ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

INTERSECÇÃO DE FUNÇÕES E TRANSVERSALIDADE

Alice Kimie Miwa Libardi

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

INTERSECÇÃO DE FUNÇÕES E TRANSVERSALIDADE

Alice Kimie Miwa Libardi

Orientador: Prof. Dr. Carlos Biasi

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Car
los, da Universidade de São Pau
lo, para obtenção do título de
Doutor em Ciências (Matemática).

São Carlos - SP

1985

Ao Prof. Dr.

Gilberto F. Loibel

Minha admiração ao brilhante Matemático e meus
agradecimentos ao amigo e orientador Prof. Dr. Carlos Biasi.

Agradeço:

ao Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher, pelo in
centivo constante, pelas sugestões e críticas construtivas
durante todo o desenrolar das atividades que culminaram com
o presente trabalho, bem como pela leitura criteriosa do
mesmo.

ao Prof. Dr. Janey Antonio Daccach, que inicial-
mente me orientou no programa de doutoramento, pelo carinho
com que sempre se dedicou a mim;

aos colegas do ICM-USP e da UFSCar, em particu-
lar aos professores: Dr. Claudio Martins Mendes, Dirceu Pen-
teado e Edson de Oliveira.

ao querido Walter e à minha filhinha Sara, por
estarem sempre ao meu lado.

à amiga Neube Elisabeth D.Guillen Stabili, pela
datilografia.

Abstract

In this work a geometric interpretation of the obstructions to the extension of functions obtained from intersection of functions, is given.

Let M^m and N^n be smooth closed manifolds and let $V \subset M$ and $K \subset N$ be closed submanifolds of same codimension.

One of our goals is to give a necessary and sufficient condition for the existence of a smooth map $f: M \rightarrow N$, transversal to K , such that $V = f^{-1}(K)$.

In Chapter I we obtain conditions for the non existence of the map f .

In Chapter III we find some results that guarantee the existence of such a map. For example: if $V^{m-2} \subset M^m$ is an oriented submanifold homologous to zero in an oriented manifold M , then there exists $f: M \rightarrow S^n$ such that $f \pitchfork S^{n-2}$ and $V^{m-2} = f^{-1}(S^{n-2})$.

ÍNDICE

Introdução	i
Capítulo 0	
Preliminares	
§1 - Aplicações diferenciáveis e transversalidade	1
§2 - Bordismo.....	3
§3 - Obstrução	7
Capítulo I	
Sobre intersecção de funções	
§1 - Definição	11
§2 - Relações entre os números de Whitney das Aplicações f, g e h	15
§3 - Caracterização de $J_{p,n-p}$, usando números de Whitney de f	18
§4 - Estudos sobre o núcleo e a imagem de I_g^m	23
Capítulo II	
Sobre Teoria de Obstrução	
§1 - Sobre classificação de classes de homotopias de funções	35
§2 - Sobre extensões de funções	42
Capítulo III	
Extensão de funções com condições de transversalidade pré-estabelecidas	
§1 - Condição para a existência de extensão local	49
§2 - Obstruções à extensão local	51

§3 - Casos Particulares	57
§4 - Exemplos	64
Apêndice	71
Bibliografia	75

INTRODUÇÃO

Um dos mais importantes problemas da Topologia é o que se refere à extensão de aplicações. O problema enunciado abaixo se enquadra neste contexto.

Sejam M^m e N^n variedades fechadas diferenciáveis de dimensão m e n , respectivamente; considere $V^{m+k-n} \subset M^m$ e $K^k \subset N^n$ subvariedades fechadas de mesma codimensão e $f_V: V \rightarrow K$ uma aplicação diferenciável. Em que condições existe $f: M \rightarrow N$ diferenciável, extensão de f_V com f transversal a K e $V = f^{-1}(K)$?

Em [S], Saab, M.R. tratou dos casos:

1) M variedade compacta, $N = S^n$, $K = \{a_0\}$. Neste caso, existe f se, e só se, o fibrado normal de V em M é trivial.

2) $M = S^3$, $N = S^2$, $K = \{a_0, a_1\}$ e V constituída de duas partes V_0 e V_1 , cada uma das quais sendo reunião de um número finito de curvas regulares fechadas. Nessas condições, a função f sempre existe e a prova deste fato foi obtida através da operação denominada operação desvio.

Em [L]₁, Loibel, G.F. obteve condições necessárias para a existência de f , no caso em que M e N são variedades fechadas, $K = \{a_0, a_1\}$ e V é a união de duas subva -

riedades fechadas disjuntas V_0 e V_1 de dimensão $m-n$.

No Capítulo I, do nosso trabalho, obtivemos algumas condições em que se garante a não existência de f .

Assumimos que $f_V^*(v_k) = v_V$, onde v_V e v_k são os respectivos fibrados normais de V em M e K em N . Nesse caso, existe extensão local de f_V , definida numa vizinhança tubular de V em M e com valores numa vizinhança tubular de K em N , satisfazendo as condições pré-estabelecidas.

Seja $h_1: A \rightarrow \partial Y$ a restrição desta extensão aos bordos de tais vizinhanças; um dos propósitos de nosso trabalho é obter obstruções à extensão de $h: A \rightarrow Y$ ao espaço $X = M - V$, bem como interpretar geometricamente tais obstruções.

Este trabalho é composto de quatro capítulos e um apêndice.

No Capítulo 0, estão condensados os conceitos básicos e alguns resultados que são utilizados nos capítulos posteriores.

O Capítulo I é dedicado ao estudo da aplicação $I_g^m: \bigcap_m(N) \rightarrow \bigcap_{m+k-n}(N)$, obtida fixando $g: K \rightarrow N$ e definindo $I_g^m([M, f]) = [V, h]$, onde $[V, h]$ é a intersecção das funções f e g .

Considere $\{J_{p,q}\}$ a filtração usual de $\bigcap_m(N)$; damos uma caracterização de $J_{p,q}$ em termos de números de Whitney e, a seguir, estudamos condições para que

$\ker I_g^m = J_{p,q}$, para algum p, q .

Seja μ_K classe fundamental de K e $g_*(\mu_K) = \mu_g$; denotando por U_g , o Poincaré dual de μ_g , mostramos que I_g^m é sobre se $\bigcup U_g: H^{n-i}(N, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2n-k-i}(N, \mathbb{Z}_2)$ é epimorfismo para $n - k \leq i \leq m$.

No Capítulo II, encontram-se alguns resultados envolvendo classificação de classes de homotopias de funções e extensão de aplicações, que são usados no Capítulo III.

Tomamos X e Y , CW complexos, com Y n -simples e seja $J = \{n: H^n(X, \pi_n(Y)) \neq 0\}$. Para cada $n \geq 1$, consideramos um grupo abeliano G_n , um elemento $u_n \in H^n(Y, G_n)$ e definimos uma aplicação

$$\varphi_n^{u_n}: H^n(X, \pi_n(Y)) \rightarrow H^n(X, G_n), \text{ para todo } n.$$

Demonstramos que se $\varphi_n^{u_n}$ é monomorfismo, para todo n , então a aplicação $E: [X, Y] \rightarrow \prod_{n \in J} H^n(X, G_n)$ $E([f]) = f^*(u_n)$ é injetora. Demonstramos também que se $\varphi_{n+1}^{u_{n+1}}$ é mono e $f: X_n \rightarrow Y$ é uma extensão de $h: A \rightarrow Y$ então existe $g: X_{n+1} \rightarrow Y$ tal que $g|_{X_n} = f|_{X_n}$ se, e somente se, $\delta h^*(u) = 0$, onde $\delta: H^n(A, \pi_n(Y)) \rightarrow H^{n+1}(X, A, \pi_n(Y))$ é o operador cobordo.

No Capítulo III, obtemos uma interpretação geométrica das obstruções às extensões desejadas, com o intuito de resolver o problema enunciado no início desta intro-

dução.

Um dos resultados é o Teorema 3.1: seja $h_p: X_p \rightarrow Y$ extensão de $h: A \rightarrow Y$ ao p -ésimo esqueleto de X , mod. A. Suponhamos φ_{p+1}^u mono e que exista variedade orientada Q^{n-p-1} e aplicação contínua $g: Q \rightarrow \partial Y$, representando $\partial D_Y(u_p)$. Então existe $h_{p+1}: X_{p+1} \rightarrow Y$ tal que $h_{p+1}|_{X_{p-1}} = h_p|_{X_{p-1}}$ se, e somente se, $i_* \pi_{A*}(u_S^G) = 0$, onde $[S, h_1 \circ \pi_A] = I_g(h_1)$.

Com as mesmas hipóteses acima, se Q^{n-p-1} é uma subvariedade de ∂Y , então $h: A \rightarrow Y$ se estende a X_{p+1} se, e só se, $h_1^{-1}(Q)$ é homóloga a zero em $H_{m-p-1}(X, G)$, com $h_1 \cap Q$.

Considerando $S^{n-2} \subset S^n$; V^{m-2} uma variedade orientada, mergulhada em uma variedade orientada M^m , homóloga a zero em M e $f_V: V \rightarrow S^{n-2}$ uma aplicação diferenciável, provamos que existe extensão nas condições requeridas.

Apresentamos também duas aplicações dos resultados obtidos e um apêndice onde se encontra a demonstração do seguinte fato: Se M^m é sub-variedade orientada de uma variedade orientada N^{m+2} , homóloga a zero em N^{m+2} , então existe uma secção $r: M \rightarrow S(v_M)$, onde $S(v_M)$ é o fibrado normal em esferas de M em N , tal que sua imagem é homóloga a zero em $H_m(N-M)$.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Neste trabalho, consideraremos sempre variedades e aplicações diferenciáveis (de classe C^∞), salvo menção em contrário.

§1 - Aplicações Diferenciáveis e Transversalidade

Os resultados deste parágrafo são conhecidos em Topologia Diferencial. Para maiores detalhes, ver [H].

Definição:

Sejam M^m e N^n duas variedades, K uma subvariedade de N e $f: M \rightarrow N$ diferenciável.

Dizemos que f é transversal a K , $(f \pitchfork K)$ se para todo $x \in M$ com $f(x) \in K$, tivermos:

$$f'(x)T_x M + T_{f(x)} K = T_{f(x)} N.$$

Proposição 01:

Se M é compacta e K é uma subvariedade fechada de N , então existe uma aplicação diferenciável $g: M \rightarrow N$ homotópica a f e transversal a K . $\square$

Proposição 0.2:

Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua entre variedades diferenciáveis, sem bordo, com f diferenciável em um subconjunto fechado A de M . Seja $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ e seja N com a métrica determinada por um mergulho $N \subset \mathbb{R}^P$.

Então existe $g: M \rightarrow N$ diferenciável, tal que g é uma ε -aproximação de f e $g|_A = f|_A$. $\square$

Definição:

Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: K \rightarrow N$ duas aplicações diferenciáveis. Dizemos que f é transversal a g ($f \pitchfork g$) se para todo (x, y) em $M \times K$, tal que $f(x) = g(y)$, tivermos $T_{f(x)}N = f'(x)T_xM + g'(y)T_yK$, ou equivalentemente, se $(f \times g): M \times K \rightarrow N \times N$ for transversal à diagonal $\Delta \subset N \times N$.

Proposição 0.3:

Dadas uma aplicação diferenciável $g: K \rightarrow N$ e uma aplicação contínua $f: M \rightarrow N$, existe uma aplicação diferenciável $\tilde{f}: M \rightarrow N$, homotópica a f e transversal a g . $\square$

§2 - Bordismo

Os conceitos deste parágrafo encontram-se em [C].

Definição

Dizemos que uma variedade fechada M^m borda quando existe uma variedade compacta W^{m+1} , tal que M é bordo de W .

Definição

Duas variedades fechadas M_1^m e M_2^m são bordan-tes quando a reunião disjunta $M_1^m \cup M_2^m$ borda.

Isto define uma relação de equivalência no conjunto de todas as variedades fechadas e a classe de bordismo de M^m será denotada por $[M^m]$.

Seja $\mathcal{N}_m$ o conjunto de todas tais classes.

$\mathcal{N}_m$ tem estrutura de grupo abeliano, dada pela reunião disjunta, e a soma direta $\mathcal{N}_* = \sum \mathcal{N}_m$ tem estrutura de álgebra comutativa, graduada, sobre $\mathbb{Z}_2$, dada pelo produto cartesiano.

Definição:

Seja N um espaço. Uma variedade singular em N

é um par (M^m, f) constituído por uma variedade compacta M^m e uma aplicação contínua $f: M \rightarrow N$.

Definição

Dizemos que uma variedade singular (M^m, f) em N , borda se existem uma variedade compacta W^{m+1} e uma aplicação contínua $F: W \rightarrow N$, tais que M é bordo de W e $F|_M = f$.

Definição

Duas variedades singulares (M_1^m, f_1) e (M_2^m, f_2) em N , são bordantes se a reunião disjunta $(M_1^m \cup M_2^m, f_1 \cup f_2)$ borda em N .

Essa relação é de equivalência e a classe de bordismo não orientado de (M^m, f) por essa relação, será denotada por $[M^m, f]$; seja $\mathcal{V}_m(N)$ o conjunto de todas tais classes.

$\mathcal{V}_m(N)$ tem estrutura de grupo abeliano, dada pela reunião disjunta: $[M_1^m, f_1] + [M_2^m, f_2] = [M_1^m \cup M_2^m, f_1 \cup f_2]$. A soma direta $\mathcal{V}_*(N) = \sum \mathcal{V}_m(N)$ tem estrutura de $\mathcal{V}_*$ -módulo graduado.

As definições deste parágrafo podem ser adaptadas para o caso orientado e o grupo de bordismo orientado será denotado por $\Omega_m(N)$.

Thom mostrou que para cada CW complexo N , o homomorfismo $\mu : \bigcap_m (N) \rightarrow H_m(N, \mathbb{Z}_2)$ definido por $\mu([M^m, f]) = f_*(\mu_M)$, onde μ_M é a classe fundamental de M^m , é um epimorfismo.

Para todo CW complexo N , existe uma sequência espectral de bordismo não orientado $\{E_{p,q}^r, d^r\}$ com $E_{p,q}^2 = H_p(N, \bigcap_q)$ e cujo E^∞ -termo é associado a uma filtração de $\bigcap_*(N)$.

No capítulo I, vamos dar uma caracterização dos elementos dessa filtração, usando números de Whitney de uma aplicação.

Como estamos considerando o caso não orientado, temos $H_p(N, \bigcap_q) \cong H_p(N, \mathbb{Z}_2) \otimes \bigcap_q$ e a sequência espectral de bordismo é trivial.

Teorema 0.4 :

Para todo CW finito N ,

$\varphi : H_*(N, \mathbb{Z}_2) \otimes \bigcap_* \rightarrow \bigcap_*(N)$, definido por

$\varphi(C_{n,i} \otimes 1) = [M_i^n, f_i]$ é um isomorfismo de $\bigcap_*$ -módulos; aqui, $\{C_{n,i}\}$ é uma base aditiva de $H_n(N, \mathbb{Z}_2)$ e $C_{n,i} = \mu([M_i^n, f_i])$. $\square$

Vamos exibir o isomorfismo, no caso $N = S^n$.

