}^{1/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

e

$$I_j^2 \leq \frac{1}{2} \max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \{s^{1/2}(s-t_j)^2\} |y''(\xi)| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds, \text{ onde}$$

$$\xi \in (t_j, t_{j+1})$$

$$= t_{j+1}^{1/2} h^2 |y''(\xi)| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

Usando (3.4.1), obtemos que

$$I_j^2 \leq h^{5/2} |y''(\xi)| t_{j+1}^{1/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{i-1} I_j & \leq \sum_{j=0}^{i-1} \{2Lh^{3/2} |y'(t_j)| t_{j+1}^{1/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}] + \\
 & + Lh^{5/2} |y''(\xi)| t_{j+1}^{1/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]\} \leq \\
 & \leq 2Lh^{3/2} |y'(t_j)| t_i^{1/2} i^{1/2} + Lh^{5/2} |y''(\xi)| t_i^{1/2} i^{1/2}
 \end{aligned}$$

desde que

$$(3.4.2) \quad \sum_{j=0}^{i-1} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}] = i^{1/2}$$

e assim

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{i-1} I_j &\leq 2Lh^{3/2} |y'(t_j)| t_N^{1/2} N^{1/2} + Lh^{5/2} |y''(\xi)| t_N^{1/2} N^{1/2} = \\ &= 2Lh |y'(t_j)| + Lh^2 |y''(\xi)| \quad \text{desde que } Nh = 1 \\ &= M_1 h + O(h^2) \end{aligned}$$

Com isso, acabamos de demonstrar que o método é consistente de ordem 1 .

A fim de estudarmos a convergência do método, precisamos obter limitações para os pesos de quadratura w_{ij} , os quais são dados pela fórmula (3.2.4). Assim:

3.5 - Limitação para $|w_{ij}|$

Lema 3.5.1:

Os pesos da quadratura w_{ij} são limitados como segue:

$$|w_{ij}| \leq \begin{cases} \frac{M}{i} & , \quad j = 0 \\ M \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} & ; \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \end{cases}$$

onde M é algum limitante independente de i, j e h .

Prova:

Primeiramente notamos que:

$$(3.5.1) \quad |w_{ij}| = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \leq$$

$$\leq 2(j+1)^{1/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

usando (3.4.1) e o fato que para $s \in [t_j, t_{j+1}]$, $s^{1/2} \leq t_{j+1}^{1/2}$.

O segundo limitante pode ser obtido da seguinte maneira:

$$(3.5.2) \quad |w_{ij}| = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} (t_{j+1} - t_j) \frac{t_{j+1}}{(t_i^{3/2} - t_{j+1}^{3/2})^{2/3}} =$$

$$= \frac{j+1}{(i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{2/3}}$$

Se $j \neq 0$ e $j \neq i-1$, então:

$$(3.5.3) \quad |w_{ij}| \leq M' \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}$$

onde

$$(3.5.4) \quad M' = \max_{1 \leq j < i-1} \left\{ \left(\frac{j+1}{j} \right) \frac{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}{(i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{2/3}} \right\}$$

o qual é limitado.

De fato:

$$\left(\frac{j+1}{j} \right) \frac{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}{(i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{2/3}} = \left(\frac{j+1}{j} \right) \frac{((i^{1/2} - j^{1/2})(i^{1/2} j^{1/2} + j))^{2/3}}{((i^{1/2} - (j+1)^{1/2})(i^{1/2} (j+1)^{1/2} + (j+1)))^{2/3}}$$

$$\left(\frac{j+1}{j} \right) \frac{((i - j) (i^{1/2} + (j+1)^{1/2}))^{2/3}}{((i - (j+1)) (i^{1/2} + j^{1/2}))^{2/3}} \frac{(i^{1/2} j^{1/2} + j)^{2/3}}{(i^{1/2} (j+1)^{1/2} + (j+1))^{2/3}}$$

$$\leq 2 \cdot 2^{2/3} \frac{(i^{1/2} + (j+1)^{1/2})}{((i^{1/2} + j^{1/2}) (i + i^{1/2} (j+1)^{1/2} + j))^{2/3}}$$

desde que para $1 \leq j \leq i-2$, temos que

$$\frac{j+1}{j} \leq 2 \quad \text{e} \quad \frac{i-j}{i-(j+1)} \leq 2$$

Agora, seja $i^{1/2} = a$ e $j = x$. Tomemos a função:

$$f(x) = a + x^{1/2}$$

logo:
$$f(x+1) = a + (x+1)^{1/2}$$

Ainda $f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$. Assim, $0 < f'(x) \leq 1$.

Portanto $f(x)$ é uma função crescente.

Usando o teorema de valor médio, temos que

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \cdot 1 \leq 1; \quad \text{onde } \xi \text{ está entre}$$

x e $x+1$.

Portanto: $f(x+1) \leq 1 + f(x) \implies$

$$\implies \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)} + 1 \leq M^* = cte$$

Assim

$$\frac{i^{1/2} + (j+1)^{1/2}}{i^{1/2} + j^{1/2}} \leq M^* = cte$$

Tomemos agora a função:

$$g(x) = a^2 + ax^{1/2} + x$$

logo:
$$g(x+1) = a^2 + a(x+1)^{1/2} + (x+1)$$

Ainda
$$g'(x) = \frac{a}{2x^{1/2}} + 1 \geq 1.$$

Novamente, usando o teorema do valor médio, temos

que

$g(x+1) - g(x) = g'(\xi) \cdot 1 \geq 1$; onde ξ está entre x e $x+1$.

Portanto: $g(x+1) \geq 1 + g(x) \implies$

$$\implies \frac{g(x)}{g(x+1)} \leq \frac{g(x)}{g(x) + 1} \leq 1$$

Assim

$$\frac{i + i^{1/2} j^{1/2} + j}{i + i^{1/2} (j+1)^{1/2} + (j+1)} \leq 1$$

Assim, $\exists M'$ independente de i, j e h tal que vale (3.5.3).

Oscasos em que $j = 0$ e $j = i-1$ devem ser analisados separadamente. Para $j = 0$ e $i > 1$ notamos por (3.5.2) que

$$|w_{i0}| \leq \frac{\bar{M}}{i}$$

onde

$$\bar{M} = \max_{i \geq 2} \left\{ \frac{i}{(i^{3/2} - 1)^{2/3}} \right\}$$

o qual é limitado.

A existência de $\bar{M}$ limitado nesse caso é óbvia.

Para $j = 0$ e $i = 1$, notamos por (3.5.1) que

$$|w_{10}| \leq 2 \leq \frac{\bar{M}}{1}$$

Seja $M^* = \max \{\bar{M}, \bar{M}\}$. Então, para $j = 0$ e $i \geq 1$ obtemos que

$$(3.5.5) \quad |w_{i0}| \leq \frac{M^*}{i}$$

Finalmente, para $j = i-1$, usando (3.5.1), obtemos que

$$\begin{aligned} |w_{ij}| &\leq 2i^{1/2} [(i^{3/2} - (i-1)^{3/2})^{1/3}] \leq \\ &\leq \bar{M} \frac{i-1}{(i^{3/2} - (i-1)^{3/2})^{2/3}} \end{aligned}$$

onde

$$(3.5.6) \quad \bar{M} = \max_{i \geq 2} \left\{ 2 \frac{i^{1/2}}{i-1} (i^{3/2} - (i-1)^{3/2}) \right\}$$

o qual é limitado.

De fato:

Seja k um inteiro positivo qualquer. Temos que:

$$\begin{aligned} (i^{3/2} - (i-k)^{3/2}) &= (i^{1/2} - (i-k)^{1/2})(i + i^{1/2}(i-k)^{1/2} + (i-k)) = \\ &= \frac{i - (i-k)}{i^{1/2} + (i-k)^{1/2}} (i + i^{1/2}(i-k)^{1/2} + (i-k)) \leq \\ &\leq \frac{k}{i^{1/2} + (i-k)^{1/2}} (i^{1/2} + (i-k)^{1/2})^2 = \\ &= k(i^{1/2} + (i-k)^{1/2}) \end{aligned}$$

Mas para $k \geq 1$, $(i-k)^{1/2} < i^{1/2}$. Assim

$$(3.5.7) \quad (i^{3/2} - (i-k)^{3/2}) \leq 2ki^{1/2}$$

Portanto

$$2 \frac{i^{1/2}}{i-1} (i^{3/2} - (i-1)^{3/2}) \leq 4 \frac{i}{i-1} \leq \bar{M}$$

Observe que nos limitantes acima, quando necessário usamos a regra de L'Hospital.

Seja agora $M = \max \{M', M^*, \bar{M}\}$ onde M' , M^* e $\bar{M}$ são as constantes das fórmulas (3.5.4), (3.5.5) e (3.5.6) respectivamente.

Isso completa a prova.

Estamos agora em condições de estudar a convergência do método proposto. Assim

3.6 - Convergência

Teorema 3.6.1:

A discretização ϕ_h é convergente de ordem 1 se ela é consistente de ordem 1.

Prova:

Por (3.2.5), desde que $\phi_h y = 0$, temos que

$$y = e - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h A_N y^4$$

Adicionando e subtraindo, no 2º membro, $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h A_N \Delta_h [y(t)]^4$ e usando a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned} |[y - \Delta_h y(t)]_i| &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h |[A_N (y^4 - \Delta_h [y(t)]^4)]_i| + \\ &+ |[\Delta_h y(t) - e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h A_N \Delta_h [y(t)]^4]_i| \leq \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h \sum_{j=0}^{i-1} |(A_N)_{ij}| |[y^4 - \Delta_h [y(t)]^4]_j| + M_1 h \end{aligned}$$

usando consistência.

A função $f(y) = y^4$ é contínua de Lipschitz com constante de Lipschitz L . Assim

$$\begin{aligned} |[y - \Delta_h y(t)]_i| &\leq \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} hL \sum_{j=0}^{i-1} |(A_N)_{ij}| |[y - \Delta_h y(t)]_j| + M_1 h \end{aligned}$$

Finalmente, mostramos anteriormente que

$$|(A_N)_{ij}| = |w_{ij}| \leq \begin{cases} \frac{M}{i} & ; j = 0 \\ M \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} & ; j = 1, 2, \dots, i-1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |[y - \Delta_h y(t)]_i| &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} hL \frac{M}{i} |y_0 - \Delta_h y(t_0)| + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} hLM \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} |[y - \Delta_h y(t)]_j| + M_1 h = \\ &= hM' \left[\frac{1}{i} |y_0 - \Delta_h y(t_0)| + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} |[y - \Delta_h y(t)]_j| \right] + \delta \end{aligned}$$

onde $M' = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} LM$ e $\delta = M_1 h$.

Assim, usando o Lema 3.3.1, obtemos convergência de ordem 1.

3.7 - Resultados numéricos

Apresentamos, na figura 2, os resultados da solução

de (3.2.1) usando o algoritmo (3.2.3).

O espaçamento da malha usada aqui foi $h = 0.25; 0.025$ e 0.0025 e as três curvas mostradas na figura 2 ilustram a convergência do método.

