I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

UM MÉTODO SEMI-ITERATIVO, RELATIVO
AO MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI DE
GRAU DOIS, PARA RESOLUÇÃO DE SISTEM
AS LINEARES ALGÉBRICOS

Newton Ribeiro dos Santos

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UM MÉTODO SEMI-ITERATIVO, RELATIVO
AO MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI DE
GRAU DOIS, PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMA
S LINEARES ALGÉBRICOS

Newton Ribeiro dos Santos

Class. -	T
Curr. -	5937u
	e.2
Tombo -	

Orientador: Dr. Odelar Leite Linhares

Tese apresentada ao Instituto de Ciên
cias Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do títu
lo de Doutor em Ciências (Matemática).

Para meus pais:

José e Ana.

A NEW SEMI-ITERATIVE METHOD, WITH RESPECT TO JACOBI
SECOND DEGREE ITERATIVE METHOD, FOR THE RESOLUTION
OF ALGEBRAIC LINEAR SYSTEMS

Author: Newton Ribeiro dos Santos

Adviser: Dr. Odelar Leite Linhares

A B S T R A C T

A new semi-iterative method (JII-SI method) with respect to the second degree Jacobi method (JII method) is developed. Its convergence is proved for the following two classes of matrices:

- a) Matrices with Property A_p with some restrictions.
- b) Special class of matrices cited in the text, whose eigensystem is "a priori" known.

The comparison of JII-SI and JII method is done and computational aspects are treated as well.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Odelar Leite Linhares pela orientação acadêmica, desta tese, pelo apoio incondicional, pela ajuda extra-acadêmica e pelo convívio fraterno.

Ao Prof. Dr. Ivan de Queiroz Barros por ter acompanhado o desenvolvimento deste trabalho, pelas correções e sugestões preciosas que o valorizaram.

Ao Prof. Dr. Luis Antônio Favaro pelas orientações e pela oportunidade concedida em desenvolver o meu programa de doutorado, durante a sua gestão na Coordenação da Comissão de Pós-Graduação do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos (ICMSC).

Aos Professores Doutores

Célia M. Finazzi de Andrade,
Marielza Jorge Favaro,
José Vitório Zago,
Plácido Zoega Táboas,

pelos ensinamentos e atenção a mim dispensados.

Às senhoritas Maria Eunice Dória, Sonia Regina Derigi, Laura A.D. Ruy e às senhoras Elizabeth Luisa M. e Silva, Conceição Aparecida Martinez pelo suporte administrativo e de secretaria.

Ao pessoal do Laboratório de Computação do ICMSC (Sistema PDP-11) e do CPD (Sistema IBM-370) pelo suporte computacional.

A todos os funcionários do ICMSC pela distinção com que me trataram.

À CAPES e UFMG pelo suporte financeiro.

INTRODUÇÃO

O advento dos computadores eletrônicos digitais divulgou em larga escala, o uso de métodos iterativos em geral e, em particular, na área de sistemas lineares algébricos.

O avanço tecnológico permitiu, além disso, um grande progresso na pesquisa de métodos antigos e novos. Devido à importância capital desempenhada pela Álgebra Linear Numérica, tanto na teoria quanto nas aplicações, compreende-se a razão da existência de inúmeros pesquisadores que têm dado suas contribuições ao setor. Por conseguinte, não é de se admirar o volume de trabalho levado a cabo pelos interessados na área, redundando na criação de uma gama variada de métodos, incluindo o do grupo dos iterativos, bem como no desenvolvimento de sua teoria.

Essa conquista faculta, aos usuários de métodos numéricos, cada vez maior facilidade na aplicação dos resultados à resolução de problemas, com vistas à adequabilidade e eficiência que cada caso particular determinar.

Pode-se, atualmente, classificar os métodos iterativos para sistemas lineares algébricos em dois grandes grupos:

- estacionários (parâmetros constantes)
- não-estacionários (parâmetros variáveis)

Contam-se entre os estacionários, por exemplo, os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR (super-liberação), MSOR (SOR-modificado), Richardson Estacionário, a família dos métodos simétricos e não simétricos, etc.

Entre os não estacionários citam-se: o de Richardson não-estacionário, o de Sheldon e a família dos métodos semi-iterativos (SI).

Estes últimos são, às vezes, denominados métodos de extrapolação de Chebyshev, pelo fato de usarem a idéia de minimização do raio espectral, da matriz de iteração associada ao sistema linear, através do emprego apropriado de polinômios de Chebyshev, o que resulta, em geral, melhoria da convergência.

Porisso os métodos SI consituem uma família das mais importantes.

Flanders & Shortley [3] usaram polinômios de Chebyshev para acelerar a convergência de um método iterativo, a fim de resolver sistemas lineares homogêneos.

Lanczos [7], Shortley [11], Young [15] e [17], Sheldon [10], Varga [13] e Blair [1] são alguns dos muitos autores que têm aplicado polinômios de Chebyshev a métodos iterativos.

A denominação de "métodos semi-iterativos" foi introduzida por Varga [13]. Frank [4] aplicou a relação de recorrência com três termos para polinômios de Chebyshev ao método semi-iterativo de Jacobi (J-SI), obtendo um esquema menos sujeito a erros de arredondamento.

Varga [13], pesquisando o método semi-iterativo de Gauss-Seidel (GS-SI), mostrou que, do ponto de vista do raio espectral, ele converge aproximadamente tão rápido quanto o método de super-liberação com parâmetro ótimo (SOR)

Entretanto, foi observado por Tee [12] e por Young

& Kincaid [16] que, com o uso da ordenação natural aplicada aos nós da malha, resultante da discretização de problemas da Física-Matemática, o método GS-SI pode convergir muito lentamente.

Wrigley [14] tratou do caso, em que o uso de processos semi-iterativos envolve métodos básicos cuja matriz de iteração associada possui autovalores complexos. Wrigley [14] propôs um método para determinação dos parâmetros ótimos; concluiu, todavia, que o método é tão complicado que não vale a pena utilizá-lo, a não ser que o sistema linear, ao qual se aplica, deva ser resolvido mais de uma vez.

Entretanto, ele ressaltou que, em casos onde vários sistemas lineares são resolvidos com a mesma matriz, pode-se obter economia substancial com o uso de seu método, desde que se faça uma escolha cuidadosa dos parâmetros de iteração.

Tee [12] considerou métodos semi-iterativos, relativos ao método SOR, tendo concluído que eles não são efetivos.

Interessando-se também por métodos semi-iterativos, o autor deste trabalho propõe uma nova família de métodos semi-iterativos, relativos a métodos de grau dois, o que é inédito, até a presente data, bem como criou dentro dessa família, um método calcado no de Jacobi do segundo grau. Estudou, além disso, a convergência e estabilidade desse novo método, quando aplicado a sistemas lineares com matriz p-cíclica consistentemente ordenada e outra classe de matrizes; v. Linhas [8] e Young [15], pág. 111.

Doravante, mencionar-se-á "sistema linear" no lugar de "sistema linear algébrico" e "método iterativo" ao invés de "método iterativo para sistemas lineares", sem prejuízo da clareza.

Segue, agora, um resumo dos assuntos tratados neste trabalho.

O capítulo I compõe-se de tópicos conhecidos da Álgebra Linear e Análise Funcional, que são necessários ao de desenvolvimento da teoria pertinente a métodos iterativos.

No capítulo II, apresenta-se um resumo da teoria de métodos iterativos, estacionários e não-estacionários e faz-se uma apresentação dos métodos básicos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

O capítulo III trata dos métodos iterativos do segundo grau e descreve o método de Jacobi de grau dois (JII).

O capítulo IV trata dos métodos semi-iterativos, relativos a métodos básicos de grau um (métodos SI).

No capítulo V, propõem-se métodos semi-iterativos, relativos a métodos básicos de grau dois, bem como desenvolve-se um novo método de Jacobi (JII-SI). Analisa-se a sua convergência, quando aplicado a sistemas lineares, cuja matriz pertença a duas classes de matrizes. Uma é a classe das matrizes p-cíclicas e outra é uma classe especial de matrizes já citada.

Depois compara-se o método JII-SI com o método JII conhecido.

Considerações sobre os aspectos computacionais dos métodos JII e JII-SI são feitas no capítulo VI.

Alguns resultados computacionais, para comparação efetiva da convergência, encontram-se nas Tabelas 1 a 4 do Apêndice.

Finalmente, é mister citar que os cálculos computacionais foram realizados com o uso dos seguintes equipamentos:

- IBM/370 mod. 145
- PDP - 11/45 da Digital Equipment Corporation.

I N D I C E

CAPÍTULO I - PRÉ-REQUISITOS

1.1 - Notações e Definições	I-1
1.2 - Proposições Básicas	I-7

CAPÍTULO II - MÉTODOS ITERATIVOS

2.1 - Preliminares	II-1
2.2 - Métodos Iterativos Estacionários	II-2
2.3 - Métodos Iterativos Não-Estacionários	II-3
2.4 - Medidas de Convergência	II-5
2.4.1 - Caso Estacionário	II-5
2.4.2 - Caso Não-Estacionário	II-7
2.5 - Métodos Básicos de Jacobi, GS e SOR	II-7

CAPÍTULO III - MÉTODOS ITERATIVOS DO SEGUNDO GRAU

3.1 - Preliminares	III-1
3.2 - Método Estacionário de Jacobi JII Grau	III-5

CAPÍTULO IV - MÉTODOS SEMI-ITERATIVOS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

4.1 - Preliminares	IV-1
4.2 - Autovalores da Matriz G são Reais	IV-4
4.3 - Autovalores da Matriz G são Complexos	IV-20

CAPÍTULO V - MÉTODOS SEMI-ITERATIVOS DE SEGUNDA ESPÉCIE

5.1 - Introdução	V-1
5.2 - Família de Métodos Semi-Iterativos de Segunda Espécie	V-1

5.3 - Um Método Semi-Iterativo de Segunda Espécie,
Relativo ao Método de Jacobi (JII-SI) V-8

5.4 - Convergência do Método SI de Segunda Espécie . V-11

5.5 - Comparação Entre os Métodos JII e JII-SI V-20

5.5.1 - Pela Análise do Raio Espectral V-20

5.5.2 - Quanto a Resultados Computacionais ... V-29

CAPÍTULO VI - PROGRAMAÇÃO DOS MÉTODOS JII e JII-SI

6.1 - Método JII VI-1

6.2 - Método JII-SI VI-2

6.3 - Conclusões VI-2

APÊNDICE

TABELAS A-1

GRÁFICO A-3

BIBLIOGRAFIA B-1

SÍMBOLOS USADOS

<i>Símbolo</i>	<i>Significado</i>	<i>página onde aparece</i>
$\forall$	- para todo	I-7
$\mathbb{Z}^+$	- conjunto dos inteiros positivos ...	I-6
$\mathbb{R}$	- conjunto dos números reais	I-7
$\mathbb{R}^n$	- espaço euclidiano com dimensão n ...	I-7
$\mathbb{C}$	- conjunto dos números complexos	I-6
$S(A)$	- raio espectral de A (matriz)	I-2
$T_n(x)$	- polinômio de Chebyshev de grau n ..	I-6
$\bar{\mu} = S(B)$	- raio espectral da matriz de iteração do método de Jacobi do 1º grau	I-8
$S(k_0)$	- idem, método de Gauss-Seidel	II-10
$S(k_\omega)$	- idem, método SOR	I-8
$S(\hat{B})$	- idem, método de Jacobi do 2º grau..	III-7
$\ x\ $	- norma qualquer de $x \in \mathbb{R}^n$	II-5
$\ A\ $	- norma da matriz A	I-7
$\ A\ _\infty$	- $\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} $	I-10
$\mathcal{L}_n(\mathcal{G})$	- raio espectral médio	II-7
$D = \text{diag}(A)$	- matriz diagonal tal que $d_{ii} = a_{ii}$.	II-8
$R(G)$	- taxa de convergência	II-6

CAPÍTULO I

PRÉ-REQUISITOS

Para facilitar a leitura do texto, apresentam-se, neste capítulo, algumas definições e teoremas fundamentais da Álgebra Linear e Análise Funcional, necessários ao desenvolvimento do trabalho.

1.1 - NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES

Definição 1 - Uma matriz permutação $P = [P_{ij}]$ é a que se obtém a partir da matriz identidade, permutando-se suas linhas ou colunas.

Por exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz permutação.

Definição 2 - Uma matriz real A de ordem n é uma matriz-L se

$$a_{ii} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (1.1)$$

e

$$a_{ij} \leq 0 \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \quad \dots (1.2)$$

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa de ordem n . Sejam os n pontos distintos $P_1, P_2, \dots, P_n$, no plano, que serão chamados nós. Para cada elemento $a_{ij} \neq 0$, de A , liga-se o nó P_i ao nó P_j , através de um arco orientado $\vec{P_i P_j}$, dirigido de P_i a P_j . Desse modo, a cada matriz A , de ordem n , associa-se um grafo orientado $G(A)$.

Definição 3 - Um grafo orientado é fortemente conexo se, para qualquer par de nós (P_i, P_j) , existir um arco orientado.

$$\vec{P_i P_{\ell_1}} \quad \vec{P_{\ell_1} P_{\ell_2}} \quad \dots \quad \vec{P_{\ell_{r-1}} P_{\ell_r=j}}$$

ligando P_i a P_j .

Diz-se que tal arco tem comprimento r .

Definição 4 - Uma matriz complexa de ordem n , é irredutível se o seu grafo for fortemente conexo.

Definição 5 - O raio espectral de uma matriz A é dado por

$$S(A) = \max_{\lambda \in S_A} |\lambda| \quad \dots (1.3)$$

onde S_A é o conjunto dos autovalores de A .

Definição 6 - (Young [15]). Uma matriz A , de ordem n , possui a propriedade A , se existirem dois subconjuntos disjuntos S_1 e S_2 de $W = \{1, 2, \dots, n\}$ tais que $S_1 \cup S_2 = W$, e se $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$, então $i \in S_1$ e $j \in S_2$ ou $j \in S_1$ e $i \in S_2$. Se S_1 ou S_2 for vazio, então A é matriz diagonal.

Definição 7 - (Varga [13]). Uma matriz A , de ordem n , é fracamente cíclica de índice p ($p > 1$), se existir uma matriz de permutação P tal que $P A P^T$ é da forma

$$P A P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_{1p} \\ A_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & A_{pp-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (1.4)$$

onde cada A_{ij} é uma submatriz e as submatrizes diagonais nulas são quadradas.

Conforme definição de Young [15], classificar-se-á uma matriz fracamente cíclica de índice p como matriz que tem a propriedade A_p .

Seja A uma matriz de ordem n ($n \geq 2$), particionada como segue

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{bmatrix} \quad \dots (1.5)$$

onde as sub-matrizes diagonais A_{ii} , $1 \leq i \leq M$ são quadradas e não singulares. Assim, a matriz diagonal por blocos $D = \text{diag}(A_{ii})$ é também não singular. A matriz B , de ordem n , definida por

$$B = I - D^{-1} A \quad \dots (1.6)$$

é a matriz-bloco de Jacobi associada à matriz A , correspondente à partição (1.5).

São de especial interesse as matrizes particulares:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{p-1p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{pp-1} & A_{pp} \end{bmatrix}, \quad p \geq 2 \quad \dots (1.7)$$

e

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{M-1M-1} & A_{M-1M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{MM-1} & A_{MM} \end{bmatrix}, \quad \dots (1.8)$$

A_2 é chamada matriz tridiagonal por blocos. As matrizes A_1 e A_2 dão origem às matrizes-blocos de Jacobi seguintes:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{1p} \\ B_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{pp-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (1.9)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & B_{23} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{M-1 M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{MM-1} & 0 \end{bmatrix} \dots (1.10)$$

A matriz B_1 está na forma normal (1.4) de uma matriz fracamente cíclica de índice p. Por transformação similar pode-se permutar os blocos de B_2 para mostrar que B_2 é fracamente cíclica de índice 2.

Definição 8 - Se a matriz-bloco de Jacobi, B , de (1.6) associada à matriz A de (1.5) for fracamente cíclica de índice p ($p \geq 2$), então A é p -cíclica, relativa à partição em blocos (1.5).

Definição 9 - Se a matriz A de (1.5) for p -cíclica, então A é consistentemente ordenada, (matriz CO), se todos os auto-valores da matriz

$$B(\alpha) = \alpha L + \alpha^{-(p-1)} U, \quad p \geq 2 \quad \dots (1.11)$$

derivada da matriz de Jacobi $B = L + U$, são independentes de α , para $\alpha \neq 0$. Se A for CO então B é também denominada matriz consistentemente ordenada.

Usar-se-á a sigla CO_p para denominar uma matriz p -cíclica, consistentemente ordenada.

