**Poliedros de equisingularidade de germes
pré-quase-homogêneos**

Marcelo José Saia

ORIENTADORA : Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

**Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
a obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).**

São Carlos-SP

1991

À Soraya

Aos meus pais

Ao Bruno

Agradeço

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Ap. S. Ruas, cuja dedicação e capacidade foram fundamentais na realização deste trabalho.

Aos Professores: Terence Gaffney e James W. Bruce, pelas, inúmeras sugestões, que possibilitaram vários resultados.

Ao meu filho Bruno, por aceitar a minha ausência.

Aos meus pais, familiares e amigos, pelo apoio.

À Soraya, pela ajuda no trabalho de datilografia.

Aos meus amigos do IGCE-UNESP-Rio Claro pelo incentivo.

Ao Luis Fernando Cozin, pelas dicas sobre o computador..

À UNESP pela concessão de afastamento para estágio junto ao ICMSC-USP.

À Glaucia, pela busca bibliográfica.

Este trabalho foi parcialmente patrocinado pela
CAPES.

ABSTRACT

In this work we introduce the notion of a pre-weighted homogeneous germ and we show that they are G -finite for $G = \mathbb{A}$ and $\mathbb{K}$. We obtain results on the equisingularity of families of hypersurfaces defined by such germs as a consequence of a characterization of the polyhedron of Equisingularity of an analytic germ with isolated singularity. We also show that the gradient polyhedron defined by E. Yoshinaga [Y], the filtration conditions defined by J. Damon and T. Gaffney [D G], and the algebraic approach of integral closure of ideals considered by Teissier [T1],[T2] lead to the same convex subset of the polyhedron of equisingularity. A partial extension of the above results for complete intersection with isolated singularity is obtained.

Introdução.....	i
Capítulo 0 - Preliminares.....	1
Capítulo 1 - Germes Pré-Quase-homogêneos.....	13
Capítulo 2 - Métodos para o estudo da equisingularidade.....	26
Capítulo 3 - Hipersuperfícies pré-quase-homogêneas adequadas...	49
Capítulo 4 - O p-poliedro de Equisingularidade.....	62
Capítulo 5 - Campos de Morse.....	73
Bibliografia.....	86

INTRODUÇÃO

Neste trabalho introduzimos o conceito de germes pré-quase homogêneos e obtemos resultados de determinação finita para esta classe de germes. São também consideradas questões sobre a equisingularidade de famílias de deformações de um germe com singularidade isolada, que se aplicam em especial aos germes pré-quase-homogêneos.

Um germe de aplicação $g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ é G -pré-quase-homogêneo se pode ser decomposto na forma $g = f + h$, onde f é um germe quase homogêneo G -finitamente determinado e h é um germe com grau de quase homogeneidade menor que o grau de f .

No primeiro capítulo, obtemos o resultado simples, mas surpreendente, que todo germe G -pré-quase-homogêneo é G -finitamente determinado, $G = K$ ou $\mathcal{A}$. Este resultado depende basicamente dos seguintes fatos:

- a) A condição de G -determinação finita é aberta.
- b) Existe uma família g_t , G -trivial, com $g_0 = f + h$ e f pertencente ao fecho desta família.

Como aplicação deste resultado apresentamos uma prova de que o conjunto dos germes não K -suficientes é de codimensão infinita. Esta demonstração é mais simples e direta do que a usual, que usa o teorema de Sard [W]. A aplicação deste método para o grupo $\mathcal{A}$ depende da possibilidade de garantir a existência de germes quase-homogêneos $\mathcal{A}$ -finitos de grau arbitrariamente alto. Tais exemplos são construídos para os seguintes pares de dimensão (n, p) : $(n, 1)$, $(2, 2)$ e (n, p) com $p \geq 2n$. Estes resultados fazem parte do artigo "A Note on Determinacy" [B R S].

Como outra aplicação da G -determinação finita dos germes pré-quase-homogêneos, mostramos que toda variedade real definida por um germe C^0 - K -finitamente determinado é topologicamente equivalen-

te a uma variedade definida por um germe $\mathcal{K}$ -finito.

No segundo capítulo, é feito um estudo comparativo entre os trabalhos de Damon e Gaffney [D G], Yoshinaga [Y] e Teissier [T1], [T2], que tratam da trivialidade topológica e Whitney-equisingularidade de deformações de germes de aplicação com singularidade isolada $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$, e mostramos as equivalências entre estes trabalhos. Como consequência destas equivalências, caracterizamos um subconjunto do poliedro de equisingularidade de g , que é o conjunto convexo maximal de equisingularidade de um germe com singularidade isolada.

No capítulo 3, usando a técnica de construção de campos de vetores controlados de [D G], descrevemos um algoritmo que permite determinar o polígono de equisingularidade de germes $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$. Como aplicação, caracterizamos uma subclasse de germes pré-quase-homogêneos de tipo $g=f+h$, $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$ cujo polígono de equisingularidade contem todos os elementos acima do diagrama de Newton do germe quase-homogêneo f .

No capítulo 4, usamos os resultados de Gaffney [G], sobre fecho integral de módulos para estender parcialmente os resultados do segundo capítulo para variedades definidas por germes de aplicações $g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ com $p > 1$. Definimos o p -poliedro de equisingularidade para estes germes. O principal resultado deste capítulo, é a proposição 3.2, na qual obtemos uma caracterização algébrica para um subconjunto deste poliedro.

No capítulo 5, estudamos os Campos holomorfos de tipo Morse, introduzidos por Verjovsky e outros em [V S]. Obtemos o seguinte resultado: "O conjunto dos Campos que não são de tipo Morse têm codimensão infinita". Além disso, usamos propriedades de C^0 - $\mathcal{K}$ -determinação finita para caracterizar os Campos de tipo Morse lineares.

res e para estudar alguns exemplos de Campos Hamiltonianos de tipo Morse em $\mathbb{C}^2$.

Estes resultados são ainda parciais, e questões sobre a estabilidade da propriedade "F é campo de Morse", que foram a motivação inicial deste trabalho, permanecem ainda em aberto.

O estudo sobre a trivialidade topológica de uma deformação G de um campo quase-homogêneo F, $\text{fil}(G) \geq \text{fil}(F)$, motivou a definição de germes de variedades pré-quase-homogêneas.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES:

As definições e resultados deste capítulo estão em Wall [W]

.§.1. Definições básicas:

Iremos estudar propriedades locais de aplicações diferenciáveis $f: N^n \rightarrow P^p$, onde N e P são variedades diferenciáveis. Por esta razão, trabalhamos com germes de aplicação em um ponto $a \in N$, isto é, classes de equivalência de aplicações que coincidem em alguma vizinhança de a . Os pontos $a \in N$ e $f(a) \in P$ são chamados, respectivamente, fonte e meta do germe.

Notação: $f: (N, a) \rightarrow (P, f(a))$.

Utilizando convenientes sistemas de coordenadas, podemos considerar o conjunto dos germes de aplicação $f: k^n, 0 \rightarrow k^p$, onde $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Indicaremos por:

$C(n, p)$, o conjunto dos germes C^∞ , $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$.

$A(n, p)$, o conjunto dos germes analíticos reais, $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$.

$O(n, p)$, o conjunto dos germes holomorfos, $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p$.

Para $p = 1$, indicaremos o anel local $C(n, 1)$, $A(n, 1)$ e $O(n, 1)$ respectivamente por C_n , A_n e O_n . O ideal maximal em qualquer dos casos será indicado por m_n .

A série de Taylor de um germe f , será denotada por $j^\infty f$.

O k -jato de f é constituído pelos termos de grau menor ou igual a k em $j^\infty f$, e será denotado por $j^k f$.

O conjunto dos k-jatos é o espaço vetorial $J^k(n,p)$ de dimensão $N = \sum_{j=1}^k p \binom{n+j-1}{j}$.

Para qualquer relação de equivalência G definida entre germes de função, dizemos que um germe de função f é G -determinado pelo seu k -jato, f é k - G -determinado, se qualquer germe g com $j^k g = j^k f$ é G -equivalente a f .

Se f é k - G -determinado para algum $k < \infty$, dizemos que f é G -finitamente determinado, ou G -finito. Neste caso, o menor valor k para o qual ocorre a G -determinação finita, é denominado grau de determinação de f .

As relações de equivalência de interesse neste trabalho são as definidas pelas ações dos grupos:

$\mathcal{R}$ = germes de difeomorfismos C^∞ na fonte $(\mathbb{R}^n, 0)$, que agem sobre f pela composição à direita de f . Um elemento $h \in \mathcal{R}$ é denominado uma mudança de coordenada na fonte, isto é, $g = f \circ h^{-1}$

$\mathcal{L}$ = germes de difeomorfismos C^∞ na meta $(\mathbb{R}^p, 0)$, que agem sobre f pela composição à esquerda. Um elemento $k \in \mathcal{L}$ é denominado uma mudança de coordenada na meta, isto é, $g = k \circ f$

$\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ produto direto dos grupos anteriores.

$\mathcal{G}$ = germes na origem de famílias de difeomorfismos C^∞ a n -parâmetros de $(\mathbb{R}^p, 0)$, ou equivalentemente, germes de difeomorfismos H de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ tais que:

- i) a projeção em $\mathbb{R}^n$ é fixada, e
- ii) preservam o subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\}$

Se h_x é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^p$, dependendo de $x \in \mathbb{R}^n$, sua ação sobre f , é dada pela função $x \rightarrow h_x(f(x))$.

Equivalentemente, H age no gráfico de f em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Podemos considerar cada h_x em $GL_p(\mathbb{R})$, ou seja, h_x linear, obtendo a mesma equivalência de germes.

$K = \mathcal{R} \cdot \mathcal{E}$ (produto semi-direto). Dois germes f e g são K -equivalentes se existem germes H no grupo $\mathcal{E}$ e h no grupo $\mathcal{R}$, tal que $(H.f) \circ h = g$.

O grupo K é também chamado grupo de contato, e a K -equivalência é a equivalência de contato.

Todas as equivalências anteriores, de ações de grupos de germes de difeomorfismos de classe C^∞ em $C(n,p)$, têm definição correspondente para germes de difeomorfismos analíticos (resp. holomorfos) agindo em $A(n,p)$ (resp. $O(n,p)$).

Analogamente, consideramos a ação do grupo de germes de difeomorfismos de classe C^ℓ , com $0 \leq \ell < \infty$, no espaço dos germes de classe C^∞ (resp. analíticos ou holomorfos). Neste caso, temos a C^ℓ -G-equivalência.

.§.2. Critério Infinitesimal

Um germe de função f é k -G-determinado se o conjunto dos germes com o mesmo k -jato de f está contido na órbita $G.f$.

Considerando este conjunto e esta órbita como "variedades" de dimensão infinita, precisamos de um resultado análogo ao seguinte:

.2.1. Lema: [W, pag. 484]

Sejam: G um grupo de Lie, M uma variedade C^∞ e $\alpha: G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo C^∞ . Consideremos uma subvariedade C^∞ conexa $V \subset M$. Então, V está em uma órbita de α se e somente se:

a) Para todo $v \in V$, $T_v(G.v) \supseteq T_v(V)$;

b) $\dim T_v(G.v)$ é a mesma para todo $v \in V$.

Consideremos a R-álgebra comutativa C_n , dos germes de funções C^∞ . Um resultado elementar nos mostra que $J^k f = 0 \Leftrightarrow f \in m_n^{k+1}$.

Para qualquer p , podemos identificar o conjunto dos germes $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ com o módulo livre C_n^p de rank p , e $J^k(n, p)$ como o produto de p cópias de C_n/m_n^{k+1} . Estas são nossas "variedades".

Agora, definimos os "espaços tangentes". Dada uma deformação $\{f_t\}$ de $f_0 = f$, o seu vetor tangente na origem será $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0}$.

Consideramos o conjunto dos campos de vetores ao longo de f , Θ_f , dado pelos germes de função ξ com $\Pi_p \circ \xi = f$.

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{df} & T(\mathbb{R}^p) \\ \pi_n \downarrow & \nearrow \xi & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

Se o germe f é a identidade de $\mathbb{R}^n$, temos o espaço Θ_n .

Ao fazermos a composição com df , obtemos a função:

$$tf: \Theta_n \rightarrow \Theta_f$$

que é um homomorfismo entre C_n -módulos livres, tendo por matriz, a matriz jacobiana da função f .

Para tornar mais precisa a idéia de que Θ_f é o espaço tangente a $C(n, p)$ em f , exibimos os elementos de Θ_f como classes de equivalência de caminhos diferenciáveis por f em $C(n, p)$.

2.2. Definição:

Um caminho diferenciável por f , é um germe de aplicação C^∞ , $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times 0)$, que preserva o nível $\mathbb{R}$, definida por $F(x, t) = (f_t(x), t)$, tal que: $f_0(x) = f(x)$.

Os módulos e homomorfismos definidos para f , podem ser definidos para o germe F .

Será conveniente considerarmos o conjunto dos campos de vetores ao longo de F , que preservam o nível $\mathbb{R}$, isto é, campos com a $\mathbb{R}$ componente unitária, que será indicado por Ψ_F .

Analogamente, os campos Ψ_{n+1} e Ψ_{p+1} representam os campos em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times 0)$ e $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times 0)$ com $\mathbb{R}$ componente unitária.

Indicaremos por $\partial_0 F(x)$ o campo $\partial F(x, 0) \in \Theta_f$
 [ou seja, $\partial_0 F(x) = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0}$]

Uma forma de caracterizar o espaço tangente a um germe f , em relação a um grupo G , é considerar o subconjunto de Θ_f formado pelos elementos $\partial_0 F$, onde F é um caminho por f contido na G -órbita de f .

2.3. Definição:

Um caminho diferenciável por f , $F(x, t) = (f_t(x), t)$ com $t \in I$, e $f_0(x) = f(x)$ é $\mathcal{A}$ -trivial, se existem caminhos diferenciáveis:

$H: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times I)$ e $K: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times I)$
 definidos por:

$$\begin{aligned} H(x, t) &= (h_t(x), t), \quad h_0(x) = \text{Id}_{(\mathbb{R}^n, 0)}(x) = x \\ \text{e} \\ K(y, t) &= (k_t(y), t), \quad k_0(y) = \text{Id}_{(\mathbb{R}^p, 0)}(y) = y \end{aligned}$$

tais que $K \circ F \circ H^{-1} = f \times \text{Id}_{(\mathbb{R}, I)}$.

A proposição abaixo caracteriza caminhos $\mathcal{A}$ -triviais:

2.4. Proposição: (Thom-Levine)

Um caminho diferenciável por f , é $\mathcal{A}$ -trivial, se e somente se:

$$\partial F^a \in tF^a(m_{n, n+1} \Psi) + wF^a(m_{p, p+1} \Psi), \quad (*)$$

para $\forall a \in I$ onde F^a é a restrição de F a $0_x a$ e Ψ_{n+1} indica, para cada a , o $C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_x a)$ -módulo constituído pelos campos em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_x a)$ com $\mathbb{R}$ -componente nula.

Fazendo $t = 0$ em (*), obtemos:

$$\partial_0 F \in \text{tf}(m_{n,n} \Theta) + \text{wf}(m_{p,p} \Theta)$$

onde $\text{wf}: \Theta_p \rightarrow \Theta_f$ é definida por $\text{wf}(\eta) = \eta \circ f$.

Logo, $\text{tf}(m_{n,n} \Theta) + \text{wf}(m_{p,p} \Theta)$ é o candidato natural a espaço tangente para a $\mathcal{A}$ -órbita de f .

Como os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são subgrupos de $\mathcal{A}$, definimos:

2.5. Definição:

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}(f) &= \text{tf}(m_{n,n} \Theta), \\ T\mathcal{L}(f) &= \text{wf}(m_{p,p} \Theta); \\ T\mathcal{A}(f) &= T\mathcal{R}(f) + T\mathcal{L}(f) \end{aligned}$$

Para o grupo $\mathcal{E}$, seja $f^*(m_p) \cdot \Theta_f$ o módulo formado por p cópias do ideal gerado pelas coordenadas de $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Seja $\gamma(x, t) = (x, f_t(x), t)$ com $f_0(x) = f(x)$ caminho diferenciável e $\gamma_0(x, 0) = (x, f(x), 0)$ o caminho constante.

2.6. Definição:

γ é $\mathcal{E}$ -trivial, se existe germe de difeomorfismo C^∞ :

$$H: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times 0 \times 0) \text{ com}$$

$$H(x, y, t) = (x, h(x, y, t), t) \text{ e } h(x, 0, t) = 0, \text{ tal que } H_0 \gamma(x, t) = \gamma_0(x, t).$$

Da definição de $\mathcal{E}$, segue-se que as $\mathcal{E}$ -deformações em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times 0)$ devem ser verticais, isto é, são elementos $v(x, y)$ de Θ_{π_2} , onde π_2 é a projecção usual. Além disso, $v(x, 0) = 0$.

Como $v(x, f(x)) \in f^*(m_p) \Theta_f$, podemos enunciar a seguinte:

.2.7. Proposição:

São equivalentes as seguintes afirmações:

i) γ é trivial

$$\text{ii) } \frac{\partial f}{\partial t} = \pi_2(\partial \circ \gamma) \in f_t^*(m_p) \Theta_{f_t}$$

$$\text{iii) } f_t^*(m_p) \Theta_{f_t} = f^*(m_p) \Theta_f$$

para todo t numa vizinhança do zero.

Fazendo $t=0$ em (ii) obtemos: $\frac{\partial f}{\partial t}|_{t=0} \in f^*(m_p) \Theta_f$.

Lembrando que $\mathcal{K} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{E}$, definimos:

$$T\mathcal{E}(f) = f^*(m_p) \cdot \Theta_f;$$

$$T\mathcal{K}(f) = T\mathcal{R}(f) + T\mathcal{E}(f);$$

Para cada G , a codimensão de f é definida por:

$$d(f, G) = \dim_{\mathbb{R}} (m_n \cdot \Theta_f / TG(f))$$

.2.8. Teorema: Critério Infinitesimal. [G.Tese].

Para cada f e G , são equivalentes:

- a) f é G -determinada;
- b) para algum k , $TG(f) \supset m_n^k \Theta_f$;
- c) $d(f, G) < \infty$;

A proposição abaixo estende os resultados anteriores para o caso analítico (real ou complexo).

.2.9. Proposição: [G.Tese].

Se f é um germe de função analítico real, então, para cada G , temos as seguintes equivalências:

- i) f é G -finito como germe $\mathbb{C}^\infty$; $\hat{f}$
- ii) f é G -finito como germe analítico real;
- iii) A complexificação de f é G -finita como germe holomorfo.