O resultado exibido está de acordo com o obtido por Lighthill através de aproximação assintótica.

figura 2

3.8 - Conclusão

Um método do tipo integração produto para resolver equação integral singular não linear de Volterra de 2ª espécie, deduzida por Lighthill para descrever a distribuição de temperatura da superfície de um projétil movendo-se através de camada limite laminar a altas velocidades Mach foi apresentado. Uma a-

nálise da convergência foi feita e esta dependeu sobremaneira de um Lema de Gronwall no caso discreto. Finalmente, apresentamos resultados numéricos em forma de gráfico.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DO TIPO INTEGRAÇÃO PRODUTO DE ORDEM ELEVADA

4.1 - Introdução

O objetivo do presente capítulo é o de apresentar métodos do tipo integração produto de ordem elevada para se determinar solução numérica da equação (3.2.1), a qual foi deduzida por Lighthill. Como já dissemos anteriormente (Capítulo 3), esses métodos podem ser obtidos substituindo-se a função incógnita do integrando por apropriados polinômios de interpolação de grau n , $n \geq 1$. Demonstramos que, nesse caso, o método resultante é convergente de ordem $n+1$.

4.2 - Método numérico

Com as mesmas definições dadas no início da seção 3.2, consideremos novamente a equação (3.2.2), isto é

$$y(t_i) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[y(s)]^4}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds$$

O método que propomos aqui é o de substituir $[y(s)]^4$ para $s \in [t_j, t_{j+1}]$ por:

$$P_n(s) = \begin{cases} \sum_{\ell=-j}^{n-j} [y(t_{j+\ell})]^4 \prod_{\substack{k=-j \\ k \neq \ell}}^{n-j} \frac{(s-t_{j+k})}{(t_{j+\ell}-t_{j+k})} ; 0 \leq j \leq n-1 \\ \sum_{\ell=1-n}^1 [y(t_{j+\ell})]^4 \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq \ell}}^1 \frac{(s-t_{j+k})}{(t_{j+\ell}-t_{j+k})} ; n \leq j \leq i-1 \end{cases}$$

ou seja, por:

$$(4.2.1) P_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=-j}^{n-j} \frac{[y(t_{j+\ell})]^4}{(-1)^{n-j-\ell} (\ell+j)! (n-j-\ell)!} \prod_{\substack{k=-j \\ k \neq \ell}}^{n-j} (s-t_{j+k}) ; 0 \leq j \leq n-1 \\ \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=1-n}^1 \frac{[y(t_{j+\ell})]^4}{(-1)^{1-\ell} (\ell+n-1)! (1-\ell)!} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq \ell}}^1 (s-t_{j+k}) ; n \leq j \leq i-1 \end{cases}$$

desde que para pontos igualmente espaçados de h , temos que

$$\prod_{\substack{k=-j \\ k \neq \ell}}^{n-j} (t_{j+\ell} - t_{j+k}) = h^n (-1)^{n-j-\ell} (\ell+j)! (n-j-\ell)!$$

e

$$\prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq \ell}}^1 (t_{j+\ell} - t_{j+k}) = h^n (-1)^{1-\ell} (\ell+n-1)! (1-\ell)!$$

Se y_i denota uma aproximação para $y(t_i)$ em $t=t_i$ então, substituindo (4.2.1) em (3.2.2) obtemos, para $i = n, n+1, \dots, N$, que:

$$y_i = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h^{n+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right.$$

$$\left. \sum_{\ell=-j}^{n-j} \frac{(y_{j+\ell})^4}{(-1)^{n-j-\ell} (\ell+j)! (n-j-\ell)!} \prod_{\substack{k=-j \\ k \neq \ell}}^{n-j} (s-t_{j+k}) ds + \right.$$

$$+ \sum_{j=n}^{i-1} \frac{1}{h^{n+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \frac{1}{\sum_{\ell=1-n}^1 \frac{(y_{j+\ell})^4}{(-1)^{1-\ell} (\ell+n-1)! (1-\ell)!} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq \ell}}^1 (s-t_{j+k}) ds} \}$$

Observe que consideramos $\sum_{j=n}^{i-1} \equiv 0$; $i = n$.

Podemos agora definir formalmente o algoritmo de discretização $\phi_h y = 0$ da seguinte maneira

$$(4.2.2) [\phi_h y]_i = \begin{cases} y_i - \tilde{y}_i & ; \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ y_i - 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h \sum_{j=0}^{i-1} w_{ij} y_j^4 + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} w_{ii} y_i^4 & , \quad n \leq i \leq N \end{cases}$$

onde $\tilde{y}_i$, $0 \leq i \leq n-1$ são valores iniciais dados e

$$(4.2.3) w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{h^{n+1}} \frac{1}{(-1)^n 0! n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell}}^{n-\ell} (s-t_{\ell+k}) ds ; j=0 \\ \frac{1}{h^{n+1}} \left\{ \frac{1}{(-1)^{n-j} j! (n-j)!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell+j}}^{n-\ell} (s-t_{\ell+k}) ds + \sum_{p=0}^{\min\{j-1, i-n-1\}} \frac{1}{(-1)^{n-j+p+1} (j-p-1)! (n-j+p+1)!} \int_{t_{n+p}}^{t_{n+p+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq j-n-p}}^1 (s-t_{n+p+k}) ds \right\} \\ \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{\ell=j-1}^{\min\{i-1, j+n-1\}} \frac{1}{(-1)^{\ell-j+1} (n+j-\ell-1)! (\ell-j+1)!} \end{cases}$$

para $1 \leq j \leq n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq -\ell+j}}^1 (s - t_{\ell+k}) ds \\ \text{para } n+1 \leq j \leq i-1 \\ \\ \frac{1}{h^n} \frac{1}{(-1)^0 n! 0!} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq 1}}^1 (s - t_{j-1+k}) ds ; j = i \end{array} \right.$$

Note que o algoritmo de discretização (4.2.2) fornece a solução aproximada y_i , $i = n, n+1, \dots, N$ em um ponto de cada vez. Além disso, o método é implícito.

Usando notação matricial, podemos escrever:

$$(4.2.4) \quad \phi_h y = y - e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (hA_N + B_N) y^4$$

onde

$$y^4 = (y_0^4, y_1^4, \dots, y_N^4)^t$$

$$e = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}, 1, 1, \dots, 1)^t$$

$$(A_N)_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & ; n \leq i \leq N ; 0 \leq j \leq i-1 \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

e $B_N = \text{diag}(0, \dots, 0, w_{nn}, \dots, w_{NN})$ com os primeiros n elementos iguais a zero.

Definição 4.2.1:

Os valores iniciais (ou métodos) são convergentes de ordem $n+1$ se, para $0 \leq i \leq n-1$, existe C_1 independente de h e N , tal que

$$|y_i - \tilde{y}_i| \leq C_1 h^{n+1}$$

Analiseemos agora a consistência do método proposto.

Assim:

4.3 - Consistência

Teorema 4.3.1:

Se existe M_1 independente de h , tal que para todo $i \geq n$

$$(4.3.1) \quad | [\Delta_h y(t) - e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (hA_N + B_N) \Delta_h [y(t)]^4]_i | \leq M_1 h^{n+1}$$

então o método é consistente de ordem $n+1$.

Prova:

Para mostrar que (4.3.1) é válido, podemos considerar apenas

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_i} \frac{s[y(s)]^4}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{sP_n(s)}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| = \\ & = \left| \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[f(s) - P_n(s)]}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[f(s) - P_n(s)]}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| + \\ & + \sum_{j=n}^{i-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[f(s) - P_n(s)]}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| \end{aligned}$$

onde $P_n(s)$ é o polinômio dado pela fórmula (4.2.1) e $f(s) = [y(s)]^4$.

Agora, usando a fórmula do erro para interpolação, te

mos que

$$(4.3.2) \quad f(s) - P_n(s) = \begin{cases} \prod_{k=-j}^{n-j} (s-t_{j+k}) \frac{f^{(n+1)}(\xi_j^1(s))}{(n+1)!} & ; 0 \leq j \leq n-1 \\ \prod_{k=1-n}^1 (s-t_{j+k}) \frac{f^{(n+1)}(\xi_j^2(s))}{(n+1)!} & ; n \leq j \leq i-1 \end{cases}$$

onde

$$\min\{s, t_0, \dots, t_n\} < \xi_j^1 < \max\{s, t_0, \dots, t_n\}$$

e

$$\min\{s, t_{j-n+1}, \dots, t_j, t_{j+1}\} < \xi_j^2 < \max\{s, t_{j-n+1}, \dots, t_j, t_{j+1}\}$$

Seja

$$I_j^1 = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[f(s) - P_n(s)]}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| \quad ; \quad 0 \leq j \leq n-1$$

e

$$I_j^2 = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s[f(s) - P_n(s)]}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds \right| \quad ; \quad n \leq j \leq i-1$$

Então, usando (4.3.2), podemos escrever:

$$I_j^1 = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=-j}^0 (s-t_{j+k}) (-1) (-s+t_{j+1}) \right.$$

$$\left. \prod_{k=2}^{n-j} (-1)^{n-j+1} (-s+t_{j+k}) \frac{f^{(n+1)}(\xi_j^1(s)) ds}{(n+1)!} \right| =$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=-j}^0 (s-t_{j+k}) (t_{j+1}-s)$$

$$\prod_{k=2}^{n-j} (t_{j+k} - s) \frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^1(s))|}{(n+1)!} ds \leq$$

$$\leq \max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \{s^{1/2} \prod_{k=-j}^0 (s - t_{j+k}) (t_{j+1} - s) \prod_{k=2}^{n-j} (t_{j+k} - s)\}$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^1)|}{(n+1)!} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds ;$$

$$\text{onde } t_j < \xi_j^1 < t_{j+1}$$

$$= t_{j+1}^{1/2} (j+1)! h^{j+1} h^{(n-j)!} h^{n-j-1} \frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^1)|}{(n+1)!}$$

$$2h^{1/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}] , \text{ usando}$$

(3.4.1).

Portanto

$$I_j^1 \leq M' t_{j+1}^{1/2} h^{n+3/2} [(i^{3/2} - j^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

onde

$$M' = 2(j+1)!(n-j)! \frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^1)|}{(n+1)!}$$

De maneira análoga, usando (4.3.2), podemos escrever:

$$I_j^2 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=1-n}^0 (s - t_{j+k}) (t_{j+1} - s)$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^2(s))|}{(n+1)!} ds \leq \max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \{s^{1/2} \prod_{k=1-n}^0 (s - t_{j+k}) (t_{j+1} - s)\}$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^2)|}{(n+1)!} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds ; \text{ onde } t_j < \xi_j^2 < t_{j+1}$$

$$= t_{j+1}^{1/2} n! h^n h \frac{|f^{(n+1)}(\xi_j^2)|}{(n+1)!} 2h^{1/2} [i^{3/2-j^{3/2}}]^{1/3} -$$

$$- (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

Portanto

$$I_j^2 \leq M'' t_{j+1}^{1/2} h^{n+3/2} [(i^{3/2-j^{3/2}}]^{1/3} - (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

onde

$$M'' = \frac{2}{(n+1)} |f^{(n+1)}(\xi_j^2)|$$

Assim

$$\sum_{j=0}^{n-1} I_j^1 + \sum_{j=n}^{i-1} I_j^2 \leq [M t_i^{1/2} h^{n+3/2} \sum_{j=0}^{i-1} [(i^{3/2-j^{3/2}}]^{1/3} -$$

$$- (i^{3/2} - (j+1)^{3/2})^{1/3}]$$

onde $M = \max\{M', M''\}$

$$= M t_i^{1/2} h^{n+3/2} i^{1/2}, \text{ usando (3.4.2).}$$

Portanto

$$\sum_{j=0}^{n-1} I_j^1 + \sum_{j=n}^{i-1} I_j^2 \leq M t_N^{1/2} h^{n+3/2} N^{1/2}$$

$$= M h^{n+1} T \text{ desde que } Nh = T$$

$$= M_1 h^{n+1}$$

Logo, o método proposto é consistente de ordem $n+1$.