Por exemplo, considerando a matriz A , atrás, vide (1.7), para a qual vale:

$$B_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{\alpha}^{(p-1)} B_{1p} \\ \alpha B_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha B_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha B_{pp-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (1.12)$$

Por multiplicação, vê-se diretamente que $[B_1(\alpha)]^p = B_1^p$ para todo $\alpha \neq 0$. Assim, os autovalores de $B_1(\alpha)$ são independentes de α , donde se conclui que A_1 é uma matriz CO_p .

Definição 10 - Seja $G(A)$ um grafo orientado, finito, fortemente conexo em uma matriz A . Se o máximo divisor comum de todos os comprimentos de suas trajetórias fechadas for $\underline{k}$, diz-se que $G(A)$ é um grafo cíclico de índice $\underline{k}$.

OBS.: Se a matriz A estiver particionada, vide (1.5), o seu grafo será denominado grafo por blocos. A cada nó do grafo por blocos corresponde uma submatriz de A .

Definição 11 - Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Definem-se os polinômios de Chebyshev de grau $\underline{n}$ por

$$T_n(z) = \cosh(n \cosh^{-1} z), \quad z \in \mathbb{C} \quad \dots (1.13)$$

ou, alternativamente, por

$$T_n(z) = \cos(n \cos^{-1} z), \quad z \in \mathbb{C} \quad \dots (1.14)$$

OBS.: Se $z \in \mathbb{R}$, então usa-se a fórmula (1.14) para $z \in [-1, 1]$ e a fórmula (1.13) para $z \geq 1$. Verifica-se que há consistência em tal definição.

1.2 - PROPOSIÇÕES BÁSICAS

Proposição 1 - $A^k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$ $\longleftrightarrow$

$$S(A) < 1 \quad \dots (1.15)$$

Proposição 2 - Seja a seqüência de matrizes $\{G_k\}$.

$$G_k u \rightarrow 0, \forall u, \text{ quando } k \rightarrow \infty \quad \longleftrightarrow$$

$$\lim G_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad \dots (1.16)$$

Corolário 1 - $A^k u \rightarrow 0, \forall u$, quando $k \rightarrow \infty$ $\longleftrightarrow$

$$S(A) < 1 \quad \dots (1.17)$$

Este corolário resulta das Proposições 1 e 2.

Proposição 3 - Seja G uma matriz complexa qualquer com $S(G) > 0$. Então

$$\lim (||G^n||)^{1/n} = S(G) \quad \dots (1.18)$$

Uma demonstração desse importante resultado encontra-se em Young [15], pg. 87.

Proposição 4 - Seja $G(B)$ o grafo de uma matriz de Jacobi, por blocos, $B = I - [\text{Diag}(A)]^{-1}A$, fortemente conexo. Então a ma

triz A é p-cíclica se o grafo $G(B)$ for um grafo cíclico de índice p.

Proposição 5 - Seja A uma matriz-L, irredutível com Propriedade de A_p . Existe uma matriz permutação P tal que $A' = P^{-1}AP$ é CO_p .

Proposição 6 - Seja A, matriz CO_p , com submatrizes diagonais não singulares e seja B a matriz de Jacobi por blocos associada, isto é,

$$B = I - [\text{diag}(A)]^{-1}A = L + U \quad \dots (1.19)$$

onde L e U são respectivamente, matrizes triangulares, por blocos, inferior e superior, estritamente.

Seja a matriz

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1} [\omega U + (1 - \omega)I] \quad \dots (1.20)$$

vale:

a) Se μ for um autovalor de B, então $\theta\mu$ é também autovalor de B, onde θ é uma p-ésima raiz da unidade, ou seja

$$\theta\mu = \mu_j = S(B) \exp\left(\frac{2ij\pi}{p}\right), \quad 0 \leq j \leq p-1 \quad \dots (1.21)$$

b) Se λ satisfizer

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu^p \quad \dots (1.22)$$

para algum autovalor μ de B, então λ é um autovalor de

$\mathcal{L}_\omega$.

c) Se λ for um autovalor de $\mathcal{L}_\omega$, então existe um autovalor μ de B tal que (1.22) prevaleça.

Proposição 7 - Supõem-se válidas as hipóteses da proposição anterior. Seja $\mathcal{L}_\omega$ dada por (1.20).

Se todos os autovalores da p -ésima potência da matriz de Jacobi, por blocos, $\underline{B}$, associada, forem reais e não-negativos, e $0 \leq \bar{\mu} = S(B) \leq 1$, então o mínimo de $S(\mathcal{L}_\omega)$ é dado por

$$S(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (\omega_b - 1)(p-1) \quad \dots (1.23)$$

onde ω_b é a única raiz real positiva (menor do que $p/(p-1)$) da equação

$$(\bar{\mu} - \omega_b)^p = [p^p (p-1)^{1-p}] (\omega_b - 1) \quad \dots (1.24)$$

Proposição 8 - Seja $T_n(x)$ o polinômio de Chebyshev de grau n . Vale $\forall z \in \mathbb{C}$

$$a) T_n(z) = \frac{1}{2} \{ [z + (z^2 - 1)^{1/2}]^n + [z + (z^2 - 1)^{1/2}]^{-n} \} \quad (1.25)$$

$$b) T_{n+1}(z) = 2z T_n(z) - T_{n-1}(z) \quad \dots (1.26)$$

Proposição 9 - Seja $I = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ e seja $n \in \mathbb{Z}^+$, fixo, e $z \in \mathbb{R}$ fixo, tal que $z > 1$. Pondo

$$P_n(x) = T_n(x) / T_n(z) \quad \dots (1.27)$$

Então

$$P_n(z) = 1, \quad \dots (1.28)$$

e

$$\max_{x \in I} |P_n(x)| = 1/T_n(z) \quad \dots (1.29)$$

Além disso, se $Q(x)$ for um polinômio de grau n , ou menos, t.q. $Q(z) = 1$ e

$$\max_{x \in I} |Q(x)| \leq \max_{x \in I} |P_n(x)| \quad \dots (1.30)$$

então

$$Q(x) \equiv P_n(x) \quad \dots (1.31)$$

Proposição 10 - Seja A uma matriz. Dado $\varepsilon > 0$, existe M , matriz tal que

$$S(A) \leq \|MAM^{-1}\|_{\infty} \leq S(A) + \varepsilon \quad \dots (1.32)$$

Proposição 11 - (Ostrowski [9]). Seja A uma matriz e $\{U_k\}$ uma seqüência de matrizes satisfazendo (1.32) acima e η_1 dado por

$$\eta_1 = \varepsilon / [2 \|M\|_{\infty} \|M^{-1}\|_{\infty}] \quad \dots (1.33)$$

Se $\|U_k\|_{\infty} \leq \eta_1 \quad \forall k$, então

$$\left\| \prod_{k=1}^m (A + U_k) \right\|_{\infty} \leq \|M\|_{\infty} \|M^{-1}\|_{\infty} [S(A) + \varepsilon]^m \quad \forall m \quad \dots (1.34)$$

CAPÍTULO II

MÉTODOS ITERATIVOS

Este capítulo contém uma sinópsese de conceitos básicos e resultados da teoria de métodos iterativos. Trata também dos métodos de Jacobi, Gauss-Seidel (GS) e super-liberação (SOR).

2.1 - PRELIMINARES

Seja o sistema linear algébrico

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{b} \quad \dots (2.1)$$

onde $\underline{A}$ é a matriz dos coeficientes e $\underline{b}$, o vetor dos termos conhecidos.

Resolver iterativamente o sistema (2.1) ($\underline{A}$ não singular) é construir uma sequência $u^{(n)}$, supondo que a mesma seja convergente, tal que $u^{(n)} \rightarrow \bar{A}^{-1}\underline{b}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Em geral, na n -ésima iteração, tem-se

$$u^{(n)} = \phi_n (\underline{A}, \underline{b}, u^{(n-p)}, u^{(n-p+1)}, \dots, u^{(n-1)}) \dots (2.2)$$

onde $p \geq 1$, fixo, e $n = p, p+1, \dots$

Definição 1 - Se ϕ_n independe de n , diz-se que o processo é estacionário, caso contrário, é não-estacionário.

Se ϕ_n variar com n , repetindo-se de r em r passos, o processo será r -cíclico.

Agrupando-se os r passos de um processo r -cíclico num único passo global, obtém-se um processo estacionário.

Definição 2 - O grau de um método iterativo é p se, para $n \geq p-1$, $u^{(n+1)}$ depender de $u^{(n)}$, $u^{(n-1)}$, ..., $u^{(n-p+1)}$, mas não depender de $u^{(k)}$ para $k < n-p+1$.

No caso $p = 1$, tem-se

$$u^{(0)} = \phi_0(A, b)$$

$$u^{(n+1)} = \phi(A, b, u^{(n)}) \quad n = 0, 1 \dots \dots (2.3)$$

Se $p = 2$, vem:

$$u^{(0)} = \phi_0(A, b)$$

$$u^{(1)} = \phi_1(A, b, u^{(0)})$$

$$u^{(n+1)} = \phi(A, b, u^{(n-1)}, u^{(n)}) \quad n=1, 2, \dots \dots (2.4)$$

Definição 3 - Se para cada n , ϕ_n for uma função linear afim de $u^{(n-1)}$, $u^{(n-2)}$, ..., $u^{(n-p)}$, o método será chamado linear. Caso contrário, não linear.

Neste trabalho, trata-se apenas de métodos lineares.

Definição 4 - O método iterativo é convergente, se, para todo $u^{(0)}$, a seqüência $\{u^{(k)}\}$ convergir para a solução do problema (2.1) independente de $u^{(0)}$.

2.2 - MÉTODOS ITERATIVOS ESTACIONÁRIOS

A forma geral de um método iterativo estacionário é:

$$u^{(n+1)} = G u^{(n)} + h \quad n \geq 0 \quad \dots (2.5)$$

para alguma matriz G e algum vetor h , tal que $u = G u + h$ seja equivalente a (2.1).

O problema da convergência do método iterativo (2.5) é resolvido pelo

Teorema 1 - O método iterativo (2.5) é convergente se e só se

$$S(G) < 1 \quad \dots (2.6)$$

Prova: Seja $\bar{u}$ solução de (2.1). Logo,

$$\bar{u} = G \bar{u} + h \quad \dots (2.7)$$

$$\text{Seja } \varepsilon^{(n)} = u^{(n)} - \bar{u} \quad \dots (2.8)$$

Subtraindo (2.7) de (2.5), vale

$$\varepsilon^{(n)} = G^n \varepsilon^{(0)} \quad \dots (2.9)$$

Aplicando o Corolário 1.1

$$G^n \varepsilon^{(0)} \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty \iff S(G) < 1$$

cqd

2.3 - MÉTODOS ITERATIVOS NÃO-ESTACIONÁRIOS

Sua forma geral é

$$u^{(n+1)} = G_{n+1} u^{(n)} + h_{n+1} \quad n \geq 0 \quad \dots (2.10)$$

para o caso do primeiro grau, e por

$$u^{(n+1)} = \sum_{j=1}^p G_{n+1,j} u^{(n-p+j)} + h_{n+1}, \quad n \geq p-1 \quad \dots (2.11)$$

se for de grau p .

Evidentemente, usando (2.10), pode-se expressar, no caso de primeiro grau, $u^{(n)}$ na forma

$$u^{(n)} = \mathcal{G}_n u^{(0)} + \hat{h}_n, \quad n \geq 1 \quad \dots (2.12)$$

onde

$$\mathcal{G}_n = G_n G_{n-1} \dots G_1 \quad \dots (2.13)$$

e

$$\hat{h}_n = h_n + G_n h_{n-1} + G_n G_{n-1} h_{n-2} + \dots + G_n G_{n-1} \dots G_2 h_1 \quad \dots (2.14)$$

Teorema 2 - Seja $\bar{u}$ solução de (2.1) e seja o método iterativo (2.10), para o qual vale

$$\bar{u} = G_n \bar{u} + h_n \quad \forall \quad n \quad \dots (2.15)$$

Então $u^{(n)} \rightarrow \bar{u}$, com $n \rightarrow \infty$, $\forall \quad u^{(0)} \longleftrightarrow$

$$\mathcal{G}_n = G_n G_{n-1} \dots G_1 \rightarrow 0 \quad \dots (2.16)$$

Além disso, $\hat{h}_n \rightarrow \bar{u}$ (vide 2.14)

Prova:

$$\epsilon^{(n)} = u^{(n)} - \bar{u}$$

$$\epsilon^{(n)} = \mathcal{G}_n \epsilon^{(0)}$$

Pela Proposição 1.2 segue a primeira parte da tese. Agora, passando ao limite (2.12), obtêm-se

$$\hat{h}_n \rightarrow \bar{u} \quad \text{cq.d}$$

2.4 - MEDIDAS DE CONVERGÊNCIA

2.4.1 - Caso Estacionário

Em geral, a convergência do método iterativo estacionário será tanto maior quanto menor for o raio espectral da matriz G de iteração associada à matriz A do sistema linear (2.1).

O raio espectral surge, por isso, como primeira medida para análise da velocidade de convergência de um método estacionário, bem como constitui elemento básico para comparação de métodos iterativos. Entretanto, há outras medidas, por exemplo, a medida baseada na norma de matriz.

De (2.9), calcula-se

$$||\epsilon^{(n)}|| \leq ||G^n|| \cdot ||\epsilon^{(0)}|| \leq ||G||^n \cdot ||\epsilon^{(0)}|| \quad \dots (2.17)$$

Logo, a condição

$$||G|| < 1 \quad \dots (2.18)$$

é suficiente para garantir a convergência do método (2.5).

Por outro lado, escolhendo-se n tal que

$$||G^n|| \leq \rho \quad \dots (2.19)$$

onde ρ é a precisão 10^{-p} , p é inteiro dado, de (2.19), tem-se

$$||G^n||^{1/n} \leq \rho^{1/n}$$

$$\frac{1}{n} \ln ||G^n|| \leq \ln \rho$$

$$-\frac{1}{n} \ln ||G^n|| \geq -\frac{1}{n} \ln \rho$$

e, finalmente, encontra-se

$$n \geq \ln \rho / \left[-\frac{1}{n} \ln ||G^n|| \right] \quad \dots (2.20)$$

Portanto, o número mínimo de iterações requeridas para atingir a precisão ρ , supondo $||G^n|| < 1$, é inversamente proporcional ao fator

$$R_n(G) = -\frac{1}{n} \ln ||G^n|| \quad \dots (2.21)$$

Em vista desse fato, $R_n(G)$ é chamado de taxa de convergência média do método iterativo (2.5).

Tomando-se o limite de (2.21) e usando a Proposição 1.3, tem-se a nova medida de convergência

$$R(G) = -\ln S(G) \quad \dots (2.22)$$

chamada de taxa de convergência assintótica, ou, simplesmente, taxa de convergência.

Substituindo (2.22) no denominador de (2.20), obtêm-se, para estimativa do número aproximado de iterações para convergência:

$$n \approx -\ln \rho / R(G) \quad \dots (2.23)$$

É mister frisar que a estimativa obtida por (2.23) pode ser grosseira.

2.4.2 - Caso Não-Estacionário

Seguindo, serão introduzidas certas medidas usuais de convergência para métodos não-estacionários. Aplicando-se cada uma das medidas de convergência abaixo ao caso estacionário, onde $g_n = G^n$, pode-se ver que tais definições de medidas são consistentes com as do caso citado.

Seja g_n a matriz (2.13)

$$a) \text{ Raio espectral médio: } \mathcal{S}_n(g_n) = [S(g_n)]^{1/n} \quad \dots (2.24)$$

$$b) \text{ Raio espectral médio assintótico: } \mathcal{S}(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(g_n) \quad \dots (2.25)$$

$$c) \text{ Taxa de convergência média: } R_n(g_n) = -\frac{1}{n} \ln ||g_n|| \quad \dots (2.26)$$

$$d) \text{ Taxa de convergência quase-média: } R'_n(g_n) = -\ln \mathcal{S}_n(g_n) \quad \dots (2.27)$$

$$e) \text{ Taxa de convergência quase médio-assintótica: } R'(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} R'_n(g_n) = -\ln \mathcal{S}(g_n) \quad \dots (2.28)$$

2.5 - MÉTODOS BÁSICOS DE JACOBI, GAUSS-SEIDEL E SOR

Serão descritos, a seguir, os métodos iterativos estacionários básicos de Jacobi (J), Gauss-Seidel (GS) e superliberação com parâmetros ótimos (SOR).