.§.3. Critério Geométrico

No caso complexo, existem condições geométricas equivalentes à G -determinação finita.

Um germe f é G -estável se $TG(f) = \Theta(f)$,

Um germe f é $\mathcal{R}$ -estável em 0 se e somente se df_0 é sobrejetiva. Portanto, f é $\mathcal{R}$ -estável para todo ponto fora do conjunto dos pontos críticos de f , que será denotado por $\Sigma(f)$.

f é $\mathcal{C}$ -estável em x , se e somente se $f(x) \neq 0$. Então f não é $\mathcal{C}$ -estável em $f^{-1}(0)$.

Consequentemente, o conjunto dos pontos em que f não é $\mathcal{K}$ -estável é a intersecção $\Sigma(f) \cap f^{-1}(0)$.

.3.1. Teorema: Critério Geométrico. [W].

Um germe de função holomorfa: $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é G -finito, se e somente se, existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^n$, tal que, para todo subconjunto $S \subset U - \{0\}$ finito, o multigerme de f em S é G -estável.

Como consequência desse teorema tem-se:

- i) f é $\mathcal{R}$ -finito $\Leftrightarrow \Sigma(f) = 0$.
- ii) f é $\mathcal{C}$ -finito $\Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$.
- iii) f é $\mathcal{K}$ -finito $\Leftrightarrow \Sigma(f) \cap f^{-1}(0) = 0$.

A caracterização da $\mathcal{A}$ -estabilidade depende das dimensões (n, p) . Tem-se por exemplo:

.3.2. Proposição: [W]

Se $p \geq 2n$, uma função holomorfa f é $\mathcal{A}$ -finita se e somente se existe uma vizinhança U de 0 tal que $f|_{U - \{0\}}$ é um mergulho.

No caso real, a condição geométrica do Teorema 3.1 é necessária, mas não é suficiente para garantir a G -determinação finita ($G = \mathcal{R}, \mathcal{E}$ ou $\mathcal{K}$). Por exemplo: $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ e $\Sigma(f) = \{0\}$, mas $\Sigma(f_{\mathbb{C}}) \neq \{0\}$. Logo $f_{\mathbb{C}}$ (e portanto f) não é $\mathcal{R}$ -finito.

No entanto, as condições geométricas implicam na C^{ℓ} - G -determinação de f ($0 \leq \ell < \infty$).

Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe de função analítica.

.3.3. Proposição: C^{ℓ} -determinação finita. [W]

Para qualquer $0 \leq \ell < \infty$,

i) f é C^{ℓ} - $\mathcal{R}$ -finito $\Leftrightarrow \Sigma(f) = 0$.

ii) f é C^{ℓ} - $\mathcal{E}$ -finito $\Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$.

iii) f é C^{ℓ} - $\mathcal{K}$ -finito $\Leftrightarrow \Sigma(f) \cap f^{-1}(0) = 0$.

Para a demonstração desta proposição, o resultado abaixo é fundamental.

Indiquemos por :

$I_{\mathcal{R}}(f) = J_f$, o ideal de C_n gerado pelos menores $p \times p$ da matriz jacobiana de f .

$I_{\mathcal{E}}(f) = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$, o ideal de C_n gerado pelos germes de função $f_1, f_2, \dots, f_p$

$$I_{\mathcal{K}}(f) = I_{\mathcal{R}}(f) + I_{\mathcal{E}}(f)$$

.3.4. Proposição: [W]

Para $G = \mathcal{R}, \mathcal{E}$ ou $\mathcal{K}$, são equivalentes:

(a) $I_G(f)$ é elíptico, isto é, $I_G(f) \geq m_n^\infty C_n$.

(b) Condição de Lojasiewicz: existe uma função ϕ , definida em uma vizinhança de U de 0 , com germe em $I_G(f)$, tal que $|\phi(x)| \geq C|x|^\alpha$ em U , para algum $C > 0$ e algum $\alpha > 0$.

(c) Os geradores g_i de $I_G(f)$ satisfazem a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^p (g_i)^2 \geq C|x|^\alpha \text{ em uma vizinhança } U \text{ de } 0.$$

Se os geradores de $I_G(f)$ são analíticos, as condições acima são equivalentes a:

i) $\Sigma(f) = 0$ se $G = \mathcal{R}$.

ii) $f^{-1}(0) = 0$ se $G = \mathcal{C}$.

iii) $\Sigma(f) \cap f^{-1}(0) = 0$ se $G = \mathcal{K}$.

.§.4. Equisingularidade de Whitney

As definições e resultados deste parágrafo estão em Gaffney [G.] e Teissier [T1] ou [T2].

A questão fundamental no estudo de equisingularidades, é descobrir quando um conjunto X algébrico sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou analítico, pode ser considerado equisingular ao longo de um subconjunto não singular $Y \subset X$ em um ponto $0 \in Y$.

Vamos considerar germes de hipersuperfícies analíticas reais ou complexas reduzidas $(X, 0) \subset (\mathbb{A}^{n+1}, 0)$.

.4.1. Definição:

Trivialidade Topológica. (T.T.)

X é topologicamente trivial ao longo de Y em 0 , se existe uma retração $r: (\mathbb{A}^{n+1}, 0) \rightarrow (Y, 0)$ e um germe de homeomorfismo dos pares

$$(k^{n+1}, X) \approx [r^{-1}(0) \times Y, (r^{-1}(0) \cap X) \times Y]$$

compatível com r , isto é, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} k^{n+1} & \approx & r^{-1}(0) \times Y \\ & \searrow r \quad \swarrow \pi_2 & \\ & Y & \end{array}$$

.4.2. Condições de Whitney:

Dizemos que X tem uma estratificação de Whitney, se existe uma partição de X localmente finita em subespaços não singulares Y_α localmente fechados, com as seguintes propriedades: $\therefore$

$$\text{i) } \bar{Y}_\alpha \text{ e } \bar{Y}_\alpha - Y_\alpha \text{ são subespaços fechados de } X, \dim(\bar{Y}_\alpha - Y_\alpha) < \dim Y_\alpha, \\ \bar{Y}_\alpha \cap Y_\beta \neq \emptyset \Rightarrow Y_\beta \subset \bar{Y}_\alpha.$$

ii) Se $Y_\beta \subset \bar{Y}_\alpha$, as seguintes condições de incidência acontecem:

(condições de Whitney)

a) Para qualquer sequência de pontos $y_1 \in Y_\alpha$ convergindo para um ponto $y \in Y_\beta$ e tal que as direções dos espaços tangentes T_{Y_α, y_1} convergem para um hiperplano T , temos: $T_{Y_\beta, y} \subset T$.

b) Dadas sequências de pontos $y_1 \in Y_\alpha$ e $z_1 \in Y_\beta$ com $y_1 \rightarrow y$ e $z_1 \rightarrow y$ e tais que T_{Y_α, y_1} converge para um plano T , e a direção da secante $\overline{z_1 y_1} \in k^{n+1}$ converge (em $\mathbb{P}^n$) para ℓ , temos $\ell \subset T$.

Se y é fixado, diremos "condições de Whitney em y ".

iii) O conjunto X^0 dos pontos regulares de X é um estrato (não é necessária a conexão para ser um estrato) e todos os outros estratos estão em seu fecho.

4.3. Definição:

O par (X, Y) é W -equisingular em $y=0$ se Y é um estrato de alguma estratificação de Whitney de X , em uma vizinhança do zero.

A W -equisingularidade do par (X, Y) , implica na existência de uma vizinhança tubular T_Y de Y , com retração $\pi_Y: T_Y \rightarrow Y$ tal que $\pi_Y: [T_Y, T_Y \cap \bar{X}, Y] \rightarrow Y$ é um fibrado localmente topologicamente trivial com fibras de tipo cone.

A demonstração deste fato consiste em mostrar que qualquer campo de vetores ξ em Y se estende a um campo controlado η em T_Y , cujo controle garante sua integrabilidade, e tal que $\eta|_X$ é tangente ao longo de X e $\partial\pi_Y \circ \eta = \xi \circ \pi_Y$. [Gibson e outros].

CAPÍTULO 1

Germes pré-quase-homogêneos

Neste capítulo introduzimos o conceito de germes pré-quase-homogêneos, e obtemos resultados de determinação finita para esta classe de germes.

§.1. Definições e resultados

1.1. Definição:

Um germe $f: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$, onde $f = (f_1, \dots, f_p)$ é um germe quase-homogêneo de tipo $(r_1, r_2, \dots, r_n; d_1, \dots, d_p)$, se:

$$f(\lambda^1 x_1, \lambda^2 x_2, \dots, \lambda^n x_n) = (\lambda^{d_1} f_1(x), \lambda^{d_2} f_2(x), \dots, \lambda^{d_p} f_p(x))$$

Neste caso, chamamos ao valor d_i , de filtração de f_i em relação aos pesos $(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Notação: $\text{fil}(f) = \text{fil}(f_1, f_2, \dots, f_p) = (d_1, d_2, \dots, d_p)$

Fixados os pesos $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ das variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ podemos definir a filtração de um elemento $\theta \in A(n, p)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ por:

$$\text{fil}(\theta) = (\text{fil}(\theta_1), \text{fil}(\theta_2), \dots, \text{fil}(\theta_p)), \text{ com } \text{fil}(\theta_j) = \min_{\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \right\}$$

$$\text{onde } j^{\infty} \theta_j = \sum a_{j\alpha} x^{\alpha}, \text{ e } x^{\alpha} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

.1.2. Definição:

Um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ é um germe G -semi-quase-homogêneo, com $G = \mathcal{A}$ ou $\mathcal{K}$, se g admite uma decomposição do tipo $g = f + k$, onde f é um germe-quase-homogêneo, G -finitamente determinado de tipo

$$(r_1, \dots, r_n; d_1, \dots, d_p),$$

e k é um germe $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ com $\text{fil}(k_i) > d_i$

A classe de germes que introduzimos neste trabalho é a dos germes pré-quase-homogêneos:

.1.3. Definição:

Um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ é pré-quase-homogêneo se g pode ser decomposto da forma $g = f + h$, com f quase-homogêneo, G -finito e $\text{fil}(h_{i1}) < f_i$ para todas as funções f_i , $i=1, \dots, p$ e todos os monômios h_{i1} de cada h_i .

.1.4. Definição:

$g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ é um germe misto se $g = f+h+k$, tal que $f+h$ é pré-quase-homogêneo e $f+k$ é semi-quase-homogêneo.

A questão da G -determinação finita de germes semi-quase-homogêneos foi considerada por diversos autores, por exemplo, [A] para $G = \mathcal{R}$, e [D1] para a classe dos subgrupos geométricos de $\mathcal{A}$.

Na proposição .1.5., estabelecemos resultado análogo para a classe dos germes G -pré-quase-homogêneos, com $G = \mathcal{A}$ ou $\mathcal{K}$. Este resultado é surpreendente e justifica o estudo que estamos propondo para esta classe especial de germes.

.1.5. Proposição:

Todo germe pré-quase-homogêneo é finitamente determinado.

Veremos no exemplo 2.3. que a extensão deste resultado para a classe dos germes G -mistos não é em geral verdadeira.

Observação:

Quando não houver dúvidas quanto ao grupo G a ser considerado, omitiremos a letra G das definições acima.

.§.2. Prova da proposição .1.5.

A prova desta proposição segue dos seguintes resultados:

.2.1. A propriedade de G -determinação finita é aberta, ($G=A, K$).

Mais precisamente, seja $f(t, x): k^{n+1}, 0 \rightarrow k^p, 0$, com $f(t, 0) = 0$ e $f(0, x) = f_0(x)$ G -finita. Então: $f_t: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ é G -finita para todo t suficientemente pequeno.

Para uma prova no caso $G=A$, ver [D2 pag.306]. O caso $G=K$ é de fácil demonstração.

.2.2. Lema:

Sejam: $f: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ um germe quase-homogêneo de tipo $(r_1, \dots, r_n; d_1, \dots, d_p)$, e germes $\theta_{ij}: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ quase-homogêneos de tipo $(r_1, \dots, r_n, d_{ij})$ com $d_{ij} \neq d_i$, e constantes $\alpha_{ij} \in k$; $i=1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q_i$.

Então a família de germes de funções $f_t: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ dada por

$$f_t = (f_1 + \sum_{j=1}^{q_1} e^{(d_{1j}-d_1)t} \alpha_{1j} \theta_{1j}; f_2 + \sum_{j=1}^{q_2} e^{(d_{2j}-d_2)t} \alpha_{2j} \theta_{2j}; \dots;$$

$$; f_p + \sum_{j=1}^{q_p} e^{(d_{pj}-d_p)t} \alpha_{pj} \theta_{pj}) \text{ é G-trivial.}$$

Demonstração:

Sejam ζ e η germes de campos de vetores em $(\mathbb{R}^n, 0)$ e $(\mathbb{R}^p, 0)$ respectivamente definidos por:

$$\zeta = \sum_{i=1}^n r_i \cdot x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } \eta = - (d_1 \cdot y_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y_1}, d_2 \cdot y_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, d_p \cdot y_p \cdot \frac{\partial}{\partial y_p})$$

onde r_i é o peso da variável x_i , e d_j é o peso da variável y_j .

Para ζ e η , verifica-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = t f_t(\zeta) + \eta \circ f_t$$

Do teorema de Thom-Levine, obtém-se a $\mathcal{A}$ -trivialidade (e portanto a $\mathcal{K}$ -trivialidade) de f_t . ■

Observemos que a hipótese de G-determinação finita de f_t não é necessária neste lema.

O exemplo abaixo ilustra este resultado.

Exemplo:

Sejam: $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe quase-homogêneo e monômios θ_1 e θ_2 a n -variáveis, com $\text{fil}(\theta_1) \neq \text{fil}(f)$, podemos considerar o espaço dos germes do tipo $f + a\theta_1 + b\theta_2$, com a e b variando no conjunto dos reais.

Chamando $\text{fil}(f) = d$ e $\text{fil}(\theta_1) = d_1$, representemos o gráfico da família $f_t = f + e^{(d_1-d)t}\theta_1 + e^{(d_2-d)t}\theta_2$; $t \in \mathbb{R}$ nas seguintes situações:

a) $d < d_1 < d_2$

b) $d_1 < d_2 < d$

c) $d_1 < d < d_2$

Podemos observar que se $\text{fil}(f) > \text{fil}(\theta_1)$ ou $\text{fil}(f) < \text{fil}(\theta_1)$ para $i = 1, 2$, f pertence ao fecho da curva f_t .

Isto acontece para germes pré-quase-homogêneos ou germes semi quase-homogêneos. É este fato que nos permite provar a proposição 1.5.

Demonstração da proposição .1.5.

Seja $g = f+h$, com $\text{fil}(h_{11}) < d_1$. Então, f pertence ao fecho da família f_t , pois $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{1t} = f_1$.

Como G-determinação finita é uma condição aberta, e f é G-finita, existe um $T > 0$, tal que f_t é G-finita para $\forall t > T$.

Usando o lema 2.2, obtemos que f_t é G-finita para $\forall t$.

Em particular, quando $t = 0$ temos $f_0 = f + h = g$, é G-finita. ■

No exemplo abaixo, mostramos que a extensão deste resultado para a classe dos germes mistos não é em geral verdadeira.

.2.3. Exemplo: $g: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$

$$g(x, y) = (x^2 + y)(x^2 - y^2)^2$$

$g = f + h$, onde $f = x^6 + y^5$, é quase-homogênea de tipo $(5, 6; 30)$,

$$h = -2x^2y^3 + x^4y, \text{ com } \max. \text{ fil}(h) = 28 \text{ e}$$

$$k = 2x^4y^2 + x^2y^4, \text{ com } \text{fil}(k) = 32.$$

O germe f é $\mathcal{R}$ -finitamente determinado pois $\Sigma(f_{\mathbb{C}}) = \{(0, 0)\}$, onde $f_{\mathbb{C}}$ é a complexificação de f . No entanto g não é $\mathcal{R}$ -finitamente determinado, pois $\Sigma(g_{\mathbb{C}}) \neq \{(0, 0)\}$.

.§.3. Aplicações:

A aplicação abaixo da proposição .1.5., foi sugerida por J.W. Bruce e faz parte do artigo "A Note on Determinacy" [B R S].

Vamos apresentar uma prova de que o conjunto dos germes não K-suficientes é de codimensão infinita. Esta demonstração é mais simples e direta do que a usual, que usa o teorema de Sard [W].

Para o grupo $\mathcal{A}$, os pares (n, p) para os quais germes não $\mathcal{A}$ -finitamente determinados $f: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$ formam conjunto de codimensão infinita foram determinados por du Plessis em [P]. Usando a proposição.1.5. apresentamos uma prova direta para alguns pares de dimensão, (n, p) .

.3.1.:0 caso K

Nossa primeira aplicação é para a K-determinação.

.3.1.1. Proposição:

K-determinação finita acontece em geral.

Demonstração:

Como os germes não K-finitos formam um conjunto proalgébrico, temos somente que produzir para cada r -jato z , um germe K-finito f , com $j^r f = z$. Isto é feito normalmente aplicando o teorema de Sard, mas usando o Teorema 1 podemos determinar f explicitamente e usar a proposição .1.5. para obter o resultado. Precisamos somente descobrir um germe homogêneo de grau $r+1$, que seja K-finito.

Se $n \leq p$, a função

$$h_{r+1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{r+1}, \dots, x_n^{r+1}, 0, \dots, 0)$$

é K-finita, pois $h_{r+1}^{-1} \{0\} = \{0\}$.

Se $n \geq p$, basta definirmos uma função homogênea $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$; tal que $f^{-1}(0) \cap \Sigma(f) = \{0\}$ (Proposição 3.4. capítulo 0).

Definimos:

$$h(x) = (\lambda_1^0 x_1^{r+1} + \dots + \lambda_n^0 x_n^{r+1}, \lambda_1^1 x_1^{r+1} + \dots + \lambda_n^1 x_n^{r+1}, \dots, \lambda_1^{p-1} x_1^{r+1} + \dots + \lambda_n^{p-1} x_n^{r+1})$$

com os λ_i reais distintos entre si e distintos do zero.

Vamos provar por indução em $n-p$, que h é singularidade de tipo finito. Se $n = p$, para λ_i genéricos, então h é equivalente a $(x_1^{r+1}, \dots, x_n^{r+1})$ através de uma mudança de coordenadas na meta.