Novamente, para estudarmos a convergência do método precisamos obter limitações para os pesos da quadratura w_{ij} , os quais são dados pela fórmula (4.2.3). Assim

4.4 - Limitação para $|w_{ij}|$

Lema 4.4.1:

Os pesos da quadratura w_{ij} são limitados como segue:

$$|w_{ij}| \leq \begin{cases} \frac{M}{i}, & j = 0 \\ M \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}, & j = 1, 2, \dots, i-1 \\ Mh^{1/3} & ; \quad j = i \end{cases}$$

onde M é algum limitante independente de i, j e h .

Prova:

Para $j = 0$, $i > n$ temos que

$$|w_{i0}| = \frac{1}{h^{n+1}} \left| \frac{1}{(-1)^n 0! n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right.$$

$$\left. \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell}}^{n-\ell} (s - t_{\ell+k}) ds \right| \leq \frac{1}{h^{n+1} n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right.$$

$$\left. \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell}}^0 (s - t_{\ell+k}) (-1) (-s + t_{\ell+1}) \prod_{k=2}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-1} (-s + t_{\ell+k}) ds \right| =$$

$$= \frac{1}{h^{n+1} n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell}}^0 (s - t_{\ell+k}) (t_{\ell+1} - s)$$

$$\prod_{k=2}^{n-\ell} (t_{\ell+k} - s) ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^{n+1} n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} (t_{\ell+1} - t_{\ell}) \frac{t_{\ell+1}}{(t_i^{3/2} - t_{\ell+1}^{3/2})^{2/3}}$$

$$\prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell}}^0 (t_{\ell+1} - t_{\ell+k}) (t_{\ell+1} - t_{\ell}) \sum_{k=2}^{n-\ell} (t_{\ell+k} - t_{\ell}) =$$

$$= \frac{1}{h^{n+1} n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} h \frac{(\ell+1)h}{h(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} \ell! h^{\ell} h(n-\ell)! h^{n-\ell-1} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell+1} \frac{\ell+1}{(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} ; \text{ onde } C_{\ell+1} = \frac{\ell! (n-\ell)!}{n!}$$

$$\leq n C' \frac{n}{(i^{3/2} - n^{3/2})^{2/3}} \text{ onde } C' = \max_{0 \leq \ell \leq n-1} \{C_{\ell+1}\}$$

Portanto

$$|w_{i0}| \leq \frac{M'}{i} ; \text{ onde}$$

$$M' = \max_{i > n} \left\{ C \frac{i}{(i^{3/2} - n^{3/2})^{2/3}} \right\} \text{ com } C = n^2 C'$$

o qual é limitado.

A existência de M' limitado nesse caso é óbvia.

Para $j = 0$ e $i = n$, observamos que

$$|w_{n0}| \leq \frac{1}{h^{n+1} n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \max_{s \in [t_{\ell}, t_{\ell+1}]} \{ s^{1/2} \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell}}^0 (s - t_{\ell+k}) (t_{\ell+1} - s) \}$$

$$\prod_{k=2}^{n-\ell} (t_{\ell+k} - s) \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_n^{3/2} - t_{\ell}^{3/2})^{2/3}} ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^{n+1} n!} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)^{1/2} h^{1/2} \ell! h^{\ell} h(n-\ell)! h^{n-\ell-1}$$

$$2h^{1/2} [(n^{3/2} - \ell^{3/2})^{1/3} - (n^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{1/3}] , \text{ usando (3.4.1)}$$

≤ 2 , usando (3.4.2).

Portanto

$|w_{n0}| \leq 2 \leq \frac{M''}{n}$; onde $M'' = 2n$ é obviamente limita-

do.

Seja $M^* = \max \{M', M''\}$. Então, para $j = 0$, $i \geq n$, temos que

$$(4.4.1) \quad |w_{i0}| \leq \frac{M^*}{i}$$

Agora, para $1 \leq j \leq n$, temos que:

$$\begin{aligned} |w_{ij}| &= \frac{1}{h^{n+1}} \left\{ \left| \frac{1}{(-1)^{n-j} j! (n-j)!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right. \right. \\ &\quad \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell+j}}^{n-\ell} (s-t_{\ell+k}) ds + \\ &\quad + \sum_{p=0}^{q_1} \frac{1}{(-1)^{n-j+p+1} (j-p-1)! (n-j+p+1)!} \\ &\quad \left. \left| \int_{t_{n+p}}^{t_{n+p+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq j-n-p}}^1 (s-t_{n+p+k}) ds \right| \right\} \end{aligned}$$

onde $q_1 = \min \{j-1, i-n-1\}$ e para $n+1 \leq j \leq i-1$, temos:

$$\begin{aligned} |w_{ij}| &= \frac{1}{h^{n+1}} \left\{ \sum_{\ell=j-1}^{q_2} \frac{1}{(-1)^{\ell-j+1} (n+j-\ell-1)! (\ell-j+1)!} \right. \\ &\quad \left. \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq -\ell+j}}^1 (s-t_{\ell+k}) ds \right\} \end{aligned}$$

onde $q_2 = \min \{i-1, j+n-1\}$.

Observe agora que:

$$1) \text{ para } i = n, \text{ consideramos } \sum_{p=0}^{q_1} \equiv 0 \text{ e } \sum_{\ell=j-1}^{q_2} \equiv 0$$

$$2) \text{ para } i = n+1 \text{ e } \begin{cases} 1 \leq j \leq n \implies q_1 = i-n-1 \\ n+1 \leq j \leq i-1 \text{ consideramos } \sum_{\ell=j-1}^{q_2} \equiv 0 \end{cases}$$

$$3) \text{ para } n+2 \leq i \leq 2n-1 \text{ e } \begin{cases} 1 \leq j \leq i-n \implies q_1 = j-1 \\ i-n+1 \leq j \leq n \implies q_1 = i-n-1 \\ n+1 \leq j \leq i \implies q_2 = i-1 \end{cases}$$

$$4) \text{ para } 2n \leq i \leq 2n+1 \text{ e } \begin{cases} 1 \leq j \leq n \implies q_1 = j-1 \\ n+1 \leq j \leq i-1 \implies q_2 = i-1 \end{cases}$$

e finalmente

$$5) \text{ para } 2n+2 \leq i \leq N \text{ e } \begin{cases} 1 \leq j \leq n \implies q_1 = j-1 \\ n+1 \leq j \leq i-n-1 \implies q_2 = j+n-1 \\ i-n \leq j \leq i-1 \implies q_2 = i-1 \end{cases}$$

Assim, basta verificarmos se $|w_{ij}|$ é limitado para $2n+2 \leq i \leq N$, pois nesse caso, para cada j , temos que $|w_{ij}|$ possui o maior número de termos positivos.

Analisemos então $|w_{ij}|$ para $2n+2 \leq i \leq N$.

Então, para $1 \leq j \leq n$, temos que

$$|w_{ij}| \leq \frac{1}{h^{n+1}} \left\{ \frac{1}{j!(n-j)!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell+j}}^{n-\ell} (s-t_{\ell+k}) ds \Big| + \\
 (4.4.2) \quad & + \sum_{p=0}^{j-1} \frac{1}{(j-p-1)!(n-j+p+1)!} \left| \int_{t_{n+p}}^{t_{n+p+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right. \\
 & \left. \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq j-n-p}}^1 (s-t_{n+p+k}) ds \right| \}
 \end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell+j}}^{n-\ell} (s-t_{\ell+k}) ds \right| = \\
 & = \sum_{\ell=0}^{j-2} \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=-\ell}^0 (s-t_{\ell+k}) (t_{\ell+1}-s) \\
 & \quad \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq -\ell+j}}^{n-\ell} (t_{\ell+k}-s) ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \\
 & \quad \prod_{k=-j+1}^0 (s-t_{j-1+k}) \prod_{k=2}^{n-j+1} (t_{j-1+k}-s) ds + \\
 & + \sum_{\ell=j}^{n-1} \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=-\ell \\ k \neq -\ell+j}}^0 (s-t_{\ell+k}) (t_{\ell+1}-s) \\
 & \quad \prod_{k=2}^{n-\ell} (t_{\ell+k}-s) ds
 \end{aligned}$$

(Note que para $j = n$, consideramos $\sum_{\ell=j}^{n-1} \equiv 0$)

$$\leq \sum_{\ell=0}^{j-2} (t_{\ell+1}-t_{\ell}) \frac{t_{\ell+1}}{(t_i^{3/2} - t_{\ell+1}^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=-\ell}^0 (t_{\ell+1}-t_{\ell+k}) (t_{\ell+1}-t_{\ell})$$

$$\prod_{k=2}^{n-\ell} (t_{\ell+k} - t_{\ell}) + (t_j - t_{j-1}) \frac{t_j}{(t_i^{3/2} - t_j^{3/2})^{2/3}}$$

$k \neq -\ell + j$

$$\prod_{k=-j+1}^0 (t_j - t_{j-1+k}) \prod_{k=2}^{n-j+1} (t_{j-1+k} - t_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{\ell=j}^{n-1} (t_{\ell+1} - t_{\ell}) \frac{t_{\ell+1}}{(t_i^{3/2} - t_{\ell+1}^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=-\ell}^0 (t_{\ell+1} - t_{\ell+k})$$

$k \neq -\ell + j$

$$(t_{\ell+1} - t_{\ell}) \prod_{k=2}^{n-\ell} (t_{\ell+k} - t_{\ell}) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{j-2} h \frac{(\ell+1)h}{h(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} C_{\ell+1}^1 h^n +$$

$$+ h \frac{jh}{h(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} C_j^1 h^n +$$

$$+ \sum_{\ell=j}^{n-1} h \frac{(\ell+1)h}{h(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} C_{\ell+1}^1 h^n$$

onde $C_{\ell+1}^1$, $0 \leq \ell \leq n-1$, são constantes positivas limitadas

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell+1}^1 \frac{(\ell+1)}{(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} h^{n+1}$$

Assim

$$\frac{1}{j!(n-j)!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=-\ell}^{n-\ell} (s - t_{\ell+k}) ds \right| \leq$$