Proposição 0.5 :

A aplicação $\varphi : \eta_p(S^n) \rightarrow \eta_p \oplus \eta_{p-n}$ definida por $\varphi([M^p, f]) = [M^p] \oplus [f^{-1}(y_0)]$, onde y_0 é um valor regular de $f: M \rightarrow S^n$, é um isomorfismo, para $p \geq n$.

Prova

Basta mostrar que φ é sobre.

Dado $[M'^p] \oplus [K^{p-n}]$ em $\eta_p \oplus \eta_{p-n}$, seja $\pi_2: K \times S^n \rightarrow S^n$, a segunda projeção e tomemos y_0 como valor regular. Então $\pi_2^{-1}(y_0)$ é uma subvariedade difeomorfa a K .

Consideramos $M = M' \cup (K \times S^n)$ e seja $f: M \rightarrow S^n$, definida por $f(x) = \text{cte}$, se $x \in M'$ e $f(k, s) = \pi_2(k, s)$, se $(k, s) \in K \times S^n$.

Então $\varphi([M, f]) = [M] \oplus [f^{-1}(y_0)] =$
 $= [M'] \oplus [\pi_2^{-1}(y_0)] = [M'] \oplus [K]$ uma vez que $[K \times S^n] = 0$. $\square$

Teorema 0.6 :

Seja $\psi: X \rightarrow Y$ uma aplicação entre CW complexos finitos. Uma condição necessária e suficiente para que $[M^n, f] \in \eta_n(Y)$ esteja na imagem de $\psi_*: \eta_n(X) \rightarrow \eta_n(Y)$ é

que todo número de Whitney de $[M^n, f]$ associado a um elemento do núcleo de $\psi^*: H^*(Y, Z_2) \rightarrow H^*(X, Z_2)$, seja nulo. $\square$

§3 - Obstrução

Para maiores detalhes sobre este parágrafo, ver $[L]_2$ ou $[Wh]$.

Definição

Um espaço Y é n -simples se for conexo por caminhos e tal que para todo y_1, y_2 de Y e c_1, c_2 , curvas ligando y_1 a y_2 , os isomorfismos,

$$c_1^* \text{ e } c_2^* : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_2) \text{ coincidem.}$$

Nesse caso, uma aplicação $f: S^n \rightarrow Y$ determina um único elemento de $\pi_n(Y, y_0)$, $\forall y_0 \in Y$.

Se $n = 1$, $\pi_n(Y)$ é abeliano.

Sejam (X, A) um CW complexo relativo e Y p -simples.

Suponhamos que $h: A \rightarrow Y$ possa ser estendida a uma aplicação $h_p: X_p \rightarrow Y$, onde $X_p = X^{(p)} \cup A$.

Seja E_α^{p+1} uma $(p+1)$ -célula de (X, A) com aplicação característica:

$$f_{\alpha}: (\Delta^{p+1}, \dot{\Delta}^{p+1}) \rightarrow (X_{p+1}, X_p)$$

Então $h_p \circ f_{\alpha} | \dot{\Delta}^{p+1} : \dot{\Delta}^{p+1} \rightarrow Y$ representa um elemento c_{α} de $\pi_p(Y)$.

Seja $\{e_{\alpha}\}$ uma base do grupo de cadeias $\Gamma_{p+1}(X, A)$.

A cocadeia $c^{p+1}(h_p) \in \Gamma^{p+1}(X, A, \pi_p(Y))$ é definida por $c^{p+1}(h_p)(e_{\alpha}) = c_{\alpha} = [h_p \circ f_{\alpha}]$.

Definição:

$c^{p+1}(h_p)$ é chamada cocadeia de obstrução à extensão de h_p a X_{p+1} .

Teorema 0.7

Se $h_p : X_p \rightarrow Y$ é uma extensão de h sobre X_p então h_p se estende sobre X_{p+1} se, e somente se, $c^{p+1}(h_p) = 0$. $\square$

Suponhamos que Y seja $(p-1)$ conexo. Então existe uma extensão $h_p : X_p \rightarrow Y$ de $h : A \rightarrow Y$.

Se $g_0, g_1 : X_p \rightarrow Y$ são extensões de h , então $g_0|_{X_{p-1}} \sim g_1|_{X_{p-1}} \text{ (rel } A) \text{ e } c^{p+1}(g_0) \sim c^{p+1}(g_1)$.

Segue que existe uma classe de cohomologia, univocamente definida, $o^{p+1}(h) \in H^{p+1}(X, A, \pi_p(Y))$.

Ela é a classe de cohomologia de $c^{p+1}(h_p)$, para qualquer extensão $h_p : X_p \rightarrow Y$.

Definição

A classe $\mathcal{O}^{p+1}(h) \in H^{p+1}(X, A, \pi_p(Y))$ é chamada a obstrução primária para estender h .

Definição

Seja Y $(p-1)$ -conexo. Um elemento $i_p(Y) \in H^p(Y, \pi_p(Y))$ é chamado p -característico se, através do isomorfismo $H^p(Y, \pi_p(Y)) \cong \text{Hom}(H_p(Y), \pi_p(Y))$, for correspondente a um isomorfismo de $H_p(Y)$ em $\pi_p(Y)$.

Eventualmente, consideraremos o elemento p -característico correspondente ao inverso do homomorfismo de Hurewicz, $\mathcal{H} : \pi_p(Y) \rightarrow H_p(Y)$.

Consideremos a composta:

$$H^p(Y, \pi_p(Y)) \xrightarrow{h^*} H^p(A, \pi_p(Y)) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X, A, \pi_p(Y))$$

Teorema 0.8

A obstrução primária $\mathcal{O}^{p+1}(h)$ para estender h é dada por $\mathcal{O}^{p+1}(h) = (-1)^p \delta h^*(i_p(Y))$. $\square$

Consideremos o CW complexo relativo $(\hat{X}, \hat{A}) = I \times (X, A)$
com $\hat{X}_n = I \times X_{n-1} \cup \dot{I} \times X_n$.

$F : \hat{X}_n \rightarrow Y$ consiste de um par de aplicações
 $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$ juntamente com uma homotopia $G : I \times X_{n-1} \rightarrow Y$
entre $f_0|_{X_{n-1}}$ e $f_1|_{X_{n-1}}$.

Definição

A cocadeia diferença de (f_0, f_1) com relação a
 G é definida como a cocadeia $d^n = d^n(f_0, G, f_1) = d(F) \in$
 $\Gamma^n(X, A, \pi_n(Y))$ tal que $d^n F(c) = (-1)^n c^{n+1}(F)(i \times c)$, para
todo $c \in \Gamma_n(X, A)$.

Aqui i é a 1-célula de I com $\partial i = \{1\} - \{0\}$

Quando $f_0|_{X_{n-1}} = f_1|_{X_{n-1}}$ e a homotopia G é
estacionária, teremos $d^n(f_0, G, f_1) = d^n(f_0, f_1)$.

CAPÍTULO I

SOBRE INTERSECÇÃO DE FUNÇÕES

Neste capítulo, consideraremos a multiplicação em $\eta_*(N)$, correspondente à intersecção de duas funções $f: M \rightarrow N$ e $g: K \rightarrow N$. Embora essa definição se encontre na literatura, iremos apresentá-la aqui.

A menos de dualidade, a multiplicação que será definida em $\eta_*(N)$, corresponde à multiplicação no anel de cobordismo $\eta^*(N)$, cuja estrutura foi estudada por Quillen, [Q].

A partir dessa multiplicação definiremos uma aplicação $I_g^m: \eta_m(N) \rightarrow \eta_{m+k-n}(N)$, com $g: K \rightarrow N$, fixada e estudaremos seu núcleo e sua imagem.

§1 - Definição

Sejam $f: M^m \rightarrow N^n$ e $g: K^k \rightarrow N^n$ aplicações diferenciáveis entre variedades fechadas e diferenciáveis. Consideremos a aplicação $\psi: M \times K \rightarrow N \times N$, diferenciável, homotópica a $f \times g$ e transversal à diagonal Δ e seja V a subvariedade de $M \times K$, definida como a imagem inversa da diagonal Δ , pela ψ .

Denotando por $i: V \rightarrow M \times K$, a inclusão e

$\pi: N \times N \rightarrow N$, uma das projeções, seja $h: V \rightarrow N$, a aplicação $h = \pi \circ \psi \circ i$. Ela é homotópica a $f \circ \pi_M$ e $g \circ \pi_K$, onde $\pi_M = \pi_1 \circ i$ e $\pi_K = \pi_2 \circ i$, com π_1 e π_2 , respectivamente, primeira e segunda projeções de $M \times K$.

Definimos a aplicação:

$$I_{m,k} : \bigcap_m (N) \times \bigcap_k (N) \rightarrow \bigcap_{m+k-n} (N) \text{ por}$$

$I_{m,k}([M,f],[K,g]) = [V,h]$, que é a classe de bordismo do par (V,h) acima.

A classe $[V,h]$ é a intersecção das funções f e g .

Obs.1: Na realidade, é possível obter ψ da forma $f' \times g$, com f' homotópica a f e transversal a g . (*Proposição 0.3*)

A prova de que $I_{m,k}$ está bem definida, decorre do seguinte lema:

Lema 1.1:

Seja Q uma subvariedade de N^n e sejam $f_i: M_i^m \rightarrow N^n$, $i = 1, 2$, aplicações diferenciáveis e transversais a Q . Se (M_1, f_1) e (M_2, f_2) são bordantes, então $(f_1^{-1}(Q), f_{10}j_1)$ e $(f_2^{-1}(Q), f_{20}j_2)$ também o são, onde

$j_i : f_i^{-1}(Q) \rightarrow M_i^m$, $i = 1, 2$ são inclusões.

Prova:

Seja $(\bar{W}, \bar{F})$ o bordismo entre (M_1, f_1) e (M_2, f_2) . Tomemos $\tilde{F}$ uma aplicação homotópica a $\bar{F}$ e transversal a Q . A variedade $W = \tilde{F}^{-1}(Q)$ e a aplicação $F: W \rightarrow N$, definida por $F = \tilde{F}|_W$ realizam o bordismo desejado. $\square$

A aplicação $I_{m,k}$ é bilinear e induz uma multiplicação em $\bigcap_*(N)$, que juntamente com a adição dada pela reunião disjunta, tornam $\bigcap_*(N)$ um anel comutativo, que é também uma $\bigcap_*$ - álgebra.

É possível definir uma multiplicação em $\Omega_*(N)$, correspondente à intersecção de funções. No Capítulo III, a parecerão alguns casos em que ela será usada.

Consideremos o homomorfismo de Thom,

$$\begin{aligned} \mu: \bigcap_*(N) &\rightarrow H_*(N, \mathbb{Z}_2), \text{ definido por } \mu([M, f]) = \\ &= f_*(\mu_M), \text{ onde } M^m \text{ é uma variedade fechada e} \end{aligned}$$

$$\mu_M \in H_m(M, \mathbb{Z}_2), \text{ sua classe fundamental, que é um}$$

homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ -módulos.

Sejam U_f, U_g, U_h, U_V^M e U_V^K , as classes duais de $f_*(\mu_M)$; $g_*(\mu_K)$, $h_*(\mu_V)$, $(\pi_M)_*(\mu_V)$ e $(\pi_K)_*(\mu_V)$, respectivamente.

Com essas notações, valem as igualdades:

$$f^*(U_g) = U_V^M \quad \text{e} \quad g^*(U_f) = U_V^K \quad (*)$$

Por definição, $D(U_f \cup U_g)$ é a intersecção das classes de homologia $f_*(\mu_M)$ e $g_*(\mu_K)$, denotada por $f_*(\mu_M) \cdot g_*(\mu_K)$, onde D é a dualidade de Poincaré.

Seja $\alpha \in H^n(N, \mathbb{Z}_2)$ uma classe qualquer.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, h_*(\mu_V) \rangle &= \langle \pi_M^* f^*(\alpha), \mu_V \rangle = \langle f^*(\alpha), U_V^M \cap \mu_M \rangle = \\ &= \langle f^*(\alpha \cup U_g), \mu_M \rangle = \langle \alpha \cup U_g, U_f \cap \mu_N \rangle = \\ &= \langle \alpha, (U_f \cup U_g) \cap \mu_N \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Então } h_*(\mu_V) = f_*(\mu_M) \cdot g_*(\mu_K)$$

A estrutura de anel de $H_*(N, \mathbb{Z}_2)$ é isomorfa à de $H^*(N, \mathbb{Z}_2)$, via dualidade de Poincaré e o homomorfismo de Thom satisfaz:

$$\begin{aligned} \mu(I_{m,k}([M,f], [K,g])) &= \mu([V,h]) = h_*(\mu_V) = \\ &= \mu([M,f]) \cdot \mu([K,g]) \end{aligned}$$

sendo, portanto, um homomorfismo de anéis.

Obs.2: Sejam M, K e N variedades orientadas, G um anel com unidade cujo grupo subjacente é finitamente gerado e μ_K^G , a classe fundamental de K sobre G . Denotemos por $U_g^G = D(g_*(\mu_K^G))$; $U_f^G = D(f_*(\mu_M^G))$; $U_V^M = D(\pi_M)_*(\mu_V^G)$ e $U_V^K = D(\pi_K)_*(\mu_V^G)$, onde $[V, h] = I_{m,k}([M, f], [K, g])$.

Com estas notações, temos: $f^*(U_g^G) = U_V^M$ e $g^*(U_f^G) = U_V^K$.

§2 - Relações entre os números de Whitney das aplicações f, g e h .

Seja M^m uma variedade fechada e denotemos por $1, w_1, \dots, w_m$ as classes de Stiefel Whitney de M e por $w(M)$, a classe total.

Para toda partição $i_1 + i_2 + \dots + i_k = m$, o número $\langle w_{i_1} \dots w_{i_k}, \mu_M \rangle \in \mathbb{Z}_2$ está definido e é chamado número de Stiefel Whitney de M .

Consideremos o par (M^m, f) , constituído por uma variedade fechada M e uma aplicação contínua $f: M^m \rightarrow N^n$. Seja $\alpha \in H^i(N, \mathbb{Z}_2)$ uma classe de cohomologia. Para toda partição $i_1 + \dots + i_k = m - i$, o número $\langle w_{i_1} \dots w_{i_k} \cdot f^*(\alpha), \mu_M \rangle \in \mathbb{Z}_2$ está definido e é chamado o número de Whitney da aplicação f .

Consideremos os fibrados tangentes a M, K e N e

os respectivos fibrados induzidos pelas aplicações

$$\pi_M : V \rightarrow M; \pi_K : V \rightarrow K \text{ e } h : V \rightarrow N.$$

Obs.3: Os fibrados $\tau V \oplus h^*(\tau N)$ e $\pi_M^*(\tau M) \oplus \pi_K^*(\tau K)$ sobre V são equivalentes e então $w(V).h^*(w(N)) = \pi_M^*(w(M)) \cdot \pi_K^*(w(K))$.

Proposição 1.2:

Se $g^*(w_i(N)) = w_i(K)$, $0 \leq i \leq m + k - n$, então os números de Whitney da aplicação $f: M \rightarrow N$ determinamos números de Whitney da aplicação $h: V \rightarrow N$.

Prova:

Seja $\alpha \in H^\ell(N, \mathbb{Z}_2)$ uma classe qualquer e seja I uma partição de $m + k - n - \ell$.