Agora suponhamos provados os casos $n-p \leq r$ e que $n-p = r+1$. Se h não é $\mathcal{K}$ -finito, podemos descobrir um $x \neq 0$, $x \in h^{-1}(0) \cap \Sigma(h)$, e portanto $\text{rank.} dh(x) < p$. Olhando para o primeiro menor $p \times p$ de $dh(x)$ deduzimos que $x_1 x_2 \dots x_p = 0$. Sem perda de generalidade suponhamos $x_1 = 0$. Considerando $\bar{h} = h|_{\{x_1 = 0\}}$ e $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$, então $\bar{h}(\bar{x}) = 0$ e $d\bar{h}(\bar{x})$ tem rank menor que p , contrariando nossa hipótese. ■

.3.2: O caso A

A aplicação do método para o grupo $\mathcal{A}$ vai depender da possibilidade de garantir a existência de germes quase-homogêneos $\mathcal{A}$ -finitos de grau arbitrariamente alto. Como sabemos, germes quase-homogêneos $\mathcal{A}$ -finitamente determinados são raros, e exibí-los é, em geral, uma tarefa difícil.

O resultado será obtido para os seguintes pares de dimensão (n, p) : $(n, 1)$, $(2, 2)$ e (n, p) com $p \geq 2n$.

Os exemplos relevantes para estes pares de dimensão são apresentados a seguir.

a) $p=1$:

$f(x) = x_1^{r+1} + \dots + x_n^{r+1}$. É imediato que o número de Milnor $\mu(f)$ é finito e portanto, f é $\mathcal{A}$ -finito.

b) $n=p=2$

Germes quase-homogêneos $\mathcal{A}$ -finitamente determinados $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ foram estudados em [G M]. Segue de [G M], que se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são polinômios homogêneos de grau r e $r+1$, genéricos, então $(f,g): \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ é $\mathcal{A}$ -finito.

c) (n,p) $p \geq 2n$:

Nestas dimensões, uma função holomorfa f é $\mathcal{A}$ -finita se existe uma vizinhança U de 0 tal que $f|_{U-\{0\}}$ é um mergulho.

Quando $p=2n$, definimos $f_\beta: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^{2n}, 0$, $\beta \in \mathbb{C}^n$, por:

$$f_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r, f_1(x), \dots, f_n(x))$$

com,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \beta_1 x_1^{r+1} + x_2^{r+1} + \dots + x_n^{r+1} \\ f_2(x) &= x_1 x_n^r + \beta_2 x_2 x_1^r + x_3 x_2^r + \dots + x_n x_{n-1}^r \\ f_3(x) &= x_1 x_{n+1}^r + x_2 x_{n-1}^r + \beta_3 x_3 x_1^r + \dots + x_n x_{n-2}^r \\ &\vdots \\ f_n(x) &= x_1 x_2^r + x_2 x_3^r + \dots + \beta_n x_n x_1^r \end{aligned}$$

Vamos mostrar que para quase todo valor de $\beta \in \mathbb{C}$, $f_\beta|_{U-\{0\}}$ é um mergulho.

Verifica-se facilmente que $\Sigma(f_\beta) = \{0\}$ para quase todo valor de β .

O conjunto dos pontos duplos de f , é definido por:

$$D(f_\beta) = \{(x, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n - \Delta, \text{ tal que } f_\beta(x) = f_\beta(u)\}, \text{ onde } \Delta \text{ é a diagonal}$$

de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Para obter o resultado, é suficiente mostrar que $D(f_\beta) = \emptyset$ para quase todo valor de β .

Da definição de f_β , tem-se que $u_i = \alpha_i x_i$, $i = 1, \dots, n$ onde α_i é uma r -ésima raiz da unidade. Substituindo $u_i = \alpha_i x_i$ em $f_j(x) = f_j(u)$, $j = 1, \dots, n$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \beta_1 (1 - \alpha_1) x_1^{r+1} + (1 - \alpha_2) x_2^{r+1} + \dots + (1 - \alpha_n) x_n^{r+1} &= 0 \\ (1 - \alpha_1) x_1 x_k^r + \beta_2 (1 - \alpha_2) x_2 x_1^r + \dots + (1 - \alpha_n) x_n x_{n-1}^r &= 0 \\ \vdots & \\ (1 - \alpha_1) x_1 x_2^r + (1 - \alpha_2) x_2 x_3^r + \dots + \beta_n (1 - \alpha_n) x_n x_1^r &= 0 \end{aligned}$$

Então, para uma n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ fixa de raízes r -ésimas da unidade, definimos o germe $\Phi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ nas variáveis $(x_1, \dots, x_n)$ e $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, tendo por funções coordenadas, as equações do sistema anterior.

Se $\alpha_i \neq 1$, $i = 1, \dots, n$; $\Phi/(\mathbb{C}^n - \{0\}) \times \mathbb{C}^n$ é uma submersão, pois, $\det d\Phi_x = 0$ é uma hipersuperfície que não contém os eixos x_i e

$$\det d\Phi_\beta = (1 - \alpha_1) x_1^{nr+1} \cdot \prod_{i=2}^n (1 - \alpha_i) x_i = 0.$$

Portanto, usando o lema 2.2 e [G.G. pag.52] para quase todo valor de β , $\Phi_\beta: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de difeomorfismo.

Logo, $\Phi_\beta(0) = \{0\}$.

Para completar o argumento, precisamos analisar o que acontece quando algum $\alpha_i = 1$. Neste caso, Φ não é uma submersão.

Vamos assumir $\alpha_1 = 1$, então:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, \beta) &= (1-\alpha_2)x_2^{r+1} + (1-\alpha_3)x_3^{r+1} + \dots + (1-\alpha_n)x_n^{r+1} \\
\Phi_2(x, \beta) &= \beta_2(1-\alpha_2)x_2x_1^r + \dots + (1-\alpha_n)x_nx_{n-1}^r \\
&\vdots \\
\Phi_n(x, \beta) &= (1-\alpha_2)x_2x_3^r + \dots + \beta_n(1-\alpha_n)x_nx_1^r
\end{aligned}$$

Temos $\Phi_\beta^{-1}(0) = \{(x_1, 0, \dots, 0)\}$. De fato, assumindo $x_1 \neq 0$, a restrição de Φ ao espaço afim $x_1 = 1$ é:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, \beta) &= (1-\alpha_2)x_2^{r+1} + \dots + (1-\alpha_n)x_n^{r+1} \\
\Phi_2(x, \beta) &= \beta_2(1-\alpha_2)x_2 + (1-\alpha_3)x_3x_2^r + \dots + (1-\alpha_n)x_nx_{n-1}^r \\
\Phi_3(x, \beta) &= (1-\alpha_2)x_2x_n^r + \beta_3(1-\alpha_3)x_3 + \dots + (1-\alpha_n)x_nx_{n-2}^r \\
&\vdots \\
\Phi_n(x, \beta) &= (1-\alpha_2)x_2x_3^r + \dots + \beta_n(1-\alpha_n)x_n
\end{aligned}$$

Então, se $\alpha_1 \neq 1$; $\beta_i \neq 0$ para $i \geq 2$, é possível mudar coordenadas na fonte tal que:

$$\Phi_\beta = [(\Phi_\beta)](x) + \text{termos de ordem superior}; x_2; x_3; \dots; x_n$$

e portanto $\Phi_\beta(x) = 0$ se $x = (x_1, 0, \dots, 0)$.

Se $x_1 = 0$, assumimos $x_2 \neq 0$ e com procedimento análogo mostramos que não há solução não nula de $\Phi_\beta(x) = 0$ satisfazendo tais condições.

Em geral, se $\alpha_i = 1$ para algum i , $\Phi_\beta(x) = 0$ se e só se: $x = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$. Soluções deste tipo não aparecem no conjunto dos pontos duplos $D(f_\beta)$, e portanto segue que $D(f) = \emptyset$ para

quase todos os valores β . Assim, os germes f_β correspondentes são $\mathcal{A}$ -finitos.

No caso em que $p > 2n$, basta definirmos uma função cujas primeiras coordenadas são $f_1, f_2, \dots, f_n$ como acima, e as demais componentes são nulas.

Para os pares (n, p) considerados, é possível aplicar a proposição abaixo para mostrar que $\mathcal{A}$ -determinação finita acontece em geral.

3.2.1. Proposição:

Fixado um par (n, p) , suponhamos que exista um $s \geq 1$ tal que para cada r suficientemente grande podemos descobrir um $(s+r)$ -jato h_r em $m^{r+1}.C(n, p)$, quase-homogêneo e $\mathcal{A}$ -finito. Suponhamos também que para pesos fixados, todos os jatos em $J^r(n, p)$ tenham grau menor que h_r .

Então $\mathcal{A}$ -determinação finita acontece em geral para germes $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$, ou para germes analíticos de $\mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$.

Demonstração: O resultado é uma aplicação imediata da proposição .1.5 e do fato .2.1. ■

.3.3 Na proposição seguinte vamos novamente usar a proposição 1.5 para mostrar que uma variedade real definida por um germe $\mathbb{C}^0\text{-}\mathcal{K}$ finitamente determinado é topologicamente equivalente a uma variedade definida por um germe $\mathcal{K}$ -finito.

.3.3.1: Proposição:

Seja $h: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$, $n > p$, um germe $\mathcal{K}\text{-}\mathbb{C}^0\text{-}\mathcal{K}$ -finito

Então existe um germe g , $j^\mathcal{K}(g) = j^\mathcal{K}(h)$, $\mathcal{K}$ -finito, $\mathbb{C}^0\text{-}\mathcal{K}$ -equivalente a h .

Demonstração:

Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um polinômio homogêneo de grau $\Delta > r$ e $\mathcal{K}$ -finito. Então o germe $g = f + h$ é pré-quase-homogêneo, e portanto $\mathcal{K}$ -finito. Como h é r - C^0 - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, e $\text{grau}(h) > r$, $g = f + h$ é C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalente a h . ■

.3.3.2: Corolário:

A variedade definida por $h^{-1}(0)$ é topologicamente equivalente à variedade definida por $g^{-1}(0)$.

.3.3.3: Observações:

(1) Para uma outra aplicação da proposição .1.5., ver o artigo: "Euler characteristics of real varieties" de J. W. Bruce.

(2) No caso real, seria interessante analisar a possibilidade de estender a proposição .1.5. para germes de tipo $g = f+h$, mas apenas C^0 - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados, ou seja, $\Sigma(f) \cap f^{-1}(0) = \{0\}$. Mas o fato .2.1. em geral, não é verdadeiro com esta hipótese mais fraca.

CAPÍTULO 2

Métodos para o estudo da equisingularidade

Seja $G: k^n \times k, 0 \rightarrow k, 0$ uma deformação de um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ que possui singularidade isolada ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e os germes respectivamente C^∞ , analíticos ou holomorfos). G define o germe de uma hipersuperfície $X_G = G^{-1}(0)$ em $(k^n \times k, 0)$. Neste capítulo, consideramos o problema fundamental de determinar quando tal deformação é topologicamente trivial, e, correspondentemente, quando o par $(X_G, \{0\} \times t)$ é Whitney-equisingular.

Quando $k = \mathbb{C}$, os resultados de Lê Dũng Tráng [Lê], e Timourian [Ti] demonstram que a constância do número de Milnor é condição necessária e suficiente para a trivialidade topológica de G . Este resultado, entretanto, não se verifica para $k = \mathbb{R}$. Além disto, o cálculo do número de Milnor é um problema difícil.

Entre outras abordagens para o problema, estão os trabalhos de Teissier, [T1], [T2] e [T3], que utilizam o conceito de fecho integral do ideal Jacobiano $J(G)$ para determinar a W-equisingularidade do par $(X_G, \{0\} \times t)$. Vários autores, entre os quais, Gaffney e Damon [D G], Kouchnirenko [K] e Yoshinaga [Y], consideram métodos baseados na filtração de Newton do germe g . Estes métodos usam certas condições de filtração para a deformação G para obter diretamente a trivialidade topológica de G .

Para germes não degenerados com relação ao seu diagrama de Newton, estes métodos garantem o mesmo resultado: qualquer deformação G por termos acima do diagrama de Newton de g é topologicamente trivial e o par $(X_G, \{0\} \times t)$ é W-equisingular.

O objetivo deste capítulo é discutir e comparar essas várias abordagens, e mostrar a equivalência entre os resultados. Mostramos que o método do fecho integral de Teissier fornece a ponte adequada para a comparação entre o método de Damon e Gaffney, que usa o poliedro de Newton de g , e a abordagem de Yoshinaga que usa o po

poliedro gradiente de g . Esta equivalência caracteriza um subconjunto do poliedro de equisingularidade de um germe com singularidade isolada, que é o conjunto convexo maximal de equisingularidade deste germe.

Os resultados deste capítulo dependeram de modo essencial das discussões com o Prof. Dr. Terence Gaffney e das conferências sobre fecho integral e equisingularidade por ele apresentadas no I.C.M.S.C.USP, durante sua visita em setembro de 1990.

.§.1. A filtração de Newton.

Consideremos $f: k^n, 0 \rightarrow k, 0$, um germe analítico.

Sejam: a) $\sum c_\alpha \cdot x^\alpha$, a série de Taylor de f .

$$b) \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x_i \geq 0\}.$$

Chamamos de semi-espaco definido por f , a um semi-espaco fechado $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

- i. Se $c_\alpha \neq 0$, então $\alpha \in H$.
- ii. Existem n termos α , independentes, com $c_\alpha \neq 0$ que estão no hiperplano ∂H (bordo de H).
- iii. ∂H intercepta cada semi-eixo de $\mathbb{R}^n$ fora da origem.

.1.1. Definição:

f é semi-cômodo se existe pelo menos um semi-espaco definido por f .

.1.2. Definição:

Dado f semi-cômodo, chamamos de poliedro de Newton de f e indicamos por $\Gamma^+(f)$ a intersecção de todos os semi-espacos definidos por f .

$\Gamma^+(f)$ = Poliedro de Newton de f .

.1.3. Definição:

O bordo de Newton de f , que será indicado por $\Gamma(f)$ é a união das faces compactas de $\Gamma^+(f)$ (fig.1)

fig.1

Notemos que cada face $\Delta \subset \Gamma(f)$ é decomposta em células de dimensão ℓ , $0 \leq \ell \leq n-1$.

fig.2

.1.4. Definição:

f é cômodo, se para cada j , existe um $m_j \neq 0$ tal que $x_j^{m_j}$ tem coeficiente não nulo na expansão de Taylor de f .

Para cada face $\Delta \subset \Gamma(f)$, chamamos de $C(\Delta)$ o cone de semi-raios partindo da origem e passando por Δ .

A decomposição formada pelos $C(\Delta)$ é chamada de decomposição de Newton.

1.5. Definição:

A filtração de Newton é definida via uma função linear por partes $\phi: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

- i. ϕ é linear em cada $C(\bar{\Delta})$.
- ii. ϕ assume valores positivos inteiros, nos pontos de $\mathbb{R}_+^n - \{0\}$, com coordenadas inteiras.
- iii. $\phi/\Gamma(f) = m$, para algum inteiro positivo m .

fig.3

Para qualquer monômio x^α , definimos $\text{fil}(x^\alpha) = \phi(\alpha)$.

SE $j^\infty f = \sum c_\alpha \cdot x^\alpha$, definimos $\text{fil}(f) = \min \{ \phi(\alpha) : c_\alpha \neq 0 \}$.

Definimos $A_\ell = \{ g : k^n, 0 \rightarrow k, 0 \text{ tal que } \text{fil}(g) \geq \ell \}$ (fig.3).

Estendemos a definição para A_{n+r} , definindo $\text{fil}(x^\alpha t^\beta) = \text{fil}(x^\alpha)$.

e analogamente, $A_{\ell,t} = \{ g : k^n \times k, 0 \rightarrow k, 0 \text{ tal que } \text{fil}(g) \geq \ell \}$.

Vamos fazer um abuso de notação e dizer que $x^\alpha \in C(\Delta)$ se $\alpha \in C(\Delta)$ usando a identificação natural entre x^α e α .

Podemos definir também os anéis $k[\Delta]$, $k[[\Delta]]$, consistindo dos polinômios, e das séries de potências, com monômios distintos de zero em $C(\bar{\Delta})$. Para estes anéis, a filtração de Newton associada é a restrição da respectiva filtração.

Fixada uma filtração de Newton associada a um germe f , definimos a parte inicial de um germe g , que será denotada por $\text{in}(g)$, como a parte da expansão de Taylor de g , cujos termos tenham filtração igual à $\text{fil}(g)$ e tal que:

$$\text{fil}(g - \text{in}(g)) > \text{fil}(g).$$

Para uma face $\Delta \in \Gamma(f)$, definimos :

$$(g|_{\Delta}) = \text{termos de } g \text{ contidos em } C(\bar{\Delta})$$

1.6. Exemplo: $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$

$$f(x, y) = x^5 + y^6$$

f é quase-homogênea de tipo $(6, 5; 30)$, e portanto o diagrama de Newton de f contém somente uma face Δ .

Se considerarmos o germe $\Theta(x, y) = x^2 + xy^3$, a filtração de Θ em relação a filtração de Newton fixada por f , é determinada pelo monômio x^2 , e $\text{fil}(\Theta) = 12$.

1.7. Definição:

Um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ é não degenerado em uma face $\Delta \in \Gamma(g)$, se:

$$\{x \in k^n / \frac{\partial(g|_{\Delta})}{\partial x_1} = \frac{\partial(g|_{\Delta})}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial(g|_{\Delta})}{\partial x_n} = 0\} \subseteq \{x_1 x_2 \dots x_n = 0\}$$

Um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ é não degenerado em relação ao seu diagrama de Newton, se $g|_{\Delta}$ é não degenerado para toda face $\Delta \subset \Gamma(g)$.

Ver [Y. pag. 804]

Quando $k = \mathbb{C}$ e g é um germe cômodo, g é não degenerado, se e somente se $\{ \text{in.} (x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}) |_{\Delta} \}$ gera um ideal de codimensão finita em $k[[\bar{\Delta}]]$ para cada face fechada $\bar{\Delta} \subset \Gamma(g)$. [K] e [D G].

.1.8. Exemplo: $g: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$

$$g(x, y) = x^5 + y^5 + x^2 y^2$$

O diagrama de Newton de g é formado por duas faces, cujos vértices são $\{x^5, x^2 y^2\}$ e $\{x^2 y^2, y^5\}$. Esta função é não degenerada, pois: $g|_{\Delta} = 0$, $x \cdot \frac{\partial g}{\partial x}|_{\Delta} = 0$ e $y \cdot \frac{\partial g}{\partial y}|_{\Delta} = 0$ não tem solução comum fora dos eixos coordenados para qualquer face do diagrama de Newton de g .

.1.9. Exemplo: $g: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$

$$g(x, y) = x^7 + y^7 + xy(x^2 - y^2)^2$$

Este germe é degenerado na face: cujos vértices são: $\{x^5 y, xy^5\}$ pois a curva $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Phi(t) = (t, t)$ é tal que $g|_{\Delta} \circ \Phi = 0$, $x \cdot \frac{\partial g}{\partial x}|_{\Delta} \circ \Phi = 0$ e $y \cdot \frac{\partial g}{\partial y}|_{\Delta} \circ \Phi = 0$.