Seja o sistema linear (2.1) já considerado

$$A u = b$$

Decompondo A como

$$A = D - C \quad \dots (2.29)$$

onde D é a matriz denotada por $\text{diag}(A)$, isto é, $d_{ii} = a_{ii}$ e $d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Substituindo-se A em (2.1), vem a forma ite
rativa

$$u^{(n+1)} = B u^{(n)} + c \quad \dots (2.30)$$

onde

$$B = D^{-1}C \quad \dots (2.31)$$

e

$$c = D^{-1}b \quad \dots (2.32)$$

A fórmula (2.30) constitui o conhecido método itera
tivo estacionário de Jacobi. B é a respectiva matriz de itera
ção associada ao sistema linear (2.1) e satisfaz

$$B = I - [\text{diag}(A)]^{-1} A = L + U \quad \dots (2.33)$$

onde L e U são, respectivamente, matrizes triangulares infe
rior e superior.

O método de Jacobi, conforme Teorema 2.1 é conver
gente $\forall u^{(0)}$, se e somente se

$$S(B) < 1 \quad \dots (2.34)$$

A fim de se obter a fórmula do método de super-libe
ração, considera-se a decomposição

$$A = \omega^{-1}D - C_L - [\omega^{-1}(1-\omega)D + C_U] \quad \dots (2.35)$$

onde $D = \text{diag}(A)$ e

$$C_L = D L \quad \dots (2.36)$$

$$C_U = D U \quad \dots (2.37)$$

e ω é um parâmetro convenientemente escolhido.

Substituindo-se (2.35) em (2.1), obtém-se

$$u^{(n+1)} = \mathcal{L}_\omega u^{(n)} + (I - \omega L)^{-1} \omega c \quad \dots (2.38)$$

onde

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1} [\omega U + (1 - \omega) I] \quad \dots (2.39)$$

O método de super-liberação é definido por (2.38), sendo $\mathcal{L}_\omega$ a matriz de iteração respectiva associada à matriz A de (2.1).

Tomando $\omega = 1$ em (2.38) e (2.39), resulta o conhecido método iterativo de Gauss-Seidel (GS)

$$u^{(n+1)} = \mathcal{L}_u u^{(n)} + (I - L)^{-1} c \quad \dots (2.40)$$

onde

$$\mathcal{L} = (I - L)^{-1} U \quad \dots (2.41)$$

é a matriz de iteração do método, associada à matriz A de (2.1)

Para sistemas lineares com matriz p -cíclica, consistentemente ordenada (matriz CO_p), conforme Proposição 1.7, o parâmetro ótimo ω_b , a saber, o que minimiza $S(\mathcal{L}_\omega)$ é a raiz positiva da equação.

$$(\bar{\mu} \omega_b)^p = [p^p (p-1)^{1-p}] (\omega_b - 1) \quad \dots (2.42)$$

onde $\bar{\mu} = S(B)$.

Pondo $\omega = \omega_b$ em (2.38) e (2.39), obtêm-se o conhecimento do método de super-liberação com parâmetro ótimo (método SOR). A sua matriz de iteração é denotada por ω_b , e de acordo com (1.23) vale

$$S(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (p-1)(\omega_b - 1) \quad \dots (2.43)$$

Uma análise comparativa dos métodos enfocados, quanto à velocidade de convergência, é dada através do seguinte:

Teorema 3 - (Varga [13]). Seja A uma matriz na forma (1.5), CO_p , com submatrizes diagonais não singulares e sejam os autovalores da p -ésima potência da matriz de Jacobi por blocos, B , reais, não negativos, e $0 \leq \bar{\mu} = S(B) < 1$. Quando $\bar{\mu} \rightarrow 1^-$, vale

$$a) \quad R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \sim \left(\frac{2p}{p-1}\right)^{1/2} [R(\mathcal{L})]^{1/2} \quad \dots (2.44)$$

$$b) \quad R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \sim \left(\frac{2p^2}{p-1}\right)^{1/2} [R(B)]^{1/2} \quad \dots (2.45)$$

onde, $R(\mathcal{L}) = -\ln(S(\mathcal{L}))$, $R(B) = -\ln(S(B))$ e $R(\mathcal{L}_{\omega_b}) = -\ln(S(\mathcal{L}_{\omega_b}))$ são, respectivamente as taxas de convergência dos métodos GS, Jacobi e SOR.

Prova: De (2.43), $R(\mathcal{L}_{\omega_b}) = -\ln[(\omega_b - 1)(p-1)]$

Pondo $\omega = 1$ em (1.22), vem:

$$S(\mathcal{L}) = S(\mathcal{L}_1) = [S(B)]^p = \bar{\mu}^p$$

Daí,

$$R(\mathcal{L}) = -p \ln \bar{\mu}$$

De (1.24) e aplicando a regra de L'Hôpital duas vezes ao

$$\lim_{\bar{\mu} \rightarrow 1-} \frac{R(\mathcal{L}_{\omega_b})}{[R(\mathcal{L})]^{1/2}}, \text{ segue a tese} \quad \text{cqd}$$

Desde que $2p^2/(p-1)$ é função crescente de p , $p \geq 2$, conclui-se que a convergência do método SOR, em relação ao método de Jacobi, será tanto maior quanto maior for p .

Por outro lado, Varga [13] mostrou que o máximo da razão $R(\mathcal{L}_{\omega_b})/R(\mathcal{L})$ é atingido quando $p = 2$, visto que $p/(p-1)$ é função decrescente de p .

Neste caso, para $p = 2$, tem-se, particularmente, de (2.44) e (2.45)

$$R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \sim 2 [R(\mathcal{L})]^{1/2} \quad \dots (2.46)$$

e

$$R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \sim 2 \sqrt{2} [R(B)]^{1/2} \quad \dots (2.47)$$

Os resultados obtidos acima valem para sistemas lineares, cuja matriz seja p -cíclica e consistentemente ordenada (CO_p), com as demais restrições impostas pelo Teorema 2.3.

Mais generalizadamente, se a matriz tiver a Propriedade A_p , e for uma matriz-L, irreduzível, então, através de uma permutação apropriada de suas linhas e colunas, obtém-se uma nova matriz que seja CO_p , e a teoria SOR se aplica igualmente.

Assim, se A for matriz com Propriedade A_p , satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3, as taxas de convergência dos métodos SOR, GS e Jacobi estarão relacionadas por (2.44)

e (2.45), em geral; e, em particular, por (2.46) e (2.47), se A tiver a Propriedade A.

Além disso, se A tiver a Propriedade A, decorre de (1.24) que o parâmetro ótimo ω_b é calculado explicitamente por

$$\omega_b = 2 / [1 + (1 - \bar{\mu}^2)^{1/2}] \quad \dots (2.48)$$

CAPÍTULO III

MÉTODOS ITERATIVOS DO SEGUNDO GRAU

O objetivo deste capítulo é introduzir os métodos iterativos do segundo grau, em geral, e, em particular, expor o método de Jacobi desse grau, com parâmetro ótimo.

3.1 - PRELIMINARES

Seja o método linear estacionário iterativo do segundo grau

$$u^{(n+1)} = G u^{(n)} + H u^{(n-1)} + k \quad \dots (3.1)$$

onde $u^{(0)}$ e $u^{(1)}$ são arbitrários. Se a sequência $\{u^{(k)}\}$ definida por (3.1) convergir para um limite $\hat{u}$, então $\hat{u}$ deve satisfazer a equação

$$u = G u + H u + k \quad \dots (3.2)$$

Seja A não singular.

Agrupando-se dois vetores-aproximações num único vetor, conforme Golub & Varga, [6], pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} u^{(n)} \\ u^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \quad \dots (3.3)$$

Compactamente,

$$\hat{u}^{(n+1)} = \hat{G} \hat{u}^{(n)} + \hat{k} \quad \dots (3.4)$$

onde

$$\hat{u}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} u^{(n)} & u^{(n+1)} \end{bmatrix}^T \quad \dots (3.5)$$

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix}^T \quad \dots (3.6)$$

e

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \quad \dots (3.7)$$

Daí, pelo Teorema 2.1, tem-se a condição necessária e suficiente de convergência, $\forall u^{(0)}$ e $u^{(1)}$ dados:

$$S(\hat{G}) < 1 \quad \dots (3.8)$$

Por outro lado, $S(\hat{G}) < 1$, se e só se todos os zeros $\hat{\mu}$ de

$$\det (\hat{\mu}^2 I - \hat{\mu}G - H) = 0 \quad \dots (3.9)$$

forem menores do que um, em módulo.

Dado um método linear estacionário do primeiro grau

$$u^{(n+1)} = G_1 u^{(n)} + k_1, \quad \dots (3.10)$$

considera-se, a seguir, o método linear de grau dois

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + d \left[u^{(n)} - u^{(n-1)} \right] + e \left[G_1 u^{(n)} + k_1 - u^{(n)} \right] \quad (3.11)$$

onde $\underline{d}$ e $\underline{e} \neq 0$ são parâmetros a determinar.

Comparando (3.11) com (3.1), vem

$$G = (1 - e + d) I + e G_1 \quad \dots (3.12)$$

$$H = -d I \quad \dots (3.13)$$

$$k = e k_1 \quad \dots (3.14)$$

De (3.9)

$$\det \{ \hat{\mu}^2 I - \hat{\mu} [e G_1 + (1-e+d)I] + dI \} = 0 \quad \dots (3.15)$$

e

$$\det \left[G_1 + \frac{1-e+d}{e} I - \frac{\hat{\mu}^2+d}{e \hat{\mu}} I \right] = 0 \quad \dots (3.16)$$

Portanto, os autovalores $\hat{\mu}$ de $\hat{G}$ estão relacionados com os autovalores μ de G_1 por

$$\mu + \frac{1-e+d}{e} = \frac{\hat{\mu}^2+d}{e \hat{\mu}} \quad \dots (3.17)$$

Se os autovalores μ satisfizerem

$$\alpha \leq \mu \leq \beta < 1 \quad \dots (3.18)$$

os parâmetros d e e ótimos propostos por Young [15] e Frankel [5] deverão ser calculados através de

$$d = \hat{\omega}_b - 1 \quad \dots (3.19)$$

$$e = 2\hat{\omega}_b \bar{\sigma} / (\beta - \alpha) = 2\hat{\omega}_b / [2 - (\beta + \alpha)] \quad \dots (3.20)$$

onde

$$\hat{\omega}_b = 2 / [1 + (1 - \bar{\sigma}^2)^{1/2}] \quad \dots (3.21)$$

e

$$\bar{\sigma} = (\beta - \alpha) / [2 - (\beta + \alpha)] \quad \dots (3.22)$$

É oportuno lembrar que os parâmetros $\underline{d}$ e $\underline{e}$ são considerados ótimos no sentido de que minimizam o raio espectral $S(\hat{G})$.

Lema 1 - Os autovalores $\hat{\mu}$ de $\hat{G}$, com parâmetros ótimos são dados por

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{p} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \dots (3.23)$$

onde

$$\hat{p} = \frac{\hat{\omega}_b [2\mu - (\beta + \alpha)]}{2 - (\beta + \alpha)} \quad \dots (3.24)$$

e

$$\Delta = \hat{p}^2 - 4 (\hat{\omega}_b - 1) \quad \dots (3.25)$$

Prova: De (3.17).

$$\hat{\mu}^2 - [1 + e(\mu - 1) + d] \hat{\mu} + d = 0 \quad \dots (3.26)$$

Usando $\underline{d}$ e $\underline{e}$ dados por (3.19) e (3.20), calcula-se

$$1 + e(\mu - 1) + d = 1 + \frac{2\hat{\omega}_b(\mu - 1)}{2 - (\beta + \alpha)} + \hat{\omega}_b - 1 = \frac{\hat{\omega}_b [2\mu - (\beta + \alpha)]}{2 - (\beta + \alpha)} \quad \dots (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.26), vem

$$\hat{\mu}^2 - \hat{\omega}_b \frac{[2\mu - (\beta + \alpha)]}{2 - (\beta + \alpha)} \hat{\mu} + \hat{\omega}_b - 1 = 0 \quad \dots (3.28)$$

Logo, os autovalores $\hat{\mu}$ serão os zeros de (3.28), e pondo

$$\hat{p} = \hat{\omega}_b [2\mu - (\beta + \alpha)] / [2 - (\beta + \alpha)] ,$$

segue a tese.

cq.d.

Conforme Young [15], pondo

$$\hat{r} = \hat{\omega}_b - 1 \quad \dots (3.29)$$

tem-se

$$s(\hat{G}) = (\hat{\omega}_b - 1)^{1/2} = \hat{r}^{1/2} \quad \dots (3.30)$$

3.2 - MÉTODO ESTACIONÁRIO DE JACOBI - JII

Neste caso, $G_1 = B$ e $k_1 = c = D^{-1}b$. Portanto,

$$G = (1 - e + d) I + e B \quad \dots (3.31)$$

$$H = -dI \quad \dots (3.32)$$

$$k = e k_1 = e c \quad \dots (3.33)$$

Substituindo (3.31) até (3.33) em (3.1), vem

$$u^{(n+1)} = [(1-e+d)I + eB]u^{(n)} - d u^{(n-1)} + ec \quad \dots (3.34)$$

onde $\underline{d}$ e $\underline{e}$ são dados por (3.19) e (3.20).

A fórmula geral do método JII é dada por (3.34).

Prosseguindo, procura-se aplicar a fórmula (3.34), do método JII, ao caso de sistemas lineares com matriz CO_p , satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3.

Por hipótese, os autovalores μ^p de B^p verificam:

$$\alpha \leq \mu^p \leq \beta < 1 \quad \dots (3.35)$$

onde

$$\beta = \bar{\mu}^p = S(B^p) \quad \dots (3.36)$$

Portanto, a condição (3.18) que garante parâmetros ótimos é satisfeita pelos autovalores da p -ésima potência da matriz de Jacobi por blocos. Uma maneira prática de recair nessa situação é simplesmente aplicar p vezes o método de Jacobi de grau um, e a partir daí continuar o processo com a fórmula (3.34).

Particularizando, seja A matriz CO_2 . Neste caso, em virtude de (1.21),

$$\alpha = -\beta \quad \dots (3.37)$$

Além disso, os autovalores de B são reais e, neste caso, pode-se aplicar o método JII diretamente sem necessidade da adaptação, para o caso geral, exposta acima.

Agora, (3.36) e (3.37) em (3.22) acarretam

$$\bar{\sigma} = \bar{\mu} \quad \dots (3.38)$$

e de (3.21)

$$\hat{\omega}_b = \omega_b = 2/[1+(1-\bar{\mu}^2)^{1/2}] \quad \dots (3.39)$$

e através de (3.19) e (3.20) d e e ficam

$$d = \omega_b - 1 \quad \dots (3.40)$$

$$e = \omega_b \quad \dots (3.41)$$

Portanto, (3.34) fica

$$u^{(n+1)} = \omega_b [B u^{(n)} + c] + (1-\omega_b) u^{(n-1)} \quad \dots (3.42)$$

Analisa-se, a seguir, a convergência do método JII,

quando aplicado a sistemas com matriz CO_p satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3.

Por hipótese, $\bar{\mu} = S(B) < 1$ acarreta $\bar{\mu}^p < 1$. Daí, de (3.21) e (3.22), vem $1 < \hat{\omega} < 2$. De (3.30),

$$S(\hat{B}) = (\hat{\omega}_b - 1)^{1/2} < 1 \quad \dots (3.43)$$

e, portanto, o método será convergente.

CAPÍTULO IV

MÉTODOS SEMI-ITERATIVOS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Inicialmente, cumpre mencionar que, embora os resultados constantes do Teorema 7 e Lema 1, deste capítulo, sejam conhecidos, as suas demonstrações aqui apresentadas são do autor desta tese.

Além disso, deve-se também relatar que a demonstração do Teorema 5, apresentada, é uma adaptação de outra proposta por Young [15], para outro caso, porém, totalmente análogo.

Finalmente, é mister mencionar que a prova do Teorema 4, que estabelece uma condição suficiente para a convergência do método semi-iterativo, caso geral, feita pelo autor deste trabalho, é suposta ser original.

4.1 - PRELIMINARES

Dado um método iterativo estacionário do primeiro grau, pode-se, em geral, achar um método não-estacionário associado, que convergirá mais rapidamente que o método dado.

Seja a sequência de números $x_1, x_2, \dots$.

Partindo-se da sequência $\{x_k\}$, pode-se calcular uma nova sequência $\{y_k\}$ pelo método da somabilidade, valendo frequentemente.

1) Se a sequência $\{x_k\}$ convergir, então $\{y_k\}$ convergirá mais rapidamente.

