ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

CONTRIBUIÇÕES PARA A RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias

Orientador: Prof. Dr. Maximilian Emil Hehl

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1983

A meus pais,

ao Waldir,

à Melissa e à Mariana

dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Maximilian Emil Hehl, incansável Orientador deste trabalho, agradecemos a orientação segura e dedicada, o constante incentivo e a renovação de coragem e entusiasmo que sempre nos proporcionou.

Ao Prof. Dr. Odelar Leite Linhares e ao Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, agradecemos a grande colaboração em nossos estudos e a inestimável oportunidade que nos concederam iniciando-nos na pesquisa.

Aos colegas do Departamento de Ciências de Computação e Estatística do ICMSC-USP, em especial à Prof.ª Dr.ª Célia Maria Finazzi de Andrade, agradecemos o permanente apoio.

Aos colegas do IBILCE-UNESP, de São José do Rio Preto, nossos agradecimentos pelo interesse e esforços realizados por nosso progresso na carreira universitária.

Ao Cláudio Rondon agradecemos a paciente e cuidadosa colaboração que nos prestou no processamento dos programas necessários à realização deste trabalho.

À Dirce Buzato, pela datilografia esmerada, nossos agradecimentos.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelas instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

CONTRIBUTIONS FOR THE NUMERICAL RESOLUTION

OF POLYNOMIAL EQUATIONS

Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias

Adviser: Prof.Dr. Maximilian Emil Hehl

ABSTRACT

This work is intended to present contributions to solve problems which occur in the application of iterative methods for solving polynomial equations, thus amplifying the numerical computational means already available.

We present two new techniques, called Initial Phase and Variant of the Initial Phase, in chapter 2, by means of which we determine one or more initial approximations to the root of the smaller modulus of a polynomial equation.

In chapter 3 of this work, a new iterative method, called MIDREM is proposed. This method gives not only the root of a polynomial equation but also its multiplicity.

Considerations about Graeffe's method to solve real polynomial equations are presented in chapter 4. It is well known that this method has been considered inadequate for computational purposes due to the frequent occurrence of overflows. Our proposed programme avoids this inconvenience and makes the method computationally efficient.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO I

CAPÍTULO 1

Notação e Preliminares 1

1.1 - Ordem de convergência e índice de eficiência de um método iterativo 1

1.2 - Considerações sobre o erro na determinação de raízes . 3

1.3 - A precisão dos resultados 7

1.4 - Reconstrução do polinômio 8

1.5 - Considerações sobre a deflação 9

1.6 - Computador digital 11

1.7 - Comentários diversos 12

CAPÍTULO 2

Sobre a determinação de valores iniciais

2.1 - Introdução 15

2.2 - A determinação de valores iniciais 17

2.2.1 - Um círculo que contém pelo menos uma raiz de $p(z)=0$ 17

2.2.2 - Fase Inicial - Um círculo que contém pelo menos a raiz de menor módulo de $p(z)=0$ 19

2.2.3 - Um caso especial revelado na Fase Inicial 30

2.2.4 - Uma Variante da Fase Inicial 38

2.2.5 - Um caso especial que ocorre na Variante da Fase Inicial 41

2.2.6 - O uso da Fase Inicial e de outros métodos de determinação de raízes 44

2.2.7 - A determinação de dois ou mais valores iniciais 45

2.3 - Um teorema que auxilia a identificar se a raiz a ser determinada é real ou não 47

CAPÍTULO 3

MIDREM - Um método iterativo de determinação de uma raiz e sua multiplicidade.

3.1 - Introdução 51

3.2 - O método MIDREM 55

3.2.1 - Descrição do método 55

3.2.2 - Concepção de MIDREM 58

3.2.3 - Determinação da raiz e sua multiplicidade quando todas as raízes da equação são reais 60

3.2.4 - Aplicação de MIDREM em equações polinomiais cujas raízes são reais 62

3.2.5 - A determinação de uma raiz complexa e de sua multiplicidade 73

3.2.6 - Aplicação de MIDREM quando não temos informações sobre as raízes da equação polinomial real. 75

3.2.7 - Aplicação de MIDREM em equações polinomiais com coeficientes complexos 83

CAPÍTULO 4

Considerações sobre o método de Graeffe.

4.1 - Introdução 85

4.2 - Descrição do método 86

4.2.1 - Concepção do método 86

4.2.2 - Obtenção das raízes 87

4.2.3 - Teste de aceitação das raízes 91

4.3 - Considerações sobre alguns detalhes computacionais ... 93

4.3.1 - Ordem de Determinação dos módulos das raízes . 93

4.3.2 - Determinação de M, ε, η e δ 93

4.3.3 - Como evitar overflow's 95

CAPÍTULO 5

Conclusões 104

APÊNDICE I 108

APÊNDICE II 117

BIBLIOGRAFIA 133

INTRODUÇÃO

Na literatura matemática existem muitos métodos iterativos de resolução de equações polinomiais. No entanto, a maioria destes métodos apresentam dois tipos de dificuldades. Uma delas, é a necessidade de escolhermos a aproximação com a qual se iniciará o processo de determinação de uma raiz. Embora existam numerosos resultados sobre regiões no plano complexo que contém raízes de uma equação polinomial, a determinação de uma aproximação inicial ainda é um dos problemas com que se depara quem necessita resolver uma equação, pois aquela que é uma "boa" aproximação inicial para um determinado método iterativo, pode não sê-lo para um outro método.

A segunda dificuldade apresentada pelos métodos iterativos de modo geral, é que a maioria destes métodos são menos eficientes na determinação de raízes quando estas são múltiplas. Como nas aplicações práticas, aparecem equações polinomiais com raízes múltiplas, muitos autores desenvolveram métodos de determinação de raízes que incluem informações sobre a multiplicidade da raiz a ser determinada. No entanto, na prática, estes métodos são pouco usados, pois dependem do conhecimento prévio da multiplicidade de uma raiz desconhecida.

Um dos objetivos deste trabalho é expor métodos que resolvam estes dois problemas.

Assim, no Capítulo 1, introduzimos algumas notações e considerações que julgamos necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos duas técnicas, que denominamos Fase Inicial e Variante da Fase Inicial, para a determinação de uma ou mais aproximações iniciais para a raiz de menor módulo de uma equação polinomial.

Mostramos também que quando determinamos a aproximação inicial usando a Fase Inicial e o método de Newton aplicado a $u(x) = p(x)/p'(x) = 0$ podemos determinar, sem analisarmos os coeficientes da equação polinomial real $p(x)$, se suas raízes são tais que sendo α uma raiz de multiplicidade m da equação então $-\alpha$ também é raiz de multiplicidade m da equação.

No Capítulo 3, mostramos que se aplicarmos o método de Newton

$$z_{i+1} = z_i - \frac{u(z_i)}{u'(z_i)}$$

à $u(z) = p(z)/p'(z) = 0$ e não a $u(z) = p(z) = 0$, podemos determinar não só uma raiz α de $p(z) = 0$ como também sua multiplicidade m.

Ainda neste capítulo, propomos o método iterativo, que denominamos MIDREM, para a determinação de uma raiz e sua multiplicidade.

No Capítulo 4, descrevemos o método de Graeffe para a determinação de todas as raízes de uma equação polinomial real. Alguns programas já existentes deste método são próprios apenas para a resolução de equações polinomiais com raízes reais distintas e bem separadas. Muitos autores julgam este método inadequado para o uso em computadores devido à grande dificuldade de obtenção das raízes múltiplas e/ou complexas e, principalmente, devido à alta ordem de grandeza dos números resultantes das sucessivas quadrações dos coeficientes da equação realizadas pelo método.

Nosso objetivo, nesse capítulo, é justamente apresentar a programação que realizamos do método de Graeffe, evitando a ocorrência de overflow's e analisar seu desempenho computacional.

No Apêndice I, apresentamos os algorítmos correspondentes aos métodos que propomos nos Capítulos 2 e 3.

No Apêndice II, apresentamos a programação FORTRAN que elaboramos do método de Graeffe.

CAPÍTULO 1

NOTAÇÃO E PRELIMINARES

Introduzimos algumas notações básicas, conceitos matemáticos e considerações que julgamos necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

Trataremos, basicamente, da determinação de raízes de equações polinomiais que, de modo geral, denotaremos na forma

$$p(z) = a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_{n+1} = 0$$

com $a_1 \neq 0$ e $a_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1,2,\ldots,n+1$.

Diremos que a equação polinomial é real se seus coeficientes a_i, $i=1,2,\ldots,n+1$, são reais.

Se todas as raízes da equação polinomial são reais, denotaremos a equação por

$$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n x + a_{n+1} = 0$$

Diremos que uma raiz α é real se $\alpha \in \mathbb{R}$ e que uma raiz α é complexa se $\alpha = a + ib$ com $b \neq 0$.

1.1. Ordem de convergência e índice de eficiência de um método iterativo

Vamos estabelecer a ordem com que a sequência $z_0, z_1, z_2, \ldots$, gerada por um método iterativo, converge para um limite α.

Seja $e_n = z_n - \alpha$.

Dizemos que a convergência é de primeira ordem se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = C \qquad \text{com } 0 < C < 1$$

A convergência é linear se $0 < |C| < 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = C$$

Dizemos que a convergência é geométrica se

$$e_{n+1} = C\, e_n, \qquad n=0,1,2,\ldots \text{ onde } 0 < |C| < 1.$$

Se existe $p>1$ tal que para algum $K>0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K$$

então dizemos que a ordem de convergência da sequência é p.

Observamos que a ordem de convergência de uma sequência gerada por um método iterativo de determinação de raiz, ou,

equivalentemente, que a ordem de convergência de um método de determinação de raiz, depende da equação que está sendo resolvida, da multiplicidade da raiz a ser determinada e do valor inicial z_0.

Podemos comparar os vários métodos iterativos de resolução de equações considerando apenas suas ordens de convergência. No entanto, faz mais sentido compará-los considerando a eficiência computacional de cada método. Assim, sendo p a ordem de convergência do processo iterativo e s o número de novos cálculos de valores numéricos do polinômio e de suas derivadas que são necessários em cada passo, define-se <u>índice de eficiência</u> E do método por

$$E = p^{1/s}$$

Observamos que um método é tanto melhor quanto maior é o seu índice de eficiência; e, que, usualmente, negligencia-se o fato de que algumas vezes são necessários vários cálculos do valor do polinômio e de suas derivadas para o início do processo.

1.2. Considerações sobre o erro na determinação de raízes

A maioria dos métodos de determinação de raízes de equações apresentam problemas com raízes múltiplas ou muito próximas.

No caso de raízes múltiplas estes problemas são de dois tipos:

O primeiro deles é que a ordem de convergência para uma raiz de multiplicidade $m>1$ é distintamente menor que a ordem

de convergência para uma raiz simples, a menos que o método seja alterado de modo a incluir informações sobre a multiplicidade.

O segundo problema é a imprecisão dos cálculos dos valores do polinômio na vizinhança de uma raiz.

Surge, então, a pergunta: Qual é o efeito que a imprecisão nos valores do polinômio acarreta sobre a precisão da raiz? Para respondê-la, suponhamos que x seja uma aproximação para a raiz α de multiplicidade m e que ao calcularmos p(x) obtenhamos um valor aproximado $\tilde{p}(x)$. Então

$$|p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \varepsilon \tag{1.2.1}$$

para algum ε aceitável.

Suponhamos agora, que para um certo z tenhamos $\tilde{p}(z) = 0$. Quanto de erro pode z conter? Temos

$$p(z) \simeq (z - \alpha)^m \frac{p^{(m)}(\alpha)}{m!} \tag{1.2.2}$$

Usando (1.2.1) em (1.2.2) concluimos que podemos ter

$$\pm \varepsilon \simeq (z - \alpha)^m \frac{p^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

ou seja, é possível que

$$|z - \alpha| \simeq \varepsilon^{1/m} \left|\frac{m!}{p^{(m)}(\alpha)}\right|^{1/m} \tag{1.2.3}$$

Como para ε pequeno e $m>1$ o termo $\varepsilon^{1/m}$ é muito maior que ε, torna-se claro que há uma grande perda de precisão no caso de raízes múltiplas; enquanto que no caso de raízes simples a variação é proporcional a ε. Por isso, raízes múltiplas, são em geral , mal condicionadas no sentido de serem sensíveis aos erros nos cálculos dos valores do polinômio.

Esta instabilidade exibida nos cálculos é confinada a uma região que inclue a raiz e que Wilkinson /47/ denomina círculo de indeterminação da raiz. Ou seja, justamente dentro da região onde a raiz está localizada, é impossível determiná-la, a menos que se aumente a precisão dos cálculos aritméticos. A solução para este mal condicionamento é, portanto, o uso da aritmética de dupla precisão.

Observamos que embora a instabilidade nos cálculos possa ser influenciada por detalhes no cálculo do valor do polinômio, pelo comprimento da palavra da máquina e por erros de arredondamento, a maior causa está no mal condicionamento das raízes.

No entanto, raízes simples também podem ser mal condicionadas. Está claro que podemos esperar que raízes simples muito próximas "comportem-se" como raízes múltiplas. Contudo, as raízes podem ser mal condicionadas mesmo quando são simples e bem separadas. É o caso mostrado pelo famoso exemplo de Wilkinson /48/ quando ele considera a equação polinomial

$$p(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \ldots + 20! = 0$$

cujas raízes são obviamente simples e bem separadas; contudo, uma pequena variação num dos coeficientes deste polinômio causa muita imprecisão nas raízes. Assim é que com uma pequena mudança absoluta da ordem de 2^{-23} no coeficiente de x^{19} ele passa a ser -210.000000119 e as raízes da equação polinomial perturbada $p(x) + 2^{-23}x^{19} = 0$, com 9 decimais são:

1.000000000	8.917250249
2.000000000	20.846908101
3.000000000	10.095266145 ± 0.643500904i
4.000000000	11.793633881 ± 1.652329728i
4.999999928	13.992358137 ± 2.518830070i
6.000006944	16.730737466 ± 2.812624894i
6.999697234	19.502439400 ± 1.940330347i
8.007267603	

Wilkinson mostra que nesta equação polinomial a dificuldade é causada pelo espaçamento regular das raízes e observa que, na prática, isto é mais perigoso que a existência de raízes de alta multiplicidade.

Já a equação polinomial

$$p(x) = \prod_{j=1}^{20} (x-2^{-j}) = 0$$

cujas raízes não são bem separadas tem, no entanto, todas as raízes bem condicionadas com respeito a pequenas mudanças relativas

nos coeficientes a_i (mudanças de a_i para $a_i(1+\varepsilon)$), mas não com respeito a pequenas mudanças absolutas nos coeficientes a_i (mudanças de a_i para $a_i+\varepsilon$).

1.3. A precisão dos resultados

Sejam $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ as n aproximações das raízes de uma equação polinomial $p(z) = 0$ de grau n, obtidas por um programa computacional de um método qualquer de determinação de raízes. Em geral, consideramos que o programa foi bem sucedido em uma particular equação se pelo menos uma das seguintes condições são satisfeitas:

(i) as n aproximações $\tilde{\alpha}_j$ das raízes são "boas" aproximações das verdadeiras raízes α_j da equação.

(ii) as n aproximações $\tilde{\alpha}_j$ são tais que, em aritmética de ponto flutuante e precisão finita, os coeficientes $\tilde{a}_j$, $j=1,2, \ldots, n+1$, do polinômio reconstruído

$$\tilde{p}(z) = a_1 \prod_{j=1}^{n+1} (z - \tilde{\alpha}_j)$$

são "boas" aproximações dos coeficientes a_j, $j=1,2,\ldots,n+1$, do polinômio original $p(z)$.

Uma maneira de verificarmos se a condição (i) foi satisfeita é testarmos se

$$|\alpha_j - \tilde{\alpha}_j| \leq \varepsilon.\max(1, |\tilde{\alpha}_j|)$$

onde ε é um limite pré-determinado do erro relativo.

Este tipo de teste tem grandes limitações, pois para o aplicarmos devemos, necessariamente, conhecer as raízes verdadeiras. Por isso, todos os programas que elaboramos testam a precisão das aproximações $\tilde{\alpha}_j$ usando a condição (ii). A seguir, mostramos como realizamos esta avaliação.

1.4. Reconstrução do polinômio

Depois que a equação polinomial de grau n, $p(z) = 0$, foi completamente fatorada, todos os fatores são multiplicados em aritmética de dupla precisão para gerar um polinômio de grau n cujos coeficientes são multiplicados pelo coeficiente a_1 do termo de maior grau de $p(z)$. O polinômio resultante destes produtos é o polinômio reconstruído. Pela comparação dos coeficientes a_j do polinômio original $p(z)$ com os coeficientes $\tilde{a}_j$ do polinômio reconstruído $\tilde{p}(z)$, podemos estimar o quanto a fatoração representa uma satisfatória aproximação da fatoração verdadeira de $p(z) = 0$. Wilkinson /47/ e /48/ apresenta informações detalhadas a este respeito.

Assim, sendo $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ as raízes obtidas pela aplicação de um método qualquer, a reconstrução dos coeficientes do polinômio pode ser realizada de duas maneiras:

(1) Se $p(x)$ é um polinômio real e a determinação das raízes $\tilde{\alpha}_j$ foi realizada de modo que as raízes complexas e suas conjugadas estão em localizações adjacentes, então

$$\tilde{p}(x)=\{\{\ldots[(x^2-2xR_e\tilde{\alpha}_n+|\tilde{\alpha}_n|^2)(x^2-2xR_e\tilde{\alpha}_{n-2}+|\tilde{\alpha}_{n-2}|^2)]\ldots(x-\tilde{\alpha}_2)\}(x-\tilde{\alpha}_1)\}a_1$$

Observamos que nos programas que elaboramos, aqueles que determinam raízes reais e complexas de equações polinomiais reais zeram as partes imaginárias das raízes reais. Assim, um simples teste, verificando se a parte imaginária de uma raiz $\tilde{\alpha}_j$ é nula ou não, indicará se o correspondente fator a ser considerado no produto acima é $(x-\tilde{\alpha}_j)$ ou $(x^2-2xR_e\tilde{\alpha}_j + |\tilde{\alpha}_j|^2)$.

(2) Se p(z) é um polinômio que pode ser complexo e/ou se as raízes complexas não estão em localizações adjacentes, então

$$\tilde{p}(z) = \{\{[(z-\tilde{\alpha}_n)(z-\tilde{\alpha}_{n-1})]\ldots(z-\tilde{\alpha}_2)\}(z-\tilde{\alpha}_1)\}a_1$$

Em qualquer dos dois casos, uma vez obtido $\tilde{p}(z)$, determinamos o maior erro relativo entre os coeficientes de p(z) e $\tilde{p}(z)$, calculando

$$\delta = \max_{2\leq j\leq n+1} |\delta_j| \quad \text{onde} \quad \delta_j = \begin{cases} \dfrac{\tilde{a}_j - a_j}{a_j} & \text{se } a_j \neq 0 \\ \tilde{a}_j & \text{se } a_j = 0 \end{cases}$$

Por fim, testamos se $\delta \leq 10^{-k}$. Se o teste falhar, o programa imprime uma mensagem especificando que o polinômio reconstruído tem menos de k dígitos significativos corretos.

1.5. Considerações sobre a deflação

Os métodos de determinação de raízes de equações polinomiais podem ser classificados como aqueles que fornecem uma só raiz ou um par de raízes a cada aplicação do processo; ou aqueles

que determinam todas as raízes simultaneamente. Os que propomos e/ou analisamos neste trabalho são do primeiro tipo; e, por isso, exigem alguma técnica de deflação para a remoção das raízes já determinadas.

Wilkinson, mostra em /48/ que a deflação "para a frente" realizada através da fórmula usual de recorrência de Horner é instável se removermos primeiro uma raiz de módulo consideravelmente maior que os módulos das raízes restantes e que a deflação "para trás" é instável se removermos primeiro uma raiz de módulo consideravelmente menor que os módulos das demais raízes.

Por isso, na programação dos métodos aqui apresentados usamos, de modo explícito, a deflação "para a frente", que denominamos simplesmente de deflação, e procuramos sempre determinar as raízes em ordem crescente de módulo. Assim, aplicamos Horner se desejamos remover uma única raiz ou dividimos o polinômio por um polinômio quadrático se queremos remover um par de raízes complexas conjugadas ou um par de raízes reais múltiplas como ocorre no método MIDREM que apresentaremos para a determinação das raízes e suas multiplicidades.

A deflação explícita é quando muito semi-estável no sentido que os efeitos acumulados depois de muitas deflações podem resultar numa significativa perda de precisão. Isto é particulamente verdadeiro se um dos polinômios deflacionados é consideravelmente mais mal condicionado que o polinômio original.

Uma estratégia prática para evitarmos este inconveniente na determinação da próxima raiz é aplicarmos o método em uso sobre o polinômio deflacionado até verificarmos que as aproximações obtidas estão convergindo para alguma raiz do polinômio deflacionado; e, então, reaplicarmos o método sobre esta última

aproximação usando, agora, o polinômio original de grau n. Está claro que esta reaplicação do método terá bem poucas iterações.

1.6. Computador Digital

O computador digital que utilizamos para este trabalho é um Sistema Digital marca DIGITAL modelo PDP 11/45 do Laboratório de Computação do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, que tem as seguintes características principais:

- memória principal de 128 K palavras, 200 nseg., palavra de 16 bits;
- aritmética de ponto flutuante;
- discos magnéticos (3), modelo RK11 J, capacidade de 7,2 Mbytes, tempo de transferência de 11,1 μseg/palavra, tempo médio de acesso de 50 mseg.;
- impressora, modelo LP11 VA, velocidade de 300 linhas por minuto, 132 caracteres por linha;
- leitora de cartões, modelo CR11 VA, velocidade de 200 cartões por minuto;
- terminais: 1 de video modelo VT52, capacidade da tela de 80 caracteres por linha e 24 linhas por tela, formatado ; 3 impressores modelo LA36, com velocidade de saída de 30 caracteres por segundo.

1.7. Comentários diversos

As quase seis centenas de equações polinomiais que serviram para os testes de nossos programas foram obtidas de vários textos da literatura matemática ou foram construídas para que testássemos casos especiais dos métodos que propomos e/ou analisamos. Muitas foram especialmente construidas segundo as exigências contidas em /28/. As equações polinomiais que testamos estão assim distribuidas:

	Equações Polinomiais Reais com					
grau	todas as raízes reais	todas as raízes complexas	raízes reais e complexas	raiz multipla	raízes iguais	total
2	13	5	-	8	8	18
3	70	-	29	20	10	99
4	80	32	41	40	9	153
5	40	-	51	32	4	91
6	32	6	22	20	8	60
7	11	-	15	8	-	26
8	16	5	11	9	3	32
9	7	-	5	5	-	12
10	9	-	4	9	2	13
11	1	-	2	1	-	3
12	5	1	3	3	2	9
13	4	-	-	2	-	4
14	2	-	1	-	-	3
15	3	-	3	3	1	6
16	3	-	1	1	-	4
17	2	1	-	1	-	3
18	-	-	2	-	-	2
19	1	-	2	-	-	3
20	2	-	3	2	-	5
50	-	-	1	-	-	1
Total	301	50	196	164	47	547

Equações polinomiais complexas com		
grau	raízes múltiplas	total
2	1	6
3	3	16
4	-	10
5	2	7
6	-	3
7	-	1
8	1	2
9	-	1
10	1	1
14	-	1
Total	8	48

Observamos que sempre é conveniente que todos os coeficientes da equação $p(z) = 0$ tenham a mesma ordem de grandeza. Isto pode ser obtido através de uma transformação nas raízes de modo que

$$z \to 10^r z' \qquad \text{ou} \qquad z \to 2^s z'$$

Se suspeitamos existirem várias raízes muito próximas numa vizinhança de $z_0 = x_0 + iy_0$, a transformação

$$z \to z_0 - z$$

aumentará o coeficiente de separação das raízes.

Algumas vezes a transformação

$$z \to \frac{1}{z}$$

melhora o comportamento numérico do método utilizado.

Tais transformações são consideradas como auxiliares na obtenção de raízes de equações polinomiais problemáticas ao método utilizado e não foram por nós usadas nos testes que efe - tuamos dos métodos que propomos e/ou analisamos.

Finalizamos este capítulo de considerações preliminares repetindo a já conhecida observação: Nenhum método de resolução de equações determina satisfatoriamente todas as raízes de todas as equações.

CAPITULO 2

SOBRE A DETERMINAÇÃO DE VALORES INICIAIS

2.1. Introdução

Embora existam numerosos resultados sobre regiões no plano complexo que contêm raízes de uma equação polinomial, a determinação de um valor inicial para a obtenção de uma raiz ainda é um dos pontos mais cruciais e problemáticos ao usarmos a maioria dos métodos iterativos não intervalares de resolução de equações.

Neste capítulo apresentaremos duas técnicas (uma no item 2.2.2. denominada Fase Inicial e outra no item 2.2.4. denominada Variante da Fase Inicial) para a determinação de uma ou mais aproximações iniciais para a raiz de menor módulo da equação de coeficientes complexos

$$p(z) = a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_{n+1} = 0 \qquad (2.1.1)$$

As técnicas de determinação de um valor inicial que desenvolveremos a seguir podem ser aplicadas a vários métodos iterativos. No entanto, nos preocuparemos fundamentalmente com um método que é, em essência, o método de Newton aplicado a $u(z) = p(z)/p'(z) = 0$.

Mostraremos também que quando determinamos a aproximação inicial usando a Fase Inicial e esta modificação do método

de Newton podemos determinar, sem analisar os coeficientes de uma equação polinomial real, se suas raízes são tais que sendo α uma raiz de multiplicidade m da equação então $-\alpha$ também é raiz de multiplicidade m da equação.

2.2. A determinação de valores iniciais

2.2.1. Um círculo que contém pelo menos uma raiz de $p(z) = 0$

Em /36/, Pomentale considera a classe dos processos iterativos definidos por

$$z_{i+1} = z_i + \phi_k(z_i), \qquad k = 2,3,\ldots$$

onde

$$\phi_k(z) = (k-1)\,\frac{(p'/p)^{(k-2)}}{(p'/p)^{(k-1)}} \tag{2.2.1}$$

e demonstra o seguinte teorema:

Teorema 2.1.: Seja $\Delta_1 = -p(z)/p'(z)$ e sejam $\Delta_j = \phi_j(z)$, $j = 2,3,\ldots$ as funções definidas por (2.2.1). Então, para cada k, o círculo centrado em z com raio

$$\rho = n^{1/k}\,|\,\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdots \Delta_k\,|^{1/k}$$

contém pelo menos uma raiz de (2.1.1).

