Invariantes Cohomológicos e Decomposição de Grupos

Ermínia de Lourdes Campello Fanti

orientador

Prof. Dr. Janey Antonio Daccach

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Doutor em Ciências - Área Matemática - Geometria e Topologia".

USP - São Carlos

Dezembro - 1992

Agradecimentos

Ao Professor Janey Antonio Daccach, pela dedicada e atenciosa orientação.

Ao meu esposo, pelo amor, compreensão e apoio nos momentos difíceis.

À Gorete, pela amizade e participação nesta caminhada.

Aos Professores do ICMSC - USP, pela acolhida, formação e estímulo.

Ao Departamento de Matemática da UNESP - São José do Rio Preto que me proporcionou condições adequadas para à dedicação ao Programa de Doutorado.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

Aos meus Professores do curso de graduação (UNESP - SJRP) e Mestrado (IMPA) pela formação e incentivo.

À todos que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho, em particular aos meus pais por iniciar-me nos estudos, à vó Bel pelo carinho dedicado à Aline e Gabriela durante minha ausência e ao amigo Toninho pelo excelente trabalho de digitação.

À Deus, por tudo.

Dedico ao

Dinho

Aline e

Gabriela

Abstract

In this work we define a cohomological invariant $E(G, \mathcal{S}, M)$ where G is a group, $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ is a family of infinite index subgroups of G and M a $\mathbb{Z}_2 G$-module. The case where $\mathcal{S} = \{S\}$ is investigated. We verify that $E(G, \{S\}, M)$ has a interpretation in terms of derivations and principal derivations, and so in certain cases computation is available. Also we give a topological interpretation for $E(G, \{S\}, M)$ in terms of relative cohomology of complexes (X, Y) if (X, Y) is an Eilenberg-MacLane pair realizing (G, S). This invariant is closely related to the classical end $e(G)$ for a group G, and the ends $e(G, S)$, $\tilde{e}(G, S)$ for a group pair. We denote $E(G, \{S\}, \mathbb{Z}_2(G/S))$ and $E(G, \{S\}, \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} PS)$ by $E(G, S)$ and $\tilde{E}(G, S)$ respectively. We have that $E(G, \{1\}) = \tilde{E}(G, \{1\}) = e(G)$ and in some cases $E(G, S) = e(G, S)$ and $\tilde{E}(G, S) = \tilde{e}(G, S)$. However we give examples where they are distinct. Some results are obtained in the case where G and S have certain property of duality. We relate $\tilde{E}(G, S)$ with decomposition of groups like HNN-extensions and free amalgamated product.

Resumo

Neste trabalho definimos um invariante cohomológico $E(G,\mathcal{S},M)$ onde G é um grupo, $\mathcal{S}=\{S_i\}_{i\in I}$ é uma família de subgrupos de G de índice infinito e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. O caso onde $\mathcal{S}=\{S\}$ é investigado. Verificamos que $E(G,\{S\},M)$ têm uma interpretação em termos de derivações e derivações principais, e deste modo em certos casos a computação deste invariante é possível. Também apresentamos uma interpretação topológica para $E(G,S,M)$ em termos de cohomologia relativa de complexos (X,Y) se (X,Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G,S). Este invariante está intimamente relacionado com o end clássico $e(G)$ para um grupo G, e os ends $e(G,S)$ e $\tilde{e}(G,S)$ para um par grupo (G,S). Denotamos $E(G,\{S\},\mathbb{Z}_2(G/S))$ e $E(G,\{S\},\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}_2S}PS)$ por $E(G,S)$ e $\hat{E}(G,S)$ respectivamente. Temos que $E(G,\{1\})=\hat{E}(G,\{1\})=e(G)$ e em alguns casos $E(G,S)=e(G,S)$ e $\hat{E}(G,S)=\tilde{e}(G,S)$. Entretanto damos exemplos onde eles são distintos. Alguns resultados são obtidos no caso onde G e S têm certas propriedades de dualidade. Relacionamos $\hat{E}(G,S)$ com decomposições de grupos tais como HNN-extensões e produto livre amalgamado.

ÍNDICE

Introdução i

Capítulo I. Preliminares 1

1. Homologia e Cohomologia de Grupos 2
2. H^* e H_* como funtores do módulo coeficiente e funtores de duas variáveis 8
3. Módulos Induzidos e Coinduzidos 10
4. $H^1(G, M)$ e extensões de grupos 21
5. Grupos de Dualidade 23

Capítulo II. Um Invariante cohomológico para par grupos 33

1. Cohomologia Relativa 34
2. O Invariante $E(G, S, M)$ 38
3. $E(G, S)$ e Dualidade 46
4. $E(G, S)$ e o invariante end $e(G, S)$ 53
5. Uma interpretação para $E(G, S, M)$ em termos de cohomologia relativa de complexos 67

Capítulo III. O Invariante $\tilde{E}$(G,S) 71

1. O Invariante $\tilde{E}(G, S)$ 71
2. Propriedades 77
3. $\tilde{E}(G, S)$ e o invariante end $\tilde{e}(G, S)$ 82

Capítulo IV. $\tilde{E}$(G,S) e decomposição de grupos 90

1. Decomposição de grupos 91
2. $\tilde{E}(G, S)$ e decomposição de grupos segundo Kropholler e Roller 93

Bibliografia 105

INTRODUÇÃO

Sabemos da existência de invariantes denominados ends (mais precisamente número de ends) para X, um espaço topológico: $e(X)$; para G um grupo: $e(G)$ e para pares (G,S) : $e(G,S)$ e $\tilde{e}(G,S)$.

A teoria de ends de espaços topológicos foi introduzida por Freudenthal em [13] (1931).

A teoria de ends de grupos foi introduzida por Hopf [16] (1943) para grupos finitamente gerados e foi modelada na teoria de ends de espaços.

Posteriormente Specker [30] (1949) deu uma definição puramente algébrica para $e(G)$, para todo grupo G (não necessariamente finitamente gerado). Se G é infinito então

$$e(G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G;\mathbb{Z}_2G) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{Der(G,\mathbb{Z}_2G)}{P(G,\mathbb{Z}_2G)}. \tag{1}$$

O end $e(G,S)$ foi introduzido por Houghton [17] (1974) para grupos topológicos, e Scott [26] (1977) explorou este invariante no caso discreto. Para $e(G,S)$ não existe uma fórmula cohomológica do tipo (1) quando $[G:S]=\infty$.

Quanto ao invariante end $\tilde{e}(G,S)$, foi definido por Kropholler e Roller em [2] (1989), e se $[G:S]=\infty$ então

$$\tilde{e}(G,S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G;\mathcal{F}_SG) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{Der(G,\mathcal{F}_SG)}{P(G,\mathcal{F}_SG)} \tag{2}$$

onde $\mathcal{F}_SG = \{A \subseteq G \mid A \subseteq F.S$ para algum subconjunto finito F de $G\}$.

Com base na teoria de cohomologia relativa de grupos, nós definimos um invariante "end" generalizado $E(G,\mathcal{S},M)$ para G um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G com $[G:S_i]=\infty$, $\forall i \in I$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer.

A definição deste invariante (e parte do capítulo II deste trabalho) foi obtida em colaboração com Maria Gorete Carreira Andrade [2], e surgiu da tentativa de se obter

para $e(G,S)$ uma fórmula do tipo (1) envolvendo cohomologia relativa de grupos.

Neste trabalho estamos interessados no caso em que $\mathcal{S}$ consiste de um único subgrupo S, isto é, $\mathcal{S} = \{S\}$. O caso genérico $E(G,\mathcal{S},M)$ é explorado por Maria Gorete Carreira Andrade em [1].

Relacionaremos os invariantes $E(G,\{S\},\mathbf{Z}_2(G/S))$ e $E(G,\{S\},\mathcal{F}_S G)$ com $e(G,S)$ e $\tilde{e}(G,S)$, respectivamente. Veremos que em certos casos eles coincidem. Porém, nossos invariantes dão uma condição necessária para que (G,S) seja um D^n-par, o que não ocorre com os demais.

Além disto, $E(G,\{S\},\mathcal{F}_S G)$ nos dá informações a respeito do subgrupo S quando $e(G) = \infty$, o que não acontece com $\tilde{e}(G,S)$ pois, se $e(G) = \infty$ então $\tilde{e}(G,S) = \infty$ para qualquer subgrupo S.

Veremos também que sob algumas hipóteses $E(G,\{S\},\mathcal{F}_S G)$ mede exatamente quando G se decompõe sobre subgrupo comensurável com S, o que não é verdade para $\tilde{e}(G,S)$.

Este Trabalho está dividido em 4 capítulos.

No capítulo I recordamos alguns resultados de (co)homologia de grupos e dualidade. O propósito deste capítulo é de fixar notação e evitar ao leitor frequentes consultas às referências.

No capítulo II, introduzimos o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ para $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$, com $[G:S_i] = \infty$, $\forall i \in I$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, ou seja,

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} \mathrm{Ker}\ res^G_{\mathcal{S},M}$$

onde $res^G_{\mathcal{S},M} : H^1(G;M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M)$ é a aplicação restrição (II.2.1).

No caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$, nós denotamos $E(G,\{S\},M)$ simplesmente por $E(G,S,M)$.

Algumas caracterizações deste invariante foram apresentadas.

A primeira é em termos de característica de Euler parcial (II.2.4), isto é, *"Se a dimensão (em $\mathbb{Z}_2$) de $H^0(G;M)$, $H^0(S;M)$ e $H^1(G,S;M)$ é finita então*

$$E(G,S,M) = 1 + \dim_{\mathbf{Z}_2} H^0(G;M) - \dim H^0(S;M) + \dim H^1(G,S;M)." \qquad (3)$$

(Esta caracterização nos foi sugerida pelo Prof. Alejandro Adem).

A segunda é em termos de derivações e derivações principais (II.2.5), a saber

$$E(G,S,M) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G,S;M)}{P(G,S,M)} = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}. \qquad (4)$$

A terceira é em termos de cohomologia relativa de complexos (II.5.2), ou seja, *se* (X,Y) *é um par Eilenberg-MacLane realizando* (G,S) *então*

$$E(G,S,M) = 1 + \dim \frac{H^1(X,Y;M)}{M^S/M^G}, \qquad (5)$$

onde a cohomologia é tomada com coeficientes locais.

Neste capítulo nos dedicamos de modo especial ao invariante $E(G,\{S\},\mathbb{Z}_2(G/S))$ que denotamos por $E(G,S)$.

Provamos que: *Dado* (G,S) *com* $[G:S]=\infty$, *se* (G,S) *é um* D^n*-par então* $E(G,S)=1$ *ou equivalentemente, se* $E(G,S)\neq 1$ *então* (G,S) *não é um* D^n*-par* (II.3.6). (Este resultado é uma generalização do existente para um grupo, a saber, se G é um D^n-grupo, $n>1$, então $e(G)=1$).

Como aplicação deste resultado concluimos que um determinado par (G,S) não é de dualidade. Isto é obtido computando $E(G,S)$ em termos de derivações e derivações principais (II.3.8).

Também verificamos, por exemplo, que se G é um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo então $E(G,S)\leq 2$.

Em II.4 relacionamos $E(G,S)$ com os ends $e(G)$ e $e(G,S)$. Verificamos (em II.4.24) que

$$E(G,S) \leq e(G,S)$$

e estabelecemos uma condição necessária e suficiente para se obter a igualdade (II.4.25). Nos casos em que a igualdade é válida (por exemplo quando S é normal em G (II.4.24 e II.4.30)) teremos para $e(G,S)$ uma fórmula do tipo (1) envolvendo cohomologia relativa, ou seja,

$$e(G,S) = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} \frac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}.$$

Também nestes casos $e(G,S)$ terá uma interpretação topológica em termos de pares Eilenberg-MacLane (II.5.3).

No capítulo III, dados (G,S) com $[G:S]=\infty$, estudamos o invariante

$E(G,\{S\},M)$ para $M = \mathcal{F}_S G \simeq \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} PS$, que denotamos por $\hat{E}(G,S)$.

Para este invariante conseguimos (III.1.6) uma definição equivalente que inclui o caso em que $[G:S] < \infty$ (isto não foi possível para $E(G,S)$).

Várias propriedades de $\hat{E}(G,S)$ são apresentadas. Por exemplo, provamos que $E(G,S) \leq \hat{E}(G,S)$ (III.2.1) e concluimos que a igualdade nem sempre ocorre (III.2.3).

Também observamos que não existe relação entre os invariantes $\hat{E}(G,S)$ e $e(G,S)$ (III.2.4).

Verificamos que $\hat{E}(G,S)$ preserva propriedades de dualidade análogas às obtidas para $E(G,S)$ embora seja um majorante de $E(G,S)$ (III.2.8). Usando estas propriedades concluimos, por exemplo, que $\hat{E}(\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}*\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}*\mathbb{Z}) = 2$ (III.2.10)(ii).

Por último (III.3) comparamos $\hat{E}(G,S)$ com $\tilde{e}(G,S)$. Temos que $\hat{E}(G,S) \leq \tilde{e}(G,S)$, mas a igualdade nem sempre ocorre pois, por exemplo, a propriedade: "se (G,S) é um D^n-par então $\hat{E}(G,S) = 1$" não é verdadeira para $\tilde{e}(G,S)$ (III.3.6). Uma condição necessária (no caso em que os invariantes são finitos) e suficiente para se obter a igualdade é que $res^G_{S,\mathcal{F}_S G}$ seja a aplicação nula. Apresentamos certos casos em que a igualdade ocorre. Por exemplo, se S é normal e finitamente gerado (III.3.9) ou se S é um PD^n-grupo e $\{g \in G \mid cd(S^g \cap S) = n-1\} = \emptyset$ (III.3.11). Como aplicação deste último resultado computamos $\hat{E}(G,S)$ em um exemplo específico (III.3.12).

Finalizando observamos que por (5) $\hat{E}(G,S)$ tem uma interpretação topológica em termos de pares Eilenberg-MacLane. Daí. $\tilde{e}(G,S)$ também terá tal interpretação se a igualdade $\tilde{e}(G,S) = \hat{E}(G,S)$ for válida (III.3.16).

No último capítulo analisamos alguns dos resultados de Kropholler e Roller sobre decomposição de grupos [21] em termos de nosso invariante $\hat{E}(G,S)$.

Em todos os resultados de [21] é suposto que $H^1(G;\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ ($\Longleftrightarrow \tilde{e}(G,S) = 2$ por (2)). Se G e S são finitamente gerados, os autores apresentaram uma condição necessária e (sob certas restrições) suficiente, para G se decompor sobre um subgrupo comensurável com S. A condição é que a obstrução $sing_G(S)$ (introduzida pelos autores), seja nula.

Verificamos que $\hat{E}(G,S)$ substitui a obstrução $sing_G(S)$ (que está definida

somente quando $\hat{e}(G,S) = 2$). Por exemplo, adaptando um dos resultados de [21] em termos de $\hat{E}(G,S)$ temos: "se G é um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se e somente se $\hat{E}(G,S) = 2$."

Nosso objetivo é obter resultados similares aos de [21], porém substituindo $sing_G(S)$ por $\hat{E}(G,S)$, e sempre que possível, retirar a hipótese $\hat{e}(G,S) = 2$.

Neste sentido verificamos que o seguinte resultado é válido sem tal hipótese. "*Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $\hat{E}(G,S) \geq 2$*" (IV.2.6). Daí concluímos que: "*Se (G,S) é um D^n-par então G não se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S*" (IV.2.7).

Com isto temos exemplos de pares (G,S) tais que $\hat{e}(G,S) \neq 2$ (e portanto $sing_G(S)$ não está definida) mas no entanto, usando $\hat{E}(G,S)$ podemos concluir que G não se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S (IV.2.8).

Em outro resultado analisado verificamos que a hipótese $\hat{e}(G,S) = 2$ é consequência das outras, portanto não é possível retirá-la. Também verificamos que uma das condições imposta neste resultado pode ser enfraquecida (IV.2.11).

CAPÍTULO I

Preliminares

O objetivo deste capítulo é recordar alguns resultados da teoria de (co)homologia de grupos envolvendo a teoria de dualidade, que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho.

Para as secções 1 à 4 nossa referência básica será [8]. Queremos observar que em [8] a (co)homologia de um grupo G é definida sobre o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros, com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M, porém pode-se considerar, no lugar de $\mathbb{Z}$, qualquer anel com unidade R.

Aqui consideraremos o caso em que R é o anel $\mathbb{Z}$ ou o corpo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ de dois elementos. Porém nosso interesse (nos capítulos seguintes) é no caso em que $R = \mathbb{Z}_2$. Portanto nos restringiremos, sempre que for conveniente, somente a este caso.

Para a secção 5 nossa referência básica será as notas de R. Bieri [4].

A seguir damos uma breve descrição do conteúdo deste capítulo: Primeiro introduzimos o conceito de homologia e cohomologia de grupos, via resoluções projetivas de R sobre RG, e apresentamos a interpretação topológica de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ para todo RG-módulo M (secção 1). A seguir (na secção 2) vemos H_* e H^* como funtores covariantes do módulo coeficiente, e mais geralmente, como funtores de duas variáveis.

Na secção 3 estudamos os $\mathbb{Z}_2G$-módulos do tipo $Ind_S^G M$ e $Coind_S^G M$, onde S é um subgrupo qualquer de G e M é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo. Esta secção é fundamental para os próximos capítulos. Nela recordamos propriedades básicas que serão muitas vezes utilizadas em nossos resultados, dentre elas destacamos a *Fórmula de Mackey e o Lema de*

Shapiro. Na secção 4 apresentamos a interpretação de $H^1(G;M)$ em termos de extensões cindidas de grupos.

Finalmente, na secção 5, recordamos o conceito de dimensão (co)homológica, grupos de dualidade e suas propriedades mais relevantes.

Notações especiais: Conforme observamos acima, nos restringiremos quase sempre ao caso em que $R = \mathbb{Z}_2$. Assim, por conveniência, em todos os capítulos, denotaremos $- \otimes_{\mathbb{Z}_2 G} -$, $Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(-,-)$, $- \otimes_{\mathbb{Z}_2} -$, $Hom_{\mathbb{Z}_2}(-,-)$ e $\dim_{\mathbb{Z}_2}$ respectivamente por $- \otimes_G -$, $Hom_G(-,-)$, $- \otimes -, Hom(-,-)$ e dim.

1. Homologia e Cohomologia de Grupos

Para nós G sempre denotará um grupo, R o anel $\mathbb{Z}$ ou o corpo $\mathbb{Z}_2$, e RG o *anel grupo de G sobre R*: Os elementos de RG são somas formais $\sum r_g g$ com $r_g \in R$, $g \in G$ onde $r_g = 0$ para quase todo g (portanto RG é o R-módulo livre gerado pelos elementos de G) e, as operações são dadas por

$$\begin{aligned} (\sum r_g g) + (\sum s_g g) &= \sum (r_g + s_g) g \\ (\sum r_g g).(\sum s_g g) &= \sum t_g g \quad , \quad \text{onde } t_g = \sum_{xy=g} r_x s_y. \end{aligned}$$

A unidade de RG é o elemento $1 = 1.e$ onde e é o elemento neutro de G. O elemento $1g \in RG$ será denotado por g.

Para qualquer grupo G podemos definir o homomorfismo de aneis

$$\varepsilon : RG \to R, \quad \text{tal que } \varepsilon(g) = 1, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Este homomorfismo é denominado *aplicação aumentação*.

1.1: Neste trabalho, a menos que se especifique o contrário, trabalharemos na categoria de RG-módulos à esquerda.

É interessante observar que todo RG-módulo à esquerda N ($R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$) pode ser considerado como um RG-módulo à direita por definir $n.(rg) = (rg^{-1})n$, para

$r \in R$, $g \in G$ e $n \in N$. De modo análogo, todo RG-módulo à direita pode ser considerado como um RG-módulo à esquerda.

1.2 Observações: (a) Se M é um RG-módulo (à esquerda) então:

(i) M é um R-módulo (á esquerda) pois basta definir $r.m := (re)m$ onde e é o elemento neutro de G, e

(ii) Existe uma ação (à esquerda) de G em M dada por $g.m = (1g)m$.

Reciprocamente, se M é um R-módulo e existe uma ação de G em M então podemos dar a M uma estrutura de RG-módulo, definindo $(rg).m := r(gm)$ e estendendo por linearidade.

Assim, para que M seja um $\mathbb{Z}_2G$-módulo é necessário, e suficiente, que M seja um $\mathbb{Z}_2$-módulo (isto é, um grupo abeliano em que todo elemento tem ordem 2 e portanto $m = -m$) e que exista uma ação de G sobre M.

Logo, se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo então obviamente M é um $\mathbb{Z}G$-módulo.

(b) O anel R será sempre considerado um RG-módulo com a G-ação trivial, isto é, $g.r = r$, para todo $r \in R$ e $g \in G$. Assim, $(\sum r_g g).r = \sum r_g(g.r) = \sum r_g r$.

No caso em que $R = \mathbb{Z}_2$ esta é a única estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo possível, pois $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2) = \{id\}$.

(c) *A ação diagonal:* Sejam M e N RG-módulos (à esquerda). Nós podemos dar a $M \otimes_R N$ (respectivamente $Hom_R(M,N)$) uma estrutura de RG-módulo induzida pela *G-ação diagonal*

$g.(m \otimes n) = gm \otimes gn$, $\forall g \in G$, $m \in M$ e $n \in N$

(resp. $(g.f)(m) = gf(g^{-1}m)$, $\forall g \in G$, $m \in M$ e $f \in Hom_R(M,N)$).

Uma *resolução projetiva* de R sobre RG é uma sequência exata de RG-módulos

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0 \qquad (*)$$

em que cada F_i é RG-projetivo.

Tal resolução sempre existe pois podemos tomar $F_0 = RG$, ε a aplicação

aumentação, e se $F_1, \ldots, F_n$ são definidos, tomamos para F_{n+1} qualquer módulo livre aplicado sobre $K_n :=$ Ker $(F_n \to F_{n-1})$ e para ∂_{n+1} a aplicação correspondente $F_{n+1} \twoheadrightarrow K_n \hookrightarrow F_n$. Note que esta construção nos dá uma resolução livre de R.

Por conveniência às vezes denotamos uma resolução $(*)$ simplesmente por $\varepsilon : F \twoheadrightarrow R$.

1.3 Definição: *Sejam $F \xrightarrow{\varepsilon} R$ uma resolução projetiva de R sobre RG e M um RG-módulo (à esquerda). Consideremos os complexos*

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \to F_2 \otimes_{RG} M \to F_1 \otimes_{RG} M \to F_0 \otimes_{RG} M \to 0 \quad e$$

$$Hom_{RG}(F, M) : 0 \to Hom_{RG}(F_0, M) \to Hom_{RG}(F_1, M) \to \cdots$$

Os **grupos de (co)homologia de G com coeficientes em M** *são definidos por*

$$\begin{aligned} H^j(G; M) &= H^j(Hom_{RG}(F, M)) , \\ H_j(G; M) &= H_j(F \otimes_{RG} M), \quad j = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Quando $M = \mathbb{Z}$ com a G-ação trivial é usual denotar $H^*(G; M)$ (resp. $H_*(G; M)$) por $H^*(G)$ (resp. $H_*(G)$). Neste caso os grupos são denominados *grupos de cohomologia de G (resp. grupos de homologia de G).*

1.4 Observações: (a) Estamos levando em conta 1.1 quando usamos a mesma resolução F para definir os grupos de homologia e cohomologia, pois em $F_n \otimes_{RG} M$, F_n é considerado como RG-módulo à direita enquanto que em $Hom_{RG}(F_n, M)$, F_n é visto como RG-módulo à esquerda.

(b) Pode-se verificar que a definição acima independe da resolução projetiva escolhida (cf. [8, 1.7.5]).

(c) Para qualquer grupo G podemos construir uma resolução bastante importante no estudo dos grupos de (co)homologia denominada *resolução Bar* (cf. [8, 1.5]). Ela é dada por:

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R$$

onde F_n é o RG-módulo livre gerado pelos simbolos $[g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_n]$, $g_i \in G$. Se $n = 0$, existe somente um tal elemento básico, denotado por $[\ ]$, assim F_0 pode ser identificado com RG se identificamos $[\ ]$ com 1. O operador bordo é dado por

$$\partial[g_1 \mid \ldots \mid g_n] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i d_i[g_1 \mid \ldots \mid g_n], \text{ onde } d_i \text{ é o } RG\text{-homomorfismo}$$

dado por:

$$d_i[g_1 \mid \ldots \mid g_n] = \begin{cases} g_1[g_2 \mid \ldots \mid g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1 \mid \ldots \mid g_{i-1} \mid g_i g_{i+1} \mid g_{i+2} \mid \ldots \mid g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1 \mid \ldots \mid g_{n-1}] & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Em dimensões baixas, esta resolução tem a forma

$$F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0,$$

onde

$$\begin{cases} \partial_2[g \mid h] = g[h] - [gh] + [g], \\ \partial_1([g]) = g[\ ] - [\ ] = g - 1 \ , \quad \text{e} \\ \varepsilon(1) = 1. \end{cases}$$

(Se exigirmos que em $[g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_n]$ tenhamos $g_i \neq 1$, para todo $1 \leq i \leq n$ então nós temos a chamada *resolução bar normalizada*).

Se $F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ é a resolução bar de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$, vamos denotar $Hom_G(F_n, M)$ por $C^n(G, M)$. Um elemento de $C^n(G, M)$ pode ser considerado como uma função $f : G^n \to M$, isto é, uma função de n variáveis de G a M onde identificamos $[g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_n]$ com $(g_1, \ldots, g_n)$. O operador cobordo $\delta : C^{n-1}(G, M) \to C^n(G, M)$ é dado por

$$(\delta f)(g_1, \ldots, g_n) = g_1 f(g_2, \ldots, g_n) - f(g_1 g_2, \ldots, g_n) + \cdots + (-1)^n f(g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

Em particular, $\delta : C^0(G, M) \to C^1(G, M)$ é tal que $(\delta f)(g) = gf[\ ] - f[\ ]$.

1.5: Sejam G um grupo e M um RG-módulo. O *grupo das derivações de G em M* é definido por

$$Der(G, M) = \{f : G \to M \mid f(gh) = gf(h) + f(g), \ \ \forall g, h \in G\},$$

e o *subgrupo das derivações principais* por

$$P(G,M) = \{d_m : G \to M,\ m \in M \mid d_m(g) = gm - m,\ \ \forall g \in G\}.$$

Observe que, no caso em que $R = \mathbb{Z}_2$, temos por 1.2 (a),

$$P(G,M) = \{d_m : G \to M,\ m \in M \mid d_m(g) = gm + m,\ \ \forall g \in G\}.$$

Usando a resolução bar obtem-se facilmente a seguinte interpretação de $H^1(G,M)$ em termos de derivações e derivações principais:

1.6 Lema: *Se G é um grupo e M é um RG-módulo, então*

$$H^1(G,M) = \frac{Der(G,M)}{P(G,M)}.$$

□

O resultado abaixo nos diz que, na categoria de $\mathbb{Z}_2G$-módulos, os grupos de (co)homologia sobre $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$ são equivalentes. Nós apresentamos aqui um esboço da prova deste resultado, visto que ele não se encontra em nossa referência básica [8].

1.7 Proposição: *Se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo então temos um isomorfismo natural de $H^*(G;M)$ com M visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo e $H^*(G;M)$ para M considerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Analogamente para $H_*(G;M)$.*

Demonstração: Seja $F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Então $F' = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$ é uma $\mathbb{Z}_2G$-resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ (cf. [9, p.6]). Agora nós temos isomorfismos naturais

$$\begin{aligned} \phi : Hom_G(F',M) &\to Hom_{\mathbb{Z}G}(F,M) \\ \psi : F' \otimes_G M &\to F \otimes_{\mathbb{Z}G} M \end{aligned}$$

dados por $\phi(f)(x) = f(x \otimes 1)$, $\psi((x \otimes r) \otimes m) = x \otimes rm$, $\forall f \in Hom_G(F',M)$, $x \in F$, $r \in \mathbb{Z}_2$ e $m \in M$; o que produz, levando em conta a definição 1.3, o resultado desejado. □

1.8 Interpretação Topológica: Finalizando esta secção veremos (na proposição abaixo) que a (co)homologia de G está relacionada com complexos $K(G,1)$.

Recordemos que se Y é um CW-complexo então Y é denominado ***complexo de Eilemberg-MacLane de tipo*** $(G,1)$ ou simplesmente um ***complexo*** $K(G,1)$ se Y satisfaz as seguintes condições:

(i) Y é conexo

(ii) $\pi_1(Y) = G$

(iii) O recobrimento universal de Y é contráctil (ou equivalentemente, $\pi_i(Y) = 0$ para todo $i \geq 2$).

Dado um grupo G é sempre possível construir um complexo $K(G,1)$ [35, 2.10].

Também, dado um $\mathbb{Z}G$-módulo M e Y um complexo $K(G,1)$ podemos construir o sistema de coeficientes locais $\mathcal{M}$ sobre Y associado ao $\mathbb{Z}G$-módulo M [36, cap. VI].

Para a demonstração da proposição nos referimos [8, II.4.1] para o caso em que $M = R$ com a G-ação trivial e [15, teor. 10.7.14c] para o caso geral, sempre levando em consideração a proposição anterior.

1.9 Proposição: *Sejam G um grupo, M um RG-módulo e Y um complexo $K(G,1)$. Então*

(i) $H_*(G;M) \simeq H_*(Y;\mathcal{M})$ *e*,

(ii) $H^*(G;M) \simeq H^*(Y;\mathcal{M})$,

onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais sobre Y associado ao $\mathbb{Z}G$-módulo M. □

Note que se M é um RG-módulo trivial (isto é, $g.m = m$, $\forall g \in G$) então

$$H_*(G;M) \simeq H_*(Y,M) \quad e \quad H^*(G;M) \simeq H^*(Y,M),$$

em particular

$$H_*(G) = H_*(Y) \quad e \quad H^*(G) = H^*(Y).$$

2. H^* e H_* como funtores do módulo coeficiente e funtores de duas variáveis

2.1: Uma vez que $F \otimes_{RG} -$ e $Hom_{RG}(F, -)$ são funtores covariantes, é claro que $H_*(G; -)$ e $H^*(G; -)$ serão também funtores covariantes da categoria de RG-módulos na categoria dos grupos abelianos. Se $f : M \to M'$ é um RG-homomorfismo a aplicação induzida $H_*(G; f) : H_*(G; M) \to H_*(G; M')$ $(H^*(G; f) : H^*(G; M) \to H^*(G; M'))$ será denotada, caso não haja confusão, simplesmente por f_* (resp. f^*).

Na proposição abaixo apresentamos algumas propriedades básicas dos funtores $H_*(G; -)$ e $H^*(G; -)$. Antes introduziremos algumas notações.

Seja M um RG-módulo. Denotemos por

$M^G = \{m \in M \mid gm = m, \ \forall g \in G\}$ e,

$M_G = M / < gm - m; \ g \in G, \ m \in M >$ (o quociente de M pelo subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $gm - m$, $m \in M$, $g \in G$).

Pode-se verificar, facilmente, que

$$M^G \simeq Hom_{RG}(R, M) \quad e \quad M_G \simeq R \otimes_{RG} M.$$

2.2 Proposição:[8, III.6.1] *Seja M um RG-módulo:*

(i) *Existe um isomorfismo natural $H_0(G; M) \simeq M_G$*

(i)' *Existe um isomorfismo natural $H^0(G; M) \simeq M^G$*

(ii) *Para qualquer sequência exata $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$ de RG-módulos e qualquer inteiro n existe uma aplicação natural $\partial : H_n(G; M'') \to H_{n-1}(G, M')$ tal que a sequência*

$$\cdots \to H_1(G; M) \xrightarrow{j_*} H_1(G; M'') \xrightarrow{\partial} H_0(G; M') \xrightarrow{i_*} H_0(G; M) \xrightarrow{j_*} H_0(G; M'') \to 0$$

é exata.