2. A sequência $\{x_k\}$ não converge, mas $\{y_k\}$ converge.

Seja a notação de conjunto triangular de coeficientes

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_{00} & & & & \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & & & \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{array}$$

tal que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{nk} = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (4.1)$$

Dada a sequência $\{x_k\}$, pode-se construir $\{y_k\}$ definida por

$$y_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} x_k \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Agora, vai-se aplicar o método da somabilidade aos métodos iterativos do primeiro grau para resolver o sistema linear.

$$A u = b \quad \dots (4.2)$$

onde A é matriz não singular. Dada a sequência $\{u_k\}$ definida pelo método iterativo

$$u^{(n+1)} = G u^{(n)} + h \quad \dots (4.3)$$

e dados os coeficientes α_{nk} satisfazendo (4.1) define-se a sequência

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u^{(k)} \quad \dots (4.4)$$

Diz-se que o processo definido por (4.4) é um método do semi-iterativo (método SI), com relação ao método iterativo estacionário (4.3). Por ser (4.3) de grau um, classifica-se (4.4) método SI de primeira espécie; quando o método básico for de grau dois, o método SI resultante será dito de segunda espécie.

Analisa-se, em seguida, a convergência do método SI, seja u a solução exata de (4.2) e

$$\epsilon^{(n)} = u^{(n)} - u; \quad \eta^{(n)} = v^{(n)} - u \quad \dots (4.5)$$

De (4.4), tem-se

$$\begin{aligned} \eta^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u^{(k)} - u \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u^{(k)} - u \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \\ \therefore \eta^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \epsilon^{(k)} \quad \dots (4.6) \end{aligned}$$

mas de (4.3) e (4.5), vem

$$\epsilon^{(k)} = G^k \epsilon^{(0)} \quad \dots (4.7)$$

Portanto,

$$\eta^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \epsilon^{(k)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} G^k \epsilon^{(0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} G^k \eta^{(0)} \\
&= P_n(G) \eta^{(0)} \quad \dots (4.8)
\end{aligned}$$

onde

$$P_n(G) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} G^k \quad \dots (4.9)$$

4.2 - CASO: AUTOVALORES DA MATRIZ G SÃO REAIS

Considera-se agora, como medida de convergência do método (4.4), o raio espectral virtual médio

$$\bar{\rho}_n(P_n(G)) = [\bar{S}(P_n(G))]^{1/n} = \left[\max_{\mu \in \bar{S}_G} |P_n(\mu)| \right]^{1/n} \quad \dots (4.10)$$

onde $\bar{S}_G$ é o menor intervalo contendo S_G , o conjunto de todos os autovalores de G .

Procurar-se-á escolher $\{\alpha_{nk}\}$ de forma a minimizar $\bar{\rho}_n(P_n(G))$.

Suponha que os autovalores μ de G verifiquem

$$\alpha \leq \mu \leq \beta < 1 ; \quad \beta > \alpha \quad \dots (4.11)$$

observa-se que $S(G)$ não precisa ser menor do que um; daí ocorrer $\alpha < -1$, em alguns casos, para os quais o método básico não converge e, contudo o método SI convergirá, conforme será mostrado mais tarde.

Teorema 1 - Seja $T_n(x)$ o polinômio de Chebyshev de grau n e γ definido por

$$\gamma = \frac{2\mu - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \quad \dots (4.12)$$

Seja z definido por

$$z = \gamma(1) = \frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \quad \dots (4.13)$$

Seja $P_n(\mu)$ polinômio dado tal que

$$P_n(1) = 1$$

e

$$P_n(\mu) = Q_n \frac{2\mu - (\beta + \alpha)}{2} = Q_n(\gamma) \quad \dots (4.14)$$

onde

$$Q_n(\gamma) = T_n(\gamma) / T_n(z) \quad \dots (4.15)$$

Então vale:

$$\max_{\alpha \leq \mu \leq \beta} |P_n(\mu)| = \max_{-1 \leq \gamma \leq 1} |Q_n(\gamma)| \quad \dots (4.16)$$

e o polinômio que minimiza o lado direito de (4.16) é o polinômio dado por (4.15).

Além disso,

$$\max_{-1 \leq \gamma \leq 1} |Q_n(\gamma)| = 1 / T_n(z) \quad \dots (4.17)$$

Prova: Como

$$2 - (\alpha + \beta) > 0 \quad \dots (4.18)$$

$$\alpha + \beta > 0$$

vem

$$z > 1 \quad \dots (4.19)$$

Desde que $Q_n(z) = P_n(1) = 1$, $z > 1$, e aplicando a Proposição 1.9, segue a tese.

cqd.

De (4.14) e (4.15), tem-se

$$P_n(\mu) = Q_n\left(\frac{2\mu - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha}\right) = T_n\left(\frac{2\mu - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha}\right) / T_n\left(\frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha}\right) \dots (2.21)$$

Desde que $z > 1$ e $T_n(z) > 1$, segue que

$$\bar{\phi}_n(P_n(G)) < 1 \dots (4.22)$$

Condições suficientes de convergência para o método SI serão estabelecidas pelo Teorema 4.4 mais tarde.

Antes, procura-se uma fórmula do método SI mais conveniente do que (4.4), atrás, para aplicações práticas.

Teorema 2 - As aproximações $v^{(n)}$ de (4.4) podem ser obtidas recursivamente por

$$\begin{aligned} v^{(n+1)} = & 2 \left[\frac{2}{\beta - \alpha} G - \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} I \right] \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} v^{(n)} - \frac{T_{n-1}(z)}{T_{n+1}(z)} v^{(n-1)} \\ & + \frac{4}{\beta - \alpha} \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} h, \quad n \geq 1 \dots (4.23) \end{aligned}$$

Prova:

De (4.21)

$$\begin{aligned}
 P_n(G) &= T_n \left(\frac{2}{\beta-\alpha} G - \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} I \right) / T_n(z) \\
 &= T_n \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) / T_n(z) \quad \dots (4.24)
 \end{aligned}$$

daí, por (4.8)

$$\eta^{(n+1)} = P_{n+1}(G) \varepsilon^{(0)} = \left[T_{n+1} \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) / T_{n+1}(z) \right] \varepsilon^{(0)} \quad \dots (4.25)$$

Usando (1.26), para $n \geq 1$, vem

$$\begin{aligned}
 \eta^{(n+1)} &= \left\{ 2 \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) T_n \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) \right. \\
 &\quad \left. - T_{n-1} \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) \right\} / T_{n+1}(z) \varepsilon^{(0)} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\eta^{(n)} = P_n(G) \varepsilon^{(0)} = \left[T_n \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) / T_n(z) \right] \varepsilon^{(0)} \quad \dots (4.27)$$

$$\eta^{(n-1)} = P_{n-1}(G) \varepsilon^{(0)} = \left[T_{n-1} \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) / T_{n-1}(z) \right] \varepsilon^{(0)} \quad \dots (4.28)$$

Donde,

$$\eta^{(n+1)} = 2 \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} \eta^{(n)} - \frac{T_{n-1}(z)}{T_{n+1}(z)} \eta^{(n-1)} \quad \dots (4.29)$$

De (4.5), vem

$$v^{(n+1)} = 2 \left(\frac{2G - (\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha} \right) \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} v^{(n)} - \frac{T_{n-1}(z)}{T_{n+1}(z)} v^{(n-1)} +$$

$$+ \left[I - 2 \left(\frac{2G - (\alpha + \beta)I}{\beta - \alpha} \right) \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} + \frac{T_{n-1}(z)}{T_{n+1}(z)} \right] u \quad \dots (4.30)$$

Do último termo de (4.30), vem:

$$\frac{T_{n-1}(z)}{T_{n+1}(z)} I = \frac{2z \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} - \frac{T_{n+1}(z)}{T_{n+1}(z)}}{1} I = (2z \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} - 1) I$$

Logo, vale:

$$\begin{aligned} \left[I - 2 \left(\frac{2G - (\alpha + \beta)I}{\beta - \alpha} \right) \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} + \frac{T_{n-1}(z)}{T_{n+1}(z)} \right] u &= \\ &= 2 \left[Iz - \frac{2G - (\alpha + \beta)I}{\beta - \alpha} \right] \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} u \\ &= \frac{4(I-G)}{\beta - \alpha} \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} u \\ &= \frac{4(I-G)}{\beta - \alpha} \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} (I-G)^{-1} h \\ &= \frac{4}{\beta - \alpha} \frac{T_n(z)}{T_{n+1}(z)} h \quad \dots (4.31) \end{aligned}$$

Substituindo (4.31) em (4.30), obtêm-se a tese.

cqd.

A fim de se obter a sequência $\{v^{(k)}\}$, através de (4.23), precisa-se de duas aproximações iniciais $v^{(0)}$ e $v^{(1)}$.

É óbvio tomar $v^{(0)} = u^{(0)}$.

Desde que $T_1(x) = x$; por (4.24) é lícito escrever

$$\begin{aligned} P_1(G) &= T_1 \left(\frac{2G - (\alpha + \beta)I}{\beta - \alpha} \right) / T_1(z) \\ &= \frac{2G - (\beta + \alpha)I}{2 - (\beta + \alpha)} \quad \dots (4.32) \end{aligned}$$

Por (4.5) e (4.8)

$$v^{(1)} - u = \frac{2G - (\beta + \alpha)I}{2 - (\beta + \alpha)} (u^{(0)} - u) \quad \dots (4.33)$$

$$v^{(1)} = \frac{2G - (\beta + \alpha)I}{2 - (\beta + \alpha)} u^{(0)} + \frac{2(I - G)}{2 - (\beta + \alpha)} u$$

$$v^{(1)} = \frac{2}{2 - (\beta + \alpha)} (G u^{(0)} + h) - \frac{\beta + \alpha}{2 - (\beta + \alpha)} u^{(0)} \quad \dots (4.34)$$

É possível mostrar que (4.23) e (4.34) podem ser es
critas com uma única fórmula, o que é feito pelo teorema aba
ixo:

Teorema 3 - Uma fórmula para o método SI é dada por

$$v^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+1}}{2 - (\alpha + \beta)} \{ [2G - (\alpha + \beta)I] v^{(n)} + 2h \} + \\ + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)}, \quad n \geq 0 \quad \dots (4.35)$$

$$\text{onde, } \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 2z^2 / (2z^2 - 1). \quad \dots (4.36)$$

$$\text{e } \rho_{n+1} = (1 - \frac{\rho_n}{4z^2})^{-1} \quad n \geq 2 \quad \dots (4.37)$$

Prova:

Definem-se os números $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots$ por

$$\hat{\rho}_1 = 1; \quad \hat{\rho}_n = \frac{2z T_{n-1}(z)}{T_n(z)} \quad n \geq 2 \quad \dots (4.38)$$

$$\text{De } T_{n+1}(z) = 2z T_n(z) - T_{n-1}(z), \quad n \geq 1 \quad \dots (4.39)$$

$$\frac{T_{n+1}(z)}{2z T_n(z)} = 1 - \frac{2z T_{n-1}(z)}{4z^2 T_n(z)}$$

Logo,

$$\hat{\rho}_{n+1}^{-1} = 1 - \frac{\hat{\rho}_n}{4z^2} \quad n \geq 2 \quad \dots (4.40)$$

De (4.38)

$$\hat{\rho}_2 = 2z T_1(z)/T_2(z) = 2z^2/(2z^2 - 1)$$

Portanto,

$$\hat{\rho}_n = \rho_n \quad n \geq 1$$

Substituindo (4.38) em (4.23), vem

$$\begin{aligned} v^{(n+1)} &= \frac{\rho_{n+1}}{z} \left[\frac{2G}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} I \right] v^{(n)} - \frac{2zT_n - T_{n+1}}{T_{n+1}} v^{(n-1)} \\ &\quad + \frac{2\rho_{n+1}}{\beta-\alpha} \frac{h}{z} \end{aligned}$$

$$v^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+1}}{2-(\alpha+\beta)} \{ [2G-(\alpha+\beta)I] v^{(n)} + 2h \} + (1-\rho_{n+1}) v^{(n-1)}$$

$$\forall n \geq 1$$

É evidente que de (4.38) e (4.34) segue a validade de (4.35) para $n = 0$ também. cqd.

Teorema 4 - Seja o método iterativo estacionário de grau um.

$$x^{(n+1)} = G x^{(n)} + h \quad \dots (4.41)$$

sendo G qualquer. Seja o método SI, relativo ao método (4.41), dado por

$$u^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+1}}{2-(\alpha+\beta)} \{ [2G - (\alpha+\beta)I] u^{(n)} + 2h \} + (1-\rho_{n+1}) u^{(n-1)}$$

$$n \geq 0 \quad \dots (4.42)$$

Seja a matriz $P_1(G)$ dada por

$$P_1(G) = \frac{2G - (\alpha+\beta)I}{2-(\alpha+\beta)}$$

O método SI converge, se

$$S(P_1(G)) < 1 \quad \dots (4.43)$$

Prova: Seja $\underline{M}$ a matriz, da Proposição 1.10, tal que

$$S(P_1(G)) < \|MP_1(G)M^{-1}\|_\infty < S(P_1(G)) + \epsilon; \quad \epsilon > 0$$

seja a constante η_1 dada por

$$\eta_1 = \epsilon / [2 \|M\|_\infty \|M^{-1}\|_\infty]$$

Pondo $q = 2-(\alpha+\beta)$, reescreve-se (4.42) como

$$u^{(n)} = q^{-1} \rho_n \{ [2G - (\alpha+\beta)I] u^{(n-1)} + 2h \} + (1-\rho_n) u^{(n-2)}$$

$$n \geq 1 \quad \dots (4.44)$$

Observando que (4.44) é um particular método de grau dois com parâmetro variável, vale a notação

$$\begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -d_n I & G_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(n-2)} \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix} + q^{-1} o_n \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \\ \dots \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\text{onde } d_n = \rho_n^{-1} \quad G_n = (2G - (\alpha + \beta)I) q^{-1} \rho_n \quad (4.46)$$

Pondo

$$v^{(n)} = \begin{bmatrix} u^{(n-1)} & u^{(n)} \end{bmatrix}^T ; \quad h_n^* = q^{-1} \rho_n \begin{bmatrix} 0 & 2h \end{bmatrix}^T \quad (4.47)$$

e

$$G_n^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -d_n I & G_n \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

vem

$$v^{(n)} = G_n^* v^{(n-1)} + h_n^* \quad (4.49)$$

Portanto,

$$v^{(n)} = g_n v^{(0)} + g \quad (4.5)$$

sendo

$$g_n = G_n^* G_{n-1}^* \dots G_1^* = \prod_{r=1}^n G_r^* \quad (4.51)$$

Como $\rho_1 = 1$, vem

$$G_1^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} ; G_1 = [2G - (\alpha + \beta)I]q^{-1} \quad \dots (4.52)$$

Agora, pondo

$$U_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -d_n I & G_n - G_1 \end{bmatrix} \quad \dots (4.53)$$

$$\text{onde } G_n - G_1 = [2G - (\alpha + \beta)I] d_n q^{-1} \quad \dots (4.54)$$

vê-se que é válido escrever

$$G_n^* = G_1^* + U_n \quad \dots (4.55)$$

Sabe-se que $q \neq 0$ e, visto que $1 \leq \rho_n < 2$ tem-se $d_n < 1$.

Seja $\|G_1\|_\infty = L$, que é finita, pois $q \neq 0$.

Calculando $\|U_n\|_\infty$ vem

$$\|U_n\|_\infty = \max_i \sum_j |U_n(i,j)| = d_n + d_n L \quad \dots (4.56)$$

$$\therefore \|U_n\|_\infty = d_n (1+L) \quad \dots (4.57)$$

Por outro lado, da definição de ρ_n , é fácil ver que $\lim \rho_n = 1$, quando $n \rightarrow \infty$.

Como $\rho_n \rightarrow 1$, então $d_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

Logo, $\exists m \mid \forall n \geq m$; vale

$$\|U_n\|_{\infty} \leq \eta_1 \quad \dots (4.58)$$

Pondo $k = n - m + 1$ (4.58) fica

$$\|U_k\| \leq \eta_1 \quad k = 1, 2, \dots \quad \dots (4.59)$$

Agora, da hipótese,

$$S(P_1(G)) = S(G_1) < 1 - \epsilon \quad \dots (4.60)$$

Mas, de (4.52) é imediato que

$$S(G_1^*) + \epsilon < 1 \quad \dots (4.61)$$

Todas as hipóteses da Proposição 1.11 estão satisfeitas. Portanto, de (1.34)

$$\prod_{k=1}^m G_k^* \rightarrow 0 \quad \text{com } m \rightarrow \infty$$

Daí

$$\prod_{r=1}^n G_r^* = g_n \rightarrow 0 \quad \text{com } n \rightarrow \infty.$$

Basta, agora aplicar o Teorema 2.2.

Assim $v^{(n)}$ converge e $u^{(n)}$ também. cqd.