$k \neq -\ell + j$

(4.4.3)

$$\leq \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell+1} \frac{(\ell+1)h^{n+1}}{(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} \quad \text{onde} \quad C_{\ell+1} = \frac{C_{\ell+1}^1}{j!(n-j)!}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=0}^{j-1} \frac{1}{(j-p-1)!(n-j+p+1)!} \left| \int_{t_{n+p}}^{t_{n+p+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right. \\
 & \quad \left. \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq j-n-p}}^1 (s-t_{n+p+k}) ds \right| = \\
 (4.4.4) \quad & = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{1}{(j-p-1)!(n-j+p+1)!} \int_{t_{n+p}}^{t_{n+p+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \\
 & \quad \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq j-n-p}}^0 (s-t_{n+p+k})(t_{n+p+1}-s) ds \leq \sum_{p=0}^{j-1} \frac{1}{(j-p-1)!(n-j+p+1)!} \\
 & \quad h \frac{h(n+p+1)}{h(i^{3/2} - (n+p+1)^{3/2})^{2/3}} C_{n+p+1}^1 h^n
 \end{aligned}$$

onde C_{n+p+1}^1 , $0 \leq p \leq j-1$ são constantes positivas limitadas

$$= \sum_{p=0}^{j-1} C_{n+p+1} \frac{(n+p+1)}{(i^{3/2} - (n+p+1)^{3/2})^{2/3}} h^{n+1} \quad \text{onde}$$

$$C_{n+p+1} = \frac{C_{n+p+1}^1}{(j-p-1)!(n-j+p+1)!}$$

Substituindo (4.4.3) e (4.4.4) em (4.4.2), obtemos
que

$$\begin{aligned}
 |w_{ij}| & \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell+1} \frac{(\ell+1)}{(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} + \\
 & + \sum_{p=0}^{j-1} C_{n+p+1} \frac{(n+p+1)}{(i^{3/2} - (n+p+1)^{3/2})^{2/3}} \leq \\
 & \leq (n+j) C_1 \frac{(n+j)}{(i^{3/2} - (n+j)^{3/2})^{2/3}}
 \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max_{\substack{0 \leq \ell \leq n-1 \\ 0 \leq p \leq j-1}} \{C_{\ell+1}, C_{n+p+1}\}$

$$= C \frac{(n+j)}{(i^{3/2} - (n+j)^{3/2})^{2/3}} \quad \text{com} \quad C = (n+j)C_1$$

Portanto, para $1 \leq j \leq n$, temos que

$$|w_{ij}| \leq \bar{M} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}$$

onde

$$(4.4.5) \quad \bar{M} = \max_{i \geq 2n+2} \left\{ C \frac{(n+j)}{j} \frac{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}{(i^{3/2} - (n+j)^{3/2})^{2/3}} \right\} \quad \text{o qual é}$$

limitado.

De fato, basta considerar $\frac{1}{i} = x$ e usar a regra de L'Hospital com x tendendo a zero.

Analisemos agora o caso em que $n+1 \leq j \leq i-n-1$. Temos

$$|w_{ij}| = \frac{1}{h^{n+1}} \left| \sum_{\ell=j-1}^{j+n-1} \frac{1}{(-1)^{\ell-j+1} (n+j-\ell-1)! (\ell-j+1)!} \right|$$

$$\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq -\ell+j}}^{\ell} (s - t_{\ell+k}) ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{\ell=j-1}^{j+n-1} \frac{1}{(n+j-\ell-1)! (\ell-j+1)!} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}}$$

$$\prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq -\ell+j}}^0 (s - t_{\ell+k}) (t_{\ell+1} - s) ds \leq \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{\ell=j-1}^{j+n-1} \frac{1}{(n+j-\ell-1)! (\ell-j+1)!}$$

$$h \frac{(\ell+1)h}{h(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}} C_{\ell+1}^1 h^{n-1} h.$$

onde $C_{\ell+1}^1$, $j-1 \leq \ell \leq j+n-1$ são constantes positivas limitadas

$$= \sum_{\ell=j-1}^{j+n-1} C_{\ell+1}^1 \frac{\ell+1}{(i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{2/3}}$$

$$\begin{aligned} \text{com } C_{\ell+1} &= \frac{C_{\ell+1}^1}{(n+j-\ell-1)!(\ell-j+1)!} \\ &\leq (n+1)C_1 \frac{(j+n)}{(i^{3/2}-(j+n)^{3/2})^{2/3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } C_1 &= \max_{j-1 \leq \ell \leq j+n-1} \{C_{\ell+1}\} \\ &= C \frac{(j+n)}{(i^{3/2}-(j+n)^{3/2})^{2/3}}, \text{ com } C = (n+1)C_1 \end{aligned}$$

Assim, para $n+1 \leq j \leq i-n-1$, temos

$$|w_{ij}| \leq M' \frac{j}{(i^{3/2}-j^{3/2})^{2/3}}$$

onde

$$(4.4.6) \quad M' = \max_{n+1 \leq j \leq i-n-1} \left\{ C \left(\frac{j+n}{j} \right) \frac{(i^{3/2}-j^{3/2})^{2/3}}{(i^{3/2}-(j+n)^{3/2})^{2/3}} \right\}$$

o qual é limitado.

A prova de que existe M'' limitado é análoga àquela que fizemos para obter (3.5.4).

Para o caso em que $i-n \leq j \leq i-1$, temos que:

$$|w_{ij}| \leq \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{\ell=j-1}^{i-1} \frac{1}{(n+j-\ell-1)!(\ell-j+1)!}$$

$$\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s}{(t_i^{3/2}-s^{3/2})^{2/3}} \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq -\ell+j}}^0 (s-t_{\ell+k})(t_{\ell+1}-s) ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{\ell=j-1}^{i-1} \frac{1}{(n+j-\ell-1)!(\ell-j+1)!} \max_{s \in [t_\ell, t_{\ell+1}]} \{s^{1/2}\}$$

$$\prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq -\ell+j}}^0 (s-t_{\ell+k})(t_{\ell+1}-s) \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2}-s^{3/2})^{2/3}} ds =$$

$$= \frac{1}{h^{n+1}} \sum_{\ell=j-1}^{i-1} \frac{1}{(n+j-\ell-1)!(\ell-j+1)!} (\ell+1)^{1/2} h^{1/2} C_{\ell+1}^1 h^{n-1} h$$

$$2h^{1/2} [(i^{3/2} - \ell^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{1/3}] , \text{ usando } (3.4.1)$$

onde $C_{\ell+1}^1$, $j-1 \leq \ell \leq i-1$ são constantes positivas limitadas

$$\leq \sum_{\ell=j-1}^{i-1} C_{\ell+1}^1 (\ell+1)^{1/2} [(i^{3/2} - \ell^{3/2})^{1/3} - (i^{3/2} - (\ell+1)^{3/2})^{1/3}]$$

com $C_{\ell+1}^1 = \frac{C_{\ell+1}^1}{(n+j-\ell-1)!(\ell-j+1)!} .$

Seja $C = \max_{j-1 \leq \ell \leq i-1} \{C_{\ell+1}^1\}$, então

$$|w_{ij}| \leq C i^{1/2} [i^{3/2} - (j-1)^{3/2}]^{1/3} , \text{ usando } (3.4.2).$$

Logo, para $i-n \leq j \leq i-1$, podemos considerar

$j = i-k$, $k = n, n-1, \dots, 1$ e assim

$$|w_{i,i-k}| \leq M'' \frac{(i-k)}{(i^{3/2} - (i-k)^{3/2})^{2/3}}$$

onde

$$(4.4.7) \quad M'' = \max_{i \geq 2n+2} \{C \frac{i^{1/2}}{i-k} [i^{3/2} - (i-(k+1))^{3/2}]^{1/3} [i^{3/2} - (i-k)^{3/2}]^{2/3}\}$$

o qual é limitado.

De fato:

$$C \frac{i^{1/2}}{(i-k)} [i^{3/2} - (i-(k+1))^{3/2}]^{1/3} [i^{3/2} - (i-k)^{3/2}]^{2/3} \leq$$

$$\leq C \frac{i^{1/2}}{(i-k)} (2(k+1)i^{1/2})^{1/3} (2ki^{1/2})^{2/3} , \text{ usando } (3.5.7)$$

$$= C_1 \frac{i}{(i-k)} \leq M'' \text{ onde } C_1 = C(2(k+1))^{1/3} (2k)^{2/3}$$

Note que, neste caso, basta considerar $i = x$ e usar a regra de L'Hospital com x tendendo a infinito.

Assim, para $1 \leq j \leq i-1$, temos que

$$(4.4.8) \quad |w_{ij}| \leq \bar{M} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}}$$

onde $\bar{M} = \max \{\bar{M}, M', M''\}$; onde $\bar{M}$, M' e M'' são as constantes das fórmulas (4.4.5), (4.4.6) e (4.4.7), respectivamente.

Analisemos, finalmente, o caso em que $j = i$.

Temos que:

$$\begin{aligned} |w_{ii}| &= \frac{1}{h^n} \left| \frac{1}{(-1)^0 n! 0!} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \right. \\ &\quad \left. \prod_{\substack{k=1-n \\ k \neq 1}}^1 (s - t_{i-1+k}) ds \right| = \\ &= \frac{1}{h^n n!} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{s}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} \prod_{k=1-n}^0 (s - t_{i-1+k}) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{h^n n!} \max_{s \in [t_{i-1}, t_i]} \{ s^{1/2} \prod_{k=1-n}^0 (s - t_{i-1+k}) \} \\ &\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{s^{1/2}}{(t_i^{3/2} - s^{3/2})^{2/3}} ds = \\ &= \frac{1}{h^n n!} t_i^{1/2} n! h^n 2h^{1/2} [(i^{3/2} - (i-1)^{3/2})^{1/3}] , \text{ usando} \\ &\hspace{15em} (3.4.1) \\ &= 2t_i^{1/2} h^{1/2} [(i^{3/2} - (i-1)^{3/2})^{1/3}] \end{aligned}$$

Assim, para $j = i$, temos que

$$(4.4.9) \quad |w_{ii}| \leq M_1 h^{1/3}$$

onde

$$M_1 = \max_{i \geq n} \left\{ \frac{2t_i^{1/2} h^{1/2} [i^{3/2} - (i-1)^{3/2}]^{1/3}}{h^{1/3}} \right\}$$

o qual é limitado.

De fato:

$$\frac{2t_i^{1/2} h^{1/2} (i^{3/2} - (i-1)^{3/2})^{1/3}}{h^{1/3}} \leq M_1 \frac{t_i^{1/2} h^{1/2} i^{1/6}}{h^{1/3}}$$

usando (3.4.4)

$$= \frac{M_1 t_i^{1/2} h^{1/3} h^{1/6} i^{1/6}}{h^{1/3}} \leq M_1 t_N^{1/2} h^{1/6} N^{1/6} = M_1 t_N^{2/3} = M_1$$

desde que $t_N = Nh = 1$.

Assim, tomando $M = \max \{M^*, \bar{M}, M_1\}$ onde $M^*, \bar{M}, M_1$ são os limitantes das fórmulas (4.4.1), (4.4.8) e (4.4.9) respectivamente, completamos a prova do Lema.

Estamos agora em condições de estudar a convergência do método proposto. Assim

4.5 - Convergência

Teorema 4.5.1:

Se a discretização ϕ_h é consistente de ordem $n+1$ e os valores iniciais (ou métodos) são convergentes de ordem $n+1$, então a discretização ϕ_h é convergente de ordem $n+1$.