Da observação 3, segue que $w_i(V) = \pi_M^*(w_i(M))$, $0 \leq i \leq m + k - n$, desde que $g^*(w_i(N)) = w_i(K)$, $0 \leq i \leq m + k - n$.

$$\begin{aligned} \text{Então } \langle w_I(V).h^*(\alpha), \mu_V \rangle &= \langle \pi_M^*(w_I(M)).\pi_M^* f^*(\alpha), \mu_V \rangle = \\ &= \langle w_I(M).f^*(\alpha), U_V^M \cap \mu_M \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle w_I(M).f^*(\alpha), f^*(U_g) \cap \mu_M \rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle w_I(M).f^*(\alpha \cup U_g), \mu_M \rangle. \quad \square$$

Se $g^*(w_i(N)) = w_i(K)$ e $f^*(w_i(N)) = w_i(M)$,

$0 \leq i \leq m + k - n$, existe uma expressão para os números de Whitney de $h: V \rightarrow N$, envolvendo as aplicações $f: M \rightarrow N$ e $g: K \rightarrow N$, a saber:

$$\langle w_I(V) \cdot h^*(\alpha), \mu_V \rangle = \langle w_I(N) \cdot \alpha \cdot U_f \cdot U_g, \mu_N \rangle.$$

Consideremos a aplicação $\bar{f}: M^m \times K^k \rightarrow N^n$, definida por $\bar{f}(x, y) = f(x)$, onde $f: M^m \rightarrow N^n$.

Lema 1.3:

Seja $\alpha \in H^m(N, \mathbb{Z}_2)$ uma classe de cohomologia e seja $i_1 + \dots + i_r = k$ uma partição. Então

$$\langle w_{i_1} \dots w_{i_r} \cdot \bar{f}^*(\alpha), \mu_{M \times K} \rangle = \langle \alpha, \langle v_{i_1} \dots v_{i_r}, \mu_K \rangle^{f_*}(\mu_M) \rangle,$$

onde os w_i 's e v_i 's representam as classes de Stiefel-Whitney de $M \times K$ e de K , respectivamente.

Prova:

Qualquer classe de S.W. do produto $M \times K$ é da forma $w_i = 1 \otimes v_i +$ termos envolvendo classes de S.W. de M .

Além disso, $w_{i_1} \dots w_{i_r} \cdot \bar{f}^*(\alpha) = f^*(\alpha) \otimes v_{i_1} \dots v_{i_r} +$ termos da forma $A \cdot f^*(\alpha) \otimes B$, onde $\dim A \cdot f^*(\alpha) > m$ e $\dim B < k$, que ao serem avaliados em $\mu_{M \times K}$, dão zero. Por

$$\begin{aligned}
 &\text{tanto, } \langle w_{i_1} \dots w_{i_r} \cdot \bar{f}^*(\alpha), \mu_{M \times K} \rangle = \\
 &= \langle f^*(\alpha) \otimes v_{i_1} \dots v_{i_r}, \mu_{M \times K} \rangle = \langle \alpha, f_*(\mu_M) \rangle \cdot \langle v_{i_1} \dots v_{i_r}, \mu_K \rangle = \\
 &= \langle \alpha, \langle v_{i_1} \dots v_{i_r}, \mu_K \rangle \cdot f_*(\mu_M) \rangle. \quad \square
 \end{aligned}$$

§3 - Caracterização de $J_{p,n-p}$, usando números de Whitney de f .

Seja X um CW complexo finito e para cada n , seja $\{C_{n,i}\}$ uma base para $H_n(X, Z_2)$, como um espaço vetorial sobre Z_2 .

O homomorfismo de Thom $\mu: \eta_n(X) \rightarrow H_n(X, Z_2)$ é um epimorfismo, logo podemos escolher uma variedade singular $f_i: M_i^n \rightarrow X$, com $f_{i*}(\mu_{M_i}) = C_{n,i}$.

Definimos $\varphi: H_*(X, Z_2) \otimes \eta_* \rightarrow \eta_*(X)$ por

$$\varphi(C_{n,i} \otimes 1) = [M_i^n, f_i]$$

Teorema:

φ é um isomorfismo de η_* -módulos. [C]. $\square$

Denotemos por $\varphi_n: \sum_{j=0}^n H_j(X, Z_2) \otimes \eta_{n-j} \rightarrow \eta_n(X)$, o isomorfismo de Z_2 -módulos, no nível n e seja

$$(**) \quad \tilde{J}_{p,n-p} = \varphi_n \left(\sum_{j=0}^p H_j(X, Z_2) \otimes \eta_{n-j} \right).$$

Consideremos a filtração:

$$\bigcap_n(X) = J_{n,0} \supset J_{n-1,1} \supset \dots \supset J_{0,n} \supset 0, \text{ onde}$$

$$J_{p,n-p} = \text{im}\{i_*: \bigcap_n(X^{(p)}) \rightarrow \bigcap_n(X)\}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

A sequência espectral de bordismo não orientado, associada a esta filtração é tal que $E^2_{p,n-p} \cong \cong H_p(X, Z_2) \otimes \bigcap_{n-p} [C]$. Como ela é trivial,

$$E^2_{p,n-p} = E^\infty_{p,n-p} = \frac{J_{p,n-p}}{J_{p-1,n-p+1}}$$

Então $J_{p,n-p} = J_{p-1,n-p+1} \oplus S$, onde S é isomorfo a $H_p(X, Z_2) \otimes \bigcap_{n-p}$. Combinando este fato com a fórmula (**), obtemos $J_{p,n-p} = \tilde{J}_{p,n-p}$.

O Teorema a seguir dá uma caracterização de $J_{p,n-p}$.

Teorema 1.4:

$J_{p,n-p}$ é o conjunto formado pelas classes $[M^n, f] \in \bigcap_n(X)$, tais que para todo $\alpha \in H^j(X, Z_2)$ e partição I de $n-j$, com $j > p$, o número de Whitney correspondente $\langle w_I(M) \cdot f^*(\alpha), \mu_M \rangle$ é nulo.

Demonstração:

Um elemento de $J_{p,n-p}$ é representado por $[M^n, f]$ tal que $f(M) \subset X^{(p)}$, onde f é uma aplicação celular. Então para qualquer $\alpha \in H^j(X, Z_2)$, $j > p$, temos $f^*(\alpha) = 0$.

Reciprocamente, fixada uma estrutura celular de X , consideremos $\{c_{d,i}\}$ uma base para $H_*(X, Z_2)$. Para cada $c_{d,i}$, seja $[M_i^d, f_i]$ a classe tal que $f_{i*}(\mu_{M_i}^d) = c_{d,i}$ com f_i celular.

O conjunto $\{[M_i^d, f_i]\}$ constitui uma base para o $\bigvee_*(X) \cdot [C]$

Isto significa que um elemento β de $\bigvee_n(X)$ se escreve como $\beta = \sum_d [K_i^{d'} \times M_i^d, \bar{f}_i]$, onde $[K_i^{d'}] \in \bigvee_{d'}$, e $d' + d = n$. Suponhamos que β satisfaça a condição do teorema.

Observemos que se $d \leq p$, então $\bar{f}_i(K_i^{d'} \times M_i^d) = f_i(M_i^d) \subset X^{(p)}$, para todo i , o que acarreta que $\sum_{d \leq p} [K_i^{d'} \times M_i^d, \bar{f}_i]$ pertence a $J_{p,n-p}$. Basta provar, portanto, que $[K_i^{d'}] = 0$, para $d > p$.

Suponhamos $d' = 0$ e tomemos $\alpha \in H^n(X, Z_2)$ uma classe qualquer. O número de Whitney $\langle \bar{f}_i^*(\alpha), \mu_{M_i}^n \times K_i^0 \rangle + \sum_{p < d < n} \langle \bar{f}_i^*(\alpha), \mu_{M_i}^d \times K_i^{d'} \rangle = 0$, por hipótese, lembrando que

$\sum_{d \leq p} [K_i^{d'} \times M_i^d, \bar{f}_i]$ pertence a $J_{p,n-p}$.

$$\begin{aligned} & \text{Portanto: } \langle \alpha, (f_i)_* (\mu_{M_i^n}) \rangle \cdot \langle 1, \mu_{K_i^0} \rangle + \\ & + \sum_{p < d < n} \langle \alpha, (f_i)_* (\mu_{M_i^d}) \rangle \cdot \langle 1, \mu_{K_i^{d'}} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por razões dimensionais, a segunda parcela é nula, donde se conclui que $\langle \alpha, \langle 1, \mu_{K_i^0} \rangle \cdot (f_i)_* (\mu_{M_i^n}) \rangle = 0$ e, portanto, $[K_i^0] = 0$.

Suponhamos agora que $[K_i^{d'} \times M_i^d, \bar{f}_i] = 0$, para $p < r < d \leq n$ e tomemos $\alpha \in H^r(X, \mathbb{Z}_2)$ e seja $i_1 \leq \dots \leq i_s$, uma partição de $n - r$. Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{p < d < r} \langle w_{i_1} \dots w_{i_s} \cdot \bar{f}_i^*(\alpha), \mu_{M_i^d \times K_i^{d'}} \rangle + \\ & + \langle w_{i_1} \dots w_{i_s} \cdot \bar{f}_i^*(\alpha), \mu_{M_i^r \times K_i^{n-r}} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Usando o lema 1.3 e, novamente, por razões dimensionais a expressão acima torna-se a seguinte:

$$\langle \alpha, \langle v_{i_1} \dots v_{i_s}, \mu_{K_i^{n-r}} \rangle \cdot (f_i)_* (\mu_{M_i^r}) \rangle = 0$$

Como $\{[M_i^r, f_i]\}$ é uma base para $\bigcap_r(X)$, segue que $\langle v_{i_1} \dots v_{i_s}, \mu_{K_i^{n-r}} \rangle = 0$ e, portanto $[K_i^{n-r}] = 0$.

Esse procedimento nos fornece uma maneira indutiva de provar que $\sum_{p < d \leq n} [K_i^{d'} \times M_i^d, \bar{f}_i] = 0$. $\square$

Obs. 4: Este teorema também decorre do fato de

$H^j(X, Z_2) \xrightarrow{i^*} H^j(X^{(p)}, Z_2)$ ser isomorfismo para $j \leq p$, nula se $j > p$ e da proposição 0.6.

Teorema 1.5

O conjunto das classes de bordismo de aplicações diferenciáveis $f: M^m \rightarrow N^n$, entre variedades compactas tais que posto $f'(x) \leq p$, $\forall x$, está contido em $J_{p, m-p}$.

Prova:

Para toda classe $a \in H_{n-j}(N, Z_2)$ existe uma variedade singular (T^{n-j}, g) tal que $g_*([T^{n-j}]) = a$.

Pela proposição 0.3, existe uma aplicação diferenciável $g_1: T^{n-j} \rightarrow N$, homotópica a g e transversal a f e portanto, para todo par $(x, y) \in M \times T$, com $f(x) = g_1(y)$, temos $T_{g_1(y)}N = f'(x)T_xM + g'_1(y)T_yT$. Como posto $f'(x) \leq p$, $\forall x$, e usando a igualdade acima, segue que $n = \dim(f'(x)T_xM + g'_1(y)T_yT) \leq p + n - j$, o que é absurdo se $j > p$.

Concluimos então que $g(T^{n-j}) \subset N - f(M)$, para $j > p$ e, portanto $i_*: H_{n-j}(N - f(M), Z_2) \rightarrow H_{n-j}(N, Z_2)$ é sobre.

Consideremos os diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \check{H}^j(N, f(M), Z_2) & \xrightarrow{\ell^*} & \check{H}^j(N, Z_2) & \xrightarrow{k^*} & \check{H}^j(f(M), Z_2) & \rightarrow & \check{H}^{j+1}(N, f(M), Z_2) \\
 \downarrow D_{f(M)}^{-1} & \searrow \hookrightarrow & \downarrow D_N & \searrow \hookrightarrow & \downarrow D_{f(M)} & \searrow \hookrightarrow & \downarrow D_{f(M)}^{-1} \\
 H_{n-j}(N-f(M), Z_2) & \xrightarrow{i^*} & H_{n-j}(N, Z_2) & \rightarrow & H_{n-j}(N, N-f(M), Z_2) & \rightarrow & H_{n-j-1}(N-f(M), Z_2)
 \end{array}$$

onde as flechas verticais são dualidades de Poincaré ou Alexander.

A aplicação ℓ^* é, portanto, sobre para $j > p$ e $k^* = 0$. Consequentemente, $f^*: H^j(N, Z_2) \rightarrow H^j(M, Z_2)$ é nula para $j > p$, lembrando que a cohomologia de Čech, $\check{H}^j(X, Z_2)$ coincide com a usual $H^j(X, Z_2)$, no caso em que X é uma variedade. [G]. O resultado segue do Teorema 1.4. $\square$

§4 - Estudos sobre o núcleo e a imagem de I_g^m .

Fixemos $g: K^k \rightarrow N^n$ e consideremos a aplicação $I_g^m: \bigcap_m(N) \rightarrow \bigcap_{m+k-n}(N)$, definida por $I_g^m([M, f]) = I_{m,k}([M, f], [K, g])$; às vezes denotada simplesmente por $I_g(f)$.

Essa aplicação induz um homomorfismo de módulos, que será denotado por $I_g: \bigcap_*(N) \rightarrow \bigcap_*(N)$.

Obs.5: A aplicação $I_{m,k}: \bigcap_m(N) \times \bigcap_k(N) \rightarrow \bigcap_{m+k-n}(N)$ é tal que se $p + q < n$, então sua restrição:

$$I'_{m,k}: J_{p,m-p} \times J_{q,k-q} \rightarrow J_{p+q-n,m+k-(p+q)} \text{ é nula.}$$

Considerando-se então $I_g^m : \bigcap_m (N) \rightarrow \bigcap_{m+k-n} (N)$, temos que $J_{n-k-1, m-n+k+1}$ está contido no $\ker I_g^m$.

A igualdade nem sempre ocorre, como mostra o exemplo a seguir:

Seja $g: S^p \times S^1 \rightarrow S^{p+1} \times S^1$, um mergulho dado por $g = i \times \text{Id}_{S^1}$, onde $i: S^p \rightarrow S^{p+1}$ é a inclusão e $p \geq 2$.

Consideremos $I_g^{p+1}: \bigcap_{p+1} (S^{p+1} \times S^1) \rightarrow \bigcap_p (S^{p+1} \times S^1)$
 $I_g^{p+1}([S^{p+1}, f]) = [S^p, g \circ \pi_{S^p \times S^1}]$, que é nula em $\bigcap_p (S^{p+1} \times S^1)$,
 onde $f: S^{p+1} \times_p \rightarrow S^{p+1} \times S^1$ é a inclusão.

Porém, $[S^{p+1}, f]$ não está em $J_{0, p+1}$.

Proposição 1.6

Se $g^*(w_i(N)) = w_i(K)$ e $\bigcup U_g: H^i(N, Z_2) \rightarrow H^{i+n-k}(N, Z_2)$ é sobrejetora, para $0 \leq i \leq m+k-n$, então $\ker I_g^m = J_{n-k-1, m-n+k+1}$.