(ii)' *Para qualquer sequência exata como em (ii) e qualquer inteiro n existe uma aplicação natural $\delta : H^n(G; M'') \to H^{n+1}(G; M'')$ tal que a sequência*

$$0 \to H^0(G; M') \xrightarrow{i_*} H^0(G; M) \xrightarrow{j_*} H^0(G; M'') \xrightarrow{\delta} H^1 G; M') \xrightarrow{i_*} H^1(G; M) \to \cdots$$

é exata. □

Podemos mais geralmente ver H_* e H^* como funtor de duas variáveis como segue:

2.3: Vejamos H_* como um funtor de duas variáveis. Seja $\mathcal{C}_0$ a seguinte categoria: Um objeto de $\mathcal{C}_0$ é um par (G, M) onde G é um grupo e M um RG-módulo; uma aplicação de (G, M) em (G', M') é um par (α, f) onde $\alpha : G \to G'$ é uma aplicação de grupos e $f : M \to M'$ é uma aplicação de grupos abelianos tal que $f(gm) = \alpha(g)f(m)$, para $g \in G$, $m \in M$ (isto é, f é um homomorfismo de RG-módulos se M' é considerado como RG-módulo via α (ver secção seguinte)). Dado (α, f) seja F (resp. F') uma resolução projetiva de R sobre RG (resp. RG') e seja $\tau : F \to F'$ uma aplicação de cadeia compatível com α como em [8, II.6], (isto é, $\tau(gx) = \alpha(g)\tau(x)$, para $g \in G$ e $x \in F$). Então existe uma aplicação de cadeia

$$\tau \otimes f : F \otimes_{RG} M \to F' \otimes_{RG} M',$$

e $\tau \otimes f$ induz uma aplicação bem definida

$$(\alpha, f)_* : H_*(G; M) \to H_*(G'; M').$$

Deste modo H_* *torna-se um funtor covariante sobre* $\mathcal{C}_0$. No caso em que $M = M'$ e $f = id$, nós às vezes simplesmente escrevemos α_* para $(\alpha, id_{M'})_* : H_*(G; M') \to H_*(G'; M')$.

Note que a aplicação geral $(\alpha, f)_*$ pode ser escrita como a composta

$$H_*(G; M) \xrightarrow{H_*(G;f)} H_*(G; M') \xrightarrow{\alpha_*} H_*(G'; M'),$$

onde $H_*(G; f)$ faz sentido porque f é uma aplicação de RG-módulos.

2.4: Para a cohomologia a situação é semelhante. Seja $\mathcal{C}_1$ a categoria com os mesmos objetos que $\mathcal{C}_0$, mas onde uma aplicação de (G, M) em (G', M') é agora um par $(\alpha : G \to G',\ f : M' \to M)$. Como antes nós exigimos que f seja uma aplicação de RG-módulos via α, isto é, $f(\alpha(g)m') = gf(m')$ para $g \in G$, $m' \in M'$. Se F e F' são

resoluções para G e G' e $\tau : F \to F'$ é uma aplicação de cadeia compatível com α, existe uma aplicação de cadeia

$$Hom(\tau, f) : Hom_{RG}(F', M') \to Hom_{RG}(F, M),$$

que induz

$$\begin{array}{rcl} (\alpha, f)^* : \ H^*(G'; M') & \to & H^*(G; M). \\ [k] & \to & [f \circ k \circ \tau] \end{array}$$

Assim H^* *é um funtor contravariante sobre* C_1. No caso em que $M = M'$, escrevemos α^* para $(\alpha, id_{M'})_*$; note que a aplicação geral $(\alpha, f)^*$ é a composta

$$H^*(G'; M') \xrightarrow{\alpha^*} H^*(G; M') \xrightarrow{H^*(G;f)} H^*(G; M).$$

3. Módulos Induzidos e Coinduzidos

Seja $\alpha : \Lambda \to \Gamma$ um homomorfismo de anéis unitários. Então qualquer Γ-módulo (à esquerda) N pode ser considerado como um Λ-módulo (à esquerda) *via* α, definindo

$$a.n = \alpha(a)n, \quad \forall a \in \Lambda, \quad n \in N.$$

Neste caso dizemos que N é um Λ-módulo por *restrições de escalares.* (Vale construção análoga para módulos à direita).

Por outro lado, dado um Λ-módulo (à esquerda) M podemos obter, a partir de M, dois Γ-módulos (à esquerda) bastante relacionados com M:

1. Considere, por restrição de escalares, Γ como um Λ-módulo à direita, então podemos definir o produto tensorial $\Gamma \otimes_\Lambda M$. Este produto pode ser visto como Γ- módulo (à esquerda) definindo $x.(x' \otimes m) = xx' \otimes m$, $\forall x, x' \in \Gamma$ e $m \in M$ (onde xx' é o produto em Γ). $\Gamma \otimes_\Lambda M$ com esta estrutura de Γ-módulos é denominado o *módulo obtido de M por estensão de escalares de Λ à Γ* (via α).

2. Analogamente, considere, por restrição de escalares, Γ como um Λ-módulo à esquerda. Então podemos definir $Hom_\Lambda(\Gamma, M)$. $Hom_\Gamma(\Gamma, M)$ pode ser visto como Γ-módulo (à esquerda) definindo $(x.f)(x') = f(x'x)$, $\forall x, x' \in \Gamma$ e $f \in Hom_\Lambda(\Gamma, M)$. Este Γ-módulo é denominado o ***módulo obtido de M por co-extensão de escalares*** (via α).

O lema a seguir será utilizado na construção 3.2 abaixo. Embora seja elementar, o demonstraremos aqui para familiarizar o leitor com as muitas ações envolvidas.

3.1 Lema: *Seja M um Λ-módulo. Se $\Gamma \otimes_\Lambda M$ e $Hom_\Lambda(\Gamma, M)$ são os Γ-módulos obtidos de M por extensão e co-extensão de escalares, então as aplicações naturais*

1) $i : M \to \Gamma \otimes_\Lambda M$ *dada por* $i(m) = 1 \otimes m$, *e*

2) $\pi : Hom_\Lambda(\Gamma, M) \to M$ *dada por* $\pi(f) = f(1)$ $(1 \in \Gamma)$

são Λ-homomorfismos se vemos os Γ-módulos $\Gamma \otimes_\Lambda M$ e $Hom_\Lambda(\Gamma, M)$ como Λ-módulos por restrição de escalares via α.

Demonstração:

1) $i(am) = 1 \otimes am = 1.a \otimes m = 1\alpha(a) \otimes m = \alpha(a)1 \otimes m = \alpha(a)(1 \otimes m) = a.i(m)$, para todo $a \in \Lambda$ e $m \in M$.

2) $\pi(a.f) = \pi(\alpha(a)f) = (\alpha(a)f)(1) = f(1\alpha(a)) = f(\alpha(a)1) = f(a.1) = af(1) = a\pi(f)$, para todo $a \in \Lambda$ e $f \in Hom_\Lambda(\Gamma, M)$. □

3.2: [8, III.3.3 e 3.6] Sejam $\alpha : \Lambda \to \Gamma$ um homomorfismo de anéis (unitários), M um Λ-módulo e N um Γ-módulo. Então:

1. Dado uma aplicação de Λ-módulos $f : M \to N$ (onde N é visto como Λ-módulo via α), existe uma única aplicação de Γ-módulos $\varphi : \Gamma \otimes_\Lambda M \to N$ tal que $\varphi \circ i = f$. A aplicação φ é dada por $\varphi(x \otimes m) = xf(m)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \Gamma \otimes_\Lambda M \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Assim obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \rho: \ Hom_\Lambda(M,N) &\xrightarrow{\cong} Hom_\Gamma(\Gamma \otimes_\Lambda M, N) \\ f &\rightarrow \rho(f) = \varphi, \end{aligned}$$

com inverso dado por $\rho^{-1}(\varphi) = \varphi \circ i$.

2. Dada uma aplicação de Λ-módulos $f : N \rightarrow M$, existe uma única aplicação de Γ-módulos $\psi : N \rightarrow Hom_\Lambda(\Gamma, M)$ tal que $\pi \circ \psi = f$. A aplicação ψ é dada por $\psi(n)(a) = f(an)$.

$$\begin{tikzcd} & Hom_\Lambda(\Gamma, M) \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Assim obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \gamma: \ Hom_\Lambda(N,M) &\xrightarrow{\cong} Hom_\Gamma(N, Hom_\Lambda(\Gamma, M) \\ f &\rightarrow \gamma(f) = \psi \end{aligned}$$

com inverso dado por $\gamma^{-1}(\psi) = \pi \circ \psi$.

Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Nosso interesse é aplicar a teoria anterior para o homomorfismo de anéis $\alpha : \Lambda = \mathbb{Z}_2 S \rightarrow \Gamma = \mathbb{Z}_2 G$, induzido da inclusão $S \subset G$.

Notação: Seja N um $\mathbb{Z}_2 G$-módulo.Denotaremos por $Res_S^G N$ o $\mathbb{Z}_2 G$-módulo obtido de N por restrição de escalares de G a S (via $\alpha : \mathbb{Z}_2 S \rightarrow \mathbb{Z}_2 G$).

3.3 Definição: *Seja M um $\mathbb{Z}_2 S$-módulo. O $\mathbb{Z}_2 G$-módulo obtido de M por extensão (resp. co-extensão) de escalares de $\mathbb{Z}_2 S$ à $\mathbb{Z}_2 G$ via α é denominado* indução *(resp.* co-indução*)* de S em G.

Escreveremos:

$$\begin{aligned} Ind_S^G M &= \mathbb{Z}_2 G \otimes_S M, \\ Coind_S^G M &= Hom_S(\mathbb{Z}_2 G, M). \end{aligned}$$

Observemos que em $Ind_S^G M$, $\mathbb{Z}_2 G$ é visto como $\mathbb{Z}_2 S$-módulo à direita com a S-ação $g.s = g\alpha(s) = gs$ (multiplicação à direita), e em $Coind_S^G M$, $\mathbb{Z}_2 G$ é visto como $\mathbb{Z}_2 S$-módulo com a S-ação multiplicação à esquerda ($s.g = sg$).

$Ind_S^G M$ é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação dada por $g.(g' \otimes m) = gg' \otimes m$, $\forall g, g' \in G$ e $m \in M$; e $Coind_S^G M$ é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação $(g.f)(g') = f(g'g)$, $\forall g, g' \in G$, $f \in Hom_S(\mathbb{Z}_2G, M)$.

Os módulos da forma $Ind_{\{1\}}^G M$ e $Coind_{\{1\}}^G M$ são denominados, respectivamente, *módulos induzidos e co-induzidos.*

Denotaremos o módulo coinduzido $Coin_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ por $\overline{\mathbb{Z}_2G}$.

3.4 Observações: (a) Considerando os $\mathbb{Z}_2S$-homomorfismos do lema 3.1, pode-se facilmente verificar que $i : M \to Ind_S^G M$ $(m \to 1 \otimes m)$ é um $\mathbb{Z}_2S$-monomorfismo, e $\pi : Coind_S^G M \to M$ $(f \to f(1))$, é um $\mathbb{Z}_2S$-epimorfismo.

(b) $\mathbb{Z}_2G$ é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo livre, como base podemos tomar qualquer conjunto E de representantes para as classes laterais gS. Assim $\mathbb{Z}_2G = \bigoplus_{g \in E} g\mathbb{Z}_2S$.

Segue de (a) que M é canonicamente $\mathbb{Z}_2S$-isomorfo a $1 \otimes M$, portanto podemos identificar M com $1 \otimes M$.

Por outro lado, segue de (b), que $\mathbb{Z}_2G \otimes_S M$ como grupo abeliano admite a decomposição

$$\mathbb{Z}_2G \otimes_S M = \bigoplus_{g \in G/S} g \otimes M,$$

onde $g \otimes M = \{g \otimes m,\ m \in M\}$. (Por um abuso de notação estamos indicando um conjunto de representantes para as classes laterais gS por G/S).

Como $g(1 \otimes m) = g \otimes m$, então $g \otimes M$ é simplesmente o transformado de $1 \otimes m$ pela ação de G. Logo podemos identificar $g \otimes m = g(1 \otimes m)$ com gM. Assim temos:

3.5 Proposição: [8, III.5.1] *Seja M um $\mathbb{Z}_2S$-módulo.*

(i) *O $\mathbb{Z}_2G$-módulo $Ind_S^G M$ contém M como $\mathbb{Z}_2S$- módulo e admite uma decomposição em soma direta*

$$Ind_S^G M = \bigoplus_{g \in G/S} gM,$$

onde gM é o transformado de M pela ação de G.

Analogamente,

(ii) *$Coind_S^G M$ admite uma decomposição em produto direto, isto é, existe uma família de sobrejeções $\pi_g : Coind_S^G M \twoheadrightarrow gM$, $g \in G/S$ tal que a aplicação correspondente*

$$Coind_S^G M \to \prod_{g \in G/S} gM$$

é um isomorfismo. □

Seja M um $\mathbb{Z}_2 S$-módulo. Consideremos a aplicação

$$\varphi_0 : M \to Coind_S^G M \quad \text{onde } m \to \varphi_0(m) \mid \varphi_0(m)(g) = \begin{cases} gm & \text{se } g \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então φ_0 é claramente um $\mathbb{Z}_2 S$-homomorfismo, pois

$$\varphi_0(sm)(g) = \begin{cases} g(sm) = gsm & \text{se } g \in S, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$s\varphi_0(m)(g) = \varphi_0(m)(gs) = \begin{cases} gsm & \text{se } gs \in S, \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

e, como $s \in S$, temos que $gs \in S$ se e somente se $g \in S$.

Considerando em 3.2 (1), $N = Coind_S^G M$ e $f = \varphi_0$, existe uma única aplicação de $\mathbb{Z}_2 G$-módulos $\varphi : Ind_S^G M \to Coind_S^G M$ tal que $\varphi \circ i = \varphi_0$. φ é dada por $\varphi(g_0 \otimes m) = g_0 \varphi_0(m)$ e portanto,

$$\varphi(g_0 \otimes m)(g) = (g_0\varphi_0(m)(g) = \varphi_0(m)(gg_0) = \begin{cases} gg_0 m & \text{se } gg_0 \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

O resultado seguinte nos diz que podemos sempre ver $Ind_S^G M$ como um submódulo de $Coind_S^G M$ (via a aplicação φ).

3.6 Proposição: [8, III.5.9] *Seja M um $\mathbb{Z}_2 S$-módulo.*

(i) *A $\mathbb{Z}_2 G$-aplicação $\varphi : Ind_S^G M \to Coind_S^G M$ definida acima é um $\mathbb{Z}_2 G$-monomorfismo, e se escrevermos $Ind_S^G M$ como uma soma direta e $Coind_S^G M$ como um produto direto de cópias de M então φ pode ser identificada com a inclusão canônica da soma no produto.*

(ii) *Se* $[G:S] < \infty$ *então* $\varphi : Ind_S^G M \to Coind_S^G M$ *é um* $\mathbb{Z}_2G$*-isomorfismo.*

□

3.7 Observação: Em particular podemos considerar (através da φ), $\mathbb{Z}_2G \simeq Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ como um submódulo do módulo coinduzido $\overline{\mathbb{Z}_2G} = Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$. Neste caso φ é dada por

$$\varphi(g_0)(g) = \varphi(g_0 \otimes 1)(g) = \begin{cases} gg_0 & \text{se } gg_0 \in \{1\} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g_0^{-1} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases},$$

para todo $g_0, g \in G$.

As propriedades seguintes são consequências de 3.2 e 3.6 respectivamente. As apresentaremos aqui para facilitar futuras referências.

3.8 Lema: *Se* S *e* T *são subgrupos de* G *satisfazendo* $G \supset T \supset S$ *e* M *em* $\mathbb{Z}_2S$*-módulo então:*

(a) *Existe um* $\mathbb{Z}_2G$*-isomorfismo natural* $Coind_T^G Coind_S^T M \xrightarrow{\psi} Coind_S^G M$.

(b) *Existe um* $\mathbb{Z}_2G$*-monomorfismo natural* $Ind_T^G Coind_S^T M \overset{\varphi}{\rightarrowtail} Coind_T^G Coind_S^T M$.

Demonstração: (a) Segue de 3.2 (2) tomando $N = \mathbb{Z}_2G$, $\Gamma = \mathbb{Z}_2S$, $\Lambda = \mathbb{Z}_2T$ e $\psi = \gamma^{-1}$.

(b) Basta considerar, em 3.6, T no lugar de S e o $\mathbb{Z}_2T$-módulo $Coind_S^T M$ no lugar de M. □

Antes de apresentarmos o próximo resultado, que será muito útil nos capítulos seguintes, observamos que, dado um subgrupo T de G e um $\mathbb{Z}_2T$-módulo M, o somando gM de $Ind_T^G M$ é fechado sob a ação de $T^g := gTg^{-1}$ pois $gtg^{-1}.(g \otimes m) = gtg^{-1}g \otimes m = gt \otimes m = g \otimes tm$ (para todo $t \in T$ e $m \in M$).

Assim gM é um $\mathbb{Z}_2T^g$-módulo. Em particular, se T é normal em G então gM é um $\mathbb{Z}_2T$-módulo.

3.9 Proposição (Fórmula de Mackey): [8, III.5.6(b)] *Sejam* T *e* S

subgrupos de G. Seja E um conjunto de representantes para as classes duplas SgT. Para qualquer $\mathbb{Z}_2T$-módulo M existe um $\mathbb{Z}_2S$-isomorfismo

$$Res_S^G Ind_T^G M \simeq \bigoplus_{g\in E} Ind_{S\cap T^g}^S Res_{S\cap T^g}^{T^g} gM.$$

Em particular, se T é normal em G, então existe um $\mathbb{Z}_2T$-isomorfismo

$$Res_T^G Ind_T^G M \simeq \bigoplus_{g\in G/T} gM. \qquad \square$$

A seguir, apresentaremos dois lemas, que serão frequentemente usados neste trabalho. Como em nossa referência básica [8] eles estão propostos como exercícios, nós os demonstraremos aqui.

3.10 Lema: *Se M é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo e N um $\mathbb{Z}_2G$-módulo então temos um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo*

$$N \otimes Ind_S^G M \simeq Ind_S^G(Res_S^G N \otimes M),$$

onde o produto tensorial à esquerda tem a G-ação diagonal e o da direita a S-ação diagonal.

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{aligned} k:\ N \otimes (\mathbb{Z}_2G \otimes_S M) &\to \mathbb{Z}_2G \otimes_S (Res_S^G N \otimes M), \\ n \otimes (g \otimes m) &\to g \otimes (g^{-1}n \otimes m), \end{aligned}$$

e estendida por linearidade. Para qualquer $s \in S$ temos

$$\begin{aligned} k(n \otimes (g \otimes sm)) &= g \otimes (g^{-1}n \otimes sm) = g \otimes s(s^{-1}g^{-1}n \otimes m) = \\ &= gs \otimes ((sg)^{-1}n \otimes m) = k(n \otimes (gs \otimes m)), \end{aligned}$$

e portanto k está bem definida. Também, para qualquer $g_0 \in G$, temos

$$\begin{aligned} k(g_0(n \otimes (g \otimes m))) &= k(g_0n \otimes (g_0g \otimes m)) = g_0g \otimes ((g_0g)^{-1}g_0n \otimes m) = \\ &= g_0g \otimes (g^{-1}g_0^{-1}g_0n \otimes m) = g_0(g \otimes (g^{-1}n \otimes m)) = \\ &= g_0k(n \otimes (g \otimes m)), \end{aligned}$$

e assim k é um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo. Agora, é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} l:\ \mathbb{Z}_2G \otimes_S (Res_S^G N \otimes M) &\to N \otimes (\mathbb{Z}_2G \otimes_S M) \\ g \otimes (n \otimes m) &\to gn \otimes (g \otimes m) \end{aligned}$$

é a inversa de k. Portanto k é um $\mathbf{Z}_2G$-isomorfismo, como desejado. □.

3.11 Lema: *Se* $[G:S]=\infty$ *então*

$$H^0(G; Ind_S^G M) = (Ind_S^G M)^G = 0,$$

para todo $\mathbf{Z}_2S$*-módulo* M.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $(Ind_S^G M)^G \neq 0$, isto é, que existe $u \in Ind_S^G M$, $u \neq 0$, tal que $gu = u$ para todo $g \in G$.

Sabemos por 3.6 (i), que $Ind_S^G M = \bigoplus_{g\in E} gM$, onde E é um conjunto de representantes para G/S (com $e \in E$, onde e é o elemento neutro de G). Assim, $u = g_1m_1 + \ldots + g_km_k$, com $g_i \in E$, $g_im_i \neq 0$ e $g_im_i \neq g_jm_j$ para todo $i \neq j$ (pois $\bigcap_{g\in E} gM = 0$).

Seja $g \in G$. Como a aplicação $Ind_S^G M \to Ind_S^G M$ ($v \to gv$) é uma bijeção, segue que $gg_im_i \neq gg_jm_j$ se $i \neq j$.

Afirmação: $m_i = m_j = m$, para todo $i \neq j$.

De fato, para cada i,j, seja $g := g_ig_j^{-1}$. Como $gu = u$, temos que $gg_1m_1 + \ldots + gg_im_i + \ldots + g_im_j + \ldots + gg_km_k = g_1m_1 + \ldots + g_km_k$. Agora, $g_im_j = gg_jm_j \neq gg_rm_r$ se $j \neq r$, g_im_j é não nulo, e $g_im_j \neq g_rm_r$ se $r \neq i$ (pois $g_i, g_r \in E$ e $\bigcap_{g\in E} gM = 0$). Logo a única possibilidade é que $g_im_j = g_im_i$. Daí, $m_j = m_i$.

Consequentemente, temos que $u = g_1m + \ldots + g_km$. Como por hipótese $[G:S] = \infty$, existe $g_0 \in E$, $g_0 \notin \{g_1, \ldots, g_k\}$. Seja $g := g_0g_1^{-1}$. Do fato que $gu = u$ segue que $gg_1m + \ldots + gg_km = g_1m + \ldots + g_km$ e daí, como $gg_1m \neq gg_im$ se $i \neq 1$ e $gg_1m \neq 0$, deve existir algum $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $gg_1m = g_jm$. Logo $g_j^{-1}gg_1m = em \neq 0$ e então $g_j^{-1}gg_1 \in S$ (pois $e \in E$ e $\bigcap_{g\in E} gM = 0$). De onde segue, levando em conta que $g = g_0g_1^{-1}$, que $g_j^{-1}g_0 \in S$ para algum j, mas isto contradiz o fato que $g_0 \in E - \{g_1, \ldots, g_k\}$. Logo nossa suposição inicial é falsa, e portanto $(Ind_S^G M)^G = 0$. □

Agora, se S é um subgrupo de G, consideremos o $\mathbf{Z}_2$-módulo livre gerado

pelas classes laterais gS, $g \in G$, que denotaremos por $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

Existe uma ação natural de G em $\mathbb{Z}_2(G/S)$ induzida pela multiplicação à esquerda ($g_0(gS) = g_0gS$). Daí, $\mathbb{Z}_2(G/S)$ tem uma estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo à esquerda (cf. 1.2 (a)).

Logo, se N é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, então podemos dar a $\mathbb{Z}_2(G/S) \otimes N$ e $Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), N)$ a estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo diagonal, como em 1.2 (c).

Sob estas considerações temos:

3.12 Proposição: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e N um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então temos $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos naturais*

$$\mathbb{Z}_2(G/S) \otimes N \xrightarrow{u} Ind_S^G Res_S^G N,$$
$$Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), N) \xrightarrow{v} Coind_S^G Res_S^G N,$$

onde $\mathbb{Z}_2(G/S) \otimes N$ e $Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), N)$ são vistos como $\mathbb{Z}_2G$-módulos como acima.

Demonstração: A aplicação u é definida por $u(gS \otimes n) = g \otimes g^{-1}n$, $g \in G$, $n \in N$ e estendida por linearidade. É fácil ver que u está bem definida e é um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo. A inversa de u é dada por $g \otimes n \to gS \otimes gn$.

Analogamente, v é definida por $v(f)(g) = gf(g^{-1}S)$, $g \in G$ e $f \in Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), N)$, e sua inversa v' por $v'(h)(gS) = gh(g^{-1})$, $g \in G$, $h \in Hom_S(\mathbb{Z}_2G, res_S^G N)$. □

3.13 Observações: (a) Se considerarmos no resultado anterior $N = \mathbb{Z}_2$ então temos os $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos naturais

$$\mathbb{Z}_2(G/S) \overset{u}{\simeq} Ind_S^G \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} := Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2) \overset{v}{\simeq} Coind_S^G \mathbb{Z}_2,$$

e portanto, por 3.6, obtemos o $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo $\mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$. Esta "inclusão" tem, como em 3.7, a forma simples

$$\varphi(g_0S)(gS) = \begin{cases} 1 & \text{se } g^{-1}S = g_0S \ (\Leftrightarrow gg_0 \in S) \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

(b) Se, agora, considerarmos $S = \{1\}$ e N um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer,

então temos os $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos

$$\mathbb{Z}_2G \otimes N \xrightarrow{v} Ind_{\{1\}}^G N \quad \text{e} \quad Hom(\mathbb{Z}_2G, N) \xrightarrow{v} Coind_{\{1\}}^G N,$$

onde os módulos da esquerda são vistos como $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação diagonal. Note ainda que se N é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial (ex: $N = \mathbb{Z}_2$) então v tem a forma $v(g)(g) = f(g^{-1})$, $\forall g \in G$.

O resultado abaixo é também bastante utilizado nos próximos capítulos. Ele dá a relação entre a (co)homologia de um grupo e de um subgrupo.

3.14 Proposição (Lema de Shapiro): [8, III.6.2] *Se S é um subgrupo de G e M é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo então*

$$H_*(S; M) \simeq H_*(G; Ind_S^G M) \quad e \quad H^*(S; M) \simeq H^*(G; Coind_S^G M). \qquad \square$$

Pode se verificar que os isomorfismos do lema de Shapiro são dados por

$$H_*(S; M) \xrightarrow{(\alpha,i)_*} H_*(G; Ind_S^G M) \quad \text{e} \quad H^*(S; M) \xrightarrow{(\alpha,\pi)^*} H^*(G; Coind_S^G M),$$

onde $(\alpha, i)_*$ e $(\alpha, \pi)^*$ são (cf. 2.3 e 2.4) as aplicações induzidas, respectivamente, de

$$(\alpha : S \to G, \quad i : M \to Ind_S^G M) \quad \text{e} \ , \quad (\alpha : S \to G, \quad \pi : Coind_S^G M \to M),$$

com $\alpha : S \to G$ a inclusão, e i e π as $\mathbb{Z}_2S$-aplicações dadas em 3.4.

3.15: Seja G um grupo. Considere $PG = \{A \mid A \subseteq G\}$ o conjunto das partes de G. PG com a operação diferença simétrica $A + B := A - B \cup B - A = A \cap B^C \cup B \cap A^C$, é um grupo abeliano, em que todo elemento tem ordem 2 (portanto um $\mathbb{Z}_2$- módulo). Daí, considerando a G-ação (multiplicação à esquerda) $G \times PG \to PG$ $((g, A) \to g.A = \{g.a \mid a \in A\})$, podemos dar a PG uma estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo (cf. 1.2 (a)).

É fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \overline{\mathbb{Z}_2G} = Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 &\to PG \\ f &\to \{g \in G \mid f(g^{-1}) = 1\} \end{aligned}$$

é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo. Ela é invariante pela ação pois, dado $g_0 \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho(g_0.f) &= \{g_1 \in G \mid (g_0.f)(g_1^{-1}) = 1\} \\
&= \{g_1 \in G \mid f(g_1^{-1}g_0) = 1\} \qquad \text{(pela ação do } Coind_{\{1\}}^G\mathbb{Z}_2) \\
&= \{g_1 \in G \mid f((g_0^{-1}g_1)^{-1}) = 1\} \\
&= \{g_0g \in G \mid f(g^{-1}) = 1\} \qquad \text{(considerando } g = g_0^{-1}g_1) \\
&= g_0.\{g \in G \mid f(g^{-1}) = 1\} \\
&= g_0.\rho(f).
\end{aligned}$$

A inversa de ρ é dada por $PG \to Ind_{\{1\}}^G\mathbb{Z}_2$ $(A \to f_A)$ onde,

$$f_A(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g^{-1} \in A \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Levando em conta estes fatos tem-se, como consequência da proposição anterior, o seguinte resultado.

3.16 Corolário:

$$H^j(G; PG) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{se } j \neq 0. \end{cases}$$

□

Finalizando esta seção, observamos que se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo (mais do que um $\mathbb{Z}_2S$-módulo), então podemos usar 3.12 e obter a seguinte versão do lema de Shapiro.

3.17 Proposição: *Se S é um subgrupo de G e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, então*

$$H_*(S; M) \simeq H_*(G; \mathbb{Z}_2(G/S) \otimes M), \quad e \quad H^*(S; M) \simeq H^*(G; Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M),$$

onde $\mathbb{Z}_2(G/S) \otimes M$ e $Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M)$ são vistos como $\mathbb{Z}_2G$-módulos com a G-ação diagonal. □

Nota: Para sermos rigorosos deveríamos escrever na proposição anterior $H_*(S; Res_S^G M)$ e $H^*(S; Res_S^G M)$.

4. $H^1(G;M)$ e extensões de grupos.

Esta secção será útil no capítulo II de nosso trabalho, onde apresentamos uma "generalização" (para o caso relativo), do resultado 4.3 abaixo. Tal secção é baseada em [8, cap. IV]. Lá o autor apresenta também uma interpretação de H^2 e H^3 em termos de extensões de grupos, nós estamos interessados somente no caso H^1. Também ele trabalha sobre $R = \mathbb{Z}$, aqui adaptaremos ao caso $R = \mathbb{Z}_2$.

Inicialmente, observamos que uma extensão de um grupo G por um grupo abeliano M

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

dá origem à uma ação de G sobre M (Aqui, estamos denotando o elemento neutro de G por 1). Mais precisamente, dados $g \in G$ e $m \in M$, seja $x \in E$ tal que $\pi(x) = g$. Note que $xi(m)x^{-1} \in \text{Im } i = \text{Ker } \pi$ pois $\pi(xi(m)x^{-1}) = \pi(x)\pi(i(m))\pi(x)^{-1} = \pi(x).1.\pi(x)^{-1} = 1$. Então definimos

$$g.m = i^{-1}(xi(m)x^{-1}). \tag{1}$$

Fixemos agora um Z_2G-módulo M. Seja

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{2}$$

uma extensão cuja ação de G em M, obtida como em (1), coincide com a G-ação proveniente do fato de M ser um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

Dizemos que (2) é uma *extensão cindida* se existe um homomorfismo $l : G \to E$ tal que $\pi \circ l = id_G$, e um tal homomorfismo é chamado um *levantamento* da extensão.

Dois levantamentos l_1 e l_2 são ditos *M-conjugados* se existe um elemento $m \in M$ tal que $l_1(g) = i(m)l_2(g)i(m)^{-1}$ para todo $g \in G$. (Isto da origem a uma relação de equivalência e portanto podemos falar em classes de equivalência $[l]$).

4.1 Exemplo: Seja M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Consideremos o grupo $E = M \times G$ com a operação dada por

$$(m_1, g_1) * (m_2, g_2) = (m_1 + g_1.m_2, g_1g_2).$$

Este grupo é denominado o *produto semi-direto de M* por G e é denotado por $M \rtimes G$.

A sequência $0 \to M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ onde $i'(m) := (m, 1)$ e $\pi'(m, g) := g$ é uma extensão cindida pois, por exemplo, $l : G \to M \rtimes G$ $(g \to (0, g))$ é um levantamento para esta extensão.

O resultado seguinte nos diz que *"a menos de equivalência"*, todas as extensões cindidas são como no exemplo acima.

4.2 Proposição: [8, IV.2.1] *As seguintes condições sobre a extensão (2) são equivalentes:*

(a) *(2) é cindida.*

(b) *(2) é equivalente à extensão* $0 \to M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$, *isto é, existe uma aplicação* $k : E \to M \rtimes G$ *(isomorfismo) tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dd, "k"] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & M \rtimes G \arrow[ur, "\pi'"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. □

Finalmente, temos a seguinte interpretação de $H^1(G; M)$.

4.3 Proposição: *Para qualquer $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, as classes de M-conjugação $[l]$ de levantamentos $l : G \to M \rtimes G$, da extensão cindida* $0 \to M \xrightarrow{i'} M \rtimes G \xrightarrow{\pi'} G \to 1$ *estão em correspondência biunívoca com os elementos de $H^1(G; M)$.*

Demonstração: Por simplicidade denotaremos o conjunto das classes de M-conjugação por $\mathcal{L}$. Sabemos por 1.6 que $H^1(G; M) = \dfrac{Der(G, M)}{P(G, M)}$.