Demonstração: De (2.2.1), com $\phi_k = \Delta_k$, temos

$$\frac{1}{\Delta_k} = \frac{(p'/p)^{(k-1)}}{(k-1)\,(p'/p)^{(k-2)}}$$

Derivando a expressão

$$\frac{p'}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_i}$$

onde α_i são raízes de $p(z) = 0$, obtemos

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^{(k-1)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(z-\alpha_i)^k}$$

Portanto,

$$\left|\frac{1}{\Delta_k}\right| \leq \frac{(k-1)!\,\dfrac{n}{\min\limits_i |z-\alpha_i|^k}}{(k-1)\left|(p'/p)^{(k-2)}\right|} = \frac{\dfrac{n}{\min\limits_i |z-\alpha_i|^k}}{\dfrac{1}{(k-2)!}\left|\left(\dfrac{p'}{p}\right)^{(k-2)}\right|}$$

Mas

$$\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{p'}{p}\right)^{(k-2)} = \frac{(p'/p)^{(k-2)}(p'/p)^{(k-3)}\cdots(p'/p)}{(k-2)(p'/p)^{(k-3)}(k-3)(p'/p)^{(k-4)}\cdots 1}$$

$$= \frac{-1}{\Delta_{k-1}\,\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1}$$

Então obtemos

$$\min_{1\leq i\leq n}|z-\alpha_i|^k \leq n|\Delta_1\,\Delta_2\cdots\Delta_k|$$

o que demonstra o teorema.

Observemos que fazendo k=2 em (2.2.1), obtemos o processo iterativo

$$z_{i+1} = z_i - \frac{p(z_i)p'(z_i)}{[p'(z_i)]^2 - p(z_i)p''(z_i)} \qquad (2.2.2)$$

Fazendo

$$S_1 = -\frac{p'(z_i)}{p(z_i)} \quad e \quad S_2 = \left[\frac{p'(z_i)}{p(z_i)}\right]^2 - \frac{p''(z_i)}{p(z_i)} \tag{2.2.3}$$

podemos escrever (2.2.2) na forma

$$z_{i+1} = z_i + \frac{S_1}{S_2} \tag{2.2.4}$$

Portanto, para este método iterativo, o raio obtido do Teorema 2.1. é

$$\rho = \sqrt{n} \cdot \sqrt{|\Delta_1 \cdot \Delta_2|}$$

ou

$$\rho = \sqrt{n} \,/\, \sqrt{|S_2|} \tag{2.2.5}$$

Assim, quando pretendemos determinar uma raiz de (2.1.1) usando o método iterativo (2.2.2), temos uma maneira simples e eficiente para determinarmos uma vizinhança circular, de centro z e raio ρ dado por (2.2.5), que contém pelo menos uma raiz de (2.1.1). Permanece, no entanto, o problema da determinação da aproximação inicial. Para resolvermos esta questão, que denominamos Fase Inicial, procedemos da seguinte forma:

2.2.2. Fase Inicial - Um círculo que contém pelo menos a raiz de menor módulo de $p(z) = 0$

Inicialmente, observamos que, de agora em diante, impomos a (2.1.1) a condição $a_{n+1} \neq 0$.

1. Determinamos o raio δ de um círculo centrado na origem que não contenha nenhuma raiz de (2.1.1).

2. Usamos (2.2.5) para determinarmos o raio ρ_1 de um círculo de centro δ que contém pelo menos uma raiz de (2.1.1).

3. Analogamente, usamos (2.2.5) para determinarmos o raio ρ_2 de um círculo de centro $-\delta$ que contém pelo menos uma raiz de (2.1.1).

4. Como aproximação inicial consideramos:

a) $x_0 = \delta + \rho_1$ se $\rho_1 \leq \rho_2$

ou (2.2.6)

$x_0 = -\delta - \rho_2$ se $\rho_2 < \rho_1$

se a raiz a ser determinada é real;

b) $z_0 = (\delta + \frac{\rho_1}{2}) + \frac{\rho_1}{2} i$ se $\rho_1 \leq \rho_2$

ou (2.2.7)

$z_0 = -(\delta + \frac{\rho_2}{2}) + \frac{\rho_2}{2} i$ se $\rho_2 < \rho_1$

se a raiz a ser determinada é complexa.

Observamos que como o Teorema 2.1 nos assegura que $\rho \to 0$ quando $z \to \alpha$, então se $\alpha = a+ib$ e $a \neq 0$, o círculo de menor raio entre ρ_1 e ρ_2 determina de que lado do eixo real localiza-se a raiz α de menor módulo. Assim, como aproximação inicial podemos considerar qualquer ponto pertencente ao círculo de menor raio.

Observamos também que se o intervalo

$[\delta, \delta + \rho_1]$ se $\rho_1 \leq \rho_2$

ou

$[-\delta - \rho_2, -\delta]$ se $\rho_2 < \rho_1$

não é muito grande, também podemos considerar

$$x_0 = \delta \qquad \text{se} \quad \rho_1 \leq \rho_2$$

ou (2.2.8)

$$x_0 = -\delta \qquad \text{se} \quad \rho_2 < \rho_1$$

como aproximação inicial real; ou

$$z_0 = \delta + \gamma i \quad \text{com} \quad \gamma = \min\{\delta, \rho_1\} \quad \text{se} \quad \rho_1 \leq \rho_2$$

ou (2.2.9)

$$z_0 = -\delta + \gamma i \quad \text{com} \quad \gamma = \min\{\delta, \rho_2\} \quad \text{se} \quad \rho_2 < \rho_1 \quad .$$

como aproximação inicial complexa. No caso real há a vantagem de serem conhecidos todos os valores envolvidos no cálculo de x_1.

Está claro que nem sempre sabemos se a raiz a ser determinada é real ou complexa. Mais adiante apresentaremos alguns resultados que ajudam a elucidar esta questão.

Se nada sabemos a respeito das raízes de (2.1.1), o passo 1 da Fase Inicial pode ser realizado usando o seguinte resultado bastante conhecido e encontrado, por exemplo, em /49/:

Não existe nenhuma raiz de (2.1.1) no círculo $|z| \leq \delta$, onde

$$\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}, \quad \text{sendo}$$

$$\begin{cases} \delta_1^{-1} = \max\{1, \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_j}{a_{n+1}}\right|\} \\ \delta_2^{-1} = \max\{\left|\frac{a_1}{a_{n+1}}\right|, 1 + \max_{2\leq j\leq n}\left|\frac{a_j}{a_{n+1}}\right|\} \\ \delta_3 = \frac{|a_{n+1}|}{\sqrt{\sigma}} \quad \text{onde} \quad \sigma = \sum_{j=1}^{n+1} |a_j|^2 \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Se a equação cuja raiz desejamos determinar é real e se sabemos, à priori, que todas as suas raízes são reais, então a determinação de um intervalo que não contenha nenhuma raiz é mais simples e mais rápida. É o que demonstramos no teorema que propomos a seguir.

<u>Teorema 2.2.</u>: Consideremos a equação polinomial de grau n

$$p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1} = 0; \; a_{n+1} \neq 0$$

cujas raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ com $k \leq n$ são reais e tais que $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$. Então, nenhuma raiz de $p(x) = 0$ pertence ao intervalo $[-\delta, \delta]$ e todas as raízes de $p(x) = 0$ pertencem ao intervalo $[-\gamma, \gamma]$ onde

$$\delta = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n+1}\, a_{n-1}}\right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \gamma = \left[\frac{a_2^2 - 2a_1\, a_3}{a_1^2}\right]^{1/2}$$

<u>Demonstração</u>: Escrevendo p(x) na forma fatorada, temos

$$p(x) = a_1 \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{m_i}$$

onde m_i, $i = 1,2,\ldots,k$, são as multiplicidades de α_i.

Diferenciando $\ln p(x)$ obtemos

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{x-\alpha_i}$$

Diferenciando esta expressão e multiplicando por (-1), temos

$$\frac{p'^2(x) - p(x)\,p''(x)}{p^2(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{(x-\alpha_i)^2}$$

Fazendo $x = x_0$ onde $x_0 \in R$ está mais próximo de α_1 que de qualquer outra raiz de $p(x) = 0$, temos

$$0 < \frac{m_1}{(x_0-\alpha_1)^2} < \frac{p'^2(x_0) - p(x_0)p''(x_0)}{p^2(x_0)} \qquad (2.2.11)$$

e portanto

$$(x_0 - \alpha_1)^2 > \frac{(x_0-\alpha_1)^2}{m_1} > \frac{p^2(x_0)}{p'^2(x_0) - p(x_0)p''(x_0)}$$

Ou seja, dado um valor x_0, podemos determinar um intervalo de centro x_0 e amplitude

$$2 \times \left[\frac{p^2(x_0)}{p'^2(x_0)-p(x_0)p''(x_0)}\right]^{1/2}$$

que não contém nenhuma raiz de $p(x) = 0$.

Em particular, se $x_0 = 0$ temos

$$p(0) = a_{n+1}, \quad p'(0) = a_n \quad e \quad p''(0) = 2a_{n-1}$$

Portanto, nenhuma raiz de $p(x) = 0$ pertence ao intervalo $[\delta, -\delta]$, com

$$\delta = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n+1}\, a_{n-1}}\right]^{1/2} \qquad (2.2.12)$$

Analogamente, fazendo $y = 1/x$ e colocando $y_0 = 0$, concluimos que todas as raizes de $p(x) = 0$ pertencem ao intervalo $[-\gamma, \gamma]$, com

$$\gamma = \left[\frac{a_2^2 - 2a_1\, a_3}{a_1^2}\right]^{1/2}$$, o que demonstra o teorema.

Observamos que o denominador de (2.2.12) é sempre maior que zero pois todas as raízes da equação são reais.

Exemplo 2.1. - Para ilustrar a execução da Fase Inicial, consideremos a equação polinomial

$$p(z) = z^4 - 6z^3 + 12z^2 - 10z + 3 = 0$$

Suponhamos que não sabemos se suas raizes são reais ou complexas. Então aplicando (2.2.10), temos

$$\delta_1 = 0.103448276, \quad \delta_2 = 0.2 \quad e \quad \delta_3 = 0.176166066$$

e portanto, $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = 0.2$

Concluimos então que o círculo $|z| \leq 0.2$ não contém nenhuma raiz de $p(z) = 0$.

Agora, determinamos o raio ρ_1 de um círculo de centro 0.2 que contém pelo menos uma raiz de $p(z) = 0$. Obtemos

$$S_2(\delta) = \left[\frac{p'(0.2)}{p(0.2)}\right]^2 - \frac{p''(0.2)}{p(0.2)} = 4.815051020$$

e, portanto,

$$\rho_1 = \sqrt{n} \;/\; \sqrt{S_2(\delta)} = 0.911443074$$

Procedendo de maneira análoga, determinamos o raio de um círculo de centro -0.2 que contém pelo menos uma raiz de $p(z) = 0$. Obtemos

$$S_2(-\delta) = \left[\frac{p'(-0.2)}{p(-0.2)}\right]^2 - \frac{p''(-0.2)}{p(-0.2)} = 2.180989583$$

e, então,

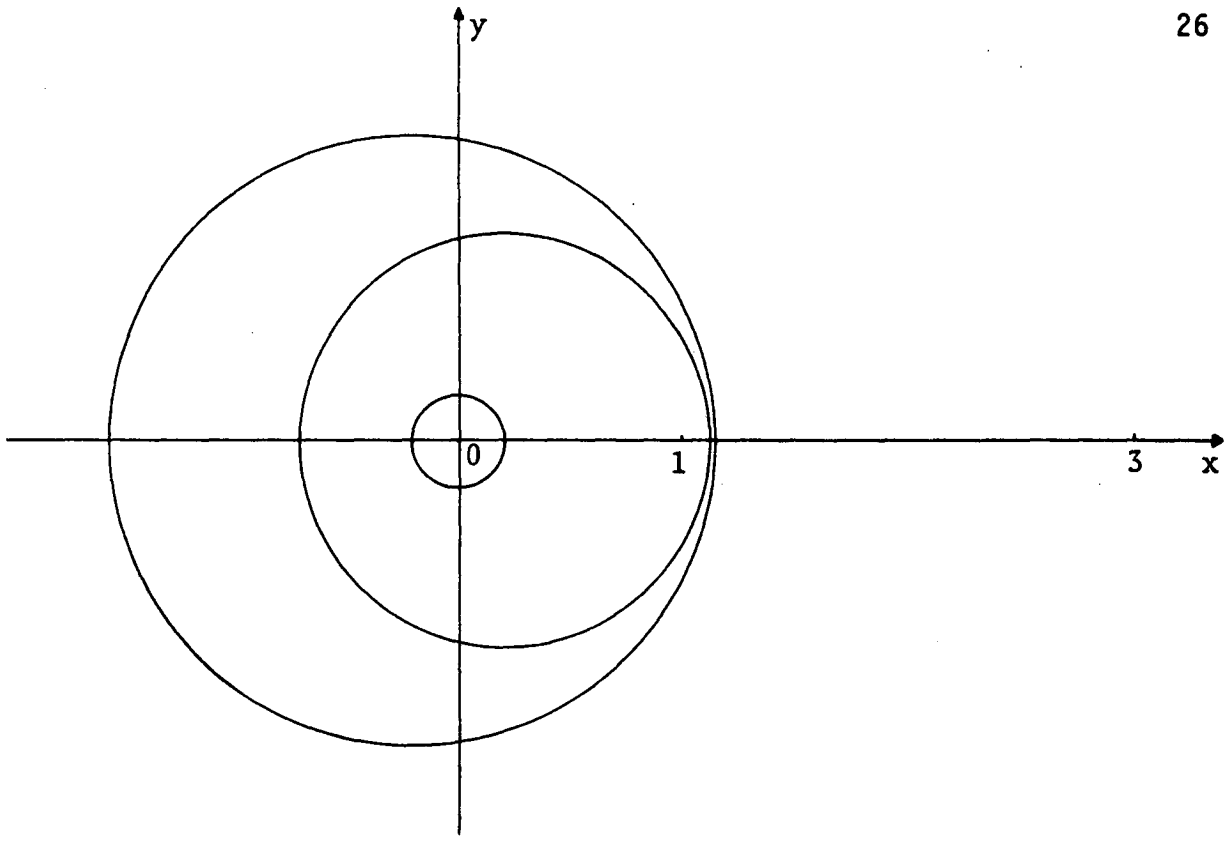
$$\rho_2 = \sqrt{n} \;/\; \sqrt{S_2(-\delta)} = 1.354263580$$

Como $\rho_1 < \rho_2$ (ou, como $S_2(\delta) > S_2(-\delta)$), concluimos que a raiz de menor módulo de $p(z) = 0$ tem parte real positiva ou nula.

Como aproximação inicial, podemos considerar, por (2.2.8), $x_0 = \delta = 0.2$ através da qual calculamos x_1 imediatamente; ou, usando (2.2.6), $x_0 = \delta + \rho_1 = 1.111443074$.

Mais adiante, mostraremos como determinar se a raiz é real ou complexa.

Na figura seguinte representamos a Fase Inicial graficamente. As verdadeiras raízes de $p(z) = 0$ são 1 (tripla) e 3.



Exemplo 2.2- Para ilustrar a determinação de uma aproximação z_0 complexa, consideremos a equação

$$p(z) = z^4 + 4 = 0$$

cujas raízes são $\pm 1 \pm i$.

Aplicando (2.2.10) encontramos $\delta = 1$ e concluimos que o círculo $|z| \leq 1$ não contém nenhuma raiz de $p(z) = 0$.

Agora, aplicando (2.2.5) determinamos o raio ρ_1 de um círculo de centro 1 que contém pelo menos uma raiz de $p(z) = 0$. Obtemos

$$S_2(\delta) = \left[\frac{p'(1)}{p(1)}\right]^2 - \frac{p''(1)}{p(1)} = -1.76$$

e, portanto

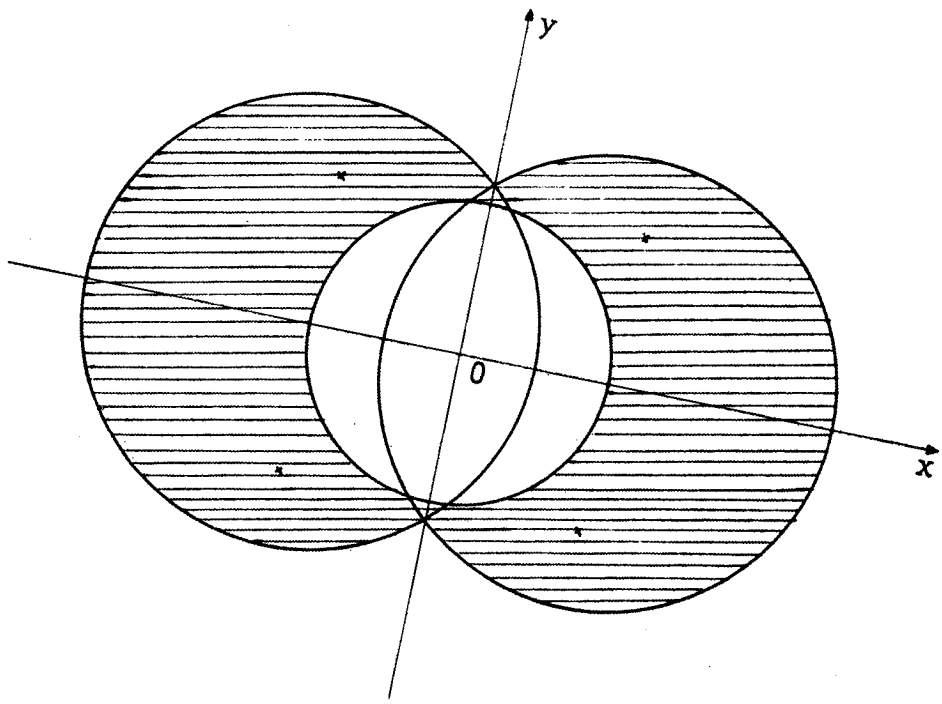
$$\rho_1 = \sqrt{n} \,/\, \sqrt{|S_2(\delta)|} = 1.507556723$$

Analogamente, determinamos o raio ρ_2 de um círculo de centro -1 que contém pelo menos uma raiz de $p(z) = 0$. Obtemos

$$S_2(-\delta) = \left(\frac{p'(-1)}{p(-1)}\right)^2 - \frac{p''(-1)}{p(-1)} = -1.76$$

e, portanto, $\rho_2 = 1.507556723$

No gráfico a seguir, a região que contém a raiz é a hachuriada.



Observemos que ao realizarmos o passo 4 da Fase Inicial, se tomarmos como aproximação inicial complexa, o valor dado por (2.2.9) teremos

$$z_0 = \delta(1+i) = 1 + i$$

e, neste caso, teremos determinado uma raiz da equação.

Como valor inicial, também podemos considerar o dado por (2.2.7) que resulta em

$$z_0 = (\delta + \frac{\rho_1}{2}) + \frac{\rho_1}{2} i = 1.753778362 + 0.753778362i$$

Exemplo 2.3. - A restrição que todas as raízes de uma equação polinomial sejam reais é satisfeita, em particular, por muitos conjuntos de polinômios ortogonais. Consideremos, por exemplo, o polinômio de Laguerre $L_4(x)$ dado por

$$p(x) = L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 = 0$$

Usando (2.2.12) para a execução do passo 1 da Fase Inicial, temos

$$\delta = \left[\frac{a_5^2}{a_4^2 - 2a_5a_3}\right]^{1/2} = 0.316227766$$

Concluimos, portanto, que não existe raiz de $p(x) = 0$ no intervalo $[-0.316227766, +0.316227766]$.

Aplicando (2.2.5) a δ e $-\delta$, obtemos

$$S_2(\delta) = 25037.21435 \Rightarrow \rho_1 = 0.012639707$$

e

$$S_2(-\delta) = 2.739036285 \Rightarrow \rho_2 = 1.208456725$$

Concluimos, então, que a raiz de menor módulo é positiva (como esperávamos, pois todas as raízes de $L_4(x) = 0$ são positivas) e pertence ao intervalo

$$(\delta, \delta + \rho_1] = (0.316227766, 0.328867473]$$

Como aproximação inicial tomamos, por (2.2.6),

$$x_0 = \delta + \rho_1 = 0.328867473$$

Observamos que a verdadeira raiz é 0.3225476896.

<u>Exemplo 2.4</u> - Para ilustrar a determinação de uma aproximação inicial para uma raiz de uma equação polinomial de coeficientes complexos, consideremos a equação

$$p(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - (2+11i) = 0$$

cuja raiz é 2+i de multiplicidade 3.

Aplicando (2.2.10) encontramos $\delta = 0.561833219$ e concluimos que o círculo $|z| \leqslant 0.561833219$ não contém nenhuma raiz da equação.

Como

$$S_2(\delta) = 0.340425249 - 0.916554211i \Rightarrow |S_2(\delta)| = 0.977732567$$

e

$$S_2(-\delta) = 0.291771255 - 0.268729360i \Rightarrow |S_2(-\delta)| = 0.396668545$$

concluimos que o círculo de centro δ e raio

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|S_2(\delta)|}} = 1.751663122$$

contém pelo menos a raiz de menor módulo da equação.

Como aproximação inicial tomamos, por (2.2.7)

$$z_0 = 1.437664780 + 0.875831561i$$

2.2.3. - Um caso especial revelado na Fase Inicial

O Teorema 2.3 que propomos a seguir tem a grande vantagem de nos permitir descobrir, a partir de um simples teste entre os raios ρ_1 e ρ_2 determinados por (2.2.5), se uma equação polinomial real que tendo uma raiz α, real ou complexa, de multiplicidade m tem também a raiz $-\alpha$ de multiplicidade m.

No entanto, antes de apresentarmos este teorema, necessitamos distinguir que tipo de equação polinomial real tem tais raízes. É o que estabelecemos no Lema seguinte.

Lema: Uma equação polinomial real é do tipo

$$p(z) = a_1 z^n + a_3 z^{n-2} + a_5 z^{n-4} + \ldots + a_{n-1} z^2 + a_{n+1} = 0 \qquad (2.2.13)$$

com n par se, e somente se, sendo α uma raiz de $p(z) = 0$ com multiplicidade m então $-\alpha$ também é raiz de $p(z) = 0$ com multiplicidade m.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que sendo α uma raiz de $p(z) = 0$ então $-\alpha$ também é raiz de $p(z) = 0$. Isto é imediato, pois por hipótese, n é par. Então

$$p(-\alpha) = p(\alpha) = 0$$

Mostremos agora que as raízes α e $-\alpha$ de $p(z) = 0$, tem a mesma multiplicidade. Temos dois casos a considerar:

1º Caso: Se $\alpha = a \in R$, então

$$(z - \alpha)(z + \alpha) = z^2 - a^2$$

Então, como α e $-\alpha$ são raízes de $p(z)=0$, podemos escrever:

$$p(z) = (z^2 - a^2) \cdot Q(z)$$

$$= (z^2 - a^2)\left(q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + q_3 z^{n-4} + \ldots + q_{n-2} z + q_{n-1}\right)$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade e igualando ambos os membros termo a termo, concluimos que os coeficientes de $Q(z)$ são determinados recorrentemente por:

$$q_1 = a_1$$

$$q_2 = a_2$$

$$q_j = a_j + a^2 q_{j-2}, \quad \text{para } j = 3,4,\ldots,n-1$$

Mas, por hipótese, $a_j=0$ para todo j par, e então $q_j=0$ para todo j par. Portanto, $Q(z)$ é um polinômio do mesmo tipo de $p(z)$ pois $Q(z)$ tem grau par e seus coeficientes dos termos de potências ímpares são nulos. Assim, se α é raiz de $Q(z)=0$ então $-\alpha$ também é raiz de $Q(z)=0$. Consequentemente, α e $-\alpha$ são raízes de $p(z)=0$ de mesma multiplicidade.

<u>2º Caso</u>: Se $\alpha = a+ib$ com $b \neq 0$ então

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})(z+\alpha)(z+\bar{\alpha}) = \left[(z-a)^2+b^2\right]\left[(z+a)^2+b^2\right]$$

Como, por hipótese, α e $-\alpha$ são raízes de $p(z)=0$, então $\bar{\alpha}$ e $-\bar{\alpha}$ também são raízes de $p(z)=0$. Temos, então

$$p(z) = \left[(z-a)^2+b^2\right]\left[(z+a)^2+b^2\right] Q(z)$$

Considerando

$$Q_1(z) = \left[(z+a)^2+b^2\right] Q(z)$$

temos

$$p(z) = \left[(z-a)^2+b^2\right] Q_1(z)$$

Portanto, de maneira análoga ao 1º caso, concluimos que $Q_1(z)$ e $Q(z)$ são polinômios do mesmo tipo de $p(z)$; ou seja, ambos tem grau par (n-2 e n-4, respectivamente) e tem coeficientes dos termos de potências ímpares nulos. Assim, se α é raiz de $Q(z) = 0$ então $-\alpha$ também o é; e, portanto, α e $-\alpha$ são raízes de $p(z) = 0$ de mesma multiplicidade.

Agora mostremos que se uma equação polinomial é tal que tendo uma raiz α de multiplicidade m tem também a raiz $-\alpha$ de mesma multiplicidade, então a equação é do tipo (2.2.13) com n par.

Assim, indiquemos as possíveis raízes complexas de $p(z)=0$, por

$$z_1,\ \bar{z}_1,\ -z_1,\ -\bar{z}_1,\ \ldots,\ z_k,\ \bar{z}_k,\ -z_k,\ -\bar{z}_k$$

onde $z_j = a_j+ib_j$ com $b_j \neq 0$;

e por q_j as multiplicidades das raízes z_j, $j = 1,2,\ldots,k$

Indiquemos as possíveis raízes reais de $p(z) = 0$ por

$$r_1,\ -r_1,\ r_2,\ -r_2,\ \ldots,\ r_s,\ -r_s$$

e por m_i as multiplicidades das raízes r_i, $i = 1,2,\ldots,s$.