Prova

Seja $[M^m, f]$ tal que $I_g^m([M^m, f]) = [V, h] = 0$. Tomemos $\gamma \in H^j(N, Z_2)$, $j > n-k-1$, uma classe qualquer e uma partição I de $m-j$. Existe $\alpha \in H^{j-n+k}(N, Z_2)$ com $\alpha \cup U_g = \gamma$, visto que $\bigcup U_g$ é sobrejetora e para tal partição, $\langle w_I(M) \cdot f^*(\gamma), \mu_M \rangle = \langle w_I(M) \cdot f^*(\alpha \cup U_g), \mu_M \rangle = \langle w_I(V) \cdot h^*(\alpha), \mu_V \rangle = 0$.

Pelo Teorema 1.4. $[M^m, f]$ está em $J_{n-k-1, m-n+k+1}$.

□

Suponhamos K de mesma dimensão de N e
 $g : K^n \rightarrow N^n$, com $g_*(\mu_K) = \mu_N$.

Corolário 1.7:

Se $g^*(w_i(N)) = w_i(K)$, $0 \leq i \leq m$, então I_g^m é monomorfismo.

Basta observar que nestas condições,
 $J_{n-k-1, m-n+k+1} = \{0\}$ e $\cup U_g : H^1(N, Z_2) \rightarrow H^1(N, Z_2)$ é isomorfismo.
 $\square$

Os exemplos a seguir mostram que as condições da proposição são só necessárias

1. Consideremos $g: S^1 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$, o mergulho definido por $g(x) = (x, e)$ e $I_g^2 : \bigvee_2(T^2) \rightarrow \bigvee_1(T^2)$. Neste caso, $g^*(w_i(T^2)) = w_i(S^1)$, $i = 0, 1$, porém,
 $\cup \alpha' : H^0(T^2, Z_2) \rightarrow H^1(T^2, Z_2)$ não é sobrejetora, onde $\alpha' = D(g_*(\mu_{S^1}))$. Embora uma das hipóteses não esteja satisfeita, temos $\ker I_g^2 = J_{0,2}$.

2. Consideremos $I_g^2 : \bigvee_2(P^2) \rightarrow \bigvee_1(P^2)$, onde $g: S^1 \rightarrow P^2$ é a inclusão de S^1 no plano projetivo P^2 . Neste caso, as aplicações
 $\cup \alpha : H^i(P^2, Z_2) \rightarrow H^{i+1}(P^2, Z_2)$, $i = 0, 1$ são sobrejetoras, on

α é o gerador de $H^1(P^2, Z_2)$.

Porém, $g^*(w_1(P^2)) = g^*(\alpha) \neq 0$ e $w_1(S^1) = 0$.

Novamente, temos $\ker I_g^2 = J_{0,2}$.

Para facilitar a notação, indiquemos por $[K \times M, \bar{f}]$, o seguinte elemento genérico de $J_{i,m-i}, [K^m \times M^0, \bar{f}_0] + [K^{m-1} \times M^1, \bar{f}_1] + \dots + [K^{m-i} \times M^i, \bar{f}_i]$ e seja $\pi^i : J_{i,m-i} \rightarrow H_i(N, Z_2) \otimes \bigwedge_{m-i}$, a aplicação que associa a $[K \times M, \bar{f}]$, o elemento $((f_i)_*(\mu_{H^i}), [K^{m-i}])$. Observemos que π^i , a menos do isomorfismo $\bigvee_m^{-1} : \bigwedge_m(N) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^m H_i(N, Z_2) \otimes \bigwedge_{m-i}$ é a i -ésima projeção.

Denotemos por u_g , a classe $g_*(\mu_K)$ e seja $H_i(N, Z_2) \xrightarrow{\bullet u_g} H_{i+k-n}(N, Z_2)$, a aplicação definida por $\alpha \bullet u_g = D(\beta \cup Ug)$, onde β é a classe dual de α e D a dualidade de Poincaré.

Lema 1.8:

Os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccccc}
 J_{i,m-i} & \xrightarrow{\quad} & I_g^i & \xrightarrow{\quad} & J_{i+k-n,m-i} \\
 \downarrow \pi^i & & & & \downarrow \pi^{i+k-n} \\
 H_i(N, Z_2) \otimes \bigcap_{m-i} & \xrightarrow{\quad} & \bullet \mu_g \otimes Id & \xrightarrow{\quad} & H_{i+k-n}(N, Z_2) \otimes \bigcap_{m-i}, \quad 0 \leq i \leq m
 \end{array}$$

Seja $\alpha \in H^{n-i}(N, Z_2)$ uma classe qualquer e para toda $a \in H^{k+i-n}(N, Z_2)$, usando propriedades dos produtos $\cup$ e $\cap$, temos:

$$\langle a, D(\alpha \cup U_g) \rangle = \langle a, (\alpha \cup U_g) \cap \mu_N \rangle =$$

$$= \langle a \cup \alpha, U_g \cap \mu_N \rangle = \langle a \cup \alpha, g_*(\mu_K) \rangle =$$

$$= \langle g^*(a \cup \alpha), \mu_K \rangle = \langle g^*(a), Dg^*(\alpha) \rangle = \langle a, g_*(Dg^*(\alpha)) \rangle.$$

Para o segundo diagrama, observemos que

$I_g^i : J_{i,m-i} \rightarrow J_{i+k-n,m-i}$ é a restrição de

$$I_g^m : \bigcap_m (N) \rightarrow \bigcap_{m+k-n} (N)$$

Seja $[W \times M, \bar{f}]$ em $J_{i,m-i}$ e denotemos por $[V^{i+k-n}, h_i]$ o produto de $[M^i, f_i]$ por $[K^k, g]$.

$$\begin{aligned} \text{Então } \pi^{i+k-n} \circ I_g^i([W \times M, \bar{f}]) &= \\ &= (h_i \circ (\mu_{V^{i+k-n}}), [W^{m-i}]) = ((f_i) \circ (\mu_{M^i}) \circ g \circ (\mu_K), [W^{m-i}]) = \\ &= (\bullet u_g \otimes \text{Id}) \circ \pi^i([W \times M, \bar{f}]). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.9

Se $\bullet u_g : H_i(N, Z_2) \rightarrow H_{k-n+i}(N, Z_2)$ é monomorfismo, para $n - k \leq i \leq m$, então $\ker I_g^m = J_{n-k-1, m-n+k+1}$.

Prova

Provemos por indução sobre i

I_g^{n-k-1} é a aplicação nula. Vamos supor que $\ker I_g^{i-1} = J_{n-k-1, m-n+k+1}$ e lembremos que $J_{i,m-i}$ é igual a $J_{i-1, m-i+1} \oplus S$, onde S é um grupo isomorfo a $H_i(N, Z_2) \otimes \bigcap_{m-i}$.

Seja $x = a + b$, pertencente a $J_{i,m-i}$, com a em $J_{i-1,m-i+1}$ e b em S .

Segue do lema 1.8 que se x está no $\text{Ker } I_g^i$, então $(\bullet u_g \otimes \text{Id})(\pi^i(b)) = 0$ e como $(\bullet u_g \otimes \text{Id})$ é monomorfismo e $\pi^i|_S$ é isomorfismo, então $b = 0$.

A aplicação I_g^{i-1} é a restrição de I_g^i a $J_{i-1,m-i+1}$ e, portanto, $I_g^{i-1}(a) = 0$. Da hipótese de indução, segue que x está em $J_{n-k-1,m+k-n+1}$. $\square$

Corolário 1.10

Se $H^{n-i}(N, Z_2) \xrightarrow{\cup U_g} H^{2n-k-i}(N, Z_2)$ é monomorfismo, para $n - k \leq i \leq m$, então $\text{Ker } I_g^m = J_{n-k-1,m-n+k+1}$. $\square$

Proposição 1.11:

Se $H^{n-i}(N, Z_2) \xrightarrow{\cup U_g} H^{2n-k-i}(N, Z_2)$ é epimorfismo, para $n - k \leq i \leq m$, então I_g^m é epimorfismo.

Prova

A prova será feita por indução sobre i .

Observemos, primeiramente, que I_g^{n-k-1} toma valores em $\{0\}$ e suponhamos que

$$I_g^{i-1}(J_{i-1, m-i+1}) = J_{k-n+i-1, m-i+1}.$$

Seja $x = a + b$ em $J_{i+k-n, m-i}$, com a em $J_{k-n+i-1, m-i+1}$ e b em S , onde S é isomorfo a $H_{i+k-n}(N, Z_2) \otimes \bigwedge_{m-i}$.

Da hipótese de indução, existe $y \in J_{i-1, m-i+1}$, tal que $I_g^{i-1}(y) = a$ e, portanto, temos $\pi^{i+k-n}(x) = \pi^{i+k-n} \circ I_g^{i-1}(y) + \pi^{i+k-n}(b)$ que é igual a $(\bullet u_g \otimes \text{Id}) \circ \pi^i(y) + \pi^{i+k-n}(b)$, pelo lema 1.8.

Como $H^{n-i}(N, Z_2) \xrightarrow{\cup U_g} H^{2n-k+i}(N, Z_2)$ é epimorfismo, segue que $(\bullet u_g \otimes \text{Id})$ é epimorfismo também e então existe $\ell \in H_i(N, Z_2) \otimes \bigwedge_{m-i}$, tal que $(\bullet u_g \otimes \text{Id})(\ell) = \pi^{i+k-n}(b)$.

Consideremos $\pi^i|_{S'}$, onde S' é isomorfo a $H_i(N, Z_2) \otimes \bigwedge_{m-i}$. Então $(\pi^i|_{S'})(\ell') = \ell$, para algum $\ell' \in S'$ e portanto $\pi^{i+k-n}(b) = (\bullet u_g \otimes \text{Id}) \circ \pi^i(\ell') = \pi^{i+k-n}(I_g^i(\ell'))$ e $I_g^i(y + \ell') = a + b$. $\square$

Consideremos as filtrações de $\bigwedge_{m+k-n}(N)$ e de $\bigwedge_m(N)$.

$$\bigwedge_{m+k-n}(N) = J_{m+k-n, 0} \supset J_{m+k-n-1, 1} \supset \dots \supset J_{0, m+k-n}$$

$$\text{e } \bigwedge_m(N) = J_{m, 0} \supset J_{m-1, 1} \supset \dots \supset J_{0, m}.$$

Então se $I_g^{n-k} : J_{n-k, m+k-n} \rightarrow J_{0, m+k-n}$ não for so brejetora, $I_g^m : \bigwedge_m(N) \rightarrow \bigwedge_{m+k-n}(N)$ também não o será.

Uma condição necessária para que $J_{0,m+k-n}$ esteja contido na imagem de I_g^m é que $m \geq n - k$.

Proposição 1.12

Para que $J_{0,m+k-n}$ esteja contido na imagem de I_g^m é suficiente que a aplicação $\cup U_g : H^k(N, Z_2) \rightarrow H^n(N, Z_2)$ seja um epimorfismo.

Demonstração

Se $\cup U_g : H^k(N, Z_2) \rightarrow H^n(N, Z_2)$ é epimorfismo, então

$$\bullet u_g \otimes \text{Id} : H_{n-k}(N, Z_2) \otimes \cap_{m+k-n} \rightarrow H_0(N, Z_2) \otimes \cap_{m+k-n}$$

também o é.

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} J_{n-k,m+k-n} & \xrightarrow{I_g^{n-k}} & J_{0,m+k-n} \\ \pi^{n-k} \downarrow & \searrow \quad \swarrow & \downarrow \pi^0 \\ H_{n-k}(N, Z_2) \otimes \cap_{m+k-n} & \xrightarrow{\bullet u_g \otimes \text{Id}} & H_0(N, Z_2) \otimes \cap_{m+k-n} \end{array}$$

Segue que se $\bullet u_g \otimes \text{Id}$ é sobrejetora, então $J_{0,m+k-n}$ está contido na imagem de I_g^m . $\square$

Seja $\theta : \mathcal{V}_{m+k-n}(N) \rightarrow \mathcal{V}_{m+k-n}$, a aplicação definida por $\theta([V, h]) = [V]$ e seja $I'_g : \mathcal{V}_m(N) \rightarrow \mathcal{V}_{m+k-n}$ a aplicação definida pelo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_m(N) & \xrightarrow{I_g^m} & \mathcal{V}_{m+k-n}(N) \\ & \searrow I'_g & \swarrow \theta \\ & \mathcal{V}_{m+k-n} & \end{array}$$

Como $\mathcal{V}_{m+k-n}$ pode ser identificado com $J_{0, m+k-n}$ e θ é sobre, então I'_g é sobre se $J_{0, m+k-n}$ estiver contido na imagem de I_g^m .

Proposição 1.13

Se $H_1(N, \mathbb{Z}) = 0$ então $I'_g : \mathcal{V}_m(N) \rightarrow \mathcal{V}_{m-1}$ é nula, onde K é uma subvariedade de N e g é a inclusão.

Prova

Tomemos K uma subvariedade de N , de codimensão 1. Como N é uma variedade orientada tal que $H^1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$ então K separa N e é orientável e tem fibrado normal trivial.

Consideremos $f : M \rightarrow N$ transversal a K ; então $f^{-1}(K)$ tem fibrado normal trivial em M e $f^*(U_g) = 0$, pois

$$Ug = Dg_*(\mu_K) \quad \text{e} \quad g_*(\mu_K) \in H_{n-1}(N, \mathbb{Z}_2) = 0.$$

Logo $f^{-1}(K)$ é homologa a zero em M e, portanto, é bordo. Isto implica que I'_g é nula. $\square$

CAPÍTULO II

SOBRE TEORIA DE OBSTRUÇÃO

Neste capítulo, faremos um estudo sobre classificação de classes de homotopias de funções $f: X \rightarrow Y$, onde X e Y são CW complexos, com Y n -simples, para todo $n \leq \dim X$ e obstruções à extensão de uma dada função $h: A \rightarrow Y$.

Os resultados apresentados neste capítulo serão aplicados no Capítulo III.

§1. Sobre Classificação de Classes de Homotopias de Funções

Os teoremas deste parágrafo referem-se a condições para que duas aplicações $f, g: X \rightarrow Y$ sejam homotópicas, onde X e Y são CW complexos com Y n -simples, para um inteiro $n \geq 1$.

Fixado um grupo abeliano G , consideremos $\tilde{K} = K(G, n)$ um espaço de Eilenberg MacLane e $i_n(\tilde{K}) \in H^n(\tilde{K}, G)$, um elemento n -característico.

Dado $u \in H^n(Y, G)$, existe uma única aplicação $\phi: Y \rightarrow \tilde{K}$, tal que $\phi^*(i_n(\tilde{K})) = u$, onde $\phi^*: H^n(\tilde{K}, G) \rightarrow H^n(Y, G)$.

A induzida $\phi_*: \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(\tilde{K}) = G$, induz a mudança de coeficientes:

$$\phi_p^u: H^p(X, \pi_n(Y)) \rightarrow H^p(X, \pi_n(\tilde{K})), \text{ para todo } p.$$

Teorema 2.1

Sejam $f, g: X^{n+1} \rightarrow Y$ homotópicas sobre o $(n-1)$ -esqueleto de X e com $f^*(u) = g^*(u)$. Se φ_n^u é monomorfismo, então f e g são homotópicas sobre o n -esqueleto de X .

Prova

Consideremos $H: X^{n-1} \times I \rightarrow Y$, uma homotopia entre f_{n-1} e g_{n-1} . A obstrução à extensão de H a uma homotopia entre f_n e g_n é dada por $d^n(f_n, H, g_n) \in H^n(X, \pi_n(Y))$.