Agora, os levantamentos $l : G \to M \rtimes G$ estão em correspondência biunívoca com as derivações $d : G \to M$, pois um homomorfismo $l : G \to M \rtimes G$ que satisfaz $\pi \circ l = id_G$ tem a forma $l(g) = (d(g), g)$, onde $d : G \to M$. Temos ainda $l(g)l(h) = l(gh) \Leftrightarrow (d(g) + gd(h), gh) = (d(gh), gh) \Leftrightarrow d(gh) = d(g) + gd(h) \Leftrightarrow d \in Der(G, M)$.

Por outro lado, dados dois levantamentos $l_1(g) = (d_1(g), g)$ e $l_2(g) = (d_2(g), g)$ temos que l_1 e l_2 são M-conjugados $\Leftrightarrow l_1(g) = i'(m)l_2(g)i'(m)^{-1}$, para algum $m \in M$ e todo $g \in G$ $\Leftrightarrow$ $(d_1(g), g) = (m + d_2(g) - gm, g)$ $\Leftrightarrow$ $d_2(g) - d_1(g) = gm - m = d_m(g)$ $\Leftrightarrow$ $d_2 - d_1 \in P(G, M)$.

Daí, facilmente, verifica-se que a aplicação

$$\begin{aligned} \frac{Der(G,M)}{P(G,M)} &\to \mathcal{L} \\ d + P(G,M) &\to [l], \quad \text{onde } l(g) = (d(g), g), \end{aligned}$$

está bem definida e é uma bijeção. □

5. Grupos de Dualidade

Como foi dito no início deste capítulo, R significará para nós o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros ou o corpo $\mathbb{Z}_2$.

Sabemos, por 1.4 (b), que na definição de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ (para M um RG-módulo qualquer) podemos escolher uma resolução projetiva arbitrária $F = (F_i)_{i \geq 0}$ de R sobre RG.

Analogamente, se considerarmos do ponto de vista topológico (ver 1.9), então podemos computar $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ em termos de um complexo $K(G, 1)$ arbitrário Y.

Uma vez que temos esta liberdade de escolha é razoável tentar escolher F (ou Y) como sendo o "menor" possível e isto nos leva a varias condições de finitude sobre G.

Por exemplo, se interpretarmos "pequeno" em termos de comprimento de F então somos levados à noção de *dimensão homológica e cohomológica*. Ou ainda, se interpretamos pequeno por significar que cada F_i seja finitamente gerado então somos levados a assim chamada condição FP.

Nesta secção introduzimos estas condições de finitude sobre um grupo G, recordamos a definição de grupos de dualidade e, em particular, de dualidade de Poincaré, e apresentamos (sem demonstração) alguns resultados relevantes desta teoria que serão

utilizados nos próximos capítulos. Finalizamos com alguns comentários sobre a conjectura de que todo grupo de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}$ é o grupo fundamental de uma variedade asférica fechada.

Nossa referência básica para esta secção será as notas de R. Bieri [4]. Porém, quando for conveniente, referimos também a [5], [6] e [9]. Vale observar que K.S. Brown em [8, cap. VIII] apresenta um interessante tratamento deste assunto, mas somente sobre o anel $\mathbb{Z}$.

5.1 Definição: *Dizemos que um grupo G é de* tipo $(FP)_n$ sobre R, $n \in \mathbb{N}$, *se existe uma resolução projetiva de R sobre RG, $F \twoheadrightarrow R$, com F_i finitamente gerado como RG-módulo, para todo $i \leq n$. Se os módulos F_i são finitamente gerados para todo i então dizemos que G é de tipo $(FP)_\infty$.*

Observe que todo grupo G é de tipo $(FP)_0$ sobre R pois, por exemplo, a resolução bar (cf. 1.4 (c)) é uma resolução projetiva de R sobre RG em que F_0 é obviamente finitamente gerado. Para $n = 1$, temos:

5.2 Proposição: [4, Prop. 2.1] *G é de tipo $(FP)_1$ sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado.* □

Um resultado sobre grupos de tipo $(FP)_n$ que utilizaremos algumas vezes, nos casos simples $n = 0, 1$, é o seguinte:

5.3 Proposição: *Sejam G um grupo e $(M_i)_{i\in I}$ uma família de RG-módulos. Se G é de tipo $(FP)_n$, então*

$$H^k(G; \bigoplus_{i\in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} H^k(G; M_i), \qquad \forall k \leq n.$$

Em particular, para qualquer grupo G este isomorfismo é válido no nível $k = 0$; e, se G é finitamente gerado, tal isomorfismo sempre ocorre até o nível $k = 1$. □

5.4 Definição: *Um grupo G é denominado grupo* de tipo FP sobre R *se*

existe uma resolução projetiva de R sobre RG de comprimento finito,

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to R \to 0$$

com F_i finitamente gerado para todo i.

5.5 Proposição: [9, Prop. 1.2] *Seja G um grupo. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Se existe uma sequência exata*

$$0 \to K \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to R \to 0$$

com $F_0, \ldots, F_{n-1}$ RG-projetivos, então K é também projetivo.

(ii) *Existe uma resolução projetiva de R sobre RG de comprimento finito n*

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to R \to 0.$$

(iii) *$H^k(G; M) = 0$ para todo RG-módulo M e todo $k > n$.*

(iv) *$H^{n+1}(G; M) = 0$ para todo RG-módulo M.*

(v) *Para todo epimorfismo $f : M \to M'$, a aplicação induzida $f^* : H^*(G; M) \to H^*(G; M')$ é epimorfismo.* □

5.6 Definição: *A* dimensão cohomológica de G sobre R, *denotada por $cd_R G$, é definida como sendo o menor inteiro $n \geq 0$ que satisfaz uma das condições equivalentes (i) a (v) da proposição anterior. Se não existe tal inteiro consideramos $cd_R G = \infty$. Assim*

$$\begin{aligned} cd_R G &= \inf \{n \mid R \text{ admite uma resolução projetiva de comprimento } n\} \\ &= \inf \{n \mid H^k(G; -) = 0 \text{ para } k > n\} \\ &= \sup \{n \mid H^n(G; M) \neq 0 \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}. \end{aligned}$$

Vale um resultado análogo à proposição anterior para homologia; porém, por simplicidade, definiremos a *dimensão homológica de G sobre R*, denotada por $hd_R G$, como

$$hd_R G = \sup \{n;\ H_n(G; M) \neq 0 \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

5.7 Observações: **(a)** Por conveniência, denotaremos $cd_{\mathbf{Z}_2}G$ e $hd_{\mathbf{Z}_2}G$ simplesmente por cdG e hdG.

(b) É fácil ver que G é de tipo FP sobre R se, e somente se, G é de tipo $(FP)_\infty$ sobre R e $cd_RG < \infty$.

(c) R. Bieri em [4, cap. II] apresenta uma definição mais geral. Ele define dimensão plana (flat) e projetiva de um Λ-módulo M (Λ anel qualquer com unidade), e então a dimensão homológica (cohomológica) de um grupo G é obtida da dimensão plana (projetiva) quando consideramos o RG-módulo particular $M = R$ com a G-ação trivial.

5.8 Exemplo: Seja G um grupo. Se existe uma variedade compacta Y de dimensão n que tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo $K(G,1)$ então. $cd_RG \leq n$. (cf. [8, VIII.8.1])

Apresentamos a seguir algumas das principais propriedades de dimensão homológica e cohomológica.

5.9 Proposição: [4, teor. 4.6] *Seja G um grupo, então*

(i) $hd_RG \leq cd_RG$.

(ii) *Se G é enumerável então* $cd_RG \leq hd_RG + 1$.

(iii) *Se G é de tipo $(FP)_\infty$ sobre R, então* $cd_RG = hd_RG$. □

A próxima propriedade é consequência imediata do lema de Shapiro.

5.10 Proposição: [4, Prop. 4.9]) *Se S é um subgrupo de G, então*

(i) $hd_RS \leq hd_RG$.

(ii) $cd_RS \leq cd_RG$. □

5.11 Definição: *Sejam G um grupo e R um anel comutativo com unidade. Dizemos que G* **não tem R-torção** *se a ordem de todo elemento em G é infinita ou invertível em R (isto é, a ordem é um inteiro $n > 0$ tal que $n.1$ é invertível em R onde 1*

é a unidade de R).

Observe que se G não tem $\mathbb{Z}$-torção (isto é, se G é livre de torção) então obviamente G não tem $\mathbb{Z}_2$-torção. A recíproca é falsa pois, por exemplo, $G = \mathbb{Z}_3$ não tem $\mathbb{Z}_2$-torção mas não é $\mathbb{Z}$-livre de torção.

5.12 Proposição: [4, Props. 4.11 e 4.12]

(i) *Se $hd_R G$ (ou $cd_R G$) é finita então G não tem R-torção.*

(ii) *$cd_R G = 0$ se, e somente se, G é um grupo finito sem R-torção.*

(iii) *$hd_R G = 0$ se, e somente se, G é um grupo localmente finito sem R-torção.* □

O próximo resultado parte (i) é conhecido como Teorema de Serre.

5.13 Teorema: [4, teors. 5.11 e 5.13] *Seja S um subgrupo de índice finito em um grupo G. Se G não tem R-torção, então*

(i) $cd_R S = cd_R G$.

(ii) $hd_R S = hd_R G$. □

Grupos de Dualidade: Agora recordaremos o conceito de grupos de dualidade e suas propriedades mais relevantes. Brevemente falando, um grupo de dualidade de *Poincaré* G (sobre $\mathbb{Z}$) é um grupo cuja homologia e cohomologia satisfazem relações de dualidade análogas àquelas válidas para variedades compactas. Estes grupos foram investigados, em vista de seus aspectos algébricos e topológicos, por Bieri em [3], e Johnson e Wall em [19] (1972). Posteriormente, Bieri e Eckmann em [6] (1973), definiram um tipo mais geral de dualidade (sobre $\mathbb{Z}$) que inclui o anterior e leva a novas aplicações em álgebra e topologia; e em [4, cap. III] (1976), Bieri extendeu este conceito por considerar grupos de dualidade sobre um anel qualquer comutativo com unidade R.

Aqui consideraremos somente os casos de interesse.

5.14 Definição: *Um grupo G é denominado* **grupo de dualidade de dimensão n sobre R,** *ou simplesmente um* **D^n-grupo sobre R** *($R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$)*

se existe um RG-módulo (à direita) C, chamado **módulo dualizante de** G, *tal que tenhamos isomorfismos naturais*

$$H^k(G;M) \simeq H_{n-k}(G;C \otimes_R M),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ *e todo RG-módulo* M, *onde* $C \otimes_R M$ *é visto como RG-módulo com a G-ação diagonal.*

Se $C \simeq R$ *como RG-módulo dizemos que G é um* **grupo de dualidade de Poincaré de dimensão** n **sobre** R, *ou simplesmente, um* PD^n*-grupo sobre R. Neste caso, se a ação de G em C é trivial (isto é, C é, a menos de isomorfismo, o G-módulo trivial R dado em 1.2 (b)) dizemos que G é* **orientável**, *caso contrário G é dito G* **não orientável**.

5.15 Observações: (a) Nos capítulos seguintes consideraremos sempre $R = \mathbb{Z}_2$, a menos que se especifique ao contrário. Assim, por conveniência, se G é D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ (PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$) diremos, simplesmente, que G é um D^n-grupo (PD^n-grupo), sem falar no anel $\mathbb{Z}_2$.

Note que trabalhar com o anel $\mathbb{Z}_2$ tem a vantagem de que todo PD^n-grupo é orientável.

(b) Se G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R, com módulo dualizante C, então pode-se verificar que:

(i) $n = cd_R G$ e portanto G não tem R-torção.

(ii) $C \simeq H^n(G;RG)$ como RG-módulos à direita, onde a estrutura de RG-módulo em $H^n(G;RG)$ é induzida da estrutura natural de RG como RG-módulo à direita, dada pela G-ação multiplicação à direita.

Assim, a dimensão n e o módulo dualizante C são determinados pelo grupo G.

5.16 Exemplo: Se $G = \Pi_1(X)$, onde X é uma variedade fechada (compacta sem bordo), conexa, de dimensão n, asférica (isto é, que tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo $K(G,1)$) então G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ (ver [10, p. 135]). Em particular, $G = \Pi_1(X)$, onde X é qualquer superfície fechada diferente de S^2 e $\mathbb{R}P(2)$,

é um PD^2-grupo sobre $\mathbf{Z}$, e $G = \mathbf{Z}^n = \Pi_1(S^1 \times \ldots \times S^1)$ (n-vezes) é um PD^n-grupo sobre $\mathbf{Z}$.

Às vezes é conveniente trabalhar com a seguinte caracterização de grupos de dualidade.

5.17 Proposição: [4, teor. 9.2] *Um grupo G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R se, e somente se, as seguintes condições ocorre:*

(i) *G é de tipo FP sobre R.*

(ii) *$H^k(G; RG) = 0$ para $k \neq n$.*

(iii) *$H^n(G; RG) = C$ é plano como R-módulo.* □

5.18 Corolário: *Se G é um grupo de dualidade sobre R então G é finitamente gerado.*

Demonstração: Se G é de dualidade então, pela proposição anterior G é de tipo FP, e portanto de tipo FP_1 por 5.7 (b). Daí, o resultado segue de 5.2. □

No teorema abaixo reunimos algumas propriedades de dualidade.

5.19 Teorema: [4, teors. 9.9, 9.10 e 9.11]

(i) *Sejam G um grupo sem R-torção e S um subgrupo de índice finito em G. Então G é um D^n-grupo sobre R se, e somente se, S é, e temos, para os módulo dualizantes, o RS-isomorfismo*

$$H^n(S; RS) \simeq Res_S^G H^n(G; RG).$$

(ii) *Seja $N \rightarrowtail G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ uma sequência exata curta de grupos. Se N é um D^n-grupo sobre R e Q é um D^q-grupo sobre R então G é um D^{n+q}-grupo sobre R, e os módulos dualizantes estão assim relacionados*

$$H^{n+q}(G; RG) \simeq H^q(Q; RQ) \otimes_R H^n(N; RN) \quad \textit{(como RG-módulos)},$$

onde G atua diagonalmente no produto tensorial (ver observação abaixo).

(iii) *Seja* $N \rightarrowtail G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ *uma sequência exata com* $cd_R Q < \infty$ *e* N *de tipo* $(FP)_\infty$ *sobre* R $(R = \mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{Z}_2)$. *Se* G *é um grupo de dualidade sobre* R *então também são* N *e* Q. □

5.20 Observações: **(a)** Podemos dar uma G-ação à direita em $H^n(N; RN)$ porque N é normal em G. Tal ação pode ser assim descrita: Tomamos uma RG-resolução projetiva de R, $F \twoheadrightarrow R$, que por restrição é uma RN-resolução projetiva de R e definimos em $Hom_{RN}(F, RN)$ a G-ação à direita $(f.g)(x) = g^{-1}f(gx)g$, para todo $f \in Hom_{RN}(F, RN)$, $g \in G$ e $x \in F$. Esta ação induz a G-ação em $H^n(N; RN)$ desejada.

A G-ação em $H^q(Q; RQ)$ é induzida da Q-ação.

(b) Quando consideramos R um anel arbitrário qualquer (não necessariamente $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$), temos que exigir em 5.19 (iii) que R seja um domínio de ideiais principais.

O resultado abaixo, embora simples, é muito importante para nós.

5.21 Lema: *Se* G *é um* D^n*-grupo sobre* $\mathbb{Z}$ *com módulo dualizante* C *então* G *é um* D^n*-grupo (sobre* $\mathbb{Z}_2$*) com módulo dualizante* $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$. *Em particular, se* G *é um* PD^n*-grupo sobre* $\mathbb{Z}$ *então* G *é um* PD^n*-grupo.*

Demonstração: Segue de 1.7 e do fato que, para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, temos $C \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq C \otimes_{\mathbb{Z}} (M \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) \simeq C \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) \simeq (C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} M$. □

Os grupos de dualidade de dimensão 0 e 1 são completamente determinados, como mostra o resultado seguinte.

5.22 Proposição: [4, Prop. 9.17]

(a) *G é um D^0-grupo sobre R se, e somente se, a ordem de G é finita e invertível em R.*

(b) *G é um D^1-grupo sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado e*

$cd_R G = 1$. □

5.23 Exemplos: (a) O grupo trivial $\{1\}$ é o único D^0-grupo sobre $\mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ e mais geralmente todos os grupos finitos de ordem impar, são D^0-grupos (sobre $\mathbb{Z}_2$).

(c) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ é um D^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$. Na realidade G é um D^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é livre finitamente gerado; e $G \simeq \mathbb{Z}$ é o único PD^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$ (ver [6, Prop. 5.1]).

(d) Segue do lema anterior e de 5.16, que se $G = \Pi_1(X)$ onde X é um variedade asférica fechada de dimensão n então G é um PD^n-grupo (sobre $\mathbb{Z}_2$). Em particular, $\mathbb{Z}$ é um PD^1 e, por 5.19 (ii), $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$ é um D^1-grupo.

Estes exemplos mostram claramente que a recíproca do lema anterior é falsa. De fato, o que vale é o seguinte resultado: Seja G um grupo de tipo FP sobre $\mathbb{Z}$. Então G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é um D^n-grupo sobre todo corpo $\mathbb{Z}_p$ (p primo) e sobre o corpo de frações Q de $\mathbb{Z}$ (cf. [4, Prop. 9.13]).

O resultado seguinte será utilizado por nós no capítulo IV. O enunciaremos aqui somente no caso de interesse, a saber, quando $R = \mathbb{Z}_2$. Para a demonstração ver [5, prop. 5.6 e teor. 5.7].

5.24 Proposição: *Sejam G um grupo com $cdG = n < \infty$ e N um subgrupo normal em G.*

(a) *Se N é um D^n-grupo então G também é, e $Q = G/N$ é finito.*

(b) *Suponhamos que G seja finitamente gerado e N seja de tipo FP sobre $\mathbb{Z}_2$, com $H^k(N; \mathbb{Z}_2 N) = 0$ para $k \leq n-2$. Se $Q = G/N$ é infinito então $cdN = cdG - 1$ e $dim H^1(Q, \mathbb{Z}_2 Q) \geq 1$ (ou equivalentemente, Q tem mais de um end (ver cap II, 4.10)).*

□

Finalizando esta secção faremos um breve comentário sobre PD^n-grupos sobre $\mathbb{Z}$.

Conforme vimos no exemplo 5.16, se $G = \Pi_1(X)$, onde X é um variedade

asférica fechada de dimensão n, então G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$. PD^n-grupos sobre $\mathbb{Z}$ obtidos desta forma são denominados *geométricos*.

Como todos os exemplos conhecidos de PD^n-grupos sobre $\mathbb{Z}$ são assim obtidos foi conjecturado que: *Todo grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ é geométrico.*

O caso $n = 1$ é óbvio, pois $G = \mathbb{Z}$ é o único PD^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$, e $G = \Pi_1(S^1)$.

Em uma sequência de artigos B. Eckmann, H. Müller e P. Linnel [11] e [12], provaram que todos os PD^2-grupos sobre $\mathbb{Z}$ são geométricos, isto é, são grupos fundamentais infinitos de superfícies.

Para $n = 3$, C.B. Thomas em [34] provou que, se G é um PD^3-grupo sobre $\mathbb{Z}$ *solúvel* então G é geométrico, de fato, G é o grupo fundamental de uma 3-variedade asférica, orientável.

Não encontramos na literatura a prova da conjectura para o caso geral $n \geq 3$. Assim acreditamos que isto esteja ainda em aberto.

CAPÍTULO II

Um Invariante cohomológico para par grupos

A partir deste capítulo trabalharemos sempre na categoria de $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

Nós definiremos aqui um invariante cohomológico $E(G,\mathcal{S},M)$ onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$ é uma família de subgrupos com $[G : S_i] = \infty$, $\forall i \in I$, e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

Na primeira secção deste capítulo recordamos o conceito de (co)homologia relativa para pares $(G,\mathcal{S})$, introduzido por Bieri e Eckmann em [7], e alguns fatos que serão utilizados por nós.

Na secção 2 introduzimos o invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ e em seguida nos restringimos ao caso de interesse, ou seja, $\mathcal{S} = \{S\}$. Neste caso denotamos $E(G,\mathcal{S},M)$ simplesmente por $E(G,S,M)$. Provamos que $E(G,S,M)$ é invariante no par $((G,S),M)$. Verificamos que $E(G,S,M)$ tem uma interpretação em termos de derivações (no caso relativo) e derivações principais, o que nos torna possível computar, em alguns casos, tal invariante. Também comparamos os invariantes $E(G,T,M)$, $E(G,S,M)$ e $E(G,S,N)$ quando S e T são subgrupos de G, com $S \leq T$, e M e N são $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Ainda nesta secção (e até a secção 4), nos dedicamos ao invariante $E(G,S) := E(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$ (isto é, tomamos o módulo particular $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$). Verificamos que $E(G,S)$ é invariante no par (G,S) e concluímos a partir daí, que não existe isomorfismos de pares para $(G =< a > * < b >\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z},\ S =< aba^{-1}b^{-1} >)$ e $(G,K) = (< a > * < b >, < b >)$.

Na secção 3, após recordar o conceito de par de dualidade (D^n-par) provamos o seguinte resultado: Dado um par (G,S) com $[G : S] = \infty$, se (G,S) é um D^n-par então $E(G,S) = 1$. Assim nosso invariante dá uma condição necessária para que (G,S)

seja um D^n-par. Por exemplo, $(G,S) = (< a > * < b >, < b >)$ não é um D^n-par pois $E(G,S) = \infty$. Finalizando, obtemos majorações para $E(G,S)$ quando G, S satisfazem outras propriedades de dualidade e exemplificamos.

Na secção 4, relacionamos o nosso invariante $E(G,S)$ com os invariantes ends $e(G)$ e $e(G,S)$. Recordamos incialmente a definição destes ends e suas propriedades mais relevantes, incluindo a relação com espaços topológicos. Se G é infinito, tem-se que

$$e(G) = 1 + \dim H^1(G,M) = E(G,\{1\}) = 1 + \dim \frac{H^1(G,\{1\};M)}{P(G,\{1\},M)}.$$

Uma vez que $E(G,S) = 1 + \dim \dfrac{H^1(G,S;M)}{P(G,S,M)}$, nosso objetivo inicial nesta secção era provar que

$$e(G,S) = E(G,S) \qquad (*)$$

e assim obter uma fórmula para $e(G,S)$ envolvendo cohomologia relativa. No entanto a igualdade $(*)$ nem sempre é verdadeira, pois existem pares (G,S) tais que $e(G,S)$ é infinito enquanto que $E(G,S)$ é finito. Na realidade, provamos que $E(G,S) \leq e(G,S)$ e apresentamos alguns casos em que os invariantes coincidem, por exemplo, quando S é normal em G. De fato apresentamos duas provas de que a igualdade é verdadeira no caso em que S é normal em G.

Finalmente, na secção 5, apresentamos uma interpretação topológica para $E(G,S,M)$ (em particular para $E(G,S)$) em termos de pares Eilenberg-MacLane. Daí, o end $e(G,S)$ terá também tal interpretação topológica sempre que $e(G,S) = E(G,S)$.

1.Cohomologia Relativa.

Nesta secção nós recordamos a definição de cohomologia relativa e alguns fatos básicos, que serão de grande importância para este trabalho.

A definição de cohomologia relativa para um grupo G e uma família $S = \{S_i\}_{i\in I}$ de subgrupos de G, dada abaixo, foi introduzida por Bieri e Eckmann em

[7] 1978. Tais autores consideraram os coeficientes na categoria de $\mathbb{Z}G$-módulos, porém, tudo pode ser considerado, de modo análogo, na categoria de $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

R. Ribes introduziu, anteriormente, em [24] 1969, a definição de cohomologia relativa $H^k(G, S; M)$ para G um grupo e S um único subgrupo de G. Nós recordamos aqui este conceito, e provamos, uma vez que não encontramos na literatura a justificativa deste fato, que a definição devido a Ribes coincide (a menos de isomorfismo) com a de Bieri e Eckmann tomando $\mathcal{S} = \{S\}$. Assim, de fato, a definição de cohomologia introduzida por Bieri e Eckmann é uma generalização da apresentada por Ribes.

1.1: Um *par grupo* $(G, \mathcal{S})$ consiste de um grupo G e uma família não vazia $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G (não necessariamente distintos).

Seja $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelas classes gS_i, no qual G atua por multiplicação à esquerda. Assim

$$\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i) = \bigoplus_{i\in I} (\mathbb{Z}_2G \otimes_{S_i} \mathbb{Z}_2)$$

Considere $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}_2$ a aplicação aumentação usual, que aplica todo gerador gS_i em 1. Nós denotamos seu núcleo por Δ, ou mais precisamente por $\Delta_{G/\mathcal{S}}$.

1.2 Definição: *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Os grupos de (co)homologia relativa para $(G, \mathcal{S})$ com coeficientes em M são, para todo $k \in \mathbb{Z}$, assim definidos:*

$$\begin{aligned} H^k(G, \mathcal{S}; M) &= H^{k-1}(G; Hom(\Delta, M)) \\ H_k(G, \mathcal{S}; M) &= H_{k-1}(G; \Delta \otimes M), \end{aligned}$$

onde o grupo Hom e o produto tensorial são vistos como $\mathbb{Z}_2G$-módulos com a ação diagonal.

1.3 Observações: (a) A definição de homologia e cohomologia (absoluta) de grupos dada em 1.1.3 pode ser vista como um caso particular da definição anterior se tomamos a família vazia ($\mathcal{S} = \emptyset$) e definimos, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$H_k(G, \emptyset; M) = H_k(G; M) \quad e \quad H^k(G, \emptyset; M) = H^k(G; M).$$

(b) Segue, claramente da definição, que para $k \leq 0$,

$$H^k(G,S;M) = 0 \text{ e } H_k(G,S;M) = 0.$$

(c) Se consideramos a definição de cohomologia relativa na categoria de $\mathbb{Z}_2G$ e $\mathbb{Z}G$-módulos, pode-se provar um resultado análogo ao 1.1.7, isto é, dado um $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, $H^*(G,S;M)$ ($H_*(G,S;M)$) com M visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo é isomorfo a $H^*(G,S;M)$ ($H_*(G,S;M)$) para M visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Para isto basta observar que, denotando por $\Delta' = \text{Ker}\,(\epsilon' : \mathbb{Z}(G/S) \to \mathbb{Z})$, temos os $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos $\text{Hom}\,(\Delta, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta', M)$ e $\Delta \otimes M \simeq \Delta' \otimes_{\mathbb{Z}} M$, e daí, usar 1.1.7 e a definição de cohomologia relativa (sobre $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$).

A nocão de cohomologia relativa para um par (G,S) constituindo de um grupo G e apenas um subgrupo S, dada por Ribes em [24], usa o conceito de funtor derivado. Precisamente, dado um $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, considere o grupo abeliano

$$Der(G,S,M) = \{f \in Der(G,M) \mid f_{|S} = 0\}.$$

onde $Der(G,M)$ é como em 1.1.5.

É fácil ver que $Der(G,S,-)$ é um funtor covariante, exato à esquerda, da categoria dos $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda na categoria dos grupos abelianos. Seja $0 \to M \to P_0 \to P_1 \to P_2 \cdots$ uma resolução injetiva de M (isto é, uma sequência exata de $\mathbb{Z}_2G$-módulos P_i, que são injetivos para todo i). Temos então

$$0 \to Der(G,S,M) \to Der(G,S,P_0) \to Der(G,S,P_1) \to \cdots.$$

Consideremos o complexo de cocadeias:

$$C^* : 0 \to Der(G,S,P_0) \to Der(G,S,P_1) \to \cdots.$$

1.4 Definição: *Sejam G um grupo, S um subgrupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então $H^{n+1}(G,S;M)$ é o n-ésimo funtor derivado à direita de $Der(G,S,M)$, isto é,*

$$H^{n+1}(G,S;M) := H^n(C^*).$$

onde C^* é como acima.

1.5: Do fato que $Der(G, S, -)$ é exato à esquerda, segue que

$$H^1(G, S; M) = Der(G, S, M).$$

1.6 Lema: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Então $H^k(G, S; M) \simeq H^k(G, \{S\}; M)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, onde $H^k(G, S; M)$ denota a cohomologia definida em 1.4, e $H^k(G, \{S\}; M)$ à dada em 1.2 tomando $\mathcal{S} = \{S\}$.*

Demonstração: Por [24, lema 1.1], $Der(G, S, -) \simeq Hom_G(\mathbb{Z}_2, \Gamma(-))$ como funtor na categoria de $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda, onde $\Gamma(M) = \dfrac{Hom_S(\mathbb{Z}_2G, M)}{Hom_G(\mathbb{Z}_2G, M)}$ e daí

$$H^k(G, S; M) \simeq H^{k-1}(G; \Gamma(M)).$$

Logo para provarmos o lema, é suficiente mostrar que $\Gamma(M)$ é $\mathbb{Z}_2G$-isomorfo a $Hom(\Delta, M)$. Isto segue do seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & Hom_G(\mathbb{Z}_2G, M) & \xrightarrow{j} & Hom_S(\mathbb{Z}_2G, M) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(M) & \to 0 \\
 & \downarrow \psi & (\mathrm{I}) & \downarrow \phi & (\mathrm{II}) & \downarrow \varphi & \\
0 \to & Hom(\mathbb{Z}_2, M) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), M) & \xrightarrow{i^*} & Hom(\Delta, M) & \to 0.
\end{array}$$

As aplicações horizontais i^* e ε^* são as aplicações induzidas da sequência exata $0 \to \Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$; j é a inclusão e ρ é a projeção canônica. É fácil ver que estas aplicações são $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismos. Os $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos verticais ψ e ϕ são dados por $\psi(f)(1) = f(1)$ e $\phi(f)(gS) = xf(g^{-1})$. (De fato ϕ e ψ são exatamente o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo v^{-1} dado em I.3.12, tomando M no lugar de N e considerando, para obter ψ, $S = G$).

A exatidão da primeira sequência é obvia. Para a segunda sequência, tem-se que ε^* é injetora e $\mathrm{Im}\, \varepsilon^* = \mathrm{Ker}\, i^*$ porque o funtor $Hom(-, M)$ é exato à esquerda. Agora, i^* é sobrejetora porque $\mathbb{Z}_2$ é obviamente $\mathbb{Z}_2$-projetivo, e assim, ε tem inversa á direita, ou equivalentemente (cf.[18, 1.5.10]), i tem inversa a esquerda.

Também é fácil verificar que (I) é comutativo, e a aplicação φ é definida de modo que (II) seja comutativo, isto é,

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \Gamma(M) &\rightarrow Hom(\Delta, M) \\ \rho(h) &\rightarrow (i^* \circ \phi)(h). \end{aligned}$$

Daí pelo lema dos cinco ([18, I.5.13]), φ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo como desejado. □

Nós finalizamos esta secção com o seguinte resultado, que segue essencialmente do fato que a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos livres

$$0 \rightarrow \Delta \rightarrow \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

permanece exata quando aplicamos o funtor $Hom(-, M)$, lembrando ainda que

$$Hom_G(\bigoplus_i \mathbb{Z}_2(G/S_i), M) \simeq \prod_i Hom_G(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M).$$

1.7 Proposição: [7, Prop.1.1] *Se* $(G, \mathcal{S})$ *é um par grupo,* $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$, *e* M *é um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo então temos a sequência exata longa:*

$$0 \rightarrow H^0(G; M) \rightarrow \prod_i H^0(S_i; M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; M) \xrightarrow{J} H^1(G; M) \xrightarrow{res} \prod_i H^1(S_i; M) \rightarrow \cdots$$

que é natural no módulo M *e no par grupo* $(G, \mathcal{S})$. □

Uma consequência imediata da proposição anterior é que, se $\mathcal{S} = \{S\}$ com $S = \{1\}$, então $H^k(G; M) \simeq H^k(G, \{1\}; M)$, para todo $k \geq 2$ e todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.

2. O invariante E(G,$\mathcal{S}$,M).

Nós definiremos aqui um invariante que, como veremos no desenvolvimento do trabalho, generaliza de certo modo, os invariantes ends já existentes.