Inicialmente, concluimos que $p(z)$ é um polinômio de grau n par, pois

$$n = 4 \sum_{j=1}^{k} q_j + 2 \sum_{i=1}^{s} m_i$$

Resta-nos mostrar que os coeficientes dos termos de potências ímpares de p(z) são nulos. Pelo Teorema da Decomposição, podemos escrever:

$$p(z) = a_1 \left[(z-z_1)(z-\bar{z}_1)(z+z_1)(z+\bar{z}_1)\right]^{q_1} \times \ldots$$

$$\times \left[(z-z_k)(z-\bar{z}_k)(z+z_k)(z+\bar{z}_k)\right]^{q_k} \times$$

$$\times \left[(z-r_1)(z+r_1)\right]^{m_1} \times \ldots\ldots \times \left[(z-r_s)(z+r_s)\right]^{m_s}$$

Portanto

$$p(z) = a_1 \prod_{j=1}^{k} \left[(z-a_j)^2 + b_j^2\right]^{q_j} \left[(z+a_j)^2 + b_j^2\right]^{q_j} \prod_{i=1}^{s} \left[z^2 - r_i^2\right]^{m_i}$$

o que demonstra nosso lema.

<u>Teorema 2.3</u>.: Consideremos a equação polinomial real de grau n

$$p(z) = a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_{n+1} = 0 \qquad (2.2.14)$$

com $a_{n+1} \neq 0$. Sejam $C_1(\delta, \rho_1)$ e $C_2(-\delta, \rho_2)$ círculos de centros δ e $-\delta$ e raios ρ_1 e ρ_2 determinados por (2.2.5). Então $\rho_1 = \rho_2$ se, e somente se, sendo $a \pm ib$ raízes de (2.2.14) com multiplicidades m então $-a \mp ib$ também são raízes de (2.2.14) com multiplicidades m.

<u>Demonstração</u>: Devido ao Lema anterior, para demonstrarmos este teorema basta mostrarmos que $\rho_1 = \rho_2$ se, e somente se, $p(z) = 0$ é uma equação polinomial de grau n par do tipo

(2.2.13). É o que demonstramos a seguir:

De (2.2.13) obtemos

$$p'(z) = n\,a_1\,z^{n-1} + (n-2)a_3z^{n-3} + \ldots + 2a_{n-1}z$$

e

$$p''(z) = n(n-1)a_1\,z^{n-2} + (n-2)(n-3)a_3z^{n-4} + \ldots + 2a_{n-1}$$

Assim, como em (2.2.13) n é par, para qualquer z temos

$$p(z) = p(-z)\,,\quad p'(z) = -p'(-z) \quad \text{e} \quad p''(z) = p''(-z)$$

Então

$$\left[\frac{p'(\delta)}{p(\delta)}\right]^2 - \frac{p''(\delta)}{p(\delta)} = \left[\frac{p'(-\delta)}{p(-\delta)}\right]^2 - \frac{p''(-\delta)}{p(-\delta)}$$

o que mostra que se $p(z) = 0$ é uma equação polinomial real de grau n par do tipo (2.2.13), então $\rho_1 = \rho_2$.

Agora suponhamos que

$$p(z) = a_1z^n + a_2z^{n-1} + a_3z^{n-2} + \ldots + a_nz + a_{n+1} = 0 \quad (2.2.15)$$

e mostremos que se $\rho_1 = \rho_2$ então $p(z) = 0$ deve ser do tipo (2.2.13) com grau n par

Inicialmente, observemos que $\rho_1 = \rho_2$ significa

$$p^2(-\delta)\left[p'^2(\delta) - p(\delta)p''(\delta)\right] = p^2(\delta)\left[p'^2(-\delta) - p(-\delta)p''(-\delta)\right] \quad (2.2.16)$$

Supondo que (2.2.15) tenha grau n par, temos

$$p'^2(z) = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)^2 a_i^2 z^{2(n-i)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (n-i+1)(n-j+1) a_i a_j z^{2n-i-j} \qquad \text{e}$$

$$p(z)p''(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1)(n-i) a_i^2 z^{2(n-i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \left[(n-i+1)(n-i)+(n-j+1)(n-j)\right] a_i a_j z^{2n-i-j}$$

Então

$$p'^2(z)-p(z)p''(z) = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) a_i^2 z^{2(n-i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \left[2(n+1)-(i-j)^2-i-j\right] a_i a_j z^{2n-i-j}$$

Como

$$p^2(-z) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 z^{2(n-i+1)} + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_i a_j z^{2n-i-j+2}$$

Temos, então

$$P(z) = p^2(-z)\left[p'^2(z)-p(z)p''(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} (n-i+1) a_i^2 a_j^2 z^{2(2n-i-j+1)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n+1} \left[2(n+1)-(j-k)^2-j-k\right] a_i^2 a_j a_k z^{2(2n-i+1)-j-k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n+1} (-1)^{j+k}\, 2(n-i+1)a_i^2 a_j a_k z^{2(2n-i+1)-j-k} \quad +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n+1} (-1)^{i+j}\, 2\left[2(n+1)-(k-\ell)^2-k-\ell\right] a_i a_j a_k a_\ell z^{2(2n+1)-i-j-k-\ell}$$

Ou seja,

$$P(z) = p^2(-z)\left[p'^2(z) - p(z)p''(z)\right] =$$

$$= na_1^4 z^{4n-2} - 2a_1^3 a_2 z^{4n-3} + (4n-6)a_1^3 a_3 z^{4n-4} + (-2n+3)a_1^2 a_2^2 z^{4n-4} -$$

$$-12a_1^3 a_4 z^{4n-5} + 4a_1^2 a_2 a_3 z^{4n-5} + (4n-20)a_1^3 a_5 z^{4n-6} -$$

$$-(4n-20)a_1^2 a_2 a_4 z^{4n-6} + (6n-14)a_1^2 a_3^2 z^{4n-6} +$$

$$+(-4n+4)a_1 a_2^2 a_3 z^{4n-6} + (n-1)a_2^4 z^{4n-6} + \ldots.$$

Calculando

$$P_1(z) = p^2(z)\left[p'^2(-z) - p(-z)p''(-z)\right]$$

observamos que os coeficientes de potências pares de $P(z)$ e $P_1(z)$ são iguais e que os coeficientes de potências ímpares de $P(z)$ e $P_1(z)$ são simétricos. Assim, como por hipótese, é válida a igualdade (2.2.16) para algum $z = \delta \neq 0$, então os coeficientes de potências ímpares de $P(z)$ e $P_1(z)$ devem ser nulos. Temos então

$$\pm 2a_1^3 a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad \text{pois } a_1 \neq 0 \text{ por hipótese.}$$

$$\pm 12a_1^3 a_4 \mp 4a_1^2 a_2 a_3 = 0 \Rightarrow a_4 = 0, \quad \text{etc..}$$

Concluimos então, que $p(z) = 0$ é necessariamente uma equação polinomial do tipo (2.2.13).

Resta-nos mostrar que n é par. Suponhamos, por absurdo, que n seja ímpar. Neste caso, para que a hipótese (2.2.16) seja válida, os coeficientes dos termos de potências pares de $P(z)$ e $P_1(z)$ é que deveriam ser nulos, pois eles é que seriam simétricos entre si. Então teríamos

$$\pm 4a_1^4 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

o que é um absurdo. Logo, n deve ser par, o que demonstra o teorema.

Conseqüência

Em outras palavras, o teorema anterior significa que se, ao determinarmos a aproximação inicial para uma raiz de (2.1.1) usando (2.2.5) na Fase Inicial, ocorrer que $\rho_1 = \rho_2$ então, uma vez refinada esta aproximação e determinada uma raiz $\alpha = a+ib$ de multiplicidade m, teremos determinado também:

1) a raiz $-a$ de multiplicidade m se $b = 0$.
2) as raízes $-a-ib$, $-a+ib$ e $a-ib$ de multiplicidades m se $b \neq 0$.

Exemplo 2.5 - Consideremos o exemplo 2.2. anterior. Lá, obtivemos

$$\rho_1 = \rho_2 = 1.507556723 \quad \text{e} \quad z_0 = 1+i$$

Mas $p(z_0) = 0$. Logo $z_0 = 1 \pm i$ são raízes da equação; e, pelo Teorema 2.3., $-1 \mp i$ também são raízes da equação. Assim, neste caso, todas as raízes foram determinadas.

2.2.4. Uma Variante da Fase Inicial

A seguir propomos uma outra forma de aplicarmos a Fase Inicial para a determinação de uma aproximação para uma raiz de uma equação polinomial cujas raízes são reais. A diferença entre esta variante e a Fase Inicial que apresentamos no item 2.2.2, é que aqui, no passo 1, determinamos um intervalo que contenha pelo menos uma raiz da equação. No teorema que propomos a seguir mostraremos como este intervalo, que decorre do Teorema 2.1, é determinado.

Teorema 2.4: Seja $p(x) = 0$ uma equação polinomial de grau n cujas n raízes α_i são reais e não nulas. Então o intervalo $[-\delta, \delta]$ onde

$$\delta = \left[\frac{n a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n-1}a_{n+1}}\right]^{1/2} \tag{2.2.17}$$

contém pelo menos uma raiz de $p(x) = 0$

Demonstração: Como vimos, a demonstração do Teorema 2.1. é obtida mostrando-se que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left|z-\alpha_i\right|^k \leq n \left|\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_k\right|$$

com $\Delta_j = \phi_j(z)$ dado por (2.2.1) para $j = 2,3,\ldots$

Fazendo $z = 0$, $k = 2$ e considerando que

$$\Delta_1\Delta_2 = \frac{1}{S_2(0)} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n-1}a_{n+1}} > 0$$

concluímos que o círculo de centro na origem e raio δ dado por (2.2.17) contém pelo menos uma raiz de $p(x) = 0$, o que demonstra o teorema.

Para determinarmos de que lado do eixo real está a raiz α de menor módulo de $p(x) = 0$, basta aplicarmos os passos 2 e 3 da Fase Inicial. Desta forma, temos

Variante da Fase Inicial

Sendo $p(x) = 0$ uma equação polinomial de raízes reais não nulas:

1) Determinamos, por (2.2.17), o intervalo $[-\delta, \delta]$ que contém pelo menos uma raiz de $p(x) = 0$.

2) Usando (2.2.5) determinamos o raio ρ_1 de um intervalo de centro δ que contém pelo menos uma raiz de $p(x) = 0$.

3) Usando (2.2.5) determinamos o raio ρ_2 de um intervalo de centro $-\delta$ que contém pelo menos uma raiz de $p(x) = 0$.

4) Como aproximação inicial, consideramos

$x_0 = \delta$ se $\rho_1 \leq \rho_2$

ou

$x_0 = -\delta$ se $\rho_2 < \rho_1$

pois o intervalo de menor amplitude contém pelo menos a raiz de menor módulo de $p(x) = 0$.

Exemplo 2.6 - A aplicação de (2.2.17) à equação polinomial do exemplo 2.3. anterior resulta em

$$\delta = \left[\frac{4(24)^2}{(-96)^2 - 2(72)(24)}\right]^{1/2} = 0.632455532$$

Portanto, a equação tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-0.632455532,\ 0.632455532]$.

Para determinarmos um intervalo de centro δ que contenha pelo menos uma raiz da equação, calculamos

$$S_2(\delta) = \left[\frac{p'(\delta)}{p(\delta)}\right]^2 - \frac{p''(\delta)}{p(\delta)} = 3.361168928$$

e, portanto, de (2.2.5), temos $\rho_1 = 0.595031087$

Para determinarmos um intervalo de centro $-\delta$ que contenha pelo menos uma raiz da equação, calculamos

$$S_2(-\delta) = \left[\frac{p'(-\delta)}{p(-\delta)}\right]^2 - \frac{p''(-\delta)}{p(-\delta)} = 1.320631084$$

e, portanto, $\rho_2 = 1.740360581$

Como $\rho_1 < \rho_2$, concluimos que o intervalo de centro δ e raio ρ_1 contém pelo menos a raiz de menor módulo; ou, mais especificamente, o intervalo $[\delta - \rho_1, \delta] = [0.037424445, 0.632455532]$ contém pelo menos a raiz de menor módulo da equação.

Observamos que se a equação polinomial real tem raízes complexas, em alguns casos, podemos determinar um círculo $|z| \leq \delta$ que contenha pelo menos uma raiz da equação, fazendo

$$\delta = \left| \frac{n a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n-1}a_{n+1}} \right|^{1/2}$$

Assim, por exemplo, para $p(z)=z^3+4z^2+z+4 = 0$ cujas raízes são $\pm i$ e -4, obtemos $\delta = 1.244342034$.

No entanto, isto em geral não é válido. Assim, por exemplo, para $p(z) = z^2+2z+2 = 0$ cujas raízes são $-1\pm i$, teríamos $\delta = (8/0)^{1/2}$!

Já, a equação $p(z) = z^3+z^2-4z+6 = 0$ cujas raízes são -3 e $1\pm i$ fornece $\delta = 5.196152423$ o que implica num círculo que contém todas as raízes.

2.2.5- Um caso especial que ocorre na Variante da Fase Inicial

Teorema 2.5: Seja $p(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots+a_nx+a_{n+1} = 0$ com $a_{n+1}\neq 0$ uma equação cujas raízes são reais e de mesmo módulo α. Então, o raio δ determinado por (2.2.17) é igual a α.

Demonstração: Suponhamos que $p(x) = 0$ tenha $k\geq 0$ raízes reais positivas e $q\geq 0$ raízes reais negativas, todas de módulo α, com k e q não simultaneamente nulos. Então, escrevendo a equação na sua forma fatorada temos

$$p(x) = a_1(x-\alpha)^k(x+\alpha)^q \quad \text{com } k+q = n$$

Desenvolvendo $(x-\alpha)^k$ e $(x+\alpha)^q$ através da fórmula bi

nomial e efetuando o produto dos dois polinômios resultantes, temos

$$a_{n+1} = a_1 \alpha^n$$

$$a_n = a_1 \left[\binom{q}{q-1} - \binom{k}{k-1} \right] \alpha^{n-1} = a_1 (q-k) \alpha^{n-1}$$

$$a_{n-1} = a_1 \left[\binom{q}{q-2} - \binom{q}{q-1} \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k-2} \right] \alpha^{n-2} = a_1 \left[\frac{(q-k)^2 - n}{2} \right] \alpha^{n-2}$$

Portanto

$$\delta^2 = \frac{n a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2 a_{n-1} a_{n+1}} = \frac{n a_1^2 \alpha^2}{\left[a_1^2 (q-k)^2 - 2 a_1^2 \frac{(q-k)^2 - n}{2} \right] \alpha^{2n-2}}$$

$$= \frac{n \alpha^{2n}}{n \alpha^{2n-2}} = \alpha^2$$

o que demonstra o teorema.

<u>Exemplo 2.7</u> - Consideremos a equação

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 18x^3 + 54x^2 + 81x - 243 = 0$$

cujas raízes são 3 (tripla) e -3 (dupla).

Aplicando (2.2.17), obtemos

$$\delta = \left[\frac{5(243)^2}{(81)^2 - 2(54)(-243)} \right]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$$

Observamos que se $p(x)=0$ é uma equação do 2º grau de raízes α e β então

$$p(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

Supondo que o raio δ dado por (2.2.17) seja igual a α, temos

$$\delta^2 = \frac{2\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta} = \alpha^2$$

e, então, $|\alpha| = |\beta|$

Assim, concluimos que se $p(x)=0$ tem grau 2, então é válida a recíproca do Teorema 2.5.

Na prática haveria grande aplicação do Teorema 2.5 se sua recíproca fosse verdadeira para qualquer n, pois, então, bastaria que $p(\delta)$ se anulasse para que tivéssemos determinado o módulo de todas as raízes da equação. Contudo, a recíproca do Teorema 2.5. não é válida para todo n, pois, por exemplo, para a equação

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-2/\sqrt{7}) =$$

$$= \sqrt{7}\,x^3-(3\sqrt{7}+2)x^2+(2\sqrt{7}+6)x-4 = 0$$

obtemos $\delta^2=1$. Assim, $p(1)=0$ sem que, no entanto, todas as raí - zes tenham o mesmo módulo.

2.2.6. O uso da Fase Inicial e de outros métodos de determinação de raízes

Observamos que a técnica que descrevemos na Fase Inicial pode ser usada para a obtenção de um valor inicial através de outros métodos iterativos de determinação de raízes pois vários métodos iterativos possibilitam a construção de uma vizinhança circular $C(z,\rho)$, de centro z e raio ρ, cujo raio tende a zero quando z tende para uma raiz.

Assim, por exemplo, em /29/, o autor mostra que o método de Laguerre

$$x_{i+1}=x_i - \frac{np(x_i)}{p'(x_i)\pm\{(n-1)\left[(n-1)p'^2(x_i)-np(x_i)p''(x_i)\right]\}^{1/2}}$$

que determina raízes reais de equações polinomiais reais, fornece o raio

$$\rho = \sqrt{n} \Big/ \left|\frac{S_1 \pm \sqrt{(n-1)(nS_2-S_1^2)}}{n}\right| \qquad (2.2.18)$$

onde S_1 e S_2 são definidos por (2.2.3) e n é o grau da equação.

Assim, se na Fase Inicial, usarmos (2.2.18) ao invés de (2.2.5) para obtermos os raios ρ_1 e ρ_2 dos passos 2 e 3, estaremos determinando um valor inicial para a raiz de menor módulo, pelo método de Laguerre.

O resultado que apresentamos a seguir está diretamente relacionado com o método iterativo de Newton e pode ser encontrado, por exemplo, em /30/.

Teorema 2.6: Consideremos a equação polinomial (2.1.1). Então, dado algum número δ tal que $p'(\delta) \neq 0$, existe pelo menos uma raiz de (2.1.1) no círculo $C(\delta, \rho)$, de centro δ e raio ρ dado por

$$\rho = n \left| \frac{p(\delta)}{p'(\delta)} \right| \tag{2.2.19}$$

Então, se na Fase Inicial usarmos (2.2.19) para a determinação dos raios ρ_1 e ρ_2 dos passos 2 e 3, estaremos determinando um valor inicial para a raiz de menor módulo da equação, pelo método de Newton.

Em /49/ e /36/, os autores apresentam

$$\rho = \left[k! \binom{n}{k} \left| \frac{p(z)}{p^{(k)}(z)} \right| \right]^{1/k} \quad \text{para } k \leq n \tag{2.2.20}$$

como sendo o raio de um círculo de centro z que contém pelo menos uma raiz de (2.1.1). Esta é, portanto, uma outra forma de obtermos os raios ρ_1 e ρ_2 dos passos 2 e 3 da Fase Inicial.

Observamos que (2.2.19) também pode ser obtido como um caso particular de (2.2.20). Basta que em (2.2.20) façamos $k = 1$.

2.2.7. A determinação de dois ou mais valores iniciais

Existem vários métodos que para serem aplicados na determinação de uma raiz necessitam de mais de um valor inicial. Assim, por exemplo, os métodos da bissecção /30/, de Muller com

bissecção sucessiva e interpolação parabólica inversa e da falsa posição ou Regula Falsi /30/ que determinam raízes reais de equações polinomiais reais, necessitam de dois valores iniciais reais x_e e x_d tais que

$$p(x_e).p(x_d) < 0$$

Desta exigência fica claro que estes métodos não determinam uma raiz real de multiplicidade par.

O método da secante /30/ também necessita de duas aproximações iniciais, mas não exige que estas satisfaçam a condição acima. Pode, por isso, ser aplicado na determinação de uma raiz de multiplicidade qualquer.

A técnica que descrevemos na Fase Inicial pode ser aplicada com sucesso para determinar os dois valores iniciais para estes métodos. Basta que consideremos

$$x_e = \delta \quad \text{e} \quad x_d = \delta + \rho_1 \quad \text{se} \quad \rho_1 \leq \rho_2$$

ou (2.2.21)

$$x_e = -(\delta + \rho_2) \quad \text{e} \quad x_d = -\delta \quad \text{se} \quad \rho_2 < \rho_1$$

Observamos que, neste caso, as aproximações são obtidas mais rapidamente se realizarmos a Fase Inicial usando (2.2.12) para determinarmos δ e (2.2.19) para obtermos os raios ρ_1 e ρ_2 dos círculos $C(\delta, \rho_1)$ e $C(-\delta, \rho_2)$.

No caso de necessitarmos de três valores iniciais, como no método de Muller /31/, por exemplo, podemos considerar:

$$x_0 = \delta\,, \quad x_1 = \frac{\delta + \rho_1}{2} \text{ e } x_2 = \delta + \rho_1 \quad \text{se } \rho_1 \leq \rho_2$$

ou (2.2.22)

$$x_0 = -\delta\,, \quad x_1 = -\frac{\delta + \rho_2}{2} \text{ e } x_2 = -(\delta + \rho_2) \quad \text{se } \rho_2 < \rho_1$$

Observamos que para o método de Muller as aproximações iniciais podem ser reais mesmo que a raiz a ser determinada seja complexa. Neste caso, é necessário, no entanto, que usemos (2.2.10) para a determinação de δ.

2.3. Um teorema que auxilia a identificar se a raiz a ser determinada é real ou não

Até o momento, vimos como determinar um círculo que contém pelo menos a raiz de menor módulo e que valor considerar como inicial quando sabemos se a raiz é real ou complexa. Contudo, ainda não sabemos como determinar se esta raiz é real ou não. O teorema que propomos a seguir ajuda-nos a elucidar este problema.

Teorema 2.7 - Seja $p(x) = 0$ uma equação polinomial de grau n cujas raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, com $k \leq n$, são reais e tais que $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$. Se a aproximação inicial real $x_0 \neq \alpha_i$ está mais próxima de α_1 que de qualquer outra raiz, então

$$S_2(x_0) = \left[\frac{p'(x_0)}{p(x_0)}\right]^2 - \frac{p''(x_0)}{p(x_0)} > 0 \qquad (2.3.1)$$

Demonstração - A prova deste teorema decorre imediatamente de (2.2.11).

Em /39/, o autor demonstra um resultado mais restrito que o Teorema 2.7, pois ele exige que as raízes sejam reais e distintas.

Do teorema 2.7, também podemos concluir que se $S_2(x_0) \lesssim 0$ então a equação polinomial real tem raízes complexas. Assim, se na determinação dos círculos $C(\delta, \rho_1)$ e $C(-\delta, \rho_2)$ algum dos S_2 é negativo então, podemos assegurar que a equação polinomial real tem alguma raiz complexa.

Exemplo 2.8 - No Exemplo 2.2 anterior, vimos que

$$S_2(\delta) = S_2(-\delta) = -1.76$$

Podemos concluir então que os círculos $C(\delta, \rho_1)$ e $C(-\delta, \rho_2)$ contém pelo menos um par de raízes complexas conjugadas.

Exemplo 2.9 - Consideremos a equação

$$p(z) = z^5 + 4z^4 + 2z^3 + 8z^2 + z + 4 = 0$$

cujas raízes são $\pm i$ (duplas) e -4.

Realizando o passo 1 da Fase Inicial por (2.2.10) obtemos $\delta = 0.396059017$.

Como

$$S_2(\delta) = -2.468219983 \quad \text{e} \quad S_2(-\delta) = -2.442973694$$

concluimos que o círculo $C(\delta, \rho_1)$ onde

$$\rho_1 = 1.423288925$$

contém pelo menos um par de raízes complexas conjugadas. Então, podemos considerar a aproximação inicial

$$z_0 = 1.107703480 + 0.711644463i$$

se usarmos (2.2.7), ou a aproximação inicial

$$z_0 = 0.396059017(1+i)$$

se usarmos (2.2.9).

<u>Exemplo 2.10</u> - Seja a equação

$$p(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6 = 0$$

cujas raízes são $1 \pm i$ e -3.

Usando (2.2.10) para a execução do passo 1 da Fase Inicial, obtemos $\delta = 1$. Executando os passos 2 e 3, temos

$$S_2(1) = -1.9375 \qquad \rho_1 = 1.244342034$$

e

$$S_2(-1) = 0.49 \qquad \rho_2 = 2.474358297$$

Concluimos então que o círculo $C(\delta, \rho_1)$ contém pelo menos um par de raízes complexas conjugadas.

Executando o passo 4 da Fase Inicial, obtemos a aproximação inicial

$$z_0 = 1.622171017+0.622171017\,i$$

se usarmos (2.2.7), ou a aproximação inicial

$$z_0 = 1+i$$

se usarmos (2.2.9)

No Apêndice I, apresentamos os algorítmos correspondentes à Fase Inicial e à Variante da Fase Inicial.

CAPÍTULO 3

MIDREM - UM MÉTODO ITERATIVO DE DETERMINAÇÃO DE UMA RAIZ E SUA MULTIPLICIDADE

3.1. Introdução

Na literatura matemática encontramos vários métodos de determinação de uma raiz da equação polinomial de grau n, $p(z) = 0$, que dependem do prévio conhecimento da multiplicidade m da raiz a ser determinada. Abaixo relacionamos alguns destes métodos, supondo sempre que a aproximação inicial z_0 esteja suficientemente próxima da raiz α procurada e que m é a multiplicidade desta raiz.

Em 1949, Bodewig provou que o método modificado de Newton, apresentado, por exemplo, em /10/ ou em /2/

$$z_{i+1} = z_i - k\frac{p(z_i)}{p'(z_i)} \quad , \quad i=0,1,2,\ldots \tag{3.1.1}$$

converge quadraticamente para α quando $k=m$ e que se $k\neq m$ então a convergência é linear.

O processo iterativo apresentado em /10/

$$z_{i+1} = z_i - k\,\frac{p(z_i)p'(z_i)}{p'^2(z_i) - p(z_i)p''(z_i)} \quad , \quad i=0,1,2,\ldots \tag{3.1.2}$$

converge com ordem, no mínimo, 2 para k=1 e m qualquer e com ordem, no mínimo, 3 para k = 1/2 e m=1. Observamos que se k=1 então (3.1.2) é o método (2.2.2) que consideramos no Cap. 2 e que, neste caso, o método independe da multiplicidade m.

O processo iterativo apresentado em /10/

$$z_{i+1} = \frac{1}{2}\,(z'_{i+1} + z''_{i+1}), \qquad i = 0,1,2,\ldots \tag{3.1.3}$$

onde

$$z'_{i+1} = z_i - m\frac{p(z_i)}{p'(z_i)} \quad \text{e} \quad z''_{i+1} = z_i - \frac{p(z_i)p'(z_i)}{p'^2(z_i)-p(z_i)p''(z_i)}$$

é de ordem, no mínimo, 3 quando a multiplicidade m de α é qualquer.

O processo iterativo apresentado em /21/

$$z_{i+1} = z_i - \frac{np}{p' \pm \{\frac{n-m}{m}\left[(n-1)p'^2 - npp''\right]\}^{1/2}} \tag{3.1.4}$$

para i=0,1,2,... e onde o valor do polinômio e de suas derivadas são calculados no ponto z_i, é conhecido como método de Laguerre para raízes múltiplas. Este método converge cubicamente para uma raiz α de multiplicidade m qualquer.