Quando os parâmetros α e β de (4.35) satisfizerem $\alpha = \min \mu$ e $\beta = \max \mu$, a fórmula do método SI será ótima no sentido de que $\mathcal{J}_n(P_n(G))$ é mínimo. Se forem conhecidas apenas aproximações de α e β , o método ainda assim poderá convergir, desde que $S_1(P_1(G)) = z^{-1} < 1$, com z dado em função dessas aproximações. Assim, pode ocorrer a presença de autovalores μ de G fora do intervalo $[\alpha, \beta]$ arbitrado, o que pode naturalmente alterar a rapidez de convergência do processo.

Procura-se, em seguida, determinar $\bar{S}(P_n(G))$, o qual, conforme (4.10), (4.13) e (4.21) é dado por:

$$\bar{S}(P_n(G)) = \max_{\alpha \leq \mu \leq \beta} |P_n(\mu)| = [T_n(z)]^{-1} \quad \dots (4.62)$$

Lema 1 -

$$[T_n(z)]^{-1} = \frac{2 \tau^n}{1 + \tau^{2n}} \quad \dots (4.63)$$

onde

$$\tau = \frac{\sigma}{1 + (1 - \sigma^2)^{1/2}}, \quad \sigma = \frac{1}{z} \quad \dots (4.64)$$

Prova:

$$T_n(z) = \frac{1}{2} \{ [z + (z^2 - 1)^{1/2}]^n + [z + (z^2 - 1)^{1/2}]^{-n} \} \dots (4.65)$$

Basta por $\tau^{-1} = z + (z^2 - 1)^{1/2}$ e substituir em (4.65) cqd.

Assim, de (4.62), tem-se

$$\bar{S}(P_n(G)) = \frac{2 \tau^n}{1 + \tau^{2n}} \quad \dots (4.66)$$

Conforme (2.27), a taxa de convergência quase-médio-virtual, respectiva, é

$$\begin{aligned} \overline{R}_n'(P_n(G)) &= -\frac{1}{n} \ln \overline{S}(P_n(G)) = -\frac{1}{n} \ln \frac{2 \tau^n}{1 + \tau^{2n}} \\ &\dots (4.67) \end{aligned}$$

Em particular, para $n = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \overline{R}_1'(P_1(G)) &= -\ln \frac{2 \tau}{1 + \tau^2} = \\ &= -\ln \frac{2\sigma / [1 + (1 - \sigma^2)^{1/2}]}{1 + \sigma^2 / [1 + 2(1 - \sigma^2)^{1/2} + 1 - \sigma^2]} \\ &= -\ln \sigma \end{aligned} \dots (4.68)$$

De acordo com (2.28), a taxa de convergência quase-médio-assintótico-virtual $\overline{R}'(P_n(G))$ vale

$$\overline{R}'(P_n(G)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{R}_n'(P_n(G))$$

Lema 2 -

$$\overline{R}'(P_n(G)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \ln \frac{2 \tau^n}{1 + \tau^{2n}} = -\ln \tau \dots (4.69)$$

Prova: Basta calcular o limite.

Teorema 5 - Seja

$$\alpha = \overline{R}'(P_n(G)) = -\ln \tau \dots (4.70)$$

e

$$\beta = \overline{R}_1'(P_1(G)) = -\ln \sigma \dots (4.71)$$

onde τ e σ são dados por (4.64), atrás. Então vale

$$\sigma(2\beta)^{1/2} \leq \alpha \leq \beta + (2\beta)^{1/2} \dots (4.72)$$

Prova: 1) Lado esquerdo de (4.72):

$$\text{De fato, } \frac{2}{1+(1-\sigma^2)^{1/2}} - 1 = \frac{1-(1-\sigma^2)^{1/2}}{1+(1-\sigma^2)^{1/2}} = \left[\frac{\sigma}{1+(1-\sigma^2)^{1/2}} \right]^2$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha &= -\ln \tau = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1-(1-\sigma^2)^{1/2}}{1+(1-\sigma^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+(1-\sigma^2)^{1/2}}{1-(1-\sigma^2)^{1/2}} = \frac{1}{2} \{ \ln [1+(1-\sigma^2)^{1/2}] + \\ &\quad - \ln [1-(1-\sigma^2)^{1/2}] \} \\ &= \frac{1}{2} (2(1-\sigma^2)^{1/2}) + R_2 \end{aligned}$$

Como $0 \leq 1-\sigma^2 < 1$, vale

$$\alpha \geq (1-\sigma^2)^{1/2} = (1-e^{\ln \sigma^2})^{1/2} = (1-e^{-2\beta})^{1/2}$$

$$\text{ou } \alpha \geq e^{-\beta} (e^{2\beta}-1)^{1/2} \geq \sigma(2\beta)^{1/2} \dots (4.73)$$

pois, $e^x - 1 \geq x \quad \forall \quad x \geq 0$

2) Lado direito de (4.72)

$$\text{De } \alpha = -\ln \tau = \frac{1}{2} \ln \frac{1+(1-\sigma^2)^{1/2}}{1-(1-\sigma^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-(1-e^{\ln \sigma^2})^{1/2}}{1+(1-e^{\ln \sigma^2})^{1/2}}$$

Como $2\beta = -2 \ln \sigma$, vem

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1-(1-e^{-2\beta})^{1/2}}{1+(1-e^{-2\beta})^{1/2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{e^{-\beta}}{[1+(1-e^{-2\beta})^{1/2}]^2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{e^{-\beta}}{1+(1-e^{-2\beta})^{1/2}} \right]^2 = -\ln \frac{e^{-\beta}}{1+(1-e^{-2\beta})^{1/2}} \\ &= \beta + \ln [1+(1-e^{-2\beta})^{1/2}] \end{aligned}$$

Visto que $\ln(1+x) \leq x \quad \forall \quad x \text{ tal que } 0 \leq x < 1$, vem

$$\alpha \leq \beta + (1-e^{-2\beta})^{1/2}$$

Agora, de $e^y \geq 1+y$, tem-se

$$\alpha \leq \beta + (2\beta)^{1/2} \quad \dots (4.74)$$

(4.73) e (4.74) dão a tese.

cqd.

Teorema 6 -

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1-} \bar{R}'(P_n(G)) / [\bar{R}'_1(P_1(G))]^{1/2} = 2^{1/2} \quad \dots (4.75)$$

Prova: De (4.72),

$$\begin{aligned} \sigma &\leq -\frac{\ln \tau}{(2\beta)^{1/2}} \leq \frac{\beta + (2\beta)^{1/2}}{(2\beta)^{1/2}} \\ \sigma &\leq -\frac{\ln \tau}{(2\beta)^{1/2}} \leq 1 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

ou

$$\sigma \leq - \frac{\ln \tau}{(-2 \ln \sigma)^{1/2}} \leq 1 + \left(-\frac{\ln \sigma}{2}\right)^{1/2} \dots (4.76)$$

Tomando o limite, quando $\sigma \rightarrow 1^-$, visto que $\ln \sigma \rightarrow 0$, vem

$$1 \leq \lim_{\sigma \rightarrow 1^-} \frac{-\ln \tau}{(-2 \ln \sigma)^{1/2}} \leq 1$$

Logo, vale a tese.

cqd.

Do teorema 6, para n suficientemente grande e σ próximo de 1, resulta

$$\frac{\bar{R}'_n(P_n(G))}{[\bar{R}'_1(P_1(G))]^{1/2}} \sim 2^{1/2} \dots (4.77)$$

Significa que o uso de métodos semi-iterativos implica a melhora da taxa de convergência, quando comparados com o uso repetido do método linear estacionário iterativo:

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} &= \frac{1}{2-(\alpha+\beta)} \{ [2G-(\alpha+\beta)I] u^{(n)} + 2h \} \\ &= P_1(G) u^{(n)} + \frac{2h}{2-(\alpha+\beta)} \dots (4.78) \end{aligned}$$

O método (4.78) é, evidentemente, pelo menos, tão bom quanto o método básico propriamente dito. Donde se conclui que se obtém um fator de melhoria, efetivamente, maior ainda, ao compararmos os métodos semi-iterativos com o método básico.

4.3 - CASO: AUTOVALORES DA MATRIZ G SÃO COMPLEXOS

Tendo em vista (1.26) segue diretamente a validade de (4.23) e (4.35) para o caso em que os autovalores de G forem complexos.

Observa-se que, neste caso, não ocorre $\alpha \leq \mu \leq \beta$, onde μ , autovalor de G , é complexo. Agora, em geral, α e β são arbitrados, inicialmente, e procura-se, por algum critério, otimizá-los se isto for possível, v. Wrigley 14. Essa nova situação é, contudo, análoga ao caso geral em que algum autovalor, pelo menos, está situado fora do intervalo α, β .

Seja $P_n(\mu)$ autovalor complexo de $P_n(G)$. Conforme de finição (2.24), o raio espectral médio será

$$\rho_n(P_n(G)) = [S(P_n(G))]^{1/n} = \left[\max_{\mu \in S_G} |P_n(\mu)| \right]^{1/n} \quad \dots (4.79)$$

sendo S_G o conjunto de todos os autovalores de G .

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e seja a mudança de variáveis para o caso complexo

$$\gamma = \gamma(\mu) = \frac{2\mu - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \quad \dots (4.80)$$

e

$$z = \gamma(1) = \frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \quad \dots (4.81)$$

Então (4.79) fica, lembrando (4.15)

$$\mathcal{J}_n(P_n(G)) = \left[\max_{\gamma} \left| \frac{T_n(\gamma)}{T_n(z)} \right| \right]^{1/n} \quad \dots (4.82)$$

Considera-se a transformação conforme

$$f : (u,v) \in \mathbb{C} \rightarrow (x,y) \in \mathbb{C}$$

definida por

$$x = \cosh u \cos v \quad \dots (4.83)$$

$$y = \sinh u \sin v \quad \dots (4.84)$$

a qual leva o conjunto $\{(u,v) \mid u = t, -\pi \leq v < \pi\}$ no conjunto

$$\{(x,y) \mid \frac{x^2}{\cosh^2 t} + \frac{y^2}{\sinh^2 t} = 1\} \quad \dots (4.85)$$

Teorema 7 - Sejam $z \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{C}$. sejam u, v e $t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\gamma = \cosh(u + iv), \quad z = \cosh t \quad \dots (4.86)$$

Então vale

$$a) \text{ Se } t > |u| \geq 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T_n(\gamma)}{T_n(z)} \right| = 0 \quad \dots (4.87)$$

$$b) \text{ Se } t = |u| > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T_n(\gamma)}{T_n(z)} \right| = 1 \quad \dots (4.88)$$

$$c) \text{ Se } |u| > t > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T_n(\gamma)}{T_n(z)} \right| = \infty \quad \dots (4.89)$$

Prova: a) Por hipótese,

$$z = \cosh t \quad \dots (4.90)$$

e

$$\gamma = x + i y = \cosh (u+iv) \quad \dots (4.91)$$

Da transformação $\tilde{f}$, obtém-se

$$x = \cosh u \cdot \cos v \quad \dots (4.92)$$

$$y = \sinh u \cdot \sin v \quad \dots (4.93)$$

$$\therefore \left(\left| \frac{T_n(\gamma)}{T_n(z)} \right| \right)^2 = \frac{\cosh^2(nu) \cos^2(nv) + \sinh^2(nu) \sin^2(nv)}{\cosh^2(nt)}$$

$$= \frac{\cosh^2(nu) - \sin^2(nv)}{\cosh^2(nt)}$$

Visto que $\cosh^2(nu)$ tende a infinito com n , enquanto $\sin^2(nv)$ permanece limitada pela unidade, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|T_n(\gamma)|}{|T_n(z)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh(nu)}{\cosh(nt)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nu} + e^{-nu}}{e^{nt} + e^{-nt}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n|u|} (1 + e^{-2n|u|})}{e^{nt} (1 + e^{-2nt})}$$

$$= 0$$

OBSERVAÇÃO: Se $u = 0$, $\cosh^2(nu) = 1$ e o resultado é imediato.

O Teorema 7, acima, estabelece condições suficientes para cálculo do raio espectral assintótico estribado nos parâmetros t e u definidos por (4.86).

É mais desejável, contudo, obter tais condições em função do parâmetro z e dos autovalores γ diretamente.

Lema 3 - Com as hipóteses do Teorema 7, pode-se expressar a condição $t > u > 0$ por

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2-1} < 1 \quad \dots (4.94)$$

Prova: $z = \cosh t$. (4.85), em particular, fica

$$\{(x,y) \mid \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2-1} = 1\} \quad \dots (4.95)$$

Se (u,v) é tal que $u < t$, então o ponto (x,y) , imagem pela transformação f , estará situado no interior da elipse de equação

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2-1} = 1 \quad \dots (4.96)$$

isto é, satisfazendo a inequação

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2-1} < 1 \quad \dots (4.97)$$

e reciprocamente.

Os resultados expressos pelo Teorema 4.7 e Lema 4.3, acima, mostram as condições para verificar se o raio espectral assinótico da matriz $P_n(G)$ se anula, quando algum autovalor μ for complexo. Uma condição suficiente de convergência é dada pelo seguinte corolário do Teorema 4.4.

Corolário 1 - Seja $\mu \in \mathbb{C}$ e γ dado por

$$\gamma = \frac{2\mu - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = a + b i \quad \dots (4.98)$$

$$z = \frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \quad \dots (4.99)$$

O método semi-iterativo converge, se

$$|\gamma| < z \quad \dots (4.110)$$

Prova:

$$\begin{aligned} S(P_1(G_1)) &= \max \frac{|T_1(\gamma)|}{|T_1(z)|} \\ &= \max \left| \frac{\cosh(\cosh^{-1} \gamma)}{z} \right| = \max \frac{(\gamma)}{z} \end{aligned}$$

Se $|\gamma| < z$, vem $S(P_1(G_1)) < 1$

cqd.

CAPÍTULO V

MÉTODOS SEMI-ITERATIVOS DE SEGUNDA ESPÉCIE

5.1 - INTRODUÇÃO

Propõem-se métodos semi-iterativos associados a métodos do segundo grau, em geral, e, em particular, deduz-se uma fórmula relativa ao método de Jacobi de grau dois (JII-SI).

Prova-se que o método é convergente para sistemas lineares, cuja matriz tenha a Propriedade A_p satisfazendo as condições do Teorema 2.3, bem como para problemas, cuja matriz $\hat{B}$, associada ao método de Jacobi de grau dois, possui autovalores reais.

Demais, compara-se o método JII-SI com o método de Jacobi de grau dois (JII), quando aplicados a sistemas lineares dos tipos acima.

5.2 - FAMÍLIA DE MÉTODOS SEMI-ITERATIVOS DE SEGUNDA ESPÉCIE

Seja o método do segundo grau

$$u^{(n+1)} = H u^{(n-1)} + G u^{(n)} + h \quad \dots (5.1)$$

Pondo

$$\hat{u}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} u^{(n)} & , & u^{(n+1)} \end{bmatrix}^T \quad \dots (5.2)$$

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} 0 & & h \end{bmatrix}^T \quad \dots (5.3)$$

e

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \quad \dots (5.4)$$

é válido escrever

$$\hat{u}^{(n+1)} = \hat{G} \hat{u}^{(n)} + \hat{h} \quad \dots (5.5)$$

Retomando (5.1), seja a sequência $\{v^{(n)}\}$ definida por

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u^{(k)} \quad \dots (5.6)$$

de forma que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{nk} = 1 \quad \dots (5.7)$$

Seja

$$v_1^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u^{(k)} \quad \dots (5.8)$$

e

$$v_2^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u^{(k+1)} \quad \dots (5.8')$$

Põe-se

$$\begin{aligned} \hat{v}^{(n)} &= \begin{bmatrix} v_1^{(n)} & v_2^{(n)} \end{bmatrix}^T \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \begin{bmatrix} u^{(k)} & u^{(k+1)} \end{bmatrix}^T \quad \dots (5.9) \end{aligned}$$

Seja $\hat{\underline{u}}$ tal que

$$\hat{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u & u \end{bmatrix}^T = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \begin{bmatrix} u & u \end{bmatrix}^T \dots (5.10)$$

onde u é solução exata de (2.1), isto é,

$$\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Escrevendo (5.5) escalarmente em $u^{(n)}$

$$\begin{bmatrix} u^{(n)} \\ u^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} \dots (5.12)$$

Denota-se o erro por $\varepsilon^{(n)} = u^{(n)} - u$ e define-se

$$\eta^{(n)} = \sum_{i=0}^n \alpha_{nk} \varepsilon^{(n)} \dots (5.13)$$

Agora, subtraindo-se (5.11) de (5.12)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{(n)} \\ \varepsilon^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(n-1)} \\ \varepsilon^{(n)} \end{bmatrix} \dots (5.14)$$

Logo, vale

$$\hat{\varepsilon}^{(n)} = \hat{G}^n \hat{\varepsilon}^{(0)} \quad n = 0, 1, \dots \quad \dots (5.15)$$

onde

$$\hat{\varepsilon}^{(n)} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(n)} & \varepsilon^{(n+1)} \end{bmatrix}^T \quad \dots (5.16)$$

e $\hat{G}$ é a matriz (5.4).