2.1 Definição: *Seja* $(G, \mathcal{S})$ *um par grupo, com* $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ *e* $[G : S_i] = \infty$. *Se* M *é um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo definimos*

$$E(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \ dim \ Ker \ res^G_{\mathcal{S},M},$$

onde $res^G_{\mathcal{S},M} : H^1(G;M) \to \prod_i H^1(S_i;M)$ *é a aplicação da sequência exata dada em 1.7.*

Podemos observar, da exatidão da sequência 1.7, que $\operatorname{Ker} res^G_{\mathcal{S},M} = \operatorname{Im} J$ onde $J : H^1(G,\mathcal{S};M) \to H^1(G;M)$ e, se denotamos $\prod_i M^{S_i}$ por $M^{\mathcal{S}}$, então

$$\begin{aligned} E(G,\mathcal{S},M) &= 1 + \dim \operatorname{Im} J \\ &= 1 + \dim \frac{H^1(G,\mathcal{S};M)}{(M^{\mathcal{S}}/M^G)}. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{C}$ a seguinte categoria: um objeto de $\mathcal{C}$ é um par $((G,\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\});M)$ onde $(G,\mathcal{S})$ é um par grupo com $[G : S_i] = \infty$ e M é um Z_2G-módulo. Uma aplicação em $\mathcal{C}$ de $((G,\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\});M)$ em $((L,\mathcal{H} = \{H_j, j \in J\}),N)$ é uma tripla (α,π,ϕ) onde, $\alpha : G \to L$ é um homomorfismo de grupos, $\pi : I \to J$ é uma aplicação tal que $\alpha(S_i) \subset H_{\pi(i)}$, e $\phi : N \to M$ é um homomorfismo de grupos abelianos tal que $\phi(\alpha(g).n) = g.\phi(n)$ para $g \in G$, $n \in N$. Em outras palavras, ϕ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos, onde N é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo por restrição de escalares via α, isto é, $g * n := \alpha(g).n$.

Note que (α,π,ϕ) será um isomorfismo em $\mathcal{C}$ se, além disto, exigirmos que α e ϕ sejam isomorfismos de grupos, π uma bijeção e $\alpha(S_i) = H_{\pi(i)}$, $\forall i \in I$. Podemos provar que $E(G,\mathcal{S},M)$ é um invariante na categoria $\mathcal{C}$, isto é, se $((G,\mathcal{S});M)$ e $((L,\mathcal{H});N)$ são isomorfos na categoria $\mathcal{C}$ então $E(G,\mathcal{S},M) = E(L,\mathcal{H},N)$.

Em nosso trabalho estamos interessados somente no caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$. Assim, provaremos aqui a invariança de $E(G,\mathcal{S},M)$ para este caso (ver 2.3 abaixo). A demonstração, no caso genérico, está feita em detalhes em [1] e usa o fato que $H^*(G,\mathcal{S};M)$ é um funtor contravariante na categoria $\mathcal{C}$.

2.2 Observação: Por conveniência, no caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$ denotaremos o par grupo $(G,\{S\})$ por (G,S) (que chamaremos muitas vezes de par de grupos ao invés de par grupo), e se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, escreveremos $E(G,S,M)$ ao invés de $E(G,\{S\},M)$. Observemos que neste caso a sequência exata dada em 1.7 tem (levando em conta 1.6) a forma mais simples:

$$0 \to H^0(G;M) \to H^0(S;M) \xrightarrow{\delta} H^1(G,S;M) \xrightarrow{J} H^1(G;M) \xrightarrow{res^G_{S,M}} H^1(S;M) \to \cdots \qquad (1)$$

e se $[G:S] = \infty$,

$$E(G,S,M) = 1 + \dim \operatorname{Ker} res^G_{S,M}, \qquad (2)$$

onde $res^G_{S,M} : H^1(G;M) \to H^1(S;M)$ é a aplicação restrição. (Quando não houver confusão denotaremos a aplicação $res^G_{S,M}$ simplesmente por res^G_S).

2.3 Proposição: *Se* $((G,S);M)$ *e* $((L,H);N)$ *são isomorfos na categoria* $\mathcal{C}$ *então*

$$E(G,S,M) = E(L,H,N).$$

Demonstração: Recordemos que $((G,S);M)$ e $((L,H);N)$ são isomorfos em $\mathcal{C}$ se existem um isomorfismo de grupos $\alpha : G \to L$ tal que $\alpha(S) = H$, e um isomorfismo de grupos abelianos $\phi : M \to N$ satisfazendo $\phi(\alpha(g).n) = g.\phi(n)$. Denotemos por α' o isomorfismo restrição $\alpha_| : S \to H$.

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^1(G;M) & \xrightarrow{res^G_{S,M}} & H^1(S;M) \\ (\alpha,\phi)^* \downarrow & & \downarrow (\alpha',\phi)^* \\ H^1(L;N) & \xrightarrow{res^L_{H,N}} & H^1(H;N). \end{array}$$

Podemos facilmente verificar que este diagrama é comutativo e consequentemente,

$$(\alpha,\phi)^*(\operatorname{Ker} res^G_{S,M}) \subset \operatorname{Ker} res^L_{H,N}$$

pois, se $u \in \operatorname{Ker} res^G_{S,M}$, ou seja, $res^G_{S,M}(u) = 0$, então $res^L_{H,N}((\alpha,\phi)^*(u)) = (\alpha',\phi)^*(res^G_{S,M}(u)) = 0$.

Portanto temos bem definido o homomorfismo de grupos

$$(\alpha,\phi)^*_| : \operatorname{Ker} res^G_{S,M} \to \operatorname{Ker} res^L_{H,N}.$$

As aplicações verticais $(\alpha,\phi)^*$ e $(\alpha',\phi)^*$ são isomorfismos uma vez que são induzidas de isomorfismos.

Daí, $(\alpha,\phi)^*_|$ é obviamente injetora, e também sobrejetora pois, dado $v \in$ Ker $res^L_{H,N} \subset H^1(L;N)$, existe (do fato que $(\alpha,\phi)^*$ é sobrejetora) $u \in H^1(G;M)$ tal que $(\alpha,\phi)^*(u) = v$. Mas tal $u \in$ Ker $res^G_{S,N}$ pois $(\alpha',\phi)^*(res^G_{S,M}(u)) = res^L_{H,N}((\alpha,\phi)^*(u)) = res^L_{H,N}(v) = 0$ e $(\alpha',\phi)^*$ é injetora.

Logo Ker $res^G_{S,M} \simeq$ Ker $res^L_{H,N}$, e portanto

$$E(G,S,M) = 1 + \dim \text{Ker } res^G_{S,M} = 1 + \dim \text{Ker } res^L_{H,N} = E(L,H,N). \qquad \square$$

Nota: Conforme observação feita por Alejandro Adem, podemos sob certas hipóteses, espressar nosso invariante $E(G,S,M)$ em termos de característica de Euler parcial (mais 1), como mostra o lema abaixo.

2.4 Lema: *Se os tres primeiros grupos de cohomologia da sequência exata 2.2 (1) tem dimensão finita sobre* $\mathbb{Z}_2$ *e* $[G:S] = \infty$, *então*

$$E(G,S,M) = 1 + dim\ H^0(G;M) - dim\ H^0(S;M) + dim\ H^1(G,S;M).$$

Demonstração: Sabemos que, se $T : V_1 \to V_2$ é um homomorfismo de espaços vetoriais (de dimensão finita), então dim Ker T + dim Im T = dim V_1. Daí, usando este fato e a exatidão da sequência 2.2 (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } res^G_S &= \dim \text{Im } J = \dim H^1(G,S;M) - \dim \text{Im } \delta \\ &= \dim H^1(G,S;M) - (\dim H^0(S;M) - \dim H^0(G;M)) \qquad \square \end{aligned}$$

No resultado seguinte nós mostramos que o invariante $E(G,S,M)$ está relacionado com derivações e derivações principais. Isto é interessante pois torna possível computar $E(G,S,M)$ em muitos casos (ver por exemplo 3.8 e 4.22 abaixo). O subgrupo das derivações principais no caso relativo é dado por

$$\begin{aligned} P(G,S,M) &= \{d_m \in Der(G,S,M), m \in M \mid d_m(g) = gm + m, \forall g \in G\} \\ &= \{d_m \in P(G,M) \mid d_{m|S} = 0\}. \qquad \text{(cf.I.1.5)} \end{aligned}$$

2.5 Lema: *Se* $res^G_S : H^1(G;M) \to H^1(S,M)$ *é a aplicação restrição então*

Ker $res_S^G \simeq \dfrac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$. *Daí, se* $[G:S]=\infty$, *então*

$$E(G,S,M) = 1 + dim\ \frac{H^1(G,S;M)}{P(G,S,M)} = 1 + dim\ \frac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}.$$

Demonstração: Uma vez que $H^1(G;M) = \dfrac{Der(G,M)}{P(G,M)}$ (por 1.1.6) e $H^1(G,S;M) = Der(G,S,M)$ (por 1.5), podemos ver a aplicação J da sequência 2.2(1) como sendo a aplicação $Der(G,S,M) \to \dfrac{Der(G,M)}{P(G,M)}$, dada por $J(f) = f + P(G,M)$. Logo Ker $J = P(G,S,M)$ e daí, Ker res_S^G = Im $J \simeq \dfrac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$. □

Sabemos, por 1.4.3, que $\dfrac{Der(G,M)}{P(G,M)} = H^1(G;M)$ tem uma interpretação via levantamentos de uma extensão cindida de G por M. Nós observamos que a seguinte generalização pode ser provada de modo análogo.

2.6 Proposição: *Para todo* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo* M, *as classes de* M*-conjugação* $[l]$ *de levantamentos* $l: G \to M \rtimes G$ *satisfazendo* $l_{|S} = (0, Id_S)$, *da extensão cindida*

$$0 \to M \to M \rtimes G \to G \to 1$$

estão em correspondência biunívoca com os elementos de $\dfrac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{L}'$ o conjunto das classes de M-conjugação $[l]$ tal que $l_{|S} = (0, id_S)$.

Claramente, um levantamento l satisfaz $l_{|S} = (0, id_S)$ se, e somente se, a derivação correspondente d (ver demonstração 1.4.3) satisfaz $d_{|S} = 0$, isto é, $d \in Der(G,S,M)$. Assim, temos bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{Der(G,S,M)}{P(G,S,M)} & \to & \mathcal{L} \\ d + P(G,S,M) & \to & l \quad \text{tal que} \quad l(g) = (d(g), g). \end{array}$$

e facilmente verifica-se que tal aplicação é bijetora. □

A seguir apresentamos algumas propriedades interessantes do invariante E.

2.7 Proposição:

(i) *Sejam S, T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$. Se $[G:T] = \infty$ então*

$$E(G,T,M) \leq E(G,S,M)$$

para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.

(ii) *Sejam N, M $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Se existe um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo $\phi : N \to M$ tal que o homomorfismo induzido $\phi^* : H^1(G;N) \to H^1(G;M)$ é monomorfismo, então*

$$E(G,S,N) \leq E(G,S,M)$$

para todo subgrupo S de G satisfazendo $[G:S] = \infty$.

Demonstração: (i) Se $S \leq T \leq G$ então $res_S^G = res_S^T \circ res_T^G$, onde

$$\begin{tikzcd} H^1(G;M) \arrow[r, "res_T^G"] \arrow[rr, bend right, "res_S^G"'] & H^1(T;M) \arrow[r, "res_S^T"] & H^1(S;M) \end{tikzcd}$$

Logo, Ker $res_T^G \subset$ Ker res_S^G. Daí

$$E(G,T,M) = 1 + \dim \text{Ker } res_T^G \leq 1 + \dim \text{Ker } res_S^G = E(G,S,M).$$

(ii) Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(G;N) & \xrightarrow{\phi^*} & H^1(G;M) \\ \downarrow res_{S,N}^G & & \downarrow res_{S,M}^G \\ H^1(S;N) & \xrightarrow{(id_S,\phi)^*} & H^1(S;M) \end{array}$$

Da comutatividade do diagrama, segue que $\phi^*(\text{Ker } res_{S,N}^G) \subset$ Ker $res_{S,M}^G$. Como ϕ^* é monomorfismo temos que dim Ker $res_{S,N}^G$ = dim $\phi*(\text{Ker } res_{S,N}^G)$. Daí,

$$E(G,S,N) = 1 + \dim \text{Ker } res_{S,N}^G \leq 1 + \dim \text{Ker } res_{S,M}^G = E(G,S,M). \quad \square$$

2.8 Proposição: *Sejam S, T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se $[T:S] = \infty$ e*

$$\varphi^* : H^1(G; Ind_T^G(Ind_S^T M)) \to H^1(G; Coind_T^G(Ind_S^T M))$$

é um monomorfismo, onde φ^* *é a aplicação induzida do mergulho natural* $\varphi : Ind_T^G(Ind_S^T M) \to Coind_T^G(Ind_S^T M)$ *dado em I.3.6 (i), então*

$$E(G, S, Ind_S^G M) \leq E(T, S, Ind_S^T M).$$

Demonstração: Consideremos as seguintes aplicações

$$Ind_S^G M \xrightarrow{\psi} Ind_T^G Ind_S^T M \xrightarrow{\varphi} Coind_T^G Ind_S^T M \xrightarrow{\pi} Ind_S^T M,$$

onde nos geradores ψ é dada por $\psi(g \otimes m) = g \otimes 1 \otimes m$ e é estendida por linearidade, φ é o $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo dado em I.3.6 (i) e π é o $\mathbb{Z}_2T$-epimorfismo como em I.3.4, isto é, $\pi(\varphi(g \otimes 1 \otimes m)) = \varphi(g \otimes 1 \otimes m)(1)$.

Claramente ψ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo, e portanto $\phi = \pi \circ \varphi \circ \psi$ é um $\mathbb{Z}_2T$-homomorfismo.

O par de aplicações $(T \xhookrightarrow{\alpha} G, \phi)$ induz o homomorfismo

$$(\alpha, \phi)^* : H^1(G; Ind_S^G M) \to H^1(T; Ind_S^T M).$$

Como $(\alpha, \phi)^* = (\alpha, \pi)^* \circ \varphi^* \circ \psi^*$, com

$$H^1(G; Ind_S^G M) \xrightarrow{\psi^*} H^1(G; Ind_T^G Ind_S^T M) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(G; Coind_T^G Ind_S^T M) \xrightarrow{(\alpha,\pi)^*} H^1(T; Ind_S^T M)$$

onde $(\alpha, \pi)^*$ é o isomorfismo do lema de Shapiro (I.3.14), segue da hipótese da proposição e do fato que ψ^* é obviamente isomorfismo, que $(\alpha, \phi)^*$ é um monomorfismo.

Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^1(G; Ind_S^G M) & \xrightarrow{res_S^G} & H^1(S; Ind_S^G M) \\ \downarrow (\alpha, \phi)^* & & \downarrow \phi^* = (id : S \to S, \phi)^* \\ H^1(T; Ind_S^T M) & \xrightarrow{res_S^T} & H^1(S; Ind_S^T M) \end{array}$$

Se $[f] \in \operatorname{Ker} res_S^G$ segue, da comutatividade do diagrama, que $(\alpha, \phi)^*([f]) \in \ker res_S^T$. Portanto está bem definida a aplicação

$$(\alpha, \phi)^*_| : \operatorname{Ker} res_S^G \to \operatorname{Ker} res_S^T.$$

Daí, como $(\alpha, \phi)^*$ é monomorfismo, temos que

$$\begin{aligned} E(G, S, Ind_S^G M) &= 1 + \dim \operatorname{Ker} res_S^G \\ &\leq 1 + \dim \operatorname{Ker} res_S^T = E(T, S, Ind_S^T M). \end{aligned}$$ □

2.9 Corolário: *Sejam S, T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se $[G : S] = \infty$ e $[G : T] < \infty$ então*

$$E(G, S, Ind_S^G M) \leq E(T, S, Ind_S^T M).$$

Demonstração: Se $[G : T] = \infty$ então temos por I.3.6(ii), que $Ind_T^G N \overset{\varphi}{\simeq} Coind_T^G N$, para todo $\mathbb{Z}_2T$-módulo N, em particular, para $N = Ind_S^T M$. Logo, a aplicação induzida $\varphi^* : H^1(G; Ind_T^G Ind_S^T M) \to H^1(G; Coind_T^G Ind_S^T M)$ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo e portanto o resultado segue da proposição anterior. □

O invariante E(G,S):

Seja G é um grupo e S um subgrupo de G com $[G : S] = \infty$. Nós fixaremos, a partir de agora, o $\mathbb{Z}_2G$-módulo particular $M = \mathbb{Z}_2(G/S) \simeq Ind_S^G \mathbb{Z}_2$ (ver I.3.13(a)). Por simplicidade, $E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ será denotado por $E(G, S)$.

2.10 Lema: *$E(G, S)$ é um invariante algébrico para pares de grupos (G, S) com $[G : S] = \infty$, isto é, se $\alpha : (G, S) \to (L, K)$ é um isomorfismo de pares de grupos, então $E(G, S) = E(L, K)$.*

Demonstração: Seja $\alpha : (G, S) \to (L, K)$ um isomorfismo de pares de grupos, isto é, $\alpha : G \to L$ é um isomorfismo de grupos com $\alpha(S) = K$. Por 2.3 é suficiente provar que existe $\phi : \mathbb{Z}_2(L/K) \to \mathbb{Z}_2(G/S)$, isomorfismo de grupos abelianos, tal que $\phi(\alpha(g).u) = g.\phi(u)$, para $g \in G$ e $u \in \mathbb{Z}_2(L/K)$ em outras palavras, $((G, S); \mathbb{Z}_2(G/S))$ e $((L, K); \mathbb{Z}_2(L/K))$ são isomorfos na categoria $\mathcal{C}$.

Considere $\phi : \mathbb{Z}_2(L/K) \to \mathbb{Z}_2(G/S)$ definida nos geradores por $\phi(xK) = \alpha^{-1}(x)S$ para $x \in L$, e estendida por linearidade. Claramente ϕ é um isomorfismo de grupos. Além disto, $\phi(\alpha(g).xK) = \phi((\alpha(g)x)K) = \alpha^{-1}(\alpha(g)x)S = (g\alpha^{-1}(x))S = g.\phi(xK)$. Portanto ϕ está nas condições desejada. □

2.11 Observação: A existência de isomorfismos separados $G \to L$ e $S \to K$ não implica que $E(G,S) = E(L,K)$.

De fato, seja $G =< a > * < b >\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e consideremos os seguintes subgrupos de G:

$$S = < aba^{-1}b^{-1} > \text{ e } K = < b >$$

Temos obviamente que $S \simeq K \simeq \mathbb{Z}$. No entanto, veremos na secção seguinte que, $E(G,S) = 1$ enquanto que $E(G,K) = \infty$ (ver 3.7 e 3.8, respectivamente).

Logo, como uma aplicação do nosso invariante, podemos concluir que não existe isomorfismos de pares de grupos $(< a > * < b >, < aba^{-1}b^{-1} >) \to (< a > * < b >, < b >)$.

Concluindo esta secção nós reescreveremos, para facilitar futuras referências, o corolário 2.9 em termos do invariante $E(G,S)$.

2.12 Corolário: *Sejam S e T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$. Se $[G:S] = \infty$ e $[G:T] < \infty$, então*

$$E(G,S) \leq E(T,S).$$

Demonstração: Basta considerar, em 2.9, $M = \mathbb{Z}_2$. □

3. E(G,S) e Dualidade.

Nesta secção apresentamos alguns resultados para o invariante $E(G,S)$ quando G, S ou (G,S) satisfazem certas condições de dualidade. Dentre eles destacamos o seguinte: "Se (G,S) é um par de dualidade de dimensão n (D^n-par) então $E(G,S) = 1$". Assim, nosso invariante $E(G,S)$ dá uma condição necessária para que (G,S) seja um D^n-par.

Este resultado é uma "generalização" do resultado já existente para um grupo G. A saber, "se G é um D^n-grupo ($n > 1$) então $e(G) = 1$" (ver 4.11, na secção seguinte).

O conceito de par de dualidade para um par grupo $(G,\mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in I}$ foi introduzido por Bieri e Eckmann em [7, p. 299] para o anel $R = \mathbb{Z}$. No entanto, tudo pode ser feito de modo análogo para $R = \mathbb{Z}_2$. É neste caso que estamos interessados e na família $\mathcal{S} = \{S\}$. Para facilitar ao leitor, nós recordamos aqui este conceito e suas propriedades mais relevantes. Para maior detalhes ver referência acima.

3.1 Definição: *Um par grupo $(G,\mathcal{S})$ é chamado um* **par de dualidade de dimensão n (sobre $\mathbb{Z}_2$)**, *ou simplesmente um D^n-par, se existe um $\mathbb{Z}_2G$-módulo C e isomorfismos naturais:*

$$H^k(G;M) \simeq H_{n-k}(G,\mathcal{S};C\otimes M) \quad e \tag{1}$$

$$H^k(G,\mathcal{S};M) \simeq H_{n-k}(G;C\otimes M) \tag{2}$$

para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M e todo $k \in \mathbb{Z}$.

C é chamado o módulo dualizante de $(G,\mathcal{S})$. *Se $C \simeq \mathbb{Z}_2$ como um grupo abeliano, o par de dualidade $(G,\mathcal{S})$ é chamado um* par de dualidade de Poincaré, *ou simplesmente um PD^n-par (neste caso os isomorfismos (1) e (2) são equivalentes).*

3.2 Observações:(a) A definição de D^n-grupos (sobre $\mathbb{Z}_2$) dado em I.5.14, pode ser vista como um caso particular do conceito de D^n-pares se consideramos o par grupo $(G,\mathcal{S})$ com $\mathcal{S} = \emptyset$ (família vazia) e tomamos, como em 1.3(a),

$$H^k(G,\emptyset;M) = H^k(G;M) \text{ e } H_k(G,\emptyset;M) = H_k(G;M).$$

(b) Se $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par com módulo dualizante C então

$$H^n(G,\mathcal{S};\mathbb{Z}_2G) \simeq C \qquad \text{(como } \mathbb{Z}_2G\text{-módulos)}$$

Daí, C é determinado pelo par $(G,\mathcal{S})$ e, uma vez que $H^k(G,\mathcal{S};M) = 0$ para todo M e $k > n$, e $H^n(G,\mathcal{S};\mathbb{Z}_2G) = C \neq 0$, temos que o inteiro n é também determinado por $(G,\mathcal{S})$ (compare com I.5.15 (b)).

(c) Como em I.5.21 pode-se provar, levando em consideração 1.3(c), que se $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par sobre $\mathbb{Z}$ então $(G,\mathcal{S})$ é um D^n-par sobre $\mathbb{Z}_2$.

3.3 Proposição: [7, teor. 4.2] *Se* $(G,\mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\} \neq \emptyset$, *é um* D^n*-par com módulo dualizante* C, *então*

(i) G *é um* D^{n-1}*-grupo com módulo dualizante* $\Delta \otimes C$ *(com a* G*-ação diagonal).*

(ii) *Cada* S_i *é um* D^{n-1}*-grupo com módulo dualizante* C *(considerado como* S_i*-módulo por restrição).*

(iii) $\mathcal{S}$ *é uma família finita de subgrupos.* □

Antes de estabelecer o próximo resultado, que nos dá exemplos de PD^n-pares, recordamos aqui quando um par grupo $(G,\mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane.

3.4: Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, onde $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$. Dizemos que $(G,\mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X,Y) = K(G,\mathcal{S},1)$ se:

(i) X é um complexo celular $K(G,1)$

(ii) Y é um subcomplexo cujas componentes Y_i, $i \in I$, são complexos $K(S_i,1)$; o que significa que a aplicação $\pi_1(Y_i) \to \pi_1(X)$, induzida pela inclusão $Y_i \subset X$, é injetiva e aplica $\pi_1(Y_i)$ sobre $S_i \subset G$ (depois de uma conveniente escolha de caminhos conectando pontos base).

3.5 Teorema: [7, teor. 6.3] *Se* $(G,\mathcal{S})$ *é realizado topologicamente por um par Eilemberg-MacLane* (X,Y) *onde* X *é uma variedade de dimensão* n, *com bordo, compacta, orientável e* $Y = \partial X$ *(não necessariamente conexo), então* $(G,\mathcal{S})$ *é um* PD^n*-par.* □

Nota: De fato, em [7] conclui-se que, nas hipóteses acima, $(G,\mathcal{S})$ é um PD^n-par sobre $\mathbb{Z}$ mas, por 3.2(c), tem-se que $(G,\mathcal{S})$ é um PD^n-par (sobre $\mathbb{Z}_2$).

Agora estamos em condições de estabelecer e exemplificar o nosso resultado.

3.6 Proposição: *Sejam* G *um grupo e* S *um subgrupo de* G *com* $[G : S] = \infty$. *Se* (G,S) *é um* D^n*-par, então* $E(G,S) = 1$. *Ou equivalentemente, se*

$E(G,S) \neq 1$ *então* (G,S) *não é um* D^n*-par.*

Demonstração: Observemos, incialmente, que se (G,S) é um D^1-par então, por 3.3, G e S são D^0-grupos (sobre $\mathbb{Z}_2$). Portanto são grupos finitos (por I.5.22). Daí $[G:S] < \infty$. Logo, nas hipóteses acima, temos necessariamente $n > 1$.

Considere a sequência exata 2.2(1) com $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$,

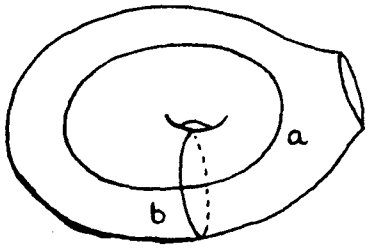
$$0 \to H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\delta} H^1((G,S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{J}$$
$$\to H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{res_S^G} H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to \cdots$$

Seja C o módulo dualizante de (G,S). Então

$$\begin{aligned}
H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S)) &\simeq H_{n-1}(G;C\otimes\mathbb{Z}_2(G/S)) && \text{(por 3.1(2))}\\
&\simeq H_{n-1}(G;C\otimes Ind_S^G\mathbb{Z}_2) && \text{(por I.3.13(a))}\\
&\simeq H_{n-1}(G;Ind_S^G(C\otimes\mathbb{Z}_2)) && \text{(por I.3.10)}\\
&\simeq H_{n-1}(S;C\otimes\mathbb{Z}_2) && \text{(por Lema de Shapiro: I.3.14)}\\
&\simeq H^0(S;\mathbb{Z}_2) && \text{(por 3.3(ii))}\\
&\simeq \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

Agora, observe que $H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) = (Ind_S^G\mathbb{Z}_2)^G = 0$ uma vez que $[G:S] = \infty$ (ver I.3.11), e $H^0(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) = \mathbb{Z}_2(G/S)^S$ contém $\{0,1S\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Daí temos $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_2(G/S)^S \overset{\delta}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}_2$ (com δ monomorfismo), o que nos dá $\mathbb{Z}_2(G/S)^S \simeq \mathbb{Z}_2$. Assim, $\operatorname{Ker} res_S^G = \operatorname{Im} J \simeq \dfrac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 0$ e portanto $E(G,S) = 1$. □

3.7 Exemplo: Se $G =< a > * < b > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S =< aba^{-1}b^{-1} > \simeq \mathbb{Z}$ então $E(G,S) = 1$. De fato, seja X um toro dos quais um disco aberto D^2 foi removido como mostra a figura abaixo:



Temos que $\Pi_1(X) =< a > * < b >= G$, $\Pi_1(\partial X) =< aba^{-1}b^{-1} >= S$ e $(X, \partial X)$ é um par Eilenberg-MacLane que realiza (G, S). Por 3.5, (G, S) é um PD^2-par. Logo $E(G, S) = 1$, pela proposição anterior.

No exemplo seguinte usamos 3.6 para concluir que um determinado par (G, S) não é de dualidade. Além disto, sabemos por 3.3, que se (G, S) é um D^n-par então G e S são D^{n-1}-grupos. O exemplo abaixo nos mostra que a proposição 3.6 é falsa se nós substituirmos a hipótese "(G, S) é um D^n-par" pela condição mais fraca "G e S são D^{n-1}-grupos". Tal exemplo é computado usando a interpretação de $E(G, S)$ em termos de derivações e derivações principais, dada em 2.5.

3.8 Exemplo: Se $G =< a > * < b >\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S =< b >$ então $E(G, S) = \infty$. Observe que G é um D^1-grupo, S é um PD^1-grupo e no entanto, por 3.6, (G, S) não será um D^2-par.

De fato, todo elemento de G pode ser unicamente escrito na forma $a^{\alpha_1}b^{\beta_2}\dots a^{\alpha_n}b^{\beta_n}$ onde $n \geq 1$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$ e são não nulos, exceto possivelmente para α_1 e β_n.

Seja f um elemento de $Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$. Afirmamos que f depende somente de $f(a)$. Mais precisamente, temos

$$(1) \quad f(a^\alpha) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} a^i f(a) \quad \text{e} \quad f(a^{-\alpha}) = \sum_{i=0}^{\alpha} a^{-i} f(a), \quad \forall \alpha > 0.$$

$$(2) \quad \begin{cases} f(a^\alpha b^\beta) & = a^\alpha f(b^\beta) + f(a^\alpha) = f(a^\alpha) \quad \text{visto que } f_{|S} = 0, \\ f(a^{\alpha_1}b^{\beta_1}a^{\alpha_2}b^{\beta_2}) & = a^{\alpha_1}b^{\beta_1}f(a^{\alpha_2}b^{\beta_2}) + f(a^{\alpha_1}b^{\beta_1}) = a^{\alpha_1}b^{\beta_1}f(a^{\alpha_2}) + f(a^{\alpha_1}) \\ \text{e mais geralmente,} & \\ f(a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\dots a^{\alpha_n}b^{\beta_n}) & = \sum_{j=1}^{n} a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\dots a^{\alpha_{j-1}}b^{\beta_{j-1}}f(a^{\alpha_j}). \end{cases}$$

Estes fatos podem ser facilmente provados pelo princípio de indução finita (indução sobre α e n respectivamente). Vejamos por exemplo (1) no caso das potências negativas.

(i) O caso $\alpha = 1$ é verdadeiro, pois $0 = f(1) = f(a^{-1}.a) = a^{-1}f(a) + f(a^{-1})$

e portanto $f(a^{-1}) = a^{-1}f(a)$.

(ii) Suponhamos que a igualdade é valida para α, isto é, $f(a^{-\alpha}) = \sum_{i=1}^{\alpha} a^{-i}f(a)$.

(iii) Provemos que a igualdade é verdadeira para $\alpha + 1$:

$$\begin{aligned} f(a^{-(\alpha+1)}) &= f(a^{-\alpha}.a^{-1}) = a^{-\alpha}f(a^{-1}) + f(a^{-\alpha}) \\ &\overset{(i)}{=} a^{-\alpha}.a^{-1}f(a) + f(a^{-\alpha}) \\ &\overset{(ii)}{=} a^{-(\alpha+1)}f(a) + \sum_{i=1}^{\alpha} a^{-i}f(a) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha+1} a^{-i}f(a). \end{aligned}$$

Agora, para duas classes laterais de S, nós temos, $g_1S = g_2S$ se, e somente se, $g_1 = g_2b^{\beta}$ para algum $\beta \in \mathbb{Z}$. Daí, $E := \{1\} \cup \{a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\ldots a^{\alpha_{k-1}}b^{\beta_{k-1}}a^{\alpha_k}$ onde $k \geq 1$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$ são não nulos, exceto para α_1 $\}$, é um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de S em G.

Das considerações anteriores temos que todo elemento $u \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ dá origem a uma derivação f em $Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$, basta tomarmos $f(a) = u$, $f(b) = 0$ e estender de modo geral usando (1) e (2).

Sejam f_j, $j \in \mathbb{Z}$, as derivações obtidas deste modo considerando $f_j(a) := b^j aS$.

Usando o fato que $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é o grupo abeliano livre gerado pelas classes laterais gS, com $g \in E$, podemos verificar que f_j não pertence a $P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, e $\{f_j + P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S)); j \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto infinito de elementos linearmente independentes de $\dfrac{Der(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}$. Logo, por 2.5, $E(G, S) = \infty$.

Nós finalizamos esta secção com um resultado que é útil para computarmos $E(G, S)$ no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade.

3.9 Proposição: *Sejam G um D^n-grupo com módulo dualizante C e S um subgrupo de G.*

(i) *Se S é um D^{n-1}-grupo com módulo dualizante $Res_S^G C$ (em particular, se G e S são grupos de dualidade de Poincaré) então $E(G, S) \leq 2$.*

(ii) *Se* $hdS \leq n-2$ *então* $E(G,S)=1$.