Também converge cubicamente para uma raiz α de multiplicidade m qualquer, o processo iterativo apresentado em /21/

$$z_{i+1} = z_i - \frac{p(z_i)}{\frac{m+1}{2m}\,p'(z_i) - \frac{p(z_i)p''(z_i)}{2p'(z_i)}} \quad i=0,1,2,\ldots \tag{3.1.5}$$

denominado método de Halley para raízes múltiplas.

Além do método (3.1.2) para k=1, existem vários outros métodos cujas ordens de convergência independem da multiplicidade da raiz a ser determinada. Dentre eles, relacionamos o processo iterativo seguinte, apresentado em /21/,

$$z_{i+1} = z_i - \frac{pp'}{p'^2 - \frac{1}{2}pp'' - \frac{p^2\left[p''^2 - p'p'''\right]}{2\left[p'^2 - pp''\right]}}, \quad i=0,1,\ldots \qquad (3.1.6)$$

onde o polinômio e as derivadas envolvidas são calculadas no ponto z_i. Este método converge cubicamente para uma raiz, qualquer que seja sua multiplicidade.

Na tabela seguinte relacionamos a ordem de convergência p, o número s de novos cálculos de p(z) e suas derivadas que são necessários em cada passo e o índice de eficiência E de cada um dos métodos acima relacionados.

método	p	s	E
(3.1.1)	1	2	1. se $k \neq m$
	2	2	1.41 se $k=m$
(3.1.2)	2	3	1.26 se $k=1$ e $m \geq 1$
	3	3	1.44 se $k=1/2$ e $m=1$
(3.1.3) (3.1.4) (3.1.5)	3	3	1.44
(3.1.6)	3	4	1.32

Estes e outros métodos que dependem da multiplicidade foram desenvolvidos para melhorarem o desempenho dos métodos que lhes deram origem quando aplicados na determinação de raízes múltiplas. No entanto, na prática, tais métodos são pouco utilizados, pois dependem do conhecimento prévio da multiplicidade da raiz a ser determinada.

Neste capítulo, mostramos que aplicando o método de Newton à $u(z) = p(z)/p'(z) = 0$ e não a $p(z) = 0$, podemos determinar não só uma raiz α de $p(z) = 0$, como também, sua multiplicidade m.

Propomos também o método iterativo, que denominamos MIDREM, para a determinação das raízes e suas multiplicidades e apresentamos os algorítmos de MIDREM quando aplicado a

1) equações polinomiais cujas raízes são todas reais.

2) equações polinomiais reais cujas raízes são reais e/ou complexas.

3) equações polinomiais de coeficientes complexos.

Para cada algorítmo, apresentamos vários exemplos que ilustram sua aplicação. Todas as aproximações iniciais usadas nestes exemplos foram obtidas pela aplicação da Fase Inicial descrita no Capítulo 2.

No Apêndice I, apresentamos os algorítmos de MIDREM quando aplicados a 1) e a 2).

3.2. O método MIDREM

3.2.1. Descrição do método

Consideremos a equação polinomial

$$p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1} = 0 \qquad (3.2.1)$$

cujas raízes são todas reais.

Se α é uma raiz de (3.2.1) com multiplicidade m, podemos escrever

$$p(x) = (x-\alpha)^m g(x) \ , \quad \text{com } g(\alpha) \neq 0 \qquad (3.2.2)$$

e então α é uma raiz simples de $u(x) = p(x)/p'(x) = 0$.

Derivando u(x), obtemos

$$u'(x) = \frac{p'^2(x) - p(x)p''(x)}{p'^2(x)}$$

Aplicando o método de Newton a $u(x) = 0$, obtemos

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p'^2(x_i)}{p'^2(x_i)-p(x_i)p''(x_i)} \cdot \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} \qquad (3.2.3)$$

ou

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)p'(x_i)}{p'^2(x_i)-p(x_i)p''(x_i)} \qquad (3.2.4)$$

para i=0,1,2,...

Teorema 3.1: Seja α uma raiz da equação polinomial $p(x)=0$ e seja m a multiplicidade de α. Seja $p'(x)\neq 0$ para todo $x\neq\alpha$ pertencente a uma vizinhança V de α. Então, se a aproximação inicial x_0 está suficientemente próxima de α, temos que

(i) o processo iterativo (3.2.4) converge para a raiz α, e a convergência é, pelo menos, de ordem 2.

(ii) $\lim\limits_{x_i\to\alpha} q(x_i) = m$, sendo

$$q(x_i) = q_i = \frac{p'^2(x_i)}{p'^2(x_i)-p(x_i)p''(x_i)} \tag{3.2.5}$$

Demonstração: Como observamos anteriormente, o processo iterativo (3.2.4) decorre da aplicação do método de Newton a $u(x)=p(x)/p'(x) = 0$. Assim, sob as condições estabelecidas é amplamente conhecida a convergência do processo.

A ordem de convergência no mínimo quadrática decorre do fato de α ser raiz simples de $u(x)=0$.

Resta-nos portanto, demonstrar a parte (ii) do teorema.

De (3.2.1) temos

$$p'^2(x) = (x-\alpha)^{2m-2}\left[m\,g(x)+(x-\alpha)g'(x) \right]^2$$

e

$$p''(x)=m(m-1)(x-\alpha)^{m-2}g(x)+2m(x-\alpha)^{m-1}g'(x)+(x-\alpha)^m g''(x)$$

Temos também que

$$p(x)p''(x) = (x-\alpha)^{2m-2}\left[m(m-1)g^2(x)+2m(x-\alpha)g(x)g'(x)+\right.$$

$$\left.+(x-\alpha)^2 g(x)g''(x)\right]$$

Então

$$p'^2(x)-p(x)p''(x)=(x-\alpha)^{2m-2}\{(x-\alpha)^2[g'^2(x)-g(x)g''(x)]+$$
$$+mg^2(x)\}$$

Portanto, quando $x_i \to \alpha$, temos

$$\frac{p'^2(x_i)}{p'^2(x_i)-p(x_i)p''(x_i)} = \frac{m^2g^2(x_i)}{mg^2(x_i)} = m$$

o que conclue a demonstração do teorema.

Observamos que a aplicação do método de Newton à $u(x)=p(x)/p'(x)=0$ e não a $p(x)=0$ acarreta uma maior indeterminação numérica nos valores do polinômio, porque

$$\frac{u(x)}{u'(x)} = \frac{p(x)p'(x)}{p'^2(x)-p(x)p''(x)} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^{2m-1}g[mg+(x-\alpha)g']}{(x-\alpha)^{2m-2}\{[mg+(x-\alpha)g']^2-g[m(m-1)g+2m(x-\alpha)g'+(x-\alpha)^2g'']\}} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)[1+(x-\alpha)g'/mg]}{1+\frac{(x-\alpha)^2}{m}\left[\left(\frac{g'}{g}\right)-\frac{g''}{g}\right]}$$

Verificamos então, que há um considerável cancelamento no denominador de $u(x)/u'(x)$. Na prática, durante os cálculos, este cancelamento pode se restringir a subtrações de quantidades aproximadamente iguais. Contudo, usando-se dupla precisão, somente o aumento da velocidade de convergência já era considerado, por vários autores, suficiente para compensar o aumento da

região onde os cálculos são mal-condicionados. A esta vantagem acrescentamos as que indicamos em (1) e (2) e concluimos que a aplicação do método de Newton a $p(x)/p'(x) = 0$ é não a $p(x) = 0$ conduz-nos a um método iterativo mais atraente que o de Newton.

3.2.2. Concepção de MIDREM

Do Teorema 3.1 concluimos que o método (3.2.4) quando aplicado a equações polinomiais permite-nos:

(1) Determinar a aproximação inicial da raiz α de menor módulo de (3.2.1), como mostramos no Capítulo 2.

(2) Refinar esta aproximação determinando a raiz α, com ordem de convergência, no mínimo, 2.

(3) Determinar, por (3.2.5), a multiplicidade de α.

Por estas razões denominamos MIDREM ao Método Iterativo de Determinação das Raízes e suas Multiplicidades. Sua concepção básica é a seguinte:

Dada uma aproximação inicial x_0 da raiz α a ser determinada, calculamos uma aproximação q_0 da multiplicidade m de α por (3.2.5) e uma aproximação x_1 da raiz por (3.2.4). Com a aproximação x_1 determinamos nova aproximação q_1 da multiplicidade e nova aproximação x_2 da raiz, e assim sucessivamente.

Observamos que se existirem raízes nulas na equação polinomial a ser resolvida, estas devem ser deflacionadas antes da aplicação de MIDREM.

Exemplo 3.1 - Mostramos no Exemplo 2.3 do Capítulo 2 que o intervalo

$$(0.316227766,\ 0.328867473]$$

contém pelo menos a raiz de menor módulo da equação

$$p(x) = L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 = 0$$

Considerando $x_0 = 0.316227766$, obtemos

i	x_i	q_i
0	0.316227766	1.013250302
1	0.322589352	1.000087520
2	0.322547684	1.000000000
3	0.322547684	1.000000000

Para evitarmos a necessidade de calcularmos várias aproximações para a multiplicidade e também porque algumas vezes estas aproximações oscilam em torno da multiplicidade, consideramos que o processo de determinação da multiplicidade termina quando

$$|q_{i+1} - q_i| < 0.5q_{i+1} \quad \text{se} \quad q_{i+1} < 1$$

ou

$$|q_{i+1} - q_i| < 0.5 \quad \text{se} \quad q_{i+1} \geqslant 1$$

e então, a multiplicidade da raiz é

$$m = \lceil q_{i+1} + 0.5 \rceil$$

onde, com esta notação queremos indicar o arredondamento simétri

co seguido de **truncamento**, ou seja, o menor inteiro maior ou igual a $q_{i+1} + 0.5$

Observamos que podemos esperar que uma aproximação inicial "demasiadamente" boa da raiz, ou seja, uma aproximação inicial localizada dentro da região de indeterminação da raiz, não nos permita determinar a multiplicidade por (3.2.5). Este risco é afastado se a aproximação inicial for determinada pela técnica que apresentamos no Capítulo 2, sob a denominação de Fase Inicial, com x_0 determinado por (2.2.8). Quando se usa (2.2.6) para determinar x_0, em alguns casos, pode ocorrer que x_0 esteja muito próximo da raiz desejada se esta é real.

Está claro que o valor inicial pode ser determinado por qualquer um dos processos existentes de determinação de valor inicial para raiz. Neste trabalho, entretanto, usamos sempre o determinado pela Fase Inicial.

No item 2.2.4, mostramos como determinar uma aproximação inicial de uma raiz de uma equação polinomial cujas raízes são reais, usando a Variante da Fase Inicial. Contudo, não devemos usar esta aproximação se além da raiz pretendemos, também, determinar a multiplicidade por (3.2.5), pois, neste caso, como mostramos no Teorema 2.5, pode ocorrer que a aproximação inicial seja a própria raiz.

3.2.3. Determinação da raiz e sua multiplicidade quando todas as raízes da equação são reais

O Teorema 2.7 nos assegura que se todas as raízes da equação polinomial $p(x) = 0$ são reais e se $x_i \neq \alpha$ está mais próximo da raiz α de menor módulo que de qualquer outra raiz da equa-

ção, então

$$S_2(x_i) = \left[\frac{p'(x_i)}{p(x_i)}\right]^2 - \frac{p''(x_i)}{p(x_i)} > 0$$

Portanto, neste caso,

$$q_i = q(x_i) = \frac{S_1^2(x_i)}{S_2(x_i)} > 0$$

onde $S_1(x_i) = -\dfrac{p'(x_i)}{p(x_i)}$

No entanto, na prática, pode ocorrer

$$S_2(x_i) > 0 \text{ para } i=0,1,2,\ldots,k \quad \text{e } S_2(x_{k+1}) \leq 0 \qquad (3.2.6)$$

mesmo quando todas as raízes da equação são reais. Isto ocorre devido a erros de arrendondamento existentes principalmente quando a raiz real α a ser determinada é múltipla e a aproximação x_{k+1} pertence à região de indeterminação de α.

Assim, se sabemos que a equação polinomial que estamos resolvendo tem apenas raízes reais, uma ocorrência do tipo (3.2.6) implica em que aceitemos x_{k+1} como a melhor aproximação de α que podemos determinar por este método. Neste caso, se a multiplicidade m de α ainda não tiver sido determinada, consideramos $q_k = q(x_k)$ como a melhor aproximação da multiplicidade e tomamos

$$m = \lceil q_k + 0.5 \rceil$$

A seguir, descrevemos MIDREM quando aplicado na equação polinomial $p(x) = 0$ de grau n para obtenção de suas raízes

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ com $s \leqslant n$ e suas respectivas multiplicidades m_1, m_2, $\ldots, m_s$ quando todas as raízes são reais. A obtenção dos valores iniciais para as raízes é realizada pela aplicação da Fase Inicial descrita no Capítulo 2.

Observamos que como mostramos anteriormente, todos os cálculos em aritmética de ponto flutuante realizados neste método, com exceção dos valores de q_i, devem ser realizados em dupla precisão.

3.2.4. Aplicação de MIDREM em equações polinomiais cujas raízes são reais

Inicialmente, determinamos uma aproximação inicial para a raiz de menor módulo de $p(x) = 0$, usando a Fase Inicial e utilizando (2.2.12) para a determinação do raio δ de um círculo de centro na origem que não contenha nenhuma raiz da equação. Os passos 2 e 3 são realizados usando (2.2.5) e fazendo, por exemplo, $j=0$ se $\rho_1 = \rho_2$ para que uma vez determinada a raiz α de multiplicidade m, um simples teste do valor de j revele se $-\alpha$ também é raiz da equação. No passo 4, a aproximação inicial é determinada por (2.2.8).

Uma vez determinada a aproximação inicial x_0 da raiz α, calculamos a aproximação q_0 da multiplicidade de α usando

$$q_i = q(x_i) = \frac{p'^2(x_i)}{p'^2(x_i) - p(x_i)p''(x_i)} = \frac{S_1^2(x_i)}{S_2(x_i)} \qquad (3.2.7)$$

A seguir, determinamos x_1 usando

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)p'(x_i)}{p'^2(x_i) - p(x_i)p''(x_i)} = x_i + \frac{S_1(x_i)}{S_2(x_i)} \qquad (3.2.8)$$

utilizando os cálculos já realizados em (3.2.7).

Com a aproximação x_1 reaplicamos (3.2.7) para obtermos q_1, e assim, sucessivamente, fazendo $i=0,1,2,\ldots$.

O processo de determinação da multiplicidade termina quando

a) $|q_{i+1} - q_i| < 0.5\, q_{i+1}$ se $q_{i+1}<1$

ou

$|q_{i+1} - q_i| < 0.5$ se $q_{i+1}\geqslant 1$

ou

b) $S_2(x_{i+1}) \leqslant 0$

No caso a), a multiplicidade da raiz α é

$$m = \lceil q_{i+1} + 0.5 \rceil$$

e no caso b), é

$$m = \lceil q_i + 0.5 \rceil$$

O processo de determinação da raiz por (3.2.8) termina se uma das seguintes condições for satisfeita:

$$|p(x_{i+1})| \leqslant 100 \times \varepsilon \quad \text{e} \quad |x_{i+1}-x_i| \leqslant \varepsilon \,.\max(1,|x_{i+1}|)$$

ou (3.2.9)

$$S_2(x_{i+1}) \leqslant 0$$

onde ε é o limite superior de erro tolerado para a raiz.

Se ocorrer que num passo i algum dos testes de aceita

ção da raiz sejam satisfeitos antes que a multiplicidade tenha sido determinada, fazemos

$$m = \lceil q_{i-1} + 0.5 \rceil$$

Como no caso de raiz simples pode ocorrer que o inteiro m resulte nulo, testamos se m=0. Caso seja, fazemos m=1.

Se num estágio k, a multiplicidade m for determinada sem que se tenha encontrado a raiz, continuamos o processo de refinamento da aproximação usando o processo iterativo

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}(x'_{i+1} + x''_{i+1}), \quad i=k,\ k+1,\ldots \qquad (3.2.10)$$

onde

$$x'_{i+1} = x_i - m\,\frac{p(x_i)}{p'(x_i)} \quad \text{e} \quad x''_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)p'(x_i)}{p'^2(x_i) - p(x_i)p''(x_i)}$$

que, como vimos em (3.1.3), é de ordem, no mínimo, 3 quando aplicado na determinação de uma raiz α de multiplicidade m qualquer.

Também aqui o processo de refinamento da raiz termina se um dos testes (3.2.9) for satisfeito.

O processo de determinação da raiz é abandonado por falta de convergência se a raiz não for determinada num número pré-fixado de iterações. As razões para este comportamento podem ser:

1. O número de iterações pré-fixado é pequeno.

2. A precisão ε é muito pequena com relação aos erros de arredondamento.

Uma vez determinada uma raiz α e sua multiplicidade m, fazemos $m_1=m$ e procedemos da seguinte forma:

(i) Se $m>1$, dividimos $p(x)$ por $x^2-2\alpha x+\alpha^2$ obtendo assim o polinômio deflacionado $p(x)$ de grau $n-2$. Fazemos $m=m-2$ e repetimos esta etapa até que $m=0$ ou $m=1$.

(ii) Se $m=1$, dividimos $p(x)$ por $x-\alpha$ obtendo o polinômio deflacionado $p(x)$ de grau $n-1$. Fazemos $m=0$.

(iii) Quando $m=0$ testamos se $j=0$. Caso seja, tomamos $\alpha=-\alpha$ como raiz, fazemos $m=m_1$, $j\neq 0$ e retornamos à etapa (i). Quando $j\neq 0$, se $n>2$ reaplicamos o processo de determinação da multiplicidade e da raiz ao polinômio deflacionado para obtermos a próxima raiz e sua multiplicidade. Fazemos isto sucessivamente até que todas as raízes do polinômio original tenham sido determinadas, ou até que o polinômio deflacionado tenha grau 1 ou 2, quando então, resolvemos a equação linear ou quadrática correspondente.

Observamos que uma vez determinada a multiplicidade m de uma raiz α de $p(x)=0$ poderíamos usar, para a continuação do refinamento da raiz o próprio método (3.2.8) ou qualquer outro que dependa da multiplicidade. Optamos pelo método (3.1.3) porque seu índice de eficiência, $E=1.44$, é maior ou igual aos demais métodos citados no item 3.1.

Observamos também que quando determinamos uma raiz a partir de um polinômio deflacionado, uma vez determinada uma

aproximação que satisfaça uma das condições de aceitação da raiz, é conveniente reaplicarmos mais uma vez o método (3.1.3) sobre esta aproximação, usando o polinômio original de grau n para, como vimos no item 1.5, evitarmos uma possível perda de precisão nas raízes determinadas após várias deflações.

A seguir apresentamos alguns exemplos que ilustram a aplicação de MIDREM em equações polinomiais cujas raízes são todas reais. No Apêndice I, apresentamos o algorítmo correspondente.

Embora todas as equações tenham sido testadas usando aritmética de dupla precisão via PDP 11/45, preferimos apresentar a maioria dos exemplos usando aritmética de 9 decimais via HP-21 para, assim, melhor expor as várias características do método.

Exemplo 3.2 - Consideremos a equação

$$p(x) = x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256 = 0$$

Usemos a Fase Inicial para determinarmos a aproximação inicial para a raiz. Executando o passo 1 por (2.2.12) obtemos $\delta = 2$.

Na tabela a seguir apresentamos os resultados obtidos nas aplicações dos passos 2 e 3.

	$\delta = 2$	$-\delta = -2$
$p'(x)/p(x)$	0.666666667	2.
$[p'(x)/p(x)]^2$	0.444444445	4.
S_2	0.111111112	1.
ρ	5.999999975	2.

Concluimos, portanto, que o círculo de centro -2 e raio 2 contém pelo menos a raiz de menor módulo da equação.

Considerando, por (2.2.8), $x_0 = -\delta = -2$ como aproximação inicial, temos

$$q_0 = \frac{[p'(x_0)/p(x_0)]^2}{S_2(x_0)} = 4$$

e

$$x_1 = x_0 - \frac{p'(x_0)/p(x_0)}{S_2(x_0)} = -4.$$

Como $p(x_1)=0$, concluimos -4 é a raiz da equação com multiplicidade

$$m = \lceil q_0 + 0.5 \rceil = 4$$

Observamos que se tivéssemos usado (2.2.6) para determinarmos a aproximação inicial, obteríamos $x_0 = -4$. Então, a aproximação inicial seria a própria raiz, o que impediria a determinação da multiplicidade.

<u>Exemplo 3.3</u> - Consideremos a equação

$$p(x) = x^6 - 36x^5 + 540x^4 - 4320x^3 + 19440x^2 - 46656x + 46656 = 0$$

Aplicando a Fase Inicial para determinarmos a aproximação inicial concluimos, por (2.2.12), que $\delta = 2.449489743$ e que

$x_0 = \delta$ é a aproximação inicial desejada.

Prosseguindo como no exemplo anterior, obtemos

$$x_1 = 6. \qquad \text{e} \qquad q_0 = 6$$

Como $p(x_1) = 0$, concluimos que a equação tem a raiz 6 de multiplicidade 6.

Observamos que dentre todas as equações que usamos para os testes do programa de MIDREM para a determinação das raízes e suas multiplicidades quando a equação só tem raízes reais, 47 eram equações do tipo

$$p(x) = (x - \alpha)^n$$

Em todas estas equações o comportamento revelado nos Exemplos 1 e 2 se repetiu. Ou seja, em todas elas, com aritmética de dupla precisão, e determinando a aproximação inicial pela Fase Inicial com o uso de (2.2.12) no passo 1, (2.2.5) nos passos 2 e 3 e (2.2.8) no passo 4, obtivemos exatamente, <u>em uma única iteração</u>, a raiz e sua multiplicidade.

O exemplo a seguir é bastante simples, mas ilustra bem alguns comportamentos atípicos de algumas equações.

<u>Exemplo 3.4</u> - Consideremos a equação

$$p(x) = x^3 - 2.8x^2 + 2.6x - 0.8 = 0$$

cujas raízes são 0.8 e 1 (dupla).

Executando a Fase Inicial para a determinação de um valor inicial, com o uso de (2.2.12) e (2.2.8) para a obtenção de

δ e de x_0 respectivamente, encontramos

$$x_0 = \delta = 0.529812943$$

Aplicando MIDREM, obtemos

i	x_i	$p(x_i)$	q_i
0	0.529812943	-0.059731838	2.782062596
1	0.879548266	0.001154136	0.054976929
2	0.893179446	0.001063236	0.219852277
3	0.920691899	0.000759125	0.756721625
4	0.963616145	0.000216593	1.541857785
5	0.995174423	0.000004545	1.950314399

Observamos que embora a aproximação inicial esteja mais próxima da raiz 0.8 que da raiz dupla 1, o método acaba convergindo para a raiz 1, o que já é constatado na segunda iteração pois

$$x_2 \notin (\delta, \delta + \rho_1] = (0.529812943, 0.892988555]$$

Realizando os testes de aceitação das aproximações da multiplicidade, concluimos que

$$|q_{i+1} - q_i| > 0.5q_{i+1} \qquad \text{para } i=0,1,2,3$$

$$|q_4 - q_3| > 0.5 \quad \text{e} \quad |q_5 - q_4| < 0.5$$

Portanto

$$m = \lceil q_5 + 0.5 \rceil = 2$$

Como a multiplicidade foi determinada, continuamos o processo de determinação da raiz, pelo método (3.1.3). Obtemos

$$x_6' = x_5 - \frac{p'(x_5)/p(x_5)}{S_2(x_5)} = 0.999939158$$

e

$$x_6'' = x_5 - m\,\frac{p(x_5)}{p'(x_5)} = 1.000060543$$

Portanto

$$x_6 = (x_6' + x_6'')/2 = 0.999999851$$

Como $p(x_6) = -2.\times 10^{-10}$ concluimos que, com aritmética de ponto flutuante de 9 decimais seguida de arredondamento simétrico, 0.999999851 é raiz dupla da equação.

Exemplo 3.5 - Quando aplicamos o algorítmo de MIDREM para a determinação de todas as raízes de

$$p(x) = x^5 - 11x^4 + 34x^3 - 46x^2 + 29x - 7 = 0$$

obtivemos

Raízes	M	ITR	ITM
0.1000000005254637D+01	4	3	2
0.6999999978981453D+01	1	-	-

onde ITR e ITM indicam, respectivamente, o número de iterações realizadas para a obtenção da raiz e sua multiplicidade.

Observamos que mesmo usando aritmética de dupla precisão, as raízes desta equação não foram determinadas com tanta precisão quanto a desejável. De modo geral, isto ocorre com equações do tipo

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{n-1} (x - \alpha_2)$$

ou

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{q_1} (x - \alpha_2)^{q_2} \ldots (x - \alpha_k)^{q_k} \qquad (3.2.11)$$

com vários $q_i \neq 1$.

Este comportamento ocorre porque, como vimos no item 1.2, as raízes múltiplas são, em geral, mal condicionadas no sentido de serem sensíveis aos erros nos cálculos dos valores do polinômio. Está claro também que as raízes obtidas após a deflação de raízes que sofreram este tipo de problema não podem, por sua vez, serem determinadas com exatidão.

Observamos também que em equações do tipo (3.2.11) com n grande, as sucessivas deflações de raízes não muito precisas podem acabar prejudicando a exata determinação das multiplicidades das raízes subsequentes. Por isso, é interessante a reconstrução do polinômio a partir das raízes determinadas e do coeficiente do termo de maior grau do polinômio original, como apresentamos no item 1.4.

A ocorrência de (3.2.6) mesmo quando todas as raízes da equação são reais é ilustrada no exemplo seguinte, o qual também sofre as limitações que acabamos de expor.

Exemplo 3.6 - Consideremos a equação

$$p(x) = x^5 - 9x^4 + 30x^3 - 46x^2 + 33x - 9 = 0$$

cujas raízes são 1 (tripla) e 3(dupla).

Aplicando a Fase Inicial obtemos, por (2.2.12),

$$\delta = 0.557086015$$

e, por (2.2.3),

$$S_2(\delta) = 15.62776999 \quad e \quad S_2(-\delta) = 1.395426940$$

Então, considerando a aproximação inicial $x_0 = \delta$, obtemos

i	x_i	$S_2(x_i)$	q_i
0	0.557086015	15.62776999	3.688225858
1	1.042889078	1631.255784	2.912194712
2	1.000636893	-1400893.025	

Como $S_2(x_2) < 0$ então

$$m = \lceil q_1 + 0.5 \rceil = 3$$

Assim, com 9 decimais seguidas de arredondamento simétrico, obtemos a raiz 1.000636893 de multiplicidade 3.