Observação:

A filtração de Newton e os demais conceitos dados nesta secção podem ser estendidos a um germe $f \in C_n$, através de sua série de Taylor.

.§.2. O método dos campos de vetores controlados de Damon-Gaffney

Damon e Gaffney consideram em [D G] o problema da trivialidade topológica de famílias $G: k^n \times k^r, 0 \rightarrow k, 0$ utilizando um método baseado na filtração de Newton de g . A forma geral desse resultado é dada por uma condição de filtração envolvendo os termos deformados $\frac{\partial G}{\partial t}$ e a deformação G . O método consiste na construção de campos de vetores controlados, que serão denominados "campos de emenda local" (local patching data) em cada face do poliedro de Newton de g .

Quando certas propriedades de filtração da deformação se comportam bem em relação a este campo, a trivialidade topológica é provada pela resolução de equações locais.

Consideremos um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ semi-cômuto, C^∞ ou analítico quando $k=\mathbb{R}$ e holomorfo quando $k=\mathbb{C}$, definindo uma filtração ϕ a partir de seu diagrama de Newton.

Podemos definir uma filtração em Θ_n associada à filtração definida em C_n .

$$\text{Seja } \mathcal{V}_{\ell, x} = \left\{ \zeta \in A_{\ell+1} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right] : \zeta(A_k) \rightarrow A_{k+\ell} \right\}, \text{ onde } A_{\ell+1} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right]$$

é o $A_{\ell+1}$ -módulo gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Então $\{\mathcal{V}_\ell\}$ é uma filtração em Θ_n , o que torna Θ_n um C_n -módulo filtrado.

.2.1. Definição:

Um conjunto de emenda local (local patching data) para f , é formado por campos de vetores $\{\xi_{\Delta, \ell}\}$ definidos em cada face $\Delta \in \Gamma(f)$ tais que:

$$i) \xi_{\Delta, \ell} = \sum g_{\Delta, \ell, j} x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{onde } g_{\Delta, \ell, j} \in C_n$$

$$ii) \left\{ \text{in. } \xi_{\Delta, \ell}(f) /_{\Delta} \right\} \text{ gera um ideal de codimens\~ao finita em } k[[\bar{\Delta}]]$$

.2.2. Proposi\~ao: [D.G. pag.344]

Se $\left\{ x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\}$ gera um ideal de codimens\~ao finita em C_n , ent\~ao

existe um conjunto de emenda local para f .

Se f \u00e9 n\~ao degenerado em uma face Δ , os campos $x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}$ formam um conjunto de emenda local para esta face Δ .

Se f \u00e9 degenerada em uma face Δ , precisamos construir campos de vetores ξ_{ℓ} distintos dos campos $x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}$, para obter um conjunto de emenda local para esta face.

Para um conjunto $\{\xi_{\Delta, \ell}\}$ de emenda local de f , \u00e9 ainda necess\u00e1rio calcular o efeito da filtra\~ao sobre estes campos. Em [D G] isto \u00e9 feito usando a no\~ao de salto (jump).

Definimos:

$$jump(\xi_{\Delta, i}) = \text{fil}(\xi_{\Delta, i}(f)) - \min_j \left\{ \text{fil}(g_{\Delta, i, j} x_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}) \right\}.$$

Para cada face $\Delta \in \Gamma(f)$, definimos:

$$jump(\Delta) = \max \{ jump(\xi_{\Delta, i}) \}.$$

Para cada v\u00e9rtice $v \in \Gamma(f)$, definimos:

$$jump(v) = \max \{ jump(\Delta) \text{ tal que } \Delta \subset star(v) \}, \text{ onde}$$

$$star(v) = \{ \cup \Delta : v \in \Delta \}.$$

Como $f|_{\Delta}$ é quase-homogêneo, podemos supor $f|_{\Delta}$ de tipo $(r_1, \dots, r_n; d)$. Definimos a filtração de um monômio $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ em relação a este Δ , por:

$$\text{fil}_{\Delta}(x^{\alpha}) = \sum_i r_i \alpha_i.$$

Definimos também $\text{fil}_{\Delta}(x^{\alpha}) = \min_{\Delta \in \text{star}(v)} \text{fil}_{\Delta}(x^{\alpha})$, com $\Delta \in \text{star}(v)$.

Se $j^{\infty}h = \sum c_{\alpha} \cdot x^{\alpha}$, definimos $\text{fil}_{\Delta}(h) = \min \text{fil}_{\Delta}(x^{\alpha})$.

2.3. Definição:

Um germe θ satisfaz uma condição de salto para f , se:

$$\text{fil}_{\Delta}(\theta) \geq \text{fil}(f) + \text{jump}(v) \text{ para todos os vértices } v \in \Gamma(f) \text{ com } \Delta \in \text{star}(v)$$

2.4. Teorema: [D G, teo. 3, pag. 349]

Seja $F: k^{n+r}, 0 \rightarrow k, 0$ uma deformação de um germe f semi-cômulo com campo de emenda local $\{\xi_{\Delta, i}\}$, tal que:

i) $\text{fil}(\xi_{\Delta, i}(F)) = \text{fil}(\xi_{\Delta, i}(f))$ para todo Δ, i .

ii) Todos os $\frac{\partial F}{\partial t_j}$ satisfazem a condição de salto,

Então F é uma deformação topologicamente trivial.

Para demonstrar o teorema, Damon e Gaffney usam as condições (i) e (ii) da hipótese para garantir a existência de um nível cômulo do A_{ℓ} satisfazendo a equação:

$$\text{ver} \left[A_{\ell m, t} \right] \frac{\partial F}{\partial t_j} < A_{\ell m, t} \left\{ x_j \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\}$$

onde $\text{ver} \left[A_{\ell m, t} \right]$ indica o conjunto dos vértices do nível $A_{\ell m, t}$.

Esta condição permite a construção de equações localizadas

$$-\rho \cdot \frac{\partial F}{\partial t_j} = \xi'_j(F)$$

onde $\rho = \sum |x^\alpha|^2$, e os x^α são os vértices do nível A_ρ , e

$\xi'_j: k^n \times k^r \rightarrow k^n$ é um germe de campo de vetores com componente nula nas direções $\frac{\partial}{\partial t_j}$. Além disso, $\rho^{-1}\xi'_j$ é controlado por ρ ao longo de

$\frac{\partial}{\partial t_j}$. Isto é:

(a) $\rho^{-1}\xi'_j$ se estende a um campo contínuo numa vizinhança de 0, que se anula em $0 \times k^r$.

(b) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que: $|\xi'_j(\rho)| \leq C \cdot \rho^2$.

Estas condições garantem a integrabilidade dos campos $\rho^{-1}\xi'_j$ e a equação $\frac{\partial F}{\partial t_j} = \rho^{-1}\xi'_j(F)$ implica a trivialidade topológica de F .

Um caso especial e importante do resultado acima, é quando o germe f é cômodo e não degenerado em relação ao seu diagrama de Newton. Neste caso, os campos $\{x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\}$ formam um conjunto de emenda local e as condições de salto se verificam para todo θ acima do diagrama de Newton de f . Têm-se os resultados:

I . Se f é cômodo e não degenerado com singularidade isolada, então qualquer deformação F de f com filtração não decrescente, isto é, $\text{fil}(F-f) \geq \text{fil}(f)$ e $\text{fil}(F) = \text{fil}(f)$ é topologicamente trivial.

II. Se $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ é um germe cômodo e não degenerado com singularidade isolada, então o tipo topológico de f e portanto, seu número de Milnor depende somente de seu poliedro de Newton.

III. Para germes não degenerados $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, o tipo topológico de f depende somente de sua componente conexa no espaço dos germes com o mesmo poliedro de Newton.

Na proposição seguinte, cuja demonstração é imediata a partir do corolário I acima e da proposição 1.1.5, identificamos uma subclasse de germes pré-quase-homogêneos não degenerados. Para estes germes, deformações acima do diagrama de Newton são topologicamente triviais.

2.5. Proposição:

Seja $g(x) = f(x) + h(x)$, germe pré-quase-homogêneo para o qual as seguintes condições estão satisfeitas:

a. f é cômoda.

b. todos os elementos da parte inicial de g são vértices de seu diagrama de Newton.

Então o tipo topológico de g permanece invariante por deformações acima de seu diagrama de Newton.

§.3. O método do poliedro gradiente de Yoshinaga

A abordagem adotada por Yoshinaga em [Y] é ligeiramente diferente, embora também utilize o método de campos de vetores controlados.

Mais precisamente:

Dado um germe de função $g: k^{\tilde{n}}, 0 \rightarrow k, 0$,

$$\text{Seja } |\text{Grad } g|^2 = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2.$$

Para um valor $k \in \mathbb{Z}_+^n$ fixado, consideremos a seguinte condição:

(*) Existe um número positivo $\varepsilon = \varepsilon(k)$ tal que :

$$|\text{Grad } g| \geq \varepsilon |x^k|$$

.3.1. Definição:

O poliedro gradiente de g , $\Lambda^+(g)$, é o fecho convexo do conjunto:

$$U \{k \in \mathbb{R}_+^n \text{ tal que a condição(*) acontece}\}.$$

Seja $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ com singularidade isolada e $G = g + t\theta$ deformação de g .

.3.2. Teorema: [Y. pag. 805]

a) Se $\theta \in \text{int. } \Lambda^+(g)$, a família $G = g + t\theta$ é topologicamente trivial para $t \in [0, 1]$.

b) Se $\theta \in \Lambda^+(g)$, a família $G = g + t\theta$ é topologicamente trivial para t suficientemente pequeno.

Para demonstrar este teorema, Yoshinaga considera o campo de vetores $X(x, t) = \begin{cases} (0, 1) - p(x, t) & \text{se } x \notin V, \\ (0, 1) & \text{caso contrário,} \end{cases}$ onde:

$$p(x, t) = \bar{\theta} |\text{Grad}_x G|^{-2} \left[|x_1|^2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1}, |x_2|^2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_2}, \dots, |x_n|^2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_n}, 0 \right],$$

$\bar{\Theta}$ é o complexo conjugado de Θ e $V = V(g) = \{x \in k^n \mid |\text{grad } g| = 0\}$. A hipótese sobre Θ garante que o campo $\mathcal{X}$ é integrável. Além disso, verifica-se facilmente que $\Theta(x) = dG\left[\mathcal{X}(x,t)\right]$, e portanto $\mathcal{X}$ realiza a trivialidade topológica da família G .

Quando $\Gamma^+(g)$ é não degenerado, Yoshinaga obtém o mesmo resultado de Damon e Gaffney.

.3.4. Teorema:

Um germe g é não degenerado com relação ao seu diagrama de Newton se somente se:

$$\Gamma^+(g) = \Lambda^+(g).$$

A demonstração deste teorema utiliza a noção de mergulhos toroidais correspondentes ao poliedro de Newton de $\Gamma^+(g)$.

.§.4. Fecho integral de ideais e Equisingularidade

A utilização da noção de fecho integral de ideais para a resolução de problemas de W-equisingularidade de famílias de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$ é devida a Teissier [T1], [T2]. Esta abordagem permitirá uma integração dos métodos já discutidos.

Vamos a seguir enunciar os conceitos e resultados que serão utilizados na sequência deste capítulo.

A noção de fecho integral de ideais é uma noção puramente algébrica e foi dada por Prüfer [P]. (para mais detalhes ver [T2])

Seja $\mathcal{O}_{X,x_0}$, o anel local de um espaço complexo analítico reduzido X em um ponto x_0 .

Dado um ideal I em $\mathcal{O}_{X,x_0}$, um elemento $h \in \mathcal{O}$ é chamado de integral sobre I , se ele satisfaz uma relação de dependência integral:

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad \text{com } a_i \in I^i$$

4.1. Definição:

O fecho integral de I , é o ideal $\bar{I}$, constituído dos elementos integrais sobre I em $\mathcal{O}$.

Teissier obtem em [T1], várias noções equivalentes à definição acima. Estas equivalências são essenciais para obtermos o relacionamento entre os resultados de Damon-Gaffney e Yoshinaga.

4.2. Proposição: [T1] ou [G].

Seja I um ideal em $\mathcal{O}_{X, x_0}$, X um conjunto analítico complexo. Então são equivalentes:

- i) $h \in \bar{I}$
- ii) (Hironaka) Se $g_1, \dots, g_\ell$ for uma escolha de geradores para I , então $h \in \bar{I}$ se e somente se existe uma vizinhança U de x_0 em X , e uma constante $c \in \mathbb{R}_+$ tal que para todo $x \in U$, temos:

$$|h(x)| \leq c \cdot \sup |g_i(x)|.$$

- iii) Critério avaliativo: Para cada $\varphi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow X, x$,
 $h \circ \varphi \in (\varphi^*(I))\mathcal{O}_1$.

- iv) Existe um $\mathcal{O}_{X, x_0}$ módulo fiel de tipo finito L tal que $h.L \subset I.L$.

A definição algébrica de fecho integral não é adequada para o caso analítico real. Com efeito, por exemplo se $I = (x^2 + y^2)$, a definição algébrica não reproduz o resultado esperado, isto é, $\bar{I} = m_2^2$. No entanto, a teoria pode ser estendida para o caso analítico real, usando o critério avaliativo como definição.

4.3. Definição: [G. pag. 29]

Seja I um ideal de $A_{X,x}$, X um conjunto real analítico. Então o fecho integral real de I , que será denotado por $\bar{I}_R$ em $A_{X,x}$ é o conjunto dos h tal que para toda função real analítica $\varphi: R, 0 \rightarrow X, x$, temos $h \circ \varphi \in (\varphi I)^*_1$.

Com esta definição é claro que $\overline{(x^2 + y^2)}_R = m_2^2$.

O trabalho de Hironaka [H. secção 5] para a resolução de singularidades permite uma visão interessante para o estudo de $\bar{I}_R$.

Dado um germe X, x real analítico e um ideal $I \subset A_{X,x}$, podemos descobrir uma desingularização $(\tilde{X}, \pi)$ de (X, x) tal que $\tilde{I} = (\pi^* I) A_{\tilde{X}}$ é simples; ou seja em cada ponto $\tilde{x}$ de $V(\tilde{I})$, $\tilde{I}_{\tilde{x}}$ é $(z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n})$, com a_i inteiros não negativos e z_i coordenadas locais de $\tilde{X}$ em $\tilde{x}$.

A desingularização de um espaço real analítico é construída como segue. Um espaço analítico real tem uma filtração canônica de finida por subespaços analíticos reais $X^{(1)}$, $X^{(0)} = X$ e $X^{(i+1)} \supset \Sigma(X^{(i)})$ cada $X^{(i)}$ é resolvido por $\tilde{X}^{(i)}$ usando o teorema de resolução de singularidades de Hironaka. A desingularização é uma união disjunta dos $\tilde{X}^{(i)}$.

Por exemplo, se X é o guarda-chuva de Whitney com equação

$$X_3^2 - X_1^2 X_2 = 0 \quad \text{então } X^{(0)} = X, \quad \tilde{X}^{(0)} = \mathbb{R}^2, \quad X^{(1)} = \tilde{X}^{(1)} = \text{eixo } X_2.$$

Usando estas noções, podemos provar:

4.4. Proposição: [G. pag. 30]

Supondo $I, (X, x)$ e $((\tilde{X}, \tilde{x}), \pi)$ como acima, $h \in A_{X,x}$. Então são equivalentes:

$$(i) h \in \bar{I}_{R, x_0}$$

$$(ii) h \circ \pi \in \tilde{I}_{x_0} \text{ para todo } \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$$

(iii) Para cada escolha de geradores $\{g_i\}$ de I , existe uma vizinhança U de x_0 tal que:

$$|h(x)| \leq C \cdot \sup |g_i(x)| \text{ para todo } x \in U.$$

Demonstração:

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Suponhamos $h \in I_{R, x_0}$, $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Temos $h \circ \pi = 0$ em $V(\tilde{I}_{\tilde{x}})$, e, então, podemos descobrir uma família de curvas $\{\varphi_i\}$ cuja imagem cobre $V(\tilde{I}_{\tilde{x}})$ e $h \circ \pi \circ \varphi_\alpha = h(\pi \circ \varphi_\alpha) = 0$ pela hipótese que $\alpha \in I$.

Isto implica que $(h \circ \pi)$ é divisível por x_{j_1} onde

$$\tilde{I}_{\tilde{x}} = (x_{j_1}^{\alpha_1} \dots x_{j_k}^{\alpha_k}), \alpha_i \text{ inteiros positivos. Vamos mostrar que } h \circ \pi \text{ é}$$

divisível por $x_{j_1}^{\alpha_1}$. Para isto, escrevemos

$$h \circ \pi = \sum_{k=\ell}^{\infty} h_k(x_1, \dots, \hat{x}_{j_1}, \dots, x_n) x_{j_1}^k, \text{ onde } h_\ell(x_1, \dots, \hat{x}_{j_1}, \dots, x_n) \neq 0.$$

Podemos tomar $\varphi: R, 0 \rightarrow \tilde{X}, \tilde{x}$ tal que a ordem de $h_\ell \circ \varphi$ é a multiplicidade m , de h_ℓ e a ordem de $X_{j_1} \circ \varphi = N > m$.

$$\text{Então } o(h \circ \pi \circ \varphi) = \ell N + m, \text{ e } o(\varphi^* \tilde{I}) \geq \alpha_1 N.$$

Se $\ell < \alpha_1$, temos $\alpha_1 N \geq (\ell+1)N > \ell N + m$ obtendo uma contradição.

$$(ii) \Rightarrow (iii)$$

Suponhamos $h \circ \pi \in \tilde{I}_{\tilde{x}}$ para cada $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_0)$.

Isto implica que em uma vizinhança de $V(\tilde{I})$, $h \circ \pi$ satisfaz

$$\|h \circ \pi(x)\| \leq C \cdot \sup \|g_i \circ \pi(x)\|,$$

e portanto $\|h(x)\| \leq C \cdot \sup \|g_i(x)\|$ em uma vizinhança de x_0 em X .

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Se $\varphi: \mathbb{R}, 0 \rightarrow X, x_0$ é real analítica, a hipótese implica que a ordem de $h \circ \varphi$ é maior ou igual que o mínimo das ordens de $g_i \circ \varphi$. ■

Seja $G: k^n \times k, 0 \rightarrow k, 0$ uma deformação de um germe g .