Por outro lado, de (5.13)

$$\hat{\eta}^{(n)} = \begin{bmatrix} \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(n)} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(k)} \\ \varepsilon^{(k+1)} \end{bmatrix} \quad \dots (5.17)$$

De (5.17), (5.16), (5.13), (5.8), (5.8'), é óbvio que

$$\hat{\eta}^{(n)} = \hat{v}^{(n)} - \hat{u} \quad \dots (5.18)$$

onde $\hat{u}$ é dado por (5.10) e $\hat{v}^{(n)}$ por (5.9).

Substituindo (5.15) em (5.17), vem

$$\hat{\eta}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \hat{G}^k \hat{\varepsilon}^{(0)} \quad \dots (5.19)$$

Seja a notação

$$P_n(\mu) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu^k \quad \dots (5.20)$$

(5.19) fica

$$\hat{\eta}^{(n)} = P_n(\hat{G}) \hat{\varepsilon}^{(0)} \quad \dots (5.21)$$

Confrontando (5.21) com (4.9), vê-se que o procedimento acima é totalmente análogo ao desenvolvido no Capítulo IV, em que se definiu o método SI de primeira espécie. Agora, têm-se o método SI de segunda espécie definido por (5.8) e (5.8'), que é uma extensão de (4.4).

Analogamente, considera-se como medida de convergência do método (5.8) e (5.8'), o raio espectral médio:

$$\mathcal{J}_n(P_n(\hat{G})) = \left[S(P_n(\hat{G})) \right]^{1/n} = \left[\max_{\hat{\mu} \in S_{\hat{G}}} |P_n(\hat{\mu})| \right]^{1/n} \quad \dots (5.22)$$

onde $S_{\hat{G}}$ é o conjunto de todos os autovalores de $\hat{G}$.

Novamente, procurar-se-á escolher $\{\alpha_{nk}\}$ de forma a minimizar $\mathcal{J}_n(P_n(\hat{G}))$.

Seja, então, $\hat{\mu}$ autovalor de $\hat{G}$ dada por (5.4) satisfazendo

$$\hat{\alpha} \leq |\hat{\mu}| \leq \hat{\beta} < 1 \quad \dots (5.23)$$

Teorema 1 - Uma fórmula do método SI de segunda espécie é dada por

$$\begin{aligned} \hat{v}^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+1}}{2 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})} \{ [2 \hat{G} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) I] \hat{v}^{(n)} + 2 \hat{h} \} + \\ + (1 - \rho_{n+1}) \hat{v}^{(n-1)} \quad n \geq 0 \quad \dots (5.24) \end{aligned}$$

onde

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{2z^2}{2z^2 - 1}, \quad \rho_{n+1} = \left(1 - \frac{\rho_n}{4z^2}\right)^{-1} \quad \dots (5.25)$$

e

$$z = \frac{2-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})}{\hat{\beta}-\hat{\alpha}} \quad \dots (5.26)$$

Prova: Pondo

$$\gamma = \gamma(\hat{\mu}) = \frac{2\hat{\mu}-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})}{\hat{\beta}-\hat{\alpha}} \quad \dots (5.27)$$

e repetindo os cálculos usados na demonstração dos Teoremas 4.1 a 4.3 chega-se à tese. cq.d.

É oportuno ressaltar que (5.24) representa uma família de métodos, visto que a matriz $\hat{G}$ é genérica. Para cada matriz $\hat{G}$, associada a um determinado método (não semi-iterativo) de grau dois, obtém-se, com o uso de (5.24), um método novo, distinto.

Vai-se particularizar (5.24), no momento, adotando como método básico o que possui parâmetros otimizados no sentido exposto no Capítulo III (pág. III-3).

Seja a matriz $\hat{G}$ com autovalores $\hat{\mu}$ satisfazendo (5.23) e a matriz G_1 , de (3.10), com autovalores μ tais que

$$\alpha \leq \mu \leq \beta < 1 \quad \dots (5.28)$$

Tomando os valores ótimos para os parâmetros $\underline{d}$ e $\underline{e}$, dados por (3.19) e (3.20), bem como pondo

$$H = -dI = (1-\hat{\omega}) I \quad \dots (5.29)$$

onde $\hat{\omega}$ é dado por (3.21)

e pondo

$$G = (1-e+d)I + e G_1 \quad \dots (5.30)$$

e

$$\hat{h} = e \cdot \begin{bmatrix} 0 & h \end{bmatrix}^T \quad \dots (5.31)$$

e, agora, compondo a matriz $\hat{G}$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ H & G \end{bmatrix} \quad \dots (5.32)$$

e, finalmente, substituindo (5.31) e (5.32) em (5.24), obtém-se uma família de métodos SI de segunda espécie, calcados em métodos estacionários de grau dois, com parâmetros ótimos.

Cumpre lembrar que a condição (5.28) é necessária para garantir os parâmetros ótimos do método de grau dois, básico. G_1 é a matriz de iteração do método do primeiro grau, que deu origem ao método de grau dois.

Há também vários tipos de métodos de grau dois com parâmetros otimizados. Assim, torna-se necessário particularizar mais ainda a pesquisa para a obtenção de um método específico.

5.3 - UM MÉTODO SEMI-ITERATIVO DE SEGUNDA ESPÉCIE, RELATIVO AO MÉTODO DE JACOBI

O método a propor (método JII-SI) é um caso particular da família de métodos (5.24), na qual se põe $G_1 = B$ e $h = D^{-1}b$. Substituindo-se tais valores em (5.30) e (5.31), obtém-se a fórmula do método JII-SI para sistemas lineares quaisquer.

Seja, agora, A , matriz com Propriedade A_p , satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3, ou seja, possui submatrizes diagonais não singulares e a p -ésima potência dos autovalores da matriz de Jacobi associada são reais, não-negativos, com $0 \leq \bar{\mu} = S(B) < 1$.

A fórmula do método JII-SI para sistemas lineares, cuja matriz satisfaça as condições acima, é dada por

$$\begin{aligned} \hat{v}^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+1}}{2 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})} \{ [2\hat{B} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})I] \hat{v}^{(n)} + 2\hat{h} \} + \\ + (1 - \rho_{n+1}) \hat{v}^{(n-1)} \quad \dots (5.33) \end{aligned}$$

onde

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (1 - \hat{\omega})I & G \end{bmatrix} \quad \dots (5.34)$$

$$\hat{h} = e \cdot \begin{bmatrix} 0 & D^{-1}b \end{bmatrix}^T, \quad \dots (5.35)$$

e, de acordo com (5.30)

$$G = (1 - e + d) I + e B \quad \dots (5.36)$$

Se, contudo, a matriz A tiver a Propriedade A, então, em particular, de (3.37)

$$\alpha = -\beta, \quad \dots (5.37)$$

$$\hat{\omega} = \omega_b = 2/[1 + (1-\bar{\mu}^2)^{1/2}] , \quad \dots (5.38)$$

$$d = \omega_b - 1$$

e

$$e = \omega_b \quad \dots (5.39)$$

A fórmula (5.33) simplifica-se e fica

$$\hat{v}^{(n+1)} = \rho_{n+1} [\hat{B} \hat{v}^{(n)} + \hat{h}] + (1-\rho_{n+1}) \hat{v}^{(n-1)} \quad (5.40)$$

De fato, calculando $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ por (3.23) a (3.25), vem

$$\hat{p}(\mu) = \frac{\omega_b (2\mu - (\alpha + \beta))}{2 - (\alpha + \beta)} = \omega_b \mu$$

$$\Delta(\mu) = (\omega_b \mu)^2 - 4(\omega_b - 1) \quad \dots (5.41)$$

De (5.41) vê-se que $\Delta(\bar{\mu}) = 0$ e $\Delta(\mu) < 0 \quad \forall \quad \mu \neq \bar{\mu}$.

Como se deseja $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ reais, vale

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \hat{\mu}(\alpha) = -\frac{\omega_b \bar{\mu}}{2} \\ \hat{\beta} &= \hat{\mu}(\beta) = \frac{\omega_b \bar{\mu}}{2} \end{aligned} \quad \dots (5.43)$$

Além disso, pode-se verificar que

$$- \hat{\alpha} = |\hat{\mu}| = \hat{\beta} < 1 \quad \dots (5.44)$$

e a condição (5.23) é satisfeita.

Por outro lado, de (5.26)

$$z = 1/\hat{\beta} \quad \dots (5.45)$$

É lícito, portanto, enunciar o seguinte corolário do Teorema 5.1.

Corolário 1 - Seja A matriz com Propriedade A, satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3. Então o método JII-SI é dado por (5.40), onde

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (1-\omega_b)I & \omega_b B \end{bmatrix} \quad \dots (5.46)$$

$$\hat{h} = \omega_b \begin{bmatrix} 0 & D^{-1}_b \end{bmatrix}^T \quad \dots (5.47)$$

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 2/(2-\hat{\beta}^2), \quad \rho_{n+1} = \left(1 - \frac{\hat{\beta}^2}{4} \rho_n\right)^{-1} \quad \dots (5.48)$$

5.4 - CONVERGÊNCIA DO MÉTODO SI DE SEGUNDA ESPÉCIE

Procura-se, no momento, estabelecer as condições suficientes de convergência do método SI de segunda espécie, em geral, e, em particular, do método JII-SI, quando este for aplicado a sistemas lineares com matriz que possua a Propriedade A_p .

Sejam μ e $\hat{\mu}$ os autovalores, respectivamente das matrizes G_1 e $\hat{G}$.

a) Os autovalores $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$

Seja $\hat{\mu}$ tal que

$$\hat{\alpha} \leq \hat{\mu} \leq \hat{\beta} < 1 \quad \dots (5.49)$$

Assim,

$$z = \frac{2 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}} > 1$$

Donde

$$S(P_1(\hat{G})) = [T_1(z)]^{-1} < 1$$

e o método será convergente.

Definindo, agora,

$$\hat{\sigma} = 1/z \quad \dots (5.50)$$

$$\hat{\tau} = \hat{\sigma} / [1 + (1 - \hat{\sigma}^2)^{1/2}] \quad \dots (5.51)$$

e efetuando os mesmos cálculos dos Lemas 4.1, 4.2 e Teorema 4.6, vale

$$\bar{S}(P_n(\hat{G})) = \frac{2 \hat{\tau}^n}{1 + \hat{\tau}^{2n}} \quad \dots (5.52)$$

$$\bar{R}'_n(P_n(\hat{G})) = -\frac{1}{n} \ln \frac{2 \hat{\tau}^n}{1 + \hat{\tau}^{2n}} \quad \dots (5.53)$$

$$\bar{R}'(P_n(\hat{G})) = -\ln \hat{\tau} \quad \dots (5.54)$$

$$\frac{\bar{R}'_n(P_n(\hat{G}))}{[\bar{R}'_1(P_1(\hat{G}))]^{1/2}} \sim 2^{1/2}, \text{ n grande e } \hat{\sigma} \rightarrow 1^- \quad (5.55)$$

Os resultados acima referem-se ao método SI de segunda espécie, em geral, porém lembrando que se está considerando o caso em que a matriz $\hat{G}$ possui autovalores reais. É evidente, que no caso particular do método JII-SI, os resultados acima prevalecem trocando-se $\hat{G}$ por $\hat{B}$.

Agora, a intenção é mostrar um tipo de aplicação, contendo uma classe de problemas, para a qual os autovalores $\hat{\mu}$ de $\hat{B}$ são reais e, portanto, os resultados obtidos acima se aplicam.

Seja a matriz A , do sistema linear (2.1), com a propriedade de que a sua matriz associada B , relativa ao método de Jacobi do primeiro grau, tem autovalores μ tais que

$$\mu_1 = (1-n) a = \alpha \quad \dots (5.56)$$

$$\mu_j = a = \beta; j = 2, 3, \dots, n \quad \dots (5.57)$$

sendo a uma constante dada tal que

$$a < 1 \quad \dots (5.58)$$

e n é a ordem da matriz B .

Matrizes do tipo enfocado acima têm sido objeto de interesse de alguns pesquisadores; vide, por exemplo, Linhares [8] e Young [15], pág. 111 e 360.

Lema 1 - Seja $\hat{B}$ matriz dada por (5.34), associada à matriz B , cujos autovalores são dados por (5.56) e (5.57). Os autovalores $\hat{\mu}$, de $\hat{B}$, são reais e satisfazem:

$$\hat{\alpha} \leq \hat{\mu} \leq \hat{\beta} < 1 \quad \dots (5.59)$$

Prova: Calculando $\hat{\mu}$ por (3.23) a (3.25),

$$\hat{p}(\mu) = \frac{\hat{\omega}(2\mu - (\alpha + \beta))}{2 - (\alpha + \beta)} = \frac{\hat{\omega}[2\mu - a(2-n)]}{2 - a(2-n)}$$

$$\therefore \hat{p}(\alpha) = \hat{p}[(1-n)a] \quad \rightarrow$$

$$\hat{p}(\alpha) = - \frac{\hat{\omega} a n}{2 - a(2-n)} \quad \dots (5.60)$$

$$\hat{p}(\beta) = \hat{p}(a) = \frac{\hat{\omega} a n}{2 - a(2-n)}$$

$$\therefore \hat{p}(\beta) = - \hat{p}(\alpha) \quad \dots (5.61)$$

Por outro lado como

$$\bar{\sigma} = \frac{\beta - \alpha}{2 - (\alpha + \beta)} = \frac{n a}{2 - a(2 - n)} \quad \dots (5.62)$$

(5.60) e (5.62) implicam

$$\hat{p}(\alpha) = - \hat{\omega} \bar{\sigma}$$

De (3.25),

$$\Delta(\mu) = [\hat{p}(\mu)]^2 - 4(\hat{\omega} - 1) \quad \dots (5.63)$$

Mas de (3.21), vale

$$(\hat{\omega} \bar{\sigma})^2 = 4(\hat{\omega} - 1) \quad \dots (5.64)$$

e daí,

$$\Delta(\alpha) = \Delta(\beta) = 0$$

Portanto,

$$\hat{\alpha} = - \hat{\omega} \bar{\sigma} / 2, \quad \hat{\beta} = -\hat{\alpha} \quad \dots (5.65)$$

Como $\mu_j = \beta$, $j = 2, \dots, n$, tem-se

$$\hat{\alpha} < \hat{\mu} = \hat{\beta} \quad \dots (5.66)$$

Agora, $\bar{\sigma} < 1$ acarreta $1 < \hat{\omega} < 2$ por (3.21), donde $\hat{\beta} < 1$ seguindo a tese. cqd.

Corolário 2 - Seja $a < 1$. Os métodos JII e JII-SI convergem, para sistemas lineares, cuja matriz B associada possui autovalores μ satisfazendo

$$\mu_1 = (1-n)a$$

$$\mu_j = a \quad j = 2, \dots, n$$

Prova: Visto que $1 < \hat{\omega} < 2$, tem-se

$$S(\hat{B}) = (\hat{\omega}-1)^{1/2} < 1 \quad \dots (5.67)$$

De outro lado $\hat{z} = \hat{\beta}^{-1} > 1 \rightarrow$

$$\bar{S}(P_1(\hat{B})) = [T_1(\hat{z})]^{-1} < 1 \quad \dots (5.68)$$

cqd.

Entretanto, interessa-se, no momento, pela análise do caso em que algum, pelo menos, dos autovalores $\hat{\mu}$ seja com plexo.

b) Algum $\hat{\mu} \in \mathbb{C}$

Seja $\hat{\mu}$ tal que

$$\hat{\alpha} \leq |\hat{\mu}| \leq \hat{\beta} \quad \dots (5.69)$$

e

$$\gamma = \frac{2\hat{\mu} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}} = a + b_i \quad \dots (5.70)$$

Do corolário 4.1, deriva como corolário, o seguinte

Teorema 2 - O método SI de segunda espécie converge, se a e b de (5.70) satisfizerem

$$a^2 + b^2 < z^2 \quad \dots (5.71)$$

O Teorema acima especifica as condições de convergência, em geral. Analisa-se, agora, o caso em que a matriz A possua a Propriedade A_p .