Prova:

A convergência dos valores iniciais nos permite es-
crever que

$$|y_i - \tilde{y}_i| \leq C_1 h^{n+1} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

Por outro lado, desde que $\phi_h y = 0$, temos por (4.2.4)
que

$$y = e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (hA_N + B_N) y^4$$

Adicionando e subtraindo, no 2º membro,
 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (hA_N + B_N) \Delta_h [y(t)]^4$, e usando a desigualdade triangular, ob-
temos que

$$\begin{aligned} |[y - \Delta_h y(t)]_i| &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} |[(hA_N + B_N)(y^4 - \Delta_h [y(t)]^4)]_i| + \\ &+ |[\Delta_h y(t) - e + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (hA_N + B_N) \Delta_h [y(t)]^4]_i| \leq \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h |[(A_N)(y^4 - \Delta_h [y(t)]^4)]_i| + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} |[B_N(y^4 - \Delta_h [y(t)]^4)]_i| + M_1 h^{n+1} \end{aligned}$$

usando consistência.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} h \sum_{j=0}^{i-1} |(A_N)_{ij}| |[y^4 - \Delta_h [y(t)]^4]_j| + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \max_{n \leq i \leq N} |(B_N)_{ii}| |[y^4 - \Delta_h [y(t)]^4]_i| + M_1 h^{n+1} \end{aligned}$$

A função $f(y) = y^4$ é contínua de Lipschitz com cons-
tante de Lipschitz L . Assim

$$| [y - \Delta_h y(t)]_i | \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} Lh \sum_{j=0}^{i-1} | (A_N)_{ij} | | [y - \Delta_h y(t)]_j | + \\ + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \max_{n \leq i \leq N} | (B_N)_{ii} | | [y - \Delta_h y(t)]_i | + M_1 h^{n+1}$$

Agora, pelo Lema 4.4.1, temos que

$$| (A_N)_{ij} | = | w_{ij} | \leq \begin{cases} \frac{M}{i} & , \quad j = 0 \\ M \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} ; j = 1, 2, \dots, i-1 \end{cases}$$

e

$$| (B_N)_{ii} | = | w_{ii} | \leq Mh^{1/3} \quad , \quad i \geq n .$$

Portanto

$$| [y - \Delta_h y(t)]_i | \leq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} hL \frac{M}{i} | y_0 - \Delta_h y(t_0) | + \\ + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} hLM \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} | [y - \Delta_h y(t)]_j | + \\ + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} LMh^{1/3} | [y - \Delta_h y(t)]_i | + M_1 h^{n+1}$$

Assim

$$(1 - M'h^{1/3}) | [y - \Delta_h y(t)]_i | \leq hM' \left[\frac{1}{i} | y_0 - \Delta_h y(t_0) | + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} | [y - \Delta_h y(t)]_j | \right] + M_1 h^{n+1}$$

onde $M' = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} LM$.

Para h suficientemente pequeno, temos que

$$| [y - \Delta_h y(t)]_i | \leq \frac{hM'}{(1 - M'h^{1/3})} \left\{ \frac{1}{i} | y_0 - \Delta_h y(t_0) | + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{(i^{3/2} - j^{3/2})^{2/3}} |[y - \Delta_h y(t)]_j| \} + \delta$$

onde

$$\delta = \frac{M_1 h^{n+1}}{(1 - M_1' h^{1/3})}$$

Assim, usando o Lema 3.3.1, obtemos que o método proposto é convergente de ordem $n+1$.

4.6 - Resultados numéricos

Apresentamos na figura 1 os resultados da solução de (3.2.1) usando o algoritmo (4.2.2), com $n = 1$, isto é, substituindo $[y(s)]^4$, $s \in [t_j, t_{j+1}]$ em (3.2.2) por

$$\frac{1}{h} \{ (t_{j+1} - s)[y(t_j)]^4 - (t_j - s)[y(t_{j+1})]^4 \}$$

Novamente, o espaçamento da malha usada foi $h=0.25$, 0.025 e 0.0025 ; as três curvas apresentadas ilustram a convergência do método e o resultado exibido está de acordo com o obtido por Lighthill através de aproximação assintótica.

figura 1

Observações:

1 - Como já dissemos anteriormente, o método resultante da substituição de $[y(s)]^4$, $s \in [t_j, t_{j+1}]$ por polinômio de interpolação de grau n com $n \geq 1$ é implícito. Assim, devemos construir um método do tipo previsor-corretor. No resultado numérico apresentado na seção 4.6, usamos como previsor o método proposto no capítulo 3.

2 - Na obtenção dos resultados gráficos apresentados nos capítulos 3 e 4, resolvemos as integrais através de fórmulas de quadratura de Gauss-Legendre sobre 5 pontos.

4.7 - Conclusão

O objetivo original desse trabalho foi o de obter um método do tipo integração produto de ordem elevada para se determinar uma solução numérica da equação (3.2.1), a qual foi deduzida por Lighthill, através da substituição da função incógnita do integrando por polinômio de interpolação de grau n , $n \geq 1$ e determinar a ordem de convergência do método resultante. Mostramos como deve ser tomado tal polinômio de modo a se obter um método bem definido. Provamos que o método proposto é consistente de ordem $n+1$ e, com a suposição de que os valores iniciais (ou métodos) são convergentes de ordem $n+1$, obtivemos convergência de ordem $n+1$. Resultados numéricos para verificar a veracidade dos Teoremas foram apresentados em forma de gráfico.

CAPÍTULO 5

UMA EQUAÇÃO INTEGRAL DE VOLTERRA PROVENIENTE DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS NÃO LINEARES EM TUBOS.

5.1 - Introdução

O conhecimento do que acontece atrás da camada limítrofe de uma perturbação em movimento é importante para calcular o comportamento não ideal das ondas de choque em tubos. Keller (1981) restringiu suas considerações à ondas relativamente fracas, quando as velocidades do fluido são pequenas e supôs a espessura da camada limítrofe pequena comparada com o diâmetro (hidráulico) do tubo. Considerando, a conservação da massa e momentum e usando o parâmetro de camada limítrofe de Chester (1964),

$$\beta = \frac{2}{R} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{Pr^{1/2}} \right],$$

onde ν , γ , Pr e R denotam a viscosidade cinemática, a razão do calor específico, o número de Prandtl e o diâmetro do tubo respectivamente, ele deduziu a seguinte equação integral

$$\left(\frac{\gamma + 1}{2c_0} \right) u^2 = \beta \int_0^\tau u(\tau - \xi) \xi^{-1/2} d\xi$$

onde c_0 denota a velocidade do som sem perturbação.

Recentemente, Schneider (1982), considerou a equação generalizada

$$(5.1.1) \quad y(t)^{1+\beta/\alpha} = \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds$$

onde $0 \leq \beta < 1$ e α é constante positiva, e mostrou que a única solução dessa equação é dada por

$$(5.1.2) \quad y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq c \\ (t-c)^\alpha & t \geq c \end{cases}$$

com constante arbitrária $c \geq 0$.

Desde que uma única solução simples existe pode ser argumentado que não tem muito sentido estudar métodos numéricos para obter tal solução e para este problema em particular isto é verdade. Porém, esta equação possui algumas características interessantes e difíceis para o analista numérico. Por exemplo, esta equação é não linear, possui a primeira derivada descontínua em $t = c$ e tem uma singularidade integrável. É portanto, difícil definir um algoritmo numérico para obter sua solução. Assim, um método numérico que funcione e especialmente uma prova de convergência seria útil para a compreensão de problemas gerais com as mesmas características. O fato de que esta solução existe nos permite testar a validade do algoritmo numérico.

5.2 - Equação transformada

Mostramos a seguir como a equação (5.1.1) pode ser transformada de tal modo que possamos reescrevê-la numa forma mais conveniente.

Consideremos então a equação (5.1.1), isto é

$$y(t)^{1+\beta/\alpha} = \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds; \quad t \in [0,1]$$

Pré-multiplicando ambos os membros por $\int_0^T (T-t)^{-\beta} dt$ obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T (T-t)^{-\beta} y(t)^{1+\beta/\alpha} dt &= \\ &= \frac{1}{B(\alpha+1, \beta)} \int_0^T (T-t)^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds dt \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t (T-t)^{-\beta} (t-s)^{\beta-1} y(s) ds dt &= \\ &= \int_0^T \left[\int_s^T (T-t)^{-\beta} (t-s)^{\beta-1} dt \right] y(s) ds = \\ &= B(\beta, 1-\beta) \int_0^T y(s) ds \quad \text{desde que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s^T (T-t)^{-\beta} (t-s)^{\beta-1} dt &= \int_0^1 (1-u)^{-\beta} u^{\beta-1} du = \\ &= B(\beta, 1-\beta) \quad (\text{Def. 1.2.1}) \end{aligned}$$

Para calcular essa integral fizemos a seguinte mu-

dança de variável:

$$t - s = u(T-s)$$

Note que $B(\beta, 1-\beta)$ existe desde que $0 \leq \beta < 1$.

Assim

$$\int_0^T (T-t)^{-\beta} y(t)^{1+\beta/\alpha} dt = \frac{B(\beta, 1-\beta)}{B(\alpha+1, \beta)} \int_0^T y(s) ds$$

Portanto, diferenciando ambos os membros, obtemos

que

$$\begin{aligned} y(T) &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} \frac{d}{dT} \int_0^T (T-t)^{-\beta} y(t)^{1+\beta/\alpha} dt = \\ &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} \frac{d}{dT} \left[-\frac{(T-t)^{1-\beta}}{(1-\beta)} y(t)^{1+\beta/\alpha} \Big|_0^T + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \frac{(T-t)^{1-\beta}}{(1-\beta)} (1+\beta/\alpha) y(t)^{\beta/\alpha} y'(t) dt \right] \end{aligned}$$

usando integração por partes.

Agora, desde que $y(0) = 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} y(T) &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} \frac{(1+\beta/\alpha)}{(1-\beta)} \frac{d}{dT} \int_0^T (T-t)^{1-\beta} y(t)^{\beta/\alpha} y'(t) dt = \\ &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} (1+\beta/\alpha) \int_0^T (T-t)^{-\beta} y(t)^{\beta/\alpha} y'(t) dt \end{aligned}$$

Logo

$$(5.2.1) \quad y(t) = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} (1+\beta/\alpha) \int_0^t (t-s)^{-\beta} y(s)^{\beta/\alpha} y'(s) ds$$

Observe agora que $y'(c^+)$ não existe e, portanto, à primeira vista parece que a equação transformada não está bem

definida. Entretanto

$$y(t)^{\beta/\alpha} y'(t) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq t \leq c \\ \alpha(t-c)^{\alpha+\beta-1} & ; t > c \end{cases}$$

e desde que $\alpha+\beta > 0$ a integral da equação (5.2.1) pode ser calculada, e assim este problema está resolvido.

5.3 - Métodos numéricos

Nesta seção propomos dois métodos para se determinar solução numérica da equação (5.1.1).

O primeiro método é obtido substituindo-se $y(s)$ por $y(t_j)$ para $s \in [t_j, t_{j+1}]$ na equação original. O segundo é obtido substituindo-se $y(s)$ por $y(t_j)$ e $y'(s)$ por $[y(t_{j+1}) - y(t_j)]/h$ para $s \in [t_j, t_{j+1}]$ na equação transformada, isto é, na equação (5.2.1). Ambos os métodos são do tipo integração produto.

Seja $t = t_i = ih$, onde h é a amplitude da malha e é definida tal que $Nh = t_N = 1$ para algum inteiro N .