A proposição seguinte, também devida a Teissier, mostra que o fecho integral do ideal $\langle x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j} \rangle$, $i, j=1, \dots, n$ é o objeto infinitesimal adequado para estudar a W-equisingularidade de famílias de hipersuperfícies complexas.

.4.5. Proposição: [T2, pag. 604]

Consideremos $X_G = G^{-1}(0)$, uma hipersuperfície complexa definida por uma deformação $G(x, t) = g(x) + t\theta(x)$, onde $g: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ é um germe de função holomorfa. Então $\frac{\partial G}{\partial t} = \theta(x) \in \overline{\langle x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j} \rangle}$, $i, j=1, \dots, n$, se e somente se $(X_G, 0x\{t\})$ é Whitney-equisingular.

Esta proposição é um caso particular do item 2.5. de [T2].

Observação: No caso real, vale a condição suficiente, isto é, se $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\langle x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j} \rangle}$, então o par $(X_G, 0x\{t\})$ é Whitney-equisingular. Ver [G] para maiores detalhes.

.§.5. Relacionamento entre os métodos apresentados

Nesta secção mostramos que as diversas abordagens descritas nas secções anteriores levam aos mesmos resultados de equisingularidade e trivialidade topológica.

Quando $k=\mathbb{C}$ e g é um germe cômodo ficará caracterizado um subconjunto do Poliedro de equisingularidade, que é o fecho convexo de todos os termos θ tais que o par $(X_G, 0x\{t\})$ é Whitney-equisingular.

Seja $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$; germe de função analítica com singularidade isolada e $G(x, t)$ uma deformação de tipo $G(x, t) = g(x) + t\theta(x)$.

Indiquemos por $J(g)$ o ideal gerado por $\left\{x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\right\}$, ou seja

$$J(g) = \left\langle x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle \text{ e por } J(G) = \left\langle x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i} \right\rangle$$

.5.1. Definição:

$\Sigma^+(g)$ = união dos poliedros $\Sigma_{\mathcal{P}}^+(g)$ de todos os conjuntos de emenda local de g .

.5.2. Definição:

Chamaremos de $C(\overline{J(g)})$ a parte convexa de $\overline{J(g)}$, isto é $C(\overline{J(g)})$ consiste do fecho convexo do conjunto:

$$U \left\{ k + \mathbb{R}^n \text{ tal que } x^k \in \overline{J(g)} \right\}$$

Lembremos que $\Lambda^+(g)$ indica o poliedro gradiente definido por Yoshinaga.

O resultado principal desta secção é a proposição abaixo, na qual mostramos que estes polígonos coincidem.

.5.3. Proposição:

Para um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ com singularidade isolada temos:

$$C(\overline{J(g)}) = \Lambda^+(g) = \Sigma^+(g)$$

Demonstração:

Seja $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \in \Lambda^+(g)$. Então vale a condição (*), isto é:

$$|\text{grad. } g| \geq c \cdot |x^k| \text{ para algum } c > 0.$$

Como $|\text{grad. } g| = \sqrt{\sum \left| x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2}$, pela equivalência de normas em $\mathbb{C}^n$,

existe um $K > 0$, tal que: $|\text{grad. } g| \leq K \cdot \sup \left| x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|$ e portanto, pela condição (ii) da proposição .2.2.. segue-se que $x^k \in \overline{J(g)}$. A recíproca é obtida revertendo o argumento. Como estas condições são equivalentes, o fecho convexo do ideal formado por todos os x^k que satisfazem a estas condições, é, simultaneamente, $\Lambda^+(g)$ e $C(\overline{J(g)})$.

Para mostrar a segunda igualdade, consideremos $\Theta \in \Sigma_{\mathcal{P}}^+(g)$ para algum $\mathcal{P}$. Então existe um nível cómodo A_ℓ tal que

$$\text{ver} \left[A_{2\ell, x} \right] \cdot \Theta \subset A_{2\ell, x} \left\{ x_j \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\}$$

Portanto podemos escrever a equação localizada:

$$-\rho \cdot \Theta = \sum_i \xi_i(f)$$

onde $\rho = \sum |x^\alpha|^2$, x^α são os vértices de A_ℓ e $\xi_i = \sum_{j=1, \dots, n} h_{i,j} x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ com $\text{fil}(h_{i,j}) \geq 2\ell$. Então:

$$\rho \cdot |\Theta| \leq n \cdot \max_j |h_{i,j}|.$$

Aplicando o lema 3.5 de [D.G. pag.342], existe uma constante C_1 tal que

$$|h_{i,j}| \leq C_1 \cdot \rho$$

em alguma vizinhança U de 0 em k^n para $j = 1, \dots, n$.

Portanto temos:

$$\rho \cdot |\Theta| \leq C \cdot \rho \cdot \max_j \left| x_j \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|$$

dividindo por ρ para $x \neq 0$, obtemos a desigualdade abaixo, que também é válida para $x = 0$.

$$|\Theta| \leq C \cdot \max_j \left| x_j \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \right| \text{ em } U.$$

que é exatamente a condição (ii) da proposição 4.2. Logo $\Theta \in \overline{J(g)}$.

Se Θ pertence à parte convexa de $\overline{J(g)}$, basta mostrar que existe um campo de emenda local para o qual Θ satisfaz as condições de salto. Temos a igualdade,

$$\Theta \cdot |\text{grad. } g|^2 = \sum_{i=1}^n \left[\Theta \cdot x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right] \cdot x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

E então definimos o campo de vetores:

$$\xi = |\text{grad. } g|^{-2\Theta} \cdot \sum_{i=1}^n \left[x_i^2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Como $\Theta \in \overline{J(g)}$, existe uma constante C tal que $|\Theta| \leq C |\text{grad. } g|$, ou seja $\text{fil}(\Theta) \geq \text{fil}(g) + \left[\text{fil}(\text{grad}^2 g) - \text{fil} \left(\left| x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2 \right) \right]$ e portanto Θ satisfaz as condições de salto para este campo, ou seja: $\Theta \in \Sigma^+(g)$. ■

O lema abaixo é fundamental na demonstração da proposição 5.5 que resume os resultados do parágrafo.

5.4. Lema:

Seja $G(x,t)=g(x)+t\Theta(x)$ uma deformação de $g(x)$, com $\Gamma^+(\Theta) \subset C(\overline{J(g)})$, então:

$$\overline{J(G)} \supset \overline{J(g)}_{n+1}$$

Demonstração:

Pela proposição anterior, a parte convéxa de $\overline{J(g)}$ é igual a $\Lambda^+(g)$, portanto basta mostrar que $\Lambda^+(G) \subset \Lambda^+(g)$.

Como $\Gamma^+(\Theta) \subset \Lambda^+(g)$, temos $\Gamma^+\left(x_1 \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}\right) \subset \Lambda^+(g)$, ou seja, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^n \left| x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2 \geq \varepsilon \sum_{i=1}^n \left| x_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right|^2$$

Considerando t próximo da origem, obtemos:

$$2 \sum_{i=1}^n \left| x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2 \geq |t|^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left| x_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right|^2$$

em uma vizinhança de $\{0\} \times \{0\}$ em $k^n \times \mathbb{R}$.

Como $|\text{grad}_x G|^2 = \sum_{i=1}^n \left| x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + t x_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right|^2 = |\text{grad}.g + t \text{grad}.\Theta|^2 \geq (|\text{grad}.g| - |t \cdot \text{grad}.\Theta|)^2$, obtemos $|\text{grad}_x G|^2 \geq |\text{grad}.g|^2$ ■

Na proposição abaixo, mostramos que para todo $\Theta \in C(\overline{J(g)})$, a família de hipersuperfícies definida por $g + t\Theta$ é W-equisingular.

5.5. Proposição:

Seja $G(x, t) = g(x) + t\Theta(x)$, onde g tem singularidade isolada e $\Theta \in C(\overline{J(g)})$, então:

i) A família de germes $g_t = g + t\Theta$ é topologicamente trivial para t suficientemente pequeno.

ii) O par $(X_G, 0 \times \{t\})$ é W-equisingular.

Demonstração:

Como $\overline{C(J(g))} = \Lambda^+(g)$ (proposição 5.3.), o item (i) é uma consequência do teorema (1.5) de Yoshinaga, [Y].

Para provar o item (ii), basta mostrar que $\Theta \in \overline{J(G)}$. Mas pelo lema 5.4, $\overline{J(g)} \cap \mathcal{O}_{n+1} \subset \overline{J(G)}$, portanto $\Theta \in \overline{J(G)}$ e o resultado segue da proposição 4.5 ■

.5.6. Definição: Poliedro de Equisingularidade

Seja $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ um germe e $G = g + t\Theta$ uma deformação de g com $\Theta = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$.

O poliedro de equisingularidade de g , que será denotado por $\mathcal{E}(g)$, é o fecho convexo do conjunto

$$\bigcup \left\{ k + \mathbb{R}^n \text{ tal que } \Theta \in \overline{\left[x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i} \right]} \right\}$$

Como consequência da proposição 5.5 temos:

.5.7. Corolário:

$$\overline{C(J(g))} \subseteq \mathcal{E}(G)$$

Quando g é um germe cômodo e não degenerado, usando o resultado de Yoshinaga (ver proposição 3.4.) podemos enunciar:

.5.8. Corolário:

Seja g um germe cômodo e não degenerado então:

$$\Gamma^+(g) \subseteq \mathcal{E}(g)$$

Os exemplos abaixo mostram que a determinação do poliedro $\mathcal{E}(g)$ é uma questão delicada.

.5.9. Exemplo:

$$g: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$$

$$g(x, y) = y^5 + x^4 y + x^9$$

O germe g é comodo e não degenerado, e no entanto se $\theta = x^\alpha$ e $5 < \alpha < 9$, temos $\theta \in \mathcal{E}(g)$ e $\theta \notin \Gamma^+(g)$.

Neste exemplo, $\mathcal{E}(g)$ é caracterizado pelo poliedro $\mathcal{E}(h)$, onde $h = y^5 + x^4y$, que é um germe homogêneo semi-cômodo e com singularidade isolada. Neste caso, qualquer deformação de h por termos de grau ≥ 6 é C^1 -trivial [R], e portanto $\theta \in \mathcal{E}(g)$.

No próximo capítulo vamos obter uma caracterização mais precisa de $\mathcal{E}(g)$ para germes $g: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$.

CAPÍTULO 3

Hipersuperfícies pré-quase-homogêneas adequadas

Como vimos no capítulo anterior, se g é um germe cômodo e não degenerado com relação a seu diagrama de Newton, $\Gamma^+(g) \subseteq \mathcal{E}(g)$.

Neste capítulo, para o caso particular de germes $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$, mesmo degenerados, construímos um algoritmo para a determinação de um conjunto de emenda local, que permite determinar o polígono $C(\overline{J(g)})$. Como aplicação do processo acima, caracterizamos uma classe especial dos germes pré-quase-homogêneos $g = f + h$ cujo polígono de equisingularidade de g contém o polígono de Newton do germe quase-homogêneo f .

§.1. Algoritmo para construção de $\Sigma^+(g)$

Seja $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$ um germe de função cômodo e com singularidade isolada na origem.

A construção do conjunto dos campos de emenda local é feita em cada face do diagrama de Newton de g .

Seja Δ_ℓ uma face do diagrama de Newton de g .

Se Δ_ℓ é não degenerada, os campos $x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2$ formam um conjunto de emenda local para esta face Δ .

Se Δ_ℓ é degenerada, $\left[\text{in } x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\Delta_\ell} \right]$ não tem codimensão finita em $k[[\bar{\Delta}]]$, ou seja, a parte inicial de g é um produto de polinômios irreduzíveis C_k elevados a potências r_k , com pelo menos um destes $r_k > 1$.

$$\text{in.}(g|_{\Delta_\ell}) = C_1(x_1, x_2)^{r_1} \cdot C_2(x_1, x_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot C_p(x_1, x_2)^{r_p}$$

Podemos observar que cada C_k é um polinômio quase-homogêneo determinado pelo tipo de quase-homogeneidade da face Δ_ℓ .

1.1.1. Definição:

Um fator polinomial C_k de $\text{in.}(g)|_{\Delta_\ell}$ com $r_k > 1$ será chamado de polinômio de degeneração de g .

Para cada polinômio C_k de degeneração de g , nosso objetivo é construir um campo de vetores ξ_k de tal forma que o polinômio C_k não divide $\xi_k(g)|_{\Delta_\ell}$.

Existem duas situações a serem consideradas:

Na primeira, o polinômio C_k não divide o germe g , ou seja:

$$(1) \quad g(x_1, x_2) = g_k(x_1, x_2) + C_k(x_1, x_2)^S \cdot G_k(x_1, x_2)$$

C_k não divide os polinômios g_k e G_k .

Na segunda, o polinômio C_k divide o germe g , ou seja:

$$(2) \quad g(x_1, x_2) = C_k(x_1, x_2) \left[g_k(x_1, x_2) + C_k(x_1, x_2)^{S-1} \cdot G_k(x_1, x_2) \right]$$

e C_k não divide os polinômios g_k e G_k . Observemos que C_k não pode ser fator de multiplicidade maior que 1 de g , já que g possui singularidade isolada na origem.

No primeiro caso, o campo de vetores é construído em somente uma etapa, partindo dos campos $x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $i = 1, 2$. Temos:

$$x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = x_i \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + C_k(x)^{s-1} \cdot X_i,$$

$$\text{onde } X_i = \left[s \cdot x_i \cdot \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \cdot G_k(x) + C_k(x) \cdot x_i \cdot \frac{\partial G_k}{\partial x_i} \right], \quad i = 1, 2.$$

Seja:

$$\bar{\xi}_k = X_2 \cdot x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - X_1 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} :$$

Observemos que o campo $\bar{\xi}_k$ é construído desta forma para eliminar o polinômio C_k^{s-1} de $\bar{\xi}_k(g)$.

$$\text{Temos: } \bar{\xi}_k(g) = X_2 \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} - X_1 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} = X_2 \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} - X_1 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_2}$$

Indiquemos por $\bar{\xi}_k = \rho \cdot \bar{\xi}_k$ o campo obtido multiplicando $\bar{\xi}_k$ por um monômio ρ contido em Δ_ℓ , de tal forma que $\rho \cdot \bar{\xi}_k(g)$ esteja contido em Δ_ℓ . Desta forma obtem-se um polinômio $\bar{\xi}_k(g)$ tal que $\bar{\xi}_k(g)|_{\Delta_\ell}$ não divide o polinômio C_k .

Se ocorre a segunda condição, a construção do campo $\bar{\xi}_k$ é feita em duas etapas: Primeiro construímos o campo $\bar{\xi}_k$ da mesma forma que no primeiro caso, eliminando o polinômio C_k^{s-1} de $\bar{\xi}_k(g)$.

Temos:

$$x_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} = x_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_1} \cdot g_k + C_k \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} + C_k^{s-1} \cdot X_1$$

onde $X_1 = \left[s \cdot x_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_1} \cdot G_k(x) + C_k(x) \cdot x_1 \cdot \frac{\partial G_k}{\partial x_1} \right]$, $1 = 1, 2$. Então:

$$\bar{\xi}_k = X_2 \cdot x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - X_1 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\bar{\xi}_k(g) = X_2 \left[x_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_1} \cdot g_k + C_k \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} \right] - X_1 \left[x_2 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_2} \cdot g_k + C_k \cdot x_2 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_2} \right]$$

Portanto: $\bar{\xi}_k(g)$ ainda divide C_k , ou seja, $\bar{\xi}_k(g) = C_k \cdot F_k$, onde:

$$F_k = \left[g_k \cdot \left(x_2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_2} \cdot x_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_1} - x_1 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} \cdot x_2 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. s \cdot G_k \cdot \left(x_2 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_2} \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} - x_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_1} \cdot x_2 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. C_k \cdot \left(x_2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_2} \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} - x_1 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} \cdot x_2 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_2} \right) \right]$$

Como um segundo passo, consideramos os campos $x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}$ e $\bar{\xi}_k$,

para construir o campo ξ_k .

$$\text{Seja } \xi'_k = F_k \cdot x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - C_k^{s-2} \cdot X_1 \cdot \bar{\xi}_k.$$

$$\text{Como } \bar{\xi}_k = X_2 \cdot x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - X_1 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\text{temos } \xi'_k = \left[F_k - C_k^{s-2} \cdot X_2 \cdot X_1 \right] \cdot x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + C_k^{s-2} (X_1)^2 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

$$\text{Portanto, } \xi'_k(g) = F_k \cdot \left[x_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial x_1} \cdot g_k + C_k \cdot x_1 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} \right].$$

Cálculos diretos mostram que no caso em consideração, C_k não divide $\xi'_k(g)$. Multiplicamos ξ'_k por um monômio ρ contido em Δ_ℓ tal que $\rho \cdot \xi'_k(g) \in \Delta_\ell$.

Seja $\xi_k = \rho \cdot \xi'_k$.

Construindo os campos ξ_{i_k} para cada i_k tal que $r_{i_k} > 1$, $\xi_{i_k}(g)|_{\Delta_\ell}$ não divide o polinômio C_k . Portanto o conjunto formado pelos campos $\left\{x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}, \xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_p}\right\}$ é um conjunto de emenda local para esta face Δ_ℓ .

Fazemos isto para todas as faces degeneradas (Δ_ℓ) do diagrama de Newton de g , obtendo o conjunto $\left\{x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}, \xi_{q\ell}\right\}$ de emenda local para g .

Para um campo $\xi_{q\ell}$ construído de acordo com a situação (1), é possível mostrar que um monômio Θ satisfaz as condições de salto para este campo, se e somente se Θ está acima do diagrama de Newton de $g_{q\ell}$. De fato, temos:

$\xi_{q\ell}(g) = \xi_{q\ell}(g_{q\ell})$ e $\text{fil}(\xi_{q\ell}(g_{q\ell})) = \text{fil}\left[\rho \cdot X_i \cdot x_j \cdot \frac{\partial(g_{q\ell})}{\partial x_j}\right]$ para $i \neq j$, e $i, j = 1, 2$.

Portanto, $\text{jump}(\xi_{q\ell}) = \text{fil}\left[\rho \cdot X_i \cdot x_j \cdot \frac{\partial(g_{q\ell})}{\partial x_j}\right] - \text{fil}\left[\rho \cdot X_i \cdot x_j \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}\right]$ e $\text{jump}(\xi_{q\ell}) = \text{fil}(g_{q\ell}) - \text{fil}(g)$.

Então Θ satisfaz as condições de salto para o campo $\xi_{q\ell}$ se e somente se:

$$\text{fil}(\Theta) \geq \text{fil}(g_{q\ell})$$

Mais precisamente, as condições de filtração acima determinam um subconjunto do polígono de equisingularidade para germes que satisfazem à condição (1).