Demonstração: Primeiro observamos que, em ambos os casos, $[G:S]=\infty$ e portanto $E(G,S)$ está definido. Isto segue de I.5.13, I.5.15(b) e I.5.9(iii).

$$\begin{aligned}
\text{(i) } H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) &\simeq H_{n-1}(G;C\otimes\mathbb{Z}_2(G/S)) && \text{(por I.5.14)}\\
&\simeq H_{n-1}(G;C\otimes Ind_S^G\mathbb{Z}_2) && \text{(por I.3.13(a))}\\
&\simeq H_{n-1}(G;Ind_S^G(Res_S^G C\otimes\mathbb{Z}_2)) && \text{(por I.3.10)}\\
&\simeq H_{n-1}(S;Res_S^G C\otimes\mathbb{Z}_2) && \text{(por I.3.14)}\\
&\simeq H^0(S;\mathbb{Z}_2) && \text{(por hipótese (i))}\\
&\simeq \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

Daí, visto que $\operatorname{Ker} res_S^G$ é um submódulo de $H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S))$, temos que $E(G,S)=1+\dim\operatorname{Ker} res_S^G\leq 1+\dim H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S))\leq 2$.

(ii) Se $hdS\leq n-2$ então $H_{n-1}(S;M)=0$ para todo $\mathbb{Z}_2S$-módulo M, em particular $H_{n-1}(S;Res_S^G C\otimes\mathbb{Z}_2)=0$. Logo pelo mesmo raciocínio de (i) obtemos que $H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S))=0$ e portanto $E(G,S)=1$. □

3.10 Exemplos: **(a)** Seja $G=\mathbb{Z}^k$ e $S=\mathbb{Z}^r$, com $k>r\geq 2$. Por I.5.23(d), G é um PD^k-grupo e S é um PD^r-subgrupo. Daí, por 3.9, $E(G,S)\leq 2$ se $r=k-1$ e $E(G,S)=1$ se $r\leq k-2$.

(b) Se $G=\Pi_1(KB)=<a,b;a^2b^2=1>$ e $S=<a>$, então $E(G,S)\leq 2$.

(c) Seja $G=(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})\rtimes_\theta\mathbb{Z}$, onde $\theta:\mathbb{Z}\to Aut(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$ é dada por

$$\theta(c)(a,b)=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}^c\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2c&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=(a,2ca+b)$$

A operação em G é dada por

$((a,b),c)+((a_1,b_1),c_1)=((a,b)+\theta(c)(a_1,b_1),c+c_1)=(a+a_1,b+b_1+2ca_1,c+c_1)$.

Temos que G é um PD^3-grupo, pois G é o grupo fundamental de uma variedade asférica de dimensão 3 (cf. [23]).

Seja $S=\{((a,b),0);a,b\in\mathbb{Z}\}$. Temos que S é um subgrupo (normal) de G isomorfo a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Daí S é um PD^2-subgrupo e portanto $E(G,S)\leq 2$.

Analogamente, se considerarmos $K = \{((0,b),c); b,c \in \mathbb{Z}\}$, temos que K é um subgrupo (abeliano e normal) de G e portanto também $E(G,K) \leq 2$.

(d) Se G é como no exemplo anterior e $S = \{((0,0),c); c \in \mathbb{Z}\}$ então S é um subgrupo de G (não normal). Como S é um PD^1-subgrupo, segue de 3.9 (ii) que $E(G,S) = 1$. Se G' é qualquer extensão finita de G, então também $E(G',S) = 1$ pois, por 2.12, $E(G',S) \leq E(G,S)$.

Nota: De fato, concluiremos (na secção seguinte) que em (a), $E(\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}^{k-1}) = 2$ e em (c), $E(G,S) = E(G,K) = 2$.

4. E(G,S) e o Invariante end e(G,S).

Os principais resultados desta secção surgiram da tentativa em dar uma interpretação para o invariante end $e(G,S)$ de Houghton [17] e Scott [26], em termos de cohomologia relativa. Na realidade grande parte deste trabalho teve sua origem aqui.

Com o propósito de situar o leitor na teoria de ends e evitar frequentes consultas às referências, apresentamos, inicialmente, uma breve revisão dos conceitos e resultados básicos (sem demonstração) da teoria de ends de grupos $e(G)$ e ends de pares de grupos $e(G,S)$. Para maiores detalhes ver [9], [26] e [27].

Ends de Grupos

A teoria de ends de grupos teve sua origem na teoria de ends de espaço. A definição de ends de espaço foi introduzida por Freudenthal [13] (1931). Para um estudo do *conjunto* de ends de X, onde X é um espaço topológico, nós sugerimos [29]. Aqui estamos interessados somente no *número* de ends, não necessariamente no conjunto de ends.

4.1 Definição: *Seja X um complexo simplicial localmente finito. Para todo*

subcomplexo K, o número de componentes de $X - K$ é finito. Seja $n(K)$ o número de componentes infinitas (ou equivalentemente, cujo fecho é não compacto), então o **número de ends** *de X é definido por:*

$$e(X) = sup\ \{n(K), K \subseteq X, K \text{ finito }\}.$$

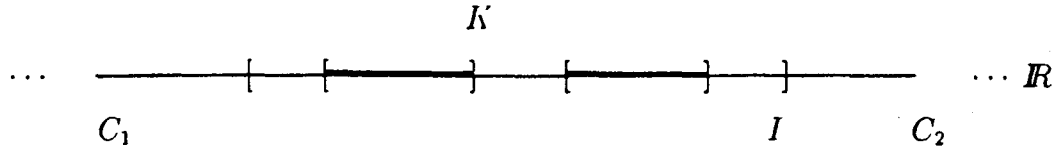
Nota: Esta definição vale igualmente para um CW-complexo localmente finito, se nós simplesmente trabalharmos com células ao invés de simplexos.

4.2 Exemplos:

(i) $e(X) = 0 \Leftrightarrow$ X é um complexo simplicial finito (ou equivalentemente, X é compacto).

(ii) $e(\mathbb{R}) = 2$ pois, para qualquer compacto K, existe um intervalo fechado I tal que $K \subset I$. Claramente $\mathbb{R} - I$ tem duas componentes C_1, C_2, ambas infinitas, e uma componente de $\mathbb{R} - K$ que não intercepta nenhuma destas componentes está inteiramente contida em I e portanto é finita.

Nós ilustramos o caso em que K tem duas componentes conexas:



(iii) $e(\mathbb{R}^n) = 1$ se $n \geq 2$.

Hopf em [16] (1943) mostrou que se um grupo finitamente gerado G atua livremente sobre um complexo simplicial $\tilde{X}$ tal que o quociente $\tilde{X}/G$ é um complexo simplicial finito então $e(\tilde{X})$ depende somente de G. Assim, no caso em que G é finitamente gerado, podemos definir o número de ends de G como sendo $e(\tilde{X})$.

Foi Specker em [30] (1949) quem apresentou uma definição de número de ends de G, para qualquer grupo G (não necessariamente finitamente gerado). Sua definição é puramente algébrica. Antes de introduzirmos a definição faremos algumas considerações.

4.3: Seja G um grupo. Por 1.3.7, $\mathbb{Z}_2G$ pode ser considerado como um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2G} = Coind_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2$. Denotemos por EG o $\mathbb{Z}_2G$-módulo quociente $\dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2G}}{\mathbb{Z}_2G}$.

Conforme vimos em 1.3.15, existe um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2G} \to PG$. Considere $FG = \{A \subset G \mid A \text{ é finito}\}$. É fácil verificar que a imagem do $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo

$$\mathbb{Z}_2G \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Z}_2G} \xrightarrow{\rho} PG$$

é exatamente FG. Em outras palavras, o submódulo $\mathbb{Z}_2G$ de $\overline{\mathbb{Z}_2G}$ corresponde via o isomorfismo ρ, ao submódulo FG de PG. Assim temos o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo

$$EG = \frac{\overline{\mathbb{Z}_2G}}{\mathbb{Z}_2G} \simeq \frac{PG}{FG}.$$

4.4 Definição: *O número de ends de G é definido como*

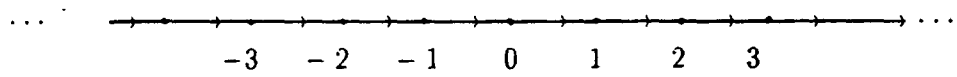
$$e(G) = \dim H^0(G; EG) = \dim \left(\frac{PG}{FG}\right)^G.$$

No caso em que G é finitamente gerado este número $e(G)$ (obtido de forma algébrica) é igual ao número de ends de um espaço topológico construído a partir de G como segue:

Suponhamos que G é gerado por $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e seja Γ_U o *diagrama de Cayley* correspondente para G. Isto é, Γ_U tem como vértices os elementos de G e para todo i existe uma aresta ligando os pontos g a $x_i g$. Note que claramente G atua à direita sobre Γ_U.

4.5 Proposição: [27, prop. 5.2] *Se G é gerado por $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ então $e(G) = e(\Gamma_U)$.* □

4.6 Corolário: (i) $e(\mathbb{Z}) = 2$ *pois* $U = \{1\}$ *gera* $\mathbb{Z}$ *e* $\Gamma_{\{1\}} = \mathbb{R}$.



(ii) $e(\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2) = 2$.

(iii) $e(\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) = \infty$. □

Esta conexão pode ser estendida.

4.7 Proposição: [26, lema 1.2] *Se G atua livremente sobre um complexo conexo $\tilde{X}$, com quociente finito X (equivalentemente, $\tilde{X} \to X$ é um recobrimento regular conexo, com grupo de recobrimento G), então $e(G) = e(\tilde{X})$.* □

Observe que o quociente X sendo finito implica que G é finitamente gerado, e portanto o resultado anterior confirma que no caso em que G é finitamente gerado, a definição dada por Hopf para o número de ends de G coincide com a definição algébrica dada por Specker.

4.8 Corolário: *Se G atua livremente no $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, com quociente compacto então $e(G) = 1$. Em particular $e(\mathbf{Z}^k) = 1$ se $k \geq 2$.* □

No lema seguinte nós reunimos algumas propriedades de $e(G)$.

4.9 Lema: [27]

(i) $e(G) = 0 \Leftrightarrow G$ *é finito.*

(ii) *Se S é um subgrupo de G tal que $[G : S] < \infty$ então $e(G) = e(S)$.*

(iii) *Se S é um subgrupo finito normal de G então $e(G) = e(G/S)$.* □

Se G é qualquer grupo infinito, nós temos a seguinte interpretação de $e(G)$ em termos de cohomologia de grupos.

4.10 Proposição: *Se G é um grupo infinito então*

$$e(G) = 1 + dim\ H^1(G; \mathbf{Z}_2 G).$$

□

4.11 Corolário: *Se G é um D^n-grupo, $n > 1$, então $e(G) = 1$.* □

Um resultado interessante que, no caso em que S é finitamente gerado, pode ser visto em [27, corol. 5.9] é o seguinte:

4.12 Proposição: *Seja G um grupo. Então $e(G) = 0, 1, 2$ ou ∞.* □

Existe uma classificação completa para grupos com dois ends (devida a Hopf, 1943).

4.13 Teorema: [27, teor. 5.12] *As seguintes condições são equivalentes para grupos finitamente gerados:*

(i) $e(G) = 2$.

(ii) *G tem um subgrupo cíclico infinito de índice finito.*

(iii) *G tem um subgrupo normal K tal que G/K é isomorfo a $\mathbb{Z}$ ou ao grupo diedral infinito $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.* □

O end e(G,S).

O conceito de número de ends $e(G, S)$ de um par grupo (G, S), onde S é um subgrupo de G, é uma generalização do número de ends de um grupo.

A definição natural de $e(G, S)$ é devida a Houghton [17] (1974) e foi estabelecida para grupos topológicos. Scott em [26] (1977), explorou este invariante para grupos discretos.

De modo similar a 4.3, podemos, por 1.3.13, considerar $\mathbb{Z}_2(G/S)$ como um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$, e o $\mathbb{Z}_2G$-módulo quociente $E(G/S) = \dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}}{\mathbb{Z}_2(G/S)} \simeq \dfrac{P(G/S)}{F(G/S)}$.

4.14 Definição: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Então, por definição,*

$$e(G, S) = dim\ H^0(G; E(G/S)) = dim\ (\frac{P(G/S)}{F(G/S)})^G.$$

No lema seguinte agrupamos algumas propriedades de $e(G,S)$. Elas estão contidas em [26]

4.15 Lema:

(i) $e(G,\{1\}) = e(G)$.

(ii) $e(G,S) = 0 \Leftrightarrow [G:S] < \infty$.

(iii) *Se* $S \subset T \subset G$, *com* $[G:T] < \infty$ *então* $e(G,S) = e(T,S)$.

(iv) *Se* S *é um subgrupo normal em* G, *então* $e(G,S) = e(G/S)$.

(v) *Sejam* A *e* S *grupos não triviais. Se* $A = S = \mathbb{Z}_2$ *então* $e(A*S,S) = 1$, *caso contrário* $e(A*S,S) = \infty$.

(vi) *Se* G *é um grupo livre e* S *é um subgrupo finitamente gerado de* G *tal que* $[G:S] = \infty$ *então* $e(G,S) = \infty$. □

O invariante $e(G,S)$ também está relacionado com espaços topológicos como nos mostra o resultado abaixo, que é uma extensão das proposições 4.5 e 4.7 (cf. [26, lemas 1.1 e 1.2]).

4.16 Proposição:

(i) *Sejam* G *um grupo finitamente gerado,* S *um subgrupo de* G *e* Γ *o diagrama de Cayley associado a* G *como em 4.5. Se* Γ/S *denota o quociente de* Γ *pela ação à direita de* S *então* $e(G,S) = e(\Gamma/S)$.

(ii) *Se* X *é um CW-complexo finito com espaço de recobrimento regular conexo* $\hat{X}$ *cujo grupo de recobrimento é* G e S *é um subgrupo de* G, *então* $e(G,S) = e(\hat{X}/S)$, *onde* $\hat{X}/S$ *é o quociente de* $\hat{X}$ *pela ação do subgrupo* S. □

É válido para (G,S) um resultado similar ao 4.12 acima, porém com alguma restrição.

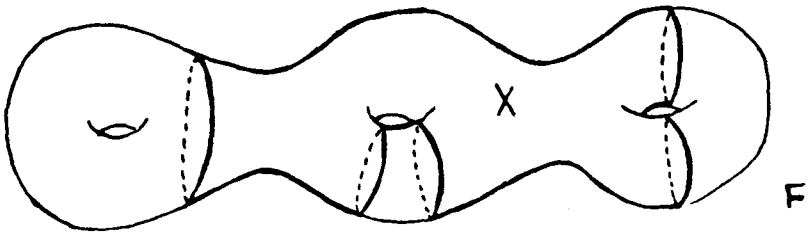
4.17 Proposição: [17, teor. 4.1] *Se* G *e* S *são finitamente gerados e* $[N_G(S):S] = \infty$, *onde* $N_G(S)$ *denota o normalizador de* S *em* G, *então* $e(G,S) = 1, 2,$ *ou* ∞. □

De modo geral $e(G,S)$ pode assumir qualquer valor $n \in \mathbb{N}$, como nos mostra o resultado seguinte.

4.18 Proposição: [26, lema 2.2] *Seja G o grupo fundamental de uma superfície fechada F e seja S o grupo fundamental de uma subsuperfície compacta incompressível X de F. Então $e(G,S)$ é igual ao número de componentes de bordo de X.* □

Recordamos que um circulo C mergulhado em uma superfície F é incompressível se a aplicação natural $\Pi_1(C) \to \Pi_1(F)$ é injetiva; e uma subsuperfície compacta X em uma superfície F é incompressível se toda componente de bordo de X é incompressível em F.

4.19 Exemplo: Seja G o grupo fundamental de uma superfície fechada orientável F de genus 3, e seja S o grupo fundamental da subsuperfície incompressível X de F como na figura abaixo. Então $e(G,S) = 5$.



Agora estamos em condições de analisar a relação entre os dois invariantes $E(G,S)$ e $e(G,S)$.

Conforme inicialmente observamos, os resultados desta secção surgiram da tentativa em dar uma interpretação para $e(G,S)$ em termos de cohomologia relativa.

4.20: Seja G um grupo infinito então, por 4.10 e 2.5, temos

$$\begin{aligned} e(G) &= 1 + \dim H^1(G;\mathbb{Z}_2G) \\ &= 1 + \dim \frac{Der(G,\mathbb{Z}_2G)}{P(G,\mathbb{Z}_2G)} = E(G,\{1\}). \end{aligned}$$

Agora uma vez que $e(G,\{1\}) = e(G)$, segue de 2.5, que

$$e(G,\{1\}) = E(G,\{1\}) = 1 + \dim \frac{H^1(G,\{1\};\mathbf{Z}_2G)}{P(G,\{1\},\mathbf{Z}_2G)}.$$

Nós notamos que para $e(G,S)$ onde S é um subgrupo não trivial de G com $[G : S] = \infty$, não existe uma fórmula análoga (usando cohomologia relativa). Nossa esperança inicial era provar que $e(G,S) = E(G,S)$ e assim, por 2.5, obter uma fórmula similar para $e(G,S)$. Mas isto é falso em geral, como mostra o exemplo seguinte:

4.21 Exemplo: Se $G =< a > * < b >\simeq \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ e $S =< aba^{-1}b^{-1} >$ então $E(G,S) = 1 < e(G,S) = \infty$.

De fato, que $E(G,S) = 1$ foi visto no exemplo 3.7, e que $e(G,S) = \infty$ segue de 4.15 (vi).

Entretanto, provaremos no teorema 4.24 abaixo, que a desigualdade $E(G,S) \leq e(G,S)$ é sempre verdadeira, e que a igualdade ocorre quando S é normal em G. Isto foi motivado nos seguintes exemplos:

4.22 Exemplo: Se $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} =< (t,1),(1,s) >$ e $S = \{1\} \oplus \mathbb{Z} = < (1,s) >\simeq \mathbb{Z}$. Então

$$e(G,S) = E(G,S) = 1 + \dim \frac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))} = 2.$$

Como S é normal em G, segue de 4.15 (iv) e 4.6, que $e(G,S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z}) = 2$. Daí temos (por 3.10 (a)) a desigualdade $E(G,S) \leq 2 = e(G,S)$. Para provar a igualdade usamos a interpretação de $E(G,S)$ em termos de derivações e derivações principais (lema 2.5), isto é, mostraremos que

$$\frac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Por simplicidade, denotaremos a classe $(t,1)S$ por $\mathbf{t}$, e assim, $G/S =< \mathbf{t} >$. Os seguintes passos fornecem a prova.

1- Uma derivação $f \in Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))$, somente depende de $f(t,1)$,

pois, para todo $k > 0$ e $j \in \mathbf{Z}$, nós temos

$$f(t^k, s^j) = f(t^k, 1) = \sum_{i=0}^{k-1} (t^i, 1) f(t, 1), \quad \text{e}$$

$$f(t^{-k}, s^j) = f(t^{-k}, 1) = \sum_{i=1}^{k} (t^{-i}, 1) f(t, 1).$$

(Isto pode ser provado por indução sobre k.)

2- Se $f(t,1) = \mathbf{t}^k + \mathbf{1}$ então $f \in P(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))$.

De fato, para $k > 0$, temos $f = d_m$ onde $m = \mathbf{t}^{k-1} + \mathbf{t}^{k-2} + \ldots + \mathbf{1} \in \mathbf{Z}_2(G/S)$. Para $k = -n < 0$, nós temos $f = d_m$ onde $m = \mathbf{t}^{-n} + \mathbf{t}^{-n+1} + \cdots + \mathbf{t}^{-1}$. O caso $k = 0$ é obvio.

3- Suponhamos que $f(t,1) = \mathbf{t}^{i_1} + \cdots + \mathbf{t}^{i_r}$, com $i_j \neq i_k$, para todo $0 \leq j \neq k \leq r$. Se $r \equiv 0 (\text{mod } 2)$ então $f \in P(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))$. Se $r \equiv 1 (\text{mod } 2)$ então $f - \psi \in P(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))$, onde $\psi \in Der(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))$ é dada por $\psi(t,1) = \mathbf{1}$ e $\psi \notin P(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))$.

A prova disto usa 1 e 2 notando que $f(t,1) = (\mathbf{t}^{i_1} + 1) + \cdots + (\mathbf{t}^{i_r} + 1) + r.1 = d_m(t,1) + r.1$.

4- Finalizando nós definimos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \eta \ : \ \frac{Der(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S))} &\rightarrow \mathbf{Z}_2 \\ f + P(G, S, \mathbf{Z}_2(G/S)) &\rightarrow \varepsilon(f(t,1)), \end{aligned}$$

onde $\varepsilon : \mathbf{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é a aplicação dada no início do capítulo, isto é, que aplica todo gerador gS em 1.

Analogamente, nós temos

4.23 Exemplos:

(i) Se $G = \mathbf{Z}^k$, $S = \mathbf{Z}^{k-1}$, $k \geq 3$ então $E(G,S) = e(G,S) = 2$

(ii) Se $G = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_n$ e $S = \mathbf{Z}_n$, $n > 1$ onde $\mathbf{Z}_n$ é o grupo cíclico de ordem finita n, então $E(G,S) = e(G,S) = 2$.

4.24 Teorema: *Se G é um grupo e S é um subgrupo de G com $[G:S]=\infty$, então* $E(G,S) \leq e(G,S)$.

Além disto, se S é normal em G, a igualdade ocorre, ou seja,

$$e(G,S) = E(G,S) = 1 + dim\ \frac{H^1(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S;\mathbb{Z}_2(G/S))}.$$

Para demonstrarmos o teorema necessitamos do seguinte lema elementar, que nos dá uma condição necessária e suficiente para que $e(G,S) = E(G,S)$.

4.25 Lema: *Seja (G,S) um par grupo com $[G:S]=\infty$.*

(i) *Se $\varphi^* : H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ é a aplicação induzida do $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo natural $\varphi : \mathbb{Z}_2(G/S) \to \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ (dado em 1.3.13), então*

$$e(G,S) = 1 + dim\ Ker\ \varphi^*.$$

(ii) $E(G,S) = e(G,S) \Leftrightarrow dim\ Ker\ res^G_S = dim\ Ker\ \varphi^*$,

onde $res^G_S : H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S))$ é a aplicação restrição.

Demonstração: (ii) é uma consequência imediata de (i) e da definição de $E(G,S)$. Vejamos (i):

A sequência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \to E(G,S) = \frac{\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}}{\mathbb{Z}_2(G/S)} \to 0,$$

induz (ver 1.2.2(ii)') a sequência exata longa

$$0 \to H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^0(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \to H^0(G;E(G/S)) \xrightarrow{\delta}$$
$$\to H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \to \cdots \qquad (1)$$

Agora, $H^0(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) = 0$ visto que $[G:S]=\infty$ (1.3.11) e $H^0(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \simeq H^0(S;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ por 1.3.17. Daí nós temos a sequência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H^0(G;E(G/S)) \to \mathrm{Ker}\ \varphi^* \to 0$$

e portanto (ver I.14), $e(G,S) = 1 + \dim \operatorname{Ker} \varphi^*$, como desejado. □

Demonstração do teorema 4.24: Seja $A = \varphi(\mathbb{Z}_2(G/S))$ onde $\varphi : \mathbb{Z}_2(G/S) \to \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ é como no lema acima. Temos que $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é $\mathbb{Z}_2G$-isomorfo (via φ) ao submódulo A de $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ e portanto temos os isomorfismos

$$H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\hat{\varphi}} H^1(G,A), \quad \text{e} \quad \frac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))} \simeq \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)}.$$

Daí

$$E(G,S) = 1 + \dim \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)}. \tag{1}$$

Sejam $\alpha : S \hookrightarrow G$ e $k : A \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ as inclusões (de grupos e módulos, respectivamente), e π' a composição das aplicações $A \xhookrightarrow{k} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \xrightarrow{v} Coind_S^G\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2$, onde v é o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo dado em I.3.13 e π é o $\mathbb{Z}_2S$-epimorfismo dado em I.3.4. Assim $\pi'(l) = v(l)(1) = l(1S)$, $\forall l \in A \subset Hom(\mathbb{Z}_2(G/S),\mathbb{Z}_2)$.

Consideremos as aplicações induzidas (I, secção 2)

$$\begin{tikzcd}
H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[rrr, bend left, "\varphi^*"] & H^1(G;A) \arrow[r, "k^*"] \arrow[rrr, bend right, "t := (\alpha,\pi')^*"'] & H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \arrow[r, "v^*"] & H^1(G;Coind_S^G\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\alpha,\pi)^*"] & H^1(S;\mathbb{Z}_2).
\end{tikzcd}$$

Como $\hat{\varphi}$, v^* e $(\alpha,\pi)^*$ são isomorfismos, temos

$$\operatorname{Ker} \varphi^* \simeq \operatorname{Ker} k^* = \operatorname{Ker} t. \tag{2}$$

Por outro lado, o homomorfismo

$$\psi : \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \to \frac{Der(G,A)}{P(G,A)} = H^1(G;A)$$

definido por $\psi(f + P(G,S,A)) = [f] = f + P(G,A)$ é um monomorfismo e daí

$$\frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} \simeq \operatorname{Im} \psi = \{[f] \mid f \in Der(G,S,A)\} \tag{3}$$

Logo, para provar a primeira parte do teorema é suficiente provar que

$$\operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Ker} t \tag{4}$$

pois daí, temos:

$$
\begin{aligned}
E(G,S) &= 1 + \dim \frac{Der(G,S,A)}{P(G,S,A)} && \text{(por (1))} \\
&= 1 + \dim \operatorname{Im} \psi && \text{(por (3))} \\
&\leq 1 + \dim \operatorname{Ker} t && \text{(por (4))} \\
&= 1 + \dim \operatorname{Ker} \varphi^* && \text{(por (2))} \\
&= e(G,S) && \text{(pelo lema anterior)}
\end{aligned}
$$

Provemos então (4): Temos que t é a aplicação induzida de (α, π'). Sejam $P \to \mathbb{Z}_2$ e $F \to \mathbb{Z}_2$ as resoluções Bar para S e G respectivamente (como em I.14(c)). Claramente a inclusão $\tau : P \to F$ é uma aplicação de cadeia compatível com α. Daí temos o seguinte diagrama

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to & C^0(G,A) & \xrightarrow{\delta^1} & C^1(G,A) & \xrightarrow{\delta^2} \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow Hom(\tau,\pi') & \\
0 \to & C^0(S,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\overline{\delta^1}} & C^1(S,\mathbb{Z}_2) & \to \cdots
\end{array}
$$

onde $Hom(\tau,\pi')(f) = \pi' \circ f \circ \tau$ para todo $f \in C^1(G,A)$, e $t : H^1(G;A) \to H^1(S;\mathbb{Z}_2)$ é tal que $t[f] = (\alpha,\pi')^*([f]) = [\pi' \circ f \circ \tau]$.

Seja $[f] \in \operatorname{Im} \psi \subset H^1(G,A)$. Como $f \in Der(G,S,A)$ temos que $f_{|S} = 0$. Daí $\pi' \circ f \circ \tau : S \to \mathbb{Z}_2$ satisfaz $(\pi' \circ f \circ \tau)(s) = \pi'(f(s)) = f(s)(1S) = 0$. Logo $t[f] = [\pi' \circ f \circ \tau] = 0$ e assim $\operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Ker} t$.

Suponhamos agora que S é normal em G. Então a ação de S em $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é trivial ($s.gS = sgS = g(g^{-1}sg)S = gS$).

Usando este fato provaremos que

$$\operatorname{Ker} k^* \subset \operatorname{Im} \psi = \{[f] \mid f \in Der(G,S,A)\} \tag{5}$$

daí teremos $e(G,S) \leq E(G,S)$, que junto com a primeira parte do teorema nos fornece a igualdade desejada.

Provemos (5): Seja $F \to \mathbb{Z}_2$ a resolução Bar para G e considere o seguinte diagrama

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to & C^0(G,A) & \xrightarrow{\delta^1} & C^1(G,A) & \xrightarrow{\delta^2} \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow k^\# & \\
0 \to & C^0(G,\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) & \xrightarrow{\overline{\delta^1}} & C^1(G,\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) & \xrightarrow{\overline{\delta^2}} \cdots
\end{array}
$$

onde $k^{\#}(f) = k \circ f$. Temos que a induzida $k^* : H^1(G;A) \to H^1(G;\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ é tal que $k^*[f] = [k^{\#}(f)] = [k \circ f]$.

Seja $[f] \in \text{Ker } k^* \subset H^1(G;A)$. Como $f \in \text{Ker } \delta^2 = Der(G,A)$, para provar (5) basta provar que $f_{|S} = 0$ ou seja, $f(s) \in A \subset Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação nula para todo $s \in S$. Mas $k^*[f] = 0$ implica que $k \circ f \in \text{Im } \overline{\delta^1}$ e portanto existe $u \in C^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ tal que $k \circ f = \overline{\delta^1}(u)$. Logo $f(g) = (k \circ f)(g) = \overline{\delta^1}(u)(g) = g.u[\,] - u[\,]$ para todo $g \in G$, em particular, $f(s) = su[\,] - u[\,]$, $\forall s \in S$. Daí, usando o fato que as ações de S em $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2(G/S)$ são triviais, temos que, para qualquer $\overline{g} = gS \in \mathbb{Z}_2(G/S)$, $f(s)(\overline{g}) = s.u[\,](\overline{g}) - u[\,](\overline{g}) = su[\,](s^{-1}\overline{g}) - u[\,]\overline{g} = u[\,](\overline{g}) - u[\,](\overline{g}) = 0$, isto é, $f_{|S} = 0$, como queríamos. □

4.26: Sejam G, S e K como no exemplo 3.10(c). Como S e K são subgrupos normais em G segue, do teorema anterior, que $E(G,S) = \epsilon(G,S) = \epsilon(G/S) = \epsilon(\mathbb{Z}) = 2$. Analogamente $E(G,K) = 2$.

4.27 Proposição: *Se a aplicação restrição* $res_S^G : H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \to H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S))$ *é trivial e* $[G:S] = \infty$ *então*

$$E(G,S) = \epsilon(G,S).$$

Demonstração: Seja φ^* a aplicação dada em 4.25. Se $res_S^G = 0$ então $\text{Ker } res_S^G = H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)) \supset \text{Ker } \varphi^*$ e daí $\epsilon(G,S) \leq E(G,S)$ (por 4.25).

Pelo teorema anterior, $E(G,S) \leq \epsilon(G,S)$. Logo obtemos a igualdade. □

4.28 Corolário: *Sejam* G *um grupo e* S *um subgrupo de* G *com* $[G:S] = \infty$. *Se* S *é finito de ordem impar então* $E(G,S) = \epsilon(G,S)$.

Demonstração: Se $|S|$ é impar então $|S|$ é invertível em $\mathbb{Z}_2(G/S)$. Daí, por [8, III.10.2], $H^1(S;\mathbb{Z}_2(G/S)) = 0$.

Logo res_S^G é trivial e portanto o resultado segue da proposição anterior. □

4.29 Observação: Não sabemos se o resultado acima é verdadeiro para $|S|$ par.

A seguir apresentamos uma outra forma (usando derivações) de ver que $E(G,S) = e(G,S)$ se S é subgrupo normal em G.

4.30 Proposição: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G de índice infinito. Se S é um subgrupo normal em G então $e(G,S) = E(G,S)$.*

Demonstração: Como S é normal em G e $[G:S] = \infty$ temos que G/S é um grupo infinito. Daí, por 4.15(iv) e 4.10 temos que

$$\begin{aligned} e(G,S) &= e(G/S) = 1 + \dim H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \\ &= 1 + \dim \frac{Der(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))}. \end{aligned}$$

Logo para provar a proposição é suficiente, pelo lema 2.5, mostrar que os grupos $A = \dfrac{Der(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))}$ e $B = \dfrac{Der(G,S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S, \mathbb{Z}_2(G/S))}$ são isomorfos.

Seja $\psi : A \to B$ definida por

$$\psi(f + P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))) = \tilde{f} + P(G,S, \mathbb{Z}_2(G/S)), \text{ onde } \tilde{f}(g) := f(\overline{g}).$$

Claramente $\tilde{f}$ é uma derivação (visto que f é uma derivação) e $\tilde{f}_{|S} = 0$ pois $\tilde{f}(s) = f(\overline{s}) = f(1) = 0$.