Definimos a função

$$\Delta_h: C[0,1] \rightarrow R^{N+1}$$

tal que

$$\Delta_h \phi(t) = (\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_N))^t$$

e o algoritmo de discretização $\phi_h y = 0$ tal que

$$\phi_h: R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$$

Podemos reescrever a equação (5.1.1) na forma

$$(5.3.1) \quad [y(t_i)]^{1+\beta/\alpha} = \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{\beta-1} y(s) ds$$

Se y_i denota uma aproximação para $y(t_i)$ em $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, substituindo $y(s)$ por $y(t_j)$ para $s \in [t_j, t_{j+1}]$ obtemos que

$$y_i^{1+\beta/\alpha} = \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{i-1} y_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{\beta-1} ds$$

Mas

$$(5.3.2) \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{\beta-1} ds = \frac{h^\beta}{\beta} [(i-j)^\beta - (i-j-1)^\beta]$$

Assim

$$y_i^{1+\beta/\alpha} = \mu_1 h^\beta \sum_{j=0}^{i-1} w_{i-j} y_j$$

onde

$$\mu_1 = \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\beta\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}$$

e

$$(5.3.3) \quad w_{i-j} = (i-j)^\beta - (i-j-1)^\beta$$

Podemos agora definir formalmente o algoritmo de discretização $\phi_h y = 0$ da seguinte maneira

$$(5.3.4) \quad [\phi_h y]_i = \begin{cases} y_i - 0 & 0 \leq i < k \\ y_i - h^\alpha & i = k \\ y_i^{1+\beta/\alpha} - \mu_1 h^\beta \sum_{j=0}^{i-1} w_{i-j} y_j & k+1 \leq i \leq N \end{cases}$$

onde y_i , $0 \leq i \leq k$ são valores dados necessários para a unicidade de solução (Schneider (1982)) e y_i , $k+1 \leq i \leq N$ são aproximações para $y(t_i)$.

Note que o algoritmo de discretização (5.3.4) fornece a solução aproximada y_i , $i = k+1, \dots, N$ em um ponto de cada vez.

Usando notação matricial, podemos escrever:

$$(5.3.5) \quad \phi_h y = y^{1+\beta/\alpha} - b_1 - \mu_1 h^\beta A_N y$$

onde

$$y^{1+\beta/\alpha} = (y_0^{1+\beta/\alpha}, y_1^{1+\beta/\alpha}, \dots, y_N^{1+\beta/\alpha})^t$$

$$b_1 = (0, \dots, 0, h^{\alpha+\beta}, 0, \dots, 0)^t \text{ com } h^{\alpha+\beta} \text{ na}$$

k -ésima posição e

$$(A_N)_{ij} = \begin{cases} w_{i-j} & k < i \leq N ; k \leq j \leq i-1 \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

Propomos a seguir o segundo método.

Podemos reescrever a equação (5.2.1) na forma

$$y(t_i) = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} (1+\beta/\alpha) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{-\beta} y(s)^{\beta/\alpha} y'(s) ds$$

Novamente, se y_i denota uma aproximação para $y(t_i)$ em $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, substituindo $y(s)$ por $y(t_j)$ e $y'(s)$ por $[y(t_{j+1}) - y(t_j)]/h$ para $s \in [t_j, t_{j+1}]$ obtemos que

$$y_i = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} (1+\beta/\alpha) \sum_{j=0}^{i-1} y_j^{\beta/\alpha} \frac{(y_{j+1}-y_j)}{h}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{-\beta} ds$$

Mas

$$(5.3.6) \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{-\beta} ds = \frac{h^{1-\beta}}{(1-\beta)} [(i-j)^{1-\beta} - (i-j-1)^{1-\beta}]$$

Assim

$$y_i = \frac{\mu_2}{h^\beta} \sum_{j=0}^{i-1} y_j^{\beta/\alpha} (y_{j+1}-y_j) w_{i-j}$$

onde

$$\mu_2 = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\beta, 1-\beta)} \frac{(1+\beta/\alpha)}{(1-\beta)}$$

e

$$(5.3.7) \quad w_{i-j} = (i-j)^{1-\beta} - (i-j-1)^{1-\beta}$$

Isso nos permite definir o algoritmo de discretização $\phi_h y = 0$ como segue

$$(5.3.8) \quad [\phi_h y]_i = \begin{cases} y_i = 0 & 0 \leq i < k \\ y_i = h^\alpha & i = k \\ y_i = \frac{\mu_2}{h^\beta} \sum_{j=0}^{i-1} y_j^{\beta/\alpha} (y_{j+1}-y_j) w_{i-j}; & k+1 \leq i \leq N \end{cases}$$

Assim a matriz D_N consiste de 1 diagonal a partir da $(k+1)$ -ésima coluna, -1 na 1ª sub-diagonal a partir da k -ésima coluna. Todos os outros elementos são nulos.

5.4 - Resultados numéricos

Consideremos primeiramente o algoritmo de discretização (5.3.4). Então

5.4.1 - Tomando $\alpha = \beta = 1/2$ e valores para a constante arbitrária c como sendo 1.0 e 0.1 obtemos respectivamente as tabelas 1 e 2.

TABELA 1

ERRO				
h	t = 1.2	t = 1.3	t = 1.4	t = 1.5
0.1	$0.90 \cdot 10^{-1}$	0.10	0.10	0.10
0.01	$0.22 \cdot 10^{-1}$	$0.20 \cdot 10^{-1}$	$0.18 \cdot 10^{-1}$	$0.16 \cdot 10^{-1}$
0.001	$0.32 \cdot 10^{-2}$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	$0.24 \cdot 10^{-2}$	$0.22 \cdot 10^{-2}$

TABELA 2

ERRO				
h	t = 1.2	t = 1.3	t = 1.4	t = 1.5
0.1	$0.85 \cdot 10^{-1}$	$0.83 \cdot 10^{-1}$	$0.81 \cdot 10^{-1}$	$0.79 \cdot 10^{-1}$
0.01	$0.12 \cdot 10^{-1}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$	$0.11 \cdot 10^{-1}$
0.001	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.15 \cdot 10^{-2}$	$0.15 \cdot 10^{-2}$

5.4.2 - Tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 1/2$ e valores para a constante arbitrária c como sendo 1.0 e 0.1 obtemos, respectivamente, as tabelas 3 e 4.

TABELA 3

ERRO				
h	t = 1.2	t = 1.3	t = 1.4	t = 1.5
0.1	$0.69 \cdot 10^{-1}$	0.11	0.14	0.17
0.01	$0.31 \cdot 10^{-1}$	$0.35 \cdot 10^{-1}$	$0.38 \cdot 10^{-1}$	$0.40 \cdot 10^{-1}$
0.001	$0.52 \cdot 10^{-2}$	$0.55 \cdot 10^{-2}$	$0.58 \cdot 10^{-2}$	$0.60 \cdot 10^{-2}$

TABELA 4

ERRO				
h	t = 1.2	t = 1.3	t = 1.4	t = 1.5
0.1	0.25	0.26	0.27	0.28
0.01	$0.47 \cdot 10^{-1}$	$0.48 \cdot 10^{-1}$	$0.48 \cdot 10^{-1}$	$0.49 \cdot 10^{-1}$
0.001	$0.66 \cdot 10^{-2}$	$0.67 \cdot 10^{-2}$	$0.68 \cdot 10^{-2}$	$0.68 \cdot 10^{-2}$

Assim essas tabelas mostram que convergência de ordem quase 1 é obtida.

Consideremos agora o algoritmo de discretização (5.3.8).

Esse método falha na convergência.

5.5 - Conclusão

Uma equação integral de Volterra proveniente da propagação de ondas não lineares em tubos foi estudada.

Dois métodos numéricos do tipo integração produto, onde o segundo foi obtido da inversão da integral, foram propostos. O primeiro parece funcionar bastante ainda que sua ordem de convergência não esteja bem definida; o segundo não converge e isso pode ser devido ao fato de que a primeira derivada de função incógnita $y(t)$ aparece no integrando. No apêndice II encontra-se um esboço da prova de convergência para o primeiro método, porém existem ainda, alguns pontos a serem analisados

APÊNDICE I

DIFICULDADE EM PROVAR A CONVERGÊNCIA NO CASO EM QUE A EQUAÇÃO (2.1.1) ESTÁ SUJEITA ÀS CONDIÇÕES: $\frac{\partial^n k}{\partial t^n}(t,t) \equiv 0$, $n=0,1,\dots,q$

A fim de entendermos a análise da não convergência do já citado problema, faremos uma comparação, através do estudo do erro, entre a regra do trapézio para resolver a equação (2.1.1) no caso em que $k(t,t) \equiv 0$ e no caso em que $k(t,t) = k^{(1)}(t,t) \equiv 0$.

A regra do trapézio aplicada à equação (2.1.1) com $k(t,t) \equiv 0$ é zero-estável e convergente.

Usando argumentos semelhantes ao do capítulo 2, para o caso em que $k(t,t) = k^{(1)}(t,t) \equiv 0$, obtivemos que a regra do trapézio era fracamente zero-estável, entretanto não era convergente.

Mostramos a seguir o porquê da não convergência.

Consideremos primeiramente o caso em que a equação (2.1.1) está sujeita à condição $k(t,t) \equiv 0$ e $k^{(1)}(t,t) \neq 0$.

O uso da regra do trapézio nos permite escrever que uma solução aproximada é dada por:

$$(1) \quad \frac{h}{2} k(t_i, t_0) y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} k(t_i, t_j) y_j = f(t_i)$$

e que a solução exata é dada por:

$$(2) \quad \frac{h}{2} k(t_i, t_0) y(t_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} k(t_i, t_j) y(t_j) - \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_i^*) = f(t_i)$$

onde $G(t) = k(t,s)y(s)$ e $t_0 < t_i^* < t_i$.

Seja $e_n = y(t_n) - y_n$. Então, subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$(3) \quad \frac{h}{2} k(t_i, t_0) e_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} k(t_i, t_j) e_j = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_i^*)$$

Ainda:

$$(4) \quad \frac{h}{2} k(t_{i-1}, t_0) e_0 + h \sum_{j=1}^{i-2} k(t_{i-1}, t_j) e_j = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-1}^*)$$

e

$$(5) \quad \frac{h}{2} k(t_{i-2}, t_0) e_0 + h \sum_{j=1}^{i-3} k(t_{i-2}, t_j) e_j = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-2}^*)$$

Expandindo $k(t_n, t_j)$, $n = i, i-1$ e $i-2$, em série de Taylor em torno do ponto t_j obtemos, desde que $k(t, t) \equiv 0$, as seguintes igualdades:

a) De (3), temos que

$$(6) \quad \begin{aligned} & \frac{h}{2} e_0 \left[(ih) \frac{\partial k}{\partial t}(t_0, t_0) + \frac{(ih)^2}{2!} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) + \frac{(ih)^3}{3!} \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_0^*, t_0) \right] + \\ & + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{i-1} e_j \left[(i-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \frac{(i-j)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \right. \\ & \left. + \frac{(i-j)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j) \right] = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_i^*) \end{aligned}$$

b) De (4), obtemos:

$$\frac{h}{2} e_0 \left[(i-1)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_0, t_0) + \frac{(i-1)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) + \frac{(i-1)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_0^*, t_0) \right] +$$

$$(7) \quad + h \sum_{j=1}^{i-2} e_j [(i-1-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \frac{(i-1-j)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \\ + \frac{(i-1-j)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j)] = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-1}^*)$$

c) De (5), temos:

$$(8) \quad \frac{h}{2} e_0 [(i-2)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_0, t_0) + \frac{(i-2)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) + \\ + \frac{(i-2)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_0^*, t_0)] + h \sum_{j=1}^{i-3} e_j [(i-2-j)h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \\ + \frac{(i-2-j)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \frac{(i-2-j)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j)] = \\ = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-2}^*)$$