Temos $\varphi_n^u(d^n(f_n, H, g_n)) = d^n(\varphi \circ f_n, \varphi \circ H, \varphi \circ g_n)$; como $f^*(u) = g^*(u)$, vale $(\varphi \circ f)^*(i_n(\tilde{K})) = (\varphi \circ g)^*(i_n(\tilde{K}))$.

Portanto, $\varphi_n^u(d^n(f_n, H, g_n)) = 0$ e como φ_n^u é monomorfismo segue que $d^n(f_n, H, g_n) = 0$.

Então f_n e g_n são homotópicas. $\square$

Teorema 2.2

Sejam $f: X^{n+1} \rightarrow Y$ e $\alpha \in H^n(X^{n+1}, G)$. Então existe $g: X^{n+1} \rightarrow Y$ tal que $g^*(u) = \alpha$ e $g|_{X^{n-1}} = f|_{X^{n-1}}$ se e somente se $\alpha - f^*(u)$ pertence à imagem de φ_n^u .

Prova

Suponhamos que exista $g: X^{n+1} \rightarrow Y$ tal que $g^*(u) = \alpha$ e $g|_{X^{n-1}} = f|_{X^{n-1}}$ e consideremos $c: X^{n+1} \rightarrow Y$ uma função constante. Então $\varphi_n^u(d^n(f_n, g_n)) = d^n(\varphi \circ f_n, \varphi \circ g_n) = d^n(\varphi \circ f_n, c) + d^n(c, \varphi \circ g_n) = (\varphi \circ g_n)^*(i_n(\tilde{K})) - (\varphi \circ f_n)^*(i_n(\tilde{K})) = \alpha - f_n^*(u).$

Reciprocamente, se $\alpha - f^*(u)$ pertence à imagem de φ_n^u , então existe $\beta \in H^n(X, \pi_n(Y))$ tal que $\varphi_n^u(\beta) = \alpha - f^*(u)$ e existe $g: X^{n+1} \rightarrow Y$ com $g|_{X^{n-1}} = f|_{X^{n-1}}$ tal que $d^n(f_n, g_n) = \beta$.

Então $g^*(u) = d^n(c, \varphi \circ g_n) = \varphi_n^u d^n(f_n, g_n) + d^n(c, \varphi \circ f_n) = \varphi_n^u(\beta) + f^*(u) = \alpha.$ $\square$

Teorema 2.3

Sejam $f: X^n \rightarrow Y$ e $\alpha \in H^n(X^{n+1}, G).$

Se φ_n^u é epimorfismo e φ_{n+1}^u é monomorfismo, então existe $g: X^{n+1} \rightarrow Y$ tal que $g|_{X^{n-1}} = f|_{X^{n-1}}$ e $g^*(u) = \alpha.$

Prova

Consideremos $\phi(f) \in H^{n+1}(X, \pi_n(Y))$ a obstrução à extensão de f_{n-1} ao $(n+1)$ -esquelêto de X . Temos

$$\varphi_{n+1}^u(o(f)) = o(\varphi \circ f) = 0.$$

Como φ_{n+1}^u é monomorfismo, então $o(f) = 0$ e, portanto, existe extensão de f_{n-1} a X^{n+1} .

Agora basta aplicar o Teorema 2.2.

□

Teorema 2.4

Assumamos Y n -simples, para todo $n \leq \dim X$ e suponhamos que:

$$\text{a) } H^i(X, \pi_i(Y)) = 0, \quad i \neq n \quad \text{e} \quad H^{i+1}(X, \pi_i(Y)) = 0, \\ i > n.$$

$$\text{b) } \varphi_n^u \text{ é monomorfismo.}$$

Então a aplicação $[X, Y] \xrightarrow{E} H^n(X, G)$, definida por $E([f]) = f^*(u)$ é injetora e $\text{im } E = \text{im } \varphi_n^u \simeq H^n(X, \pi_n(Y))$.

Prova

Dadas $[f]$ e $[g]$ tais que $f^*(u) = g^*(u)$, com $f, g : X \rightarrow Y$, temos que f e g são homotópicas sobre o $(n-1)$ -esqueleto de X , pois $H^i(X, \pi_i(Y)) = 0$, $i < n$ e por hipótese, φ_n^u é monomorfismo. Segue do Teorema 2.1 que f e g são homotópicas sobre o n -esqueleto.

Como $H^i(X, \pi_i(Y)) = 0$, $i > n$, segue que f e g são homotópicas e, portanto, E é injetora.

Como φ_n^u é monomorfismo, $\text{im } \varphi_n^u \cong H^n(X, \pi_n(Y))$.

Dada $f: X \rightarrow Y$, então f é homotópica a uma constante sobre o $(n-1)$ -esqueleto, uma vez que $H^i(X, \pi_i(Y)) = 0$, para $i < n$.

Pelo Teorema 2.2, $f^*(u) \in \text{im } \varphi_n^u$.

Reciprocamente, se $\alpha \in H^n(X, \pi_n(Y)) = \text{im } \varphi_n^u$, como $H^n(X, \pi_n(Y)) = H^n(X^{n+1}, \pi_n(Y))$, então $\alpha = k^*(u)$ pertence a $\text{im } \varphi_n^u$, onde k é uma aplicação constante. Pelo Teorema 2.2, existe $f_1: X^{n+1} \rightarrow Y$ tal que $f_1^*(u) = \alpha$ e $f_1|_{X^{n-1}} = k|_{X^{n-1}}$.

Como $H^{i+1}(X, \pi_i(Y)) = 0$, $i > n$, é possível obter $f: X \rightarrow Y$ extensão de f_1 e, portanto, com $f^*(u) = \alpha$.

Logo, $\text{im } E = \text{im } \varphi_n^u$. $\square$

Para cada $n \geq 1$, consideremos um grupo abeliano G_n e um elemento $u_n \in H^n(Y, G_n)$.

Vamos assumir que Y é n -simples, $n \leq \dim X$, e seja $J = \{n : H^n(X, \pi_n(Y)) \neq 0\}$.

Teorema 2.5

Se $\varphi_n^{u_n}$ é monomorfismo, para todo n , então a aplicação $[X, Y] \xrightarrow{E} \prod_{n \in J} H^n(X, G_n)$ dada por $E([f]) = f^*(u_n)$ é injetora, ie, $f \sim g$ se e somente se $f^*(u_n) = g^*(u_n)$, para todo $n \in J$.

Prova

Seja p o menor inteiro tal que $H^p(X, \pi_p(Y)) \neq 0$.

Dadas duas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$, como $H^i(X, \pi_i(Y)) = 0$, $i < p$, segue que f e g são homotópicas sobre X^{p-1} .

Suponhamos $f^*(u_p) = g^*(u_p)$. Por hipótese, $\varphi_p^{u_p}$ é monomorfismo; segue do Teorema 2.1 que f e g são homotópicas sobre o p -esqueleto e assim, sucessivamente, aplicamos o Teorema 2.1 até chegarmos ao resultado. $\square$

O que vem a seguir é uma interessante aplicação do Teorema 2.5.

Assumamos que Y é n -simples para todo $n \leq \dim X$.

Consideremos o homomorfismo de Hurewicz,

$\mathfrak{H} : \pi_n(Y) \rightarrow H_n(Y)$, e a mudança de coeficientes,

$\mathfrak{H}_p^n : H^p(X, \pi_n(Y)) \rightarrow H^p(X, H_n(Y))$, induzida por $\mathfrak{H}$.

Seja $u_n \in H^n(Y, H_n(Y))$ um elemento tal que $\langle u_n, x \rangle = x$, para todo $x \in H_n(Y)$.

Seja $J = \{n : H^n(X, \pi_n(Y)) \neq 0\}$

Teorema 2.6

Suponhamos que

a) $\mathfrak{H}_n^n$ é monomorfismo para todo n ,

b) Se $n \in J$, então $H_{n-1}(X)$ é livre.

Então duas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópi-
cas se e somente se, para cada $n \in J$, as induzidas $f_*,$
 $g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ são iguais.

Prova

Para cada $n \geq 1$, consideremos o grupo abeliano
 $H_n(Y)$, um elemento $u_n \in H^n(Y, H_n(Y))$ tal que $\langle u_n, x \rangle = x,$
 $\forall x \in H_n(Y)$ e seja $\tilde{K} = K(H_n(Y), n)$.

Seja $\varphi : Y \rightarrow \tilde{K}$ a aplicação tal que $\varphi^*(i_n(\tilde{K})) =$
 $= u_n$; observemos que $\varphi_* : \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(\tilde{K}) = H_n(Y)$ é o ho-
momorfismo de Hurewicz e $\varphi_* : H_n(Y) \rightarrow H_n(Y)$ é a identida-
de.

Como, para todo n , $\mathcal{H}_n^n$ é monomorfismo e $H_{n-1}(X)$
é livre, segue do Teorema 2.5 que $f \sim g$ se e somente se
 $f^*(u_n) = g^*(u_n)$, para todo $n \in J$.

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y, H_n(Y)) & \xrightarrow{f^*, g^*} & H^n(X, H_n(Y)) \\ \downarrow \rho_Y & \curvearrowright & \downarrow \rho_X \\ \text{Hom}(H_n(Y), H_n(Y)) & \xrightarrow{f^*, g^*} & \text{Hom}(H_n(X), H_n(Y)) \end{array}$$

onde $\rho_Y(\alpha)(y) = \langle \alpha, y \rangle$, $y \in H_n(Y)$.

$$\begin{aligned} \text{Para todo } n \in J, \quad f^*(u_n) = g^*(u_n) &\Leftrightarrow \rho_X f^*(u_n) = \\ = \rho_X g^*(u_n) &\Leftrightarrow f^*_{\rho_Y}(u_n) = g^*_{\rho_Y}(u_n) \Leftrightarrow \rho_Y(u_n) f_* = \\ \rho_Y(u_n) g_* &\Leftrightarrow \varphi_* \circ f_* = \varphi_* \circ g_* \Leftrightarrow f_* = g_*. \quad \square \end{aligned}$$

§2. Sobre Extensões de Funções

Usaremos a terminologia do parágrafo precedente.
Consideremos (X, A) um par CW e Y um CW n -simples.

Seja $h: A \rightarrow Y$ e denotemos por $X^{(p)}$, o p -esqueleto de X e $X_p = X^{(p)} \cup A$.

Teorema 2.7

Suponhamos que φ_{n+1}^u é monomorfismo e seja $f: X_n \rightarrow Y$ uma extensão de h . Então existe $g: X_{n+1} \rightarrow Y$ tal que $g|_{X_{n-1}} = f|_{X_{n-1}}$ se, e somente se, $\delta h^*(u) = 0$.

Prova

Seja $o(f) \in H^{n+1}(X, A, \pi_n(Y))$ a obstrução à extensão de $f|_{X_{n-1}}$ a X_{n+1} .

Temos $\varphi_{n+1}^u(o(f)) = o(\varphi \circ f) = o(\varphi \circ h)$ e $\delta h^*(u) = \delta h^* \varphi^*(i_n(\tilde{K})) = \delta(\varphi \circ h)^*(i_n(\tilde{K})) = -o(\varphi \circ h)$, essa última igualdade decorrente da teoria clássica de obstrução. [Wh].

Como φ_{n+1}^u é monomorfismo, temos que $\phi(f) = 0$ se, e somente se, $\delta h^*(u) = 0$. $\square$

Para cada $n \geq 1$, sejam G_n um grupo abeliano e um elemento $u_n \in H^n(Y, G_n)$. Vamos assumir que Y é n -simples para $n \leq \dim(X-A)-1$; seja $J = \{n: H^{n+1}(X, A, \pi_n(Y)) \neq 0\}$.

Teorema 2.8

Se φ_{n+1}^u é mono, para todo n , então $h: A \rightarrow Y$ estende-se para todo X se, e somente se, $\delta h^*(u_n) = 0$, $\forall n \in J$.

Prova

Esse teorema decorre de aplicações sucessivas do Teorema 2.7. $\square$

Assumamos que Y é n -simples para todo $n \leq \dim(X-A)-1$.

Consideremos o homomorfismo de Hurewicz, $\mathcal{H}: \pi_n(Y) \rightarrow H_n(Y)$, e a mudança de coeficientes, induzida por $\mathcal{H}$ para cada p :

$$\mathcal{H}_p^n : H^p(X, A, \pi_n(Y)) \rightarrow H^p(X, A, H_n(Y))$$

$$\text{Seja } J = \{n: H^{n+1}(X, A, \pi_n(Y)) \neq 0\}.$$

Teorema 2.9

Suponhamos que:

a) $\mathcal{H}_{n+1}^n$ é monomorfismo para todo n .

b) Se $n \in J$, então $H_{n-1}(A)$ é livre.

Então $h: A \rightarrow Y$ se estende para todo X se, e somente se, para cada $n \in J$, existir um homomorfismo $\psi: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ tal que $h_* = \psi \circ i_*$, onde $i_*: H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ é a induzida da inclusão $i: A \rightarrow X$.

Prova

Seja $u_n \in H^n(Y, H_n(Y))$ um elemento tal que $\langle u_n, x \rangle = x, \forall x \in H_n(Y)$.

Consideremos $\tilde{K} = K(H_n(Y), n)$ um espaço de Eilenberg MacLane. Então a aplicação $\phi: Y \rightarrow \tilde{K}$ tal que

$\phi^*(i_n(\tilde{K})) = u_n$ tem por induzida em homotopia o homomorfis

mo de Hurewicz $\mathcal{H}: \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(\bar{K}) = H_n(Y)$.

Segue que, se $\mathcal{H}_{n+1}^n$ é mono para todo n , então $\mathcal{Q}_{n+1}^{u_n}$ é mono para todo n e, pelo Teorema 2.8, $h: A \rightarrow Y$ se estende para todo X se, e somente se, $\delta h^*(u_n) = 0$, $\forall n \in J$.

Suponhamos inicialmente que $h: A \rightarrow Y$ se estenda para todo X ; consideremos a sequência exata:

$$\rightarrow H^n(X, H_n(Y)) \xrightarrow{i^*} H^n(A, H_n(Y)) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A, H_n(Y)) \rightarrow$$

Temos então que existe $\alpha \in H^n(X, H_n(Y))$ tal que $i^*(\alpha) = h^*(u_n)$, $\forall n \in J$.

Definimos $\psi: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ por $\psi = \rho_X(\alpha)$,

onde $\rho_X: H^n(X, H_n(Y)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), H_n(Y))$.

Se $\beta \in H_n(A)$, temos:

$$\psi \circ i_*(\beta) = \rho_X(\alpha) \circ i_*(\beta) = \langle \alpha, i_*(\beta) \rangle = \langle i^*(\alpha), \beta \rangle$$

$$= \langle h^*(u_n), \beta \rangle = \langle u_n, h_*(\beta) \rangle = \rho_Y(u_n) h_*(\beta) = h_*(\beta)$$

Portanto, $\psi \circ i_* = h_*$

Reciprocamente, suponhamos que para cada $n \in J$, exista $\psi: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ tal que $h_* = \psi \circ i_*$.

Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

Temos:

$$h^*(u_n) = \rho_A^{-1} h^\# \rho_Y(u_n) = \rho_A^{-1} i^\# \psi^\# \rho_Y(u_n).$$

Consideremos $\alpha \in H^n(X, H_n(Y))$, tal que

$$\rho_X(\alpha) = \psi^\# \rho_Y(u_n).$$

$$\text{Então } h^*(u_n) = \rho_A^{-1} i^\# \rho_X(\alpha) = i^*(\alpha)..$$

Segue que $\delta h^*(u_n) = \delta i^*(\alpha) = 0$. $\square$

CAPÍTULO III

EXTENSÃO DE FUNÇÕES COM CONDIÇÕES DE TRANSVERSALIDADE PRÉ-ESTABELECIDAS.

Consideremos K^k uma subvariedade de N^n e g a inclusão e seja V^{m+k-n} uma variedade. Se a aplicação $I'_g: \mathcal{V}_m(N) \rightarrow \mathcal{V}_{m+k-n}$, definida no Capítulo I, for sobrejetora, existe uma variedade singular $(M', f') \in \mathcal{V}_m(N)$ tal que f' é transversal a K e $f'^{-1}(K)$ é bordante a V .

Fixando-se uma variedade M^m e considerando V^{m+k-n} uma subvariedade de M , o fato de I'_k ser sobre, não implicará na existência de uma aplicação $f: M \rightarrow N$, transversal a K , com $f^{-1}(K)$ bordante a V .

Consideremos agora o seguinte problema:

"Sejam V e K subvariedades de M^m e N^n , respectivamente, de mesma codimensão.

Dada uma aplicação diferenciável $f_V: V \rightarrow K$, existe uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$, extensão de f_V , transversal a K e tal que $f^{-1}(K) = V$?"

Observemos que se $[V]$ não pertencer à imagem de I'_k , então não existe extensão desejada.

Sabe-se que $\mathcal{V}_2$ é gerado pela classe de bordismo do plano projetivo P^2 e $\mathcal{V}_5$, por exemplo, pela classe de variedade de Dold $P(2,1)$. [W]

Se V for um representante de $[P^2]$ (respecti

vamente de $[P(2,1)]$ mergulhado em M^m e se I'_k , definida em $\bigvee_m(N)$ e com valores em $\bigvee_2$ (respectivamente $\bigvee_5$) não for sobrejetora, (I'_k é o homomorfismo nulo), então $f_V: V \rightarrow K$ não se estende com as propriedades desejadas.

Daremos abaixo um exemplo em que $f_V: V \rightarrow K$ não se estende a $f: M \rightarrow N$, com f transversal a K e $V = f^{-1}(K)$, embora a aplicação I'_k seja sobre.

Sejam $d: P^2 \rightarrow P^2 \times P^2$ e $k: P^2 \rightarrow CP(2)$, os mergulhos $d(a) = (a, a)$ e $k([\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]) = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$, onde $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$ são as coordenadas homogêneas de P^2 e de $CP(2)$ e seja $f_{P^2}: P^2 \rightarrow P^2$ um difeomorfismo.

Denotando por γ_d e γ_k , os respectivos fibrados normais dos mergulhos acima; que nesse caso, coincidem com o fibrado tangente do plano projetivo P^2 , temos

$$f_{P^2}^*(\gamma_k) = \gamma_d.$$

Suponhamos que exista $f: P^2 \times P^2 \rightarrow CP(2)$, extensão de f_{P^2} , transversal a P^2 e com $P^2 = f^{-1}(P^2)$.

Então $f^*(U_k) = U_d$, onde U_k e U_d são os respectivos Poincaré duais de $k_*(\mu_{P^2})$ e $d_*(\mu_{P^2})$ e μ_{P^2} é a classe fundamental de P^2 .

A classe $U_d \in H^2(P^2 \times P^2, Z_2)$ é da forma: $m\alpha^2 + n\alpha\beta + r\beta^2$, onde $\alpha, \beta \in H^1(P^2, Z_2)$ são geradores.

Se $h: P^2 \rightarrow P^2 \times P^2$ é definida por $h(x) = (x, cte)$, temos que $U_h = \alpha^2$. Então U_d e U_h são representadas por subvariedades que se interceptam transversalmente e cuja intersecção é um ponto, logo $d_*(\mu_{P^2}) \cdot h_*(\mu_{P^2}) = 1$. [D]

Mas $U_d \cup U_h = r\alpha^2\beta^2$, cujo Poincaré dual é r , portanto $r = 1$; de maneira análoga, mostra-se que $m = 1$.

Supondo $n = 0$, teremos $U_d = \alpha^2 + \beta^2$ e como $d^*f^* = k^*$, vale $0 \neq k^*(U_k) = d^*f^*(U_k) = d^*(U_d) = d^*(\alpha^2 + \beta^2) = 0$, contradição. Consideremos então que $n = 1$.

Logo, $f^*(U_k) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ e $S_q^1(f^*(U_k)) = S_q^1(\alpha\beta) = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \neq 0$, uma vez que este último elemento é gerador de $H^3(P^2 \times P^2, \mathbb{Z}_2)$.

Por outro lado, $S_q^1 f^*(U_k) = f^*(S_q^1(U_k)) = 0$, pois $S_q^1(U_k)$ está em $H^3(CP(2), \mathbb{Z}_2) = 0$.

Observemos, no entanto, que a proposição 1.11 garante que $I_k^4: \bigcap_4(CP(2)) \rightarrow \bigcap_2(CP(2))$ é sobrejetora e, portanto, $I_k^1: \bigcap_4(CP(2)) \rightarrow \bigcap_2$ também o é, onde $k: P^2 \rightarrow CP(2)$ já definida.

Neste capítulo, apresentaremos condições para a existência de uma aplicação $f: M \rightarrow N$ transversal a K e tal que $V = f^{-1}(K)$, que estende uma dada $f_V: V \rightarrow K$. Usaremos, para tanto, a teoria de obstrução desenvolvida no Capítulo II; daremos também alguns exemplos.

§1 - Condição para Existência de Extensão Local

Sejam M^m e N^n variedades fechadas, diferenciáveis, V e K subvariedades de M e N , respectivamente, de mesma codimensão; fixadas métricas Riemannianas em M e N , sejam ν_V e ν_K os respectivos fibrados normais.

Consideremos $f_V: V \rightarrow K$ uma aplicação diferenciável e suponhamos que $f^*(v_k) = v_v$. Sejam $D(v_v)$ e $D(v_k)$ os fibrados em discos e $\tilde{f}: D(v_v) \rightarrow D(v_k)$ restrição de uma aplicação fibrada $\tilde{f}: v_v \rightarrow v_k$ sobre f_V , ortogonal em cada fibra. Existem vizinhanças tubulares W e U em M e N , difeomorfismos fibrados $\psi: W \rightarrow D(v_v)$ e $\phi: U \rightarrow D(v_k)$ sobre V e K , respectivamente.

Seja $f_W: W \rightarrow U$, a aplicação que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} D(v_v) & \xrightarrow{\tilde{f}_V} & D(v_k) \\ \uparrow \psi & \circlearrowleft & \uparrow \phi \\ W & \xrightarrow{f_W} & U \end{array}$$

comutativo. Então f_W é uma aplicação fibrada sobre f_V e portanto, transversal a K . Em particular, $V = f_W^{-1}(K)$.

Neste capítulo, utilizaremos as seguintes notações: Y para $N - \overset{\circ}{U}$, ∂Y para ∂U , X para $M - \overset{\circ}{V}$, A para ∂V , observando que Y e X são variedades que tem o mesmo tipo de homotopia de $N - K$ e $M - W$, respectivamente.

Seja $h_1: A \rightarrow \partial Y$, a restrição de $f_W: W \rightarrow U$ aos respectivos bordos das vizinhanças tubulares e seja $h = j \circ h_1: A \rightarrow Y$, onde $j: \partial Y \rightarrow Y$ é a inclusão. Observe que h depende dos difeomorfismos ψ e ϕ .

O objetivo é obter uma extensão diferenciável de $h: A \rightarrow Y$; para tanto, basta obter uma extensão contínua. (Proposição 0.2).

§2 - Obstruções à Extensão Global

Neste parágrafo, supondo que exista solução local, vamos procurar estendê-la a todo M .

O resultado principal deste parágrafo é o Teorema 3.1 que dá uma interpretação das obstruções à extensão de $h: A \rightarrow Y$.

Seja G um anel com unidade cujo grupo subjacente é um grupo abeliano finitamente gerado. Salvo menção em contrário, todas as variedades consideradas serão orientadas (quando $G = \mathbb{Z}_2$, a hipótese sobre a orientabilidade das variedades pode ser suprimida).

Consideremos Y uma variedade p -simples para todo $p \leq \dim X - 1$ e seja $\tilde{K} = K(G, p)$ um espaço de Eilenberg MacLane, com $\iota_p(\tilde{K}) \in H^p(\tilde{K}, G)$ um elemento p -característico.

Dado $u_p \in H^p(Y, G)$, seja $\phi: Y \rightarrow \tilde{K}$, a única aplicação tal que $\phi^*(\iota_p(\tilde{K})) = u_p$.

A induzida em homotopia, $\phi_*: \pi_p(Y) \rightarrow \pi_p(\tilde{K})$, induz para cada q , a mudança de coeficientes:

$$\phi_q^{u_p}: H^q(X, A, \pi_p(Y)) \rightarrow H^q(X, A, \pi_p(\tilde{K})).$$

Considerando em X uma decomposição celular, segundo a qual ∂X é um subcomplexo CW, denotemos por $X^{(p)}$, o p -ésimo esqueleto de X .

Teorema 3.1

Seja $h_p : X_p \rightarrow Y$ uma extensão de $h : A \rightarrow Y$ e suponhamos que $\varphi_{p+1}^{u_p}$ é um monomorfismo e que exista uma aplicação contínua $g : Q \rightarrow \partial Y$, onde Q^{n-p-1} é uma variedade orientada, que representa a classe de homologia $\partial D_Y(u_p)$. Aqui ∂ é o operador bordo e D_Y a dualidade de Lefschetz. Seja ainda S a subvariedade de $A \times Q$, tal que $I_g(h_1) = [S, h_1 \circ \pi_A]$. (Observe que π_A é a composta da inclusão de S em $A \times Q$ e a primeira projeção $\pi_1 : A \times Q \rightarrow A$).

Então existe $h_{p+1} : X_{p+1} \rightarrow Y$ tal que $h_{p+1}|_{X_p} = h_p|_{X_p}$ se, e somente se, $i_* \pi_{A*}(\mu_S^G) = 0$ em $H_{n-p-1}(X, G)$.

Prova

Sejam $D_Y : H^p(Y, G) \rightarrow H_{n-p}(Y, \partial Y, G)$ e $\partial : H_{n-p}(Y, \partial Y, G) \rightarrow H_{n-p-1}(\partial Y, G)$, a dualidade de Lefschetz e o operador bordo, respectivamente.

Suponhamos que exista uma variedade orientada Q e uma aplicação contínua $g : Q \rightarrow \partial Y$, tais que $g_*(u_Q^G) = \partial D_Y(u_p)$.

Segue da proposição 0:3 que existe uma aplicação diferenciável, homotópica a g e transversal a $h_1: A \rightarrow \partial Y$. Seja $[S, h_1 \circ \pi_A] = I_g(h_1)$; então $h_1^*(D_{\partial Y}^{-1} g_*(\mu_Q^G)) = D_A^{-1} \cdot \pi_{A*}(\mu_S^G)$, onde D é a dualidade de Poincaré (Obs.2 Cap.I)

Logo, $h^*(u_p) = h_1^* \circ j^*(u_p) = h_1^*(D_{\partial Y}^{-1} \partial D_Y)(u_p) = D_A^{-1} \pi_{A*}(\mu_S^G)$, onde a segunda igualdade provem do diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y, G) & \xrightarrow{j^*} & H^p(\partial Y, G) \\ \downarrow D_Y & \begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \curvearrowright \\ \hookleftarrow \end{array} & \downarrow D_{\partial Y} \\ H_{n-p}(Y, \partial Y, G) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-p-1}(\partial Y, G) \end{array}$$

Como $\bigcup_{p+1}^u: H^{p+1}(X, A, \pi_p(Y)) \rightarrow H^{p+1}(X, A, \pi_p(\tilde{K}))$ é monomorfismo e $h_p: X_p \rightarrow Y$ é uma extensão de h , o Teorema 2.7 garante a existência de uma extensão de $h: A \rightarrow Y$ sobre X_{p+1} se, e somente se $\delta h^*(u_p) = 0$, ou seja, $\delta D_A^{-1} \pi_{A*}(\mu_S^G) = 0$.

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(A, G) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(X, A, G) \\ \downarrow D_A & \begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \curvearrowright \\ \hookleftarrow \end{array} & \downarrow D_X \\ H_{m-p-1}(A, G) & \xrightarrow{i_*} & H_{m-p-1}(X, G) \end{array}$$

Então $\delta D_A^{-1} \pi_{A*}(\mu_S^G) = 0 \Leftrightarrow D_X i_* \pi_{A*}(\mu_S^G) = 0$
 $\Leftrightarrow i_* \pi_{A*}(\mu_S^G) = 0.$
 $\square$

Obs. 1:

Se nas hipóteses do Teorema 3.1, Q^{n-p-1} é uma subvariedade de ∂Y , então $h: A \rightarrow Y$ se estende a X_{p+1} se, e somente se, a subvariedade $h_1^{-1}(Q)$ é homóloga a zero em $H_{m-p-1}(X, G)$, se $h_1 \pitchfork Q$.

Observe que se h_1 não for transversal a Q é possível obter uma $\bar{h}_1$ transversal a Q e homotópica a h_1 .

Obs. 2:

O fato de f_v ser homotópica à constante, não implica na existência de uma extensão com as condições requeridas. Por exemplo, consideremos $g: S^2 \rightarrow S^4$, mergulho canônico, j o mergulho de $S^1 \times \text{pto.}$ em $S^1 \times S^2$ e seja $f_{S^1}: S^1 \rightarrow S^2$, uma aplicação homotópica à constante.

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^2 & & S^4 \\ \uparrow j & & \uparrow g \\ S^1 & \xrightarrow{f_{S^1}} & S^2 \end{array}$$

Como os fibrados normais são triviais, temos

$$f_{S^1}^*(v_{S^2}) = v_{S^1}.$$

Suponhamos que exista $f: S^1 \times S^2 \rightarrow S^4$, transversal a S^2 e tal que $S^1 = f^{-1}(S^2)$.

Então, se D é a dualidade de Poincaré, temos $D(j_*(\mu_{S^1})) = f^*(Dg_*(\mu_{S^2}))$, o que é um absurdo, pois

$g_*(\mu_{S^2}) \in H_2(S^4) = 0$ e $j_*(\mu_{S^1}) \in H_1(S^1 \times S^2)$ representa um gerador.

Obs. 3:

Se $f_V \sim \text{cte}$ e $f_V^*(v_K) = v_V$, então a extensão $h_1: V \times S^{m-p-1} \rightarrow \partial Y$ de f_V é homotópica a uma aplicação h' tal que $h'(V \times S^{m-p-1}) \subset S^{n-k-1}$.

Consequentemente, h_1 se estende a X_{m-p-1} .