Além disso, se $f \in P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ então $f = d_m$ para algum $m = \overline{g_1} + \ldots + \overline{g_t} \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ daí como $\overline{g}m = gm$, temos que $\tilde{f}(g) = f(\overline{g}) = d_m(\overline{g}) = \overline{g}m - m = gm - m = d_m(g)$, isto é, $\tilde{f} \in P(G,S, \mathbb{Z}_2(G/S))$.

ψ é um homomorfismo pois $(f \tilde{+} h)(g) := (f+h)(\overline{g}) = f(\overline{g}) + h(\overline{g}) = \tilde{f}(g) + \tilde{h}(g) = (\tilde{f} + \tilde{h})(g)$ para todo $g \in G$.

Agora observemos que dado $\tilde{f} \in Der(G,S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ podemos definir uma derivação $f : G/S \to \mathbb{Z}_2(G/S)$ por $f(\overline{g}) := \tilde{f}(g)$. Temos que f está bem definida pois se $\overline{g_1} = \overline{g_2}$ então $g_1^{-1}g_2 \in S$. Daí, como $\tilde{f}_{|S} = 0$ e $\tilde{f}$ é derivação temos $0 = \tilde{f}(g_1^{-1}g_2) = g_1^{-1}\tilde{f}(g_2) + \tilde{f}(g_1^{-1})$ e portanto $g_1^{-1}\tilde{f}(g_2) = \tilde{f}(g_1^{-1}) = g_1^{-1}\tilde{f}(g_1)$, de onde segue a igualdade $\tilde{f}(g_2) = \tilde{f}(g_1)$. Temos então uma aplicação bem definida $\varphi : B \to A$ dada por $\varphi(\tilde{f} + P(G,S, \mathbb{Z}_2(G/S))) = f + P(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ onde $f(\overline{g}) = \tilde{f}(g)$.

É fácil ver que φ é uma inversa para ψ e portanto obtemos o isomorfismo desejado. □

Finalizando esta secção nós observamos que o invariante $E(G,S,M)$ foi definido somente quando $[G:S]=\infty$, mas é interessante observar (compare com o lema 2.5), o seguinte fato:

4.31 Lema: *Se* $[G:S]<\infty$ *então* $\dfrac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}=0.$

Demonstração: Sabemos que se $[G:S]<\infty$ então $e(G,S)=\dim H^0(G;E(G/S))=0$. Logo, da sequência exata (1) (na demonstração de 4.25), obtemos que $\operatorname{Ker}\varphi^*=\operatorname{Im}\delta=0$. Agora observe que não usamos o fato que $[G:S]=\infty$ para obter (2) e (4) na demonstração de 4.24, logo as afirmações (2) e (4) são também válidas para $[G:S]<\infty$. Daí temos,

$$\dim\frac{Der(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G,S,\mathbb{Z}_2(G/S))}=\dim\operatorname{Im}\psi\leq\dim\operatorname{Ker}t=\dim\operatorname{Ker}\varphi^*=0. \qquad \square$$

5. Uma interpretação para E(G,S,M) em termos de cohomologia relativa de complexos.

Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer. Nesta secção apresentamos uma interpretação para $E(G,S,M)$ (em particular para $E(G,S)$) em termos de cohomologia relativa de complexos, mais precisamente, em termos de pares Eilenberg-MacLane $(X,Y)=K(G,S,1)$. Daí, o invariante end $e(G,S)$ também terá tal interpretação sempre que a igualdade $e(G,S)=E(G,S)$ for verdadeira.

Para obter esta interpretação faremos uso de um resultado, devido a Bieri e Eckmann, que nos dá, uma interpretação topológica da sequência exata do par grupo $(G,\mathcal{S}=\{S_i\}_{i\in I})$.

5.1 Proposição: [7, teor.1.3] *Sejam* $(G,\mathcal{S})$ *um par grupo e* M *um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo. Se* (X,Y) *é um par Eilenberg-MacLane realizando topologicamente* $(G,\mathcal{S})$ *então as sequências exatas de cohomologia do par grupo* $(G,\mathcal{S})$ *(com coeficientes em* M*)*

e do par (X,Y) (tomada com coeficientes locais $\mathcal{M}$) são isomorfas.

Mais precisamente, temos os seguintes diagramas comutativos (a menos de sinal como indicado)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H^k(G,\mathcal{S};M) & \to & H^k(G;M) & \to & \prod_i H^k(S_i;M) & \to & H^{k+1}(G,\mathcal{S};M) & \to \cdots \\
 & \downarrow & (-1)^{k+1} \downarrow & & & \downarrow & (-1)^{k+1} & \downarrow & \\
\cdots \to & H^k(X,Y;\mathcal{M}) & \to & H^k(X;\mathcal{M}) & \to & \prod_i H^k(Y_i;\mathcal{M}) & \to & H^{k+1}(X,Y_i;\mathcal{M}) & \to \cdots
\end{array}$$

onde as aplicações verticais são todas isomorfismos. □

Nota: Na realidade em [7], os autores apresentam o resultado anterior para $\mathbb{Z}G$-módulos, mas por 1.3(c), tal resultado é igualmente válido para $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

Vejamos agora a interpretação topológica para $E(G,S,M)$.

5.2 Proposição: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G com $[G:S] = \infty$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se (X,Y) é um um par Eilenberg-MacLane realizando topologicamente (G,S) então*

$$E(G,S,M) = 1 + dim\ \frac{H^1(X,Y;\mathcal{M})}{M^S/M^G}$$

e em particular,

$$E(G,S) = 1 + dim\ \frac{H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))}{(\mathbb{Z}_2(G/S))^S},$$

onde $H^1(X,Y;\mathcal{M})$ e $H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))$ são tomadas com coeficientes locais dados pelos $\mathbb{Z}_2G$-módulos M e $\mathbb{Z}_2(G/S)$, respectivamente.

Demonstração: Pela proposição anterior temos o seguinte diagrama comutativo (a menos de sinal) com linhas exatas e isomorfismos verticais

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^0(G;M) & \to & H^0(S;M) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,S;M) & \xrightarrow{J} & H^1(G;M) & \xrightarrow{res^G_{S,M}} H^1(S;M) \to \cdots \\
 & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & (-1) & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & \downarrow\simeq \\
0 \to & H^0(X;\mathcal{M}) & \to & H^0(Y;\mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(X,Y;\mathcal{M}) & \xrightarrow{J'} & H^1(X;\mathcal{M}) & \xrightarrow{r} H^1(Y;\mathcal{M}) \to \cdots
\end{array}$$

Daí $\operatorname{Ker} J' = \operatorname{Im} \delta' \simeq \operatorname{Im} \delta \simeq M^S/M^G$ e portanto,

$$\operatorname{Ker} res^G_{S,M} \simeq \operatorname{Ker} r = \operatorname{Im} J' \simeq \frac{H^1(X,Y;\mathcal{M})}{M^S/M^G}$$

onde identificamos $\operatorname{Ker} J'$ com M^S/M^G via o isomorfismo anterior.

Logo $E(G,S,M) = 1 + \dim \operatorname{Ker} res^G_{S,M} = 1 + \dim \dfrac{H^1(X,Y;\mathcal{M})}{M^S/M^G}$. □

5.3 Corolário: *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G com $[G:S] = \infty$. Se (X,Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando topologicamente (G,S) e $e(G,S) = E(G,S)$ (por exemplo no caso em que S é normal em G) então*

$$e(G,S) = 1 + dim \frac{H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))}{(\mathbb{Z}_2(G/S))^S},$$

onde $H^1(X,Y;\mathbb{Z}_2(G/S))$ é tomada com coeficientes locais.

Demonstração: É consequência imediata da proposição anterior. O caso S normal em G segue de 4.24. □

5.4 Exemplos:

(1) Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $S = \{1\} \oplus \mathbb{Z}$. O par (G,S) é realizado topologicamente por $(X,Y) = (S^1 \times S^1, S^1 \times \{1\}) \equiv (T^2, S^1)$. Logo, para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, temos

$$E(G,S,M) = 1 + \dim \frac{H^1(T^2,S^1,\mathcal{M})}{M^S/M^G}.$$

Em particular, como S é normal em G, temos por 4.24, que

$$e(G,S) = E(G,S) = 1 + \dim \frac{H^1(T^2,S^1;\mathbb{Z}_2(G/S))}{(\mathbb{Z}_2(G/S))^S} = 2.$$

(2) Consideremos o grupo $G =< a > * < b > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e os subgrupos $S_1 =< aba^{-1}b^{-1} >$ e $S_2 =< b >$. Seja X um toro T^2 com disco aberto removido. Temos que (G,S_1) e (G,S_2) são realizados topologicamente, respectivamente, pelos pares Eilenberg-MacLane $(X, Y_1 = \partial X)$ (ver 3.7 - figura) e (X,Y_2) onde e Y_2 é o subcomplexo, representado pelo gerador b de $\Pi_1(T^2)$. Logo, pela proposição anterior, se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo,

$$E(G,S_1,M) = 1 + \dim \frac{H^1(X,Y_1;\mathcal{M})}{M^{S_1}/M^G} \quad \text{e} \quad E(G,S_2,M) = 1 + \dim \frac{H^1(X,Y_2;\mathcal{M})}{M^{S_2}/M^G}.$$

Em particular, levando em consideração 4.21 e 3.8, temos

$$E(G,S_1) = 1 + \dim \frac{H^1(X,Y_1;\mathbb{Z}_2(G/S_1))}{(\mathbb{Z}_2(G/S_1)^{S_1}} = 1 < e(G,S_1) = \infty \quad \text{e}$$

$$E(G,S_2) = 1 + \dim \frac{H^1(X,Y_2;\mathbb{Z}_2(G/S_2)}{(\mathbb{Z}_2(G/S_2))^{S_2}} = \infty = e(G,S_2).$$

(3) Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $S = \{1\} \oplus \mathbb{Z}_2$. O par (G,S) é realizado topologicamente por $(X,Y) = (S^1 \times \mathbb{R}P(\infty), \{1\} \times \mathbb{R}P(\infty))$. Daí

$$E(G,S,M) = 1 + \dim \frac{H^1(S^1 \times \mathbb{R}P(\infty), \mathbb{R}P(\infty);\mathcal{M})}{M^S/M^G},$$

para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M, e como S é normal em G,

$$e(G,S) = E(G,S) = 1 + \dim \frac{H^1(S^1 \times \mathbb{R}P(\infty), \mathbb{R}P(\infty);\mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 2.$$

(4) Sejam G um grupo infinito e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Considere X um complexo $K(G,1)$,e o vértice $v_0 \in X$. O par (X,v_0) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G,S). Logo, se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo,

$$E(G,\{1\},M) = 1 + \dim \frac{H^1(X,v_0;\mathcal{M})}{M/M^G}.$$

Em particular,

$$e(G) = 1 + \dim \frac{H^1(X,v_0;\mathbb{Z}_2G)}{\mathbb{Z}_2G}.$$

CAPÍTULO III

O Invariante $\tilde{E}(G,S)$

Neste capítulo dados (G,S) com $[G:S]=\infty$, estudamos o invariante $E(G,S,M)$ para o $\mathbb{Z}_2G$-módulo particular $M=\mathcal{F}_SG$ definido abaixo. Por simplicidade $E(G,S,\mathcal{F}_SG)$ será denotado por $\tilde{E}(G,S)$. Na secção 1 provamos (uma vez que não encontramos a justificativa deste fato) que $\mathcal{F}_SG$ é isomorfo ao módulo induzido $Ind_S^G\overline{\mathbb{Z}_2S}=\mathbb{Z}_2G\otimes_S\overline{\mathbb{Z}_2S}$. Isto é interessante pois em alguns casos é conveniente usar $\mathcal{F}_SG$ e em outros $Ind_S^G\overline{\mathbb{Z}_2S}$. Também estendemos a definição de $\tilde{E}(G,S)$ de modo a incluir o caso em que $[G:S]<\infty$ e verificamos que, considerando esta definição, tem-se: $\tilde{E}(G,S)=0\iff[G:S]<\infty$. Na secção 2 apresentamos várias propriedades de $\tilde{E}(G,S)$. Na secção 3 analisamos a relação entre $\tilde{E}(G,S)$ e o invariante end $\tilde{\epsilon}(G,S)$ definido por Kropholler e Roller [22].

Como veremos (observação 3.6), $\tilde{E}(G,S)$ tem certa vantagem em relação a $\tilde{\epsilon}(G,S)$ pois $\tilde{\epsilon}(G,S)$ fornece alguma informação a respeito de S somente quando $\epsilon(G)=1$ uma vez que, se $\epsilon(G)=\infty$ então $\tilde{\epsilon}(G,S)=\infty$ para todo subgrupo S de G. No entanto para $\tilde{E}$ temos exemplos em que $\epsilon(G)=\infty$ e $\tilde{E}(G,S)\neq\tilde{E}(G,T)$ para subgrupos distintos S e T de G, o que nos mostra que $\tilde{E}(G,S)$ nos dá informação a respeito de S também no caso em que $\epsilon(G)=\infty$. Além disto, $\tilde{E}(G,S)$ nos dá uma condição necessária para que (G,S) seja um D^n-par, o que não ocorre com $\tilde{\epsilon}(G,S)$.

1. O Invariante $\tilde{E}(G,S)$

Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e

$\mathcal{F}_S G := \{B \subset G \mid B \subset F.S$ para algum subconjunto finito F de $G\}$.

Claramente $\mathcal{F}_S G$ é um $\mathbb{Z}_2 G$-submódulo de PG com as operações induzidas.

Consideremos o $\mathbb{Z}_2 G$-módulo $Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} = \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ com a G-ação natural de módulo induzido $(g.(g_1 \otimes m) = gg_1 \otimes m)$.

Veremos, no lema abaixo, que é natural considerar $Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ como um submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$, e que este submódulo pode ser identificado, via o isomorfismo $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2 G} \to PG$ (ver em 1.3.15), com o submódulo $\mathcal{F}_S G$ de PG.

1.1 Lema: *Os módulos $\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ e $\mathcal{F}_S G$ são $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfos.*

Demonstração: Consideremos as aplicações
$\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S} = Ind_S^G Coind_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\varphi} Coind_S^G Coind_{\{1\}}^S \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\psi} Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 = \overline{\mathbb{Z}_2 G} \xrightarrow{\rho} PG$,
onde ρ é o $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfismo dado em 1.3.15, e φ e ψ são as $\mathbb{Z}_2 G$-aplicações dadas em 1.3.8, isto é, se $g_0 \otimes h \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_S Hom(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$, então

$$\varphi(g_0 \otimes h)(g) = \begin{cases} (gg_0).h & \text{se } gg_0 \in S \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e se $f \in Hom_S(\mathbb{Z}_2 G, Hom(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2))$, $\psi(f)(g) = f(g)(1)$, onde $1 \in \mathbb{Z}_2 S$.

Como φ é $\mathbb{Z}_2 G$-monomorfismo e ψ é $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfismo, podemos ver $\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ como um $\mathbb{Z}_2 G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$, que será $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfo (via ρ) ao $\mathbb{Z}_2 G$-submódulo $\rho((\psi \circ \varphi)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}))$ de PG.

Logo para concluir o lema, basta provar o seguinte fato:

Afirmação: $\rho(\psi \circ \varphi)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S})) = \mathcal{F}_S G$.

Isto segue das seguintes observações:

(i) Um elemento $B \in \mathcal{F}_S G \Leftrightarrow B = g_0 S_0 \cup \ldots \cup g_k S_k$, com $g_i \in G$, $S_i \subset S$ e $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Da mesma forma que temos o $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfismo $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2 G} \to PG$, podemos também definir o $\mathbb{Z}_2 S$-isomorfismo $\hat{\rho} : \overline{\mathbb{Z}_2 S} \to PS$. Se considerarmos a injeção natural $\overline{\mathbb{Z}_2 S} \xrightarrow{j} \overline{\mathbb{Z}_2 G}$, $h \to \hat{h}$, onde $\hat{h}$ é definida nos geradores por

$$\hat{h}(g) = \begin{cases} h(g) & \text{se } g \in S \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Z}_2 S} & \overset{j}{\rightarrowtail} & \overline{\mathbb{Z}_2 G} \\ \downarrow \tilde{\rho} & & \downarrow \rho \\ PS & \hookrightarrow & PG. \end{array}$$

(iii) Se $g_0 \otimes h_0$ é um elemento básico de $\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ então

$$(\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0)(g^{-1}) = \begin{cases} [(g^{-1}g_0).h_0](1) = h_0(g^{-1}g_0) & \text{se } g^{-1}g_0 \in S \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Daí

$$\begin{aligned} \rho((\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0)) &= \{g \in G \mid (\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0)(g^{-1}) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid g^{-1}g_0 \in S \text{ e } h_0(g^{-1}g_0) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid g^{-1}g_0 \in S \text{ e } h_0((g_0^{-1}g)^{-1}) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid g_0^{-1}g \in \tilde{\rho}(h_0)\} \\ &= \{g \in G \mid g_0^{-1}g = s \in \tilde{\rho}(h_0)\} \\ &= \{g_0.s \mid s \in \tilde{\rho}(h_0)\}, \end{aligned}$$

isto é, $\rho((\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0)) = g_0.S_0 \in \mathcal{F}_S G$, onde $S_0 = \tilde{\rho}(h_0) \subset S$.

Agora se $u = g_0 \otimes h_0 + g_1 \otimes h_1 \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ então

$$\begin{aligned} \rho(\psi \circ \varphi)(u) &= \{g \in G \mid \rho(\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0 + g_1 \otimes h_1)(g^{-1}) = 1\} \\ &= \{g \in G \mid \rho(\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0)(g^{-1}) + \rho(\psi \circ \varphi)(g_1 \otimes h_1)(g^{-1}) = 1\} \\ &= \left\{ g \in G \mid \begin{array}{l} \rho(\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes h_0)(g^{-1}) = 1 \text{ ou (exclusivo)} \\ \rho(\psi \circ \varphi)(g_1 \otimes h_1)(g^{-1}) = 1 \end{array} \right\} \\ &= g_0.S_0 \cup g_1.S_1 \in \mathcal{F}_S G \text{ , onde } S_i = \tilde{\rho}(h_i) \subset S, \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

Mais geralmente, se $u = g_0 \otimes h_0 + g_1 \otimes h_1 + \cdots + g_k \otimes h_k \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$, então $\rho(\psi \circ \varphi)(u) = g_0.S_0 \cup \ldots \cup g_k.S_k$, com $S_i = \tilde{\rho}(h_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

(iv) Se $B = g_0.S_0 \cup \ldots \cup g_k.S_k$ é um elemento qualquer de $\mathcal{F}_S G$, então é fácil ver que

$$B = \rho(\psi \circ \varphi)(g_0 \otimes \tilde{\rho}^{-1}(S_0) + \cdots + g_k \otimes \tilde{\rho}^{-1}(S_k)) \in \rho((\psi \circ \varphi)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S})).$$

□

O invariante $\hat{E}(G,S)$:

Sejam G um grupo e S um subgrupo de G com $[G:S]=\infty$. Se $M = \mathcal{F}_S G \simeq \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S} \simeq Ind_S^G PS$ então denotaremos $E(G,S,M)$ por $\hat{E}(G,S)$. Isto é,

$$\hat{E}(G,S) = 1 + \dim \operatorname{Ker} res_S^G,$$

onde $res_S^G : H^1(G;\mathcal{F}_S G) \to H^1(S;\mathcal{F}_S G)$ é a aplicação restrição.

1.2 Lema: *$\hat{E}(G,S)$ é um invariante algébrico para pares de grupos (G,S) com $[G:S]=\infty$.*

Demonstração: Seja $\alpha : (G,S) \to (L,K)$ um isomorfismo de pares de grupos. Vamos provar que existe $\phi : \mathcal{F}_K L \to \mathcal{F}_S G$, isomorfismo de grupos abelianos, tal que $\phi(\alpha(g).u) = g.\phi(u)$, para $g \in G$ e $u \in \mathcal{F}_K L$. Daí $((G,S),\mathcal{F}_S G)$ e $((L,K),\mathcal{F}_K L)$ são isomorfos na categotegoria $\mathcal{C}$, definida em II.2, e então, por II.2.3 teremos

$$\hat{E}(G,S) = E(G,S,\mathcal{F}_S G) = E(L,K,\mathcal{F}_K L) = \hat{E}(L,K).$$

Primeiro observemos que o isomorfismo $\alpha_| : S \to K$ induz um isomorfismo $\gamma : \overline{\mathbb{Z}_2 K} \to \overline{\mathbb{Z}_2 S}$, onde nos geradores, $\gamma(f)$ é dado por $\gamma(f)(s) = f(\alpha(s))$ e é estendido por linearidade.

Agora, considere a aplicação $\phi : \mathbb{Z}_2 L \otimes_K \overline{\mathbb{Z}_2 K} \to \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \overline{\mathbb{Z}_2 S}$, definida nos geradores por $\phi(l \otimes f) = \alpha^{-1}(l) \otimes \gamma(f)$ (e estendida por linearidade). Claramente ϕ é um isomorfismo de grupos abelianos. Além disso,

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha(g).(l \otimes f)) &= \phi(\alpha(g)l \otimes f) = \alpha^{-1}(\alpha(g)l) \otimes \gamma(f) \\
&= g\alpha^{-1}(l) \otimes \gamma(f) = g.(\alpha^{-1}(l) \otimes \gamma(f)) \\
&= g.\phi(l \otimes f).
\end{aligned}$$

Logo, levando em conta 1.1, tem-se o resultado desejado. □

Nota: De acordo com o lema 2.5 do capítulo anterior, para $M = \mathcal{F}_S G$,

$$\operatorname{Ker} res_S^G \simeq \frac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G}.$$

e, se $[G:S]=\infty$, então $\hat{E}(G,S)$ tem a seguinte interpretação:

$$\hat{E}(G,S) = 1 + \dim \frac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G)}.$$

É interessante (de modo similar à II.4.31) analisar o quociente $\dfrac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G)}$ no caso em que $[G:S]<\infty$.

1.3 Lema: *Se* $[G:S]<\infty$ *então* $\dfrac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G)} = 0.$

Demonstração: Se $[G:S]<\infty$ então $\mathcal{F}_S G = PG$. Mas $H^1(G;PG)=0$ por I.3.16. Logo temos

$$\frac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G)} \simeq \operatorname{Ker} res_S^G \subset H^1(G;\mathcal{F}_S G) = H^1(G;PG) = 0.$$

□

A proposição seguinte nos dá uma forma de estender a definição de $\hat{E}(G,S)$ de modo a abranger o caso em que $[G:S]<\infty$ (Note que para $E(G,S)$ não conseguimos obter isto). Para demonstrar tal proposição precisamos do resultado abaixo, afirmado em [20, p. 54].

1.4 Lema: *Seja* $\mathcal{A}_S G = \{A \subset G \mid A + gA \in \mathcal{F}_S G, \forall g \in G\}$. *Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \beta \ : \ \mathcal{A}_S G &\to Der(G,\mathcal{F}_S G) \\ B &\to \beta(B), \quad \textit{onde} \quad \beta(B)(g) := B + gB, \ \forall g \in G, \end{aligned}$$

é sobrejetora, isto é, $Der(G,\mathcal{F}_S G) = P(G,\mathcal{A}_S G)$.

Demonstração: Como $\dfrac{Der(G,PG)}{P(G,PG)} = H^1(G;PG) = 0$ e $\mathcal{F}_S G \subset PG$, temos que $Der(G,\mathcal{F}_S G) \subset Der(G,PG) = P(G,PG)$.

Daí, se $f \in Der(G,\mathcal{F}_S G)$ então $f \in P(G,PG)$; logo existe $B \in PG$ tal que $f = d_B$, isto é, $f(g) = B + gB, \forall g \in G$, onde $B \in PG$. Mas do fato que $f(g) \in \mathcal{F}_S G$ para todo g (pois $f \in Der(G,\mathcal{F}_S G)$), segue que $B + gB \in \mathcal{F}_S G$, $\forall g \in G$, isto é, $B \in \mathcal{A}_S G$.

Portanto $f = \beta(B) \in P(G,\mathcal{A}_S G) = \operatorname{Im} \beta$. □

1.5 Proposição: *Se (G,S) é um par de grupos satisfazendo $[G:S]=\infty$, então a sequência*

$$0 \to \{\emptyset, G\} \xrightarrow{\alpha} \frac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \frac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G)} \to 0,$$

com aplicações α e $\tilde{\beta}$ dadas por: $\alpha(A) := [A] = A + \mathcal{F}_S G \cap (PG)^S$ e $\tilde{\beta}([B]) := \beta(B) + P(G,S,\mathcal{F}_S G)$, onde β é como no lema anterior, é exata.

Demonstração: A aplicação α é injetora pois, $\alpha(G) = 0 \Rightarrow G \in \mathcal{F}_S G \cap (PG)^S \Rightarrow G \subset F.S$ para algum subconjunto finito F de G. Daí $[G:S] < \infty$, o que é uma contradição.

Vejamos que $\operatorname{Ker} \tilde{\beta} = \operatorname{Im} \alpha = \{[\emptyset], [G]\}$.

Claramente $\operatorname{Im} \alpha \subset \operatorname{Ker} \tilde{\beta}$ pois, para todo $g \in G$, $\beta(\emptyset)(g) = 0$ e $\beta(G)(g) = G + gG = G + G = 0$ e daí $\tilde{\beta}([\phi]) = \tilde{\beta}([G]) = 0$. Agora, se $[B] \in \dfrac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S}$ é um elemento de $\operatorname{Ker} \tilde{\beta}$ então $\beta(B) \in P(G,S,\mathcal{F}_S G)$. Logo existe $A \in \mathcal{F}_S G$ satisfazendo $\beta(B) = d_A$, isto é, $B + gB = A + gA$, para todo $g \in G$. Daí $B + A = g(B + A)$, para todo $g \in G$, ou seja, $B + A \in (PG)^G = \{\emptyset, G\}$ e portanto $[B] = [\emptyset] = \alpha(\emptyset)$ (se $B + A = \emptyset$) ou $[B] = [G] = \alpha(G)$ (se $B + A = G$).

Finalmente, para ver que $\tilde{\beta}$ é sobrejetora basta usar o lema anterior. □

1.6 Corolário: *Se $[G:S] = \infty$, então*

$$\tilde{E}(G,S) = \dim \frac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S} = \dim \frac{(\mathcal{A}_S G)^S}{(\mathcal{F}_S G)^S}.$$

Demonstração: Se $[G:S] = \infty$ então, pela proposição anterior,

$$\dim \frac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S} = 1 + \dim \frac{Der(G,S,\mathcal{F}_S G)}{P(G,S,\mathcal{F}_S G)} = \tilde{E}(G,S).$$ □

Podemos então definir, para qualquer par de grupos (G,S) com $[G:S]$ não necessariamente infinito,

$$\tilde{E}(G,S) = \dim \frac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S}.$$

Nesta condições temos:

1.7 Lema: $\hat{E}(G,S) = 0$ *se, e somente se,* $[G:S] < \infty$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos por absurdo que $[G:S] = \infty$. Então (por 1.5 ou definição inicial de $\hat{E}(G,S)$) tem-se $\hat{E}(G,S) \geq 1$, o que contradiz a hipótese. Logo $[G:S] < \infty$.

($\Leftarrow$) Se $[G:S] < \infty$ então $\mathcal{F}_S G = PG = \mathcal{A}_S G$. Daí $\hat{E}(G,S) = 0$. □

1.8 Lema: $\hat{E}(G,\{1\}) = e(G)$.

Demonstração: Se $S = \{1\}$ então temos que $(PG)^S = PG$, $\mathcal{F}_S G = \{A \subset G \mid A \subseteq F, F \text{ finito de } G\} = FG$, e $\dfrac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G} = (\dfrac{PG}{FG})^G$. Daí $\hat{E}(G,\{1\}) = \dim (\dfrac{PG}{FG})^G = e(G)$. □

2. Propriedades.

Nesta secção apresentaremos algumas propriedades de $\hat{E}(G,S)$.

Inicialmente, estudamos a relação entre os dois invariantes introduzido por nós, $E(G,S)$ e $\hat{E}(G,S)$.

2.1 Proposição: *Se* (G, S) *é um par de grupos com* $[G:S] = \infty$ *então*

$$E(G,S) \leq \hat{E}(G,S).$$

Demonstração: Consideremos a sequência exata de $\mathbb{Z}_2 S$-módulos

$$0 \to \mathbb{Z}_2 = \{\emptyset, S\} \to PS \to Q = \frac{PS}{\{\emptyset, S\}} \to 0.$$

Como $\mathbb{Z}_2 G$ é $\mathbb{Z}_2 S$-livre obtemos, tensorizando por $\mathbb{Z}_2 G$, a seguinte sequência exata:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 G \otimes_S \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2 G \otimes_S PS \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 G \otimes_S Q \to 0.$$

Esta sequência induz a sequência exata longa em cohomologia

$$0 \to H^0(G; Ind_S^G \mathbb{Z}_2) \to H^0(G; Ind_S^G PS) \to H^0(G; Ind_S^G Q) \to$$
$$\to H^1(G; Ind_S^G \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi^*} H^1(G; Ind_S^G PS) \to H^1(G; Ind_S^G Q) \to \cdots$$

Uma vez que $[G : S] = \infty$ temos, por I.3.11, que

$$H^0(G; Ind_S^G \mathbb{Z}_2) = H^0(G; Ind_S^G PS) = H^0(G; Ind_S^G Q) = 0$$

e portanto $\phi^* : H^1(G; Ind_S^G \mathbb{Z}_2) \to H^1(G; Ind_S^G PS)$ é um monomorfismo. Daí, aplicando II.2.7(ii) para $N = Ind_S^G \mathbb{Z}_2$ e $M = Ind_S^G PS$, temos que

$$E(G, S) = E(G, S, Ind_S^G \mathbb{Z}_2) \leq E(G, S, Ind_S^G PS) = \hat{E}(G, S)$$

□

2.2 Corolário: *Se* $G = < a > * < b > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ *e* $S = < b >$, *então* $\hat{E}(G, S) = \infty$.

Demonstração: Vimos no exemplo II.3.8, que $E(G, S) = \infty$, logo o resultado segue da desigualdade acima. □

A igualdade na proposição anterior nem sempre ocorre como mostra o exemplo abaixo.

2.3 Exemplo: Sejam $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ e $S = \mathbb{Z}_2$. Então $E(G, S) = 1 < \hat{E}(G, S) = 2$. De fato, por II.4.15(v), $\epsilon(G, S) = 1$. Logo, pelo teorema II.4.24 também $E(G, S) = 1$. Agora, que $\hat{E}(G, S) = 2$, seguirá de 3.10 (secção seguinte) e do fato que $\epsilon(G) = 2$.

2.4 Observação: Apesar das desigualdades

$$E(G, S) \leq \epsilon(G, S) \quad \text{e} \quad E(G, S) \leq \hat{E}(G, S)$$

serem verdadeiras, não existe nenhuma relação entre $\epsilon(G, S)$ e $\hat{E}(G, S)$ pois, no exemplo acima temos que

$$\epsilon(G, S) = 1 < \hat{E}(G, S) = 2.$$

Agora, se (G,S) é como no exemplo II.3.7 concluiremos por 2.8(i) abaixo que $\hat{E}(G,S) = 1$, pois (G,S) é um PD^2-par. No entanto $e(G,S) = \infty$ por II.4.15(vi). Logo

$$\hat{E}(G,S) = 1 < e(G,S) = \infty.$$

2.5 Proposição: *Sejam S e T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$. Se $[G:T] = \infty$ então:*

(i) $E(G,T,\mathcal{F}_S G) \leq \hat{E}(G,S) \leq E(G,S,\mathcal{F}_T G)$, *e*

(ii) $E(G,T,\mathcal{F}_S G) \leq \hat{E}(G,T) \leq E(G,S,\mathcal{F}_T G)$.

Demonstração: Vejamos apenas (i). A afirmação (ii) prova-se de modo análogo.

A desigualdade $E(G,T,\mathcal{F}_S G) \leq \hat{E}(G,S) = E(G,S,\mathcal{F}_S G)$ é obtida de II.2.7(i) tomando $M = \mathcal{F}_S G$.

Para obter $\hat{E}(G,S) \leq E(G,S,\mathcal{F}_T G)$ nós usamos o fato que a inclusão $\mathcal{F}_S G \subset \mathcal{F}_T G$ induz um monomorfismo $\phi^* : H^1(G;\mathcal{F}_S G) \to H^1(G;\mathcal{F}_T G)$. Para provarmos este fato (que é afirmado em [20, 4.2(ii)]), raciocinamos como na proposição anterior.