Lema 2 - Seja A, matriz CO_p , com submatrizes diagonais não singulares e sejam os autovalores da p-ésima potência da matriz por blocos de Jacobi associada, reais, não-negativos, com $0 \leq \bar{\mu} = S(B) < 1$. Seja $\hat{B}$ a matriz dada por (5.4), relativa a A.

Os autovalores $\hat{\mu}$ de $\hat{B}$ têm módulos iguais valendo

$$|\hat{\mu}| = (\hat{\omega}-1)^{1/2} \quad \dots (5.72)$$

Prova: Conforme (3.21) e (3.22)

$$\hat{\omega} = 2/(1+(1-\bar{\sigma}^2)^{1/2}) \quad \dots (5.73)$$

onde

$$\bar{\sigma} = \frac{\beta - \alpha}{2-(\alpha+\beta)} \quad \dots (5.74)$$

De (5.70),

$$\hat{\omega} + \hat{\omega} (1-\bar{\sigma}^2)^{1/2} = 2$$

$$\hat{\omega} - 2 = -\hat{\omega} (1-\bar{\sigma}^2)^{1/2}$$

$$\hat{\omega}^2 - 4\hat{\omega} + 4 = \hat{\omega}^2 (1-\bar{\sigma}^2)$$

$$\therefore (\hat{\omega} \bar{\sigma})^2 - 4(\hat{\omega}-1) = 0 \quad \dots (5.75)$$

Cálculo de $|\hat{\mu}|$:

a) Seja $\mu = \bar{\mu} = \beta$

Conforme (3.23) a (3.25), vem

$$\hat{p}(\bar{\mu}) = \frac{\hat{\omega}(\beta-\alpha)}{2-(\beta+\alpha)} = \hat{\omega} \bar{\sigma} \quad \dots (5.76)$$

De (5.76), (5.75) e (3.25), vale

$$\Delta(\bar{\mu}) = (\hat{\omega} \bar{\sigma})^2 - 4(\hat{\omega}-1) = 0 \quad \dots (5.77)$$

$$\therefore \hat{\omega} \bar{\sigma} = 2(\hat{\omega}-1)^{1/2} \quad \dots (5.78)$$

e

$$|\hat{\mu}(\bar{\mu})| = \left| \frac{\hat{p}(\bar{\mu})}{2} \right| = (\hat{\omega}-1)^{1/2} \quad \dots (5.79)$$

b) $\mu \neq \bar{\mu} \rightarrow |\mu| \leq |\bar{\mu}| \quad \dots (5.80)$

$$\hat{p}(\mu) = \frac{\hat{\omega}(2\mu-(\alpha+\beta))}{2-(\alpha+\beta)} = \frac{\hat{\omega}(2\mu-\eta)}{2-\eta}$$

onde $\eta = \alpha + \beta$.

Como $\hat{p}'(\mu) = \frac{2\hat{\omega}}{2-\eta} > 0 \rightarrow \hat{p}(\mu)$ é crescente.

Portanto, lembrando (5.80), vem

$$\hat{p}(\mu) < \hat{p}(\bar{\mu}) = \hat{\omega} \bar{\sigma}$$

$$\therefore \Delta(\mu) = [\hat{p}(\mu)]^2 - 4(\hat{\omega}-1) < \Delta(\bar{\mu}) = 0$$

Agora,

$$\hat{\mu}(\mu) = \frac{\hat{p}(\mu) \pm \sqrt{\Delta(\mu)}}{2}$$

$$= \frac{\hat{p}(\mu) \pm i |\Delta(\mu)|^{1/2}}{2}$$

$$|\hat{\mu}(\mu)| = \frac{\{[\hat{p}(\mu)]^2 + |\Delta(\mu)|\}^{1/2}}{2}$$

onde $|\Delta(\mu)| = 4(\hat{\omega}-1) - ([\hat{p}(\mu)]^2)$

Logo $|\hat{\mu}(\mu)| = \frac{\{[\hat{p}(\mu)]^2 + 4(\hat{\omega}-1) - [\hat{p}(\mu)]^2\}^{1/2}}{2}$

$$\rightarrow |\hat{\mu}(\mu)| = (\hat{\omega} - 1)^{1/2}$$

c.q.d

Resulta como corolário do Teorema 5.2, o seguinte

Teorema 3 - Seja $\underline{A}$, matriz do sistema linear (2.1), com Propriedade A_p , bem como satisfazendo as condições do Teorema 2.3.

Então, o método JII-SI converge, se o parâmetro z satisfizer

$$z > 1 \quad \dots (5.81)$$

Prova: Imediata, pois

$$\hat{\mu} = (\hat{\omega}-1)^{1/2} \exp(i\theta\pi) \quad \dots (5.82)$$

Calculando γ por

$$\gamma = z \hat{\mu} \quad \dots (5.83)$$

vem

$$\gamma = z(\hat{\omega}-1)^{1/2} \exp(i\theta\pi)$$

Como $a = z(\hat{\omega}-1)^{1/2} \cos(\theta\pi)$ e $b = z(\hat{\omega}-1)^{1/2} \sin(\theta\pi)$,
do Teorema 5.3, vem

$$z^2(\hat{\omega}-1) < z^2$$

e z fica indeterminado.

Por outro lado, visto que $|\gamma(\hat{\beta})| = 1$ e impondo

$$S(P_1(\hat{B})) = z^{-1} < 1 \quad \dots (5.84)$$

segue a tese.

cqd.

5.5 - COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS JII e JII-SI

Passa-se, em seguida, à comparação dos métodos JII e JII-SI, através da análise dos respectivos raios espectrais. Deve-se frisar que, embora a comparação pelos raios espectrais constitua um critério aproximado, para esse fim, é um dos meios mais usuais de que se servem os pesquisadores, e tem apresentado resultados satisfatórios para muitos casos.

5.5.1 - Comparação pela análise do raio espectral

A comparação a ser feita vale para duas classes de problemas, isto é, para sistemas lineares, cuja matriz possua a Propriedade A_p e satisfaça as condições do Teorema 2.3, ou, para sistemas cuja matriz do método de Jacobi, associada, seja do tipo visto no parágrafo 5.4, pág. V-12.

Analisa-se, em primeiro lugar, esse segundo tipo. Neste caso, conforme se viu, os autovalores $\hat{\mu}$ de $\hat{B}$, matriz do método JII, tem autovalores reais.

Lema 3 - Sejam os autovalores $\hat{\mu}$ da matriz $\hat{B}$ do método JII, obtidos a partir dos autovalores μ da matriz B do método de Jacobi do primeiro grau. Estes últimos sendo dados por

$$\mu_1 = (1-n)a = \alpha \quad \dots (5.85)$$

$$\mu_j = a = \beta \quad ; \quad j = 2, 3, \dots, n \quad \dots (5.86)$$

onde $a < 1$ e $\underline{n}$, a ordem do sistema linear.

Então, vale

$$a) \quad S(P_1(\hat{B})) = S(\hat{B}) \quad \dots (5.87)$$

$$b) \quad \frac{\bar{R}'_n(P_n(\hat{B}))}{[R(\hat{B})]^{1/2}} \sim 2^{1/2} \quad \dots (5.88)$$

Prova:

a) Sabe-se que

$$z = \frac{2 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}}$$

Lembrando que $\hat{\beta} = -\hat{\alpha}$, vem

$$z = 1/\hat{\beta} \quad \dots (5.89)$$

De (5.64) e (5.65)

$$\hat{\beta} = (\hat{\omega} - 1)^{1/2} \quad \dots (5.90)$$

Mas,

$$S(P_1(\hat{B})) = \max_{\gamma} \left| \frac{T_1(\gamma)}{T_1(z)} \right| = z^{-1}$$

$$\therefore S(P_1(\hat{B})) = \hat{\beta} = (\hat{\omega} - 1)^{1/2} = S(\hat{B}) \quad \dots (5.91)$$

b) De (5.55) e (5.91).

$$\frac{\bar{R}'_n(P_n(\hat{B}))}{[\bar{R}'_1(P_1(\hat{B}))]^{1/2}} = \frac{\bar{R}'_n(P_n(\hat{B}))}{[R(\hat{B}))]^{1/2}} \sim 2^{1/2} \quad \text{cqd.}$$

Do Lema 5.3, vê-se que o método JII-SI deve acelerar a convergência do processo iterativo, definido pelo método do JII, no presente caso.

A seguir, procede-se à análise comparativa para a classe de problemas, cuja matriz tenha a Propriedade A_p .

Lema 4 - Seja $\hat{G}$ matriz de iteração do método JII. Sejam os autovalores $\hat{\mu}$, de $\hat{G}$, $\in C$. Seja γ dado por

$$\gamma = \frac{2\hat{\mu} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}} \quad \dots (5.92)$$

e seja

$$z = \frac{2 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})}{\hat{\beta} - \hat{\alpha}} \quad \dots (5.93)$$

O raio espectral assintótico de $P_n(\hat{G})$ é

$$\rho(P_n(\hat{G})) = \max_{\gamma} \frac{|\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}|}{|z + (z^2 - 1)^{1/2}|} \quad \dots (5.94)$$

Prova: Conforme (4.91), põem-se

$$\gamma = x + iy = \cosh(u + iv) \quad \dots (5.95)$$

onde

$$x = \cosh u \cos v \quad \dots (5.96)$$

$$y = \sinh u \sin v \quad \dots (5.97)$$

Seja $u > 0$. Seja $z = \cosh t$, $t > u$ .... (5.98)

Por definição, v. (2.25), vem

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(P_n(\hat{G})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_n(P_n(\hat{G}))$$

$$= \lim \left\{ \max_{\gamma} \left| \frac{T_n(\gamma)}{T_n(z)} \right| \right\}^{1/n}$$

$$\therefore \mathcal{J} = \max_u (e^u / e^t) \quad \dots (5.99)$$

De (5.95),

$$u = \operatorname{Re} (\cosh^{-1} \gamma)$$

$$= \operatorname{Re} (\ln (\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2})) \quad \dots (5.100)$$

Pondo $\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2} = \rho \exp(i\theta\pi)$, vale

$$\ln (\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}) = \ln \rho + \ln [\exp(i\theta\pi)]$$

$$\therefore \operatorname{Re} \ln (\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}) = \ln \rho \quad \dots (5.101)$$

Por (5.98), (5.99) e (5.101), vem

$$\mathcal{J}(P_n(\hat{G})) = \max_{\rho} \{ \rho / [z + (z^2 - 1)^{1/2}] \} \quad \dots (5.102)$$

$$= \max_{\gamma} \frac{|\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}|}{z + (z^2 - 1)^{1/2}} \quad \dots (5.103)$$

Lema 5 - Seja ...

$$\gamma = k \exp(i\theta\pi) \quad \dots (5.104)$$

Então

$$\max_{\theta} \{\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}\} = k + (k^2 + 1)^{1/2} \quad \dots (5.105)$$

Prova:

$$\gamma^2 - 1 = k^2 \exp(i2\theta\pi) - 1$$

$$= k^2 \cos^2(2\theta\pi) - 1 + i k^2 \sin^2(2\theta\pi)$$

$$\therefore |\gamma^2 - 1| = [(k^2 \cos^2(2\theta\pi) - 1)^2 + k^4 \sin^2(2\theta\pi)]^{1/2}$$

$$= [k^4 - 2k^2 \cos(2\theta\pi) + 1]^{1/2} \quad \dots (5.106)$$

Pondo

$$\gamma^2 - 1 = a + bi = r \exp(i\alpha) \quad \dots (5.107)$$

$$a = k^2 \cos^2(2\theta\pi) - 1, \quad b = k^2 \sin^2(2\theta\pi)$$

e

$$r = |\gamma^2 - 1| \quad \dots (5.108)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{k^2 \sin^2(2\theta\pi)}{k^2 \cos^2(2\theta\pi) - 1} \right] \quad \dots (5.109)$$

O objetivo será, agora, encontrar α que maximiza $|\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}|$.

Como $(\gamma^2 - 1)^{1/2} = r^{1/2} \exp(i \alpha/2)$, resulta

$$\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2} = k \exp(i\theta\pi) + r^{1/2} \exp(i \alpha/2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2} \right| &= \left| k \cos(\theta\pi) + r^{1/2} \cos(\alpha/2) + i [k \sin(\theta\pi) + \right. \\ &\quad \left. + r^{1/2} \sin(\alpha/2)] \right| \\ &= \left[(k \cos(\theta\pi) + r^{1/2} \cos(\alpha/2))^2 + (k \sin(\theta\pi) + \right. \\ &\quad \left. + r^{1/2} \sin(\alpha/2))^2 \right]^{1/2} \\ &= \{ k^2 + r + 2kr^{1/2} [\cos(\theta\pi - \alpha/2)] \}^{1/2} \quad \dots (5.110) \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2} \right|_{\max} = [k^2 + r + 2kr^{1/2}]^{1/2} = k + r^{1/2} \quad (5.111)$$

Tal máximo ocorre quando

$$\alpha = 2 \theta \pi \quad \dots (5.112)$$

Observa-se, além disso que, fazendo $\theta = \frac{1}{2}$, tem-se $\alpha = \pi$, valor que maximiza simultaneamente (5.106) e (5.110). Por outro lado é fácil ver que tal valor de α é solução de (5.109).

Substituindo-se $\theta = 1/2$ em (5.106), tem-se

$$r = k^2 + 1 \quad \dots (5.113)$$

Agora, (5.111) e (5.113) implicam a tese.

cqd.

Corolário 3 - Valendo as hipóteses do Lema 5.5, então

$$\lambda(P_n(\hat{G})) \leq \frac{k+(k^2+1)^{1/2}}{z+(z^2-1)^{1/2}} \quad \dots (5.114)$$

Prova: Do Lema 5.4 e da hipótese,

$$\lambda(P_n(\hat{G})) = \max_{\gamma} \frac{|\gamma+(\gamma^2+1)^{1/2}|}{z+(z^2-1)^{1/2}} \quad \dots (5.115)$$

onde $\gamma \in S_{\hat{G}}$, o conjunto dos autovalores de $P_n(\hat{G})$, tal que $\gamma = k \exp(i\theta\pi)$.

$$\text{Como } \max_{\gamma \in S_{\hat{G}}} |\gamma+(\gamma^2+1)^{1/2}| \leq \max_{\gamma} |\gamma+(\gamma^2+1)|^{1/2} = k+(k^2+1)^{1/2},$$

pelo Lema 5.5.

A desigualdade acima e (5.115) acarretam a tese.

cqd.

É oportuno lembrar que o valor de γ que maximiza (5.110) é calculado por

$$\gamma = k \exp(i\theta\pi)$$

onde $\theta = 1/2$. Neste caso, γ vale

$$\gamma = k i \quad \dots (5.116)$$

Daí, se γ , dado por (5.116), for autovalor de $P_n(\hat{G})$, então, neste caso vale,

$$\rho(P_n(\hat{G})) = \frac{k+(k^2+1)^{1/2}}{z+(z^2-1)^{1/2}} \quad \dots (5.117)$$

Portanto, (5.117) corresponde à pior situação para o raio espectral assintótico. Noutro caso, quando $\gamma = k$ i não for autovalor de $P_n(\hat{G})$, então ocorrerá a desigualdade estrita em (5.114). Para efeito de comparação vai-se supor válida a fórmula (5.117).

Corolário 4 - Seja $\hat{B}$ a matriz de iteração do método JII. Seja γ autovalor de $P_n(\hat{B})$ tal que

$$\gamma = z(\hat{\omega}-1)^{1/2} \exp(i\theta) \quad \dots (5.118)$$

e seja

$$\delta = 1/z \quad \dots (5.119)$$

Então,

$$\rho(P_n(\hat{B})) \leq \frac{(\hat{\omega}-1)^{1/2} + (\hat{\omega}-1+\delta^2)^{1/2}}{1 + (1-\delta^2)^{1/2}} \quad \dots (5.120)$$

Prova:

$$|\gamma| = z(\hat{\omega}-1)^{1/2} = k, \quad \text{e de (5.114)}$$

$$\begin{aligned} \rho(P_n(\hat{B})) &= \frac{z(\hat{\omega}-1)^{1/2} + [z^2(\hat{\omega}-1)+1]^{1/2}}{z + (z^2-1)^{1/2}} \\ &\leq \frac{(\hat{\omega}-1)^{1/2} + [(\hat{\omega}-1)+\delta^2]^{1/2}}{1 + (1-\delta^2)^{1/2}} \quad \text{cqd.} \end{aligned}$$

Teorema 3 - Seja $\hat{B}$ matriz de iteração do método JII e seja $\gamma = z(\hat{\omega}-1)^{1/2}$ i autovalor de $P_n(\hat{B})$, matriz associada ao método do SI de segunda espécie. Tem-se

$$\mathcal{J}(P_n(\hat{B})) \geq S(\hat{B}) \quad \dots (5.121)$$

Prova: Por hipótese, (5.114) fica

$$\mathcal{J}(P_n(\hat{B})) = \frac{(\hat{\omega}-1)^{1/2} + (\hat{\omega}-1+\delta^2)^{1/2}}{1 + (1-\delta^2)^{1/2}} \quad \dots (5.122)$$

onde $\delta = 1/z$. Portanto, $\delta \in (0,1)$.