A existência da extensão global pode depender da trivialização usada na construção da extensão local, como mostra a proposição a seguir:

Proposição 3.2

Consideremos $S^{n-2} \subset S^n$, V^{m-2} uma variedade orientada, mergulhada em uma variedade orientada M^m , homóloga a zero em M e seja $f_V: V \rightarrow S^{n-2}$ uma aplicação diferenciável. Então existe $f: M^m \rightarrow S^n$, extensão de f_V , transversal a S^{n-2} e tal que $V^{m-2} = f^{-1}(S^{n-2})$.

Prova

$$\begin{array}{ccc} M^m & & S^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ V^{m-2} & \xrightarrow{f_V} & S^{n-2} \end{array}$$

Como v_V é trivial, temos $f_V^*(v_{S^{n-2}}) = v_V$.

A esfera S^n pode ser vista como:

$S^n = S^{n-2} \times D^2 \underset{\text{Id}}{\cup} D^{n-1} \times S^1$, e portanto, $S^n - \overset{\circ}{U}$ tem o mesmo tipo de homotopia de S^1 , onde U é uma vizinhança tubular de S^{n-2} em S^n .

Observemos que toda secção s no fibrado normal pode ser pensada como uma aplicação $s: V \rightarrow M - V$. Consideremos uma secção $s: V \rightarrow S(v_V)$ cuja imagem é homóloga a zero em $M - V$ (Apendice).

Como o fibrado normal é trivial, podemos supor, a menos de uma trivialização que $A = V \times S^1$ e a secção $s: V \rightarrow V \times S^1$, seja dada por $s(x) = (x, pto)$. Podemos então construir uma extensão local de f_V de maneira que $h_1: A \rightarrow \partial Y$, $\partial Y = S^{n-2} \times S^1$, seja da forma $(f_V \times \text{Id})$.

Seja $\ell_1(Y) \in H^1(Y, Z)$ um elemento l -característico.

A classe $\partial D_Y(\ell_1(Y))$ é representada pela subvariedade $S^{n-2} \times p \subset S^{n-2} \times S^1$ e a aplicação $h_1: A \rightarrow \partial Y$ é transversal a $S^{n-2} \times p$, cuja imagem inversa é a subvariedade $s(V)$. Observemos que $\bigcap_2 \ell_1(Y): H^2(X, A, Z) \rightarrow H^2(X, A, Z)$ é um isomorfismo e portanto estamos nas hipóteses do Teorema 3.1. Como $s(V)$ é homóloga a zero em $M - V$, h_1 se estende sobre X_2 e como Y tem o mesmo tipo de homotopia de S^1 , então não existe obstrução à extensão de h_1 a todo X .

Uma observação importante é que a existência da extensão não depende de f_V , mas apenas de V ser homóloga a zero em $M - V$.

□

Observação:

A condição homóloga a zero é também necessária.

Corolário 3.3

Toda subvariedade V orientada de codimensão 2 de M , homóloga a zero em M , borda em M .

Prova

Da proposição 3.2, existe $f: M \rightarrow S^n$, transversal a S^{n-2} e tal que $V = f^{-1}(S^{n-2})$.

Como S^{n-2} borda em S^n , então V borda em M .

□

§3 - Casos Particulares

Neste parágrafo consideraremos o caso particular em que Y é uma variedade $(p-1)$ conexa, para algum $p \geq 1$. Então a aplicação $\bigcap_p^l: H^p(X, \pi_p(Y)) \rightarrow H^p(X, \pi_p(Y))$ é um isomorfismo e existe $h_p: X_p \rightarrow Y$ extensão de h .

Também abordaremos os casos em que $N = K^k \times S^{n-k}$ e M é arbitrário ou N arbitrário e $M = S^m$.

Usaremos as mesmas notações do parágrafo anterior.

Proposição 3.4

Suponhamos que Y seja $(p-1)$ -conexo e que $\pi_p(Y) = G$. Seja $\dot{l}_p(Y) \in H^p(Y, G)$ um elemento p -característico e suponhamos que a classe de homologia $\partial_{D_Y}(\dot{l}_p(Y)) \in H_{n-p-1}(\partial Y, G)$ seja representada por uma aplicação contínua $g: Q^{n-p-1} \rightarrow \partial Y$, onde Q é uma variedade orientada.

Então $h: A \rightarrow Y$ se estende a X_{p+1} se, e somente se, $i_* \pi_{A_*}(\mu_S^G) = 0$, onde $[S, h_1 \circ \pi_A] = I_g(h_1)$. $\square$

Observemos que, nas hipóteses da proposição 3.4, se Q^{n-p-1} é uma subvariedade de ∂Y e $h_1 \pitchfork Q$, então h se estende a X_{p+1} se, e somente se, $h_1^{-1}(Q)$ é homóloga a zero em $H_{m-p-1}(X, G)$.

Corolário 3.5

Se $H^{i+1}(X, A, \pi_i(Y)) = 0$, para $i < m-1$, então h se estende sobre X . $\square$

Para a próxima proposição, consideremos $N^n = K^k \times S^{n-k}$, M^m uma variedade qualquer e V^{m+k-n} uma subvariedade de M^m , com fibrado normal trivial.

Proposição 3.6

Seja $h_p: X_p \rightarrow Y$ uma extensão de h e suponhamos que φ_{p+1}^u é um monomorfismo e que existam uma variedade orientada Q^{k-p} e uma aplicação contínua $g: Q^{k-p} \rightarrow K$ com $(g \times \text{Id})_*(\mu_{Q \times S}^G)^{n-k-1} = \partial D_Y(u)$.

Então existe $h_{p+1}: X_{p+1} \rightarrow Y$ tal que $h_{p+1}|_{X_{p-1}} = h_p|_{X_{p-1}}$ se, e somente se, $i_* \pi_{A_*}(\mu_S^G) = 0$, onde $[S, h_1 \circ \pi_A] = I_{g \times \text{Id}}(h_1)$. $\square$

Se, nas hipóteses da proposição 3.6, Q é uma subvariedade de K , então h se estende a X_{p+1} se, e somente se, $h_1^{-1}(Q \times S^{n-k-1})$ é homóloga a zero em $H_{m-p-1}(X, G)$, se $h_1 \frown (Q \times S^{n-k-1})$. $\square$

Corolário 3.7

Se para $i < m-1$, tivermos $H^{i+1}(X, A, \pi_i(K)) = 0$, então h se estende sobre X . $\square$

Observemos que se $N = K^k \times S^{n-k}$, então Y tem o mesmo tipo de homotopia de K . Suponhamos que K seja $(p-1)$ -conexo e que $\pi_p(K) = G$. Então já existem duas condições da proposição 3.6, satisfeitas: existência de uma extensão $h_p: X_p \rightarrow Y$ de h e injetividade do homomorfismo ϕ_{p+1}^u .

Consideremos agora $M = S^m$ e $V^{m+k-n} \subset S^m$ uma subvariedade tal que $f_V^*(v_K) = v_V$. Nestas condições, a obstrução à extensão de $h: A \rightarrow Y$ é a classe obtida pela intersecção das funções f_V e g .

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \dot{D}(v_V) & \xrightarrow{h_1} & \dot{D}(v_K) \\ \downarrow P_V & \curvearrowright & \downarrow P_K \\ V & \xrightarrow{f_V} & K \end{array}$$

onde $\dot{D}(v_V)$ e $\dot{D}(v_K)$ são os fibrados em esferas dos fibrados normais de V e K em M e N , respectivamente.

Proposição 3.8

Seja $h_p: X_p \rightarrow Y$ uma extensão de h . Suponhamos que ϕ_{p+1}^u seja um monomorfismo e que existam uma variedade orientada Q^{k-p} e uma aplicação contínua $g: Q \rightarrow K$

com $\partial D_Y(u) = (\pi_{\dot{D}(v_k)})_* (\mu_{Q_1}^G)$, onde

$$[Q_1, p_k \circ \pi_{\dot{D}(v_k)}] = I_g(p_k).$$

Então existe $h_{p+1}: X_{p+1} \rightarrow Y$ tal que
 $h_{p+1}|_{X_{p-1}} = h_p|_{X_{p-1}}$ se, e somente se, $(\pi_V)_* (\mu_{V_1}^G) = 0$,
 onde $[V_1, f_V \circ \pi_V] = I_g(f_V)$.

Prova

Segue da Observação 2, Capítulo I, que se
 $I_g(p_k) = [Q_1, p_k \circ \pi_{\dot{D}(v_k)}]$, então $p_k^*(D_K^{-1}g_*(\mu_Q^G)) =$
 $= D_{\partial Y}^{-1}(\pi_{\dot{D}(v_k)})_* (\mu_{Q_1}^G)$.

Obteremos uma expressão para $h^*(u)$ em termos das condições dadas. Temos:

$$\begin{aligned} h^*(u) &= h_1^* \cdot D_{\partial Y}^{-1}(\pi_{\dot{D}(v_k)})_* (\mu_{Q_1}^G) = h_1^* p_k^*(D_K^{-1}g_*(\mu_Q^G)) = \\ &= p_V^* f_V^* D_K^{-1}g_*(\mu_Q^G) \end{aligned}$$

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(V, G) & \xrightarrow{P_V^*} & H^p(\dot{D}(v_V), G) & \xrightarrow{D} & H_{m-p-1}(\dot{D}(v_V), G) & \xrightarrow{i_*} & H_{m-p-1}(S^{m-V}, G) \\ & \searrow D \simeq & & \swarrow \hookrightarrow & \uparrow \partial_1 & \swarrow \hookrightarrow & \uparrow \partial_2 \\ & & H_{m-p}(\dot{D}(v_V), \dot{D}(v_V), G) & \xrightarrow{j_{exc}^*} & H_{m-p}(S^m, S^{m-V}, G) & & \end{array}$$

onde ∂_1 e ∂_2 são os respectivos, operadores bordo das sequências exatas dos pares $(D(v_V), \dot{D}(v_V))$ e $(S^m, S^m - V)$.

Aqui estamos usando o fato que V tem o mesmo tipo de homotopia de $D(v_V)$.

Os casos de interesse ocorrem para $p \neq 0$ e $p \neq m$; em tais casos, observamos, da sequência exata do par $(S^m, S^m - V)$, que ∂_2 é injetivo.

Nestas circunstâncias, $i_* DP_V^*(\alpha) = \partial_2 j_* D(\alpha) = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$ para $\alpha \in H^p(V, G)$.

Pelo Teorema 2.7, existe $h_{p+1}: X_{p+1} \rightarrow Y$ que estende h se, e sô se, $D_X \delta h^*(u) = 0$.

Mas

$$\begin{aligned} D_X \delta h^*(u) &= i_* D_{\dot{D}(v_V)} h^*(u) = \\ &= i_* D_{\dot{D}(v_V)} \cdot P_V^* f_V^* D_k^{-1} g_*(\mu_Q^G) = 0 \iff \\ &\partial_2 j_* D_{D(v_V)} f_V^* D_k^{-1} g_*(\mu_Q^G) = 0 \iff \\ &f_V^* D_k^{-1} g_*(\mu_Q^G) = 0, \end{aligned}$$

o que é equivalente a $D_V^{-1}(\pi_V)_*(\mu_{V_1}^G) = 0$, considerando-se $[V_1, f_V \circ \pi_V] = I_g(f_V)$. $\square$

Nas hipóteses da proposição 3.8, se Q é uma subvariedade de K , então h se estende a X_{p+1} se, e somente se, $f_V^{-1}(Q)$ é homóloga a zero em $H_{m+k-n-p}(V, G)$, se $f_V \nmid Q$.

Para a próxima proposição vamos necessitar da seguinte definição:

"Sejam W^{m+n} uma variedade orientada e $N \subset W$ uma subvariedade fechada orientada de dimensão n .

Sejam M^m uma variedade compacta, orientada e $f: M \rightarrow W$, diferenciável com $f \pitchfork N$. Um ponto $x \in f^{-1}(N)$ é um ponto com sinal positivo ou negativo, conforme o isomorfismo linear

$$T_x M \xrightarrow{T_f} T_y W \xrightarrow{\pi} \frac{T_y W}{T_y N}, \quad \text{com } y = f(x),$$

preserve ou inverta orientação

Escrevemos $\#_x(f, N) = 1$ ou -1 , conforme x seja um ponto com sinal positivo ou negativo.

O número de intersecção de f com N é o inteiro $\#(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} \#_x(f, N).$ "

Consideremos agora $N^n = K^k \times S^{n-k}$, M^m uma variedade conexa; V^{m+k-n} uma subvariedade de M com fibrado normal trivial; suponhamos V conexa ou com $n-k > 1$.

Proposição 3.9

Seja $h_{m-1}: X_{m-1} \rightarrow Y$ uma extensão de h e su

ponhamos que φ_m^u seja um monomorfismo. Suponhamos ainda que exista uma subvariedade Q^{k-m+1} de K tal que $[Q \times S^{n-k-1}]$ represente $\partial D_Y(u)$.

Então h_{m-1} se estende sobre X se, e somente se, $\#(h_1, Q \times S^{n-k-1}) = 0$.

Prova

Observemos primeiramente que $h_1^{-1}(Q \times S^{n-k-1})$ tem número finito de pontos.

Se $\#(h_1, Q \times S^{n-k-1}) = 0$ e V é conexa, é possível construir 1-cadeias em V , ligando cada ponto positivo a um negativo.

Se $n - k > 1$ então $M - V$ é conexa. Logo se $\#(h_1, Q \times S^{n-k-1}) = 0$, podemos construir 1-cadeias em $M - V$, conectando cada ponto positivo a um negativo.

Em qualquer caso, $i_*([h_1^{-1}(Q \times S^{n-k-1})]) = 0$ em $H_0(M - V, G)$.

Reciprocamente, se $\delta h^*(u) = 0$, então $i_*[h_1^{-1}(Q \times S^{n-k-1})] = 0$ e, como $h_1^{-1}(Q \times S^{n-k-1})$ possui número finito de pontos, segue que $\#(h_1, Q \times S^{n-k-1}) = 0$. $\square$

§4. Exemplos

Obtivemos, em nossos estudos, várias aplicações a-

través da utilização das técnicas atrás desenvolvidas. O que vem abaixo é uma significativa amostra dos resultados obtidos.

Exemplo 1) Consideremos V^2 uma variedade orientada mergulhada em S^4 ; $P^3 \times S^3 \times p$ mergulhada canonicamente em $P^3 \times S^3 \times S^2$; seja $f_V: V \rightarrow P^3 \times S^3 \times p$ uma aplicação diferenciável.

$$\begin{array}{ccc} S^4 & & P^3 \times S^3 \times S^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ V^2 & \xrightarrow{f_V} & P^3 \times S^3 \times p \end{array}$$

Os correspondentes fibrados normais são triviais, então $f_V^*(\nu_{P^3 \times S^3 \times p}) = \nu_V$. Logo, existe uma extensão local que, restrita aos fibrados em esferas, será denotada por $h_1: A \rightarrow \partial Y$.

Seja $h: A \rightarrow Y$, $h = h_1 \circ j$, onde $j: \partial Y \rightarrow Y$ é a inclusão. Aqui, Y tem o mesmo tipo de homotopia de $P^3 \times S^3$, sendo portanto n -simples para todo n .

Temos também que $\pi_1(Y) = Z_2$, $\pi_2(Y) = 0$ e $\pi_3(Y) = Z \oplus Z$, suponhamos $H_3(X, A, Z)$ livre.

Se $V^2 = S^2$, então $H^2(X, A, Z_2) = 0$, portanto h se estende sobre X_2 .