Consideremos a sequência exata

$$0 \to Ind_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \xrightarrow{i} \overline{\mathbb{Z}_2 T} \to Q = \frac{\overline{\mathbb{Z}_2 T}}{Ind_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}} \to 0,$$

onde i é a composta $Ind_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \overset{\varphi}{\rightarrowtail} Coind_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$, e φ e ψ são como em I.3.8.

Visto que $\mathbb{Z}_2 G$ é livre como $\mathbb{Z}_2 T$-módulo, Ind_T^G é um funtor exato. Se aplicarmos este funtor na sequência acima obtemos

$$0 \to Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} \simeq Ind_T^G Ind_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S} \to Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T} \to Ind_T^G Q \to 0.$$

Isto induz a sequência exata longa em cohomologia

$$0 \to H^0(G; Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \to H^0(G; Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T}) \to H^0(G; Ind_T^G Q) \to$$
$$\to H^1(G; Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \xrightarrow{\phi^*} H^1(G; Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T}) \to \cdots$$

Como $[G:S] = \infty$, temos que os tres primeiros termos da sequência são nulos e daí $\phi^* : H^1(G; Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \to H^1(G; Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T})$ é monomorfismo como queríamos.

Logo, aplicando II.2.7(ii), para $N = Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S} \simeq \mathcal{F}_S G$ e $M = Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T} \simeq \mathcal{F}_T G$, obtemos

$$\hat{E}(G,S) = E(G,S,\mathcal{F}_S G) \leq E(G,S,\mathcal{F}_T G) \qquad \square$$

2.6 Corolário:

(i) *Sejam* $S \leq T \leq G$ *com* $[G:T] = \infty$. *Se* $[T:S] < \infty$ *então* $\hat{E}(G,T) \leq \hat{E}(G,S)$.

(ii) *Se* T *é um subgrupo finitamente gerado de* G, $[G:T] = \infty$ *e* $e(T) = 1$ *então* $e(G) \leq \hat{E}(G,T)$.

Demonstração:

(i) Se $[T:S] < \infty$ então $\mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_T G$. Daí a desigualdade é consequência imediata da proposição anterior.

(ii) Considerando $S = \{1\}$ na proposição anterior, como $\mathcal{F}_{\{1\}} G = FG \simeq \mathbb{Z}_2 G$ obtemos $E(G,T,\mathbb{Z}_2 G) \leq \hat{E}(G,T)$.

Agora, por I.3.9 (considerando $\{1\}$ no lugar de T, T no lugar de S e $M = \mathbb{Z}_2$), obtemos o $\mathbb{Z}_2 T$-isomorfismo

$$\mathbb{Z}_2 G \simeq Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 \simeq \bigoplus_{g \in T \backslash G} Ind_{\{1\}}^T g\mathbb{Z}_2,$$

onde $T \backslash G$ é um conjunto de representantes para as classes laterais à direita de T em G. Daí,

$$\begin{aligned} H^1(T;\mathbb{Z}_2 G) &\simeq H^1(T; \bigoplus_{g \in T\backslash G} Ind_{\{1\}}^T g\mathbb{Z}_2) \\ &\simeq \bigoplus_{g \in T\backslash G} H^1(T; Ind_{\{1\}}^T g\mathbb{Z}_2) \quad \text{(por III.5.3, pois } T \text{ é f.g.)} \\ &\simeq \bigoplus_{g \in T\backslash G} H^1(T;\mathbb{Z}_2 T) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(por II.4.10, pois } e(T) = 1). \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Ker} res_{S,\mathbb{Z}_2 G}^G = H^1(G;\mathbb{Z}_2 G)$, e portanto

$$E(G,T,\mathbb{Z}_2 G) = 1 + \dim H^1(G;\mathbb{Z}_2 G) = e(G).$$

Daí o resultado segue. $\square$

Uma vez que $\mathcal{F}_S G \simeq Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ e $\mathcal{F}_S T \simeq Ind_S^T \overline{\mathbb{Z}_2 S}$, considerando $M = \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ no corolário II.2.9, temos:

2.7 Lema: *Sejam S e T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$. Se $[G : S] = \infty$ e $[G : T] < \infty$ então*

$$\hat{E}(G, S) \leq \hat{E}(T, S).$$

□

Como último resultado desta secção nós observamos que as propriedades de dualidade obtidas para $E(G, S)$ em II.3 são preservadas para $\hat{E}(G, S)$ embora tenhamos $\hat{E}(G, S) \geq E(G, S)$.

2.8 Proposição: *Seja $(G : S)$ um par de grupos, com $[G : S] = \infty$.*

(i) *Se (G, S) é um D^n-par então $\hat{E}(G, S) = 1$.*

(ii) *Se G é um D^n-grupo com módulo dualizante C e S é um D^{n-1}-subgrupo com módulo dualizante $Res_S^G C$, então $\hat{E}(G, S) \leq 2$.*

(iii) *Se G é um D^n-grupo $(n > 1)$ e $hd\ S \leq n - 2$, então $\hat{E}(G, S) = 1$.*

Demonstração: É análoga às demonstrações das proposições II.3.6 e II.3.9; basta lembrar que $\mathcal{F}_S G = Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}$ e então trabalhar com $\overline{\mathbb{Z}_2 S}$ no lugar de $\mathbb{Z}_2$. □

Analizando os exemplos vistos no capítulo II, secção 3, temos

2.9 Exemplos:

(i) Se $G =< a > * < b >\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $S =< aba^{-1}b^{-1} >$ e $T =< b >$, então $\hat{E}(G, S) = 1$ e $\hat{E}(G, T) = \infty$.

(ii) Se $G = \mathbb{Z}^k$ e $S = \mathbb{Z}^{k-1}$, $k \geq 2$, então $\hat{E}(G, S) = 2$.

(iii) $\hat{E}(\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}^r) = 1$ se $0 \leq r \leq k - 2$.

(iv) $\hat{E}(< a, b; a^2b^2 = 1 >, S =< a >) \leq 2$.

(v) Se G, S e K são como no exemplo II.3.10(c), então $\hat{E}(G, S) = 2 = \hat{E}(G, K)$.

(vi) Se G e S são como no exemplo II.3.10(d), então $\hat{E}(G, S) = 1$.

Para obter (ii) e (v) recordamos que nestes casos S é normal em G, logo $E(G,S) = e(G,S) = e(G/S) = 2$. Daí, por 2.1 e proposição anterior, temos $2 = E(G,S) \leq \hat{E}(G,S) \leq 2$.

Vejamos outros exemplos:

2.10 Exemplos: (i) Se $X = M^2 - D^2$ onde M^2 é qualquer superfície fechada orientada diferente de S^2, então $(G = \Pi_1(X), S = \Pi_1(\partial X))$ é um PD^2-par (por II.3.5) e portanto $\hat{E}(G,S) = 1$.

(ii) Se $G = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_n$, onde $\mathbb{Z}_n$ é o grupo cíclico de ordem $n \geq 2$ e $S = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ então $\hat{E}(G,S) = 2$.

De fato, visto que $\mathbb{Z}$ é um PD^1-grupo e $S = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ é um D^1-grupo (com módulo dualizante $C \simeq H^1(S;\mathbb{Z}_2S)$) temos, por 1.5.19, que $T = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$ é um D^2-grupo com módulo dualizante $\mathbb{Z}_2 \otimes C \simeq C$. Daí, segue, de 2.7 e proposição anterior (ii), que

$$\hat{E}(G,S) \leq \hat{E}(T,S) \leq 2.$$

Agora, como S é um subgrupo normal em G temos, por II.4.24, que

$$E(G,S) = e(G,S) = e(G/S) = e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n) = e(\mathbb{Z}) = 2.$$

Logo, por 2.21, $2 = E(G,S) \leq \hat{E}(G,S) \leq 2$ e portanto, $\hat{E}(G,S) = 2$.

3. $\hat{E}$(G,S) e o Invariante end $\hat{e}$(G,S).

Nesta secção analizaremos a relação entre os invariantes $\hat{E}(G,S)$ e $\hat{e}(G,S)$. O invariante $\hat{e}(G,S)$ foi definido por Kropholler e Roller implicitamente em [21] (1988) e explicitamente em [22] (1989).

Com o objetivo de facilitar ao leitor recordamos aqui a definição deste invariante e apresentamos (sem demonstração) algumas de suas propriedades. Para maiores detalhes e resultados adicionais ver [22]

3.1 Definição: *Seja (G,S) um par de grupos (com $[G,S]$ não necessariamente infinito). Então por definição,*

$$\hat{e}(G,S) = dim\ H^0(G; PG/\mathcal{F}_S G) = dim\ (PG/\mathcal{F}_S G)^G.$$

3.2 Lema: [22, lema 1.2] *Se $[G:S] = \infty$ então*

$$\hat{e}(G,S) = 1 + dim\ H^1(G; \mathcal{F}_S G).$$

□

3.3 Lema: [22, lema 2.4]

(i) $\hat{e}(G,\{1\}) = e(G)$ *e mais geralmente* $\hat{e}(G,F) = e(G)$ *se F é um subgrupo finito de G.*

(ii) $\hat{e}(G,S) = 0$ *se, e somente se,* $[G:S] < \infty$.

(iii) *Se* $S \leq T \leq G$ *e* $[G:T] < \infty$, *então* $\hat{e}(G,S) = \hat{e}(T,S)$.

(iv) *Se S é finitamente gerado e normal em G, então* $\hat{e}(G,S) = e(G/S)$.

(v) *Se* $S \leq T \leq G$ *e* $[G:T] = \infty$, *então* $\hat{e}(G,S) \leq \hat{e}(G,T)$, *em particular, considerando* $S = \{1\}$ *obtemos* $e(G) \leq \hat{e}(G,T)$. □

3.4 Lema: [22, lema 2.5] $e(G,S) \leq \hat{e}(G,S)$. □

3.5 Proposição: [22, corol. 4.3] *Seja G um PD^n-grupo e S um D^{n-1}subgrupo. Então* $\hat{e}(G,S) = \infty$, *ou S é um PD^{n-1}-grupo e, neste caso,* $\hat{e}(G,S) = 2$ *(ou seja,* $H^1(G,\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$*).* □

Nós podemos observar que algumas propriedades anteriormente obtidas para $\hat{E}(G,S)$ são semelhantes às (respectivas) de $\hat{e}(G,S)$. Daí uma pergunta natural que surge é: *que relação existe entre estes invariantes?*. É claro que eles em geral não são iguais pois, se isto ocorresse, teríamos por 3.4, que $e(G,S) \leq \hat{E}(G,S)$ mas, como observamos em 2.4, não existe nenhuma relação entre estes invariantes. Além disto temos:

3.6 Observação: A proposição 2.8(i), não é válida para $\hat{e}(G,S)$ pois, para o PD^2-par $(G =< a > * < b >, S =< aba^{-1}b^{-1} >)$ temos que $\hat{e}(G,S) = \infty$ uma vez que por 3.3(v), $\infty = e(G) \leq \hat{e}(G,S)$.

Na realidade, segue de 3.3(v), que $\tilde{e}(G,S) = \infty$ *sempre que* $e(G) = \infty$ (independentemente de S). Portanto $\tilde{e}(G,S)$ não nos dá nenhuma informação a respeito de S quando $e(G) = \infty$, o que não ocorre para o invariante $\hat{E}(G,S)$. Por exemplo para $G =< a > * < b >$, $S =< aba^{-1}b^{-1} >$ e $T =< b >$ temos, por 2.9(i) que $\hat{E}(G,S) = 1 \neq \hat{E}(G,T) = \infty$.

3.7 Observação: A definição 3.1 é equivalente à $\tilde{e}(G,S) = \dim \dfrac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G}$, onde $\mathcal{A}_S G$ e como em 1.4. Por outro lado, vimos na secção 1, que

$$\hat{E}(G,S) = \dim \frac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S}.$$

Logo, temos:

$$\tilde{e}(G,S) = \hat{E}(G,S) \quad \text{se, e somente se,} \quad \dim \frac{\mathcal{A}_S G}{\mathcal{F}_S G} = \dim \frac{\mathcal{A}_S G \cap (PG)^S}{\mathcal{F}_S G \cap (PG)^S}.$$

Na proposição seguinte comparamos os dois invariantes sob outro aspecto.

3.8 Proposição: *Seja* (G,S) *um par de grupos. Então,*

(i) $\hat{E}(G,S) \leq \tilde{e}(G,S)$.

(ii) *Suponhamos que* $[G:S] = \infty$. *Se* $res_S^G : H^1(G;\mathcal{F}_S G) \to H^1(S;\mathcal{F}_S G)$ *é a aplicação nula então* $\hat{E}(G,S) = \tilde{e}(G,S)$. *(Em particular, se* $H^1(S;\mathcal{F}_S G) = 0$ *então isto ocorre). Se* $\hat{E}(G,S) = \tilde{e}(G,S) < \infty$, *vale a recíproca deste fato.*

Demonstração:

(i) Se $[G:S] < \infty$ então, por 1.7 e 3.3(i), $\hat{E}(G,S) = 0 = \tilde{e}(G,S)$. Suponhamos $[G:S] = \infty$. Claramente

$$\hat{E}(G,S) = 1 + \dim \operatorname{Ker} res_S^G \leq 1 + \dim H^1(G;\mathcal{F}_S G)$$

pois $\operatorname{Ker} res_S^G \subset H^1(G;\mathcal{F}_S G)$. Daí o resultado segue de 3.2.

(ii) res_S^G é nula $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} res_S^G = H^1(G;\mathcal{F}_S G) \overset{(1)}{\Rightarrow} \dim \operatorname{Ker} res_S^G =$ $= \dim H^1(G;\mathcal{F}_S G) \Leftrightarrow \hat{E}(G,S) = \tilde{e}(G,S)$. Agora, se $\hat{E}(G,S) = \tilde{e}(G,S) < \infty$ então (1) é válida na direção contrária. □

Como consequência deste resultado obtemos:

3.9 Corolário: *Seja (G,S) um par de grupos com $[G:S]=\infty$. Se S é finitamente gerado e normal em G então*

$$\hat{E}(G,S)=\tilde{e}(G,S)=e(G/S).$$

Demonstração: Se S é normal em G, temos por I.3.9 (Fórmula de Mackey - caso particular), o seguinte $\mathbb{Z}_2S$-isomorfismo

$$Ind_S^G PS \simeq \bigoplus_{g\in G/S} gPS.$$

Daí, como S é finitamente gerado temos (por I.5.3) que

$$H^1(S;\mathcal{F}_SG)=H^1(S;\bigoplus_{g\in G/S} gPS)\simeq \bigoplus_{g\in G/S} H^1(S;gPS).$$

Agora, recordemos (ver comentário anterior à I.3.9), que gPS é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo com a S-ação dada por $s*(gA)=gsg^{-1}.gA=gsA$, para todo $s\in S$, $A\in PS$, e PS é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo com a S-ação dada pela multiplicação à esquerda. Considere

$$\gamma: gPS\to PS \quad (gA\to A).$$

Claramente γ é uma bijeção. Além disto, γ é um $\mathbb{Z}_2S$-homomorfismo pois $\gamma(s*gA)=\gamma(gsA)=sA=s\gamma(gA)$. Logo, para todo $g\in G/S$, temos:

$$H^1(S;gPS)\simeq H^1(S;PS)=0 \quad \text{(por I.3.16)}.$$

consequentemente, $H^1(S;\mathcal{F}_SG)=0$ e então, pela proposição anterior e 3.3(iv) tem-se o resultado desejado. □

Nota: Não sabemos se a igualdade $\hat{E}(G,S)=\tilde{e}(G,S)$ é verdadeira quando S é normal em G, não necessariamente finitamente gerado.

3.10 Corolário: *Se S é um subgrupo finito de G e $[G:S]=\infty$, então*

$$\hat{E}(G,S)=\tilde{e}(G,S)=e(G).$$

Demonstração: Se S é finito temos que $\mathcal{F}_S G = FG \simeq \mathbb{Z}_2 G \simeq Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$. Aplicando I.3.9 para $T = \{1\}$, obtemos o $\mathbb{Z}_2 S$-isomorfismo

$$Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 \simeq \bigoplus_{g \in S \backslash G} Ind_{\{1\}}^S g\mathbb{Z}_2.$$

Consequentemente, teremos

$$\begin{aligned}
H^1(S; \mathcal{F}_S G) &\simeq H^1(S; \oplus Ind_{\{1\}}^S g\mathbb{Z}_2) \\
&\simeq H^1(S; \bigoplus_{g \in S \backslash G} Coind_{\{1\}}^S g\mathbb{Z}_2) && \text{(por II.3.6, pois } [S : \{1\}] < \infty) \\
&\simeq \bigoplus_{g \in S \backslash G} H^1(S; Coind_{\{1\}}^S g\mathbb{Z}_2) && \text{(por III.5.3, pois } S \text{ é f.g.)} \\
&\simeq \bigoplus_{g \in S \backslash G} H^1(\{1\}; g\mathbb{Z}_2) && \text{(por lema de Shapiro - II.3.14)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, pela proposição anterior e 3.3(i), obtemos as igualdades $\hat{E}(G,S) = \hat{\epsilon}(G,S) = \epsilon(G)$ □

Nota: Se $\epsilon(G) = 2$, pode-se verificar que para todo subgrupo S de G tem-se $[G : S] < \infty$ (e portanto $\hat{E}(G,S) = \hat{\epsilon}(G,S) = 0$) ou $|S| < \infty$ (e daí, pelo resultado anterior, $\hat{E}(G,S) = \hat{\epsilon}(G,S) = \epsilon(G) = 2$). Asssim no caso em que $\epsilon(G) = 2$, a igualdade $\hat{E}(G,S) = \hat{\epsilon}(G,S)$ é válida para qualquer subgrupo S.

3.11 Corolário: *Seja (G,S) um par de grupos. Se S é um PD^n-grupo, e $\{g \in G \mid cd(S^g \cap S) = n-1\} = \emptyset$, então $\hat{E}(G,S) = \hat{\epsilon}(G,S)$.*

Demonstração: Por [21, lema 5.3], $H^1(S; \mathcal{F}_S G) = 0$. Daí, basta aplicar a proposição anterior. □

Como uma aplicação deste resultado temos:

3.12 Exemplo: Seja G o PD^3-grupo $\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) = \Pi_1(S^1 \times KB)$ onde KB é a superfície da garrafa de Klein. Considere $S = \{(a,0,c) \mid a,c \in \mathbb{Z}\}$. Então S é um subgrupo de G (não normal) satisfazendo $\hat{E}(G,S) = \hat{\epsilon}(G,S) = 2$.

De fato, a operação em G é dada por $(a,b,c) + (x,y,z) = (a+x, b+(-1)^c y, c+z)$. Daí, claramente S é um subgrupo de G e portanto $S \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é um PD^2-grupo. Vejamos que $\{g \in G \mid cd(S^g \cap S) = 1\} = \emptyset$.

Se $g \in S$ então $cd(S^g \cap S) = 2$ pois $S^g \cap S = S$.

Seja $g = (a,b,c)$ um elemento qualquer de $G - S$ (portanto $b \neq 0$). Podemos ver $S = S_0 \cup S_1$ onde $S_0 = \{(x,0,2k) \mid x,k \in Z\}$ e $S_1 = \{(x,0,2k+1) \mid x,k \in \mathbb{Z}\}$. Daí $S^g \cap S = (S_0 \cup S_1)^g \cap S = S_0^g \cap S \cup S_1^g \cap S$. Se $u = (x,0,2k) \in S_0$, então

$$\begin{aligned} g + u + (-g) &= (a,b,c) + (x,0,2k) + (-a, -(-1)^c b, -c) \\ &= (a+x, b, c+2k) + (-a, (-1)^{c+1} b, -c) \\ &= (a + x + (-a), b + (-1)^{c+2k}(-1)^{c+1} b, c + 2k + (-c)) \\ &= (x, 0, 2k) = u \in S_0. \end{aligned}$$

Assim, $S_0^g \cap S = S_0 \cap S = S_0$ se $g \in G - S$.

Por outro lado, se $u = (x,0,2k+1) \in S_1$, então

$$\begin{aligned} g + u + (-g) &= (a,b,c) + (x,0,2k+1) + (-a, -(-1)^c b, -c) \\ &= (a+x, b, c + (2k+1)) + (-a, -(-1)^{c+1} b, -c) \\ &= (a + x - a, b + (-1)^{c+2k+1}(-1)^{c+1} b, c + 2k + 1 - c) \\ &= (x, b + b, 2k+1) \\ &= (x, 2b, 2k+1) \notin S \quad (\quad \text{pois } b \neq 0) \end{aligned}$$

Portanto $S_1^g \cap S = \emptyset$. Logo se $g \in G - S$ então $S^g \cap S = S_0 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e daí $cd(S^g \cap S) = cd(S_0) = 2$.

Temos então que G é um PD^3-grupo, S é um PD^2-subgrupo e $\{g \in G \mid cd(S^g \cap S) = 1\} = \emptyset$. Pelo corolário anterior e proposição 3.5, obtemos $\hat{E}(G,S) = \hat{e}(G,S) = 2$.

3.13 Observação: Uma vez que

$$\hat{E}(G,S) = 1 + \dim \frac{H^1(G,S;\mathcal{F}_S G)}{P(G,S.\mathcal{F}_S G)},$$

sempre que ocorrer a igualdade $\hat{E}(G,S) = \hat{e}(G,S)$, obteremos (compare com II.4.20) uma interpretação para $\hat{e}(G,S)$ em termos de cohomologia relativa.

Nas hipóteses do lema abaixo esta fórmula torna-se mais simples.

3.14 Proposição: *Seja (G,S) um par grupo com $[G:S]=\infty$. Se S é um PD^n-subgrupo com $n>1$, malnormal em G (isto é, $S^g\cap S=\{1\}$, $\forall g\in G-S$) então*

$$\tilde{e}(G,S)=\hat{E}(G,S)=dim\ H^1(G,S;\mathcal{F}_SG).$$

Demonstração: Considere a sequência exata 2.2(1) para $M=\mathcal{F}_SG$, onde já estamos levando em conta o fato que $H^0(G;\mathcal{F}_SG)=0$ pois $[G:S]=\infty$,

$$0\to H^0(S;\mathcal{F}_SG)\to H^1(G,S;\mathcal{F}_SG)\xrightarrow{J}H^1(G;\mathcal{F}_SG)\xrightarrow{res_S^G}H^1(S;\mathcal{F}_SG)\to\cdots \quad (1)$$

Seja E um conjunto de representantes para as classes laterais duplas SgS onde $g\in G$ (com $1\in E$). Temos

$$\begin{aligned} H^0(S;\mathcal{F}_SG) &\simeq H^0(S;Ind_S^GPS)\\ &\simeq H^0(S;\bigoplus_{g\in E}Ind_{S\cap S^g}^S gPS) && \text{(por II.3.9, com } T=S \text{ e } M=PS)\\ &\simeq \bigoplus_{g\in E}H^0(S;Ind_{S\cap S^g}^S gPS) && \text{(por I.5.18 e I.5.3)}\end{aligned}$$

Como S é malnormal em G, $S\cap S^g=\{1\}$ para todo $g\in G-S$. Daí, se $g\in E$ e $g\neq 1$, então $H^0(S;Ind_{S\cap S^g}^S gPS)=H^0(S;Ind_{\{1\}}^S gPS)=0$, pois $[S:\{1\}]=\infty$ (I.3.11). Agora, para $g=1\in E$, $H^0(S;Ind_{S\cap S^g}^S gPS)=H^0(S;PS)=\mathbb{Z}_2$. Daí, $H^0(S;\mathcal{F}_SG)=\mathbb{Z}_2$ e portanto obtemos, da sequência (1) acima, a seguinte sequência exata curta:

$$0\to\mathbb{Z}_2\to H^1(G,S;\mathcal{F}_SG)\to \text{Im } J=\text{Ker } res_S^G\to 0.$$

Logo, $\dim H^1(G,S;\mathcal{F}_SG)=1+\dim \text{Ker } res_S^G=\hat{E}(G,S)$. Para obter a igualdade $\hat{E}(G,S)=\tilde{e}(G,S)$, observe que $cd(S^g\cap S)=\begin{cases} n & \text{se } g\in S\\ 0 & \text{se } g\in G-S,\end{cases}$ e consequentemente, $\{g\in G\mid cd(S^g\cap S)=n-1\}=\emptyset$ (pois $n>1$). Daí o corolário 3.11 se aplica. □

Podemos notar que em todos os exemplos vistos, $\hat{E}(G,S)=0,1,2$ ou ∞. Assim, uma questão interessante é: Quais valores $\hat{E}(G,S)$ pode assumir? Para $\tilde{e}(G,S)$ vale o seguinte fato "*Se G e S são finitamente gerados e $[Comm_G(S):S]=\infty$,*

onde $Comm_G(S) = \{g \in G \mid (S : S \cap S^g) < \infty \quad e \quad (S^g : S \cap S^g) < \infty\}$, *então* $\hat{e}(G,S) = 1, 2$ *ou* ∞ (cf. [22, teor. 1.3]). Não sabemos se vale um resultado similar para $\hat{E}(G,S)$. No entanto, de acordo com [22, prop. 4.7], existem pares (G,S) para os quais $\hat{e}(G,S)$ toma valores distintos de $0, 1, 2$, ou ∞. Nós observamos que na demonstração deste resultado os autores provaram que $H^1(S; \mathcal{F}_S G) = 0$. Daí, por 3.8(ii), isto também é verdadeiro para $\hat{E}(G,S)$, ou seja:

3.15 Proposição: *Se* $G = G_1 *_S G_2$ *é um produto livre amalgamado (ver def. IV.1.1 (i)) onde*

(a) $(G_1, \{S\})$ *é um* PD^3*-par.*

(b) S *é abeliano livre de posto dois.*

(c) S *é malnormal em* G_1.

(d) G_2 *é abeliano livre de posto dois e* S *tem índice* n *em* G_2.

então

$$\hat{E}(G,S) = \hat{e}(G,S) = n. \qquad \square$$

Finalizando a seção, observamos que, tomando $M = \mathcal{F}_S G$ em II.5.2, obtemos uma interpretação topológica para $\hat{E}(G,S)$ em termos de pares Eilenberg-MacLane e consequentemente $\hat{e}(G,S)$ terá tal interpretação quando a igualdade $\hat{e}(G,S) = \hat{E}(G,S)$ for verdadeira.

3.16 Proposição: *Sejam* G *em grupo,* S *um subgrupo de* G *com* $[G : S] = \infty$. *Se* (X,Y) *é um par Eilenberg-MacLane que realiza topologicamente* (G,S) *e* $\hat{e}(G,S) = \hat{E}(G,S)$ *então*

$$\hat{e}(G,S) = 1 + dim\ \frac{H^1(X,Y; \mathbb{Z}_2(G/S))}{(\mathbb{Z}_2(G/S))^S},$$

onde $H^1(X,Y; \mathbb{Z}_2(G/S))$ *é tomada com coeficientes locais.* $\square$

CAPÍTULO IV

$\tilde{E}$(G,S) e decomposição de grupos

Dados G um grupo e S um subgrupo de G com G e S finitamente gerados, Kropholler e Roller em [21] supondo que $H^1(G;\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ ou equivalentemente, $\hat{e}(G,S) = 2$ (cf. III.3.2) apresentaram uma condição necessária e (sob algumas hipóteses) suficiente, para que G admita uma decomposição sobre um subgrupo comensurável com S. A condição é que uma obstrução "$sing_G(S)$", definida pelos autores, seja nula.

Neste capítulo analisamos alguns dos resultados deste artigo em termos do nosso invariante $\tilde{E}(G,S)$. Observamos, por exemplo, que nosso invariante $\tilde{E}(G,S)$ substitui a obstrução $sing_G(S)$. Assim, nas hipóteses consideradas, $\tilde{E}(G,S)$ é suficiente para decidir se G se decompõe ou não sobre um subgrupo comensurável com S (2.13).

É nosso interesse sempre que possível retirar dos resultados de [21] a hipótese geral de que $\hat{e}(G,S) = 2$. Neste sentido nós verificamos que o seguinte resultado é válido (sem tal hipótese).

"Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $\tilde{E}(G,S) \geq 2$" (cf. Teorema 2.6).

Como consequência deste fato concluímos (ver 2.7) que se (G,S) é um D^n-par então G não se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S. Isto nos dá exemplos de pares de grupos (G,S) tais que $e(G,S) = \hat{e}(G,S) = \infty$ e no entanto G não se decompõe sobre subgrupo comensurável com S (ver observação 2.8).

Em um outro resultado analisado, verificamos que a hipótese $H^1(G,\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ é consequência das demais e portanto não é possível suprimi-la (2.11).

Isto tudo é feito na secção 2. Inicialmente na secção 1 nós recordamos algumas definições e resultados (sem demonstrações) existentes para decomposição de grupos envolvendo os invariantes ends $e(G)$ e $e(G,S)$.

É interessante observar que a recíproca do teorema 2.6 é um problema ainda em aberto.

1. Decomposição de grupos

1.1 Definição: [4, 2.4 e 2.5]

(i) *Sejam H e K grupos com subgrupos $S \leq H$, $T \leq K$ e suponhamos que S e T são isomorfos via $\theta : S \xrightarrow{\sim} T$. Então o* **produto livre amalgamado** *de H e K com* **subgrupo amalgamado** *$S \simeq T$ é definido por*

$$G = H *_S K :=< H, K; relH,\ relK,\ s = \theta(s),\ \forall s \in S > .$$

(ii) *Seja H um grupo com subgrupos isomorfos S e T e seja $\sigma : S \to T$ um isomorfismo dado. O* **grupo HNN** *sobre o* **grupo base** *H com* **subgrupo associado** *$S \simeq T$ e* **letra estável** *p é definido por*

$$G = H*_{S,\sigma} =< H,\ p;\ relH,\ psp^{-1} = \sigma(s).\ \forall s \in S > .$$

Em (i), dados os homomorfismos $j_1 : H \to G$ e $j_2 : K \to G$ induzidos pela inclusão, podemos provar que j_i, $i = 1,2$ são injetoras e $j_1(H) \cap j_2(K) = j_1(S) = j_2(T)$. Daí, usando j_i como identificação, $i = 1,2$, podemos considerar H e K como subgrupos de G, com $S = H \cap K = T$.

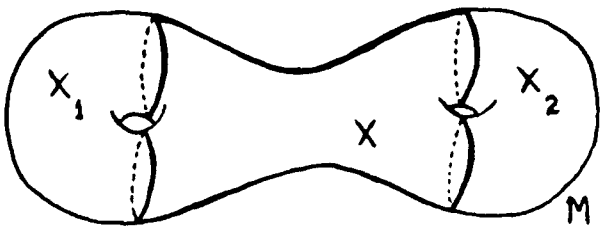
Analogamente, em (ii), podemos considerar H como subgrupo de G.

1.2 Definição; *Dizemos que um grupo G se* **decompõe sobre um subgrupo** *S se $G = H *_S K$ com $H \neq S \neq K$ ou $G = H*_{S,\sigma}$.*

1.3 Exemplos: (i) $\mathbb{Z} = \{1\}*_{\{1\}}$, assim $\mathbb{Z}$ se decompõe sobre o subgrupo trivial.

(ii) Seja G o grupo fundamental da superfície fechada orientada M de genus

2, e seja S o grupo fundamental da sub-superfície X de M como na figura abaixo. Então G se decompõe sobre S, pois $G = \Pi_1(X_1 \cup X) *_S \Pi_1(X \cup X_2)$.



O primeiro resultado de decomposição de grupos envolvendo a teoria de ends foi dado por Stallings [31] (1968) e [32] (1971). Este é um resultado de decomposição sobre subgrupo finito e é conhecido como teorema de estrutura de Stallings.

1.4 Teorema: *Se G é finitamente gerado, então $e(G) \geq 2$ se e somente se G se decompõe sobre um subgrupo finito.* □

1.5 Observações: **(i)** De fato, $e(G) = 2 \Longleftrightarrow G = S*_S$, com S finito ou $G = H *_S K$, com S finito e $[H : S] = [K : S] = 2$ ([32] ou [27, teor. 5.12]). E, $e(G) = \infty \Longleftrightarrow G = H *_S K$ com S finito contido propriamente em ambos os fatores e de índice > 2 em ao menos um deles, ou $G = H*_S$, onde S é finito, mergulhado propriamente em H ([32, 5.A.10]).