1.2. Proposição:

Seja $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$ um germe de função com singularidade isolada, tal que para toda face Δ_ℓ e todo polinômio de degeneração $C_{k\ell}$ desta face, g não divide $C_{k\ell}$. Ou seja, $g = g_{k\ell} + C_{k\ell}^{s_k} \cdot G_k$, e $C_{k\ell}$ não divide $g_{k\ell}$ e G_k .

Então um monômio $\Theta(x, y) \in C(\overline{J(g)})$ se $\Theta \in \text{int.} \left[\Gamma^+(g_{k\ell}) \right]$ para todo $g_{k\ell}$.

Demonstração:

Não é difícil verificar que todo monômio Θ em $C(\overline{J(g)})$ satisfaz as condições de salto para este conjunto de emenda local de g .

De fato, supondo que Θ não satisfaz as condições de salto, existe uma face Δ_ℓ degenerada de g , tal que $\text{fil}_{\Delta_\ell}(\Theta) < \text{fil}_{\Delta_\ell}(g_\ell)$, como Δ_ℓ é degenerada, existe um polinômio de degeneração $C_{k\ell}$ tal que $\text{in.}(g)|_{\Delta_\ell} = C_{k\ell}(x_1, x_2)^{r_k} \cdot G(x_1, x_2)$.

Seja $\varphi: k, 0 \rightarrow k^2, 0$ uma parametrização do polinômio $C(x)$. Então os expoentes de φ determinam o tipo de quase homogeneidade de Δ_ℓ . Como $g \circ \varphi = g_{k\ell} \circ \varphi$, temos $\text{fil}(\Theta \circ \varphi) < \text{fil} \left[x_j \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \varphi \right]$ para $j=1, 2$, e portanto $\Theta \notin \overline{J(g)}$. ■

Desta forma, para germes que satisfazem as condições da proposição 1.2, o algoritmo que descrevemos determina exatamente $C(\overline{J(g)})$.

.2.3.Exemplo: $g(x,y) = x^{11} + y^{11} + xy(x^2-y^2)^2$.

O diagrama de Newton de g é formado por três faces cujos vértices são: y^{11} , xy^5 , x^5y , x^{11} .

A face que contém os termos xy^5 , x^3y^3 e x^5y é degenerada, pois

$$\text{in. } x. \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\Delta} = xy(x^2-y^2)(5x^2-y^2) \text{ e } \text{in. } y. \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{\Delta} = xy(x^2-y^2)(x^2-5y^2)$$

têm o polinômio $(x^2-y^2)=0$ como solução comum. As outras duas faces são não degeneradas, pois contêm somente os vértices.

Seja $\bar{\xi} = (x^2-5y^2).x.\frac{\partial}{\partial x} - (5x^2-y^2)y.\frac{\partial}{\partial y}$, então:

$$\bar{\xi}(g) = (x^2-5y^2).11x^{11} - (5x^2-y^2).11y^{11}$$

Considerando $\xi = x^4y^4.\bar{\xi}$, temos $\xi(g) \in \Delta$, e os campos ξ , $x.\frac{\partial}{\partial x}$, $y.\frac{\partial}{\partial y}$ formam um conjunto de emenda local para g .

Neste exemplo, $\Sigma^+(g)$ é o fecho convexo do conjunto formado pelos elementos x^{11} e y^{11} . Se Θ está acima do diagrama de Newton de

$x^{11}+y^{11}$, $\theta \in \Sigma^+(g)$. E portanto, toda deformação de tipo $G(t,x) = g(x)+t\theta(x)$ por polinômios θ acima do diagrama de Newton de $x^{11}+y^{11}$ é topologicamente trivial.

.2.4. Exemplo: $g(x,y) = x^{13} + y^{13} + xy(x^2-y^2)^4 + x^2y^2.(x^2-y^2)^2$.

A única face degenerada deste germe, é formada pelos vertices x^2y^6 e x^6y^2

Temos:

$$xg_x = 13x^{13} + xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)(9x^2-y^2) + xy(6x^2-2y^2)]$$

$$yg_y = 13y^{13} + xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)(x^2-9y^2) + xy(2x^2-6y^2)]$$

Vamos construir um campo ξ tal que $\xi(g)$ não divide o polinômio $C(x,y) = xy(x^2-y^2)$.

Seja $\bar{\xi} = Y.x.\frac{\partial}{\partial x} - X.y.\frac{\partial}{\partial y}$ onde:

$$X = [(x^2-y^2)(x^2-9y^2) + xy(2x^2-6y^2)]$$

$$Y = [(x^2-y^2)(9x^2-y^2) + xy(6x^2-2y^2)]$$

Temos $\bar{\xi}(g) = Y.13x^{13} - X.13y^{13}$. Para obter o campo ξ , multiplicamos $\bar{\xi}$ pelo monômio $\rho = x^3y^3$, então $\xi(g) = x^3y^3.\bar{\xi}(g) \in \Delta$.

Como $x \cdot \frac{\partial(g)}{\partial x} \big|_{\Delta}$, $y \cdot \frac{\partial(g)}{\partial y} \big|_{\Delta}$, e $\xi(g) \big|_{\Delta}$ não tem zeros distintos dos eixos coordenados, estes campos formam um conjunto de emenda local para g .

Neste exemplo, $\Sigma^+(g)$ é o fecho convexo do diagrama de Newton de x^{13} e y^{13} , e toda deformação $G(x,t)$ de g por polinômios Θ acima do diagrama de Newton de $x^{13} + y^{13}$ é topologicamente trivial.

.2.5. Exemplo: $g(x,y) = x^7 + y(x^2 - y^2)^2$

A face degenerada deste exemplo é formada pelos vértices y^5 e $y \cdot x^4$.

Temos $x \cdot g_x = 7x^7 + y(x^2 - y^2)(4x^2)$ e $y \cdot g_y = y(x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2)$.

Considerado $\xi = xy^2 \cdot \left[4x^2 \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y} - (x^2 - 5y^2) \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right]$, os campos

$\left\{ \zeta, x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ formam um conjunto de emenda local para g .

Neste exemplo, o termo y^5 é eliminado pelo campo ξ , pois este elemento pertence à face degenerada. Neste caso, Θ precisa estar acima do diagrama de Newton de x^7 e y^7 para satisfazer as condições de salto, portanto $\Sigma^+(g)$ é o fecho convexo do diagrama formado por x^7 e y^7 .

Se existe um polinômio C_{kl} de degeneração para g , tal que g divide C_{kl} , a determinação do polígono de equisingularidade de g fica mais difícil, como mostra o exemplo 1.6. abaixo:

.2.6. Exemplo: $g(x,y) = x^8 - y^8 + xy(x^2-y^2)^2$.

Neste exemplo, $g(x,y) = (x^2-y^2) \cdot \left[(x^2+y^2)(x^4+y^4) + xy(x^2-y^2) \right]$.

$$x \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 8x^8 + xy(x^2-y^2)(5x^2-y^2)$$

$$y \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 8y^8 + xy(x^2-y^2)(x^2-5y^2)$$

Então $\bar{\xi} = (x^2-5y^2) \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - (5x^2-y^2)y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ e

$$\bar{\xi}(g) = (x^2-5y^2)(8x^8) - (5x^2-y^2)(-8y^8) = 8(x^{10}-y^{10}) - 40x^2y^2(x^6-y^6)$$

$$\bar{\xi}(g) = (x^2-y^2) \left[8(x^8+2x^6y^2+2x^4y^4+2x^2y^6+y^8) - 40x^2y^2(x^4+2x^2y^2+y^4) \right]$$

Como $\bar{\xi}(g) = (x^2-y^2) \cdot F$ e $x \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 8x^8 + xy(x^2-y^2)(5x^2-y^2)$,

Seja $\xi = F \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - xy(5x^2-y^2) \cdot \bar{\xi}$, então:

$$\xi = \left[F - xy(x^2-5y^2)(5x^2-y^2) \right] x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + xy(5x^2-y^2)^2 y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

Um monômio Θ satisfaz as condições de salto para este campo ξ , se e somente se:

$$\text{fil}(\Theta \cdot F) \geq \text{fil}(\xi(g)) \text{ e}$$

$$\text{fil} \left[\Theta \cdot xy(x^2-5y^2)(5x^2-y^2) \right] \geq \text{fil}(\xi(g)) \text{ e}$$

$$\text{fil} \left[\Theta \cdot xy(5x^2-y^2)^2 \right] \geq \text{fil}(\xi(g))$$

Como $\xi(g) = F.8x^8$, $\text{fil}(\xi(g)) = 16$, então, para que Θ satisfaça as condições de salto, é necessário que $\text{fil}(\Theta) \geq 12$.

.§.2. Germes pré-quase-homogêneos adequados

.2.1. Definição:

Um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$ pré-quase-homogêneo de tipo $g = f + h$, é adequado se satisfaz as seguintes condições:

- i) f é cômoda
- ii) h contém somente termos mistos
- iii) $g = \text{in}.g$
- iv) Se existirem células degeneradas no diagrama de Newton de g , estas não contêm os termos puros de g .

.2.2. Definição:

Uma hipersuperfície $X_g = g^{-1}(0)$ é pré-quase-homogênea, se g é um germe pré-quase-homogêneo.

Se o germe g for adequado, dizemos que a hipersuperfície X_g é adequada.

Para germes pré-quase-homogêneos adequados $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$, obtemos o resultados abaixo:

.2.3. Teorema:

Seja $g: k^2, 0 \rightarrow k, 0$ um polinômio tal que qualquer fator de g não é polinômio de degeneração de g , e pré-quase-homogêneo adequado. Para uma deformação $G: k^2 \times k, 0 \rightarrow k, 0$ de g , sejam as seguintes condições:

- (a) $\Theta \in \Gamma^+(f)$, e t é suficientemente pequeno.
- (b) $\Theta \in \text{interior de } \Gamma^+(f)$, e $t \in [0, 1]$.

Se ocorre uma das condições (a) ou (b), temos:

A família de germes $g = g + t\theta$ é C^0 -R-trivial.

Se ocorre a condição (b), temos:

O par $(X_G, 0x\{t\})$ é equisingular.

Como mostram os exemplos abaixo, as hipóteses consideradas são necessárias para a validade do resultado.

.2.4. Exemplo: $g(x,y) = x^9 + y(x^2 - y^2)^2$

Observe que $g = \text{in.}(g)$, portanto a condição (iii) está satisfeita. A condição (iv) não se verifica, pois a face que contém o termo y^5 é degenerada. Neste caso os termos que satisfazem as condições de salto estão acima do diagrama de Newton de x^9 e y^9 e não acima dos vértices de f , que são x^9 e y^5 .

.2.5. Exemplo: $g(x,y) = x^{12} + y^6(x^2 - y^2)^2 + xy(x^2 - y^2)^2$

Neste exemplo a condição (iv) está satisfeita, pois as faces que contêm os termos x^{12} e y^{10} são não degeneradas, mas a condição (iii) não se verifica, pois $g - \text{in.}g = -2x^2y^8 + x^4y^6$. Neste caso, os termos que satisfazem as condições de salto estão acima do diagrama de Newton formado por x^{12} e y^{12} , e não acima do diagrama de Newton de f , que é formado por x^{12} e y^{10} .

.2.6. Exemplo: $g(x,y) = x^8 - y^8 + xy(x^2 - y^2)^2$

Neste exemplo, $g(x,y) = (x^2 - y^2) \cdot [(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) + xy(x^2 - y^2)]$, portanto g não é irredutível. Para que θ satisfaça as condições de salto deste exemplo, é necessário que θ esteja acima de x^{12} e y^{12} , e não acima dos vértices do diagrama de Newton de f , x^8 e y^8 .

.2.7. Demonstração do teorema 2.3.

Por hipótese, para qualquer face degenerada Δ_ℓ do diagrama de Newton de g , os campos de emenda local são construídos de acordo com a situação (1) do algoritmo da secção anterior.

Cada campo ξ_{kl} do conjunto de emenda local de g está relacionado a uma face Δ_{kl} , com $\text{in.}(g)|_{\Delta_{kl}} = C_{kl}^{r_k} \cdot G_{kl}$ e $\xi_{kl}(g) = \xi_{kl}(g_{kl})$, onde $g = g_{kl} + C_k^s \cdot G_k$.

Como $g = \text{in.}(g)$, $s = r_k$ e $g = g_{kl} + C_k^{r_k} \cdot G_{kl}$. Para cada vértice x^α de g , a face que contém x^α é não degenerada por hipótese, portanto x^α pertence à g_{kl} para cada campo ξ_{kl} pela própria construção de ξ_{kl} .

Então, pela proposição 1.2, qualquer monômio θ acima do diagrama de Newton formado pelos x^α pertence a $\Sigma^+(g)$, e este é justamente o diagrama de Newton de f . ■

Podemos conjecturar que para germes $g: k^n, 0 \rightarrow k, 0$, satisfazendo as mesmas hipóteses do teorema 2.3, o resultado é ainda válido. No entanto esta técnica de construção de campos de emenda local não se aplica para $n \geq 3$, pois nem sempre é possível caracterizar uma face degenerada através de decomposição polinomial.

CAPÍTULO 4

O p-poliedro de Equisingularidade

O problema da equisingularidade ou da trivialidade topológica de famílias de variedades é em geral mais complicado do que para famílias de hipersuperfícies. Damon em [D], estende o método dos campos de vetores controlados, para o estudo da trivialidade topológica de deformações de variedades definidas por um germe $g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$. Mais recentemente, Gaffney em [G.], usa a noção de fecho integral de módulos para o estudo da W-equisingularidade de famílias que deformam g . Para variedades não degeneradas com relação ao seu diagrama de Newton, os métodos de Damon, e de Gaffney garantem o mesmo resultado: Qualquer deformação G por termos acima do diagrama de Newton de g é topologicamente trivial [D. pag. 42] e o par $\left[X_G, 0x\{t\} \right]$ é W-equisingular [G. pag. 26].

Motivados pelo teorema 2.5 de [G], definimos o p-poliedro de equisingularidade, de g . O resultado principal deste capítulo, é a proposição 3.2, que caracteriza algebricamente um subconjunto deste poliedro.

.§.1. Diagrama de Newton e Filtração.

Consideremos germes de função $g: k^n, 0 \rightarrow k^p, 0$, com cada função coordenada g_i cômoda. Vamos designar por β_j^i , os vértices do poliedro de Newton, $\Gamma^+(g_i)$, de cada g_i .

.1.1. Definição:

O poliedro de Newton de g , é o fecho convexo de:

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha = \sum_{i=1}^n \beta_j^i, \text{ com } \beta_j^i \text{ vértice de } \Gamma(g_i) \right\}.$$

Chamamos de bordo de Newton de g , à união das faces compactas de $\Gamma^+(g)$, que será denotado por $\Gamma(g)$.

Podemos observar que $\Gamma^+(g)$ é de um certo modo, a soma dos poliedros de Newton $\Gamma^+(g_i)$.

$\Gamma^+(g)$ pode ser construído pela translação de $\Gamma(g_2)$ por cada vértice de $\Gamma(g_1)$, depois é feita a translação de $\Gamma(g_3)$ pelos vértices do fecho convexo dos pontos obtidos e assim sucessivamente.

A filtração de (g) , a ser considerada, é a determinada por este diagrama de Newton.

Exemplo: Seja $g: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$

$$g(x,y) = (x^5+y^5+x^2y^2, x^6+y^6)$$

Os vértices de $\Gamma(g_1)$ e de $\Gamma(g_2)$ são $\{x^5, y^5, x^2y^2\}$ e $\{x^6, y^6\}$, respectivamente, e os vértices de $\Gamma(g)$ são $\{x^{11}, y^{11}, x^8y^2, x^2y^8\}$.

A filtração de g é determinada por este diagrama da Newton.

Para generalizar a noção de germe não degenerado, precisamos de algumas definições.

Consideremos em $\mathbb{R}_+^n - \{0\}$, um elemento fixo $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Para cada face Δ de $\Gamma(g_i)$, $i=1, \dots, p$, fazemos o produto escalar:

$\langle v, r \rangle_\Delta = \sum v_i r_i$ onde $r = (r_1, \dots, r_n)$ é o tipo de quase-homogeneidade das variáveis x_i na face Δ .

Chamamos de Δ_1^v , a face de $\Gamma(g_1)$ em que este produto escalar assume o seu valor mínimo.

Vemos facilmente que para qualquer $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, Δ_1^v é a face Δ em que $v \in C(\Delta)$.

Denotamos por $g_1|_{\Delta_j}$, os termos da série de Taylor de $g_1 = \sum c_\alpha x^\alpha$ com $\alpha \in \Delta_j$.

.1.2. Definição:

Segundo Khovanskii [K], dizemos que um germe g é não degenerado, se para cada $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, o conjunto de vetores $x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (g|_{\Delta^v})$ é linearmente independente em $g_1|_{\Delta_1^v} = 0$.

Ou equivalentemente, se para cada $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, não existem soluções em $(\mathbb{C}^*)^n$, para o sistema de equações:

$$\begin{cases} g_i|_{\Delta_1^v} = 0 & 1 \leq i \leq p \\ (w, x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (g|_{\Delta^v})) = 0 & j=1, \dots, p \end{cases}$$

para algum $w \neq 0$, onde $g|_{\Delta^v} = (g_1|_{\Delta_1^v}, \dots, g_p|_{\Delta_p^v})$.

.1.3. Exemplo:

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x, y) = (x^7 + y(x^2 - y^2)^2, x^{14} + y^{10})$$

Os diagramas de Newton de g_1 e g_2 e g , são formados pelos vértices:

$$\{(x^7, x^4y) ; (x^4y, y^5)\}, \{(x^{14}, y^{10})\}$$

e

$$\{(x^{21}, x^{18}y) ; (x^{18}y, x^4y^{11}) ; (x^4y^{11}, y^{15})\}$$

respectivamente.

Este germe é não degenerado, pois $g_1|_{\Delta^v} = 0$ e $g_2|_{\Delta^v} = 0$ não tem solução comum em $(\mathbb{C}^*)^n$ para qualquer face do diagrama de Newton de g . É interessante notar que a componente g_1 de g é degenerada, porém g_2 elimina esta degeneração em $g = (g_1, g_2)$.

.1.4. Exemplo:

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x, y) = (x^9 + y^9 + xy(x^2 - y^2)^2, x^{10} - y^{10})$$

Este germe é degenerado. Para qualquer $v \in C(\Delta)$, onde Δ é a face gerada pelos vértices $\{xy^5$ e $x^5y\}$ em g_1 , temos:

$g_1|_{\Delta^V} = xy(x^2-y^2)^2$ e $g_2|_{\Delta^V} = x^{10}-y^{10}$ que tem no conjunto de zeros, o polinômio $C(x,y) = x^2-y^2$.