Se $V^2 \neq S^2$, consideremos $u \in H^1(Y, Z_2) \cong H^1(P^3 \times S^3, Z_2) \otimes H^0(D^2, Z_2)$ um gerador, e a composta:

$$H^1(Y, Z_2) \xrightarrow{D_Y} H_7(Y, \partial Y, Z_2) \xrightarrow{\partial} H_6(\partial Y, Z_2)$$

Pela fórmula de Künneth, $H_6(\partial Y, Z_2) \approx H_3(P^3, Z_2) \otimes H_3(S^3, Z_2) \otimes H_0(S^1, Z_2) \oplus H_2(P^3, Z_2) \otimes H_3(S^3, Z_2) \otimes H_1(S^1, Z_2)$.

A classe $\partial D_Y(u)$ é representada pela subvariedade de $P^2 \times S^3 \times S^1 \subset P^3 \times S^3 \times S^1$ e, como $M^4 = S^4$, h_1 se estende sobre X_2 se, e somente se, a classe $[f_V^{-1}(P^2 \times S^3)]$ é homóloga a zero em $H_1(V, Z_2)$, se $f_V \cap P^2 \times S^3$. (Prop. 3.8)

Seja $V_1 = f_V^{-1}(P^2 \times S^3)$ e suponhamos que exista $f_1: V^2 \rightarrow P^3 \times S^3$, $f_1 \sim f_V$, transversal a $P^2 \times S^3$ com $V_1 = f_1^{-1}(P^2 \times S^3)$ e $i_*[V_1] = 0$, onde $i: V_1 \rightarrow V$ é a inclusão.

Segue que $f_1^*(Dj_*[P^2 \times S^3]) = D(i_*[V_1]) = 0$ e, então, $f_1^*(u) = 0$. Concluimos que f_1 é homotópica a constante sobre $V^{(1)}$ (Teorema 2.1). Sendo $\pi_2(P^3 \times S^3) = 0$, teremos $f_1 \sim 0$ sobre V^2 .

Então h se estende sobre X_2 se, e somente se, $f_1 \sim 0$ em V^2 .

Como $\pi_2(Y) = 0$, existe extensão de h sobre X_3 .

Sendo o homomorfismo de Hurewicz, $\mathcal{H}: \pi_3(Y) \rightarrow H_3(Y)$ monomorfismo e $H_3(X, A, Z)$ livre, decorre que a induzida $\mathcal{H}_4^3: H^4(X, A, \pi_3(Y)) \rightarrow H^4(X, A, H_3(Y))$ é monomorfismo.

Tomemos $u_3 \in H^3(P^3 \times S^3 \times D^2, Z \oplus Z) \approx \text{Hom}(H_3(P^3) \otimes H_0(S^3) \otimes H_0(D^2) \oplus H_0(P^3) \otimes H_3(S^3) \otimes H_0(D^2), Z \oplus Z)$ o elemento tal que $\varphi^*(l_3(S^3 \times S^3)) = u_3$, onde

$\varphi: P^3 \times S^3 \rightarrow S^3 \times S^3$ é a aplicação obtida através da correspondência biunívoca $[P^3 \times S^3, S^3 \times S^3] \xleftrightarrow{\sim} H^3(P^3 \times S^3, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

Se $x_1 \in H_3(P^3) \otimes H_0(S^3) \otimes H_0(D^2)$ e $x_2 \in H_0(P^3) \otimes H_3(S^3) \otimes H_0(D^2)$, temos que:

$$\langle u_3, x_1 + x_2 \rangle = \langle \varphi^*(L_3(S^3 \times S^3)), x_1 + x_2 \rangle =$$

$$= \langle L_3(S^3 \times S^3), \varphi_*(x_1 + x_2) \rangle = x_1 + x_2.$$

Consideremos a composta:

$$H^3(P^3 \times S^3 \times D^2, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_Y^D} H_5(P^3 \times S^3 \times D^2, P^3 \times S^3 \times S^1, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\partial} H_4(P^3 \times S^3 \times S^1, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = (H_3(P^3) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes$$

$$\otimes (H_0(S^3) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes H_1(S^1) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus$$

$$\oplus (H_1(P^3) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes (H_3(S^3) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes$$

$$\otimes (H_0(S^1) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \oplus (H_0(P^3) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes$$

$$\otimes (H_3(S^3) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes (H_1(S^1) \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}).$$

A classe $\partial D_Y(u_3)$ é então representada pelas subvariedades $P^3 \times p_{-}^{to} \times S^1$ e $p_{-}^{to} \times S^3 \times S^1$.

Então, h se estende sobre X_4 se, e somente

se, $f_V^{-1}(P^3 \times p_-^{to})$ e $f_V^{-1}(p_-^{to} \times S^3)$ forem homólogas a zero (Proposição 3.8). Levando em conta as dimensões envolvidas, podemos tornar $P^3 \times p_-^{to}$ e $p_-^{to} \times S^3$ disjuntos de $f_V(V)$.

Então existe $f: S^4 \rightarrow P^3 \times S^3 \times S^2$, transversal a $P^3 \times S^3 \times p_-^{to}$ e tal que $V = f^{-1}(P^3 \times S^3 \times p_-^{to})$. $\square$

Exemplo 2) Consideremos os mergulhos canônicos

$$Id \times i: S^1 \times CP(2) \rightarrow S^1 \times CP(3) \quad e$$

$$Id \times j: CP(3) \times S^6 \times CP(3) \rightarrow CP(3) \times S^6 \times CP(4).$$

Seja $f_V = (f_1, i): S^1 \times CP(2) \rightarrow (CP(3) \times S^6) \times CP(3)$, definida por uma aplicação $f_1: S^1 \rightarrow CP(3) \times S^6$ qualquer e $i: CP(2) \rightarrow CP(3)$ é o mergulho canônico.

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times CP(3) & & (CP(3) \times S^6) \times CP(4) \\ \uparrow Id \times i & & \uparrow Id \times j \\ S^1 \times CP(2) & \xrightarrow{f_1 \times i} & (CP(3) \times S^6) \times CP(3) \end{array}$$

Observemos que v_j é o fibrado linha complexo γ^3 , e $i^*(\gamma^3) = \gamma^2$, que é o fibrado normal v_i .

Então $(f_1 \times i)^*(v_{Id \times j}) = v_{Id \times i}$ e, portanto, existe extensão local.

Notemos que, nesse caso, Y tem o mesmo tipo de homotopia de $CP(3) \times S^6 \times D^8$, que é n -simples para todo n .

Os grupos de homotopia de Y são: $\pi_1(Y) = 0$, $\pi_2(Y) = \mathbb{Z}$; $\pi_3(Y) = \pi_4(Y) = \pi_5(Y) = 0$ e $\pi_6(Y) = \mathbb{Z}$.

A composta

$$H^2(Y, Z) \xrightarrow{h^*} H^2(S^1 \times S^5, Z) \xrightarrow{\delta} H^3(S^1 \times D^6, S^1 \times S^5, Z)$$

é nula. Segue que $h: A \rightarrow Y$ se estende sobre X , e, como $\pi_3(Y) = \pi_4(Y) = \pi_5(Y) = 0$, existe extensão de h sobre X_6 .

O homomorfismo de Hurewicz $\mathcal{H}: \pi_6(Y) \rightarrow H_6(Y)$ é monomorfismo e $H_6(X, A, Z)$ é livre e, portanto,

$\mathcal{H}_7^6: H^7(X, A, \pi_6(Y)) \rightarrow H^7(X, A, H_6(Y))$ é monomorfismo.

Além disso, $H_5(A)$ é livre.

A induzida de $h: A \rightarrow Y$,

$$h_*: H_6(A) = H_6(S^1 \times S^5) \rightarrow H_6(CP(3) \times S^6 \times D^8),$$

é nula, pois h é da forma $f_1 \times \ell$, $\ell: S^5 \rightarrow D^8$ é inclusão canônica no bordo; então existe

$\Psi: H_6(X) \rightarrow H_6(Y)$ comutando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_6(X) & \xrightarrow{\Psi} & H_6(Y) \\ & \searrow i_* \quad \nearrow h_* & \\ & H_6(A) & \end{array}$$

Segue do Teorema 2.9 que h se estende sobre X .

□

APÊNDICE

Seja $F \xrightarrow{i} E$ um fibrado, cuja base X é um

$$\begin{array}{c} \downarrow \pi \\ X \end{array}$$

CW complexo e a fibra F é $(n-1)$ -conexa.

Fixemos um elemento n -característico

$i_n(F) \in H^n(F, \pi_n(F))$ e suponhamos que exista uma secção de π definida em X^{n+1} .

Então existe um único elemento $\theta(s) \in H^n(E, \pi_n(F))$, satisfazendo:

$$1) \quad i^*(\theta(s)) = i_n(F)$$

$$2) \quad s^*(\theta(s)) = 0$$

Com efeito, se existe uma secção $s: X^{n+1} \rightarrow E$, então $i^*: H^n(E, \pi_n(F)) \rightarrow H^n(F, \pi_n(F))$ é sobre e, portanto, se $\alpha \in H^n(E, \pi_n(F))$ é tal que $i^*(\alpha) = i_n(F)$, definimos $\theta(s) = \alpha - \pi^*(s^*(\alpha))$.

Consideremos agora um $SO(n+1)$ -fibrado diferenciável, com fibra S^n e com base uma variedade orientada, M^m .

Nesse caso, o elemento $\theta(s)$ para uma secção $s: M \rightarrow E$ é o Poincaré dual de $\bar{s}_*(\mu_M) \in H_m(E, \pi_n(S^n))$, onde $\bar{s}$ é a secção oposta de s .

Fixada uma secção $s_0: M \rightarrow E$, os diagramas abai

co comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 [M, E] & \xrightarrow{\varphi} & H^n(E) \\
 \downarrow \xi & \searrow \pi_* & \downarrow D \\
 H^n(M) & \xrightarrow{\pi_*} & H^n(E) \\
 \downarrow D & & \downarrow D \\
 H_{m-n}(M) & \xrightarrow{\Delta} & H_m(E) \xrightarrow{\pi_*} H_m(M)
 \end{array}$$

onde $\xi([s]) = \bar{s}_*(\theta(\bar{s}_0))$; $\varphi([s]) = \theta(\bar{s}_0) - \theta(\bar{s})$, D é a dualidade de Poincaré e a última linha é parte da sequência generalizada de Gysin.

Seja $\psi: [M, E] \rightarrow H_m(E)$, definida por

$$\psi([s]) = s_*(\mu_M) - s_*(\mu_M).$$

Se $n = 1$, a aplicação ξ é sobrejetora e portanto ψ é sobre o núcleo de π_* .

Proposição

Seja $M^m \subset N^{m+2}$ uma subvariedade orientada, homóloga a zero em uma variedade orientada N . Então existe uma secção $r: M \rightarrow S(v_M)$ tal que sua imagem é homóloga a zero em $H_m(N-M)$.

Prova

Seja $i: M^m \rightarrow N^{m+2}$ a inclusão e denotemos por e , a classe de Euler do fibrado normal ν_M .

Se $D: H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_m(N, N-M, \mathbb{Z})$ é a dualidade de Alexander, então $D(e) = k_*(\mu_M)$, onde k é a composta $M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} (N, N-M)$.

Então $e = 0$ se, e somente se, $i_*(\mu_M) \subset \text{im } \gamma_*$; onde $\gamma_*: H_m(N-M) \rightarrow H_m(N)$ é a induzida da inclusão $N-M \xrightarrow{\gamma} N$. Como M é homologa a zero em N , então vale $i_*(\mu_M) \subset \text{im } \gamma_*$, o que implica $e = 0$. Logo, existe uma secção não nula definida no 2-esqueleto de M e, como $H^i(M, \pi_{i-1}(S^1)) = 0$ para $i > 2$, segue que existe uma secção não nula $s: M \rightarrow \nu(M)$. Então ν_M se decompõe como $\xi^1 \oplus R$, onde ξ^1 é o complemento ortogonal de s e R é o fibrado trivial unidimensional. Como ν_M é orientável, temos $\omega_1(\xi^1 \oplus R) = 0$, o que implica $\omega_1(\xi^1) = 0$. Então ξ^1 , sendo orientável e unidimensional, admite secção não nula. Portanto, ν_M é trivial.

Seja $s_0: M \rightarrow S(\nu_M)$ uma tal secção, onde agora $S(\nu_M)$ denota o espaço total do fibrado em esferas de ν_M .

Consideremos os diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_m(S(\nu_M)) & \xrightarrow{\pi_*} & H_m(M) \\
 & \nearrow s_{0*} & \downarrow \beta_* & \searrow \gamma_* & \downarrow i_* \\
 H_m(M) & & H_m(N-M) & \xrightarrow{\gamma_*} & H_m(N) \\
 & \searrow s_* & & &
 \end{array}$$

onde $s_* = \beta_* \circ s_{0*}$ e β_* é a induzida da inclusão $\beta: S(v_M) \rightarrow N-M$.

$$\text{Temos } \gamma_* s_*(\mu_M) = i_* \pi_* s_{0*}(\mu_M) = 0,$$

o que acarreta que $s_*(\mu_M)$ pertence ao núcleo de γ_* , que é a imagem de $\partial: H_{m+1}(N, N-M) \rightarrow H_m(N-M)$.

Usando excisão e o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{m+1}(D(v_M), S(v_M)) & \xrightarrow{\partial} & H_m(S(v_M)) \\ \downarrow \text{exc} & \circlearrowleft & \downarrow \beta_* \\ H_{m+1}(N, N-M) & \xrightarrow{\partial} & H_m(N-M) \end{array}$$

temos que existe um elemento $u \in H_m(S(v_M))$ tal que $u \in \ker \pi_*$ e $\beta_*(u) = s_*(\mu_M)$.

Como ψ é sobre o núcleo de π_* , segue que existe uma secção $r: M \rightarrow S(v_M)$ tal que $\psi([r]) = u$.

$$\text{Mas } \psi([r]) = s_{0*}(\mu_M) - r_*(\mu_M)$$

$$\text{Então } \beta_* r_*(\mu_M) = 0 \text{ em } H_m(N-M).$$

□

BIBLIOGRAFIA

- [C] Conner, P.E.; Differentiable Periodic Maps; Springer Verlag (1979).
- [D] Dold, A.; Lectures on Algebraic Topology; Springer Verlag (1980).
- [G] Greenberg, M.J., Lectures on Algebraic Topology; W.A. Benjamin, INC. (1967).
- [H] Hirsch, M.W.; Differential Topology; Springer-Verlag (1976).
- [L]₁ Loibel, G.F.; Sobre aplicações diferenciáveis com certas anteimagens dadas. Tese de livre docência ICM-USP (1971).
- [L]₂ Loibel, G.F.; Introdução à Teoria de Obstrução EESC-USP - São Carlos (1963).
- [Q] Quillen, D.; Elementary proofs of some results of Cobordism Theory using Steenrod Operations. Adv in Math., 7 (1971).
- [S] Saab, M.R.; Differentiable maps of S^3 into S^2 with given inverse images. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática (1971).
- [T] Thom, R.; Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. (1954).
- [W] Wall, C.T.C.; Determination of the cobordism ring; Ann of Math. (1960).
- [Wh] Whitehead, G.W.; Elements of Homotopy Theory. Springer Verlag (1978).