Exemplo 3.7 - Aplicando o método na equação

$$p(x) = x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

obtemos

Raízes	M	ITR	ITM
-0.3472963553338607D+00	1	5	3
0.3472963553338607D+00	-	-	-
-0.1000000000000000D+01	1	6	4
0.1000000000000000D+01	-	-	-
-0.1532088886237956D+01	1	6	4
0.1532088886237956D+01	-	-	-
0.1879385241571817D+01	1	-	-
-0.1879385241571817D+01	-	-	-

Observamos que, neste exemplo, as raízes foram determinadas duas a duas devido a aplicação do Teorema 2.3.

3.2.5 - A determinação de uma raiz complexa e de sua multiplicidade

MIDREM pode ser aplicado inclusive em equações polinomiais com coeficientes e/ou raízes complexas.

Como vimos, se a equação polinomial é real e x_0 é uma aproximação inicial não muito próxima da raiz α a ser determinada e se $S_2(x_0) \leq 0$ então α deve ser complexa. Neste caso, devemos considerar uma aproximação inicial complexa e aplicar (3.2.4) com aritmética complexa.

Assim, na determinação da multiplicidade de α, devemos considerar

$$q_i = q(z_i) = \left| \frac{p'^2(z_i)}{p'^2(z_i) - p(z_i)p''(z_i)} \right| = \left| \frac{S_1^2(z_i)}{S_2(z_i)} \right| \qquad (3.2.12)$$

uma vez que as aproximações z_i são complexas.

Na verdade, uma versão mais completa do Teorema 3.1 é a seguinte:

Teorema 3.1* - Seja $f(z)$ uma função de uma variável complexa, holomórfa sobre o domínio F do plano complexo e seja α uma raiz com multiplicidade m de $f(z)=0$. Suponhamos que $f'(z)\neq 0$ para todo $z\neq\alpha$ de F. Então, se a aproximação inicial complexa z_0 está suficientemente próxima de α, temos que

(i) o processo iterativo (3.2.4) converge para a raiz α e a convergência é de ordem, no mínimo, 2.

(ii) $\lim\limits_{z_i\to\alpha} q(z_i) = m$, sendo

$$q(z_i) = q_i = \left|\frac{f'^2(z_i)}{f'^2(z_i)-f(z_i)f''(z_i)}\right|$$

Este teorema é demonstrado de maneira análoga ao Teorema 3.1.

No entanto, se a raiz α a ser determinada é complexa pode ocorrer que

$$S_2(x_i) > 0 \quad \text{para } i=0,1,\ldots,k \quad \text{e} \quad S_2(x_{k+1}) \leq 0$$

o que como vimos no item 3.2.2 também pode ocorrer se todas as raízes da equação são reais.

Assim, se nada sabemos sobre as raízes da equação, é necessário nos certificarmos se α é real ou não. Isto é realizado no algorítmo que descrevemos a seguir.

3.2.6 - Aplicação de MIDREM quando não temos informações sobre as raízes da equação polinomial real

Inicialmente determinamos, pela Fase Inicial, uma aproximação real x_0 para a raiz de menor módulo de $p(z) = 0$ fazendo, por exemplo, $j = 0$ se $\rho_1 = \rho_2$. Assim, uma vez determinada a raiz α de multiplicidade m, saberemos se $-\alpha$ também é raiz de multiplicidade m da equação.

Observamos que o raio δ do passo 1 deve ser determinado por (2.2.10).

Pode acontecer que

(1) $S_2 = S_2(x_0) \leqslant 0$

Neste caso, a raiz α deve ser complexa. Para determiná-la, consideramos uma aproximação inicial complexa z_0 usando (2.2.7) ou (2.2.9) e calculamos a aproximação q_0 da multiplicidade de α por (3.2.12).

A seguir, determinamos z_1 usando (3.2.8) com aritmética complexa.

Com a aproximação z_1 reaplicamos (3.2.12) para obtermos q_1, e assim sucessivamente.

O processo de determinação da raiz complexa termina quando uma das condições a seguir for satisfeita:

$$|p(z_{i+1})| \leqslant 100 \times \varepsilon \quad \text{e} \quad |z_{i+1} - z_i| \leqslant \varepsilon . \max(1, |z_{i+1}|)$$

ou quando

$$S_2(z_{i+1}) > 0$$

onde ε é um limite de precisão pré-fixado.

(2) $S_2 = S_2(x_0) > 0$

Neste caso, não sabemos se a raiz α é real ou não. Então, usando (3.2.8), calculamos uma nova aproximação real x_1 e testamos se

$$|p(x_1)| \leqslant 100 \times \varepsilon$$

Caso seja, testamos se

$$|x_1 - x_0| \leqslant \varepsilon \, . \max(1, |x_1|)$$

Se este teste for satisfeito, a raiz é real e foi determinada; caso contrário, testamos se

$$S_2 = S_2(x_1) > 0 \qquad (3.2.13)$$

Caso seja, fazemos $x_0 = x_1$ e calculamos o novo valor real x_1 e, assim, sucessivamente. Caso o teste (3.2.13) seja falso, devemos verificar se esta aproximação pertence ou não à região de indeterminação da raiz. Isto é realizado, testando se

$$|p(x_1)| \leqslant \varepsilon^{1/k} \qquad (3.2.14)$$

onde $k = m$ se m já é conhecido ou $k = n$ se m ainda não foi determinado; pois, como vimos no item 1.2, se m é a multiplicidade da raiz então $\varepsilon^{1/m}$ nos dá uma estimativa do quanto de erro a aproximação pode conter.

Se o teste (3.2.14) for satisfeito, então a raiz é real e a aproximação pertence à região de indeterminação da raiz, o que implica que a aceitemos como raiz.

Se o teste (3.2.14) não for satisfeito, então a raiz deve ser complexa. Consideramos então, a aproximação inicial.

$$z_0 = x_1 + \delta i$$

e prosseguimos como na etapa (1).

Observamos que na etapa (1) (ou na (2)), uma vez conhecida uma aproximação z_i (ou x_i) para a raiz α, determinamos a aproximação q_i para a multiplicidade usando (3.2.12) (ou (3.2.7)).

O processo de determinação da multiplicidade termina quando

$$|q_{i+1} - q_i| < 0.5\, q_{i+1} \qquad \text{se} \qquad q_{i+1} < 1$$

ou

$$|q_{i+1} - q_i| < 0.5 \qquad \text{se} \qquad q_{i+1} \geqslant 1$$

Então

$$m = \lceil q_{i+1} + 0.5 \rceil$$

Se ocorrer que num passo i algum teste de aceitação da raiz seja satisfeito sem que a multiplicidade tenha sido determinada, fazemos

$$m = \lceil q_{i-1} + 0.5 \rceil$$

Como no caso de raiz simples pode ocorrer que o inteiro m resulte nulo, testamos se m=0. Caso seja, fazemos m = 1.

Se num estágio k, a multiplicidade m for determinada sem que se tenha encontrado a raiz, continuamos o processo de determinação da raiz, usando o método (3.2.10) com aritmética

real ou complexa conforme estejamos na etapa (2) ou (1), respectivamente.

Se estamos na etapa (1), ou seja, se estamos determinando uma raiz complexa, pode ocorrer que a aproximação inicial z_0 seja a própria raiz. Neste caso, fazemos m=1.

Tanto no caso real quanto no complexo, o processo de determinação da raiz é abandonado por falta de convergência se a raiz não for determinada num número pré-fixado de iterações.

O processo também é abandonado se, na etapa (1), para algum z_i obtermos $S_2(z_i) = 0$.

Uma vez determinada uma raiz α e sua multiplicidade m, realizamos o processo da deflação da seguinte forma:

a) Fazemos $m_1 = m$.

b) Se a raiz α foi determinada pela etapa (2), ou seja, se α é real e se $m > 1$ dividimos o polinômio por $z^2 - 2\alpha z + \alpha^2$ e fazemos $m = m-2$ tantas vezes quantas sejam necessárias até obtermos m=1 ou m=0. Se obtermos m=1, dividimos o polinômio por $z-\alpha$.

Fazemos $n = n-m_1$ e seguimos para o passo d).

c) Se a raiz α foi determinada pela etapa (1), ou seja, se $\alpha = a+ib$ fazemos $m_2 = 2m$ e então dividimos sucessivamente o polinômio por $z^2 - 2az + (a^2+b^2)$ e fazemos $m_2 = m_2-2$ tantas vezes quantas necessárias até obtermos $m_2 = 0$. Fazemos então $n = n-2m_1$.

d) Uma vez realizado o passo b) ou c), testamos se $j = 0$. Caso seja, então $-\alpha$ também é raiz, de multiplicidade m, da equação. Em conseqüência, fazemos $j = -1$, $\alpha = -\alpha$ e $m = m_1$ e voltamos ao passo b) ou c) conforme seja o caso.

Quando $j \neq 0$, se $n>2$ reaplicamos o processo de determinação de uma raiz e sua multiplicidade ao polinômio deflaciona

do. Fazemos isto sucessivamente, até que todas as raízes tenham sido determinadas, ou até que o polinômio deflacionado tenha grau 1 ou 2, quando então resolvemos a equação linear ou quadrática correspondente.

Também aqui é conveniente o uso da estratégia apresentada no algorítmo anterior com a finalidade de se evitar uma possível perda de precisão nas raízes determinadas após várias deflações.

A seguir, apresentamos alguns exemplos que ilustram a aplicação de MIDREM quando não temos informações sobre as raízes da equação polinomial real. No Apêndice I, apresentamos o algorítmo correspondente.

<u>Exemplo 3.8</u> - Aplicando o método na equação

$$p(z) = z^3 - 50z^2 + 701z - 3030 = 0$$

cujas raízes são $10 \pm i$ e 30, obtemos $\delta = 1$, $S_2(1) = 0.024984421$ e $S_2(-1) = 0.017165280$

Então considerando $x_0 = 1$, obtemos

i	x_i	$S_2(x_i)$
0	1.000000000	0.024984421
1	11.16613329	0.132059149
2	4.084393857	0.053965764
3	10.89024099	-0.126399921

Como $S_2(x_3) < 0$ e $p(x_3) = -34.2547980$, concluimos que a raiz a ser determinada deve ser complexa. Então, considerando $z_0 = 10.89024099 + i$, obtemos

i	z_i	q_i
0	10.89024099+1.000000000i	0.881429446
1	10.58599240+1.033611159i	0.889138325

Como $|q_1-q_0| < 0.5$ então $m = \lceil q_1+0.5 \rceil = 1$.

Assim, passamos a aplicar o método (3.2.10) e obtemos :

i	z_i'	z_i''	z_i
2	10.23925448 +1.061142576i	10.20863464 +1.136747394i	10.22394456 +1.098944985i
3	9.983827171 +1.015750955i	10.02168450 +0.983427130i	10.00275584 +0.999589043i
4	10.00000150 +1.000003658i	9.999998499 +0.999996409i	10.00000000 +1.000000034i

<u>Exemplo 3.9</u> - Este exemplo, tal como o exemplo 3.4, ilustra o fato de que em algumas equações polinomiais, tomando-se a aproximação inicial por (2.2.6) ou por (2.2.8), acabamos determinando não a raiz de menor módulo, mas sim uma raiz de módulo maior. Assim, consideremos a equação

$$p(z) = z^3 - 22z^2 + 165z - 450 = 0$$

cujas raízes são $6 \pm 3i$ e 10.

Realizando o passo 1 da Fase Inicial por (2.2.10) concluimos que o círculo $|z| \leqslant \delta = 1$ não contém nenhuma raiz da equação.

Como

$$S_2(\delta) = 0.04002734 1 \quad \text{e} \quad S_2(-\delta) = 0.03204567 6$$

concluimos que o círculo de centro δ e raio $\rho_1 = 8.657295842$ contém pelo menos a raiz de menor módulo da equação.

Assim, considerando a aproximação inicial por (2.2.8), obtemos

i	x_i	$S_2(x_i)$	q_i	$p(x_i)$
0	1.000000000	0.032045676	4.102454545	-306.
1	11.12379908	0.819578372	1.700429906	39.61764510
2	9.683395731	9.994166697	0.802537023	-7.144936500
3	9.966769237	905.5929526	0.978773218	-0.821971600
4	9.999644900	7929913.502	0.999772733	-0.008876800
5	9.999999972	3.6982248×10^{14}	0.999999973	-0.000001300
6	10.000000002			

Observamos que aplicando os testes de aceitação da multiplicidade obtemos

$$|q_3 - q_2| < 0.5\, q_3$$

e então $m = \lceil q_3 + 0.5 \rceil = 1$

Se considerarmos a aproximação inicial por (2.2.6), obtemos

$$x_0 = \delta + \rho_1 = 9.657295842$$

e então

i	x_i	$S_2(x_i)$	q_i	$p(x_i)$
0	9.657295842	8.532019592	0.786877013	-7.668284700
1	9.960983755	656.9359274	0.975086217	-0.963288000
2	9.999510295	4169614.643	0.999686585	-0.012241200
3	9.999999943	2.4414062×10^{14}	0.999999959	-0.000001600
4	10.000000010			

Também aqui observamos que

$$|q_1 - q_0| < 0.5\, q_1$$

e então

$$m = \lceil q_1 + 0.5 \rceil = 1$$

<u>Exemplo 3.10</u> - Seja a equação

$$p(z) = z^4 + 16 = 0$$

Aplicando a Fase Inicial, obtemos

$$\delta = 1 \quad \text{e} \quad S_2(1) = S_2(-1) = -0.650519031$$

Portanto

$$\rho_1 = \rho_2 = 2.479704856$$

Como $S_2(1)$ e $S_2(-1)$ são negativos, as raízes contidas nos círculos $C(\delta, \rho_1)$ e $C(-\delta, \rho_2)$ devem ser complexas.

Assim, considerando a aproximação inicial

$$z_0 = \delta\,(1+i) = 1+i$$

obtemos

i	z_i	q_i
0	1.000000000 (1+i)	3.250000000
1	1.230769231 (1+i)	1.930901219
2	1.428879210 (1+i)	0.878718353
3	1.396009970 (1+i)	0.961639233

Como $|q_3-q_2| < 0.5\, q_3$, então $m = \lceil q_3 + 0.5 \rceil = 1$.

Uma vez que a multiplicidade já foi determinada, passamos a usar o método (3.1.3). Obtemos

i	z_i'	z_i''	z_i
4	1.413860641(1+i)	1.414572723(1+i)	1.414216682(1+i)
5	1.414213552(1+i)	1.414213562(1+i)	1.414213557(1+i)
6	1.414213562(1+i)	1.414213562(1+i)	1.414213562(1+i)

Observamos que calculando os valores de q_i para estas últimas aproximações, obtemos

$$q_4 = 1.000006638, \quad q_5 = 1 \quad \text{e} \quad q_6 = 1$$

Como $\rho_1 = \rho_2$ concluimos que as raízes da equação são

$$\pm 1.414213562 \pm 1.414213562i$$

3.2.7. Aplicação de MIDREM em equações polinomiais com coeficientes complexos

Ao aplicarmos a Fase Inicial para a determinação de um valor inicial para uma raiz α de uma equação polinomial $p(z)=0$ com coeficientes complexos, devemos usar (2.2.10) para obtermos o raio δ de um círculo de centro na origem que não contenha nenhuma raiz da equação.

Como os coeficientes de $p(z)$ são complexos, então $S_2(\delta)$ e $S_2(-\delta)$ podem ser complexos. Assim, na determinação de uma raiz de $p(z)=0$, a aproximação inicial deve ser complexa quer a raiz a ser determinada seja real quer seja complexa.

Portanto, na determinação da raiz e da multiplicidade devemos usar (3.2.8) e (3.2.12) com aritmética complexa.

Está claro que neste caso, não é válido o Teorema 2.3 e que se a raiz α de multiplicidade m determinada é complexa, para a obtenção de sua complexa conjugada (caso exista) será necessário nova aplicação do método.

Observamos que quando a equação polinomial é real e não temos informações sobre suas raízes, também podemos aplicar MIDREM na forma acima descrita, ao invés de usarmos a descrita no item 3.2.6.

Exemplo 3.11 - Para ilustrar a aplicação de MIDREM em equações polinomiais com coeficientes complexos, consideremos a equação

$$p(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - (2+11i) = 0$$

do exemplo 2.4 do Capítulo 2. Naquele exemplo, vimos que podemos considerar a aproximação inicial

$$z_0 = 1.437664780 + 0.875831561i$$

Então, obtemos

$$q_0 = \left| \frac{[p'(z_0)/p(z_0)]^2}{S_2(z_0)} \right| = 2.999999995$$

e

$$z_1 = z_0 - \frac{p'(z_0)/p(z_0)}{S_2(z_0)} = 1.999999998+1.000000010i$$

Como $p(z_1) = 0$, concluimos que z_1 é raiz tripla da equação. Observemos que a raiz exata da equação é $z = 2+i$ de multiplicidade 3.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO DE GRAEFFE

4.1. Introdução

Este método que é uma das mais bonitas e estimulantes aplicações da teoria das equações é aplicável a equações polinomiais reais. Foi exposto inicialmente, em 1826, por Dandelin e, mais tarde, em 1834, por Lobachevski. Em 1837, Graeffe introduziu-o no campo das aplicações práticas.

O método de Graeffe é de difícil programação, como afirmam todos os textos que o apresentam. Alguns programas já elaborados deste método são próprios apenas para a resolução de equações polinomiais com raízes reais distintas e bem separadas (Ver, por exemplo, /8/). As maiores dificuldades encontradas na sua programação são: obtenção das raízes complexas, obtenção das raízes múltiplas e o fato de que as sucessivas quadrações exigidas pelo método "sobrecarregam" rapidamente os computadores, mesmo aqueles que tenham capacidade para grandes números.

A seguir descrevemos o método de Graeffe. As deduções de suas fórmulas podem ser encontradas, por exemplo em /37/, /12/ ou /14/. Expomos também alguns aspectos computacionais com os quais tivemos que nos preocupar para sua programação. No final do capítulo apresentamos alguns exemplos que ilustram sua aplicação e alguns tipos de equações polinomiais que podemos classificar como "problemáticas" para o método. No Apêndice II apre

sentamos a programação FORTRAN do método.

4.2. Descrição do método

4.2.1. Concepção do método

Consideremos a equação polinomial real de grau n

$$p_n(z) = a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_{n+1} = 0 \qquad (4.1.1)$$

cujas raízes $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Escrevendo (4.1.1) na forma fatorada

$$p_n(z) = a_1(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \ldots (z-\alpha_n) = 0$$

a equação

$$p_n^{(1)}(\mu) = (-1)^n p_n(z).p_n(-z) = a_1^2(\mu-\alpha_1^2)(\mu-\alpha_2^2)\ldots(\mu-\alpha_n^2) = 0$$

onde $\mu=z^2$, é tal que suas raízes são os quadrados das raízes de (4.1.1).

Assim, basicamente, o método de Graeffe consiste em construir, a partir de (4.1.1) a equação $p_n^{(1)}(\mu) = 0$ cujas raízes são os quadrados das raízes de $p_n(z)=0$. Procedendo de maneira análoga com $p_n^{(1)}(\mu) = 0$, obtemos a equação $p_n^{(2)}(y) = 0$ cujas raízes são os quadrados dos quadrados das raízes de $p_n(z) = 0$; e, assim sucessivamente. Ao fim de M passos teremos um polinômio cujas raízes são as potências 2^M-ésimas das raízes α_i de (4.1.1).

As operações para quadrar raízes com as quais obtemos os polinômios $p_n^{(m)}(z)$ para $z=z^{2m}$ e $m=0,1,\ldots,M-1$ são:

$$a_1^{(m+1)} = \left[a_1^{(m)}\right]^2$$

$$a_j^{(m+1)} = (-1)^{j-1}\left\{\left[a_j^{(m)}\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{j}(-1)^i a_{j-i}^{(m)}\, a_{j+i}^{(m)}\right\}$$

se $j+i \leq n+1$ e $j-i > 0$, com $j = 2,3,\ldots,n+1$ e $a_j^{(0)} = a_j$ para $j = 1,2,\ldots,n+1$.

Para minimizarmos os erros de arredondamento, os termos $\left[a_j^{(m)}\right]^2$ devem ser adicionados por último e as operações devem ser realizadas em dupla precisão.

4.2.2- Obtenção das raízes

Escrevendo as raízes α_j como

$$\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j} \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,n$$

teremos que se todas as raízes tem módulos distintos, então

$$\rho_j \simeq \left|\frac{a_j^{(m)}}{a_{j-1}^{(m)}}\right|^{1/2^m}, \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (4.1.2)$$

para m "suficientemente grande", o que na prática significa que continuamos o processo de quadrar raízes até que as aproximações das grandezas tenham se estabilizado no número de casas decimais que desejamos.

Uma das dificuldades no uso do método de Graeffe aparece quando algumas raízes são p-módulo múltiplas; ou seja, quando há p raízes de mesmo módulo. Estas dificuldades são de dois tipos:

a) As relações (4.1.2) não são, em geral, muito corretas, o que dificulta a determinação dos módulos das raízes.

b) Como algumas raízes podem ser complexas, não é muito simples determinarmos as raízes conhecendo apenas seus módulos.

No entanto, tais dificuldades são superadas com a determinação dos coeficientes pivotais.

<u>Definição</u>: Um coeficiente $a_j^{(m)}$ é pivotal se

$$\left| 1 - (-1)^{j+1} \frac{\left| a_j^{(m-1)} \right|^2}{a_j^{(m)}} \right| < \delta$$

onde δ é um limite especificado denominado limite pivotal.

Observamos que os coeficientes $a_1^{(m)}$ e $a_{n+1}^{(m)}$ são sempre pivotais, não precisando, portanto, serem testados.

A partir de coeficientes pivotais sucessivos, determinamos o módulo ρ das raízes α e a multiplicidade ξ de ρ, pois não é difícil deduzir que

$$\rho = \left[\frac{(-1)^{\xi} a_{k+\xi}^{(M)}}{a_k^{(M)}} \right]^{\frac{1}{2^M \xi}}$$

onde M é o número de quadrações realizadas.

Então, no método de Graeffe, procuramos os coeficientes pivotais e com eles determinamos os módulos e suas multiplicidades. Depois, começando com o menor dos módulos ρ_k (a fim de minimizarmos os efeitos dos erros de arredondamento), testamos se $\alpha_k = \pm\rho_k$ é uma raiz real de $p_n(z) = 0$. Se for, dividimos $p_n(z)$ pelo fator $z-\alpha_k$. Obtemos, assim, $p_{n-1}(z)$ tal que

$$p_n(z) = (z - \alpha_k)p_{n-1}(z)$$

Se a multiplicidade ξ_k de α_k é maior que 1, testamos se $\alpha_k = \pm\rho_k$ é uma raiz de $p_{n-1}(z)$, e assim sucessivamente. Este processo é continuado até que $\pm\rho_k$ falhe no teste de aceitação das raízes reais (que apresentaremos no item 4.2.3) e é, por isso, o módulo de uma raiz complexa.

Então, tomamos o próximo menor ρ_k e assim sucessivamente, repetindo este processo para cada módulo ρ_k, até que todas as raízes reais tenham sido determinadas.

Resta-nos, então, a equação polinomial $p_t(z)=0$ com $t \leq n$, cujas raízes são todas complexas. Se $p_t(z) = 0$ for quadrática, resolvemos diretamente esta equação e todas as raízes estarão determinadas. Se $t > 2$, uma vez que todas as raízes reais já foram determinadas, as multiplicidades dos módulos de raízes ainda desconhecidas são pares. Assim, para cada um destes módulos existem fatores reais de $p_t(z)$ da forma $Q(p,q) = z^2+pz+q$ tal que se as raízes de $Q(p,q) = 0$ são α e $\bar{\alpha}$ então $q = \alpha.\bar{\alpha}$; e se α tem módulo ρ então $q = \rho^2$.

Assumamos que $q = \rho_k^2$, onde ρ_k é o menor módulo cuja multiplicidade ξ_k indica a existência de um tal fator quadrático.

Se o processo para a determinação de p, que descrevemos a seguir, levar-nos a ξ_k-2 raízes de módulo ρ_k, então o fator restante é $z^2 - \rho_k^2$. O processo é o seguinte:

Escrevemos $p_t(z)$ com $t \leq n$ na forma

$$a_1z^t + a_2z^{t-1} + \ldots + a_{t+1} = (z^2+pz+q)(b_1z^{t-2}+b_2z^{t-3} + \ldots + b_{t-2}z + b_{t-1}) \qquad (4.1.3)$$

Desenvolvendo o segundo membro de (4.1.3) e igualando termo a termo os dois membros, obtemos

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - pb_1 \\ b_k = a_k - pb_{k-1} - qb_{k-2}\,; \; k=3,4,\ldots,t-1 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

De (4.1.3) concluimos que

$$a_{t+1} = qb_{t-1} \tag{4.1.5}$$

Assim, (4.1.5) é uma equação polinomial de grau t-2 em p, e alguma raiz real desta equação é o valor de p em (4.1.3).

Como $q=\rho_k^2$ então $p = -2\rho_k \cos\theta_k$ e, portanto

$$p^2 < 4q \tag{4.1.6}$$

Pode-se mostrar que cada solução real de (4.1.5) que satisfaz (4.1.6) corresponde ao fator quadrático $Q(p,q)$ de $p_t(z)$ e é, portanto, o produto de duas raízes de módulo ρ_k.

Resta-nos determinar os coeficientes de p no polinômio (4.1.5). Para isso, escrevemos

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} c_{k,j}\, p^{j-1} \quad , \quad k=1,2,\ldots,t-1 \tag{4.1.7}$$

Então, a partir de (4.1.4) podemos estabelecer as relações de recorrência para os c_k's para $k=1,2,\ldots,t-1$ que são:

$$\begin{cases} c_{k,j} = -c_{k-1,j-1} - qc_{k-2,j} \; ; \; j=2,3,\ldots,k \\ c_{k,j} = 0 \; ; \; j>k \\ c_{k,1} = a_k - qc_{k-2,1} \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Usando (4.1.8) podemos reescrever (4.1.5) na forma

$$a_{t+1} = q \sum_{j=1}^{t-1} c_{t-1,j}\, p^{j-1} \qquad (4.1.9)$$

Se a equação (4.1.9) tem grau ≤ 2 (o que equivale a $p_t(z) = 0$ ser de grau ≤ 4), resolvemos a equação quadrática ou linear (4.1.9). Caso contrário, usamos, novamente, o método de quadrar raízes. Mas, como agora estamos interessados apenas nas raízes reais cujos módulos satisfazem (4.1.6), não precisaremos, de novo, resolver equações do tipo (4.1.9).