(ii) A implicação: "G se decompõe sobre um subgrupo finito $\Longrightarrow$ $e(G) \geq 2$", é válida para G não necessariamente finitamente gerado ([27, lema 6.3]).

No entanto, se por exemplo, estamos interessados em saber quando o grupo fundamental de uma superfície F injeta no grupo fundamental de uma três variedade fechada e conexa M, caímos em um problema de $G = \Pi_1(M)$ se decompor sobre um subgrupo *infinito* $S = \Pi_1(F)$.

1.6: Scott em [26] (1977), tentou generalizar o resultado de Stallings acima para grupos que se decompõem sobre subgrupos infinitos. Ele mostrou que: "Se G se decompõe sobre S então $e(G, S) \geq 2$" (cf [26, lema 1.8]). O problema está na direção

contrária. Scott esperava provar que: "$e(G,S) \geq 2$ se e somente se, G se decompõe sobre alguma extensão finita T de S". No entanto ele observou que isto era falso em geral. O resultado obtido por Scott foi o seguinte:

1.7 Teorema: [26, teor. 4.1] *Se G e S são grupos finitamente gerados e G é S-residualmente finito (isto é, dado $g \in G - S$, existe um subgrupo G_1 de índice finito em G tal que $G_1 \supset S$ mas $g \notin G_1$). Então $e(G,S) \geq 2$ se e somente se, G tem um subgrupo G_2 de índice finito em G tal que $G_2 \supset S$ e G_2 se decompõe sobre S.* □

Dado (G,S), estaremos interessados em investigar quando G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S.

1.8 Definição: *Dois subgrupos S e T de G são ditos* **comensuráveis** *se $[S : S \cap T] < \infty$ e $[T : S \cap T] < \infty$.*

Finalmente lembramos a correspondência entre decomposição de grupos e ação de grupos sobre árvores (para maiores detalhes sugerimos [28]). Os resultados de Kropholler e Roller sobre decomposição de grupos que iremos analisar na secção seguinte são baseados fortemente neste fato.

1.9 Proposição: *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Então G se decompõe sobre S se e somente se existe uma G-árvore Y tal que:*

(i) *G atua livre de pontos fixos (isto é, nenhum vértice de Y é fixado por todo o grupo G).*

(ii) *G atua transitivamente e sem inversão sobre as arestas de Y, e*

(iii) *S é o estabilizador de uma aresta.* □

2. $\hat{E}(G,S)$ e decomposição de grupos segundo Kropholler e Roller.

Vejamos inicialmente a definição da obstrução $sing_G(S)$ introduzida por

Kropholler e Roller em [21].

2.1 Definição: *Seja (G,S) um par grupo. Suponhamos que $H^1(G;\mathcal{F}_SG) \simeq \mathbb{Z}_2$ com gerador u. Consideremos*

$$res_S^G : H^1(G;\mathcal{F}_SG) \to H^1(S;\mathcal{F}_SG),$$

a aplicação restrição. Então, por definição,

$$sing_G(S) = res_S^G(u).$$

Uma condição necessária para G se decompor sobre um subgrupo comensurável com S provada em [21] é a seguinte:

2.2 Proposição: [21, lema 2.4] *Seja (G,S) um par de grupos satisfazendo $H^1(G;\mathcal{F}_SG) \simeq \mathbb{Z}_2$ $(\Leftrightarrow \hat{e}(G,S) = 2)$, com G e S finitamente gerados. Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $sing_G(S) = 0$.*

Podemos observar que, nas hipóteses acima, as condições $sing_G(S) = 0$ e Ker $res_S^G \neq 0$ são equivalentes e então temos:

2.3 Lema: *Se (G,S) é um par grupo com $H^1(G;\mathcal{F}_SG) = \mathbb{Z}_2$, então*
(i) $sing_G(S) = 0 \Leftrightarrow \hat{E}(G,S) = 2$,
(ii) $sing_G(S) \neq 0 \Leftrightarrow \hat{E}(G,S) = 1$.

Demonstração: Se $H^1(G;\mathcal{F}_SG) \simeq \mathbb{Z}_2$ então $[G,S] = \infty$. Daí $\hat{E}(G,S) = 1 + \dim \text{Ker } res_S^G$ e portanto temos:
(i) $sing_G(S) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } res_S^G = H^1(G,\mathcal{F}_SG) = \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow \hat{E}(G,S) = 2$.
(ii) $sing_G(S) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker } res_S^G = 0 \Leftrightarrow \hat{E}(G,S) = 1$. □

Motivados neste lema simples, nós verificamos que, pensando em termos de $\hat{E}(G,S)$ e não em termos de $sing_G(S)$, o resultado 2.2 é válido sem a suposição de que $H^1(G,\mathcal{F}_SG) \simeq \mathbb{Z}_2$ (ver proposição abaixo).

Isto é obtido de maneira análoga à demonstração de 2.2 dada em [21], a qual decorre de alguns lemas.

Como as demonstrações destes lemas em [21] estão bastante resumidas e portanto não muito claras, apresentamos aqui, em detalhes, as demonstrações dos lemas, adaptando-as ao invariante $\hat{E}(G,S)$ e retirando a hipótese de que $H^1(G;\mathcal{F}_SG) = \mathbb{Z}_2$.

2.4 Lema: *Seja S um subgrupo de G, com S e G finitamente gerados. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\hat{E}(G,S) \geq 2$

(ii) *Existe* $[B] = B + \mathcal{F}_SG \in (\frac{PG}{\mathcal{F}_SG})^G$ *(isto é,* $B + gB \in \mathcal{F}_SG$, $\forall g \in G$*)*

tal que $[B] \neq [\emptyset]$, $[B] \neq [G]$ *e* $SB = B$.

Demonstração: Seja $F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$. Então $F \to \mathbb{Z}_2$ é também uma resolução de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2S$, que é projetiva pelo fato que $\mathbb{Z}_2G$ é $\mathbb{Z}_2S$-livre.

Da sequência exata

$$0 \to \mathcal{F}_SG \overset{k}{\hookrightarrow} PG \to \frac{PG}{\mathcal{F}_SG} \to 0,$$

obtemos o diagrama comutativo de complexos de cocadeias com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Hom_G(F,\mathcal{F}_SG) & \to & Hom_G(F,PG) & \to & Hom_G(F,\frac{PG}{\mathcal{F}_SG}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom_S(F,\mathcal{F}_SG) & \to & Hom_S(F,PG) & \to & Hom_S(F,\frac{PG}{\mathcal{F}_SG}) & \to & 0
\end{array}$$

Daí por [8, 1.0.4], aplicando $H^*(-)$, e lembrando o conceito de cohomologia de grupos, obtemos o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & H^0(G;\mathcal{F}_SG) & \to & H^0(G;PG) & \to & H^0(G;\frac{PG}{\mathcal{F}_SG}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G;\mathcal{F}_SG) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow res_S^G & & \\
0 & \to & H^0(S;\mathcal{F}_SG) & \to & H^0(S;PG) & \to & H^0(S;\frac{PG}{\mathcal{F}_SG}) & \xrightarrow{\rho} & H^1(S;\mathcal{F}_SG) & \to & \cdots
\end{array}$$

Agora, tanto em (i) com em (ii), temos que $[G:S]=\infty$, e daí $H^0(G;\mathcal{F}_SG)=(Ind_S^G PS)=0$ (1.3.11). Também $H^1(G;PG)=0$ pelo lema de Shapiro (1.3.14). Logo temos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \to & (PG)^G & \xrightarrow{\beta} & (\frac{PG}{\mathcal{F}_SG})^G & \xrightarrow{\delta} & H^1(G;\mathcal{F}_SG) \to 0 \\
 & & & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow res_S^G \\
0 & \to & (\mathcal{F}_SG)^S & \hookrightarrow & (PG)^S & \xrightarrow{\alpha} & (\frac{PG}{\mathcal{F}_SG})^S & \xrightarrow{\rho} & H^1(S;\mathcal{F}_SG) \to \cdots
\end{array}$$

Vejamos que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Se $\hat{E}(G,S)=1+\dim \operatorname{Ker} res_S^G \geq 2$ então existe $u\in H^1(G;\mathcal{F}_SG)$, $u\neq 0$ tal que $res_S^G u=0$. Como δ é sobrejetora, existe $[B_0]\in(\frac{PG}{\mathcal{F}_SG})^G$ tal que $u=\delta[B_0]$, com $[B_0]\notin \operatorname{Im}\beta=\{[\emptyset],[G]\}$ pois $\delta[B_0]\neq 0$ e $\operatorname{Im}\beta=\operatorname{Ker}\delta$.

Da comutatividade do diagrama temos $\rho(j[B_0])=(res_S^G\circ\delta)[B_0]=res_S^G u=0$.

Daí $[B_0]=j[B_0]\in\operatorname{Ker}\rho=\operatorname{Im}\alpha$ e portanto existe $B\in(PG)^S$ tal que $[B]=\alpha(B)=[B_0]$.

É fácil ver que $(PG)^S=\{A\subset G\mid SA=A\}$.

Então temos $SB=B$ (pois $B\in(PG)^S$); $[B]\in(\frac{PG}{\mathcal{F}_SG})^G$ e $[B]\notin\{[\emptyset],[G]\}$ (pois $[B]=[B_0]$ e $[B_0]$ satisfaz estas condições), isto é, obtemos (ii).

Para ver (ii) $\Longrightarrow$ (i), seja $[B]\in(\frac{PG}{\mathcal{F}_SG})^G$ tal que $[B]\neq[\emptyset]$, $[B]\neq[G]$ e $SB=B$. Então $[B]\notin\operatorname{Im}\beta=\operatorname{Ker}\delta$ e portanto $u:=\delta([B])\neq 0$, com $B\in(PG)^S$. Daí, pela comutatividade do diagrama temos

$res_S^G u = res_S^G(\delta[B]) = (\rho\circ j)([B]) = \rho([B]) = \rho(\alpha(B)) = 0$. Logo, $\operatorname{Ker} res_S^G\neq 0$ de onde segue que $\hat{E}(G,S)\geq 2$. □

2.5 Lema: *Se T é comensurável com S então $\hat{E}(G,S)\geq 2$ se e somente se $\hat{E}(G,T)\geq 2$.*

Demonstração: É suficiente provar o seguinte fato:

(1) Se H e K são subgrupos de G, com $K\leq H\leq G$ e $[H:K]=n<\infty$, então $\hat{E}(G,K)\geq 2$ implica $\hat{E}(G,H)\geq 2$.

Pois, uma vez provado (1), se T é qualquer subgrupo de G comensurável com S, isto é, $[S : T \cap S] < \infty$ e $[T : T \cap S] < \infty$ então, por corolário III.2.6, $\hat{E}(G,S) \leq \hat{E}(G, S \cap T)$ e $\hat{E}(G,T) \leq \hat{E}(G, S \cap T)$. Daí

$$\hat{E}(G,S) \geq 2 \Longrightarrow \hat{E}(G, S \cap T) \geq 2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \hat{E}(G,T) \geq 2,$$

e analogamente,

$$\hat{E}(G,T) \geq 2 \Longrightarrow \hat{E}(G, S \cap T) \geq 2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \hat{E}(G,S) \geq 2.$$

Provemos então (1).

Se $\hat{E}(G,K) \geq 2$ então pelo lema anterior, existe $B \subset G$ tal que $B + gB \in \mathcal{F}_K G$, $\forall g \in G$, $[B] \neq [\emptyset]$, $[B] \neq [G]$ e $KB = B$. Como $[H : K] < \infty$ temos que $\mathcal{F}_K G = \mathcal{F}_H G$. Logo

$$B + gB \in \mathcal{F}_H G, \quad \forall g \in G. \tag{$*$}$$

Seja $H_0 = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de K em H.

Temos

$$\begin{aligned} B + H_0 B &= B + (h_1 B \cup \ldots \cup h_n B) \subset (B + h_1 B) \cup \ldots \cup (B + h_n B) \\ &\subset F_1 H \cup \ldots \cup F_n H, \quad \text{com } F_i \in FG, \ i = 1, \ldots, n \quad \text{por } (*) \\ &= (F_1 \cup \ldots \cup F_n) H \end{aligned}$$

Portanto $B + H_0 B \in \mathcal{F}_H G$ e daí $[B] = [H_0 B]$.

Seja $B_0 := H_0 B$. Então:

(a) $B_0 + gB_0 \in \mathcal{F}_H G$, $\forall g \in G$, pois

$$\begin{aligned} B_0 + gB_0 &= H_0 B + g H_0 B = (H_0 B + B) + (B + g H_0 B) \\ &= (H_0 B + B) + B + g(h_1 B \cup \ldots \cup h_n B) \\ &= (H_0 B + B) + B + (g h_1 B \cup \ldots \cup g h_n B) \\ &\subset (B + H_0 B) + (B + g h_1 B) + \ldots + (B + g h_n B) \in \mathcal{F}_H G \quad \text{por } (*). \end{aligned}$$

(b) $[B_0] \neq [\emptyset]$ e $[B_0] \neq [G]$ pois $[B_0] = [B]$ e $[B] \neq [\emptyset], [G]$.

(c) $HB_0 = B_0$ pois, claramente $B_0 \subset HB_0$ e, como $HH_0 \subset H$ (pois $H_0 \subset H$), $H = h_1 K \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} h_n K = H_0 K$ e $KB = B$, temos:

$HB_0 = H(H_0B) \subset HB = H_0KB = H_0B = B_0$.

Logo B_0 satisfaz as condições do lema 2.4 (ii) para G e H. Portanto $\hat{E}(G,H) \geq 2$. □

Temos então o seguinte resultado:

2.6 Teorema: *Seja (G,S) um par grupo com G e S finitamente gerados. Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $\hat{E}(G,S) \geq 2$.*

Demonstração: Suponhamos que G se decompõe sobre um subgrupo T comensurável com S. Por 1.9, existe uma G-árvore Y tal que:

(i) G atua livre de pontos fixos sobre os vértices de Y,

(ii) G atua transitivamente e sem inversão sobre as arestas de Y, e

(iii) T é o estabilizador de uma aresta.

Seja ϵ uma aresta com estabilizador T, isto é, $T = \{g \in G \mid \epsilon g = \epsilon\}$. Se e é removida de Y então obteremos dois pedaços disjuntos que denotaremos por Y_0 e Y_1.

Seja $B = \{g \in G \mid \epsilon g \in Y_0\}$. Claramente $TB = B$ pois, se $t \in T$ e $g \in B$ então $e(tg) = (\epsilon t)g = \epsilon g \in Y_0$. Além disso, $B + gB \in \mathcal{F}_T G$, $\forall g \in G$ pois:

$$\begin{aligned} B - gB &= \{y \in G \mid \epsilon y \in Y_0 \quad \text{e} \quad y \notin gB\} \\ &= \{y \in G \mid \epsilon y \in Y_0 \quad \text{e} \quad g^{-1}y \notin B\} \\ &= \{y \in G \mid \epsilon y \in Y_0 \quad \text{e} \quad \epsilon g^{-1}y \in Y_1 \cup \{\epsilon\}\} \\ &= \{y \in G \mid \epsilon y^{-1} \quad \text{pertence ao menor caminho ligando } \epsilon \text{ a } \epsilon g^{-1}\} \end{aligned}$$

(a última igualdade é obtida fazendo y^{-1} atuar à direita no caminho que liga ϵy a $\epsilon g^{-1}y$).

Como a ação é transitiva, existem $g_1, \ldots, g_k \in G$ tais que as arestas deste caminho são $\epsilon g_1, \ldots, \epsilon g_k$. Logo $\forall y \in B - gB$, $\epsilon y^{-1} = \epsilon g_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$ e assim, $\epsilon = \epsilon g_i y$, isto é, $g_i y \in T$. Daí, existe $t \in T$ tal que $g_i y = t$ ou seja, $y = g_i^{-1}t$. Logo $B - gB \subseteq g_1^{-1}T \cup \ldots \cup g_k^{-1}T$ e portanto $B - gB \in \mathcal{F}_T G$.

Analogamente temos

$$\begin{aligned} gB - B &= \{y \in G \mid y \in gB \text{ e } y \notin B\} \\ &= \{y \in G \mid g^{-1}y \in B \text{ e } y \notin B\} \\ &= \{y \in G \mid eg^{-1}y \in Y_0 \text{ e } ey \in Y_1 \cup \{e\}\} \\ &= \{y \in G \mid ey^{-1} \text{ pertence ao menor caminho ligando } eg^{-1} \text{ a } e\} \end{aligned}$$

e pelo mesmo raciocínio acima obtemos que $gB - B \in \mathcal{F}_T G$.

Daí $B + gB = B - gB \cup gB - B \in \mathcal{F}_T G$.

Agora, que $[B] \neq [\emptyset]$ e $[B] \neq [G]$ segue do fato que a ação de G sobre os vértices de Y é livre de pontos fixos.

Portanto B satisfaz a condição (ii) do lema 2.4 e daí $\tilde{E}(G,T) \geq 2$. Como T é comensurável com S, segue do lema anterior, que $\tilde{E}(G,S) \geq 2$. □

Como consequência deste resultado temos:

2.7 Corolário: *Se* (i) (G,S) *é um* D^n*-par com* $[G:S] = \infty$ *ou ,*
(ii) G *é um* D^n*-grupo e* $hdS \leq n-2$
então G *não se decompõe sobre nenhum subgrupo comensurável com* S.

Demonstração: Segue de III.2.8 e do teorema anterior. □

2.8 Observação: O teorema 2.6 é bastante interessante pois, por exemplo, para $G =< a > * < b > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S =< aba^{-1}b^{-1} >$ temos que $\tilde{e}(G,S) = \infty$ e portanto a obstrução $sing_G(S)$ não está definida, mas apesar disto, visto que (G,S) é um PD^2-par, concluímos do corolário anterior, que G não se decompõe sobre nenhum subgrupo comensurável com S. Em particular, sobre nenhuma extensão finita de S.

Isto também vem confirmar que a idéia inicial de Scott "Se $e(G,S) \geq 2$ então G se decompõe sobre uma extensão finita de S" (ver 1.6) não é realmente válida pois, neste exemplo, $e(G,S) = \infty > 2$.

Para analisar quando a condição $sing_G(S) = 0$ é suficiente para G se decompor sobre um subgrupo comensurável com S, em [21] §3, os autores, admitindo as hipóteses gerais

(a) G é um grupo finitamente gerado de dimensão cohomológica no máximo n,

(b) S é um PD^{n-1}-subgrupo de G,

(c) $H^1(G;\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbf{Z}_2$,

(d) Todo subgrupo de índice infinito em G tem dimensão cohomológica no máximo $n-1$,

provaram o seguinte resultado:

2.9 Proposição: [21, lema 3.2] *Se $[N_G(S):S]=\infty$, onde $N_G(S)$ denota o normalizador de S em G, então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se, e somente se, $sing_G(S)=0$.* □

Era nosso interesse retirar a hipótese (c) e generalizar este fato substituindo, como no teorema 2.6, a condição $sing_G(S)=0$ por $\tilde{E}(G,S)\geq 2$. Porém, nós provamos (Teorema 2.11 abaixo), que se $[N_G(S):S]=\infty$ então a hipótese (c) é consequência das outras e portanto não faz sentido retirá-la. Além disto, nós verificamos, que a hipótese (b) pode ser enfraquecida, por considerar

(b)': S é um D^{n-1}-subgrupo de G.

Para provar este resultado, nos usamos lema 3.1 de [21]. Para deixar claro que na demonstração deste lema não se faz uso da hipótese (c) e que a hipótese (b) pode ser substituída por (b)', apresentaremos aqui demonstração em detalhes deste lema.

2.10 Lema: *Seja (G,S) um par de grupos satisfazendo as condições (a), (b)' e (d) acima. Se $[N_G(S):S]=\infty$ então*

(i) *$[G:N_G(S)]$ é finito, e*

(ii) *$N_G(S)/S$ tem um subgrupo cíclico infinito L/S de índice finito.*

Demonstração: Por simplicidade vamos denotar $N_G(S)$ por N. Provemos inicialmente que:

(1) "N/S tem um subgrupo H/S finitamente gerado, com cd $H=n$".

De fato: Suponhamos, por absurdo, que para todo subgrupo finitamente

gerado H/S de N/S tenhamos cd $H \neq n$.

Então $cdH = n-1$ pois, como: $cdS = n-1$, $cdG \leq n$ e $G \supset H \supset S$, as únicas possibilidades são, em vista de I.5.10, $cdH = n$ ou $cdH = n-1$.

Agora, se $cdH = n-1$, visto que S é normal em H e S é um D^{n-1}-grupo, segue de I.5.24(a), que H é também um D^{n-1}-grupo e $Q = H/S$ é finito.

Portanto se H/S é um subgrupo finitamente gerado qualquer de N/S então H/S é finito ou seja, N/S é localmente finito. Em particular, como por hipótese do lema N/S não é finito, segue que N/S não é finitamente gerado. Daí, existe N'/S subgrupo de N/S com um número infinito enumerável de geradores, digamos $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots$. Considere a sequência de subgrupos finitamente gerados de N/S (portanto de ordem finita).

$$H_1/S \leq H_2/S \leq \ldots,$$

onde $H_j/S = < \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_j} >$. Como

•H_j é um grupo sem $\mathbb{Z}_2$-torção (pois $H_j \leq G$ e G não tem Z_2-torção por I.5.12(i)),

•$[H_j : S] < \infty$ (pois N/S é localmente finito e H_j/S é finitamente gerado) e,

•S é um D^{n-1}-grupo,

segue de I.5.19(i), que H_j é um D^{n-1}-grupo para $j = 1, 2, \ldots$. Daí, por I.5.17, $cdH_j = n-1$, H_j é de tipo FP e $H^k(H_j; \mathbb{Z}_2 H_j) = 0$ para $0 \leq k < n-1$, e $j = 1, 2, \ldots$.

Além disso, a união dos subgrupos $H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \ldots$ é N' (pois $\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j/S = N'/S$ e $S \subset H_j$), e $[H_{j+1} : H_j] = [H_{j+1}/S : H_j/S] < \infty$ (pois $| H_j/S | < \infty$, $\forall j$).

Logo por [14, teor. 3.3], visto que N' não é finitamente gerado (pois N'/S não é finitamente gerado) temos que

$$cdN' = (n-1) + 1.$$

Portanto $cdN \geq cdN' = n > cdS$. Daí por (d) temos que $[G : N] < \infty$, e então, como G é finitamente gerado (condição (a)) segue que N é finitamente gerado (cf. [25, 1.6.11]. Consequentemente N/S é também finitamente gerado, o que é uma contradição.

Portanto a afirmação (1) é verdadeira, isto é, existe um subgrupo finitamente

gerado H/S de N/S satisfazendo $cdH = n$.

Daí $cdN = n$ (pois $n = cdH \leq cdN \leq cdG \leq n$), e então $[G : N] < \infty$ por (d), o que prova parte (i).

Vejamos (ii).

Como S e H/S são finitamente gerados segue que H é também finitamente gerado.

Do fato que S é um D^{n-1}-grupo segue que S é de tipo FP e $H^j(S; \mathbb{Z}_2S) = 0$ para $j \leq n-2$ (I.5.17).

Agora, $Q = H/S$ é infinito pois $n = cdH > cdS = n-1$. Logo, por I.5.24(b), temos que H/S tem mais que um end, isto é, $\epsilon(H/S) \geq 2$. Daí H/S deve conter um elemento de ordem infinita (isto segue do teorema Stallings (teorema 1.4) e de [28, I.1.3].

Seja L/S o subgrupo cíclico infinito de N/S gerado por este elemento.

Da sequência exata $S \rightarrowtail L \twoheadrightarrow L/S \simeq \mathbb{Z}$, concluímos por I.5.19(i), que L é um grupo de dualidade de dimensão n. Daí $[G : L] < \infty$ (por (d)) e portanto temos

$$[N/S : L/S] = [N : L] \leq [G : L] < \infty, \text{ com } L/S \simeq \mathbb{Z},$$

o que prova (ii). □

Agora estamos em condições de provar o resultado abaixo:

2.11 Teorema: *Seja (G, S) um par grupo satisfazendo as condições (a),(b)' e (d). Seja C' o módulo dualizante de S. Se $[N_G(S) : S] < \infty$ então G é um D^n-grupo com módulo dualizante C satisfazendo $Res_S^G C \simeq C'$ e portanto $H^1(G; \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração: Nas hipóteses acima temos, pelo lema anterior, que $N_G(S)/S$ tem um subgrupo cíclico infinito L/S de índice finito tal que $[G : L] < \infty$.

Consideremos a sequência exata curta

$$0 \to S \to L \twoheadrightarrow L/S \simeq \mathbb{Z} \to 0$$

Como S é um D^{n-1}grupo com módulo dualizante C' e L/S é um PD^1-grupo segue que L é um D^n-grupo com módulo dualizante $H^n(L; \mathbb{Z}_2L) \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes C' \simeq$

C', como $\mathbf{Z}_2L$-módulos (I.5.19(ii)).

Daí, como G não tem $\mathbf{Z}_2$-torção (pois $cdG \leq n$) e $[G:L] < \infty$ temos por I.5.19 que G é também um D^n-grupo com módulo dualizante $C = H^n(G;\mathbf{Z}_2G)$ tal que $Res_L^G C \simeq C'$ (como $\mathbf{Z}_2L$-módulos). Assim, S é um D^{n-1}-grupo com módulo dualizante $C' \simeq Res_S^G C$, onde C é o módulo dualizante de G.

Daí $H^1(G;\mathcal{F}_SG) \simeq \mathbf{Z}_2$. (Para ver isto basta, na demonstração II.3.9(i) considerar $\mathcal{F}_SG = Ind_S^G PS$ no lugar de $\mathbf{Z}_2(G/S) = Ind_S^G \mathbf{Z}_2$). □

Observação: Sabemos que se G é um PD^n-grupo então G é finitamente gerado de dimensão cohomológica n (ver I.5.15 e I.5.18), e por um teorema de Strebel [33] todo subgrupo K de índice infinito em G satisfaz $cdK \leq n-1$. O teorema anterior nos dá uma recíproca parcial deste fato (quando S é um PD^{n-1}-grupo).

Finalizando a secção, recordamos que em [21] §5, supondo que G é um PD^ngrupo e S é um PD^{n-1}-subgrupo, os autores provaram o seguinte fato:

2.12 Teorema: [21, teor. A] *Sejam G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo. Então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se e somente se $sing_G(S) = 0$.* □

Adaptando este resultado ao nosso invariante temos, analogamente:

2.13 Teorema: *Sejam G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo. Então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se e somente se $\hat{E}(G,S) = 2$.*

Demonstração: Consequência imediata do lema 2.3. □

Assim, por exemplo, podemos concluir que $\mathbf{Z}^k$ se decompõe sobre um subgrupo comensurável com $\mathbf{Z}^{k-1}(k \geq 2)$ pois $\hat{E}(\mathbf{Z}^k, \mathbf{Z}^{k-1}) = 2$ (III.2.9). Similarmente, se G e S são como em II.3.12 então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S.

Combinando 2.13 e 2.6 obtemos o seguinte resultado:

2.14 Proposição: *Sejam G um grupo finitamente gerado e T e S subgrupos de G com $S \leq T \leq G$, $[G:T] < \infty$ e $[T:S] = \infty$. Se*

(i) *S e T são finitamente gerados e $\hat{E}(T,S) = 1$ ou*

(ii) *T é um PD^n-grupo, S um PD^{n-1}-subgrupo, e T não se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S,*

então G não se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S.

Demonstração: (i) Pelo lema III.2.7, $\hat{E}(G,S) \leq \hat{E}(T,S) = 1$. Daí o resultado segue do teorema 2.6. Agora (ii) segue de (i) pois, se T não se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então, pelo teorema anterior, $\hat{E}(T,S) = 1$. □

BIBLIOGRAFIA

[1] Andrade, M.G.C.; *Tese de Doutorado*, IMECC - Unicamp, Campinas (em preparação).

[2] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A relative cohomological invariant for pairs of groups*, (em preparação).

[3] Bieri, R.; *Gruppen Mit Poincaré Dualität*, Comm. Math. Helv. 47 (1972), 373 - 396.

[4] Bieri, R.; *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, (1976).

[5] Bieri, R.; *Normal subgroups in duality groups and in groups of cohomological dimension 2*, Journal of Pure and Applied Algebra 7 (1976), 35 - 51.

[6] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Groups with homological duality generalizing Poincaré duality*. Inventiones Math. 20 (1973), 103 - 124.

[7] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Relative homology and Poincaré duality*, Journal of Pure and Applied Algebra 13 (1978), 277 - 319.

[8] Brown, K.S.; *Cohomology of groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, (1982).

[9] Cohen, D.F.; *Groups of cohomological dimension one*, Lectures Notes in Math. 245 Springer-Verlag, Berlin (1972).

[10] Dicks, W.; Dunwood, M.; *Groups acting on graphs*, Cambridge Unver-

sity Press, (1988).

[11] Eckmann, B.; Müller, H.; *Poincaré duality groups of dimension two*, Comm. Math. Helvetici 55, (1980), 510 - 520.

[12] Eckmann, B.; Linell, P.A.; *Poincaré duality groups of dimension two II*, Comm. Math. Helv. 58, (1983), 111 - 114.

[13] Freudenthal, H; *Über die Enden Topologischer Raüme und Gruppen*, Math. Zeit. 33 (1931), 692 - 713.

[14] Gildenhuys, D.; Strebel, R.; *On the cohomological dimension of soluble groups*, Canad. Math. Bull. Vol. 24(4) (1981), 385 - 392.

[15] Hilton, P.J.; Wylie, S.; *Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press (1960).

[16] Hopf, H.; *Enden offener Raüme und unendlicher Gruppen*, Comm. Math. Helv. 16 (1943), 81 - 100.

[17] Houghton, C.H.; *Ends of locally compact groups and their coset spaces*, J. Aust. Math. Soc. 17 (1974) 274 - 284.

[18] Hu, S.T.; *Introduction to homological algebra*, Holden-Day series in Mathematics, Holden-Day inc. São Francisco, (1968).

[19] Johnson F.E.A.: Wall, C.T.C.; *On groups satisfying Poincaré duality*, Annals of Math., 96 (1972), 592 - 598.

[20] Kropholler, P.H.; *An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups*, Proc. London Math. Soc. 3 (1990), 503 - 529.

[21] Kropholler, P.H,; Roller, M.A.; *Splittings of Poincaré duality groups*, Math. Z. 97 (1988), 421 - 438.

[22] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Relative ends and duality groups*,

Journal of Pure and Appl. Algebra, 61 (1989), 197 - 210.

[23] Raymond, F.; Scott, L.L.; *Failure of Nielsen's theorem in higher dimensions*, Arch. Math., 29(6) (1977), 643 - 654.

[24] Ribes, L.; *On a cohomology theory for pairs of groups*, Proc. of the A.M.S. 21 (1969) 230 - 234.

[25] Robinson, D.J.S.; *A course in the theory of groups*, G.T.M. 80, Springer-Berlin, (1982).

[26] Scott, G.P.; *Ends of pairs of groups*, J. Pure Appl. Algebra 11 (1977), 179 - 198.

[27] Scott, G.P.; Wall, C.T.C.; *Topological methods in group theory*, London Math. Soc., Lect. Notes Series 36, Homological Group Theory, (1979) 137 - 203.

[28] Serre, J.P.; *Trees*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1980).

[29] Siebenmann, L.C.; *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, PhD Thesis, Princeton Univ. Press (1965).

[30] Specker, E.; *Endenverbände van Raüme und Gruppen*, Math. Ann. 122 (1950), 167 - 174.

[31] Stallings, J.R.; *On torsion - free groups with infinitely many ends*, Ann. Math. 88 (1968), 321 - 334.

[32] Stallings, J.R.; *Groups theory and 3-dimensional manifolds*, Yale Univ. Press, (1971).

[33] Strebel, R.; *A remark on subgroups of infinte index in Poincaré duality groups*, Comment. Math. Helvetici 52 (1977), 317 - 324.

[34] Thomas, C.B.; *Splittings theorems for certain PD^3-groups*, Math. Z.

186, (1984), 201 - 209.

[35] Whitehead, G.W.; *Homotopy Theory*, The M.I.T. Press, Massachusetts (1966).

[36] Whitehead, G.W.; *Elements of homotopy theory*, G. T. M. 61, Springer-Verlag, New York, (1978).