Seja a notação

$$\phi(\delta) = \mathcal{J}(P_n(\hat{B})) \quad \dots (5.123)$$

É fácil ver que $\phi(\delta)$ é crescente e contínua em $(0,1)$:

Pondo

$$D(\delta) = 1 + (1-\delta^2)^{1/2} \quad \dots (5.124)$$

vale

$$\phi'(\delta) = \frac{\delta[(\hat{\omega}-1+\delta^2)^{-1/2} [1+(1-\delta^2)^{1/2}] + \delta(1-\delta^2)^{-1/2} [(\hat{\omega}-1)^{1/2} + (\hat{\omega}-1+\delta^2)^{1/2}]}{D^2(\delta)}$$

$$\phi'(\delta) = \frac{\delta\{ \hat{\omega} + (1-\delta^2)^{1/2} + [(\hat{\omega}-1+\delta^2)(\hat{\omega}-1)]^{1/2} \}}{(1-\delta^2)^{1/2} [\hat{\omega}-1+\delta^2]^{1/2} D^2(\delta)}$$

Levando em conta que $\hat{\omega} > 1$, $\delta \in (0,1)$, acarreta $\phi'(\delta) > 0$. Logo, $\phi(\delta)$ é crescente.

Por outro lado, de (5.122) e (5.123),

$$\phi(1) = \hat{\omega}^{1/2} + (\hat{\omega}-1)^{1/2} > s(\hat{B}) \quad \dots (5.125)$$

e

$$\phi(0) = (\hat{\omega}-1)^{1/2} = s(\hat{B}) \quad \dots (5.126)$$

Tem-se a tese.

cqd.

O Teorema 5.3 mostra que o método SI de segunda es pécie pode não acelerar a convergência do processo iterativo definido pelo método básico, no caso, o método de Jacobi do se segundo grau, quando a matriz de iteração desse método pos suir autovalores complexos.

5.5.2 - Comparação quanto aos resultados computacionais

Uma comparação prática dos métodos JII e JII-SI foi feita, aplicando-os, efetivamente, a um problema-teste. Esco lheu-se como problema-teste o sistema linear resultante da discretização do clássico problema de Dirichlet.

Conforme Young [15], a matriz do sistema linear aci ma possui a Propriedade A. Mais particularmente, a matriz se rá CO_2 e satisfaz as condições do Teorema 2.3, se se adotar um dos seguintes critérios de enumeração dos nós da malha:

a) Ordenação Natural

Um ponto (x_0+ih, y_0+jk) precede o ponto $(x_0+i'h, y_0+j'k)$, se $j < j'$ ou, se $j = j'$ e $i < i'$.

b) Ordenação tipo "vermelho-preto"

Todos os pontos (x_0+ih, y_0+jk) com a soma $i+j$ par (pontos vermelhos) ocorrem antes dos pontos com soma $i+j$ ímpar (pontos "pretos").

c) Ordenação por diagonais

Um ponto (x_0+ih, y_0+jk) precede o ponto $(x_0+i'h, y_0+j'h)$, se $i+j < i'+j'$.

Conforme se viu, no Capítulo III, o método JII converge para o caso de sistemas lineares com matrizes CO_2 , e, no parágrafo anterior, provou-se que o método JII-SI também converge para o mesmo caso, desde que o parâmetro z seja bem escolhido.

Seja o problema de Dirichlet discretizado

$$\Delta_h u = f(x_i, y_j) \quad \dots (5.127)$$

$$u/AB = 1, \quad u/BC = u/CD = u/AD = 0 \quad \dots (5.128)$$

onde ABCD é um quadrado Q com lado unitário, isto é, $\overline{AB} = 1$.

Escrevendo (5.127) para todos os nós da malha construída sobre o quadrado Q , usando-se um dos critérios de enu

meraçoão atrás descritos, obtêm-se o sistema linear com matriz CO_2 .

$$A u = b \quad \dots (5.129)$$

Conforme Young [15], o raio espectral, $S(B)$, da matriz do método iterativo de Jacobi, associada à matriz A , é dado por

$$S(B) = \cos \frac{\pi}{N} = \bar{\mu} \quad \dots (5.130)$$

onde N é o número de passos da malha tomados sobre o eixo dos x .

Programados os métodos JII e JII-SI, obtiveram-se os resultados comparativos constantes das tabelas 1 a 4 das páginas A-1 e A-2, adiante.

As tabelas 1 e 2 contêm os resultados referentes a (5.127) homogêneo (Problema de Laplace), com precisões 10^{-5} e 10^{-6} , para ambos os métodos.

Nas tabelas 3 e 4 estão os resultados, com as mesmas precisões, para o caso de o problema (5.127) ser não homogêneo (Problema de Poisson)

Usou-se o critério da ordenação natural dos nós da malha para composição da matriz do sistema linear resultante,

Pelo Teorema 5.3, era esperado um intervalo, para o parâmetro z , não limitado à direita, contendo valores muito grandes que tal parâmetro poderia tomar. Além disso, quanto

maior o valor de z tanto melhor deveria ser a velocidade de convergência.

Contudo, na prática, tal não ocorreu, o que pode ser explicado, em parte, pela análise do gráfico das funções $S(\hat{B}) = (\hat{\omega}-1)^{1/2}$, função constante, e $\psi(z) = \phi(1/\delta)$, sendo $\phi(\delta)$ dada por (5.123).

Para valores pequenos de z , $\psi(z)$ se afasta significativamente de $S(\hat{B})$, enquanto que para $z \geq 10$, $\psi(z)$ já se encontra bastante próxima de $S(\hat{B})$.

Por exemplo, para $z = 10$ e $\hat{\omega} = 1,56$, tem-se $\psi(z) - S(\hat{B}) < 0,01$, conforme gráfico à página A-3.

Daí, infere-se ser razoável a existência de convergência boa para z próximo de 10, neste caso.

Tentando justificar, agora, a convergência pior, conquanto ligeiramente, quanto z cresce muito, é necessário levar em conta o fato de que o raio espectral não é o único e absoluto critério para a análise empreendida.

O critério do raio espectral baseia-se no princípio de que a contribuição máxima para o erro do método iterativo é dada pelo auto-vetor associado ao autovalor de módulo máximo, ignorando a contribuição dos autovetores associados aos demais autovalores.

Ora, ocorre que os autovalores associados à matriz $\hat{B}$ do método JII, conforme Lema 5.2 têm, todos eles, módulos iguais, enquanto a matriz $P_n(\hat{B})$ tem autovalores de módulos distintos. Por conseguinte, a contribuição para o erro do método JII será, efetivamente, a que é dada pelo raio espectral, ao passo que no caso do método JII-SI tal não acontece, o que

pode provocar um comportamento efetivo aproximado do previsto pela análise espectral.

Além disso, deve-se também lembrar que o raio espectral não coincide, para esse caso, com a norma espectral da matriz da iteração, pois a matriz é não-normal, constituindo, portanto, uma aproximação da sua norma, e o critério de análise através da norma poderia conduzir a resultado diferente.

CAPÍTULO VI

PROGRAMAÇÃO DOS MÉTODOS JII E JII-SI

Descrevem-se, neste capítulo, as características computacionais dos métodos JII e JII-SI.

6.1 - MÉTODO JII

Conforme se viu, no capítulo III, este método possui um parâmetro fixo $\hat{\omega}$, o qual é dado por (3.21), em geral, ou por (3.39), para o caso particular, em que a matriz B é CO_2 .

O cálculo de $\hat{\omega}$ depende de α e β , que são limitações dos autovalores μ de B. No caso de muitos problemas da Física-Matemática, essas limitações são conhecidas "a priori", o que ocorre com o problema-teste (5.129).

Além disso, o parâmetro $\hat{\omega}$ será ótimo se valer

$$\alpha \leq \mu \leq \beta < 1 \quad \dots (6.1)$$

Por ser o método JII estacionário, com fórmula bastante simples, para a aplicação enfocada, é muito fácil de ser programado.

Sendo método de grau dois, o que envolve duas aproximações simultâneas da solução, requer o armazenamento de, pelo menos, dois vetores-aproximações na memória rápida do computador eletrônico digital. Esse fato não pesa na economia de memória. A matriz B, contudo, pode requisitar bastante memória,

no caso de sistemas de grande porte, para aplicações quaisquer. Todavia, na maioria das aplicações de ciências e engenharia, a matriz B é esparsa. Por conseguinte, o usuário tem a facilidade de utilizar rotinas, em geral disponíveis nos centros de processamento de dados, para tratamento desse caso, o que traz considerável economia de memória, se for necessário.

6.2 - MÉTODO JII-SI

De início, possui as mesmas características de todo método semi-iterativo, isto é, possui parâmetros variáveis; depende de limitações dos autovalores da respectiva matriz de iteração e pretende ser mais eficiente que o método básico que lhe deu origem, no caso, o método JII.

A sua fórmula é mais complicada no caso geral, vide (5.24), e parecida com a fórmula do método JII, vide (5.40), para a aplicação a sistemas com matriz CO_2 .

Analogamente ao método JII, este método requer, pelo menos, dois vetores-aproximações armazenados na memória rápida do computador.

Quanto à economia de memória no armazenamento da matriz $\hat{B}$, aplica-se a mesma sugestão acima descrita, para o método anterior, quando couber.

6.3 - CONCLUSÕES

O presente trabalho mostrou a possibilidade de se criarem métodos semi-iterativos com respeito a métodos de grau

dois, com possibilidade de serem convergentes para alguma classe de problemas.

Confirmando o resultado de pesquisas levadas a efeito por outros pesquisadores, com outros métodos, em situações similares, caso a matriz do método básico apresente algum autovvalor complexo, o método SI de segunda espécie pode não acelerar a convergência do método básico referido. Entretanto, se os autovalores citados forem todos reais, pode-se obter melhoria da convergência.

Viu-se no capítulo V, pág. V-12, um exemplo que se enquadra nessa situação. É oportuno observar que não só o método JII-SI acelera a convergência, para esse caso, bem como torna-se um método competitivo para tal aplicação, visto que, nesse caso, o método SOR e outros conhecidos, geralmente situados entre os de melhor desempenho, perdem em eficiência. Uma matriz dessa classe é definida positiva, se $0 \leq a < 1$. Além disso, tal matriz não possui a Propriedade A e não é uma matriz-L. Conforme Young [15], nesse caso o método SOR é inferior ao método J-SI, método semi-iterativo de Jacobi, de primeira espécie, para o qual vale $S(P_1(\mu)) = \beta^{-1} = S(\hat{B})$, ou seja, o método J-SI e o método JII são equivalentes. Por outro lado, o método JII-SI é superior ao método JII e, assim, vale a conclusão de que é competitivo em tal caso.

A P Ê N D I C E

TABELAS PARA COMPARAÇÃO EFETIVA DOS MÉTODOS JII E JII-SI

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
N	Ordem do sistema linear (5.129)
I ₁	Número de operações requeridas pelo método JII-SI, quando z pertencer ao intervalo INT(Z ₁)
I ₂	Idem, quando z pertencer ao intervalo INT(Z ₂)
I	Número de iterações requeridas pelo método JII.

OBS.: (*) Os extremos de intervalo marcados com (*), nas tabelas 1 a 4, podem ser diferentes dos registrados, visto que os cálculos para z fora desses extremos não foram realizados. Os valores de I₂ são os números máximos de iterações, isto é, correspondem à pior situação para a convergência.

A - PROBLEMA DE LAPLACE

A.1 - Precisão: 10⁻⁵

TABELA 1

N	I ₁	I ₂	I	INT(Z ₁)	INT(Z ₂)
9	14	15	14	[2.9 ; 8.9]	[2.9 ; 9.5(*)]
16	18	19	18	[3.1 ; 9.5(*)]	[2.7 ; 9.5(*)]
49	29	30	29	[3.9 ; 4.7]	[3.7 ; 9.5(*)]
100	40	41	40	[4.7 ; 9.5(*)]	[3.5 ; 9.5(*)]

A.2 - Precisão: 10^{-6} TABELA 2

N	I ₁	I ₂	I	INT(Z ₁)	INT(Z ₂)
9	17	18	17	[3.3 ; 9.5(*)]	[2.7 ; 9.5(*)]
16	22	24	22	[3.1 ; 9.5(*)]	[2.9 ; 9.5(*)]
49	36	37	35	[4.1 ; 9.5(*)]	[3.9 ; 9.5(*)]
100	48	50	48	[5.7 ; 9.5(*)]	[3.9 ; 9.5(*)]

B - PROBLEMA DE POISSON

B.1 - Precisão: 10^{-5} TABELA 3

N	I ₁	I ₂	I	INT(Z _L)	INT(Z ₂)
9	14	15	14	[2.9 ; 4.1]	[2.9 ; 9.5(*)]
16	19	20	20	[2.7 ; 3.7]	[2.3 ; 9.5(*)]
49	34	35	35	[2.5 ; 4.7]	[2.5 ; 9.5(*)]
100	48	49	50	[(*)3.2 ; 3.2]	[(*)3.2 ; 5.2]

B.2 - Precisão: 10^{-6} TABELA 4

N	I ₁	I ₂	I	INT(Z ₁)	INT(Z ₂)
9	17	18	17	[3.3 ; 5.9]	[2.7 ; 9.5(*)]
16	22	23	23	[2.9 ; 3.5]	[2.9 ; 5.7]
49	39	42	42	[3.1 ; 3.7]	[2.5 ; 9.5(*)]
100	56	57	58	[(*)3.2 ; 3.6]	[(*)3.2 ; 4.6]

$\lambda \psi$

Gráfico 1

Legenda } $\psi(\hat{\beta}) : \circ$
              } $S(\hat{\beta}) : \times$

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BLAIR, A. et alli - A study of a numerical solution of a two dimensional hydrodinamical problem. MATH.TABLES AIDS COMPUT; 13: 145-184, 1959.
- [2] - CLAYTON, A.J. - Further results on polynomials having least maximum modules over an ellipse in the complex plane. UKAEA. MEMORANDUM - AEEW - M.348, 1963.
- [3] - FLANDERS, D. & SHORTLEY, G. - Numerical determination of fundamental modes. J. APPL. PHYS., 21: 1326-1332, 1950.
- [4] - FRANK, W. - Solution of linear systems by Richardson's method. J. ASSOC. COMPUT. MACH., 7 : 274-286, 1960.
- [5] - FRANKEL, S.P. - Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. MATH. TABLES AIDS COMPUT, 4 : 65-75, 1950.
- [6] - GOLUB, G.B. & VARGA, R.S. - Chebyshev semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods. NUMER. MATH. PARTS I AND II, 3 : 147-168, 1961.
- [7] - LANCZOS, C. - Solution of systems of linear equations by minimized iterations. J. RES. NAT. BUR. OF STANDARDS, 49 : 33-53, 1952.
- [8] - LINHARES, O.L. - Classes de matrizes quadradas para teste de algoritmos computacionais. ATAS DO V CONGRESSO NACIONAL DA SBMAC, 1982.

- [9] - OSTROWSKI, A.M. - Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press, New-York and London, 1973.
- [10] - SHELDON, J.W. - On the spectral norms of several iterative processes. J. ASSOC. COMPUT. MACH., 6 : 494-505, 1959.
- [11] - SHORTLEY, G. - Use of Tchebysheff polynomial operators in the numerical solution of boundary value problems. J. APPL. PHYS., 24 : 392-396, 1953.
- [12] - TEE, G.J. - Eigenvectors of the successive overrelaxation process, and its combination with Chebyshev semi-iteration. COMPUT. J., 6 : 250-263, 1963.
- [13] - VARGA, R.S. - Matrix iterative analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [14] - WRIGLEY, E.E. - On accelerating the Jacobi method for solving simultaneous equations by Chebyshev extrapolation when the eigenvalues of the iteration matrix are complex. THE COMPUT. JOURNAL, 6 : 169-176, 1963.
- [15] - YOUNG, D.M. - Iterative solution for large linear systems. Academic Press, New York and London, 1971.
- [16] - YOUNG, D.M. & KINCAID, D.R. - Norms of the successive overrelaxation method and related methods. REPORT TNN-94, COMPUTATION CENTER, UNIV. TEXAS, AUSTIN, TEXAS, 1969.
- [17] - YOUNG, D.M. & HAGEMAN, L.A. - Applied iterative methods. Academic Press, New York, and London, 1981.