As raízes reais p de (4.1.9) que satisfazem $|p|<2\rho_k$ fornecem-nos as raízes complexas de $p_t(z)=0$, pois se $Q(p,q) = z^2 \pm |p|z+\rho^2$ é um fator quadrático de $p_t(z) = 0$, então as raízes α de módulo ρ_k são

$$\alpha = \mp \frac{1}{2} \left(|p| \pm i \sqrt{4\rho_k^2 - p^2}\right)$$

A seguir apresentamos os testes para aceitação das raízes reais ou complexas.

4.2.3- Teste de aceitação das raízes

Para testar se os fatores linear ou quadrático são fatores de $p_n(z)$, consideramos como em /5/ ou /6/:

$$T(z) = |a_1|z^n + |a_2|z^{n-1} + \ldots + |a_n|z + |a_{n+1}|$$

Em seguida, fazemos

a) $w = -\alpha$ se estivermos testando se o polinômio linear $z-\alpha$ aproxima um fator de $p_n(z) = 0$; e, calculamos

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_k = a_k - wb_{k-1}; \ k=2,3,\ldots,n+1 \end{cases} \tag{4.1.10}$$

Consideramos a aproximação suficiente, se

$$T(\rho+2\varepsilon\rho) - T(\rho+\varepsilon\rho) \geqslant |b_{n+1}|$$

onde ε é o limite tolerado de erro relativo de α_j com relação a ρ_j.

b) $w = p$ e $q = \rho^2$ se estivermos testando se o polinômio quadrático $z^2 + pz + q$ aproxima um fator de $p_n(z) = 0$; e calculamos

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - wb_1 \\ b_3 = a_k - wb_{k-1} - qb_{k-2}; \ k=3,4,\ldots,n+1 \end{cases} \tag{4.1.11}$$

Consideramos a aproximação suficiente, se

$$T(\rho + 2\varepsilon\rho) - T(\rho + \varepsilon\rho) \geqslant \left|\frac{1}{2} wb_n + b_{n+1}\right| \tag{4.1.12}$$

Ao invés de testarmos (4.1.12), podemos considerar a aproximação suficiente se

$$T(\rho + 2\varepsilon\rho) - T(\rho + \varepsilon\rho) \geqslant +\sqrt{b_{n+1}^2 - b_n b_{n+2}}$$

sendo que, neste caso, calculamos também b_{n+2} fazendo $k=n+2$ em (4.1.11) com $a_{n+2}=0$.

Observamos que $T(\rho + 2\varepsilon\rho)$ e $T(\rho + \varepsilon\rho)$ são calculados pelo algorítmo da divisão sintética (4.1.10) e que todas as operações do método devem ser realizadas em dupla precisão, para que os erros de arredondamento sejam minimizados.

4.3. Considerações sobre alguns detalhes computacionais

4.3.1- Ordem de determinação dos módulos das raízes

De modo geral, o método de Graeffe determina os módulos ρ_k em ordem decrescente. Assim, a fim de minimizarmos os efeitos dos erros de arrendondamento durante a deflação, determinamos as raízes na ordem inversa de obtenção de seus módulos.

Em /5/, o autor mostra que existem equações polinomiais excepcionais, como aquelas que contêm pelo menos um polinômio ciclotômico de grau ímpar como um fator, e que, neste caso, os módulos das raízes não são determinados, necessariamente, em ordem decrescente.

Muito embora, quando se usa a deflação explícita "para a frente" seja sempre conveniente determinarmos as raízes em ordem crescente de módulos, não há grande vantagem em incluirmos, na programação, a verificação deste caso particular, já que na prática, os casos excepcionais não são muito freqüentes.

4.3.2. Determinação de M, ε, η e δ

No início da descrição do método de Graeffe afirmamos que ao fim de M quadrações obtemos uma equação cujas raízes são as potências 2^M-ésimas das raízes α_j de $p_n(z)=0$. Como saber, porém, em que M devemos parar a iteração que quadra raízes?

Da descrição do método de Graeffe percebemos também que há necessidade de determinarmos, previamente, as constantes ε e δ. Em /5/, onde encontramos também muitas interessantes discussões e tabelas sobre estas quantidades, o autor estabelece a seguinte sequência para a determinação destas constantes.

1) Primeiramente, decidimos com que erro relativo ε determinaremos as raízes α_j de $p_n(z)=0$. Depois, decidimos que constante η usaremos, onde $\eta > \varepsilon$ é o coeficiente de separação entre os módulos ρ_k das raízes. Assim, por exemplo, $\eta=0.1\%$ significa que esperamos que dois módulos sucessivos mas diferentes, ρ_k e ρ_{k+1}, sejam considerados como iguais a menos de

$$\rho_{k+1} < (1-\eta)\rho_k = 0.999\rho_k$$

2) Depois determinamos o número M de quadrações a serem realizadas. Consideramos como M o primeiro maior inteiro que seja maior ou igual a $3-(3.3)\log_{10}\eta+(0.1)n$. Observamos, então, que quanto maior for o η escolhido, mais rápido será o processo, pois menor será o número de quadrações M.

3) Determinamos, a seguir, o limite pivotal $\delta < 1$, calculando

$$r = (1-\eta)2^{M-1}, \quad t = \binom{n}{n/2} - 1, \quad \delta = \frac{(rt+1)^2}{r^n t+1} - 1$$

4) Podemos também estimar o número H de dígitos significativos a serem atingidos nas operações de quadrações. Assim, para obtermos o módulo ρ_k com um erro relativo ε, o número total H de dígitos significativos a serem atingidos nas M operações de quadrações é limitado por

$$H \leqslant 0.3\,M(n-1) - \log_{10}\varepsilon$$

ou

$$H \simeq 0.3\,M(\xi^*-1) - \log_{10}\varepsilon$$

onde ξ^* é a mais alta multiplicidade ξ das raízes com módulos iguais ou aproximadamente iguais, $1 \leqslant \xi \leqslant n$.

O uso do esquema acima pode ser necessário em equações polinomiais problemáticas. No entanto, num programa de uso geral fazemos um mínimo $M = 10$ e um máximo $MMAX = 15$ de quadrações com $\delta = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-6}$. Assim, se com M quadrações não nos foi possível determinar todas as raízes, realizamos mais uma quadração e assim sucessivamente, até o máximo MMAX quadrações. Se ainda assim não conseguimos determinar todas as raízes, o programa imprime as raízes já determinadas e uma mensagem de erro correspondente. Em equações polinomiais de grau baixo ($n \leqslant 6$) podemos usar M e MMAX menores, mantendo os δ e ε acima. Para equações polinomiais problemáticas como aquelas em que n é grande e as raízes são muito próximas, isto é, que têm α_j/α_{j+1} muito próximos de 1, devemos usar ε e δ consideravelmente menores enquanto aumentamos M e MMAX; ou, então, aplicarmos o esquema de determinação de M, δ, η e ε .

4.3.3- Como evitar overflow's

Já mencionamos que os coeficientes de $p_n^{(m)}(z)$ tornam-se muito grandes depois de algumas iterações. Assim, computadores como PDP-11 com que trabalhamos, cujos limites máximo e mínimo são de aproximadamente 10^{38} e 10^{-38} para os números de ponto flutuante, podem "sobrecarregarem-se" rapidamente, muitas

vezes antes de havermos separado adequadamente as raízes. Na verdade, a não ser que tomemos alguma precaução, ocorrerão over flow's e undeflow's no método de Graeffe, mesmo para computadores que tenham capacidade para grandes números. Este inconveniente foi um dos responsáveis para que este método tenha sido considerado, por vários autores, inadequado para uso computacional.

A técnica que usamos para evitar esta dificuldade, no método de Graeffe, foi trabalhar com os coeficientes dos polinômios $p_n^{(m)}(z)$, $m=0,1,\ldots,M-1$ em aritmética de dupla precisão e "escalá-los" através da sub-rotina

ESCAL: que "escala" números em dupla precisão colocando-os na forma

$y(64^{Iy})$ tal que $\frac{1}{64} \leq |y| \leq 64$, para $y \neq 0$ e $Iy \in \mathbb{Z}$

Isto nos obrigou programar também as sub-rotinas:

REESC: que transforma números em dupla precisão que estão na forma $y(64^{Iy})$ em números em dupla precisão da forma $x(64^{Ix})$ tal que $Ix = 0$.

ADIC: que adiciona números da forma $x(64^{Ix})$ e $y(64^{Iy})$ com x e y em dupla precisão.

DPEXP: que calcula, em dupla precisão, e^t onde $t = x(64^{Ix})$.

DPLOG: que calcula, em dupla precisão, $\ln t$ onde $t = x(64^{Ix})$.

Embora esta técnica tenha aumentado a complexidade computacional já inerente ao método de Graeffe, ela melhorou sensivelmente seu desempenho tornando-o não só programável como mais eficiente.

A seguir relacionamos algumas referências que apresentam outras técnicas para se evitar overflow's e underflow's, ou mesmo modificações do método de Graeffe.

Em /33/, os autores consideram a equação (4.1.1)na forma normalizada

$$p(z) = z^n + a_1^* z^{n-1} + \ldots + a_n^*$$

onde $a_i^* = a_i/a_1$ para $i = 2,3,\ldots,n+1$

e sugerem que, em alguns casos, é possível "escalarmos" a equação normalizada, dividindo-se seus coeficientes por um fator "de escala",s, elevado à potência i, sendo

$$s = |a_n|^{1/n}$$

de modo que

$$a_i' = a_i^*/s^i, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

se tornam os coeficientes do polinômio "escalado". Assim, as raízes α_i' da equação polinomial "escalada" estão associadas às raízes α_i da equação original por meio da relação

$$\alpha_i = s\,\alpha_i', \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Uma modificação do método de Graeffe, denominada algorítmo de Grau, na qual é contornado o problema da alta ordem de grandeza dos números devido às quadrações é encontrada em /17/. Esta modificação é adequada a equações polinomiais cujas raízes

são reais e distintas. Uma generalização do algorítmo de Grau aplicável a equações polinomiais reais de raízes reais ou complexas, simples ou múltiplas, é apresentada em /18/.

Em 1924, Brodetsky e Smeal /7/ introduziram modificações no método de Graeffe. O método por eles proposto permite obter diretamente as raízes reais já com os seus sinais e também o argumento e o módulo no caso de pares de raízes complexas. Contudo, esta modificação falha no caso de raízes múltiplas ou quando há vários pares de raízes complexas de mesmo módulo, a menos que sejam introduzidos ajustamentos para tais casos.

Em /4/, /5/, /6/ e /38/, encontramos um processo denominado resultante ou subresultante, conforme a técnica seguida, que usa o método das quadrações. Em /6/ os autores observam que apesar do título de /5/, o método que propõem e programaram não é uma mecanização do método de Graeffe. Nestes trabalhos encontramos a técnica que usamos para evitar o problema causado pela alta ordem de grandeza dos números resultantes das quadrações. Em /4/, há também uma ampla discussão sobre coeficientes pivotais.

A seguir, apresentamos alguns resultados obtidos com a aplicação deste método.

Exemplo 4.1.- Em /5/, Bareiss afirma que D. H. Lehmer escreveu em *The Graeffe process as applied to power series* - *Math. Tables Aids Comput.* 1(1945), 377-383 que o método de Graeffe falha completamente em casos de equações muito simples como, por exemplo,

$$p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

cujas raízes são as raízes primitivas da unidade.

No entanto, com a programação que elaboramos para o método de Graeffe, com $M = 10$, $\delta = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-6}$ obtemos as raízes

Parte Real	Parte Imaginária
-0.809016994374947 4D+00	±0.587785252292473 1D+00
0.309016994374947 4D±00	±0.591056516295153 6D+00

Quando a equação polinomial foi reconstruída a partir destas raízes, os novos coeficientes coincidem com os coeficientes do polinômio original em pelo menos 16 dígitos.

Exemplo 4.2.- As raízes 1, de multiplicidade 12, e 7 da equação

$$p(z) = z^{13} - 19z^{12} + 150z^{11} - 682z^{10} + 2035z^{9} - 4257z^{8} + \\ + 6468z^{7} - 7260z^{6} + 6039z^{5} - 3685z^{4} + 1606z^{3} - \\ - 474z^{2} + 85z - 7 = 0$$

foram determinadas exatamente com $M = 6$, $\delta = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-6}$.

Exemplo 4.3.- A equação

$$p(z) = z^{5} - 5z^{4} + 9z^{3} - 9z^{2} + 5z - 1 = 0$$

ilustra o fato de que o método de Graeffe nem sempre determina os módulos das raízes em ordem decrescente.

Assim, com $M = 7$, $\delta = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-6}$, obtemos as raízes

	Parte Real	Parte Imaginária
(3)	0.3819660112501052D+00	0.0000000000000000D+00
(2)	0.2618033988749895D+01	0.0000000000000000D+00
(1)	0.1000000000000000D+01	0.0000000000000000D+00
(1)	0.5000000000000000D+00	0.8660254037844387D+00
(1)	0.5000000000000000D+00	-0.8660254037844387D+00

Os números colocados entre parênteses antes das raízes indicam a ordem em que os módulos foram determinados.

A razão deste comportamento é o fator ciclotômico contido na equação que na forma fatorada é escrita como

$$p(z) = (z^3 - 1^3)(z - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2})$$

<u>Exemplo 4.4.</u>- A equação

$$p(z) = 4z^8 - 68z^7 + 461z^6 - 1588z^5 + 2915z^4 - 2648z^3 + \\ + 735z^2 + 432z - 243 = 0$$

ilustra o fato de que o método de Graeffe nem sempre determina os módulos das raízes em ordem decrescente, e que isto pode ocorrer mesmo em equações que não tenham fatores ciclotômicos.

Assim, com $M = 7$, $\delta = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-6}$, obtemos as raízes

-0.4142135623730951D+00
0.1000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01
0.4500000000000388D+01
0.4500000000000388D+01
0.2414213562375074D+01
0.2999999999997241D+01

Os módulos foram determinados na ordem inversa de apresentação das raízes.

Exemplo 4.5.- As raízes da equação de Hermite

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x = 0$$

determinadas pelo método de Graeffe com $M = 7$, $\delta = 10^{-6}$ e $\varepsilon = 10^{-8}$ foram

0.0000000000000000D+00

0.8162878828589646D+00

-0.8162878828589646D+00

0.1673551628767471D+01

-0.1673551628767471D+01

0.2651961356835234D+01

-0.2651961356835234D+01

Exemplo 4.6 - Para a equação

$$p(x) = x^6 - 36x^5 + 540x^4 - 4320x^3 + 19440x^2 - 46656x + 46656 = 0$$

cuja raiz é 6 de multiplicidade 6, os resultados obtidos com $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 10^{-6}$ e $M = 6,\ldots,41$ foram

0.6000000000000020D+01

0.6000000000000020D+01

0.6000000000000020D+01

e as demais raízes não foram determinadas.

No entanto, usando $\varepsilon = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-8}$ e $M = 30$ todas as

raízes foram determinadas.

Exemplo 4.7 - A equação

$$p(x) = x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729 = 0$$

cuja raiz é 3 de multiplicidade 6 forneceu os seguintes resultados com $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 10^{-6}$ e $M = 6, \ldots, 10$.

Raízes	
Parte Real	Parte Imaginária
0.2999999999999996D+01	0.0000000000000000D+00
0.2999999999999996D+01	0.0000000000000000D+00
0.2999999999999996D+01	0.0000000000000000D+00
0.2999999999999996D+01	0.0000000000000000D+00
0.3000000000000008D+01	0.3650024149988857D-07
0.3000000000000008D+01	0.3650024149988857D-07

Usando $\varepsilon = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-8}$ e $M = 30$, todas as raízes foram bem determinadas.

Exemplo 4.8 - A equação

$$p(x) = x^4 - 2020x^3 + 1039109x^2 - 19199090x + 90090000 = 0$$

cujas raízes são 9, 10, 1000 e 1001 forneceu os seguintes resultados quando se usou $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\delta = 10^{-3}$:

M	Raízes
6	0.9486832980505141 D + 01
	0.9486832980505141 D + 01
	0.1000499875062463 D + 04
	0.1000499875062463 D + 04
10	0.9000000100231522 D + 01
	0.1000000011000124 D + 02
	0.1000499875062463 D + 04
	0.1000499875062463 D + 04
12	0.9000000000000021 D + 01
	0.1000000000000043 D + 02
	0.9999960000424055 D + 03
	0.1001004033321102 D + 04
16	0.9000000000000001 D + 01
	0.1000000000000000 D + 02
	0.9999999999999998 D + 03
	0.1001000000000002 D + 04

Observamos que M = 6 não foi suficiente para separar as raízes, enquanto que com M = 10 houve separação entre as raízes 9 e 10 mas não entre 1000 e 1001. Com M = 12, já há separação entre as raízes embora não exista suficiente precisão nas duas de maiores módulos. Somente com M = 16 (ou mais) todas as raízes satisfazem às exigências de separação e precisão.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Um dos objetivos deste trabalho foi apresentar novas técnicas para a determinação de aproximações a serem usadas em métodos iterativos de resolução de equações polinomiais. Assim, no Capítulo 2, propomos a Fase Inicial que, como demonstramos, determina um ou mais valores iniciais para a raiz de menor módulo da equação polinomial $p(z) = 0$. Provamos também que o uso conjunto da Fase Inicial e da modificação do método de Newton que consiste na aplicação de Newton a $u(x) = p(x)/p'(x) = 0$ permite-nos determinar, muito facilmente, sem que analisemos os coeficientes da equação polinomial real $p(x) = 0$, se suas raízes são tais que sendo α uma raiz de multiplicidade m da equação então $-\alpha$ também é raiz de mesma multiplicidade. Como o teste a ser usado para a identificação destes casos é muito simples e já faz parte da Fase Inicial, esta constatação, que é de grande importância quando desejamos determinar todas as raízes da equação, não aumenta a complexidade computacional do método.

Provamos também um teorema que nos ajuda a identificar se a raiz a ser determinada é real ou complexa, desde que usemos conjuntamente a Fase Inicial e aquela modificação de Newton.

Ainda no Capítulo 2, propomos a Variante da Fase Inicial que também determina uma ou mais aproximações iniciais para

a raiz de menor módulo de uma equação polinomial real e mostramos que, em alguns casos, o valor inicial assim determinado é a própria raiz procurada.

Estas duas técnicas de determinação de valores iniciais que propomos, consistem de algorítmos simples, eficientes e aplicáveis em vários métodos iterativos. Ambas se revelaram bastante eficazes em todas as aplicações práticas realizadas.

Um outro objetivo deste trabalho foi provar que com o método de Newton aplicado a $u(z) = p(z)/p'(z) = 0$ determinamos não só uma raiz de $p(z) = 0$ como também sua multiplicidade. Assim, no Capítulo 3, propomos um novo método iterativo, denominado MIDREM, que determina todas as raízes (e suas multiplicidades) de uma equação polinomial e apresentamos os algorítmos de MIDREM quando aplicados a

1) equações polinomiais com todas as raízes reais

2) equações polinomiais reais com raízes reais e/ou complexas

3) equações polinomiais de coeficientes complexos

Em todas as aplicações práticas que realizamos, usamos a Fase Inicial para a determinação de cada valor a ser utilizado por MIDREM.

Embora nossos estudos tenham se restringido a equações polinomiais, mostramos também que podemos usar esta modificação de Newton para determinar a multiplicidade de uma raiz, numa classe muito mais ampla de funções.

Dos testes que realizamos, podemos concluir que:

1) Dentre as 551 equações de grau $n \leq 10$ testadas, 91,29% tiveram todas as raízes e multiplicidades bem determinadas e 6,53% tiveram várias raízes (mas não todas) determinadas. As 2,18% restantes não tiveram nenhuma raiz determinada.

2) Dentre as 44 equações de grau $10 < n \leq 20$ testadas, 65,91% tiveram todas as raízes e multiplicidades bem determinadas e 22,73% tiveram várias raízes (mas não todas) determinadas. As 11,36% restantes não tiveram nenhuma raiz determinada.

3) Todas as 47 equações testadas do tipo $p(z)=(z-\alpha)^n$ tiveram suas raízes e multiplicidades exatamente determinadas em uma única iteração.

4) Em equações do tipo $p(x) = (x-\alpha_1)^n(x-\alpha_2)$ como, por exemplo, a citada no exemplo 3.5 ou a equação $p(x) = (x-9)^4(x-900)$ as multiplicidades foram exatamente determinadas, mas as raízes tem poucos dígitos significativos.

5) Em equações mal condicionadas devido ao espaçamento regular das raízes, poucas (ou nenhuma) raízes são determinadas. As determinadas tem poucos dígitos significativos.

No Capítulo 4, apresentamos considerações sobre o método de Graeffe para a resolução de equações polinomiais reais. Devido ao inconveniente da frequente e rápida ocorrência de overflow's vários autores consideram este método inadequado para uso computacional. Nosso objetivo foi apresentar uma técnica que, sem modificar o método, evitasse este problema. Assim, mostramos que realizando uma conveniente "escalação" dos coeficientes das equações envolvidas no método, conseguimos nosso objetivo de tor

nar o método de Graeffe computacionalmente eficiente. No Apêndice II, apresentamos a programação FORTRAN do método, utilizando estas "escalações".

APÊNDICE I

Nesta secção, apresentamos os algorítmos correspondentes aos métodos que propomos nos Capítulos 2 e 3.

Observamos que suporemos que a equação polinomial a ser resolvida não tem raízes nulas.

A. Algorítmo da Fase Inicial

A.1. Para a determinação de uma aproximação inicial para a raiz de menor módulo de

$$p(z) = a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_{n+1} = 0$$

com $a_{n+1} \neq 0$ e $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n+1$ quando não sabemos se as raízes da equação são reais ou não.

(1) Calculamos $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ onde

$$\delta_1^{-1} = \max\{1, \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_j}{a_{n+1}}\right|\}$$

$$\delta_2^{-1} = \max\{\left|\frac{a_1}{a_{n+1}}\right| , 1 + \max_{2 \leq j \leq n} \left|\frac{a_j}{a_{n+1}}\right|\}$$

$$\delta_3 = \frac{|a_{n+1}|}{\sqrt{\sigma}} \quad \text{onde} \quad \sigma = \sum_{j=1}^{n+1} |a_j|^2$$

(2) Calculamos $S = |S_2(\delta)|$ e $SS = |S_2(-\delta)|$, onde

$$S_2(x) = \left[\frac{p'(x)}{p(x)}\right]^2 - \frac{p''(x)}{p(x)}$$

(3) Fazemos $J=-1$. Se $S < SS$ vamos para (4). Se $S = SS$ vamos para (6). Se $S > SS$ vamos para (7).

(4) Calculamos $\rho_2 = \sqrt{n/SS}$

(5) Se $S_2(-\delta) > 0$ fazemos $x_0 = -\delta$,

$$q_0 = \frac{[p'(-\delta)/p(-\delta)]^2}{S_2(-\delta)}, \quad x_1 = x_0 - \frac{p'(-\delta)/p(-\delta)}{S_2(-\delta)}$$

e vamos para (9). Caso contrário, fazemos $z_0 = -\delta + \gamma i$ com $\gamma = \min\{\delta, \rho_2\}$ e vamos para (10).

(6) Fazemos $J = 0$

(7) Calculamos $\rho_1 = \sqrt{n/S}$

(8) Se $S_2(\delta) > 0$ fazemos $x_0 = \delta$,

$$q_0 = \frac{[p'(\delta)/p(\delta)]^2}{S_2(\delta)}, \quad x_1 = x_0 - \frac{p'(\delta)/p(\delta)}{S_2(\delta)}$$

e vamos para (9). Caso contrário, fazemos $z_0 = \delta + \gamma i$ com $\gamma = \min\{\delta, \rho_1\}$ e vamos para (10).

(9) Fazemos $IND = 0$ e vamos para (11).

(10) Fazemos $IND = -1$.

(11) Finalizamos o processo.

Observações:

1. Podemos determinar apenas um dos raios (ρ_1 ou ρ_2), pois

$$\rho_1 \leq \rho_2 \Longleftrightarrow |S_2(\delta)| \geq |S_2(-\delta)|$$

e

$$\rho_2 < \rho_1 \Longleftrightarrow |S_2(\delta)| < |S_2(-\delta)|$$

2. Como aplicaremos o algorítmo A.1 para a determinação da aproximação inicial a ser usada por MIDREM para a determinação da raiz e sua multiplicidade, calculamos, aqui mesmo, a aproximação q_0 para a multiplicidade e a aproximação x_1 para a raiz. Se não se vai usar o algorítmo A.1 em MIDREM, estes cálculos não devem ser realizados neste algorítmo.

A.2. Para a determinação de uma aproximação inicial, por (2.2.8), para a raiz de menor módulo de $p(x)=0$, quando sabemos que todas as raízes da equação são reais:

(1) Calculamos $\delta = \left[\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n-1}a_{n+1}}\right]^{1/2}$

(2) Calculamos $S = S_2(\delta)$ e $SS = S_2(-\delta)$, onde

$$S_2(x) = \left[\frac{p'(x)}{p(x)}\right]^2 - \frac{p(x)}{p''(x)}$$

(3) Fazemos $J=-1$. Se $S < SS$ vamos para (4). Se $S = SS$ vamos para (5). Se $S > SS$ vamos para (6).

(4) Fazemos $x_0 = -\delta$,

$$q_0 = \frac{[p'(-\delta)/p(-\delta)]^2}{S_2(-\delta)}, \quad x_1 = x_0 - \frac{p'(-\delta)/p(-\delta)}{S_2(-\delta)}$$

e vamos para (7).

(5) Fazemos $J=0$.

(6) Fazemos $x_0 = \delta$,

$$q_0 = \frac{[p'(\delta)/p(\delta)]^2}{S_2(\delta)}, \quad x_1 = x_0 - \frac{p'(\delta)/p(\delta)}{S_2(\delta)}$$

(7) Finalizamos o processo.

Observamos que aqui não há necessidade de determinarmos os raios ρ_1 e ρ_2.