A aplicação da matriz $(D_h^1)^2$ às expressões (6), (7) e (8) resulta em:

$$(9) \quad \frac{h}{2} e_0 \{ [i - 2(i-1) + (i-2)]h \frac{\partial k}{\partial t}(t_0, t_0) + \\ + [\frac{i^2 - 2(i-1)^2 + (i-2)^2}{2!}]h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) + \\ + [\frac{i^3 - 2(i-1)^3 + (i-2)^3}{3!}]h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_0^*, t_0) \} + \\ + h \sum_{j=1}^{i-3} e_j \{ [(i-j) - 2(i-1-j) + (i-2-j)]h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \\ + [\frac{(i-j)^2 - 2(i-1-j)^2 + (i-2-j)^2}{2!}]h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \\ + [\frac{(i-j)^3 - 2(i-1-j)^3 + (i-2-j)^3}{3!}]h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j) \} +$$

$$\begin{aligned}
 & + h e_{i-2} \{ [(i-j) - 2(i-1-j)] h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \\
 & + [\frac{(i-j)^2 - 2(i-1-j)^2}{2!}] h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \\
 & + [\frac{(i-j)^3 - 2(i-1-j)^3}{3!}] h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j) \}_{j=i-2} + \\
 & + h e_{i-1} \{ (i-j) h \frac{\partial k}{\partial t}(t_j, t_j) + \frac{(i-j)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \\
 & + \frac{(i-j)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j) \}_{j=i-1} = \\
 & = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_i^*) - 2 \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-1}^*) + \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-2}^*)
 \end{aligned}$$

Agora:

$$i - 2(i-1) + (i-2) = 0$$

$$(i-j) - 2(i-1-j) + (i-2-j) = 0$$

$$[(i-j) - 2(i-1-j)]_{j=i-2} = 0$$

$$[(i-j)]_{j=i-1} = 1$$

$$i^2 - 2(i-1)^2 + (i-2)^2 = 2$$

$$(i-j)^2 - 2(i-1-j)^2 + (i-2-j)^2 = 2$$

$$[(i-j)^2 - 2(i-1-j)^2]_{j=i-2} = 2$$

Substituindo esses valores em (9), temos que

$$\frac{h}{2} e_0 [h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) + \frac{C_1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_0^*, t_0)] +$$

$$\begin{aligned}
 & + h \sum_{j=1}^{i-3} e_j \left[h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \frac{C_2}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j^*, t_j) \right] + \\
 & + h e_{i-2} \left[h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_{i-2}, t_{i-2}) + \frac{C_3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_{i-2}^*, t_{i-2}) \right] + \\
 (10) \quad & + h e_{i-1} \left[h \frac{\partial k}{\partial t}(t_{i-1}, t_{i-1}) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_{i-1}, t_{i-1}) + \right. \\
 & \left. + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_{i-1}^*, t_{i-1}) \right] = \frac{h^4}{12} G^{(4)}(t_i^{***}) ; \text{ desde que}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_i^*) - 2 \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-1}^*) + \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-2}^*) = \\
 & = \frac{h^2}{12} [G^{(2)}(t_i^*) - 2G^{(2)}(t_{i-1}^*) + G^{(2)}(t_{i-2}^*)] = \\
 & = \frac{h^2}{12} [h^2 G^{(4)}(t_i^{***})] = \frac{h^4}{12} G^{(4)}(t_i^{***}) ; t_{i-2}^* < t_i^{***} < t_i^*
 \end{aligned}$$

Assim, de (10) podemos escrever:

$$|e_{i-1}| \leq hM \sum_{j=0}^{i-2} |e_j| + \delta ; \text{ onde}$$

$$\delta = \frac{h^2}{12} |G^{(4)}(t_i^{***})| ; \text{ e}$$

$$M = \max_{1 \leq j \leq i-2} \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) \right|, \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) \right| \right\}$$

Assim, pelo Lema 1.1.1, temos convergência de ordem 2; como já era esperado.

Para analisar o caso em que $k(t, t) = k^{(1)}(t, t) \equiv 0$ consideremos, além das igualdades (3), (4) e (5), as seguintes:

$$(11) \quad \frac{h}{2} k(t_{i-3}, t_0) e_0 + h \sum_{j=1}^{i-4} k(t_{i-3}, t_j) e_j = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-3}^*)$$

e

$$(12) \quad \frac{h}{2} k(t_{i-4}, t_0) e_0 + h \sum_{j=1}^{i-5} k(t_{i-4}, t_j) e_j = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-4}^*)$$

Consideremos, como anteriormente, a expansão em série de Taylor de $k(t_n, t_j)$, $n = i, i-1, i-2, i-3$ e $i-4$ em torno do ponto t_j , até o termo da $O(h^4)$.

Aplicando a matriz $(D_h^1)^4$ a essas expressões, podemos escrever:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} e_0 \left\{ \left[\frac{i^2 - 4(i-1)^2 + 6(i-2)^2 - 4(i-3)^2 + (i-4)^2}{2!} \right] h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_0, t_0) + \right. \\ & + \left[\frac{i^3 - 4(i-1)^3 + 6(i-2)^3 - 4(i-3)^3 + (i-4)^3}{3!} \right] h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_0, t_0) + \\ & + \left[\frac{i^4 - 4(i-1)^4 + 6(i-2)^4 - 4(i-3)^4 + (i-4)^4}{4!} \right] h^4 \frac{\partial^4 k}{\partial t^4}(t_0, t_0) \} + \\ & + h \sum_{j=1}^{i-5} e_j \left\{ \left[\frac{(i-j)^2 - 4(i-1-j)^2 + 6(i-2-j)^2 - 4(i-3-j)^2 + (i-4-j)^2}{2!} \right] * \right. \\ & * h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \left[\frac{(i-j)^3 - 4(i-1-j)^3 + 6(i-2-j)^3 + 4(i-3-j)^3 + (i-4-j)^3}{3!} \right] * \\ & * h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j, t_j) + \left[\frac{(i-j)^4 - 4(i-1-j)^4 + 6(i-2-j)^4 + 4(i-3-j)^4 + (i-4-j)^4}{4!} \right] * \\ & * h^4 \frac{\partial^4 k}{\partial t^4}(t_j^*, t_j) \} + \\ & + h e_{i-4} \left\{ \left[\frac{(i-j)^2 - 4(i-1-j)^2 + 6(i-2-j)^2 - 4(i-3-j)^2}{2!} \right] h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \right. \\ & + \left[\frac{(i-j)^3 - 4(i-1-j)^3 + 6(i-2-j)^3 - 4(i-3-j)^3}{3!} \right] h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j, t_j) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{(i-j)^4 - 4(i-1-j)^4 + 6(i-2-j)^4 - 4(i-3-j)^4}{4!} \right] h^4 \frac{\partial^4 k}{\partial t^4}(t_j^*, t_j) \}_{j=i-4} + \\
 & + h e_{i-3} \left\{ \left[\frac{(i-j)^2 - 4(i-1-j)^2 + 6(i-2-j)^2}{2!} \right] h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \right. \\
 & + \left[\frac{(i-j)^3 - 4(i-1-j)^3 + 6(i-2-j)^3}{3!} \right] h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j, t_j) + \\
 & + \left. \left[\frac{(i-j)^4 - 4(i-1-j)^4 + 6(i-2-j)^4}{4!} \right] h^4 \frac{\partial^4 k}{\partial t^4}(t_j^*, t_j) \right\}_{j=i-3} + \\
 & + h e_{i-2} \left\{ \left[\frac{(i-j)^2 - 4(i-1-j)^2}{2!} \right] h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \right. \\
 & + \left[\frac{(i-j)^3 - 4(i-1-j)^3}{3!} \right] h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j, t_j) + \\
 & + \left. \left[\frac{(i-j)^4 - 4(i-1-j)^4}{4!} \right] h^4 \frac{\partial^4 k}{\partial t^4}(t_j^*, t_j) \right\}_{j=i-2} + \\
 & + h e_{i-1} \left\{ \frac{(i-j)^2}{2!} h^2 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_j, t_j) + \frac{(i-j)^3}{3!} h^3 \frac{\partial^3 k}{\partial t^3}(t_j, t_j) + \right. \\
 & + \left. \frac{(i-j)^4}{4!} h^4 \frac{\partial^4 k}{\partial t^4}(t_j^*, t_j) \right\}_{j=i-1} = \\
 & = \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_i^*) - 4 \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-1}^*) + 6 \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-2}^*) - \\
 & - 4 \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-3}^*) + \frac{h^2}{12} G^{(2)}(t_{i-4}^*)
 \end{aligned}$$

Observe agora que, no lado esquerdo da expressão acima, todos os coeficientes de h^2 se anulam, com exceção dos coeficientes onde $j=i-1$ e $j=i-3$.

Pelo fato do coeficiente de h^2 em $j=i-3$ não se

anular, não podemos escrever que

$$|e_{i-1}| \leq hM \sum_{j=1}^{i-2} |e_j| + \delta$$

Assim, acabamos de mostrar que não podemos resolver a equação (2.1.1), sujeita à condição $k(t,t) = k^{(1)}(t,t) \equiv 0$, usando métodos análogos a (2.2.1), desde que com definição de estabilidade análoga à descrita no capítulo 2, não garantimos convergência.

APÊNDICE II

UM ESBOÇO DA PROVA DE CONVERGÊNCIA PARA A EQUAÇÃO INTEGRAL DE VOLTERRA PRO-
VENIENTE DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS NÃO LINEARES EM TUBOS.

Neste apêndice demonstramos a consistência do método obtido da equação (5.1.1) e obtemos limitação para seus pesos de quadratura. Apresentamos um esboço de como a convergência pode ser provada.

Consistência e Convergência

Analizamos aqui o problema de consistência.

Assim para provar a consistência precisamos mostrar que para todo $i \geq k + 1$

$$(1) \quad \left| \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\beta-1} y(s) ds - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} y(t_j) ds \right| \leq$$

$$\leq M h^\alpha$$

onde M é alguma constante limitada independente de h .

Temos então que o lado esquerdo de (1) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{i-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} [y(s) - y(t_j)] ds \right| \\ & \leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(s) - y(t_j)| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(s) - y(t_j)| \, ds \\
 &+ \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(s) - y(t_j)| \, ds \\
 &+ \sum_{j=\ell+1}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(s) - y(t_j)| \, ds
 \end{aligned}$$

Suponhamos que $c \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$.

Seja

$$I_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(s) - y(t_j)| \, ds ; 0 \leq j \leq i-1 ,$$

Para $j \neq \ell$ podemos supor que $y(s) \in C^1[0,1]$ e então obtemos que

$$\begin{aligned}
 I_j &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(t_j) + (s - t_j)y'(\xi_j(s)) - y(t_j)| \, ds \\
 &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} (s - t_j) |y'(\xi_j(s))| \, ds \\
 &\leq \max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \{(s - t_j)\} |y'(\xi_j)| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} \, ds
 \end{aligned}$$

onde $t_j < \xi_j < t_{j+1}$.

Assim

$$I_j \leq h |y'(\xi_j)| \frac{h^\beta}{\beta} [(i-j)^\beta - (i-j-1)^\beta], \quad \text{usando}$$

(5.3.2)

$$= M_1 h^{\beta+1} [(i-j)^\beta - (i-j-1)^\beta] \quad \text{onde } M_1 = \frac{|y'(\xi_j)|}{\beta}$$

Analisemos agora o caso em que $j = \ell$.