Para qualquer $w = (w_1, w_2)$ em $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, temos:

$$\begin{aligned} \left(w, x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (g|_{\Delta^V}) \right) &= w_1 \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (g_1|_{\Delta^V}) + w_2 \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (g_2|_{\Delta^V}) = \\ &= w_1 \cdot xy(x^2-y^2)(5x^2-y^2) + w_2 \cdot 10x^{10} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\left(w, y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (g|_{\Delta^V}) \right) = w_1 \cdot xy(x^2-y^2)(x^2-5y^2) - w_2 \cdot 10y^{10} = 0$$

Este sistema tem o polinômio $C(x,y) = x^2-y^2$ como solução do determinante dos coeficientes. Portanto, g é degenerado.

.§.2.Fecho integral de módulos e Whitney Equisingularidade

As definições e resultados deste parágrafo estão em [G.]. Neste artigo, através da noção de fecho integral de módulos, Gaffney obtém o objeto infinitesimal correto para estudar a equisingularidade de Whitney de famílias de conjuntos analíticos.

A forma mais conveniente de definir o fecho integral de um módulo para os propósitos desejados é através do critério avaliativo.

.2.1. Definição:

Seja X, x um germe de conjunto analítico, e M um submódulo de $\mathcal{O}_{X,x}^p$, então $h \in \mathcal{O}_{X,x}^p$ pertence a $\bar{M}$ se para toda curva $\phi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow X, x$; $h \circ \phi$ pertence a $\phi^*(M)\mathcal{O}_1$.

.2.2. Exemplo:

Consideremos $X = \mathbb{C}^2$, e o submódulo $M \subset \mathcal{O}_2^2$ gerado por: $\{(x,0)\}$,

$(0, y), (y, x)\}$. Então $\bar{M} = m_2 \mathcal{O}_2^2$.

Para cada $\phi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$; $(\phi^* M) \mathcal{O}_1$ é gerado por $\{(t^n, 0), (0, t^n)\}$ onde $n = \min(o(\phi_1))$, e estes elementos são os geradores de $(\phi^* (m_2 \mathcal{O}_2^2)) \mathcal{O}_1$.

O Teorema de tipo Thom-Levine para este contexto, demonstrado por Gaffney em [G.] é o seguinte:

.2.3. Teorema: [G. pag.15]

Seja $F: \mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ holomorfa, com $X = F^{-1}(0)$ e $Y = \mathbb{C}^t \times 0$ e X_0 o conjunto dos pontos regulares de X . Então o par (X_0, Y) é Whitney equisingular se e somente se

$$\frac{\partial F}{\partial s} \in \left\{ \overline{z_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial z_j}} \right\}_{\mathcal{O}_x^p}$$

para todo vetor tangente $\frac{\partial}{\partial s}$ em $\{0\} \times \mathbb{C}^t$.

No caso real, $\frac{\partial F}{\partial s_k} \in \bar{M}$ implica na W-equisingularidade do par (X_0, Y) , enquanto que o inverso é valido se cada componente conexa dos pontos regulares de X é densa em X . [G. pag.31]

Para descrever algumas aplicações do resultado acima, é necessário definir a seguinte relação de equivalência.

Denotaremos por X_f o conjunto dos zeros de um germe f , ou seja $X_f = f^{-1}(0)$.

.2.4. Definição:

Sejam f_1 e $f_2: k^n \rightarrow k^p$ germes. Dizemos que f_1 e f_2 são WV-equivalentes, se existe um conjunto aberto $U \subset k$; $[0, 1] \subset U$, e um germe de função

$F: U \times K^n, U \times 0 \rightarrow k^p, 0$ tal que $F(j, -) = f_j$, $j=1, 2$;

e $(X_F - \Sigma(X_F), U)$ é Whitney-equisingular ao longo de U .

Como consequência do teorema acima, Gaffney obtém o seguinte resultado:

.2.5. Proposição: [G. pag. 22]

Sejam $f_i: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, $i=0, 1$ dois germes de função tal que $\overline{TK(f_0)} = \overline{TK(f_1)}$. Então $(X_F - \Sigma(X_F), \mathbb{C} \times 0)$ é W-regular em $(0, 0), (0, 1)$, onde $F(t, z) = f_0(z) + t(f_1(z) - f_0(z))$.

.2.6. Corolário: [G. pag. 22]

Seja $F: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C} \times 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, onde $F(t, z) = f_0 + th(z)$, e suponhamos que $\overline{TK(f_0)} = \overline{TK(f_t)}$ para todo $t \in \mathbb{C}$. Então o par $(X_F - \Sigma(X_F), \mathbb{C} \times 0)$ é W-Regular.

Para germes não degenerados com relação ao seu diagrama de Newton, Gaffney obtém o resultado:

.2.7. Teorema: [G. pag. 26]

Seja $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$; $n > p$, K -finita, cômoda e não degenerada em relação ao seu diagrama de Newton.

Se F é deformação de f por termos com filtração maior que a filtração de f . Então $f_t = F(t, -)$ é WV-equivalente a f para todo t .

.§.3.0 Poliedro de equisingularidade

Seja $G: k^{n+1}, 0 \rightarrow k^p, 0$ deformação de tipo $g+t\theta$ de um germe g .

Denotaremos por $\left\{x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j}\right\}_p$, o $\mathcal{O}_X^p$ módulo gerado por $\left[x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j}\right]$,

com $i, j=1, \dots, p$.

.3.1. Definição:

O p-poliedro de equisingularidade de g , que será denotado por $\mathcal{E}(g)$, é o conjunto dos germes $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)$ tal que

$$\Theta \in \overline{\left\{ x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}_{\mathcal{O}_X}}^p, \text{ onde } X = G^{-1}(0).$$

No caso complexo, o teorema 2.5. (pag.15) de Gaffney mostra que $\mathcal{E}(g)$ é o conjunto dos germes Θ para os quais o par $\{X_G, \mathcal{O}_X\{t\}\}$ é W-equisingular, onde $G(x, t) = g(x) + t\Theta(x)$.

A caracterização algébrica acima é difícil de ser verificada. Um problema em aberto é a obtenção de outras caracterizações para $\mathcal{E}(g)$, que sejam mais fáceis de serem verificadas, e as possíveis equivalências com os trabalhos de Damon. Na proposição abaixo, determinamos uma condição suficiente para que $\Theta \in \mathcal{E}(g)$.

.3.2. Proposição:

Seja $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)$ com $\Theta_i \in \text{int.}\Gamma^+(g_i), i=1, \dots, p$. Se Θ pertence à parte convexa de $\overline{tK(g)}$, então $\Theta \in \mathcal{E}(g)$.

Para a demonstração desta proposição, é necessária a versão do lema de Nakayama para fecho integral de módulos. [G. pag.4]

.3.3. Lema: Sejam N, M submódulos de $\mathcal{O}_X^p$.

(i) Se $(m\bar{M} + N) = \bar{M}$, então $\bar{N} = \bar{M}$.

(ii) Se $\bar{M} \supset m\bar{M} + N \supset M$, então $\bar{N} = \bar{M}$.

Demonstração da proposição .3.2:

Mostraremos que $\overline{tK(g_0)} = \overline{tK(g_t)}$ e o resultado será consequência da proposição 3.4.

Como cada g_j é cômodo, $j=1, \dots, p$; um conjunto de geradores de $tK(g)$ é dado por $\left\{x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}; g^j \cdot e_\ell\right\}$, onde $e_\ell = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, e o número 1 está na coordenada ℓ . Como $g_t = g + t\theta$, um conjunto de geradores de $tK(g_t)$ é dado por:

$$\left\{x_i \cdot \frac{\partial (g+t\theta)}{\partial x_j}; (g^j+t\theta) \cdot e_\ell\right\} = \left\{x_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} + tx_i \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_j}; g^j \cdot e_\ell + (t\theta) \cdot e_\ell\right\}$$

Como cada $\theta_i \in \text{interior } \Gamma^+(g_i)$ e $\theta \in \text{parte convexa de } \overline{tK(g)}$ pela hipótese, temos $\theta \in m_n \cdot \overline{tK(g)}$. Portanto, podemos afirmar que

$$tK(g_t) \subset tK(g) + m_n \overline{tK(g)} \quad ;$$

Então:

$$\overline{tK(g)} \supset tK(g) + m_n \overline{tK(g)} \supset tK(g_t) + m_n \overline{tK(g)} \supset tK(g)$$

Pelo item (ii) do lema 3.3, $\overline{tK(g)} = \overline{tK(g_t)}$.

Aplicando a proposição .2.5, obtemos que o par $\{X_G, 0 \times \{t\}\}$ é

Whitney-equisingular para qualquer t . Pelo teorema .2.4,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \theta \in \left\{x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j}\right\}_{0_X}^p. \text{ E portanto: } \theta \in \mathcal{E}(g). \quad \blacksquare$$

A recíproca deste resultado, em geral não é verdadeira, como mostra o exemplo abaixo.

.3.4. Exemplo: $f: \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$

$$f(x, y, z) = (x^9 + y^9 + z^9 + xy(x^2 - y^2)^2; x^{10} + y^{10} + z^{10})$$

Neste exemplo f é não degenerada, pois f_1 e f_2 não tem solução comum fora dos eixos coordenados em qualquer face de seu diagrama de Newton. Portanto, pelo teorema .2.6., qualquer deformação por termos de filtração acima de seu diagrama de Newton é WV-equi-

valente a f . Se considerarmos $f_t \triangleq f + t(x^4y^4, 0)$ obtemos a W-equissingularidade da família g_t , pois f é não degenerada. Mas $\overline{TK}(f)$ é diferente de $\overline{TK}(f_1)$, pois $(x^4y^4, 0) \in \overline{TK}(g_1)$ e não pertence a $\overline{TK}(f)$.

.3.5. Exemplo: $g: \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$

$$g(x, y, z) = (x^{10} + y^4(x^2 - y^2)^2 - z^{10}, x^{20} + y^{12}(x^2 - y^2)^2 + z^{20})$$

Neste exemplo, g é degenerada para todo v pertencente à célula de dimensão 2 gerada pelos vértices y^8 e x^4y^4 . Neste caso, podemos afirmar que somente elementos (θ_1, θ_2) de grau maior que $(10, 20)$ pertencem a $\overline{TK}(g)$.

De fato, seja $\phi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ determinada por: $\phi(t) = (t, t, t)$.

Temos $g \circ \phi = 0$, calculando a composição de ϕ com os geradores de $\overline{J}(g)$, obtemos:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \circ \phi = (10t^{10}, 20t^{20}), \quad y \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \circ \phi = 0 \quad \text{e} \quad z \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \circ \phi = (10t^{10}, 20t^{20})$$

e o resultado segue.

.3.6. Exemplo: $g: \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$

$$g(x, y, z) = \left(x^{10} + (y^4 + xy)(x^2 - y^2) - z^{10}, x^{20} + (y^4 + xy)(x^2 - y^2) - z^{20} \right)$$

Neste exemplo, a célula degenerada de g é a célula de dimensão 2 formada pelos vértices $\{x^5y, xy^5\}$. Considerando a mesma função ϕ do exemplo anterior, obtemos novamente que somente elementos (θ_1, θ_2) com grau superior a $(10, 20)$ pertencem a $\overline{TK}(g)$.

.3.7. Exemplo: $g: \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$

$$g(x, y, z) = \left(x^9 - y^9 + z^9 + xy(x^2 - y^2)^2; x^{10} - y^{10} + z^{10} \right)$$

Este germe é degenerado para qualquer u pertencente à célula formada por x^5y e xy^5 , pois a curva $\phi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow g^{-1}(0)$, onde:

$\phi(t) = (t, t, 0)$ é tal que: $\left\{ g \circ \phi|_C = 0, \quad x \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} \circ \phi|_C = 0, \quad y \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} \circ \phi|_C = 0 \text{ e } z \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z} \circ \phi|_C = 0 \right\}$. Portanto, os polinômios $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ que estão acima do Diagrama de Newton formado por $\left[x^9 - y^9 + z^9, x^{10} - y^{10} + z^{10} \right]$ pertencem a $\overline{tK(g)}$.

CAPÍTULO 5

CAMPOS DE MORSE

O conceito de Campos Holomorfos de tipo Morse foi introduzido por Verjovsky e outros em [V. S.].

Em [R], é obtido um relacionamento entre Campos de tipo Morse e a determinação finita de uma função conveniente. Resultados sobre deformações de Campos de tipo Morse homogêneos seguem como consequência desse relacionamento.

Neste capítulo mostramos que o conjunto dos campos que não são de tipo Morse tem codimensão infinita.

Além disso, usamos propriedades de C^0 - K -determinação finita para caracterizar campos lineares de tipo Morse e para estudar alguns exemplos de campos Hamiltonianos de tipo Morse em $\mathbb{C}^2$.

.§.1. Campos de Morse

Seja $F(z) = \sum_{i=1}^n F_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ um germe na origem de um campo de

vetores holomorfo em $\mathbb{C}^n$ com singularidade isolada na origem. Seja $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_F$ a folheação determinada pelas curvas integrais de F .

A intersecção das folhas de F com esferas S_ϵ centradas na origem determinam em S_ϵ uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}_\epsilon$ cujo conjunto singular M_ϵ é constituído pelos pontos onde F tangencia S_ϵ .

Tem-se que $M_\epsilon = M_F \cap S_\epsilon$, onde M_F é a variedade dos pontos de tangência do campo F com as esferas S_ϵ , para todo ϵ suficientemente pequeno, ou seja:

$M_F = \left\{ z \in \mathbb{C}^n / \langle F(z); z \rangle = 0 \right\}$ onde $\langle F(z); z \rangle$ indica o produto hermitiano.

1.1. Definição: [V S]

Um campo de vetores F é de tipo Morse se:

i. $M_F = \{0\}$ ou

ii. $M_F - \{0\}$ é subvariedade C^∞ de C^n , de codimensão real 2.

O significado geométrico desta definição é que o contato das folhas com as esferas é não degenerado. Isto é:

1.2. Proposição: [V S]

Um campo de vetores F é de tipo Morse, se e somente se, a restrição a toda folha de F da função $r(z_1, \dots, z_n) = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$ é uma função de Morse na folha.

Os campos de Morse podem ser caracterizados através da C^0 - K -determinação finita da função analítica real $\phi: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ definida por:

$$\phi(z) = (\text{Real } \langle F(z); z \rangle; \text{Imaginário } \langle F(z); z \rangle)$$

Então $M_F = \phi^{-1}(0)$, e em [R.] obtém-se os resultados :

1.3. Proposição: [R]

As seguintes afirmações são equivalentes:

i. F é campo de tipo Morse.

ii. ϕ é C^ℓ - K -finitamente determinada, $0 \leq \ell < \infty$.

1.4. Corolário: [R]

Seja F campo vetorial de Morse. Então:

i. existe $k \in \mathbb{N}$ tal que toda deformação G de F de ordem maior que k , é de Morse.

ii. supondo válido (i), as variedades analíticas M_G e M_F correspondentes aos campos G e F , são homeomorfas.

1.5. Proposição: [R]

Seja F campo de Morse homogêneo de grau s . Então:

- i. A condição " F é campo de Morse" é aberta no conjunto dos campos homogêneos de grau s .
- ii. Todo campo vetorial G tal que $j^s G(0) = j^s F(0)$ é de Morse.
- iii. Se $j^s G(0) = j^s F(0)$, as variedades M_F e M_G são C^l -difeomorfas.
- iv. Se $G = F + H$, onde H é homogêneo de grau $(s+l)$ com $l \geq 1$, as variedades M_F e M_G são C^l -difeomorfas.

Mais geralmente, as seguintes questões relacionadas com a estabilidade sob perturbações da propriedade " F é campo de tipo Morse" se colocam naturalmente:

(1) Se F é um campo polinomial de grau Δ , existe campo G , com $j^\Delta G = j^\Delta F$ e tal que G é de tipo Morse?

(2) Se F é um campo vetorial de tipo Morse? Deformações de tipo $G = F + t\theta$ de F são também de Morse para t suficientemente pequeno?

(3) Os resultados da proposição 1.5 acima se estendem para campos quase-homogêneos?

A resposta à questão (1) é afirmativa, como mostra a proposição abaixo.

1.6. Proposição:

Seja $F: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ campo polinomial de grau k .

Então existe um campo G , $j^k G = j^k F$ tal que G é de tipo Morse.

Demonstração:

Seja $H: \mathbb{C}^n \times L, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ a família de campos definida por:

$$H(z, a) = F(z) + \Lambda(z, a), \quad \Lambda(z, a) = \left[\Lambda_1(z, a), \dots, \Lambda_n(z, a) \right],$$

$$\text{onde } \Lambda_1(z, a) = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} \cdot z_{\ell}^{\Delta}, \quad \Delta > k \quad \text{e cada } a_{j\ell} = (\alpha_{j\ell} + i\beta_{j\ell}) \in \mathbb{C}.$$

A família de aplicações ϕ_H associada a H é:

$$\phi_H: \mathbb{R}^{2n} \times L, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$$

$$(z, a) \longrightarrow \phi_H(z) + \phi_{\Lambda}(z, a)$$

$$\text{onde } \phi_{\Lambda}(z, a) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j(z, a) \cdot \bar{z}_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} \cdot z_{\ell}^{\Delta} \right] \cdot \bar{z}_j.$$

$$\text{Então } \frac{\partial(\phi_H)}{\partial \alpha_{j\ell}} = z_{\ell}^{\Delta} \cdot \bar{z}_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\phi_H)}{\partial \beta_{j\ell}} = i z_{\ell}^{\Delta} \cdot \bar{z}_j.$$

Logo $\frac{\partial(\phi_H)}{\partial \alpha_{j\ell}} = \frac{\partial(\phi_H)}{\partial \beta_{j\ell}} = 0$, para qualquer j, ℓ , se e somente se $z_{\ell}^{\Delta} \cdot \bar{z}_j = 0$ para qualquer j, ℓ ; e portanto se e somente se $z = 0$.

Ou seja, a aplicação $\phi_H: \mathbb{R}^{2n} \times L, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ tem o zero como valor regular, isto é, $\Sigma(\phi) = 0$. Assim, para quase todo valor $a \in L$, H_a é de Morse.

A dificuldade de obter resposta positiva para as questões (2) e (3) acima, está principalmente no fato de que a hipótese de C^0 - K -determinação finita não é necessariamente aberta. Isto é, deformações arbitrariamente próximas de um germe C^0 - K -finitamente determinado podem não ser C^0 - K -finitamente determinadas. Por exemplo:

$$\text{Seja } f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0 \text{ dado por } f(x, y) = (x^2 + y^2)^2.$$

Como $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(0) \cap \Sigma(f) = \{0\}$. Portanto f é C^0 - K -finitamente determinado. Mas a deformação de f , dada por $f_{\varepsilon} = (x^2 + y^2 - \varepsilon x)^2$ não é C^0 - K -finitamente determinada para ε próximo do zero, pois $f_{\varepsilon}^{-1}(0) \cap \Sigma(f_{\varepsilon}) \neq \{0\}$.

Os exemplos de campos hamiltonianos a serem discutidos no §.4. mostram as dificuldades envolvidas no estudo das perturbações de um campo quase-homogêneo.

§.3. Campos Lineares

Verjovsky e outros em [V S], e Lopes de Medrano em [M] consideram o problema de caracterizar os campos diagonais de Morse por outros métodos, neste parágrafo faremos a caracterização de campos lineares de tipo Morse através da determinação finita da função ϕ associada ao campo.

Seja $F: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ campo linear determinado pela matriz dos seus auto-valores

$$F(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

com os λ_i complexos e distintos do zero.

A função ϕ , associada a este campo é:

$$\phi: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i (x_i^2 + y_i^2); \sum_{i=1}^n b_i (x_i^2 + y_i^2) \right)$$

onde $x_i + iy_i = z_i$ e $\lambda_i = a_i + ib_i$ $1 \leq i \leq n$

O conjunto $\phi^{-1}(0)$ é dado por:

$$\phi^{-1}(0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} / \sum_{i=1}^n a_i (x_i^2 + y_i^2) = 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n b_i (x_i^2 + y_i^2) = 0 \right\}$$

Então $\phi^{-1}(0)$ é a intersecção de duas quádricas analíticas reais em $\mathbb{R}^{2n}$.

Usando a proposição 1.3, vamos obter uma condição para que F seja de Morse, através da C^{ℓ} - K -determinação finita de ϕ .

Primeiramente, fixemos $n=2$.

3.1. Proposição:

Seja $F: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ um campo linear dado por:

$$F(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Então F é de Morse $\leftrightarrow \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$

De fato:

Se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ então $a_1 + ib_1 = -k(a_2 + ib_2)$ onde k é constante real maior que zero e

$$\phi^{-1}(0) = \left\{ (x_1, y_1, x_2, y_2) / +k(x_1^2 + y_1^2) = (x_2^2 + y_2^2) \right\}$$

Calculando o conjunto singular $\Sigma(\phi)$, obtemos $\Sigma(\phi) = \mathbb{R}^4$, pois o Jacobiano de ϕ é dado por:

$$J(\phi) = \begin{bmatrix} 2a_1x_1 & 2a_1y_1 & 2a_2x_2 & 2a_2y_2 \\ 2b_1x_1 & 2b_1y_1 & 2b_2x_2 & 2b_2y_2 \end{bmatrix}$$

Todos os menores 2×2 deste Jacobiano são nulos.

Neste caso, $\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) \neq \{0\}$, portanto ϕ não é finitamente determinada e o campo F não é de Morse.

a. Se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, ou seja $\lambda_1 = k\lambda_2$ onde k é constante real > 0 , obtemos:

$$\begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \end{cases} \rightarrow \phi^{-1}(0) = \{0\}$$

Neste caso, a função ϕ é C^0 - $\mathcal{K}$ -finitamente determinada, portanto C^0 - $\mathcal{K}$ -finitamente determinada, e o campo F é de Morse.

b. Se $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$, pelo Jacobiano da função ϕ obtemos que $\Sigma(\phi) = \{0\}$.
Então $\phi^{-1}(0) \cap \Sigma(\phi) = \{0\}$ e o campo F é de Morse.

Observação: Quando $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$, $a_1 = k_a \cdot a_2$ e $b_1 = k_b \cdot b_2$ onde k_a e k_b são constantes reais e distintas.

Se k_a e k_b forem menores que zero, $\phi^{-1}(0) = M_1 \cap M_2$, onde

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } k_a(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = 0\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } k_b(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = 0\}$$

Então $M_F = \phi^{-1}(0)$ é variedade 2-dimensional.

Se um destes valores for maior que zero, uma das variedades M_i é nula e $M_F = \phi^{-1}(0) = \{0\}$.

Vamos analisar agora o caso $n > 2$.

3.2. Definição:

Dizemos que os auto-valores de F são genéricos, se $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ para $i \neq j$.

3.3. Definição:

O domínio de Poincaré em $\mathbb{C}^n$, é o conjunto

$$\pi = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } 0 \notin H(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right\}$$

onde $H(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é o fecho convexo de $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

O complementar do conjunto π é chamado de domínio de Siegel.

3.4. Proposição:

Seja $F: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ campo linear. Se $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $\forall i \neq j$.

Então as seguintes condições são equivalentes:

i. F é de Morse

ii. $\phi^{-1}(0) = \{0\}$

iii. Se $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, então o ideal $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$, gerado por ϕ_1 e ϕ_2 , é elíptico.

iv. Existe constante C , e uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^{2n}$ tal que:

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 \geq C |(x, y)|^2$$

Demonstração:

As equivalências entre os itens (ii), (iii) e (iv) seguem do fato que $\phi^{-1}(0) = \{0\}$ se e somente se ϕ é C^0 - ϵ -finitamente determinada (proposição 3.4, cap. 0).

Só falta mostrar que, com a hipótese $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $\forall i \neq j$

$$F \text{ é de Morse} \Leftrightarrow \phi^{-1}(0) = \{0\}.$$

($\Leftarrow$) Se $\phi^{-1}(0) = \{0\}$, $\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) = \{0\}$ e F é de Morse.

($\Rightarrow$) Se F é de Morse, então $\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) = \{0\}$.

Mas se $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $i \neq j$ temos que $\Sigma(\phi) = \mathbb{R}^4$, pois todos os menores 2×2 do Jacobiano de ϕ são nulos. Portanto $\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) = \phi^{-1}(0)$.

Sob a hipótese de que os λ_i são genéricos, é fácil verificar que $\Sigma(\phi) = 0$. Assim F é sempre de Morse. Quando F está no domínio de Poincaré, sabe-se que o campo é transversal às esferas S_ϵ (ver [Gu] para maiores detalhes) e portanto $\phi^{-1}(0) = \{0\}$. Quando F está no domínio de Siegel, $\phi^{-1}(0)$ é variedade $2n-2$ dimensional, mas $\Sigma(\phi) = \{0\}$ então $\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) = \{0\}$ e o campo é de Morse. ■

Vamos supor agora, que os λ_i não são genéricos: ou seja existe algum par (λ_i, λ_j) tal que $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Seja $J = \{i/i=1, \dots, n \text{ tal que } \lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R} \text{ para } j \neq i; 1 \leq j \leq n\}$

Podemos considerar $C^n = C^J \times C^{J^c}$ onde J^c é o conjunto complementar de J .

3.1.5. Proposição:

F é de Morse se e somente se $F|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{2J^c}}$ é de Morse.

Demonstração:

Seja (i, j) algum par tal que $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{R}$. Os menores 2×2 correspondentes a este par são:

$$\begin{vmatrix} 2a_i x_i & 2a_j x_j \\ 2b_i x_i & 2b_j x_j \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 2a_i y_i & 2a_j y_j \\ 2b_i y_i & 2b_j y_j \end{vmatrix}$$

Estes menores são nulos se e somente se $x_i x_j = 0$ ou $y_i y_j = 0$.

Portanto $\Sigma(\phi)$ contém Σ_{ij} onde

$$\Sigma_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} / x_i = x_j = y_i = y_j = 0\}$$

É claro que $\Sigma(\phi) = \bigcup_{i \in J} \Sigma_{ij}$

Temos:

$$\phi^{-1}(0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ tal que } \sum_{i=1}^n a_i (x_i^2 + y_i^2) = 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n b_i (x_i^2 + y_i^2) = 0 \right\}$$

Então:

$$\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} / \sum_{i \in J^c} a_i (x_i^2 + y_i^2) = 0 \text{ e } \sum_{i \in J^c} b_i (x_i^2 + y_i^2) = 0 \right\} (*)$$

Mas (*) nos diz que $\Sigma(\phi) \cap \phi^{-1}(0) = \{0\}$ se e somente se

$$\left. \phi^{-1}(0) \right|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{2J^c}} = \{0\}, \text{ então } F|_{\mathbb{R}^{2J^c}} \text{ é de Morse.} \quad \blacksquare$$

.§.4. Campos Hamiltonianos:

Seja $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ holomorfa.

Definimos o hamiltoniano de f , como o campo H_f , dado por:

$$H_f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

$$H_f(z, w) = \left[\frac{\partial f}{\partial w}, -\frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

As curvas de nível de f são invariantes para o fluxo de H_f . A variedade M associada a H_f é dada por:

$$M = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{w} \right\}$$

Vamos analisar exemplos de Hamiltonianos associados a funções holomorfas $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$.

.4.1: Exemplo: $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$

$$f(z, w) = z^2 + g(z, w)$$

onde $g(z, w)$ é germe de função holomorfa com grau de $g > 2$.

$$H_f(z, w) = \left[\frac{\partial g}{\partial w}; -(2z + \frac{\partial g}{\partial z}) \right]$$

$$\left\langle H_f(z, w); (z, w) \right\rangle = g_w \cdot \bar{z} - 2zw - g_z \cdot \bar{w} = (g_w \cdot \bar{z} - g_z \bar{w}) - 2z\bar{w}.$$

A função $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associada a H_f é:

$$\phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left[-2(x_1 x_2 + y_1 y_2) + R(h) ; -2(x_2 y_1 - x_1 y_2) + I(h) \right]$$

onde $h(z, w) = g_w \cdot \bar{z} - g_z \bar{w}$.

O germe de função $\phi_0 = \left[-(2x_1 x_2 + y_1 y_2) ; 2(x_2 y_1 - x_1 y_2) \right]$ é 2- $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, pois tem singularidade isolada na origem e o ideal formado pelos menores 2×2 de $J(\phi_0)$ é elíptico.

Então H_f é de Morse e o tipo topológico da variedade M é independente de G .

.4.2: Exemplo: $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$.

$$f(z, w) = z^p + w^q,$$

com p, q inteiros e $2 < p < q$.

Neste exemplo f é quase-homogênea de tipo $(q, p; p, q)$.

Em [V.S] Verjovsky e outros determinam que M_f é a reunião dos planos $z = 0$, $w = 0$ e o cone sobre um nó de tipo (p, q) no toro. E portanto f é de tipo Morse.

Considerando uma família de deformações $f_t(z, w) = f(z, w) + t\Theta(z, w)$ de f , onde Θ é um polinômio com filtração maior que $\text{fil}(f)$, podemos fazer duas perguntas:

- i) H_f é de Morse ?
- ii) M_0 e M_t são variedades homeomorfas?

O lema abaixo é uma resposta parcial para a questão (ii).

.Lema:

Se a filtração de Θ é determinada pelo monômio $z^r w^s$ e se

$$rq + sp - 2(r+s) > p(q-2)$$

então o campo H_f é de tipo Morse, e as variedades M_0 e M_t são homeomorfas.

Demonstração:

O germe ϕ associado ao campo H_f é quase-homogêneo de tipo $\left[q-2, q-2, p-2, p-2; pq - (p+q) \right]$, temos:

$H_{f_t} = H_f + tH_\Theta$ e $\phi_t = \phi + t\phi_\Theta$, onde H_Θ e ϕ_Θ são respectivamente: o campo Hamiltoniano e a função associada ao polinômio Θ . A filtração de ϕ_Θ é determinada pelo monômio $rz^{r-1}.w^s$, ou seja:

$$\text{fil}(\phi_\Theta) = (q-2)(r-1) + (p-2)(s+1) = rq + sp - 2(r+s) - q + p$$

Portanto $\text{fil}(\phi_\Theta) > \text{fil}(\phi)$. Como H_f é de Morse, a função ϕ é C^0 -K-finitamente determinada. Além disso, ϕ é quase-homogênea.

Logo ϕ e ϕ_t são homeomorfas e consequentemente, as variedades M_0 e M_t são homeomorfas para qualquer t . ■

Nem todas as deformações de f do tipo $f+t\Theta$ com $\text{fil}(\Theta) > \text{fil}(f)$ tem função associada $\phi_t = \phi + t\phi_\Theta$ com $\text{fil}(\phi_t) > \text{fil}(\phi)$.

Construindo o diagrama de Newton das soluções (r,s) para as equações :

- .1. $\text{fil}(\phi_{f_t}) \geq \text{fil}(\phi_f)$
- .2. $\text{fil}(\Theta) \geq \text{fil}(f)$

Obtemos o gráfico abaixo:

se (r,s) pertence à região hachurada ainda não podemos chegar a nenhuma conclusão.

.4.3: Exemplo: $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$

$$f: (z, w) = z^p + w^\ell z.$$

com p e ℓ inteiros.

f é quase-homogênea de tipo $(\ell, p-1; \ell, p)$.

$f^{-1}(0)$ é a reunião do plano $z=0$, com o cone sobre o nó de tipo $(p-1, \ell)$.

O campo Hamiltoniano associado a f é:

$$H_f(z, w) = (\ell w^{\ell-1} z; -p z^{p-1} - w^\ell)$$

H_f é quase-homogêneo de tipo $[\ell, p-1; \ell p - (p-1), (p-1)\ell]$.

$H_f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$, e portanto H_f tem singularidade isolada.

A variedade M_f associada ao campo H_f é:

$$M_f = \left\{ (z, w) / w^{\ell-1} (\ell |z|^2 - |w|^2) = p z^{p-1} \bar{w} \right\}$$

Considerando a forma polar das variáveis z e w , com $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$ e $w = |w| \cdot e^{i\beta}$, onde α e β são os argumentos de z e w respectivamente, temos:

$$M_f = \left\{ (z, w) / |w|^{\ell-1} [\ell |z|^2 - |w|^2] \cdot e^{i(\ell-1)\beta} = p |z|^{p-1} |w| \cdot e^{i(\alpha(p-1)-\beta)} \right\}$$

Ou seja: $M_f = M_1 \cap M_2$, onde

$$M_1 = \left\{ (z, w) \text{ tal que } |w|^{\ell-1} [\ell |z|^2 - |w|^2] = p |z|^{p-1} |w| \right\}$$

$$M_2 = \left\{ (z, w) \text{ tal que } e^{i(\ell-1)\beta} = e^{i(\alpha(p-1)-\beta)} \right\}$$

Portanto M_f é um cone sobre o nó de tipo $(\ell, p-1)$ sobre o toro e o campo H_f é de Morse.

BIBLIOGRAFIA

- [A] Arnol'd, V.I., Singularities of differentiable Maps.
Monographs in Math. Springer-Verlag Vol 82.

- [B] Bruce, J.W., Euler characteristics of real varieties.
Bull. London Math. Society. a ser publicado.

- [B R S] Bruce, J.W., Ruas, M.A.S., Saia, M.J., A Note on
Determinacy. Proc. A.M.S. a ser publicado.

- [D1] Damon, J.N. Topological triviality and versality for
subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$, Memoirs A.M.S. 75 # 389 (1988)

- [D] ————— Topological invariants of μ -constant deformations
of complete intersection singularities. Oxford Quart. J.
158, pag.139-160, (1989)

- [D G] Damon, J.N., and Gaffney, T., Topological triviality of
deformations of functions and Newton filtrations.
Inv. Math. 72 pag.335-358, (1983).

- [G] Gaffney, T., Integral closure of modules and Whitney-equisig-
ularity. Preprint. (1989).

- [G.Tese] Gaffney, T., Properties of finitely determined germs.
Ph.D. Thesis, Brandeis University, (1975)

- [G M] Gaffney, T., and Mond, D.M.Q., Weighted homogeneous maps
from the plane to the plane. Preprint, U.Warwick. (1989)

- [Gibson] Gibson, C.G., Wirthmüller, K., Du Plessis, A.A., and Looijenga, E.J.N., (1976) Topological stability of smooth mappings. Lecture Notes in Math. #552 Springer-Verlag,
- [G G] Golubitsky, M., and Guillemin, V., Stable Mappings and Their Singularities. Grad. Texts in Math. Springer-Verlag #14
- [Gu] Gukenheimer., Hartman's theorem for complex flows in the Poincaré domain. Compositio Math. #24 pag. 75-82 (1972)
- [H] Hironaka, H., Introduction to real analytic sets and real analytic maps. Pub. Inst. Matematico L. Tonelli dell'U. di Pisa. (1983)
- [Ko] Kouchnirenko, A.G., Newton polyhedra and Milnor numbers. Inv. Math. #32, pag. 1-31 (1976)
- [K] Kovanskii, A.G., Newton polyhedra and toroidal varieties. Funct. Anal. and Appl. #11 pag. 289-295. (1977)
- [Lê] Lê Dũng Tráng, Ramanujan, C.P.: The invariance of Milnor's number implies the invariance of topological type. Amer. Jour. Math. #98 pag. 67-78 (1976)
- [M] Medrano, L. de , The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field. Springer-Verlag Lect. Notes #1345 233-245
- [Mi] Milnor, J.N., Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. studies, Princeton University Press. (1968)

- [P] Du Plessis, A.A., Genericity and smooth finite determinacy.
Proc. Symp. in Pure Math., Vol 40 part 1, 295-312.
A.M.S. (1983)
- [Pr] Prüfer, H., Untersuchungen Über Teilbarkeitseigenschaften in
Körpern, J. Reine Angew. Math. #168, (1932)
- [R] Ruas, M.A.S., C^{ℓ} - $\mathcal{K}$ -determinação finita e Campos holomorfos de
tipo Morse. An. Acad. Bras. Ciencias. #57(3) (1985)
- [T1] Teissier, B., Multiplicities polaires, sections planes, et
conditions de Whitney. La Rabida Springer Lecture Notes
#966 pag. 314-491 (1983).
- [T2] ———, Introduction to equisingularity problems. Proc.
A.M.S. Symp. in Pure Math. #29 Arcata (1974)
- [T3] ———, Integral closure of Ideals. Seminaire Ecole
Polytechnique. (1974)
- [Ti] Timourian, J.G., Invariance of Milnor's number implies
topological triviality. Amer. Jour. Math. 99 pag.437-446
- [V S] Verjovsky, A., Sead, J., and Gómez-Mont, X., On the topology
of a holomorphic foliation around an isolated
singularity Preprint
- [Y] Yoshinaga, E., Topological Principal part of analitic
Functions. Trans. of the A.M.S. Vol.314, #2, (1989)
- [W] Wall, C.T.C., Finite determinacy of smooth map-germs. Bull.
London Math. Society #13 pag.481-539 (1981)