B. Algorítmo da Variante da Fase Inicial

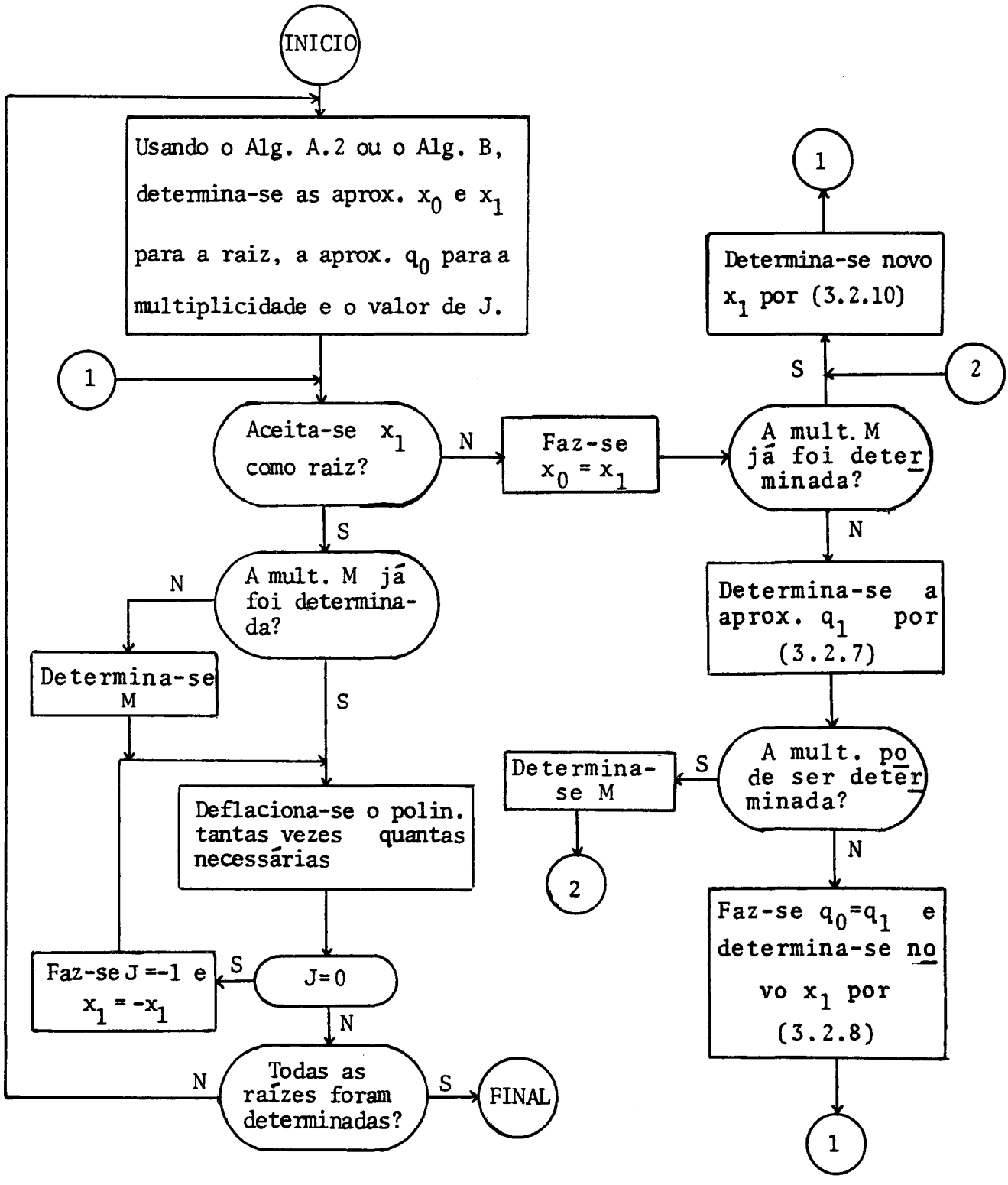
Para a determinação de uma aproximação inicial para a raiz de menor módulo da equação polinomial $p(x)=0$ cujas raízes são reais e não nulas.

A única diferença entre o algorítmo desta técnica e o que apresentamos anteriormente em A.2 é que aqui, o passo (1) é realizado calculando-se

$$\delta = \left[\frac{n a_{n+1}^2}{a_n^2 - 2a_{n-1}a_{n+1}} \right]^{1/2}$$

C. Algorítmo de MIDREM quando aplicado em equações polinomiais cujas raízes são reais

O esquema do método é o seguinte:



A seguir apresentamos mais detalhadamente, o algorítmo deste processo.

Observamos que as variáveis reais envolvidas neste algorítmo devem estar em dupla precisão, com exceção de q_0 e q_1 que são usadas exclusivamente no cálculo da multiplicidade. Observamos também que o polinômio original $p(x)$ é preservado em $p_1(x)$ e que seu grau original N é preservado em NN.

(1) Fazemos $p_1(x) = p(x)$, $NN = N$, $\eta = 100\varepsilon$ e $IR = 0$.

(2) Usando o Algorítmo A.2 ou o Algorítmo B, determinamos as aproximações x_0 e x_1 para a raiz de menor módulo da equação e a aproximação q_0 para a multiplicidade desta raiz.

(3) Fazemos K=0 e L=1.

(4) Testamos se $|p(x_1)| \leq \eta$. Caso seja, vamos para (5); caso contrário, vamos para (6).

(5) Testamos se

$$|x_1 - x_0| \leq \varepsilon \cdot \max(1, |x_1|)$$

Se o teste for satisfeito, vamos para (8); caso contrário, vamos para (6).

(6) Calculamos $S_2 = \left[\frac{p'(x_1)}{p(x_1)}\right]^2 - \frac{p''(x_1)}{p(x_1)}$

(7) Se $S_2 \leq 0$ vamos para (8); caso contrário, vamos para (10).

(8) Testamos se K=0 Caso seja, fazemos

$K=1, \quad M = \lceil q_0 + 0.5 \rceil$

e vamos para (9); caso contrário, vamos para (19).

(9) Se M=0 fazemos M=1 e vamos para (19), caso contrário, vamos para (19).

(10) Testamos de $L \leq LIM$. Caso seja, fazemos $L = L+1$ e vamos para (11). Caso contrário, vamos para (29) abandonando o processo por falta de convergência. O valor de IR indicará quantas raízes foram determinadas.

(11) Fazemos $x_0 = x_1$.

(12) Testamos se K=0. Caso seja, calculamos

$$q_1 = \frac{\left[p'(x_0)/p(x_0)\right]^2}{S_2}$$

e vamos para (13); caso contrário, vamos para (18).

(13) Se $q_1 < 1$ vamos para (14), caso contrário, para (15).

(14) Testamos se $|q_1 - q_0| < 0.5\, q_1$. Caso seja, fazemos $M = \lceil q_1 + 0.5 \rceil$ e vamos para (17); caso contrário, vamos para (16).

(15) Se $|q_1 - q_0| < 0.5$ fazemos $M = \lceil q_0 + 0.5 \rceil$ e vamos para (17); caso contrário, prosseguimos.

(16) Fazemos $q_0 = q_1$, calculamos

$$x_1 = x_0 - \frac{p'(x_0)/p(x_0)}{S_2}$$

e vamos para (4).

(17) Fazemos K = 1 e testamos se M = 0. Caso seja, fazemos M = 1 e vamos para (18); caso contrário, prosseguimos.

(18) Calculamos

$$y = x_0 - \frac{p'(x_0)/p(x_0)}{S_2}$$

$$z = x_0 - M\ p(x_0)/p'(x_0)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\ (y + z)$$

e vamos para (4).

(19) Fazemos MULT = M

(20) Fazemos I1 = IR + M e $X(I) = x_1$ para I = IR+1, IR+2,..., I1.

(21) Fazemos IR = I1 e testamos se N > M. Caso seja, vamos para (22); caso contrário, vamos para (29).

(22) Testamos o valor de M. Se M > 1, vamos para (23); se M = 1, vamos para (24); se M < 1, vamos para (25).

(23) Tomamos para p(x) o quociente da divisão do polinômio p(x) anterior por

$$(x - x_1^2) = x^2 - 2x_1x + x_1^2$$

Fazemos M = M-2 e vamos para (22).

(24) Tomamos para p(x) o quociente da divisão do polinômio p(x) anterior por $x-x_1$.

(25) Fazemos N = N - MULT e testamos se a variável J definida no Algorítmo A.2 ou no Algorítmo B é nula. Caso seja, fazemos $x_1 = -x_1$, M = MULT, J = -1 e vamos para (20). Caso contrário, prosseguimos.

(26) Testamos N. Se N > 2, vamos para (2). Se N = 2, resolvemos a equação quadrática e vamos para (28). Se N < 2, prosseguimos.

(27) Se N > 0, resolvemos a equação linear e vamos para (28); caso contrário, prosseguimos.

(28) Fazemos IR = NN o que indica que todas as raízes e suas multiplicidades foram determinadas.

(29) Finalizamos o processo.

O algorítmo de MIDREM para a determinação das raízes e suas multiplicidades quando a equação polinomial real a ser resolvida pode ter raízes reais e/ou complexas, é composto de 2 partes: uma, análoga ao Algorítmo C, para a determinação de uma raiz e sua multiplicidade se a raiz é real e a outra, também análoga ao Algorítmo C, mas com aritmética complexa, para a determinação de uma raiz e sua multiplicidade se a raiz é complexa.