Assim

$$I_\ell = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_i - s)^{\beta-1} |y(s) - y(t_j)| \, ds$$

$$\leq 2 \max_{s \in [t_\ell, t_{\ell+1}]} \{|y(s)|\} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_i - s)^{\beta-1} \, ds$$

Agora supondo que

$$\max_{s \in [t_\ell, t_{\ell+1}]} \{|y(s)|\} \leq M' h^\alpha$$

o que é verdade, desde que conhecemos a solução exata, obtemos

$$I_\ell \leq 2 M' \frac{h^{\alpha+\beta}}{\beta} [(i-\ell)^\beta - (i-\ell-1)^\beta] \quad \text{usando (5.3.2)}$$

$$= M_2 h^{\alpha+\beta} [(i-\ell)^\beta - (i-\ell-1)^\beta] \quad \text{onde } M_2 = \frac{2M'}{\beta}$$

Assim, temos que

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} I_j + I_\ell + \sum_{j=\ell+1}^{i-1} I_j \leq$$

$$\leq M h^{\beta} \left\{ h \sum_{j=0}^{\ell-1} [(i-j)^{\beta} - (i-j-1)^{\beta}] + h^{\alpha} [(i-\ell)^{\beta} - (i-\ell-1)^{\beta}] + h \sum_{j=\ell+1}^{i-1} [(i-j)^{\beta} - (i-j-1)^{\beta}] \right\}$$

onde $M = \max \{ M_1, M_2 \}$

$$\begin{aligned} &= M h^{\beta} \{ h [i^{\beta} - (i-\ell)^{\beta}] + h^{\alpha} [(i-\ell)^{\beta} - (i-\ell-1)^{\beta}] \\ &+ h [(i-\ell-1)^{\beta}] \} \\ &\leq M h^{\alpha+\beta} i^{\beta} \end{aligned}$$

desde que para h suficientemente pequeno e $\alpha < 1$ temos que $h < h^{\alpha}$.

Ainda desde que $ih \leq Nh = 1$ obtemos que

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} I_j + I_{\ell} + \sum_{j=\ell+1}^{i-1} I_j \leq M h^{\alpha}$$

Assim podemos concluir que o método proposto é consistente da ordem de h^{α} pelo menos. Entretanto isso não significa que convergência de ordem maior do que h^{α} não pode ser obtida desde que consistência da ordem de h^{α} ocorre apenas uma vez. (Elliott e McKee (1981)).

Lema 1

Os pesos de quadratura w_{i-j} dado pela fórmula (5.3.3) são limitados como segue:

$$|w_{i-j}| = w_{i-j} \leq \frac{M'}{(i-j)^{1-\beta}} \quad 0 \leq j < i \leq N; \quad 0 \leq \beta < 1$$

onde M' é algum limitante independente de i, j e h .

Prova:

Por definição temos que

$$w_{i-j} = \frac{\beta}{h^\beta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} ds$$

$$\leq \frac{1}{h^\beta} (t_{j+1} - t_j) (t_i - t_{j+1})^{\beta-1}$$

desde que

$$\max_{s \in [t_j, t_{j+1}]} \{(t_i - s)^{\beta-1}\} = (t_i - t_{j+1})^{\beta-1}$$

$$0 \leq \beta < 1$$

Portanto

$$|w_{i-j}| = w_{i-j} \leq h^{1-\beta} (t_i - t_{j+1})^{\beta-1}$$

Note que isso é válido somente para $(i, j) \in S$ onde

$$S \equiv \{(i, j) \mid 0 \leq j < i \leq N \text{ e } j \neq i-1\}$$

Assim

$$|w_{i-j}| \leq (i-j-1)^{\beta-1}$$

isto é

$$|w_{i-j}| \leq \frac{M}{(i-j)^{1-\beta}}$$

onde

$$M = \max_S \left\{ \left(\frac{i-j}{i-j-1} \right)^{1-\beta} \right\}$$

é limitado.

De fato:

$$\max_S \left\{ \left(\frac{i-j}{i-j-1} \right)^{1-\beta} \right\} = 2^{1-\beta}.$$

Consideramos agora o caso em que $j=i-1$.

Temos

$$w_{i-j} = \frac{\beta}{h^\beta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{\beta-1} ds \quad ; \quad j = i-1$$

isto é

$$w_1 = \frac{\beta}{h^\beta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\beta-1} ds$$

Integrando obtemos que

$$w_1 = 1 \leq \frac{M'}{1-\beta}$$

Isso completa a prova.

Analisemos agora a convergência de método proposto obtido da equação original.

Consideremos o algoritmo de discretização (5.3.4). Adicionando e subtraindo no 2º membro $\mu_1 h^\beta A_N \Delta_h y(t)$ e usando a desigualdade triangular obtemos que

$$\begin{aligned}
 & \left| [y^{1+\beta/\alpha} - \Delta_h [y(t)]^{1+\beta/\alpha}]_i \right| \leq \\
 & \leq \mu_1 h^\beta \left| [A_N (y - \Delta_h y(t))]_i \right| + \\
 & + \left| [\Delta_h [y(t)]]^{1+\beta/\alpha} - b_1 - \mu_1 h^\beta A_N \Delta_h y(t) \right|_i \\
 & \leq \mu_1 h^\beta \left| [A_N (y - \Delta_h y(t))]_i \right| + M h^\alpha
 \end{aligned}$$

usando consistência

$$\begin{aligned}
 & \leq \mu_1 h^\beta \sum_{j=0}^{i-1} |(A_N)_{ij}| \left| [y - \Delta_h y(t)]_i \right| + M h^\alpha \\
 & \leq \mu_1 M' h^\beta \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{(i-j)^{1-\beta}} \left| [y - \Delta_h y(t)]_i \right| + \delta
 \end{aligned}$$

desde que $|(A_N)_{ij}| = |w_{i-j}| = w_{i-j} \leq \frac{M'}{(i-j)^{1-\beta}}$ e $\delta = M h^\alpha$

Assim

$$\begin{aligned}
 & \left| [y^{1+\beta/\alpha} - \Delta_h [y(t)]^{1+\beta/\alpha}]_i \right| \leq \\
 & \leq M h^\beta \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{(i-j)^{1-\beta}} \left| [y - \Delta_h y(t)]_i \right| + \delta
 \end{aligned}$$

Agora, observe que para provar a convergência precisaríamos de um Lema de Gronwall não linear no caso discreto do seguinte tipo:

$$|x_i^\gamma - y_i^\gamma| \leq M h^\beta \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{(i-j)^{1-\beta}} |x_j - y_j| + \delta$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

o qual implica que

$$|x_i - y_i| \leq \tilde{M} h^{\tilde{\gamma}}$$

onde $\tilde{M}$ e $\tilde{\gamma}$ são constantes independentes de h .

Porém, isso não é trivial de ser provado.

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, A. S e WHYTE, E. T. (1971) - Improved numerical methods for Volterra integral equations of the first kind. Comput. J. 14, 442-443.
- ANDRADE, C. (1977) - Métodos lineares de passo múltiplo estáveis de alta precisão aplicados a equações diferenciais ordinárias, equações integrais e equações diferenciais parciais. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo - Brasil.
- APOSTOL, T. M. (1958) - Mathematical analysis. Addison-Wesley.
- BAKER, C. T. e KEECH, M. S. (1978) - Stability regions in the numerical treatment of Volterra integral equations. Siam J. Num. An. 15, 394-417.
- CAMERON, R. F. e McKEE, S. (1981) - The direct numerical solution of a Volterra integral equations arising out of Viscoelastic stress in materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 29, 219-232.
- CHESTER, W. (1964) - Resonant oscillations in closed tubes. J. Fluid. Mech. 18, 44.
- DONELSON, J. e HANSEN, E. (1971) - Cyclic composite multistep

predictor - corrector methods. Siam J. Num. An. 8, 137-157.

ELLIOTT, C. e McKEE, S. (1981) - On the numerical solution of an integro-differential equation arising from wave-power hydraulics. Bit 21, 318-325.

GLADWIN, C. J. (1972) - Methods of high order for the numerical solutions of first kind Volterra integral equations. Conference on Numerical Mathematics, Winnepeg, 173-193.

GLADWIN, C. J. (1979) - Quadrature rule methods for Volterra integral equations of the first kind. Maths of Comp. 33, 705-716.

GLADWIN, C. J. e JELTSCH (1974) - Stability of quadrature rules for first kind Volterra integral equations. Bit 14, 144-151.

HOCK, W. (1979) - Asymptotic expansions for multistep methods applied to nonlinear Volterra integral equation of the second kind. Num. Math. 33, 77-100.

HOLYHEAD, P. A. W. (1976) - Direct methods for the numerical solution of Volterra integral equations of the first kind. Tese de Doutorado - Universidade de Southampton - Inglaterra.

HOLYHEAD, P. A. W. e McKEE, S. (1976) - Stability and convergence of multistep methods for linear Volterra integral equations of the first kind. Siam J. Num. An. 13, 269-292.

HOLYHEAD, P. A. W., McKEE, S. e TAYLOR, P. J. (1975) - Multistep methods for solving linear Volterra integral equations of the first kind. Siam J. Num. An. 12, 698-711.

ISAACSON, E. e KELLER, H. B. (1966) - The analysis of numerical methods. John Wiley and Sons Inc. - New York.

JONES, H. e McKEE, S. (1982) - The numerical stability of multistep methods for convolution Volterra integral equations-non singular equations. Comp. and Maths with Applics (to appear).

KELLER, J. J. (1981) - Propagation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction. Z. Angew. Math. Phys. 32, 170-181.

KOBAYASI, M. (1967) - On the numerical solution of Volterra integral equation of the first kind by the trapezoidal rule. Rep. Statist. Appl. Res. June 14, 1-14.

LIGHTHILL, M. J. (1950) - Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc. 202 A, 359-377.

LINZ, P. (1967) - The numerical solution of Volterra integral equations by finite difference methods. Tech. Rept. 825, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison.

LINZ, P. (1969) - Numerical methods for Volterra integral equations of the first kind. Comp. J. 12, 393-397.

McKEE, S. (1979) - Best convergence rates of linear multistep methods for Volterra first kind equations. Computing 21, 343-358.

McKEE, S. (1979) - The analysis of a variable step, variable coefficient linear multistep method for solving a singular integro-differential equation arising from the diffusion of discrete particles in a turbulent fluid. J. Inst. Maths. Applics. 23, 373-388.

McKEE, S. (1982) - Generalised Gronwall Lemmas. ZAMM 62, 7235-7245.

McKEE, S. & STOKES, A. - Product integration method for the nonlinear Basset equation. Siam. J. Num. An. (to appear).

NOBLE, B. (1964) - The numerical solution of nonlinear integral equations and related topics. In: P. M. Anselone, Nonlinear Integral Equations, Madison. The University of Wisconsin

Press, 215-318.

SCHNEIDER, W. R. (1982) - The general solution of a non-linear integral equation of convolution type. Z. Angew. Math. Phys. 33, 140-142.

SPAIN, B. e SMITH, M. G. (1970) - Functions of Mathematical Physics. Van Nostrand Reinhold Company - London

TRICOMI, F. G. (1965) - Integral equations. Interscience - New York.

WEISS, R. (1972) - Product integration for the generalized Abel equations. Maths. of Comp. 26, 177-190.

WEISS, R. e ANDERSSEN, R. S. (1972) - A product integration method for a class of singular first kind equations. Num. Math. 18, 442-456.

YOSIDA, K. (1960) - Lectures on differential and integral equations. Wiley, Interscience.