APÊNDICE II

Nesta seção, apresentamos o programa correspondente ao método de Graeffe que é composto de 13 sub-rotinas e do programa principal escritos em linguagem FORTRAN.

```
      SUBROUTINE GRAEF(N,COEF,DELTA,EPSIL,M,MMAX,NUMR,ZR,ZI,ERROM,GAMA,R
     *EC,ICHAVE)
C
C         DETERMINA AS RAIZES NULAS. CHAMA OS SUBPROGRAMAS:
C         QRAIZ- QUE REALIZA AS QUADRACOES DOS COEFICIENTES.
C         MODUL- QUE DETERMINA OS MODULOS DAS RAIZES,SUAS MULTI-
C                PLICIDADES E AS RAIZES REAIS.
C         RECOR- QUE DETERMINA A EQUACAO (4.1.9).
C         RECON- QUE RECONSTROI O POLINOMIO.
C         DETERMINA AS RAIZES COMPLEXAS. CASO EXISTAM.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         N      -GRAU DA EQUACAO P(Z)=0.
C         COEF   -VETOR QUE CONTEM OS COEFICIENTES DE P(Z)=0.
C         DELTA  -LIMITE DO COEFICIENTE PIVOTAL.
C         EPSIL  -LIMITE DE ERRO RELATIVO DOS MODULOS.
C         M      -NUMERO DE QUADRACOES A SEREM REALIZADAS.
C         MMAX   -NUMERO MAXIMO DE QUADRACOES POSSIVEIS.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         NUMR   -NUMERO DE RAIZES DETERMINADAS.
C         ZR,ZI  -VETORES QUE CONTEM, RESPECTIVAMENTE, AS PARTES
C                 REAIS E IMAGINARIAS DAS RAIZES.
C         ERROM  -ERRO MAXIMO DOS COEFICIENTES DO POLINOMIO RECONSTRUIDO.
C         GAMA   -LIMITE DE ERRO RELATIVO DOS COEFICIENTES DO POLINOMIO
C                 RECONSTRUIDO.
C         REC    -VETOR QUE CONTEM OS COEF. DO POLIN. RECONSTRUIDO.
C         ICHAVE-CHAVE DE PROGRAMA:
C                 =-1 APENAS NUMR RAIZES FORAM DETERMINADAS.
C                     NAO HA RECONSTRUCAO DO POLINOMIO.
C                 = 0 NENHUM ERRO.
C                 = 1 OS COEFICIENTES DO POLINOMIO RECONSTRUIDO TEM
C                     ERRO MAIOR QUE GAMA.
C         SUBPROGRAMAS NECESSARIOS:
C          QRAIZ,MODUL,RECOR,TESTE,TESTC,ESCAL,REESC,RECON.
C
      DOUBLE PRECISION C,A,QUOC,ROMOD,ZR,ZI,RO,RREAL,C1,C2,C3,P,Q,T,DISC
     *,DIFERE,ROM,QNEG,ERROM,AUX,COEF,REC,AUXILI,DELTA,EPSIL,GAMA
      DIMENSION C(19,19),IC(19,19),A(21,3),IA(21,3),COEF(21),QUOC(21),IQ
     *UOC(21),REC(21),ROMOD(20),MULTC(20),ZR(20),ZI(20),RO(20),MRO(20),R
     *REAL(20)
      NCOR1=N+1
      NUMR=1
```

```
C          HA RAIZ NULA?
   10 IF (COEF(NCOR1)) 30,20,30
   20 ZR(NUMR)=0.0D00
      NUMR=NUMR+1
      NCOR1=NCOR1-1
      GO TO 10
   30 NCOR=NCOR1-1
C          ESCALANDO OS COEFICIENTES.
      DO 40 I=1,NCOR1
      A(I,1)=COEF(I)
      IA(I,1)=0
   40 CALL ESCAL(A(I,1),IA(I,1))
C          QUADRANDO OS COEFICIENTES.
   50 CALL QRAIZ(A,IA,NCOR,M)
C          DETERMINACAO DOS MODULOS E RESPECTIVAS MULTIPLICIDADES.
C          DETERMINACAO DAS RAIZES REAIS.
      CALL MODUL(A,IA,NCOR,M,DELTA,EPSIL,ROMOD,MULTC,IDIMEN,NUMR,ZR)
      K=NUMR-1
      IF (K) 80,80,60
   60 DO 70 I=1,K
   70 ZI(I)=0.0D00
   80 IF (IDIMEN) 290,290,90
C          EXISTEM RAIZES COMPLEXAS OU HA NECESSIDADE DE MAIS QUADRACOES.
C          DETERMINACAO DAS RAIZES COMPLEXAS.
   90 NCOR1=NCOR+1
      GO TO 170
  100 ITESTE=0
  110 CALL REESC(A(1,1),IA(1,1))
      CALL REESC(A(2,1),IA(2,1))
      CALL REESC(A(3,1),IA(3,1))
      C1=A(1,1)
      C2=A(2,1)
      C3=A(3,1)
  120 DISC=C2*C2-4.D00*C1*C3
      T=2.D00*C1
      C2=-C2
      IF (DISC) 150,130,140
  130 ICRAIZ=2
      RREAL(1)=C2/T
      GO TO 220
  140 DISC=DSQRT(DISC)
      ICRAIZ=3
      RREAL(1)=(C2+DISC)/T
      RREAL(2)=(C2-DISC)/T
      GO TO 220
  150 IF (ITESTE) 310,160,310
C          HA APENAS MAIS DUAS RAIZES COMPLEXAS CONJUGADAS.
  160 ZR(NUMR)=C2/T
      ZI(NUMR)=DSQRT(-DISC)/T
      K=NUMR+1
      ZR(K)=ZR(NUMR)
      ZI(K)=-ZI(NUMR)
      NUMR=K
      GO TO 320
  170 DO 280 I=1,IDIMEN
      ROM=ROMOD(I)
      JJ=0.5*MULTC(I)
      Q=ROM*ROM
      QNEG=-Q
      DO 280 J=1,JJ
      IF (NCOR-2) 310,100,180
```

```
C          DETERMINACAO DA EQUACAO RECORRENTE.
  180 CALL RECOR(A,IA,NCOR,Q,C,IC)
C          GRAU DA RECORRENTE.
      NCU=NCOR-2
      IF (NCU-2) 190,200,210
  190 CALL REESC(C(1,1),IC(1,1))
      CALL REESC(C(2,1),IC(2,1))
      ICRAIZ=2
      RREAL(1)=-C(2,1)/C(1,1)
      GO TO 230
  200 CALL REESC(C(1,1),IC(1,1))
      CALL REESC(C(2,1),IC(2,1))
      CALL REESC(C(3,1),IC(3,1))
      C1=C(1,1)
      C2=C(2,1)
      C3=C(3,1)
      ITESTE=1
      GO TO 120
C          A RECORRENTE TEM GRAU MAIOR QUE 2.
C          QUADRANDO OS COEFICIENTES DA RECORRENTE.
  210 CALL QRAIZ(C,IC,NCU,M)
      ICRAIZ=1
      CALL MODUL(C,IC,NCU,M,DELTA,EPSIL,RO,MRO,IDM,ICRAIZ,RREAL)
  220 K=ICRAIZ-1
      IF (K) 300,300,230
C          ANALISE DAS RAIZES REAIS DA RECORRENTE.
  230 ICRAIZ=K
      DO 280 INDICE=1,ICRAIZ
      P=RREAL(INDICE)
  240 T=P*P-4.0D00*Q
      IF (T) 250,280,280
C          TESTANDO SE Z**2+P*Z+Q E FATOR DO POLINOMIO.
  250 CALL TESTE(A,IA,NCOR1,ROM,EPSIL,DIFERE)
      P=-P
      CALL TESTC(A,IA,NCOR,P,QNEG,DIFERE,QUOC,IQUOC,ICHAVE)
      IF (ICHAVE) 280,280,260
C          O FATOR QUADRATICO ESTA BEM DETERMINADO.
C          DETERMINACAO DAS RAIZES COMPLEXAS.
  260 ZR(NUMR)=0.5D00*P
      ZI(NUMR)=0.5D00*DSQRT(-T)
      K=NUMR+1
      ZR(K)=ZR(NUMR)
      ZI(K)=-ZI(NUMR)
      NUMR=K+1
C          CONSIDERA-SE O POLINOMIO DEFLACIONADO.
      NCOR=NCU
      NCOR1=NCOR+1
      DO 270 K=1,NCOR1
      A(K,1)=QUOC(K)
  270 IA(K,1)=IQUOC(K)
  280 CONTINUE
  290 IF (N-NUMR+1) 320,320,300
  300 M=M+1
      IF (MMAX-M) 310,50,50
C          NEM TODAS AS RAIZES FORAM DETERMINADAS.
  310 NUMR=NUMR-1
      ICHAVE=-1
      RETURN
C          RECONSTRUCAO DO POLINOMIO.
  320 AUX=COEF(1)
      CALL RECON(N,ZR,ZI,AUX,REC)
```

```
C          DETERMINACAO DO ERRO MAXIMO DOS COEFICIENTES DO POLINOMIO
C           RECONSTRUIDO.
      AUX=0.0D00
      NCOR1=N+1
      DO 370 I=1,NCOR1
      AUXILI=COEF(I)
      IF (AUXILI) 330,340,330
  330 ERROM=DABS((REC(I)-AUXILI)/AUXILI)
      GO TO 350
  340 ERROM=DABS(REC(I))
  350 IF (AUX-ERROM) 360,370,370
  360 AUX=ERROM
  370 CONTINUE
      IF (ERROM-GAMA) 380,380,390
  380 ICHAVE=0
      RETURN
  390 ICHAVE=1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE QRAIZ(A,IA,NCOR,MM)
C
C          REALIZACAO DAS QUADRACOES DOS COEFICIENTES DA EQUACAO POLINO-
C           MIAL REAL P(Z)=0.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C          NCOR -GRAU DA EQUACAO.
C          MM   -NUMERO DE QUADRACOES A SEREM REALIZADAS.
C          A,IA -NAS COLUNAS 1, ESTAS MATRIZES CONTEM OS COEFICIENTES
C                "ESCALADOS" DE P(Z)=0; E,NA SAIDA, AS COLUNAS 2 E 3
C                CONTEM, RESPECTIVAMENTE, OS COEFICIENTES "ESCALADOS"
C                DAS EQUACOES RESULTANTES DE MM-1 E MM QUADRACOES DE
C                P(Z)=0.
C          SUBPROGRAMAS NECESSARIOS: ADIC E ESCAL.
C
      DOUBLE PRECISION A,Y
      DIMENSION A(21,3),IA(21,3)
      EQUIVALENCE (LREST,IREST)
      N1=NCOR+1
      DO 1 I=1,N1
      A(I,2)=A(I,1)
      IA(I,2)=IA(I,1)
      A(I,3)=0.0D00
      IA(I,3)=0
    1 CONTINUE
      ICONT=1
   10 DO 90 I=1,N1
      DO 60 L=1,I
      ISL=I+L
      IF (ISL-N1) 20,20,70
   20 ITL=I-L
      IF (ITL) 60,60,30
   30 LREST=MOD(L,2)
      Y=A(ITL,2)*A(ISL,2)
      IY=IA(ITL,2)+IA(ISL,2)
```

```
      CALL ESCAL(Y,IY)
      IF (IREST) 40,40,50
   40 CALL ADIC(A(I,3),IA(I,3),Y,IY,A(I,3),IA(I,3))
      GO TO 60
   50 Y=-Y
      CALL  ADIC(A(I,3),IA(I,3),Y,IY,A(I,3),IA(I,3))
   60 CONTINUE
   70 A(I,3)=2.0D00*A(I,3)
      CALL ESCAL(A(I,3),IA(I,3))
      Y=A(I,2)*A(I,2)
      IY=IA(I,2)+IA(I,2)
      CALL ESCAL(Y,IY)
      CALL ADIC(A(I,3),IA(I,3),Y,IY,A(I,3),IA(I,3))
      IREST=MOD(I,2)
      IF (IREST) 80,80,90
   80 A(I,3)=-A(I,3)
   90 CONTINUE
      ICONT=ICONT+1
      IF (MM-ICONT) 120,100,100
  100 DO 110 I=1,N1
      A(I,2)=A(I,3)
      IA(I,2)=IA(I,3)
      A(I,3)=0.0D00
      IA(I,3)=0
  110 CONTINUE
      GO TO 10
  120 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE MODUL(A,IA,NCOR,M,DELTA,EPSIL,ROMOD,MULTC,IDIMEN,NUMR,Z
     *R)
C
C         DETERMINACAO DOS MODULOS, SUAS MULTIPLICIDADES E DAS RAIZES
C          REAIS.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         A,IA    -NAS COLUNAS 1, ESTAS MATRIZES CONTEM OS COEFICIENTES
C                  "ESCALADOS" DE P(Z)=0. AS COLUNAS 2 E 3 CONTEM, RES-
C                  PECTIVAMENTE, OS COEFICIENTES "ESCALADOS" DAS EQUA-
C                  COES RESULTANTES DE M-1 E M QUADRACOES DE P(Z)=0.
C         NCOR    -GRAU DA EQUACAO.
C         M       -NUMERO DE QUADRACOES A SEREM REALIZADAS.
C         DELTA   -LIMITE DO COEFICIENTE PIVOTAL.
C         EPSIL   -LIMITE DE ERRO RELATIVO DOS MODULOS.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         ROMOD   -VETOR QUE CONTEM AS MULTIPLICIDADES DOS MODULOS DAS
C                  RAIZES COMPLEXAS.
C         IDIMEN  -DIMENSAO DO VETOR MULTC.
C         NUMR    -NUMERO DE RAIZES DETERMINADAS.
C         ZR      -VETOR QUE CONTEM AS RAIZES REAIS DETERMINADAS.
C         SUBPROGRAMAS NECESSARIOS:
C          ESCAL, REESC, DPLOG, DPEXP, TESTE, TESTR.
C
      DOUBLE PRECISION A,B,ROM,ROMOD,ZR,T,XX,AUX,W,DIFERE,DELTA,EPSIL
      DIMENSION A(21,3),IA(21,3),IPIVO(21),B(21),IB(21),ROM(20),MROM(20)
     *,ROMOD(20),MULTC(20),ZR(20)
      EQUIVALENCE (AUX,W),(IPIVO(1),MROM(1)),(IT,MULT),(IROM,K1),(IXX,IC
     *ONTE)
```

```
C          DETERMINACAO DOS COEFICIENTES PIVOTAIS.
      DO 80 I=2,NCOR
      IND=I+1
      IND=MOD(IND,2)
      IF (A(I,3)) 10,70,10
   10 T=A(I,2)*A(I,2)
      IT=IA(I,2)+IA(I,2)
      CALL ESCAL(T,IT)
      T=T/A(I,3)
      IT=IT-IA(I,3)
      IF (IT-2) 20,20,70
   20 IF (IT+2) 70,30,30
   30 CALL REESC(T,IT)
      RAIO=T
      IF (IND) 50,50,40
   40 RAIO=-RAIO
   50 IF (ABS(1.-RAIO)-DELTA) 60,70,70
   60 IPIVO(I)=1
      GO TO 80
   70 IPIVO(I)=0
   80 CONTINUE
      NCOR1=NCOR+1
      IPIVO(NCOR1)=1
C          DETERMINACAO DOS MODULOS DAS RAIZES E DAS MULTIPLICIDADES DOS
C          MODULOS.
      AUX=2.0**M
      IND=0
      MULT=1
      I=1
   90 IND=IND+1
  100 J=IND+MULT
      IF (IPIVO(J)) 90,90,110
  110 ROM(I)=A(J,3)/A(MULT,3)
      IROM=IA(J,3)-IA(MULT,3)
      CALL ESCAL(ROM(I),IROM)
      IF (ROM(I)) 120,130,130
  120 ROM(I)=-ROM(I)
  130 CALL DPLOG(ROM(I),IROM,XX,IXX)
      T=AUX*IND
      XX=XX/T
      CALL ESCAL(XX,IXX)
      CALL DPEXP(XX,IXX,ROM(I),IROM)
      IF (IROM-20) 140,140,150
  140 IF (IROM+20) 150,150,160
  150 ROM(I)=0.0D00
      IROM=0
      GO TO 170
  160 CALL REESC(ROM(I),IROM)
  170 MROM(I)=IND
      IF (NCOR1-J)190,190,180
  180 MULT=J
      I=I+1
      IND=1
      GO TO 100
C          DETERMINACAO DAS RAIZES REAIS.
  190 IDIMEN=0
      MENOS1=-1
      DO 240 K1=MULT,1,MENOS1
      ICONTE=0
      IND=MROM(K1)
      W=ROM(K1)
```

```
C          CALCULO DO PRIMEIRO MEMBRO DA DESIGUALDADE QUE TESTA A
C           ACEITACAO DE UMA RAIZ REAL.
      J=1
      CALL TESTE(A,IA,NCOR1,W,EPSIL,DIFERE)
  200 INDICE=IND-ICONTE+J
C          TESTANDO SE A RAIZ E REAL.
  210 CALL TESTR(A,IA,NCOR1,W,DIFERE,B,IB,ICHAVE)
      IF (ICHAVE) 250,250,220
C          ENCONTRADO-SE UMA RAIZ REAL.
  220 ZR(NUMR)=W
      NUMR=NUMR+1
      ICONTE=ICONTE+1
C          CONSIDERA-SE O POLINOMIO DEFLACIONADO.
      DO 230 I=2,NCOR
      A(I,1)=B(I)
  230 IA(I,1)=IB(I)
      NCOR1=NCOR1-1
      NCOR=NCOR1-1
      J=J+1
      IF (J-INDICE) 210,240,240
  240 CONTINUE
      RETURN
  250 IF (W) 270,270,260
  260 W=-W
      GO TO 210
C          GUARDA-SE OS MODULOS DAS RAIZES NAO DETERMINADAS E SUAS RESPEC-
C           TIVAS MULTIPLICIDADES.
  270 IDIMEN=IDIMEN+1
      ROMOD(IDIMEN)=ROM(K1)
      MULTC(IDIMEN)=INDICE-J
      GO TO 240
      END
```

```
      SUBROUTINE RECOR(A,IA,NCOR,Q,C,IC)
C
C         OBTENCAO DA EQUACAO (4.1.9) ATRAVES DAS RELACOES DE
C          RECURRENCIAS (4.1.8).
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         A,IA -ESTAS MATRIZES TEM 3 COLUNAS, MAS APENAS AS COLUNAS
C                1 SERAO AQUI USADAS. ELAS CONTEM OS COEFICIENTES
C                "ESCALADOS" DA EQUACAO P(Z)=0.
C         NCOR -GRAU DA EQUACAO.
C         Q    -QUADRADO DO MODULO DA RAIZ.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         C,IC -MATRIZES QUE CONTEM, NAS COLUNAS 1, OS COEFICIENTES
C                "ESCALADOS" DA EQUACAO (4.1.9).
C         SUBPROGRAMAS NECESSARIOS: ESCAL E ADIC
C
      DOUBLE PRECISION A,C,AUX,Q
      DIMENSION C(19,19),IC(19,19),A(21,3),IA(21,3)
      NCOR2=NCOR-1
      DO 80 KK=1,NCOR2
      KM1=KK-1
      KM2=KK-2
      IF (KM2) 10,10,20
   10 C(KK,1)=A(KK,1)
      IC(KK,1)=IA(KK,1)
      GO TO 30
   20 AUX=-C(KM2,1)*Q
      IAUX=IC(KM2,1)
      CALL ESCAL(AUX,IAUX)
      CALL  ADIC(A(KK,1),IA(KK,1),AUX,IAUX,C(KK,1),IC(KK,1))
   30 DO 70 I=2,KK
      IF (KM2) 80,40,40
   40 J=I-1
      IF (KM2-I) 50,60,60
   50 C(KK,I)=-C(KM1,J)
      IC(KK,I)=IC(KM1,J)
      GO TO 70
   60 AUX=C(KM2,I)*Q
      IAUX=IC(KM2,1)
      CALL ESCAL(AUX,IAUX)
      CALL ADIC(C(KM1,J),IC(KM1,J),AUX,IAUX,C(KK,I),IC(KK,I))
      C(KK,I)=-C(KK,I)
   70 CONTINUE
   80 CONTINUE
      DO 90 KK=1,NCOR2
   90 C(NCOR2,KK)=C(NCOR2,KK)*Q
      CALL ESCAL(C(NCOR2,1),IC(NCOR2,1))
      I=NCOR+1
      AUX=-A(I,1)
      CALL ADIC(C(NCOR2,1),IC(NCOR2,1),AUX,IA(I,1),C(NCOR2,1),IC(NCOR2,1
     *))
      DO 100 KK=2,NCOR2
      KM1=NCOR-KK
  100 C(KM1,1)=C(NCOR2,KK)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TESTE(A,IA,NCOR1,ROMOD,EPSIL,DIFERE)
C
C         CALCULO, POR NORMER, DO PRIMEIRO MEMBRO DA DESIGUALDADE
C          QUE TESTA A ACEITACAO DAS RAIZES.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         A,IA  -EMBORA ESTAS MATRIZES TENHAM 3 COLUNAS, APENAS
C                AS COLUNAS 1 SERAO AQUI USADAS. ELAS CONTEM OS COE-
C                FICIENTES "ESCALADOS" DA EQUACAO P(Z)=0.
C         NCOR1 -NUMERO DE COEFICIENTES DA EQUACAO.
C         ROMOD -MODULO QUE ESTA SENDO TESTADO.
C         EPSIL -LIMITE DE ERRO RELATIVO DO MODULO.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         DIFERE-RESULTADO DO PRIMEIRO MEMBRO DA DESIGUALDADE.
C         SUBPROGRAMA NECESSARIO: REESC.
C
      DOUBLE PRECISION A, EPSIL,T1,TT1,AUX,ROMOD,CTE1,CTE2,X,DIFERE
      DIMENSION A(21,3),IA(21,3)
      T1=0.0D00
      TT1=0.0D00
      AUX=EPSIL+EPSIL
      AUX=ROMOD*AUX
      CTE1=ROMOD+AUX
      CTE2=ROMOD+ EPSIL*ROMOD
      DO 50 I=1,NCOR1
      IF (A(I,1)) 10,40,20
   10 X=-A(I,1)
      GO TO 30
   20 X=A(I,1)
   30 IX=IA(I,1)
      CALL REESC(X,IX)
      T1=T1*CTE1+X
      TT1=TT1*CTE2+X
      GO TO 50
   40 T1=T1*CTE1
      TT1=TT1*CTE2
   50 CONTINUE
      DIFERE=T1-TT1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TESTR(A,IA,NCUR1,W,DIFERE,B,IB,ICHAVE)
C
C         CALCULO, POR HORNER, DO SEGUNDO MEMBRO DA DESIGUALDADE
C          QUE TESTA A ACEITACAO DE UMA RAIZ REAL.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         A,IA    -ESTAS MATRIZES TEM 3 COLUNAS, MAS AQUI APENAS
C                  AS COLUNAS 1 SAO USADAS. ELAS CONTEM  OS
C                  COEFICIENTES "ESCALADOS" DA EQUACAO P(Z)=0.
C         NCUR1   -NUMERO DE COEFICIENTES DA EQUACAO.
C         W       -RAIZ QUE ESTA SENDO TESTADA.
C         DIFERE  -VALOR DO PRIMEIRO MEMBRO DA DESIGUALDADE QUE
C                  TESTA A RAIZ.
C         B,IB    -VETORES QUE CONTEM OS COEFICIENTES "ESCALADOS"
C                  DO POLINOMIO DEFLACIONADO.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         ICHAVE  -CHAVE DE PROGRAMA:
C           =1    -A RAIZ FOI ACEITA.
C           =0    -A RAIZ NAO FOI ACEITA.
C         SUBPROGRAMAS NECESSARIOS: ESCAL, REESC E ADIC.
C
      DOUBLE PRECISION A,B,W,DIFERE,AUX
      DIMENSION A(21,3),IA(21,3),B(21),IB(21)
      B(1)=A(1,1)
      IB(1)=IA(1,1)
      DO 10 I=2,NCUR1
      J=I-1
      AUX=W*B(J)
      IAUX=IB(J)
      CALL ESCAL(AUX,IAUX)
      CALL ADIC(A(I,1),IA(I,1),AUX,IAUX,B(I),IB(I))
   10 CONTINUE
      AUX=B(NCUR1)
      IAUX=IB(NCUR1)
      IF (AUX) 20,60,30
   20 AUX=-AUX
   30 IF (IAUX-20) 40,40,70
   40 IF (IAUX+20) 70,50,50
   50 CALL REESC(AUX,IAUX)
      IF (DIFERE-AUX) 70,70,60
C         A RAIZ FOI ACEITA.
   60 ICHAVE=1
      RETURN
C         A RAIZ NAO FOI ACEITA.
   70 ICHAVE=0
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TESTC(A,IA,NCOR,W,Q,DIFERE,B,IB,ICHAVE)
C
C         CALCULO DO SEGUNDO MEMBRO DA DESIGUALDADE QUE TESTA A
C          ACEITACAO DE UM FATOR QUADRATICO.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         A,IA    -ESTAS MATRIZES TEM 3 COLUNAS, MAS AQUI SOMENTE AS
C                  COLUNAS 1 SERAO USADAS. ELAS CONTEM OS COEFICIENTES
C                  "ESCALADOS" DE P(Z)=0.
C         NCOR    -GRAU DA EQUACAO.
C         W,Q     -COEFICIENTES DO FATOR QUADRATICO Z**2+W*Z+Q  QUE
C                  ESTA SENDO TESTADO.
C         DIFERE  -VALOR DO PRIMEIRO MEMBRO DA DESIGUALDADE QUE
C                  TESTA O FATOR QUADRATICO.
C         B,IB    -VETORES QUE CONTEM OS COEFICIENTES "ESCALADOS"
C                  DO POLINOMIO DEFLACIONADO.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         ICHAVE  -CHAVE DE PROGRAMA:
C           =1    -O FATOR QUADRATICO FOI ACEITO.
C           =0    -O FATOR QUADRATICO NAO FOI ACEITO.
C         SUBPROGRAMAS NECESSARIOS: ESCAL, REESC E ADIC.
C
      DOUBLE PRECISION A,B,W,Q,DIFERE,AUX,BN,BN1,BNM2
      DIMENSION A(21,3),IA(21,3),B(21),IB(21)
      EQUIVALENCE (BNM2,AUX),(IBN1,J)
      NCOR1=NCOR+1
      B(1)=A(1,1)
      IB(1)=IA(1,1)
      AUX=W*B(1)
      IAUX=IB(1)
      CALL ESCAL(AUX,IAUX)
      CALL ADIC(A(2,1),IA(2,1),AUX,IAUX,B(2),IB(2))
      DO 10 I=3,NCOR1
      J=I-1
      K=I-2
      BN=W*B(J)
      IBN=IB(J)
      BN1=Q*B(K)
      IBN1=IB(K)
      CALL ESCAL(BN,IBN)
      CALL ESCAL(BN1,IBN1)
      CALL ADIC(BN,IBN,BN1,IBN1,AUX,IAUX)
      CALL ADIC(A(I,1),IA(I,1),AUX,IAUX,B(I),IB(I))
   10 CONTINUE
      BN=B(NCOR)
      IBN=IB(NCOR)
      IF (IBN-20) 20,20,80
   20 IF (IBN+20) 80,30,30
   30 CALL REESC(BN,IBN)
      BN1=B(NCOR1)
      IBN1=IB(NCOR1)
      IF (IBN1-20) 40,40,80
   40 IF (IBN1+20) 80,50,50
   50 CALL REESC(BN1,IBN1)
      BNM2=Q*BN*BN
      BN=W*BN*BN1
      BN1=BN1*BN1
      AUX=BN1-BN-BNM2
      IF (AUX) 60,90,70
   60 AUX=-AUX
   70 DIFERE=DIFERE*DIFERE
```

```
      IF (DIFERE-AUX) 80,90,90
   80 ICHAVE=0
      RETURN
   90 ICHAVE=1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE ADIC(X,IX,Y,IY,Z,IZ)
C
C        ADICIONA NUMEROS DA FORMA X*(64**IX) E Y*(64**IY) COM
C         X E Y EM DUPLA PRECISAO.
C        O RESULTADO DA OPERACAO E Z*(64**IZ).
C        SUBPROGRAMA NECESSARIO: ESCAL.
C
      DOUBLE PRECISION X,Y,Z,F,G
      IF (X) 20,10,20
   10 Z=Y
      IZ=IY
      RETURN
   20 IF (Y) 50,30,50
   30 Z=X
   40 IZ=IX
      RETURN
   50 IDIF=IX-IY
      IF (IDIF) 80,60,70
   60 Z=X+Y
      GO TO 40
   70 F=X
      IF=IX
      G=Y
      GO TO 90
   80 F=Y
      IF=IY
      G=X
      IDIF=-IDIF
   90 IF (16-IDIF) 100,100,110
  100 Z=F
      IZ=IF
      RETURN
C        FAZENDO G=G/64. IDIF VEZES.
  110 DO 120 I=1,IDIF
      G=0.015625D00*G
  120 CONTINUE
      Z=F+G
      IZ=IF
      CALL ESCAL(Z,IZ)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE ESCAL(Y,IY)
C
C        "ESCALA" NUMEROS EM DUPLA PRECISAO COLOCANDO-OS NA
C         FORMA Y*(64**IY) TAL QUE 1/64 ≤ |Y| ≤ 64, PARA Y=0
C         E IY INTEIRO.
C
      DOUBLE PRECISION Y,Z
C        A CONSTANTE 0.015625=1./64.
      IF (Y) 10,100,20
   10 Z=-Y
      GO TO 30
   20 Z=Y
   30 IF (64.0D00-Z) 40,50,50
   40 Z=0.015625D00*Z
      IY=IY+1
      GO TO 30
   50 IF (Z-0.015625D00) 60,70,70
   60 Z=64.0D00*Z
      IY=IY-1
      GO TO 50
   70 IF (Y) 80,90,90
   80 Y=-Z
      RETURN
   90 Y=Z
      RETURN
  100 IY=0
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE REESC(Y,IY)
C
C        TRANSFORMA NUMEROS EM DUPLA PRECISAO QUE ESTAO NA
C         FORMA Y*(64**IY) EM NUMEROS EM DUPLA PRECISAO DA
C         FORMA X*(64**IX) TAL QUE IX=0.
C
      DOUBLE PRECISION Y
      IF (IY+20) 10,20,20
   10 Y=0.0D00
      GO TO 70
   20 IF (IY-20) 30,30,50
   30 IF (IY) 40,80,40
   40 Y=64.0D00*Y**IY
      GO TO 70
   50 Y=1.0D+37
      WRITE(3,60)
   60 FORMAT(46X,'EXPOENTE - OVERFLOW NA REESCALA')
   70 IY=0
   80 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DPEXP(X,IX,Z,IZ)
C
C        CALCULA, EM DUPLA PRECISAO, EXP(X*(64**IX)).
C        O RESULTADO DA OPERACAO E Z*(64**IZ).
C        SUBPROGRAMA NECESSARIO: ESCAL.
C
      DOUBLE PRECISION X,Y,Z
      Z=DEXP(X)
      IZ=0
      IF (IX) 10,50,60
   10 I=-IX
      I1=6*I
      DO 40 J=1,I1
      IREST=MOD(IZ,2)
      IF (IREST) 20,30,20
   20 Z=64.0D00*Z
      IZ=IZ-1
   30 Z=DSQRT(Z)
      IZ=IZ/2
      CALL ESCAL(Z,IZ)
   40 CONTINUE
      RETURN
   50 CALL ESCAL(Z,IZ)
      RETURN
   60 I=6*IX
      DO 70 J=1,I
      Z=Z*Z
      IZ=IZ+IZ
      CALL ESCAL(Z,IZ)
   70 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DPLOG(X,IX,Y,IY)
C
C        CALCULA, EM DUPLA PRECISAO LN(X*(64**IX)).
C        O RESULTADO DA OPERACAO E Y*(64**IY).
C        SUBPROGRAMA NECESSARIO: ESCAL.
C
      DOUBLE PRECISION X,Y,W
      W=64.0D00
      IF (X) 10,10,30
   10 WRITE(3,20)
   20 FORMAT(37X,'NECESSITOU-SE DO LOG DE UM NUMERO NAO POSITIVO')
      Y=0.0D00
      IY=0
      RETURN
   30 Y=DLOG(W)*IX+DLOG(X)
      IY=0
      CALL ESCAL(Y,IY)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RECON(N,ZR,ZI,COF,REC)
C
C         RECONSTRUCAO DO POLINOMIO A PARTIR DE SUAS RAIZES E DO
C          COEFICIENTE DO TERMO DE MAIOR POTENCIA DO POL. ORIGINAL.
C PARAMETROS - DE ENTRADA:
C         N     -GRAU DA EQUACAO POLINOMIAL.
C         ZR,ZI-VETORES QUE CONTEM, RESPECTIVAMENTE, AS  PARTES
C               REAIS E IMAGINARIAS DAS RAIZES.
C         COF   -COEFICIENTE DO TERMO DE MAIOR POTENCIA DO POLI-
C               NOMIO ORIGINAL.
C PARAMETROS - DE SAIDA:
C         REC   -VETOR QUE CONTEM OS COEFICIENTES DO POLINOMIO
C               RECONSTRUIDO.
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION REC(21),ZR(20),ZI(20)
      N1=N+1
      DO 10 I=1,N,2
      REC(I)=0.0D00
   10 REC(I+1)=0.0D00
      REC(N1)=1.0D00
      I=1
      NTIRA1=N-1
   20 ZREAL=ZR(I)
      ZIMAG=ZI(I)
      IND=I-N
      IF (ZIMAG) 30,90,30
   30 AUX1=ZREAL*ZREAL
      AUX2=ZIMAG*ZIMAG
      AUX1=AUX1+AUX2
      AUX2=ZREAL+ZREAL
      J=1
   40 IF (IND+J) 50,60,60
   50 J=J+1
      GO TO 40
   60 REC(J)=REC(J+2)+AUX1*REC(J)
      INDICE=J+1
      REC(J)=REC(J)-AUX2*REC(INDICE)
      J=INDICE
      IF (J-NTIRA1) 60,60,70
   70 REC(N)=AUX1*REC(N)-AUX2*REC(N1)
      REC(N1)=AUX1*REC(N1)
      I=I+2
   80 IF (N-I) 140,20,20
   90 J=1
  100 IF (IND+J) 110,110,120
  110 J=-IND+1
  120 INDICE=J+1
      REC(J)=REC(INDICE)-REC(J)*ZREAL
      J=INDICE
      IF (J-N) 120,120,130
  130 REC(N1)=-REC(N1)*ZREAL
      I=I+1
      GO TO 80
  140 DO 150 I=1,N1
  150 REC(I)=REC(I)*COF
      RETURN
      END
```

```
C         PROGRAMA PRINCIPAL
C         TESTE DO METODO DE GRAEFFE.
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION COEF(21),REC(21),ZR(20),ZI(20)
      DATA G/1.D-14/
      READ(2,10)N,M
   10 FORMAT(2I3)
      IF (M) 20,20,30
   20 M=10
      MMAX=15
      DELTA=1.D-4
      EPSIL=1.D-6
      GO TO 50
   30 READ(2,40)MMAX,DELTA,EPSIL
   40 FORMAT(I5,2D30.16)
   50 N1=N+1
      READ(2,60)(COEF(I),I=1,N1)
   60 FORMAT(2D30.16)
      WRITE(3,70)N
   70 FORMAT(1H1,42X,'COEFICIENTES DO POLINOMIO DE GRAU',I3,//)
      DO 80 I=1,N1
   80 WRITE(3,90)I,COEF(I)
   90 FORMAT(46X,'A(',I2,')=',D23.16)
      CALL GRAEF(N,COEF,DELTA,EPSIL,M,MMAX,NUMR,ZR,ZI,ERROM,G,REC,ICHAV)
      WRITE(3,100)M,DELTA,EPSIL
  100 FORMAT(//41X,'NUMERO DE QUADRACOES REALIZADAS =',I4,/42X,'LIMITE D
     *O COEF. PIVOTAL : DELTA =',D23.16,/42X,'LIMITE DO ERRO DAS RAIZES
     *: EPSILO =',D23.16,//)
      IF (ICHAV) 160,110,180
C          NENHUM ERRO.
  110 WRITE(3,120)
  120 FORMAT(/21X,'RAIZES-PARTE',12X,'REAL',13X,'E',10X,'IMAGINARIA',/)
      WRITE(3,130)(ZR(I),ZI(I),I=1,N)
  130 FORMAT(33X,D23.16,7X,D23.16)
      WRITE(3,140)
  140 FORMAT(//41X,'COEFICIENTES DO POLINOMIO RECONSTRUIDO'//)
      DO 150 I=1,N1
  150 WRITE(3,90)I,REC(I)
      GO TO 200
C         APENAS NUMR RAIZES FORAM DETERMINADAS.
C         NAO HA RECONSTRUCAO DO POLINOMIO.
  160 IF (NUMR) 200,200,170
  170 WRITE(3,120)
      WRITE(3,130)(ZR(I),ZI(I),I=1,NUMR)
      GO TO 200
C         OS COEFICIENTES DO POLINOMIO RECONSTRUIDO TEM ERRO MAIOR QUE G.
  180 WRITE(3,190)ERROM
  190 FORMAT(//35X,'ERRO MAXIMO NOS COEFICIENTES=',D25.16)
      GO TO 110
  200 CALL EXIT
      END
```

BIBLIOGRAFIA

/1/ ACTON, F.S. (1970) - Numerical methods that work. Harper & Row. New York.

/2/ ALBRECHT, P. (1973) - Análise Numérica - um curso moderno . Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. e Editora da Universidade de São Paulo. Brasil.

/3/ ANDRADE, C.M.F. (1973) - Aspectos construtivos do teorema fundamental da álgebra. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo. Brasil.

/4/ BAREISS, E.H. e M.A. FISHERKELLER (1959) - Resultant procedure, a method for finding the zeros of real polynomials. Argonne National Laboratory, Report ANL - 5997. Illinois.

/5/ BAREISS, E.H. (1960) - Resultant procedure and the mechanization of the Graeffe process. Journal ACM 7, 346-386.

/6/ BAREISS, E.H. e R. HAMELINK (1965) - RSSR routine, a root-squaring and subresultant procedure for finding zeros of real polynomials. Argonne National Laboratory, Report ANL - 6987. Illinois.

/7/ BRODETSKY, S. e G. SMEAL (1924) - On Graeffe's method for complex roots of algebraic equations. Proc. Cambridge Phil. Soc. 22, 83-87.

/8/ CARNAHAN, B.,H.A. LUTHER e J.O. WILKES (1969) - Applied numerical methods. John Wiley & Sons, Inc. New York.

/9/ CARNAHAN, B. e J.O. WILKES (1973) - Digital computing and numerical methods. John Wiley & Sons, Inc. New York.

/10/ COLLATZ, L. (1966) - Functional analysis and numerical mathematics. Academic Press. New York.

/11/ CONTE, S.D. (1971) - Elementos de análise numérica. Editora Globo. Brasil.

/12/ DEMIDOVITCH, B. e I. MARON (1973) - Eléments de calcul numérique. Éditions MIR. Moscou.

/13/ DORN, W.S. e D.D. Mc CRACKEN (1978) - Cálculo numérico com estudos de casos em FORTRAN IV. Editora Campus e Editora da Universidade de São Paulo. Brasil.

/14/ DURAND, E. (1961) - Solutions numériques des equations algebriques. Vol. 1. Masson et Cie. Paris.

/15/ FRANK, W.L. (1958) - Finding zeros of arbitrary functions. Journal of ACM 5, 154-160.

/16/ FROBERG, C.E. (1974) - Introduction to numerical analysis. Addison - Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts.

/17/ GRAU, A.A. (1963) - On the reduction of number range in the use of the Graeffe process. Journal of ACM 10, 538-544.

/18/ GOLINELLI, M. e V. RUGGIERO (1980) - Generalizzazione dell'algoritmo di Grau per la valutazione numerica dei modulo degli zeri di un polinomio a

coefficienti reali, Ann. Univ. Ferrara 26, 203-212.

/19/ HAGGERTY, G.B. (1972) - Elementary numerical analysis with programming. Allyn and Bacon, Inc.

/20/ HAMMING, R.W. (1971) - Introduction to applied numerical analysis. Mc Graw-Hill Book Company. New York.

/21/ HANSEN, E. e M. PATRICK (1977) - A family of root finding methods. Numer. Math. 27, 257-269.

/22/ HEHL, M.E. (1974) - FORTRAN - técnicas práticas e eficientes em programação. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. e Editora da Universidade de São Paulo. Brasil.

/23/ HENRICI, P. (1964) - Elements of numerical analysis. John Wiley & Sons, Inc. New York.

/24/ HILDEBRAND, F.B. (1956) - Introduction to numerical analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York.

/25/ HOUSEHOLDER, A.S. (1953) - Principles of numerical analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York.

/26/ HOUSEHOLDER, A.S. (1970) - The numerical treatment of a single nonlinear equation. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York.

/27/ ISAACSON, E. e H.B. KELLER (1966) - Analysis of numerical methods. John Wiley & Sons, Inc. New York.

/28/ JENKINS, M.A. e J.F. TRAUB (1975) - Principles for testing polynomial zerofinding programs. ACM Trans. Math.

Software I, 26-34.

/29/ KAHAN, W. (1967) - Laguerre's method and a circle which contains at least one zero of a polynomial. SIAM J. Numer. Anal. 4, 474-482.

/30/ LEE, W. J. e R.D. RIESS (1977) - Numerical analysis. Addison - Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts.

/31/ MULLER, D.E. (1956) - A method for solving algebraic equations using an automatic computer, MTAC 10,208-215.

/32/ OSTROWSKI, A.M. (1960) - Solution of equations and systems of equations. Academic Press Inc., New York.

/33/ PACITTI, T. e C.P. ATKINSON (1977) - Programação e métodos computacionais. Vol. 2. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Brasil.

/34/ PENNINGTON, R.H. (1970) - Introductory computer methods and numerical analysis. Collier - Mac Millan International Editions. Londres.

/35/ PETERS, G. e J.H. WILKINSON (1971) - Practical problems arising in the solution of polynomial equations. J. Inst. Math. Appl. 8, 16-35.

/36/ POMENTALE, T. (1971) - A class of iterative methods for holomorphic functions. Numer. Math. 18, 192-203.

/37/ RALSTON, A. (1965) - A first course in numerical analysis. Mac Graw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokio.

/38/ RALSTON, A. e H.S. WILF (1966/67) - Mathematical methods for digital computers. Vol. 1 e 2. John Wiley & Sons, Inc. New York

/39/ REDISH, K.A. (1974) - On Laguerre's method. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 5, 91-102.

/40/ SHAMPINE, L.F. e R.C. ALLEN, Jr. (1973) - Numerical computing: an introduction. W.B. Saunders Company. Filadelfia.

/41/ STEWART, G.W. (1974) - The convergence of multipoint iterations to multiple zeros. SIAM J. Numer. Anal. 11, 1105-1120.

/42/ STOER, J. e R. BULIRSCH (1980) - Introduction to numerical analysis. Springer-Verlag. New York.

/43/ TRAUB, J.F. (1961) - Comparison of iterative methods for the calculation of nth roots. Comm. ACM. 4, 143-145.

/44/ TRAUB, J.F. (1964) - Iterative methods for the solution of equations. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

/45/ TODD, J. (editor) (1962) - Survey of numerical analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York.

/46/ WILKINSON, J.H. (1959) - The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials. Numer. Math. 1, 150-180.

/47/ WILKINSON, J.H. (1960) - Error analysis of floating-point computation. Numer. Math. 2, 319-340.

/48/ WILKINSON, J.H. (1964) - Rounding errors in algebraic processes. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

/49/ YOUNG, D.M. e R.T. GREGORY (1972) - A survey of numerical mathematics. Vol. 1. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts.