SOBRE
APLICAÇÕES GENÉRICAS $M^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Yolanda Kioko Saito Furuya

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do grau de Doutor em Ciên-
cias (Matemática).

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Paulo Ferreira da Silva Porto Jr.*

São Carlos

1986

MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS

Ao Professor Paulo Ferreira da Silva Porto Jr., pela orientação efetiva, pelo estímulo e pela paciência;

Aos Professores Luis Emeristo Mata-Lorenzo, Francisco Mercuri e Vera Lucia Carrara Zanetic, pelas conversas e sugestões;

Aos Professores do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pela formação;

Aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pelo apoio;

A Noritsuna Furuya, José Hiroki Saito e Nelio Baldin, pelo incentivo à utilização de recursos computacionais;

Ao meu gato Gremlin, pela companhia.

A B S T R A C T

The main purpose of the present work is to study geometrical properties of closed, oriented 4-manifolds as domain of generic maps into the plane.

First, we get the local configurations for the 2-dimensional complex W_f of the Stein Factorization of a stable map $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ and we study some examples where the maps are not stable.

Then, we study the special generic maps where all the singularities are definite folds, and we also classify the 4-manifolds which arise as the domain of such a map, generalizing the theorems of O. Burlet and G. de Rham for the 3-dimensional case.

Finally, we get a relation between smooth families of special generic maps and image-homotopy (in the sense of L. Kauffman) of immersions of compact surfaces with boundary into the plane.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I	
DEFINIÇÕES, RESULTADOS GERAIS E O CASO 3-DIMENSIONAL	
1. As aplicações genéricas	3
2. A Fatorização de Stein	5
3. Vizinhanças retangulares	8
4. Vizinhanças produto e variedades transversais	10
5. O caso 3-dimensional orientado	
5.1. Configurações locais	15
5.2. Decomposição de M em fibrados	20
5.3. Realização de um complexo W -imerso	22
5.4. Aplicações genéricas especiais	24
5.5. Arcos π -estáveis	26
CAPÍTULO II	
O CASO 4-DIMENSIONAL ORIENTADO	
1. Introdução	33
2. Alguns resultados de Teoria de Morse e Cobordismo	
2.1. Cirurgia	34
2.2. Vizinhanças características	35
3. Configurações locais	
3.1. Introdução	36
3.2. Os pontos de dobra definida	38
3.3. Os pontos de sela simples	39

3.4. Os pontos de sela duplos	45
3.5. Os pontos cuspidais	52
4. Decomposição de M	56
5. O problema de realização	59
6. Os arcos π -estáveis	61

CAPITULO III

APLICAÇÕES GENERICAS ESPECIAIS EM DIMENSÕES MAIS ALTAS

1. Introdução	77
2. Sobre fibrados orientados em k-esferas	79
3. A fatorização de Stein de uma aplicação genérica especial e os fibrados em k-esferas sobre W_f ..	82
4. Sobre os domínios de aplicações genéricas especiais	87

CAPITULO IV

RELAÇÕES ENTRE APLICAÇÕES GENERICAS E IMERÇÕES

1. Introdução	91
2. As aplicações genéricas especiais e o problema de extensão de imersões	92
3. Imagem-equivalência de aplicações genéricas especiais	
3.1. Introdução	95
3.2. Imagem-homotopia de imersões	97
3.3. Equivalência de aplicações genéricas especiais segundo O. Burlet e G. de Rham	98
3.4. Imagem-equivalência	99

BIBLIOGRAFIA	106
--------------------	-----

INTRODUÇÃO

Os principais objetos de nosso estudo são as variedades M^4 fechadas (compactas e sem bordo) orientadas de dimensão quatro e as aplicações genéricas definidas em tais variedades e com valores no plano.

O objetivo deste trabalho é analisar os aspectos geométricos relacionados com tais objetos. Este estudo compreende os seguintes problemas:

(1) Analisar o comportamento topológico das fibras $f^{-1}(p)$ de uma aplicação estável f , principalmente em torno da imagem do conjunto singular;

(2) Classificar as variedades fechadas orientadas de dimensão quatro que podem ser domínios de aplicações genéricas especiais (aplicações cujas singularidades são todas de dobra definida) com valores no plano;

(3) Através da imagem do conjunto singular, buscar informações sobre a variedade domínio.

Tais estudos envolvem, essencialmente, o estudo do complexo bidimensional Wf obtido como quociente da variedade M pela relação de equivalência que identifica pontos de uma mesma componente conexa de uma fibra da aplicação.

A escolha da dimensão se deve ao fato que o caso 3-dimensional já está praticamente resolvido e, a dimensão 4 permite ainda visualizar as fibras (bidimensionais), possibilitando uma análise gráfica dos problemas. Porém, apresentaremos também alguns resultados concernentes à dimensão 3 e a dimensões maiores que quatro.

A seguir, apresentaremos a organização do presente trabalho.

No Capítulo I apresentaremos as principais definições e alguns resultados gerais delas decorrentes, além de um resumo sobre os resultados conhecidos para o caso 3-dimensional, que inspiraram este estudo.

No Capítulo II apresentaremos os resultados relacionados com o problema (1) reunidos no TEOREMA 1, que apresenta todas as configurações locais admissíveis para o complexo Wf de uma aplicação estável $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Além disso, serão apresentadas também algumas transições nos espaços $W\langle F_t \rangle$ nos pontos de bifurcação de uma homotopia π -estável $F: M \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ em $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$.

No Capítulo III serão apresentados os Teoremas A' e B', relacionados com o problema (2). Na demonstração destes teoremas, obtemos alguns resultados válidos para dimensões mais altas. Além disso, como pré-requisitos ao Capítulo, apresentamos um resumo de alguns resultados conhecidos sobre fibrados em k -esferas.

Finalmente, no Capítulo IV, desenvolvemos o problema (3) em duas partes: a primeira trata do reconhecimento de uma coleção de círculos imersos no plano como imagem do conjunto singular de uma aplicação genérica especial; a segunda trata de uma nova classificação de aplicações genéricas especiais, em função de condições especiais sobre a imagem. Nesta última parte, surge um teorema relacionando famílias de aplicações genéricas especiais com imagem-homotopia de imersões de superfícies compactas com bordo, no plano.

Durante toda a evolução deste trabalho, o apelo visual será acentuado, não apenas devido à dificuldade de se expressar com palavras os elementos estudados, mas para fazê-lo de maneira mais clara e, por outro lado, devido também à própria natureza do trabalho. Algumas figuras relacionadas com formas locais de singularidades foram obtidos com auxílio de um microcomputador.

CAPÍTULO I

DEFINIÇÕES, RESULTADOS GERAIS E O CASO 3-DIMENSIONAL

1. As aplicações genéricas

Seja M uma variedade fechada (compacta e sem bordo), de classe C^∞ e de dimensão n . Uma aplicação diferenciável (classe C^∞) $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é GENÉRICA se, para todo ponto singular a em M , existirem coordenadas locais $(u, x, y_1, \dots, y_{n-2})$ e (U, Y) definidas em vizinhanças de a e de $f(a)$ respectivamente, de tal forma que f pode ser representada por uma das seguintes formas normais:

$$(I) \quad (u, x, y_1, \dots, y_{n-2}) \rightarrow (u, x^2 + \sum_{i=1}^{n-2} y_i^2) \\ \text{(dobras ou dobras definidas)}$$

$$(II) \quad (u, x, y_1, \dots, y_{n-2}) \rightarrow (u, x^2 - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n-2} y_i^2) \\ \text{(selas ou dobras indefinidas, para } 0 < \lambda \leq n-2)$$

$$(III) \quad (u, x, y_1, \dots, y_{n-2}) \rightarrow (u, \pm ux \pm x^3 - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n-2} y_i^2) \\ \text{(cúspides definidas ou indefinidas, conforme } \lambda = 0 \text{ ou } > 0)$$

Uma aplicação f satisfazendo a condição acima é GENÉRICA ESPECIAL se apresentar somente pontos singulares descritos pela forma (I).

No que se segue, $S(f)$ denotará o conjunto dos pontos singulares de f ; S_0 , S_1 e C denotarão os conjuntos dos pontos singulares dos tipos I, II e III, respectivamente.

O conjunto $S(f)$ é uma subvariedade de M de dimensão um, ou seja, uma reunião finita e disjunta de curvas difeomorfas a S^1 ; S_0 e S_1 são abertos em $S(f)$, podendo ser componentes inteiras ou arcos abertos, em cujas extremidades se encontram os pontos cuspidais; e C é discreto em $S(f)$, sendo que as cúspides definidas separam arcos de S_0 de arcos de S_1 e, as indefinidas, têm arcos de S_1 de ambos os lados. Assim, o número de cúspides definidas de cada componente conexa de $S(f)$ é sempre par.

CAP. 1

Serão acrescentadas, também, duas condições globais para a estabilidade das aplicações genéricas:

(G1) Se P é um ponto de cuspide, então P é o único ponto singular na imagem inversa de $f(P)$

(G2) A restrição de f a $S(f) - C$ é uma imersão com intersecções normais

A condição (G2) implica, em particular, que $f/(S(f) - C)$ tem, no máximo, pontos duplos.

Assim, uma aplicação será dita ESTÁVEL, quando for genérica e satisfizer as condições (G1) e (G2) de estabilidade.

Em termos da teoria geral das Singularidades, uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é estável se admite uma vizinhança em $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$, com a topologia de Whitney, na qual toda aplicação g é equivalente a f , isto é, existem difeomorfismos $H : M \rightarrow M$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de tal forma que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ H \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Entre as aplicações não estáveis, também existem aquelas que admitem vizinhanças nas quais todas as não estáveis são equivalentes. É o caso das aplicações genéricas especiais não estáveis e das aplicações que aparecem no estudo dos arcos π -estáveis.

CAP. 1

2. A fatorização de Stein

Seja $f: M \rightarrow R^2$ uma aplicação genérica, de uma variedade n -dimensional fechada M com valores no plano. A aplicação f induz em M uma relação de equivalência que identifica pontos de uma mesma componente conexa de uma fibra de f , isto é,

$x \sim y$ se, e só se, $f(x) = f(y) = z$ e x e y estão na mesma componente conexa de $f^{-1}(z)$

Essa relação de equivalência, por sua vez, define um espaço quociente W_f de M e a aplicação quociente $q: M \rightarrow W_f$ induz uma aplicação $f': W_f \rightarrow R^2$, que comuta o diagrama

Tal decomposição é conhecida como FATORIZAÇÃO DE STEIN de f . Pode-se dizer também que W_f é a fatorização de Stein.

Com as condições globais de estabilidade segue que se $x \in S(f)$, então $q^{-1}(q(x)) \cap S(f)$ tem no máximo dois pontos.

Mas o único caso em que pode ocorrer $q^{-1}(q(x)) \cap S(f) = \{x, x'\}$, é quando x e x' estão em S_1 pois, por (G1) estes não podem ser cúspides e, a forma normal (I) de um ponto singular de S_0 implica que $f^{-1}(f(x))$ é constituído de pontos isolados e consequentemente, $q^{-1}(q(x)) = \{x\}$.

Quando dois pontos singulares x e x' são tais que $q(x) = q(x')$, diz-se que estes pontos são DUPLOS. No outro caso, o ponto singular é SIMPLES.

As aplicações genéricas especiais nunca apresentam pontos singulares duplos, devido à forma local das singularidades.

A mesma relação de equivalência pode ser definida para aplicações quaisquer entre dois espaços topológicos, porém nem sempre a fatorização de Stein assim definida possui propriedades interessantes.

No caso das aplicações genéricas, pode-se obter melhores resultados, como as proposições a seguir, que garantem que $W_f = q(S(f))$ possui uma estrutura de superfície e a restrição de f' a esse espaço é uma imersão.

CAP. 1

PROPOSIÇÃO 1:

A aplicação quociente $q: M \rightarrow Wf$ é aberta.

Para se demonstrar esta proposição, será utilizado o seguinte lema:

LEMA 1:

A restrição $f|(M - S_0)$ é uma aplicação aberta.

DEM(do lema 1):

Seja U um aberto em $M - S_0$. Basta mostrar que $f(U)$ é vizinhança de cada um de seus pontos.

Seja, então, $y \in f(U)$.

Se y for valor regular de f , pode-se tomar $x \in f^{-1}(y)$ e um aberto V contendo x e contido em $U \cap (M - S(f))$ e, como a restrição de f a $M - S(f)$ é uma submersão (portanto, uma aplicação aberta), segue que $f(V)$ é um aberto contendo y e contido em $f(U)$.

Por outro lado, se y for imagem de um ponto x de cúspide ou de sela, o resultado segue pelas expressões das formas locais correspondentes.##

DEM(da proposição):

Seja U um aberto de M . Não há perda de generalidade em supor U conexo e, como Wf tem a topologia quociente, basta mostrar que $q^{-1}(q(U))$ é aberto em M .

Seja $x \in q^{-1}(q(U))$.

Se $x \in M - S_0$ e V é um aberto contendo x e contido em $U - S_0$, então $f^{-1}(f(V))$ é um aberto, pois $f(V)$ é aberto pelo lema 1, e a componente conexa de x em $f^{-1}(f(V))$ é um aberto contido em $q^{-1}(q(U))$.

Se $x \in S_0$, pode-se tomar uma vizinhança coordenada V de x , contida em U , expressa como

$$V = \{ (u, x, y_1, \dots, y_{n-2}) : u^2 < \varepsilon^2 \text{ e } x^2 + y_1^2 + \dots + y_{n-2}^2 < r^2 \}$$

-1

em algum sistema de coordenadas. Então $q^{-1}(q(V)) = V$ e, portanto, $x \in V \subset q^{-1}(q(U))$.##

CAP. 1

PROPOSIÇÃO 2:

$Wf - q(S(f))$ possui uma estrutura de superfície regular sem bordo (não compacta) que torna a restrição de f' a esta superfície uma imersão.

DEM:

Sejam W_0 uma componente conexa de $Wf - q(S(f))$, $f_0 = f/q^{-1}(W_0)$, $q_0 = q/q^{-1}(W_0): q^{-1}(W_0) \rightarrow W_0$ e $F_0 = f'/W_0$.

Como f_0 é contínua e aberta e q_0 é aplicação quociente induzida por f_0 , temos que F_0 é contínua, injetora e aberta. Logo, F_0 é um homeomorfismo de W_0 sobre a imagem, que é um aberto do plano.

Então $f'/(Wf - q(S(f)))$ é um homeomorfismo local e induz em $Wf - q(S(f))$ a estrutura de superfície procurada.##

Segue daí que $Wf - q(S(f))$ é orientável, pois imerge no plano.

Será mostrado que, no caso em que f é genérica especial, Wf possui uma estrutura natural de superfície com bordo e f' se torna uma imersão de Wf no plano. No caso geral, Wf é um complexo celular bidimensional que é uma reunião de superfícies que imerem, através de restrições de f' , no plano. O conjunto dos pontos singulares do tipo I (dobras simples) corresponde, através de q , ao bordo de Wf e, os outros pontos singulares, correspondem a singularidades do complexo Wf .

As configurações locais de Wf no caso em que M é orientada e de dimensão 3, obtidas por P. Porto, H. Levine e L. Kushner [16], serão apresentadas no parágrafo 5 deste mesmo capítulo, juntamente com outros resultados, para este mesmo caso, relacionados com a descrição de M nas vizinhanças de um ponto singular.

O caso $n = 4$, onde aparecem novas situações, será objeto de estudo no Capítulo II.

Nos próximos parágrafos serão apresentadas definições e proposições que visam fornecer um "método" para esse estudo, essencialmente o mesmo utilizado para o caso da dimensão 3, que consiste em estudar as imagens inversas de retângulos do plano.

CAP. 1

3. Vizinhanças Retangulares

A noção de Vizinhança Retangular e sua existencia é dada na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3:

Para cada $y \in f(M)$ no plano, existe uma VIZINHANÇA RETANGULAR $I \times J$ de y tal que a composta $g = p \circ f$

$$f^{-1}(I \times J) \xrightarrow{f} I \times J \xrightarrow{p} I$$

é uma fibração trivial, onde I é um intervalo aberto e J um intervalo fechado, e p é a projeção usual.

A demonstração desta proposição será uma decorrência do seguinte lema:

LEMA 2 (TEOREMA DE EHRESMANN):

Sejam M e N variedades diferenciáveis conexas, sendo N sem bordo, e $f: M \rightarrow N$ uma submersão própria sobre N . Tem-se:

(a) Se $\partial M = \emptyset$, então M é um fibrado sobre N .

(b) Se $\partial M \neq \emptyset$ e $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow N$ for também uma submersão sobre N , então M será um fibrado sobre N e

$$\partial f^{-1}(y) = (f|_{\partial M})^{-1}(y)$$

para todo y em N .

CAP. 1

DEM (DA PROPOSIÇÃO 3):

Seja $y \in f(M) \subset \mathbb{R}^2$. Se y for valor regular de f , basta tomar $I \times J$ como sendo uma vizinhança de y constituída somente de valores regulares de f . Se y for valor crítico, tomando-se um segmento J_0 centrado em y e transversal a f , pode-se construir $I \times J = (-\varepsilon, \varepsilon) \times J$ com $J_0 = \{0\} \times J$ e ε suficientemente pequeno para que $J_t = \{t\} \times J$ seja transversal a f para todo $t \in I$ e $\partial(I \times J) = I \times \partial J \subset \mathbb{R}^2 - f(S(f))$.

Pela construção tem-se que f é transversal a $I \times J$ e também a $\partial(I \times J)$ e portanto, $f^{-1}(I \times J)$ é uma subvariedade de M , com bordo

$$\partial(f^{-1}(I \times J)) = f^{-1}(\partial(I \times J)) = f^{-1}(I \times \partial J).$$

Agora, $g/f^{-1}(I \times \partial J)$ é uma submersão sobre $p((I \times \partial J) \cap f(M))$, pois $I \times \partial J$ está contido em $\mathbb{R}^2 - f(S(f))$. Mas $p((I \times \partial J) \cap f(M)) = I$ pois, qualquer que seja $y \in f(M)$, pelo menos uma das componentes de $I \times \partial J$ está inteiramente contida em $f(M)$, como se pode ver pelas formas locais de f . Assim, g é uma submersão sobre I .

Tem-se que g é uma submersão própria sobre I como se segue: Para cada $x \in f^{-1}(I \times J)$ e $y = f(x) \in J_t = \{t\} \times J$, tem-se que $df_x(T_x M) + T_y J_t = T_y \mathbb{R}^2$ pois J_t é transversal a f , e, devido à dimensão de $T_y J_t$, segue que g é submersão (sobre I , já que sua restrição já era sobrejetora). Agora, se $K \subset I$ é um compacto, $p^{-1}(K) = K \times J$ é compacto em $\mathbb{R}^2$ (logo fechado) e portanto, $f^{-1}(K \times J) = g^{-1}(K)$ é compacto, já que M é compacto. Logo, g é uma aplicação própria.

Estas considerações acima valem ainda para cada componente conexa de $g^{-1}(I)$, donde, pelo teorema de Ehresmann, segue que $f^{-1}(I \times J) = g^{-1}(I)$ é um fibrado sobre I e, como I é contrátil, a fibração é trivial.##

COROLÁRIO:

Para cada $y \in f(M) - f(S(f))$, $f^{-1}(y)$ é uma variedade $(n-2)$ -dimensional, compacta e sem bordo, e se M for orientada, $f^{-1}(y)$ também a será.

DEM:

-1

Que $f^{-1}(y)$ é uma variedade $(n-2)$ -dimensional compacta e sem bordo, é óbvio.

Para M orientada, seja $I \times J$ uma vizinhança retangular de y , como na proposição. Então $f^{-1}(I \times J)$ é difeomorfo a $I \times f^{-1}(\{t_0\} \times J)$. Como y é valor regular de f e J é transversal a f , a aplicação $f^{-1}(\{t_0\} \times J) \rightarrow J$ não tem singularidades. Logo, $f^{-1}(\{t_0\} \times J)$ é difeomorfa a $f^{-1}(y) \times J$. Então, $f^{-1}(I \times J) \cong I \times f^{-1}(y) \times J$ sendo orientada, implica que $f^{-1}(y)$ é orientada.##

CAP. 1

4. Vizinhança Produto e Variedades Transversais.

Serão introduzidas as noções de Vizinhança Produto de um ponto x de M e Variedade Transversal a f em x , que facilitam tecnicamente a compreensão do comportamento das imagens inversas de pontos em vizinhanças de $f(S(f))$.

Para cada ponto x em M , a componente conexa de $f^{-1}(I \times J)$ contendo x , onde $I \times J$ é uma vizinhança retangular de $y = f(x)$, é chamada VIZINHANÇA PRODUTO de x .

Como não há unicidade da vizinhança retangular de y , também não há unicidade da vizinhança produto de x . Será introduzida, a seguir, uma relação de equivalência nesse conjunto das vizinhanças produto, juntamente com a noção de Variedade Transversal.

Sejam um ponto y no plano e $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ um mergulho de um intervalo fechado $J = [-r, r]$ no plano com $\alpha(0) = y$, transversal a f e $\alpha(J) \cap f(S(f)) = \{y\}$ se $y \in f(S(f))$. α nessas condições é chamado um ARCO TRANSVERSAL a f em y .

A inclusão $i: J_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da proposição 3 é um arco transversal. Observa-se também que todos os arcos transversais podem ser definidos num mesmo intervalo fechado J .

Sejam $X \in M$ e $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco transversal a f em $f(x)$. A componente conexa de $f^{-1}(\alpha(J))$ contendo x é chamada VARIEDADE TRANSVERSAL a f em x (sobre $\alpha(J)$).

PROPOSIÇÃO 4:

Para cada y em $f(M)$ existem uma vizinhança retangular $I \times J$ de y e um difeomorfismo $\psi: I \times T \rightarrow f^{-1}(I \times J)$ de forma que a composição

$$f \circ \psi: I \times T \rightarrow I \times J \\ (t, x) \mapsto (t, h_t(x))$$

define, para cada t , uma função $h_t: T \rightarrow J$ que é de Morse, exceto quando $\psi(t \times T)$ contém um ponto cuspidal de f .

Além disso, T é uma variedade compacta com bordo de dimensão $n-1$, cujas componentes conexas são variedades transversais a f em x nas componentes conexas de $f^{-1}(y)$.

Dem:

A existência do difeomorfismo segue do fato que a fibração

$$f^{-1}(I \times J) \xrightarrow{f} I \times J \xrightarrow{p} I$$

da proposição 3 é trivial.

CAP. 1

Resta mostrar que h é função de Morse exceto quando a imagem de Ψ contém um ponto cuspidal. Mas, das formas normais de f conclui-se que h só pode ter as seguintes formas:

$$h(x, y_1, \dots, y_{n-2}) = \pm x^2 \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{n-2}^2$$

quando $\Psi(t \times T)$ contém uma singularidade do tipo I ou II, e

$$h(x, y_1, \dots, y_{n-2}) = \pm x^3 \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{n-2}^2$$

quando $\Psi(t \times T)$ contém um ponto cuspidal, donde se conclui o resultado.##

COROLÁRIO 1:

Se W_0 é uma componente conexa de $W_f = q(S(f))$, então $q^{-1}(W_0)$ é um fibrado sobre W_0 , com projecção $q_0 = q|_{q^{-1}(W_0)}$ tal que:

(a) as fibras são $(n-2)$ - variedades fechadas, conexas, e orientadas se M for orientada;

(b) se o fecho de $q^{-1}(W_0)$ em M contiver pontos de S_0 , então as fibras são esferas.

DEM:

Pode-se verificar facilmente que $q_0: q^{-1}(W_0) \rightarrow W_0$ é sobrejetora e própria. Para que se possa aplicar o Teorema de Ehresmann, é preciso que q_0 seja uma submersão, ou seja, para cada $x \in q^{-1}(W_0)$ a projecção q_0 deve ter posto 2, o que equivale a dizer que $f|_{q^{-1}(W_0)}$ tem posto 2 em x devido à estrutura de W_0 . Mas isto é verdade pois x possui uma vizinhança produto $I \times J \times q^{-1}(q(x))$ e a restrição de f a essa vizinhança é a projecção sobre $I \times J$.

Logo, $q^{-1}(W_0)$ é um fibrado sobre W_0 .

O item (a) segue da proposição 4.

Agora, se o fecho de $q^{-1}(W_0)$ em M contiver pontos de S_0 , dada a forma local de tais pontos, segue as fibras são esferas.

##

COROLÁRIO 2:

Se $f(x)$ for valor regular, toda variedade transversal a f em x é difeomorfa a $J \times q^{-1}(q(x))$ e, relativamente a este domínio, f é a projecção sobre J . Isto vale, mais geralmente, para pontos x com $q^{-1}(q(x)) \cap S(f) = \emptyset$. (obs: nem todo ponto regular satisfaz essa condição)

CAP. I

Seja agora $@(f,y)$ o conjunto de arcos $\alpha: J \rightarrow R^2$ transversais a f em y , onde $J = [-r,r]$.

Se α_0 e α_1 são dois arcos de $@(f,y)$ com $\alpha_0(-r)$ e $\alpha_0(r)$ nas mesmas componentes conexas que $\alpha_1(-r)$ e $\alpha_1(r)$, respectivamente, em $R^2 - f(S(f))$, então existe uma família de arcos transversais $\alpha_t: J \rightarrow R^2$, $t \in [0,1]$, começando em α_0 e terminando em α_1 , com $\alpha_t(0) = y$ para todo t .

A homotopia $\alpha: [0,1] \times J \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t,s) = (\alpha_t(s))$ definida acima pode ser tomada como sendo diferenciável e se estende a uma aplicação $(-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times J \rightarrow R^2$ que será igualmente denotada por α , com $\alpha \in @(f,y)$ para todo t em $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Reciprocamente, se α_0 e α_1 em $@(f,y)$ são homotópicas no sentido acima, as condições sobre seus extremos é satisfeita.

Estas considerações acima levam à definição de uma relação de equivalência em $@(f,y)$ como se segue:

$\alpha_0 \sim \alpha_1 \iff$ as componentes conexas de $R^2 - f(S(f))$ contendo $\alpha_0(-r)$ e $\alpha_0(r)$ são as mesmas que contêm $\alpha_1(-r)$ e $\alpha_1(r)$, respectivamente.

que é equivalente a:

$\alpha_0 \sim \alpha_1 \iff$ existe uma homotopia $\alpha: [0,1] \times J \rightarrow R^2$ entre α_0 e α_1 tal que, para cada $t \in [0,1]$, α_t é um arco transversal a f em y .

PROPOSIÇÃO 5:

Duas variedades transversais a f em um ponto $x_0 \in M$ sobre arcos transversais equivalentes em $y_0 = f(x_0)$ são difeomorfas.

DEM:

Sejam α_0 e α_1 dois arcos transversais a f em y_0 equivalentes, definidos em $J = [-r,r]$, e $\alpha: I \times J \rightarrow R^2$ uma homotopia diferenciável entre α_0 e α_1 , estendida para $I = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Sejam também as aplicações

$$I \times M \xrightarrow{F} I \times R^2 \\ (t,x) \mapsto (t,f(x))$$

$$e \quad I \times J \xrightarrow{A} I \times R^2 \\ (t,s) \mapsto (t,\alpha_t(s))$$

CAP. 1

Pode-se ver que a aplicação A é um mergulho, o que permite a construção de uma variedade com bordo $N = A(I \times J)$ tal que:

$$(1) F \cap N, F \cap \partial N \text{ e } \partial N = A(I \times \partial J).$$

De fato, já que $N = I \times \{y_0\}$ está contido inteiramente no conjunto dos valores regulares de F , basta verificar a transversalidade nos pontos de $F^{-1}(I \times \{y_0\})$, o que decorre da transversalidade de f a α_t . Que $\partial N = A(I \times \partial J)$ segue do fato que A é um mergulho.

$$(2) P = F^{-1}(N) \text{ é uma variedade e } \partial P = F^{-1}(\partial N).$$

De posse desses dados, pode-se construir uma aplicação G como a indicada no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & I \times \mathbb{R}^2 & \\ F \nearrow & & \searrow \pi = \text{projecção} \\ P & \xrightarrow{G = \pi \circ F} & I \end{array}$$

Se G for uma submersão própria sobre I e $G/\partial P$ também for submersão sobre I , o teorema de Ehresmann garante que P é uma fibração trivial sobre I , donde $G^{-1}(0)$ e $G^{-1}(1)$ são difeomorfos. Mas $G^{-1}(t) = \{t\} \times f^{-1}(\alpha_t(J))$, o que implica que $f^{-1}(\alpha_0(J))$ e $f^{-1}(\alpha_1(J))$ são difeomorfos e portanto, as componentes conexas destas contendo x , que são as variedades transversais, são difeomorfas.

Seja então K um compacto de I . $\pi^{-1}(K) = K \times \mathbb{R}^2$ é um fechado e portanto, $G^{-1}(K) = F^{-1}(\pi^{-1}(K))$ é um fechado de $I \times M$. Na verdade, $G^{-1}(K)$ é fechado em $K \times M$ que é compacto, e portanto, é compacto. Assim, G é própria.

$G/\partial P$ é sobrejetora pois, por construção, pelo menos uma das componentes de $A(I \times \partial J)$ está na imagem de F . Logo, G também é sobrejetora.

Agora, se $(t, x) \in F^{-1}(A(I \times J))$ tem-se que $(t, f(x)) = (t, \alpha_t(s))$ para algum s em J . Então, $A(I, s) \subset F(I \times M)$ e $G/F^{-1}(A(., s)): I \rightarrow I$ é a identidade e, portanto, G tem posto 1 em todos os pontos de P , sendo assim uma submersão.

A restrição $G/\partial P$ também é uma submersão pois $\partial P = F^{-1}(A(I \times \partial J))$ e $G/F^{-1}(A(., r)): I \rightarrow I$ também é a identidade.##

CAP. 1

Pode-se observar que se α é um arco transversal a f em y , o caminho inverso α^{-1} ainda é um arco transversal a f em y e, mesmo não sendo necessariamente equivalentes na relação definida anteriormente, as variedades transversais por elas definidas são difeomorfas.

Assim, com exceção dos pontos $x \in M$ que são pontos singulares duplos, existirá, a menos de difeomorfismos, uma única classe de variedades transversais a f em x .

No caso dos pontos duplos, as curvas de $f(S(f))$ que passam por $y = f(x)$ dividem uma região suficientemente próxima de y em 4 componentes, de onde se pode concluir a possibilidade de existirem duas classes de variedades transversais a f em x , a menos de difeomorfismos.

A partir daqui, $T(x)$ poderá denotar tanto uma variedade transversal a f em x como sua classe, a menos de difeomorfismos.

Como, em consequência da proposição 3, as vizinhanças produto de $x \in M$ são da forma $(-\epsilon, \epsilon) \times T(x)$ com ϵ suficientemente pequeno, pode-se classificá-las segundo as variedades transversais.

Estas informações, juntamente com a invariância das fibras de q nas componentes conexas de $Wf - q(S(f))$ descrita no Corolário 1 da Proposição 4, permitem a reconstituição da variedade M como reunião de partes conhecidas, pelo menos nos casos aqui mencionados.

CAP. 1

5. O caso $n = 3$ orientado

5.1. Configurações locais

Quando $n = 3$, as formas locais das singularidades permitidas para as aplicações genéricas são:

$$(1) (u, x, y) \mapsto (u, x^2 + y^2)$$

nos pontos de dobra definida,

$$(2) (u, x, y) \mapsto (u, x^2 - y^2)$$

nos pontos de dobra indefinida (ou de sela),

$$(3) (u, x, y) \mapsto (u, ux - x^3 + y^2)$$

nos pontos cuspidais.

No estudo local da variedade M como domínio de uma aplicação genérica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, P. Porto, H. Levine e L. Kushner [16] introduziram a utilização dos arcos transversais, variedades transversais e vizinhanças produto, tendo obtido, além dos resultados gerais já mencionados nos parágrafos anteriores, muitos resultados geométricos, apresentados a seguir:

(1) Uma vizinhança produto de um ponto regular p com $q^{-1}(q(p)) \cap S(f) = \emptyset$ é da forma (isto é, difeomorfa a) $I \times J \times S^1$, onde I é um intervalo aberto e J um intervalo fechado, intervalos da vizinhança retangular de $f(p)$; o cilindro $J \times S^1$ corresponde a uma variedade transversal a f em p e uma vizinhança de $q(p)$ em Wf é da forma $I \times J$.

Obs: A condição $q^{-1}(q(p)) \cap S(f) = \emptyset$ é necessária, pois caso contrário, $q(p)$ coincide com a imagem por q de um ponto singular e terá a vizinhança produto, a variedade transversal e a vizinhança de $q(p)$ em Wf correspondentes às do ponto singular.

Com a observação acima, para descrever as vizinhanças de um ponto regular cuja componente conexa da fibra de f a que pertence contenha um ponto singular, basta estudar o ponto singular desta componente.

CAP. 1

(2) Quando p é um ponto de dobra definida de f , uma vizinhança produto que o contém é da forma $I \times D$, onde I é um intervalo aberto e D , um disco bidimensional, correspondente à variedade transversal. Além disso, $q(p)$ é um ponto de bordo de W_f , tendo uma vizinhança da forma $I \times [0, r]$.

(3) Quando p é um ponto de sela simples de f , uma vizinhança produto que o contém é da forma $I \times D(2)$, onde I é um intervalo aberto e $D(2)$ é um disco bidimensional com 2 buracos, correspondente a uma variedade transversal a f em p :

O ponto $q(p)$ é um ponto de bifurcação de W_f e está contido numa vizinhança da forma $I \times Y$:

CAP. 1

(4) Quando p é um ponto de cuspide, tem-se a seguinte evolução em $t \in I$, na vizinhança produto:

Assim, uma vizinhança de $q(p)$ tem a forma de uma folha retangular com um triângulo colado segundo uma das arestas, tendo $q(p)$ como vertice e uma vizinhança produto de p é da forma $I \times C$, onde C é um cilindro, representando uma variedade transversal a f em p , como no caso do ponto regular.

(5) No caso dos pontos singulares duplos, p é um ponto de sela, assim como o outro ponto p' tal que $q(p) = q(p')$. Como foi expresso no fim do parágrafo anterior, há duas classes distintas de variedades transversais para cada cruzamento desta natureza, correspondentes a arcos transversais não equivalentes:

Porém, mesmo se considerando apenas uma das variedades transversais para cada cruzamento duplo, ainda assim se obtém dois casos distintos -- chamados de duplo-cone e tridente, respectivamente, descritos a seguir:

CAP. 1

(5.1) Duplo-cone:

Neste caso, uma vizinhança produto é da forma $I \times T(2)$, onde I é um intervalo aberto e $T(2)$ é um toro com 2 buracos, correspondente a uma variedade transversal a f em p e p' , cuja evolução com $t \in I$ corresponde a um rearranjo de singularidades de sela por uma família de funções de Morse, onde a posição intermediária com dois pontos de sela no mesmo nível corresponde à posição dos pontos singulares duplos p e p' .

5.2) Tridente:

CAP. 1

A evolução descrita nas figuras também descreve um rearranjo de pontos singulares de sela de uma família de funções de Morse, definidos numa superfície $D(3)$, difeomorfa a um disco bidimensional com 3 buracos, correspondente a uma variedade transversal a f por p e p' . Uma vizinhança produto de p e p' é portanto, da forma $I \times D(3)$ e uma vizinhança de $q(p)$ em Wf pode ser obtida como colagem sucessiva de duas faixas retangulares segundo uma das arestas, sobre uma folha retangular. O ponto $q(p)$ é o vértice interno do tridente formado por $q(T(p))$, onde $T(p)$ é a variedade transversal.

Para cada um dos casos (5.1) e (5.2), poder-se-ia considerar a outra variedade transversal, correspondente ao outro arco transversal no cruzamento, porém, ao contrário das acima consideradas, estas outras são menos sugestivas no conjunto.

5.2. Decomposição de M em fibrados

Com os resultados da seção anterior, juntamente com o trabalho sobre eliminação de cúspides de H. Levine [17], segue que toda variedade fechada orientada M pode ser domínio de uma aplicação genérica f com valores no plano e sem pontos cuspidais, admitindo portanto uma decomposição em fibrados conhecidos, a saber:

(I) As componentes conexas c do conjunto singular $S(f)$ que não contém pontos duplos, possuem vizinhanças que são fibrados sobre S^1 , como segue:

(I.a) Se c é constituída de pontos de dobra definida, então as fibras são discos bidimensionais D e o fibrado é trivial. Tal fibrado é a pré-imagem pela aplicação quociente q de uma vizinhança colarinho de $q(c)$ em Wf .

(I.b) Se c é constituída de pontos de sela, as fibras são discos bidimensionais com 2 buracos, $D(2)$, e o fibrado pode ser obtido como pré-imagem por q de uma vizinhança de $q(c)$, da forma

ou

O fibrado proveniente da vizinhança descrita em (b.2) certamente não é trivial.

(II) No caso de f apresentar pontos duplos, estes estão contidos em vizinhanças produto, que são fibrados sobre um intervalo I de fibra $T(2)$ ou $D(3)$, conforme sejam de duplo-cone ou tridente, respectivamente.

CAP. 1

(III) Os arcos de pontos singulares (de sela) com extremidades nas vizinhanças produto acima citadas estão contidos em um fibrado produto sobre tais arcos, cujas fibras são as variedades transversais a f nos pontos de c , ou seja, $D(2)$.

Os fibrados descritos em (I), (II) e (III) cobrem a pré-imagem por q de uma vizinhança V de todo conjunto singular de W_f . Além disso, V pode ser tomada de tal forma que $W_f - V$ seja uma superfície, retrato de $W_f - q(S(f))$.

(IV) A pré-imagem por q da superfície $W_f - V$ é um S^1 -fibrado sobre a superfície, que completa a decomposição de M .

CAP. 1

5.3. Realização de um complexo W -imerso

Com os resultados anteriores, um complexo Wf , obtido pela fatorização de Stein de uma aplicação estável f definida numa 3-variedade fechada orientada M com valores no plano, pode ser "estratificado" por

$$B^0 = q(M - S(f)),$$

$$B^1 = q(S(f) - (\text{cúspides e pontos singulares duplos})) \text{ e}$$

$$B^2 = q((\text{cúspides e pontos singulares duplos})),$$

no seguinte sentido:

- (a) $Wf = B^0 \cup B^1 \cup B^2$, onde a reunião é disjunta e os subespaços B^0 , $B^0 \cup B^1$ e $B^0 \cup B^1 \cup B^2$ são abertos em Wf .
- (b) Cada B^i possui uma estrutura de $(2 - i)$ -variedade diferenciável: B^0 é uma superfície, B^1 é uma reunião de curvas e B^2 é uma coleção de pontos.
- (c) Existe uma aplicação contínua $f': Wf \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que sua restrição a cada B^i é uma imersão.
- (d) Para cada ponto x de Wf , existe uma "vizinhança standard" dos tipos descritos em 1.5.1.

Os subespaços B^0 , B^1 e B^2 são chamados ESTRATOS e f' é uma IMERSÃO ESTRATIFICADA. Diz-se também que Wf é W -IMERSO.

Seja agora um complexo bidimensional W -imerso B , com uma estratificação $B = B^0 \cup B^1 \cup B^2$, onde cada B^i é uma $(2-i)$ -variedade, munido de uma imersão estratificada $\alpha: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ e tal que cada ponto de B esteja contido numa espécie de "vizinhança standard", dos tipos descritos em 1.5.1. Ou seja, B é um complexo bidimensional com características locais de um complexo Wf , estratificado como tal e munido de uma imersão estratificada.

Os complexos ilustrados pelas figuras abaixo, com as imersões indicadas, constituem exemplos de complexos W -imersos:

CAP. 1

Nas condições anteriores, existe uma variedade fechada orientada de dimensão 3, e uma aplicação estável f definida em M e com valores no plano, de tal forma que existe um homeomorfismo h entre Wf e B , que comuta o seguinte diagrama:

Ou seja, essencialmente B é o complexo Wf de uma aplicação estável f .

O resultado acima é o Teorema de Realização, apresentado por L. E. Mata-Lorenzo em sua tese [19].

5.4. Aplicações genéricas especiais

As aplicações genéricas especiais, como foi definido anteriormente, são aquelas cujos únicos tipos de singularidades apresentados são as dobras definidas, ou seja $S(f) = S_0$.

Esta secção é relativa aos resultados sobre tais aplicações, definidas em variedades fechadas de dimensão 3 com valores no plano, apresentados por O. Burlet e G. de Rham em [3]. Estes resultados foram os que motivaram os estudos mais recentes no tratamento geométrico das singularidades.

TEOREMA A:

(a) Sejam M uma variedade fechada de dimensão 3 e f uma aplicação genérica especial definida em M e com valores no plano. Então, o complexo $W = Wf$ obtido pela fatorização de Stein de f é uma superfície compacta cujo bordo corresponde biunivocamente ao conjunto singular $S(f)$ de f e a aplicação $f': W \rightarrow \mathbb{R}^2$ induzida é uma imersão. Além disso, M pode ser obtido como quociente de um fibrado em círculos M' sobre W , pela relação de equivalência que identifica pontos de uma mesma fibra sobre pontos do bordo: se q, q' e p representam as projeções de M sobre W , M' sobre M e M' sobre W , respectivamente, tem-se que $p = q \circ q'$.

(b) Reciprocamente, sendo dados uma superfície W , compacta e com bordo, uma imersão f' de W no plano e um fibrado em círculos M' de base W , o quociente de M' pela relação de equivalência que identifica os pontos de uma mesma fibra do bordo é uma variedade M que pode ser munida de uma estrutura diferenciável tal que se q é a projeção de M sobre W , a aplicação $f = f' \circ q$ é uma aplicação genérica especial definida em M e com valores no plano.

O diagrama (comutativo) abaixo situa todos os elementos do Teorema A:

CAP. I

Sejam agora as variedades $V_0 = S^3$, $V_1 = S^1 \times S^2$, e mais geralmente, $V_r = V(r-1) \# V_1$ (soma conexa de r parcelas V_1 , $r \geq 1$), todas orientadas; sejam também as variedades não orientadas $V_1^* = [\text{fibrado em 2-esferas não orientado sobre } S^1]$, $V_r^* = V(r-1) \# V_1^*$.

Com essas notações, vale o seguinte:

TEOREMA B :

As variedades fechadas de dimensão 3 que podem ser domínios de aplicações genéricas especiais com valores no plano são as variedades V_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) e V_r^* ($r = 1, 2, \dots$). Não existem outras.

No teorema acima, r representa o posto do grupo fundamental de M , que por sua vez, é isomorfo ao grupo fundamental de W , que é livre. Além disso, r pode ser dado pela fórmula $r = 2g + b - 1$, onde g e b representam, respectivamente, o genus e o número de componentes conexas do bordo, de W . Consequentemente, b representa também o número de componentes conexas do conjunto singular $S(f)$ da aplicação genérica especial definida em M .

O Teorema 2 fornece assim, outra versão da conjectura de Poincaré:

"Se M é uma variedade fechada orientada de dimensão 3 com mesmo tipo de homotopia de uma esfera tridimensional, então M é domínio de uma aplicação genérica especial com valores no plano".

5.5. Arcos π -estáveis

Duas aplicações estáveis $f, g : M \rightarrow R^2$ são ditas diferenciavelmente homotópicas quando existe uma aplicação diferenciável $F : M \times [0,1] \rightarrow R^2$ com $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$, para todo x em M . Para cada t em $[0,1]$, F_t denotará a aplicação definida por $F_t(x) = F(x,t)$.

Um ponto de bifurcação de F é um valor t em $[0,1]$ tal que para todo $\delta > 0$, existe t' em $(t-\delta, t+\delta)$ com $F_{t'}$ não equivalente a F_t . Obviamente, F_t não é estável quando t é um ponto de bifurcação de F .

Um corolário obtido por L.E. Mata-Lorenzo [19] de um teorema de E. Chincaro [6] fornece que quaisquer duas aplicações estáveis $f, g : M \rightarrow R^2$ de uma variedade fechada M de dimensão $n \geq 2$ no plano são diferenciavelmente homotópicas segundo uma homotopia $F : M \times [0,1] \rightarrow R^2$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) F possui no máximo um número finito de pontos de bifurcação, fora dos quais F_t é estável,

(2) Quando t_0 é um ponto de bifurcação de F , a aplicação F_{t_0} é estável no espaço das não estáveis. Existem dois casos a considerar:

(2.1) pode aparecer, além das singularidades de dobra definida, sela e cúspides, anteriormente descritas, uma (única) singularidade de codimensão 1: "lips", "beak to beak" ou "rabo de andorinha", cujos germes serão descritos em momento oportuno.

(2.2) a estabilidade de F_{t_0} pode falhar exatamente nas condições globais (G1) e (G2). Neste caso, F_{t_0} é genérica mas ocorre uma (única) das seguintes situações, reconhecíveis pela sua imagem no plano: intersecção de dobra com cúspide, intersecção não transversal de duas dobras, ou intersecção de três dobras.

Nas condições acima, F é π -ESTÁVEL, no seguinte sentido: existe uma vizinhança U de F em $C^\infty(M \times [0,1], R^2)$ na qual toda aplicação G satisfaz a comutatividade de um diagrama do tipo

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times [0,1] & \xrightarrow{\quad F \sim \quad} & R^2 \times [0,1] & \xrightarrow{\quad p \quad} & [0,1] \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \phi \\
 M \times [0,1] & \xrightarrow{\quad G \sim \quad} & R^2 \times [0,1] & \xrightarrow{\quad p \quad} & [0,1]
 \end{array}$$

onde h , k e ϕ são difeomorfismos, p é a projecção canónica e, $F \sim$ e

CAP. 1

G^* são suspensões de F e G , isto é, $F^*(x,t) = (F(x,t),t)$ e $G^*(x,t) = (G(x,t),t)$ para todo x em M e t em $[0,1]$.

Pode-se também dizer que F nas condições acima define um ARCO Π -ESTÁVEL entre f e g .

Como os pontos t de bifurcação de F são pontos do interior de $[0,1]$, pode ser feita uma reparametrização, pondo $t_0 = 0$ e F definida em $M \times T$, onde $T \subset \mathbb{R}$ contém uma vizinhança de 0. Assim, as novas singularidades de F em termos das coordenadas locais (u,x,Y,t) , onde $Y = (y_1, \dots, y_{n-2})$, ficam expressas pelas seguintes equações polinomiais:

$$(1) F(u,x,Y,t) = (u, x^3 + u^2x + \sum_{i=1}^{n-2} e_i y_i^2 + xt), \text{ onde } e_i = \pm 1,$$

(lips)

$$(2) F(u,x,Y,t) = (u, x^3 - u^2x + \sum_{i=1}^{n-2} e_i y_i^2 + xt), \text{ onde } e_i = \pm 1,$$

(beak to beak)

$$(3) F(u,x,Y,t) = (u, x^4 + ux + \sum_{i=1}^{n-2} e_i y_i^2 + x^2t), \text{ onde } e_i = \pm 1,$$

(rabo de andorinha)

que representam germes de singularidades de codimensão 1 de F , na origem:

$$(4) F_{U^1}(u_1, x_1, Y_1, t) = (e(x_1)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{1i})^2 + t, u_1)$$

$$F_{U^2}(u_2, x_2, Y_2, t) = (u_2, (x_2)^3 + u_2 x_2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{2i})^2)$$

com $e, e_i = \pm 1$

(intersecção de dobra com cúspide),

$$(5) F_{U^1}(u_1, x_1, Y_1, t) = ((x_1)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{1i})^2 + t, u_1)$$

$$F_{U^2}(u_2, x_2, Y_2, t) = (e(x_2)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{2i})^2 + e'(u_2), u_2)$$

com $e, e', e_i = \pm 1$

(intersecção não transversal de duas dobras), e

$$(6) F_{U^1}(u_1, x_1, Y_1, t) = ((x_1)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{1i})^2 + t, u_1)$$

$$F_{U^2}(u_2, x_2, Y_2, t) = (e(x_2)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{2i})^2 + u_2, u_2)$$

$$F_{U^3}(u_3, x_3, Y_3, t) = (e'(x_3)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (y_{3i})^2 - u_3, u_3)$$

com $e, e', e_i = \pm 1$

(intersecção de três dobras),

CAP. 1

que representam os multigerms das outras singularidades de F .

O quadro a seguir mostra o comportamento da imagem de F numa vizinhança do valor crítico, nos diversos casos apresentados:

	$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$
lips
beak to beak
pebo de andorinha
intenseção de cúspide com dobra
intenseção não transversal de duas dobras
intenseção de duas dobras

CAP. 1

A cada uma dessas "passagens" correspondem transições nos espaços quocientes $W\langle F_t \rangle$ na fatorização de Stein, totalmente catalogadas no trabalho de L. E. Mata-Lorenzo, cujas ilustrações, transcritas a seguir, já são suficientemente eloquentes:

← "lips"

"beak to beak" →

← rabo de andorinha
1ª espécie

rabo de andorinha
2ª espécie →

← rabo de andorinha
2ª espécie

CAP. 1

2
casos
de

intensecção de dobra
com
cúspide

5 casos
de ...

... intensecção
não transversal
de
duas dobras

CAP. I

... e dez casos de intersecção de 3 dobras.

CAP. 1

Além das transições descritas pictoricamente, existem alguns casos em que não há mudança efetiva em $W\langle P_t \rangle$, a exemplo dos arcos π -estáveis de aplicações genéricas especiais. Nestes, pode aparecer uma intersecção não transversal de dobras, porém os pontos singulares pertencem a componentes conexas distintas da fibra sobre o valor crítico.

Agora, dada uma aplicação estável $f : M \dashrightarrow R^2$, poder-se-ia pensar em "simplificar" f , isto é, encontrar uma nova aplicação estável $g : M \dashrightarrow R^2$ com o conjunto singular $S(g)$ mais simples, através de arcos π -estáveis obtidos como realização de uma sequência de transições efetuadas no espaço quociente Wf da fatorização de Stein de f , dos tipos descritos anteriormente.

Caso isso fosse possível, uma nova maneira de enunciar a Conjectura de Poincaré seria a seguinte:

"O complexo bidimensional Wf de uma aplicação estável f , definida numa variedade fechada tridimensional com o mesmo tipo de homotopia da 3-esfera, com valores no plano, pode ser levado a um disco, através de uma sequência de transições dos tipos descritos anteriormente."

Infelizmente, é conhecido um exemplo de uma sequência de transições que não se realiza em arcos π -estáveis.

CAPÍTULO II

O CASO 4-DIMENSIONAL ORIENTADO

1. Introdução

O objetivo principal deste Capítulo é analisar o comportamento topológico das fibras $f^{-1}(y)$ de uma aplicação estável f , com y em torno da imagem do conjunto singular, e estudar outros problemas relacionados, sempre no caso em que a variedade-domínio é fechada, orientada e 4-dimensional.

Nesta dimensão, as fibras não degeneradas são superfícies e isto permite visualizar muitos problemas por meio de desenhos. Além disso, outra razão para o estudo desta dimensão é o aparecimento de elementos novos, como o genus de cada componente das fibras.

Antes de apresentar a análise acima mencionada, serão lembrados alguns fatos sobre Teoria de Morse e Cobordismo, como apresentados por Milnor [20], que serão essenciais no prosseguimento do estudo.

Entre os "problemas relacionados", estão a decomposição da variedade-domínio em fibrados, a não realização de um complexo W como Wf de alguma aplicação estável $f: M^4 \rightarrow R^2$ e, finalmente, outro problema local -- o comportamento dos espaços quocientes $W\langle F_t \rangle$ quando $F: M \times [0,1] \rightarrow R^2$ determina um arco f -estável.

2. Alguns resultados sobre funções de Morse e cobordismo

Alguns resultados bastante conhecidos sobre funções de Morse e cobordismo serão apresentados neste parágrafo, com o objetivo de se estabelecer uma nomenclatura uniforme para o prosseguimento dos estudos do presente capítulo.

2.1. Cirurgia

Dados uma variedade V de dimensão $n-1$ e um mergulho $\psi: S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow V$, seja $X(V, \psi)$ a variedade quociente obtida tomando-se a reunião disjunta $(V - \psi(S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda})) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$ e identificando-se $\psi(u, @v)$ com $(@u, v)$ para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$ e $0 \leq @ \leq 1$. Se V' é uma variedade difeomorfa a $X(V, \psi)$, diz-se que V' pode ser obtido de V por uma CIRURGIA do tipo $(\lambda, n-\lambda)$ ao longo de ψ .

Essa cirurgia corresponde, a grosso modo, em retirar de V a imagem $\psi(S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda})$ do mergulho e substituir por uma imagem difeomorfa de $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$, através de uma colagem por pontos do bordo.

Cirurgia do tipo (1, 2)

Cirurgia do tipo (1, 1)

2.2. Vizinhança característica de um ponto crítico de Morse

Seja W uma variedade n -dimensional com bordo $V \cup V'$, que é domínio de uma função de Morse $f: W \rightarrow J = [-r, r]$, com $V = f^{-1}(-r)$ e $V' = f^{-1}(r)$, sendo p um ponto crítico de índice λ no nível 0.

Nestas condições, existe um mergulho $\varphi: S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow V$ tal que sua imagem, juntamente com a reunião das trajetórias do campo gradiente de f que se originam nos pontos de seu bordo e com uma imagem difeomorfa de $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ em V' delimitada pelos pontos finais das trajetórias citadas, definem um disco com quinas $E(p)$ que é uma vizinhança de p que será chamada VIZINHANÇA CARACTERÍSTICA de p . O mergulho acima é chamado MERGULHO CARACTERÍSTICO do cobordismo $(W; V, V')$.

Se p é o único ponto crítico da função de Morse f , $W - E(p)$ é difeomorfa ao produto $(V - \text{Im } \varphi) \times J$ pois f não tem mais pontos críticos em $W - E(p)$ e, portanto, as trajetórias do campo gradiente de f levam pontos de $V - \text{Im } \varphi$ difeomorficamente em pontos de V' e podem ser parametrizadas simultaneamente em J . Assim, W pode ser obtido como uma colagem do produto $(V - \text{Im } \varphi) \times J$ com $E(p)$, de maneira natural. Pode-se observar que, a menos de difeomorfismos, W depende somente de V e do mergulho característico φ .

Segue-se também que, nas condições acima, V' é obtido de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$ ao longo do mergulho característico φ , a menos de difeomorfismos.

Os resultados acima podem ser generalizados para o caso em que se tem uma função de Morse f de uma variedade W com bordo $V \cup V'$ sobre $J = [-r, r]$, com pontos críticos $p_1, \dots, p_k$, todos no mesmo nível, com índices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, respectivamente. Neste caso, é possível obter mergulhos característicos disjuntos

$$\varphi_i: S^{\lambda_i-1} \times D^{n-\lambda_i} \rightarrow V$$

para $i = 1, \dots, k$ e construir uma variedade dependendo apenas de V e dos mergulhos característicos, difeomorfa a W . Mais ainda, tal variedade é obtida do produto $(V - \bigcup \text{Im } \varphi_i) \times J$, colando-se as vizinhanças características $E(p_1), \dots, E(p_k)$ nos respectivos lugares. Tem-se também que V' pode ser obtida de V efetuando-se k cirurgias, dos tipos $(\lambda_i, n-\lambda_i)$ ao longo dos mergulhos φ_i , respectivamente.

3. Configurações locais

3.1. Introdução

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação estável, definida numa variedade fechada orientada M de dimensão quatro e com valores no plano.

A imagem inversa de um valor regular v de f é uma superfície compacta orientada e sem bordo, sendo portanto, uma reunião finita de toros. Logo, se $v \in q(M - S(f))$ então $q^{-1}(v)$ é um toro de genus g . Assim, se W_0 é uma componente conexa de $Wf - q(S(f))$, $q^{-1}(W_0)$ é um fibrado sobre W_0 cujas fibras são toros de genus g . Em particular, se o fecho de $q^{-1}(W_0)$ contiver pontos de S_0 , essas fibras são esferas.

Se $x \in M - S(f)$ e $q^{-1}(q(x)) \cap S(f) = \emptyset$, as variedades transversais a f em x são da forma $J \times T_g$, onde T_g é um toro de genus g e J um intervalo fechado. Uma vizinhança produto de x é da forma $I \times J \times T_g$, onde I é um intervalo aberto, sendo que f atua como uma projecção sobre a vizinhança retangular $I \times J$ de $f(x)$.

Se $x \in M - S(f)$ mas $q^{-1}(q(x))$ contém algum ponto singular, analisar a vizinhança produto, a variedade produto ou uma vizinhança de $q(x)$ é analisar esses elementos para o ponto singular correspondente, pois esses elementos são definidos a partir da componente conexa de $f^{-1}(f(x))$ contendo x .

Para $x \in S(f) - C$ a proposição 4 garante que uma variedade transversal $T(x)$ é domínio de uma função de Morse cuja única singularidade é x se este for um ponto simples e duas singularidades x e x' se x for ponto duplo com $q^{-1}(q(x)) \cap S(f) = \{x, x'\}$. Este fato, juntamente com resultados sobre funções de Morse, cobordismo e classificação das superfícies fechadas, permite descrever cada tipo de variedade transversal, a menos de difeomorfismos.

No caso dos pontos cuspidais, segue imediatamente da proposição 3, que uma variedade transversal é também um produto da forma $J \times T_g$, como no caso dos pontos regulares com $q^{-1}(q(x)) \cap S(f) = \emptyset$. Porém, a aplicação $T(x) \rightarrow J$ induzida por f não é uma simples projecção, como será visto mais adiante, a partir das formas normais.

As proposições das secções 3.2 a 3.5 reunidas permitirão concluir o seguinte:

TEOREMA 1:

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação estável definida numa variedade fechada orientada de dimensão quatro com valores no plano. Então as configurações locais admissíveis para o espaço Wf da fatorização de Stein de f são:

onde g_1 , g_2 , g_3 e g representam o genus da imagem inversa (superfície) pela aplicação quociente $q : M \rightarrow Wf$, de um ponto da região indicada.

3.2. Os pontos de dobra definida

Seja um ponto p em S_0 .

A forma local de f em p é dada por

$$(u, x, y, z) \mapsto (u, x^2 + y^2 + z^2)$$

e $0 \times J$, $J = [-r, r]$, representa um arco transversal a f em $f(p)$ e $(-\xi, \xi) \times J$, uma vizinhança retangular de $f(p)$. Os conjuntos

$$\{(u, x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} = 0 \times D_r^3$$

e

$$\{(u, x, y, z): u^2 < \xi^2 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} = (-\xi, \xi) \times D_r^3$$

representam, respectivamente, a variedade transversal a f em p e a vizinhança produto de p .

Reunindo todas as informações até aqui disponíveis sobre os pontos de dobra, tem-se:

PROPOSIÇÃO 6:

Seja p um ponto de S_0 . Então:

(1) uma vizinhança produto de p é difeomorfa a $I \times D_r^3$, onde I é um intervalo aberto e D_r^3 é um disco 3-dimensional fechado de raio r ;

(2) uma variedade transversal a f em p é difeomorfa a um disco fechado 3-dimensional;

(3) as componentes conexas das fibras de f nesta vizinhança são esferas;

(4) a imagem da vizinhança produto de p pela aplicação quociente q é da forma $I \times [0, r]$, onde $I \times \{0\}$ corresponde aos pontos de dobra.

3.3. Os pontos de sela simples

Se $p \in S1$ é um ponto de sela simples, então a forma local de f em p é dada por:

$$(u, x, y, z) \mapsto (u, x^2 - y^2 + z^2)$$

ou,

$$(u, x, y, z) \mapsto (u, x^2 - y^2 - z^2)$$

Dessas expressões é possível concluir que $f^{-1}(f(p))$ apresenta um "estragulamento" em p , pois a equação $x^2 - y^2 \pm z^2 = 0$ representa um cone com vértice $(0,0,0)$ que corresponde ao ponto p , para $u = 0$.

A equação $Y = x^2 - y^2 \pm z^2 = r^2$ representa um hiperbolóide de uma ou de duas folhas, conforme o sinal de z^2 seja positivo ou negativo. Analogamente, $Y = -r^2$ representa um hiperbolóide de duas ou de uma folha, conforme o sinal de z^2 seja positivo ou negativo. Se λ representa o número de sinais negativos que aparecem na expressão de Y , tem-se então o seguinte quadro das configurações locais:

Seja $T(p)$ uma variedade transversal a f em p e seja $h: T(p) \rightarrow J$ a função de Morse dada pela proposição 4, onde $J = [-r^2, r^2]$. Sejam $T^- = h^{-1}(-r^2)$ e $T^+ = h^{-1}(r^2)$. Então p é um ponto crítico de Morse de índice $\lambda = 1$ ou 2 e existe um mergulho $\varphi: S^{\lambda-1} \times D^{3-\lambda} \rightarrow T^-$, que é um mergulho característico do cobordismo $(T(p); T^-, T^+)$.

Uma vizinhança característica $E(p)$ de p é então o disco com quinas delimitado por:

$$(1) V^- = (S^{\lambda-1} \times D^{3-\lambda}) \subset T^-,$$

- (2) uma reunião Z de trajetórias do campo gradiente de h que levam V^- difeomorficamente sobre V^+ , onde $V^+ \subset T^+$ é uma imagem difeomorfa de $D^\lambda \times S^{2-\lambda}$,

e (3) V^+

PROPOSIÇÃO 7:

Seja $p \in S_1$ um ponto de sela simples. Então uma configuração local em torno de $q(p)$ em $W(f)$ é da forma:

onde os números (caracteres) associados às regiões vizinhas representam o genus da superfície $q^{-1}(\gamma)$, onde γ é um ponto da região.

DEM:

Em virtude da proposição 3, basta mostrar que $q(T(p))$ é da forma

Considerando a função de Morse $h : T(p) \rightarrow J$, verifica-se que T^+ é obtido de T^- por uma cirurgia do tipo $(\lambda, 3 - \lambda)$

Tem-se então os seguintes casos a considerar:

(1) $\lambda = 2$.

Como T^+ é obtida de T^- por uma cirurgia do tipo $(2,1)$, pode-se considerar $T^- - V^-$ contido em T^+ e tomar a sequência exata do par $(T^+, T^- - V^-)$:

$$\begin{aligned} (S1) \quad 0 &\rightarrow H_2(T^+) \rightarrow H_2(T^+, T^- - V^-) \rightarrow H_1(T^- - V^-) \rightarrow \\ &\rightarrow H_1(T^+) \rightarrow H_1(T^+, T^- - V^-) \rightarrow H_0(T^- - V^-) \rightarrow \\ &\rightarrow H_0(T^+) \rightarrow H_0(T^+, T^- - V^-) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

A construção de T^+ fornece também que

$$H_q(T^+, T^- - V^-) \cong H_q(D^2 \times S^0, (D^2 - 0) \times S^0),$$

que é 0 para $q = 0, 1$ e $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ para $q = 2$.

Então, $H_2(T^+) \cong H_0(T^+) \cong H_0(T^- - V^-)$.

Agora, como $V^- \cong S^1 \times D^1$ é conexa, a cirurgia só envolve uma componente conexa de T^- . Se T^- não fosse conexa, cada componente de T^- não envolvida na cirurgia geraria uma componente conexa de $T(p)$, que é conexa, por definição. Logo, para este caso, T^- deve ser conexa.

Quanto a V^- , pode ocorrer que:

1-a) V^- separa T^- em duas componentes conexas, ou seja,

$$H_0(T^- - V^-) \cong H_0(T^+) \cong H_2(T^+) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

ou,

1-b) V^- não separa T^- em duas componentes conexas, ou seja,

$$H_0(T^- - V^-) \cong H_0(T^+) \cong H_2(T^+) \cong \mathbb{Z}.$$

No caso (1-a), a sequência exata (S1) fica:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} H_1(T^- - V^-) \xrightarrow{i_1} H_1(T^+) \xrightarrow{j_1} 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Logo, j_2 é isomorfismo, donde $\ker(\partial_2) = \text{im}(j_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto, $\partial_2 = 0$. Então, $\ker(i_1) = \text{im}(\partial_2) \cong 0$ e portanto, i_1 é injetora. Como já é sobrejetora, segue que

$$H_1(T^- - V^-) \cong H_1(T^+).$$

Seja agora a sequência exata do par $(T^-, T^- - V^-)$:

$$0 \rightarrow H_2(T^-) \rightarrow H_2(T^-, T^- - V^-) \rightarrow H_1(T^- - V^-) \rightarrow H_1(T^-) \rightarrow H_1(T^-, T^- - V^-) \rightarrow H_0(T^- - V^-) \rightarrow H_0(T^-) \rightarrow H_0(T^-, T^- - V^-) \rightarrow 0.$$

O teorema da Excisão garante que $H_q(T^-, T^- - V^-)$ é isomorfo a $H_q(V^-, \phi(S^1 \times (D^1 - 0))) \cong H_q(S^1 \times D^1, S^1 \times S^0)$ que é 0 se $q = 0$ e $\mathbb{Z}$ se $q = 1, 2$.

Então, a sequência acima fica:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} H_1(T^- - V^-) \xrightarrow{i_1} H_1(T^-) \xrightarrow{j_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Assim, $\text{im}(\partial_2) = \ker(i_1) = 0$ e portanto, i_1 é injetora. Por outro lado, i_0 sendo sobrejetora, $\text{im}(\partial_1) = \ker(i_0) \cong \mathbb{Z}$, donde, ∂_1

CAP. 11

é injetora e assim, $\text{im}(j_1) = \ker(\partial_1) \cong 0$, o que implica que i_1 também é sobrejetora.

$$\text{Logo, } H_1(T^- - V^-) \cong H_1(T^-).$$

Portanto, $H_1(T^+)$ é isomorfo a $H_1(T^-)$, com o que se pode concluir que se V^- desconecta T^- , então a superfície T^+ resultante após a cirurgia é uma reunião de duas superfícies fechadas, orientadas e conexas, cuja soma dos respectivos genus é igual ao genus de T^- .

No caso (I-b), a sequência exata (S1) fica:

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{j_2} Z \oplus Z \xrightarrow{\partial_2} H_1(T^- - V^-) \xrightarrow{i_1} H_1(T^+) \longrightarrow 0,$$

donde, $\ker(\partial_2) = \text{im}(j_2) \cong Z$ e portanto, $\text{im}(\partial_2) \cong Z$. Logo,

$$H_1(T^- - V^-) \cong \ker(i_1) \oplus \text{im}(i_1) \cong \text{im}(\partial_2) \oplus H_1(T^+) \cong Z \oplus H_1(T^+)$$

Como no caso anterior, considerando a sequência do par $(T^-, T^- - V^-)$:

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{j_2} Z \xrightarrow{\partial_2} H_1(T^- - V^-) \xrightarrow{i_1} H_1(T^-) \xrightarrow{j_1} Z \xrightarrow{\partial_1} Z \xrightarrow{i_0} Z \longrightarrow 0,$$

tem-se: $\text{im}(\partial_2) = \ker(i_1) \cong 0$ e portanto, i_1 é injetora; por outro lado, $\text{im}(\partial_1) = \ker(i_0) \cong 0$, donde $\text{im}(j_1) = \ker(\partial_1) \cong Z$.

Assim,

$$H_1(T^-) \cong \ker(j_1) \oplus Z \cong \text{im}(i_1) \oplus Z \cong H_1(T^- - V^-) \oplus Z.$$

Logo, $H_1(T^+) \cong H_1(T^- - V^-) \oplus Z \cong H_1(T^-) \oplus Z \oplus Z$, donde se conclui que se a cirurgia não altera o número de componentes conexas, então ela diminui o genus em uma unidade. Observa-se que tal situação só pode ocorrer quando T tem genus maior ou igual a um.

(II) $\lambda = 1$.

Este caso é simétrico ao primeiro, devido à dimensão de $T(p)$ que é três. O papel de T^+ fica trocado com o de T^- . Para que se tenha $T(p)$ conexa, T^+ terá de ser necessariamente conexa. Se T^- for conexa, então T^+ será uma superfície com genus aumentado em uma unidade, em relação a T^- . Caso contrário, se T^- tiver duas componentes conexas com genus g_1 e g_2 , respectivamente, então o genus de T^+ é a soma $g_1 + g_2$.

Para simplificar a notação, utilizaremos $Ig(k)$ para uma superfície orientada de genus g e k componentes de bordo.

Ainda pela Teoria de Morse, se p é um ponto de sela simples, então uma variedade transversal $T(p)$ é obtida, a menos de difeomorfismos, pela colagem de uma vizinhança característica $E(p)$ a uma variedade com quinas, $Ig(2) \times J$.

Devido à configuração de $E(p)$ para este caso, a variedade transversal $T(p)$ pode ser vista também como colagem, pelas bases, de um tronco de cilindro sólido à variedade com bordo $T_g \times J$ ou $(T_{g_1} \cup T_{g_2}) \times J$, obtendo uma variedade 3-dimensional conexa orientada, com bordo $T^- \cup T^+$.

3.4. Os pontos de sela duplos

Sejam p_1 e p_2 dois pontos de sela com $q(p_1) = q(p_2)$ e $T = T(p_1) = T(p_2)$ variedade transversal a f em p_1 (e p_2). Seja a função de Morse $h : T \rightarrow J$ correspondente, com $J = [-r, r]$, p_1 e p_2 pontos críticos de índices 1 e 2 $\in \{1, 2\}$, respectivamente, ambos no nível 0 e, com $\partial T = T^- \cup T^+$, onde $T^- = h^{-1}(-r)$ e $T^+ = h^{-1}(r)$.

De acordo com 11.2.2, $T = ((T^- - \bigcup \varphi_i(S^{\lambda_i-1} \times D^{3-\lambda_i})) \times J) \cup E_1 \cup E_2$, onde E_1 e E_2 são vizinhanças características de p_1 e p_2 e $\varphi_i : S^{\lambda_i-1} \times D^{3-\lambda_i} \rightarrow T^-$ são mergulhos característicos disjuntos, para $i = 1, 2$. Isto determina, a menos de difeomorfismos, a variedade transversal T . Basta portanto, para completa descrição de T , que seja construído um modelo, através dos elementos que a compõem.

Como no caso dos pontos de sela simples, temos a seguinte configuração para E_i , um dos elementos essenciais na composição do modelo acima citado:

que pode ser apresentada também na forma:

A necessidade da utilização dessa segunda configuração deverá se esclarecer mais tarde na análise dos diversos casos existentes.

No que se segue, o par (n, g) associado a cada quadrante do cruzamento das curvas singulares representa o número de componentes conexas e a somatória dos genus das superfícies que compõem a parte da imagem inversa por f , de um ponto do quadrante, que se encontra na variedade transversal T .

Assim como no caso dos pontos simples, os números que acompanham as regiões não singulares de Wf correspondem ao genus da superfície $q^{-1}(\gamma)$, onde γ é um ponto da região.

PROPOSIÇÃO 8:

Se p é um ponto de sela duplo, então uma vizinhança de $q(p)$ em Wf pode apresentar uma das seguintes configurações:

I.a
III.a.(iii)

I.b.(i)
III.a.(i)

I.b.(ii)
III.a.(ii)
III.b

I.c

DEM:

Seja $h : T(p) \rightarrow J$ a função de Morse com dois pontos críticos p_1 e p_2 (um deles sendo p) no mesmo nível $0 \in J$, com índices λ_1 e $\lambda_2 \in \{1, 2\}$. Tem-se então os seguintes casos:

(I) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Para cada desdobramento deste caso, é possível encontrar um modelo de T mergulhado em R^3 , como se segue:

I-a) T^- conexa de genus g , T^+ conexa.

I - b) $T^- = T_1^- \cup T_2^-$.

(i) ambos os mergulhos característicos têm partes da imagem em ambas as componentes conexas de T^- .

(ii) somente um dos mergulhos característicos tem partes da imagem em ambas as componentes conexas de T^- .

$$I - c) T^- = T_1^- \cup T_2^- \cup T_3^- .$$

$$(II) \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Todas as situações que aqui aparecem são simétricas às do caso (I). Os modelos que aparecem são exatamente os mesmos, ressaltando que o bordo "externo" representa agora T^- em vez de T^+ como em (I) e o bordo "interno" representa T^+ em vez de T^- . O bordo "externo" [respectivamente, "interno"] pode ser definido, como parte do bordo de T que delimita T com a região ilimitada [respectivamente, limitada] de $R^3 - T$.

$$(III) \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

Neste caso não será possível definir bordo externo e bordo interno do modelo de T , uma vez que nem todos os modelos são mergulháveis em R^3 . O que se pode fazer neste caso, é mergulhar primeiramente $(T^- - \cup \varphi_i(S^{\lambda_i-1} \times D^{3-\lambda_i})) \times J$ de tal forma que a parte de T^- seja "interno" e a de T^+ seja "externo", em relação a $T^- \times J$.

Como $\lambda_1 = 1$, a parte de E_1 correspondente a T^- é $\varphi_1(S^0 \times D^2)$ e a correspondente a T^+ é $D^1 \times S^1$, donde se pode deduzir que E_1 pode ser reunido ao mergulho anterior na sua configuração canônica:

Mas, $\lambda 2$ sendo 2, as partes de E_2 correspondentes a T^- e a T^+ aparecem trocadas, o que força a utilização da segunda configuração para E_2 , para completar o modelo de T :

III - a) T^- conexa

(i) $\text{Im } \varphi_2$ desconecta T^- e $\text{Im } \varphi_1$ intercepta ambas as componentes conexas de $T^- - \text{Im } \varphi_2$. (ver modelo do desenho acima)

Este é o único modelo que não mergulha em R^3 . Pode-se observar que existe em T uma garrafa de Klein, possivelmente com "alças". Se existisse um mergulho de T em R^3 , consequentemente esta garrafa de Klein mergulharia também R^3 , o que não pode ocorrer.

garrafa de Klein

(ii) $\text{Im}\varphi_2$ desconecta T^- e $\text{Im}\varphi_1$ intercepta apenas uma componente conexa de $T^- - \text{Im}\varphi_2$.

Aparentemente, este modelo não é merquível em R^3 , mas basta inverter as posições entre T^- e T^+ , para que se visualize o merquenho:

(iii) $\text{Im}\varphi_2$ não desconecta T^- .

III - b) $T^- = T_1^- \cup T_2^-$.

(i) $\text{Im}\varphi_2$ não desconecta nenhuma das componentes.

(III) $\text{Im } \phi_2$ desconecta uma das componentes.

(IV) $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$.

• Este caso é simétrico ao caso (III).##

OBS 1:

Seja p um ponto de sela duplo. Então, a variedade transversal $T(p)$ que é obtida como colagem simultânea e disjunta de duas vizinhanças características $E(p)$ e $E(p')$ a $Tq(4) \times J$, ou a $(Tq_1(3) \cup Tq_2(1)) \times J$, ou a $(Tq_1(1) \cup Tq_2(2) \cup Tq_3(1)) \times J$, pode ser vista também como colagem simultânea e disjunta de dois troncos de cilindros sólidos, pelas bases, a $Tq \times J$, ou a $(Tq_1 \cup Tq_2) \times J$, ou a $(Tq_1 \cup Tq_2 \cup Tq_3) \times J$.

OBS 2:

Num cruzamento duplo, as duas classes distintas de variedade transversal diferem na posição de colagem dos dois cilindros sólidos: uma das classes resulta da colagem dos dois cilindros sobre apenas uma das partes $S \times (i)$, onde S pode ser Tq , ou $(Tq_1 \cup Tq_2)$, ou $(Tq_1 \cup Tq_2 \cup Tq_3)$, e $i \in (-r, r)$, onde $J = [-r, r]$; a outra classe resulta da colagem de um dos cilindros sobre $S \times (i)$ e outro sobre $S \times (j)$, S nas condições anteriores, $i, j \in (-r, r)$, $i \neq j$.

3.5. Os pontos cuspidais

Essencialmente, há dois tipos de cúspides a considerar, cujas formas locais são as seguintes:

$$(u, x, y, z) \rightarrow (u, ux - x^3 + y^2 + z^2)$$

ou,

$$(u, x, y, z) \rightarrow (u, ux - x^3 + y^2 - z^2).$$

Analisando graficamente as configurações locais das fibras de f numa vizinhança de cada uma dessas cúspides, pode-se ver que a primeira forma descreve uma cúspide que separa pontos de dobra definidos de pontos de sela, e a outra descreve uma cúspide entre dois (ou um) arcos de pontos de sela.

Este segundo tipo de cúspide é o que pode sobreviver aos processos de eliminação descritos em [17], ao contrário das cúspides do primeiro tipo, que aparecem sempre aos pares em cada componente conexa do conjunto singular de f e são elimináveis.

As cúspides do primeiro tipo daremos o nome de cúspides definidas e, às do segundo tipo, cúspides indefinidas.

PROPOSIÇÃO 9:

Seja p um ponto de cúspide. Então, uma vizinhança de $q(p)$ em W_f pode apresentar uma das seguintes configurações:

conforme p seja um ponto de cúspide definida ou indefinida, respectivamente.

DEM:

Segue das formas normais correspondentes os seguintes quadros do comportamento das fibras de f numa vizinhança de um ponto de cúspide,

CAP. 11

(i) quando p é uma cúspide definida:

(ii) quando p é uma cúspide indefinida:

CAP. 11

OBS 1:

Apesar das mudanças que possam haver nas fibras de pontos de $(u) \times J$, para cada u fixo, a imagem inversa por f desse arco é um produto, devido à proposição 3.

OBS 2:

As figuras em (i) e (ii) foram testadas e confirmadas mediante programas elementares processados em um microcomputador da linha IBM-PC. O programa a seguir traça as figuras em (ii).

```

10 SCREEN 0,0,0 : CLS
20 PRINT "*****"
30 PRINT "*"
40 PRINT "*"          PROGRAMA PARA TRACAR IMAGEM INVERSA DE (U,K)
50 PRINT "*"
60 PRINT "*"          U = U
70 PRINT "*"          K = U*x - x^3 + y^2 - z^2
80 PRINT "*"
90 PRINT "*****"
100 PRINT
110 PRINT "COLOQUE OS VALORES DE U E K": PRINT
120 INPUT "U = ",U : 'LEITURA DO U
130 PRINT
140 IF U<0 THEN GOTO 190
150 U1=SQR(U/3)
160 M = U*U1 - (U1)^3
170 PRINT " K assume valores criticos em ";M;" e ":-M
180 PRINT
190 INPUT "K = ",K : 'LEITURA DO K
200 '
210 'CHAMANDO TELA GRAFICA E LIMPANDO
220 CLS: SCREEN 2:KEY OFF
230 '
240 'TRACANDO OS EIXOS COORDENADOS X, Y, Z
250 LINE (250,0)-(250,120): LINE (250,120)-(560,120)
260 LINE (250,120)-(50,200)
270 '
280 'ESCREVENDO A EQUACAO DA SUPERFICIE
290 PRINT "          U = ";U
300 PRINT "          K = ";U;"*x - x^3 + y^2 - z^2 = ";K
310 '
320 'CALCULANDO OS PONTOS USANDO A SIMETRIA DA EQUACAO,
330 'CONVERTENDO AO SISTEMA DE COORDENADAS DA TELA E DESENHANDO
340 FOR Y= 0      TO  2.4 STEP .2
350     X=2.4
360     WHILE X>-2.4
370         W = U* X - X ^3 + Y ^2 - K
380         IF W< .3 THEN Z=.2
390         IF W < 0 THEN 470 : 'NADA A DESENHAR
400         Z = W^(1/2)
410         X2= 40*X: Y2= 40*Y: Z2= 40*Z
420         X1 = -X2 + 2*Y2+ 250: Y1 = .4 *X2- .6 *Z2+ 120
430         PSET (X1,Y1): X3 = X1
440         X1 = -X2 - 2*Y2+ 250: PSET (X1,Y1)
450         Y1 = .4*X2 + .6*Z2 + 120 : PSET (X1,Y1)
460         PSET (X3,Y1)
470         X=X-.0001-5.000001E-03*Z: 'MENOR Z, MENOR PASSO EM X
480     WEND
490 NEXT Y
500 LOCATE 2,75,0
510 END

```

4. Decomposição de M

Seja M uma variedade fechada orientada de dimensão 4 e seja f uma aplicação estável definida em M e com valores no plano.

Segundo H. Levine [17], f é homotópica a uma nova aplicação estável com no máximo um ponto cuspidal, do tipo indefinido, em cada componente conexa do seu conjunto singular.

Assim sendo, para efeitos de decomposição de M , pode-se considerar, desde o início, que f já tem essa propriedade.

A idéia é decompor M em uma coleção de fibrados conhecidos:

(1) As componentes do conjunto singular $S(f)$ que não contêm pontos cuspidais nem pontos duplos possuem vizinhanças que são fibrados sobre S^1 , como segue:

(a) Se a componente for de pontos de dobra definida, então a fibra é um disco tridimensional e o fibrado é trivial, pois o grupo dos difeomorfismos de tais discos em si mesmos que preservam orientação é conexo por caminhos.

Tal fibrado é obtido como a pré-imagem pela aplicação quociente q de uma vizinhança colarinho da curva correspondente à referida componente em Wf .

(b) Se a componente for constituída de pontos de sela e uma vizinhança de sua imagem em Wf é como ilustrada na seguinte figura:

então cada fibra é da forma $Tg \times J$ com um cilindro sólido colado pelas bases:

CAP. 11

(c) Se a componente for de pontos de sela e uma vizinhança de sua imagem em W_f é da forma

então, as fibras, correspondentes a uma secção da vizinhança, são da forma $Tg_1 \times J$ colado com $Tg_2 \times J$ por meio de um cilindro sólido, como na figura:

Nestes casos, o fibrado sobre S^1 pode ser obtido a partir do fibrado trivial sobre o intervalo $[0,1]$, identificando-se as fibras sobre as extremidades por meio de um difeomorfismo que preserva orientação.

No primeiro caso, tal difeomorfismo induz difeomorfismos $Tg_1 \rightarrow Tg_1$, $Tg_2 \rightarrow Tg_2$, $Tg_1+g_2 \rightarrow Tg_1+g_2$ e, no segundo caso, difeomorfismos $Tg_1 \rightarrow Tg_2$, $Tg_2 \rightarrow Tg_1$ e $Tg_1+g_2 \rightarrow Tg_1+g_2$, o que só é possível se $g_1 = g_2$.

CAP. II

Observa-se que não pode ocorrer uma vizinhança de uma curva singular em W_f homeomorfa à faixa de Moëbius, pois caso existisse tal vizinhança, implicaria na existência de um fibrado sobre S^1 que induz um difeomorfismo entre T_g e T_{g+1} , o que é impossível.

(II) No caso de f apresentar pontos cuspidais ou pontos singulares duplos, tais pontos estão contidos em vizinhanças produto $I \times T$, já descritos nas seções anteriores, e que são homeomorfos a fibrados produtos sobre o intervalo I , de fibra T , onde T é a variedade transversal a f no ponto.

(III) Os arcos c de pontos singulares, com extremidades nas vizinhanças produto acima citados, estão contidos em um fibrado produto sobre tais arcos, cujas fibras são as variedades transversais nos pontos de c .

(IV) As regiões não descritas até agora correspondem a regiões de pontos regulares em W_f pela aplicação q e portanto, são fibrados sobre superfícies, e as fibras são superfícies.

5. O problema de realização

Nos itens anteriores foi visto que dada uma variedade fechada orientada de dimensão 4 e uma aplicação estável dessa variedade no plano, existe um complexo bidimensional W_f localmente descrito em função do conjunto singular de f , e uma aplicação deste complexo no plano que é uma imersão sobre cada estrato de W_f . Além disso, sobre cada face de W_f , correspondente a componentes não degeneradas das fibras de f , está definido um número que representa o genus da imagem inversa da aplicação quociente, invariante sobre cada face.

O problema de realização que se pode colocar é o seguinte:

"Sendo dados:

1- um complexo bidimensional B , com configurações locais admissíveis para um conjunto W_f ,

2 - uma aplicação de B no plano e uma estrutura para B de tal forma que em cada estrato, tal aplicação seja uma imersão,

3- para cada face de B um número, de tal forma que sejam coerentes como nos complexos W_f ,

PERGUNTA-SE: existe uma variedade fechada orientada M de dimensão 4 e uma aplicação estável de M no plano de tal forma que B seja seu respectivo W_f , a aplicação dada em (2) sendo a induzida de f pelo quociente, e os números citados em (3) representando o genus da imagem inversa da aplicação quociente?"

O problema, para a dimensão 3, foi completamente resolvido por L. E. Mata-Lorenzo em [19], sendo a resposta afirmativa, conforme já foi citado em 1.5.3.

Para a dimensão 4, apresentamos o seguinte contra-exemplo:

Uma vizinhança da curva c_5 é um fibrado sobre c_5 cuja fibra é um $\sim$, em que os dois "braços" voltam trocados quando se percorre c_5 , como se pode ver na figura:

Suponhamos que existam uma variedade fechada orientada M de dimensão 4 e uma aplicação estável f definida em M com valores no plano, de tal forma que B seja seu espaço quociente W e, a projeção de B sobre o plano, a aplicação induzida de f pela aplicação quociente. Em outras palavras, suponhamos que exista uma realização de B munido da projeção.

Nessas condições, M deve conter um fibrado Mc_5 sobre c_5 cuja fibra é a variedade obtida colando-se um tronco de cilindro sólido, pelas bases, a $(T_1 \cup T_1) \times J$, correspondente a uma seção da vizinhança:

O bordo dessa fibra pode ser decomposto em duas partes: uma delas, $T_1 \cup T_1$, correspondente as extremidades dos dois "braços" de --- que voltam trocados quando se percorre c_5 e consequentemente, os dois toros voltam trocados; a outra parte, T_2 , correspondente a outra extremidade, devido à troca dos dois toros da outra parte durante o percurso, gera um fibrado não trivial sobre um arco c paralelo a c_5 em B .

Por outro lado, c é bordo de um disco em B , o que implica que uma realização M de B contém um fibrado trivial sobre tal disco, com fibra T_2 (2 é o número que acompanha o disco). Como tal fibrado deve se encaixar com o anterior, a restrição de cada um desses fibrados sobre o arco comum c deveria coincidir, o que não ocorre.

Conclui-se assim, que existem casos em que não há realização, com as condições impostas para B .

b. Os arcos π -estáveis

Este parágrafo será destinado a fornecer algumas idéias geométricas sobre as transições na fatorização de Stein de uma aplicação estável f quando esta é levada para uma outra aplicação estável g , por meio de uma homotopia π -estável F .

A variedade M , domínio de f , será uma variedade fechada orientada de dimensão quatro e $W\langle F_t \rangle$ denotará o espaço quociente de M na fatorização de Stein de F_t .

Por um resultado apresentado no trabalho de L.E. Mata-Lorenzo, não há mudanças em $W\langle F_t \rangle$, a menos de homeomorfismos, enquanto t percorre um intervalo sem pontos de bifurcação de F . Ou seja, $W\langle \cdot \rangle$ é invariante em cada componente conexa do conjunto $\mathcal{S}(M, R^2)$ de todas as aplicações estáveis de M no plano.

Assim, o estudo das transições de $W\langle F_t \rangle$ se reduz à análise destes elementos em torno de pontos de bifurcação de F , sendo que para cada um destes pontos, t_0 , basta analisar $W\langle F_t \rangle$ para 3 valores de t : $t_1 < t_0 < t_2$, com a condição que os intervalos (t_1, t_0) e (t_0, t_2) não contenham outros pontos de bifurcação.

Além disso, para cada ponto de bifurcação t_0 , a condição de π -estabilidade fornece um único valor crítico q_0 de F , devido à codimensão de F_{t_0} que é um. Essa mesma condição implica também que $\$(q_0) = (F_{t_0})^{-1}(q_0) \cap S(F_{t_0})$ pode ser constituído de um, dois, ou três pontos de M , em torno dos quais se processam as transições mais significativas. Ou seja, existem vizinhanças contendo tais pontos, fora dos quais as F_t 's são estáveis e consequentemente, não há alterações topológicas na fatorização de Stein, para t numa vizinhança suficientemente pequena de t_0 .

Assim, para o estudo pretendido, basta considerar as formas locais das singularidades em $\$(q_0)$, tratadas conjuntamente, como será feito a seguir. No tratamento, será tomado $t_0 = 0$ e cada ponto p em $\$(q_0)$ será representado pela origem $(0,0,0,0)$ de R^4 .

$$(1) \$(q_0) = \{p\}.$$

É o caso das singularidades conhecidas por "lips", "beak to beak" e "rabo de andorinha", cujas formas normais são as seguintes:

(i) lips:

$$F(u,x,y,z,t) = (u, x^3 + u^2x + y^2 + z^2 + xt)$$

(ii) beak to beak:

$$F(u,x,y,z,t) = (u, x^3 - u^2x + y^2 + z^2 + xt)$$

CAP. 11

(iii) rabo de andorinha (1.a espécie):

$$F(u,x,y,z,t) = (u, ux + x^4 + y^2 \pm z^2 + xt^2)$$

(iv) rabo de andorinha (2.a espécie):

$$F(u,x,y,z,t) = (u, ux - x^4 + y^2 \pm z^2 + xt^2)$$

Em (i), a matriz Jacobiana de F é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2ux & 3x^2 + u^2 + t & 2y & \pm 2z \end{pmatrix}$$

que fornece o conjunto singular local

$$Sloc(F_t) = \{ (u,x,0,0) \text{ com } 3x^2 + u^2 + t = 0 \}.$$

Segue abaixo, um quadro ilustrativo do conjuntos singulares $Sloc(F_t)$ para $t_1 < 0$, $t_0 = 0$ e $t_2 > 0$, acompanhados de suas respectivas imagens no plano:

Conforme o que se pode observar no quadro acima, o conjunto singular $S(F_{t_1})$ é uma elipse que contém dois pontos cuspidais, quando $t_1 < 0$. Além disso, essas cúspides são ambas definidas (a), ou ambas indefinidas (b), conforme o coeficiente de z^2 na equação da forma normal seja $+1$ ou -1 , respectivamente. Assim, o comportamento local de $W(F_t)$ nos dois casos fica como na ilustração a seguir:

CAP. 11

(a)

(b)

Analogamente, o conjunto singular local no caso (ii) da singularidade "beak to beak" é dada por:

$$\text{Sloc}(F_t) = \{ (u, x, 0, 0) \text{ com } 3x^2 - u^2 + t = 0 \}$$

e fornece o seguinte quadro dos conjuntos singulares e suas imagens:

$\downarrow F_{t_1}$

$\downarrow F_{t_0}$

$\downarrow F_{t_2}$

CAP. 11

Além disso, há somente dois tipos de transições que podem estar ocorrendo em $W\langle F_t \rangle$:

(a)

(b)

Sejam agora os casos (iii) e (iv) dos "rabos de andorinha".

A matriz Jacobiana de F , dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & u \pm 4x^3 + 2xt & 2y & \pm 2z \end{pmatrix}$$

fornece os conjuntos singulares:

$\text{Sloc}(F_t) = \{ (u, x, 0, 0) \text{ com } u + 4x^3 + 2xt = 0 \}$, para (iii) e,

$\text{Sloc}(F_t) = \{ (u, x, 0, 0) \text{ com } u - 4x^3 + 2xt = 0 \}$, para (iv),

cujas imagens podem ser vistas no seguinte quadro:

CAP. II

Em ambos os casos, uma análise gráfica das formas locais, feita com auxílio de um programa análogo ao do caso das cúspides, leva às seguintes transições em $W\langle Ft \rangle$:

(a) $U = u ; V = ux + x^4 + y^2 + z^2 + x^2 t$

(b) $U = u ; V = ux + x^4 + y^2 - z^2 + x^2 t$

(c) $U = u ; V = ux - x^4 + y^2 + z^2 + x^2 t$

(d) $U = u ; V = ux - x^4 + y^2 - z^2 + x^2 t$

(análogo a (b))

(II) $\$(q_0) = (p, p')$ ou $\$(q_0) = (p, p', p'')$.

Isto ocorre em cada uma das situações abaixo:

(i) Quando um ponto de dobra p e um ponto cuspidal p' de F_0 têm a mesma imagem q_0 :

Neste caso, os arcos c e c' contendo p e p' , respectivamente, devem ser tal que a direção tangente à curva $F_0(c)$ no ponto p deve ser transversal à direção da cúspide.

(ii) Quando dois arcos de pontos de dobra são levados em curvas no plano que se tangenciam em $q_0 = F_0(p) = F_0(p')$, com contato de ordem 1:

(iii) Quando três arcos de dobra são levados em três curvas no plano que se interceptam em $q_0 = F_0(p) = F_0(p') = F_0(p'')$, sendo que os arcos são dois a dois transversais:

Nestas situações, ao invés de se procurar um único domínio para p e p' (ou p, p' e p'') para se obter a expressão de F , toma-se uma vizinhança para cada um desses pontos e as restrições de F_t a cada uma dessas vizinhanças são escritas na forma local, para t próximo de $t_0 = 0$. Ou seja, é utilizada uma expressão para cada um desses pontos, com apenas o parâmetro t em comum. Daí, a expressão "multigerme".

Assim, as expressões locais são dadas como a seguir:

(i) "intersecção de dobra com cúspide":

$$F_0(u, x, y, z, t) = (x^2 \pm y^2 \pm z^2 + t, u)$$

$$F_0'(u', x', y', z', t) = (u', x'^3 + u'x' \pm y'^2 \pm z'^2)$$

(ii) "intersecção não transversal de duas dobras":

$$F_0(u, x, y, z, t) = (x^2 \pm y^2 \pm z^2 + t, u)$$

$$F_0'(u', x', y', z', t) = (x'^2 \pm y'^2 \pm z'^2 - u'^2, u')$$

(iii) "intersecção de três dobras":

$$F_0(u, x, y, z, t) = (x^2 \pm y^2 \pm z^2 + t, u)$$

$$F_0'(u', x', y', z', t) = (x'^2 \pm y'^2 \pm z'^2 + u', u')$$

$$F_0''(u'', x'', y'', z'', t) = (x''^2 \pm y''^2 \pm z''^2 - u'', u'')$$

Dentre estas singularidades, só há interesse em estudar as transições na fatorização de Stein quando os pontos de $\$(q_0)$ pertencem a uma mesma componente conexa de $F_0^{-1}(q_0)$ pois, caso contrário, pode-se mostrar que não há mudanças em $W\langle F_t \rangle$, a menos de homeomorfismos [L. E. Mata-Lorenzo]. É o que ocorre, por exemplo, quando F_t é genérica especial para todo t e, mais geralmente, quando um dos arcos é de dobra definida.

A grande variedade de possibilidades, principalmente no caso da intersecção de três dobras, leva à utilização de uma técnica devida a L. E. Mata-Lorenzo, no caso 3-dimensional. Será dada uma breve idéia dessa técnica, a seguir.

Seja $F : M \times (-e, e) \rightarrow \mathbb{R}^2$ com um único ponto de bifurcação $t_0 = 0$, sendo $q_0 = (0, 0)$ o valor crítico da bifurcação. Considere o disco D centrado em q_0 e a componente conexa Mo de $F_0^{-1}(D)$ que contém $\$(q_0)$.

Como a mudança é local, pode-se também supor que para cada t em $(-e, e)$, a restrição de F_t a alguma vizinhança de $M - Mo$ coincida com a restrição de F_0 .

Então, para $0 < d < e$, as aplicações F_d e $F_{-d} : Mo \rightarrow D$, coincidem numa vizinhança de $\partial Mo = F_0^{-1}(\partial D)$ e assim, é possível construir uma aplicação $FF : 2Mo \rightarrow S^2$, definida no dobro de Mo e com valores na 2-esfera, que é o dobro do disco D , e que representa, simultaneamente, a situação local anterior e posterior à bifurcação.

CAP. 11

Mais ainda, com os devidos cuidados, FF se torna uma aplicação estável cuja fatorização de Stein possui as mesmas propriedades locais de uma fatorização de Stein de uma aplicação estável com valores no plano, estudados em 11.3.

Além disso, cada arco de $Sloc(F_d)$ juntamente com seu correspondente em $Sloc(F_{-d})$ forma uma componente conexa do conjunto singular $S(FF)$, cuja imagem pode ser estudada no plano, após projetar-se estereograficamente a esfera sobre o plano, utilizando-se como polo da projeção um valor regular.

Os desenhos abaixo representam essas imagens projetadas no plano e como estas devem ser interpretadas:

CAP. 11

O estudo das transições de $W\langle F_t \rangle$ se resume em analisar os possíveis $W\langle FF \rangle$:

(i) Para o caso da intersecção de dobra com cúspide, tem-se as seguintes possibilidades:

(ii) No caso da intersecção não transversal de duas dobras, tem-se as seguintes situações:

(iii) No caso de intersecção de tres dobras, eis alguns dos casos que podem aparecer:

CAPITULO III

APLICAÇÕES GENERICAS ESPECIAIS EM DIMENSÕES MAIS ALTAS

1. Introdução

Seja M uma variedade fechada orientada de dimensão $n = 4$.

Os teoremas A e B de Oscar Burlet e G. de Rham, enunciados em 1.5.4, podem ser generalizados para esta dimensão, com algumas modificações.

TEOREMA A':

(a) Seja M uma variedade fechada orientada de dimensão quatro, domínio de uma aplicação genérica especial f com valores no plano. Então o complexo bidimensional Wf obtido pela fatorização de Stein de f é uma superfície compacta orientável, cujo bordo corresponde ao conjunto singular $S(f)$ de f , e a aplicação $f' : Wf \rightarrow \mathbb{R}^2$ induzida é uma imersão. Além disso, M pode ser obtido como quociente de um fibrado em 2-esferas M' sobre Wf , mediante uma relação de equivalência que identifica pontos de uma mesma fibra sobre o bordo de Wf (e não altera as outras fibras). Mais ainda, se p , q e q' são as projeções de M' sobre Wf , M sobre Wf e M' sobre M , respectivamente, então $p = q \circ q'$.

(b) Reciprocamente, sejam dados: uma superfície compacta com bordo W , com uma imersão α de W no plano, e um fibrado orientado em 2-esferas M' sobre W . Então, o espaço M obtido de M' pela aplicação quociente q' que identifica os pontos em uma mesma fibra sobre um ponto do bordo de W e deixa os outros pontos invariantes, pode ser dotada de uma estrutura diferenciável que o torna uma variedade fechada orientada de dimensão quatro, domínio da aplicação genérica especial $f = \alpha \circ q$, onde q é a projeção de M' sobre W tal que $p = q \circ q'$.

TEOREMA B':

Seja M uma variedade fechada orientada de dimensão quatro que pode ser domínio de uma aplicação genérica especial com valores no plano. Sejam $V_0 = S^4$ e $V_r = V(r-1) \# V_1$, onde $V_1 = S^1 \times S^3$ e $\#$ representa a soma conexa. Então, $M = V_r$, onde r é o posto do grupo fundamental de M , que é livre.

Neste Capítulo, as séries de resultados que serão demonstrados para se obter os teoremas acima, serão apresentadas com o máximo de generalidade por nós obtido, sobre a dimensão da variedade M .

Porém, o prosseguimento do trabalho proposto será precedido pela apresentação de um resumo de resultados sobre fibrados em k -esferas.

2. Sobre fibrados orientados em k-esferas

Alguns resultados sobre as aplicações genéricas especiais obtidos para dimensão 3 dependem essencialmente do fato dos fibrados orientados em círculos sobre as superfícies W serem triviais. A generalização desses resultados para dimensões mais altas se viabiliza mais facilmente quando forem verificadas propriedades semelhantes.

Assim, o objetivo deste parágrafo é reunir informações sobre fibrados em k-esferas, com especial interesse no conhecimento das dimensões em que se obtém fibrados triviais.

Sejam então os grupos $\text{Diff } S^k$ e $\text{Diff } D^{k+1}$ dos difeomorfismos positivos (que preservam orientação) de S^k e D^{k+1} , respectivamente, munidos da topologia C^∞ .

Cada difeomorfismo em D^{k+1} define naturalmente um difeomorfismo em S^k , determinando assim, uma aplicação natural

$$\alpha_{k+1}: \text{Diff } D^{k+1} \longrightarrow \text{Diff } S^k,$$

em cuja imagem estão os difeomorfismos de S^k que se estendem a difeomorfismos de D^{k+1} . Além disso, $\text{Im } \alpha_{k+1}$ é um subgrupo de $\text{Diff } S^k$ e o co-núcleo

$$\Gamma_{k+1} = \frac{\text{Diff } S^k}{\text{Im } \alpha_{k+1}}$$

de α_{k+1} é um grupo abeliano finito, que segundo Munkres, é canonicamente isomorfo a

$$\frac{\pi_0(\text{Diff } S^k)}{\pi_0(\text{Diff } D^{k+1})}.$$

Quando $\pi_0(\text{Diff } S^k)$ é trivial, podem ser obtidos os seguintes resultados:

(1) Todo fibrado orientado sobre S^1 com fibra S^k é trivial, isto é, é isomorfo ao fibrado produto.

(2) Todo fibrado orientado de fibra S^k sobre uma superfície W compacta, orientada e com bordo, também será trivial.

(3) A $(k+1)$ -esfera topológica tem uma única estrutura diferenciável.

As afirmações (1) e (2) serão aplicadas no decorrer do trabalho e (3), além de ser importante por si mesma, garante a não trivialidade de $\pi_0(\text{Diff } S^k)$ em certos casos, como por exemplo, para $k = 6$.

Para se obter (1), basta lembrar que todo fibrado orientado sobre S^1 de fibra F orientada, pode ser obtido do fibrado (trivial) de mesma fibra sobre $[0,1]$, identificando-se as fibras sobre 0 e 1 por meio de um difeomorfismo positivo. Além disso, dois difeomorfismos homotópicos produzem fibrados equivalentes.

Para a parte (2), como W tem o mesmo tipo de homotopia de uma rosácea W_1 , basta mostrar que o fibrado, restrito a W_1 , é trivial. E de fato, como W_1 pode ser obtido de S^1 colando-se sucessivamente um número finito de arcos, pelas extremidades, como na figura abaixo,

basta observar que em cada passo, so há uma maneira, a menos de isotopia, de "colar" as fibras sobre as extremidades do novo arco sobre as fibras do fibrado trivial do passo anterior: as colagens são feitas através de difeomorfismos positivos de F e estas são isotópicas à identidade, por hipótese.

Na parte (3), o resultado segue do fato que as estruturas diferenciáveis sobre a $(k+1)$ -esfera topológica podem ser obtidas colando-se dois discos D^{k+1} através do bordo, por meio de difeomorfismos positivos.

Segundo as teorias de Milnor-Kervaire [14] e Smale [25], tem-se que para $k \geq 4$, o grupo Γ_{k+1} é igual ao grupo Θ_{k+1} das classes de H-cobordismo da $(k+1)$ -esfera homotópica e fornecem o número de estruturas diferenciáveis não equivalentes admissíveis para a $(k+1)$ -esfera topológica. O cálculo destes grupos fornece, entre outros, que $\Gamma_5 = \Gamma_6 = 0$ e $\Gamma_7 \neq 0$ (na verdade, Γ_7 possui 28 elementos). Estes resultados, juntamente com os de Cerf [4], segundo os quais, para $k \geq 5$, $\pi_0(\text{Diff } D^{k+1}) = 0$ e $\pi_0(\text{Diff } S^k) \cong \Gamma_{k+1}$, segue que $\pi_0(\text{Diff } S^5) = 0$ e $\pi_0(\text{Diff } S^6) \neq 0$. O primeiro exemplo de um difeomorfismo $S^6 \rightarrow S^6$ que não é diferenciavelmente isotópico a um ortogonal foi apresentado por Milnor [14], em 1956.

No caso das dimensões menores, já era conhecido nessa época, que $SO(2)$ e $SO(3)$ são retratos por deformação de $\text{Diff } S^1$ e $\text{Diff } S^2$, respectivamente. Smale havia conjecturado que $SO(4)$ também seria retrato por deformação de $\text{Diff } S^3$. A condição de $SO(k+1)$ ser retrato por deformação de $\text{Diff } S^k$ é mais forte do que a trivialidade de $\pi_0(\text{Diff } S^k)$, pois implica no isomorfismo entre $\pi_i(\text{Diff } S^k)$ e $\pi_i(SO(k+1))$, para todo $i \geq 0$.

A conjectura de Smale foi provada por A. E. Hatcher [10], em 1983, porém já era conhecido que $\pi_0(\text{Diff } S^3)$ é trivial e consequentemente, $\pi_4 = 0$, graças a J. Cerf [5]. Este resultado, obtido por Cerf em 1962, tem sido, segundo resumo publicado por N. H. Kuiper e reapresentado em [5], crucial na teoria de Munkres, na qual as obstruções para a existência de uma estrutura diferenciável numa n -variedade combinatoria são elementos de grupos de cohomologia com coeficientes em π_n ; como já era conhecido na época que $\pi_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, 5$ e 6 , com mais este resultado segue que toda n -variedade combinatoria com $n \leq 6$ admite uma única estrutura diferenciável.

Para esferas de dimensão quatro, o seu grupo de difeomorfismos $\text{Diff } S^4$ ainda é desconhecido. No entanto, tem-se que $\pi_5 = 0$ e portanto, $\pi_0(\text{Diff } S^4) = \pi_0(\text{Diff } D^5)$.

Assim, para $k = 1, 2, 3$ e 5 , todo fibrado orientado de fibra S^k sobre S^1 ou sobre uma superfície W do tipo definido anteriormente é trivial. Para $k = 4$, não se tem ainda uma resposta sobre tal fato e, para dimensões maiores, dependem da ordem de $\pi_{k+1} = \theta_{k+1}$.

Dos resultados acima segue também que para $j = k+1 = 2, 3, 4$ e 6 , $\pi_0(\text{Diff } D^j) = 0$ e assim, todo fibrado orientado sobre S^1 cujas fibras são j -discos também é trivial.

CAP. III

3. A fatorização de Stein de uma aplicação genérica especial e os fibrados em $(n-2)$ -esferas sobre W_i

Seja então uma aplicação genérica especial $f : M \dashrightarrow \mathbb{R}^2$.
Seja W_f a fatorização de Stein de f .

PROPOSIÇÃO 10:

W_f é uma superfície compacta orientável com bordo correspondente ao conjunto singular $S(f) = S_0$.

DEM:

A aplicação q da fatorização de Stein de uma f genérica especial leva $M - S(f)$ sobre uma superfície aberta A contida em W_f , munida da estrutura diferenciável induzida pela submersão $f/(M - S(f))$. Sendo f genérica especial, para cada ponto a em $S(f)$ corresponde um único ponto $q(a)$ em $W_f - A$. Além disso, f pode ser expressa, numa vizinhança de f , pela seguinte forma local:

$$Y_1 = x_1$$

$$Y_2 = x_2^2 + \dots + x_n^2$$

onde $(0, \dots, 0)$ corresponde a a e $(0, 0)$ a $f(a)$.

A vizinhança $U = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 < \varepsilon^2\}$ de a é aplicada sobre $V = \{Y_1^2 + Y_2 < \varepsilon^2, Y_2 > 0\}$, o arco $x_2 = \dots = x_n = 0$ é aplicado sobre o arco $Y_2 = 0$.

A estrutura de superfície (com bordo) em W , que estende a de A , é completada pelas cartas locais da forma $(q(U), \alpha_U)$ em torno de $q(a)$, onde α_U é o homeomorfismo de $q(U)$ em V induzido da forma local pela aplicação quociente q .

Lem-se também que o interior de W_f é A e, seu bordo, que é $W_f - A$, é homeomorfo a $S(f)$ e a imersão $\alpha : A \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ se estende a uma imersão $\tilde{\alpha} : W_f \dashrightarrow \mathbb{R}^2$.

Além disso, W_f é orientável, já que imerge no plano.##

CAP. III

PROPOSIÇÃO 11:

Para $n = 4, 5$ e 7 , assim como para $n = 3$, existe um único fibrado M' sobre W_f , de fibra S^{n-2} , tal que M é obtida de M' identificando-se os pontos das fibras sobre o bordo de W_f .

DEM:

Retirando de W_f um colarinho A de seu bordo, obtém-se uma superfície W_1 contida no seu interior, difeomorfa a W_f . Este difeomorfismo se levanta a um isomorfismo do subfibrado $q^{-1}(W_1)$ contido em $M - S(f)$ sobre um fibrado M' de base W_f (basta tomar M' como sendo o pull-back de $q^{-1}(W_1)$ pelo difeomorfismo de W em W_1). Além disso, o interior de M' é isomorfo a $M - S(f)$.

Agora, $q^{-1}(A)$ é um fibrado em $(n-1)$ -discos sobre o bordo de W_f e, devido às dimensões, é trivial no caso orientado (4.1).

Se q' representa a aplicação quociente que colapsa cada fibra sobre um ponto do bordo de W_f e p é a projeção de M' sobre W_f , então $q'(p^{-1}(A))$ é um fibrado em $(n-1)$ -discos sobre W_f , trivial. Como $p^{-1}(W_1)$ é isomorfo a $q^{-1}(W_1)$, e assim, $q'(M')$ é difeomorfa a M e, além disso, q' pode ser tomada de tal forma a se ter $p = q \circ q'$.##

OBSERVAÇÃO: Se c é uma componente conexa de $S(f)$, $q'^{-1}(c) = p^{-1}(q(c))$ é um fibrado sobre c (ou sobre $q(c) \cong c$) de fibra S^{n-2} e, devido ao fato do grupo $\pi_0(\text{Diff } S^k)$ ser trivial para $k = 1, 2, 3$ e 5 , tal fibrado é trivial (III.2).

Reciprocamente, sejam dados uma superfície compacta orientada W , um fibrado em esferas $((n-2)\text{-esferas})$ sobre W e uma imersão $\alpha: W \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Seja M obtido de M' reduzindo-se cada fibra do bordo de M' em um ponto. Sejam $p: M' \rightarrow W$ e $q': M' \rightarrow M$ as projeções.

Nestas condições, obtém-se o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 12:

Pode-se dar a M uma estrutura de variedade diferenciável tal que se $q: M \rightarrow W$ é a projeção induzida pela fibração, a aplicação $f = \alpha \circ q$ se torna genérica especial.

DEM:

Se c é uma curva do bordo de W , então $p^{-1}(c)$ é uma componente do bordo de M' , que é levado pela projeção q' a uma curva $\Gamma = q'(p^{-1}(c)) = q^{-1}(c)$ em M . Seja $\$$ a reunião dessas curvas Γ .

$q'/\text{int}(M')$; $\text{int}(M') \rightarrow (M - \$)$ é um homeomorfismo e induz em $(M - \$)$ uma estrutura diferenciável tal que $q/(M - \$) : (M - \$) \rightarrow \text{int}(W)$ é uma submersão e $f = \alpha \circ q$ não tem pontos singulares em $(M - \$)$.

Seja agora a um ponto de $\Gamma \subset \$$. Então $q(a)$ é um ponto do bordo de W e portanto, pode-se tomar em W coordenadas locais y_1, y_2 , nulas em $q(a)$ e tal que $U = \{y_1 < 1, 0 \leq y_2 < 1\}$ seja uma vizinhança de $q(a)$ em W , onde o subconjunto $\{y_1 < 1, y_2 = 0\}$ define um arco no bordo de W , imagem por q de um arco L em Γ . Assim, U pode ser identificado com $L \times [0, 1)$.

Como M' é um fibrado e portanto, localmente trivial, $A = p^{-1}(U)$ pode ser representado por $L \times [0, 1) \times S^{n-2}$ para U suficientemente pequeno. Além disso, sua imagem $V = q'(A)$ é uma vizinhança de a em M .

$$\begin{array}{c}
 A \sim L \times [0, 1) \times S^{n-2} \subset M' \\
 \downarrow q' \\
 a \in V \\
 \downarrow q \\
 q(a) \in U \sim L \times [0, 1) \subset W
 \end{array}$$

Representemos por $r(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ um ponto da esfera de dimensão $n-2$ e raio r .

Seja $\mu : L \times [0,1] \times S^{n-2} = A \rightarrow L \times D^{n-1}$ dada por

$$\mu(y_1, y_2, 1(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})) = (y_1, \sqrt{y_2}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})).$$

A aplicação μ leva $L \times \{0\} \times S^{n-2}$ contido no bordo de M' em $L \times \{0\}$ em Γ e fora disso é injetora. Como $q' : A \rightarrow V$ também leva $L \times \{0\} \times S^{n-2}$ em Γ e é injetora em $M' - A$, existe um homeomorfismo $h : L \times D^{n-1} \rightarrow V$ tal que a restrição q'/A é igual a $h \circ \mu$ e esse homeomorfismo transporta a estrutura de $L \times D^{n-1}$ em V .

Sejam $p_2, \dots, p_n : R^{n-1} \rightarrow R$ as projeções canônicas sobre as coordenadas e $S^{n-2} \subset R^{n-1}$. O homeomorfismo h induz em V coordenadas locais $x_1 = y_1$, $x_2 = p_2(z)$, ..., $x_n = p_n(z)$, onde $z = \sqrt{y_2}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \in D^{n-1}$, e na vizinhança de $f(a) = \alpha o q(a)$ em R^2 tem-se as coordenadas locais y_1, y_2 através de α .

Assim, f se expressa nessa vizinhança na forma

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ y &= x_2^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

o que mostra que $f = \alpha \circ q$ é genérica especial, onde α é a dobra de f .##

OBSERVAÇÃO: Para esta recíproca, não há restrições quanto à dimensão n de M , nem à orientabilidade.

Um outro resultado válido para $n = 3$ e que se generaliza para $n \geq 3$ qualquer, diz respeito ao grupo fundamental de M :

PROPOSIÇÃO 13:

Se M é uma variedade n -dimensional fechada que é domínio de uma aplicação genérica especial $f : M \rightarrow R^2$, então seu grupo fundamental é isomorfo ao grupo fundamental de Wf .

DEM:

Se existir uma aplicação genérica especial f definida em M , sabe-se que Wf é uma superfície orientada com bordo e a aplicação quociente q leva $M - S(f)$ sobre $\text{int}(Wf)$ como projeção de uma fibração localmente trivial, cujas fibras são homeomorfas a S^{n-2} (na verdade, são difeomorfas, já que a forma local de f em vizinhanças de pontos de dobra fornece equações de esteras e as fibras são invariantes em cada componente conexa de $\text{int}(Wf)$).

Considerando um ponto base a em $M-S(f)$ com $b = q(a)$, tem-se a seguinte sequência exata de fibrações:

$$0 \rightarrow \pi_1(F, a) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M-S(f), a) \xrightarrow{q_*} \pi_1(\text{int}(Wf), b) \rightarrow 0$$

e como $\pi_1(F, a) \cong \pi_1(S^{n-2}, a) = 0$ para $n > 3$, segue que $\pi_1(M-S(f), a)$ é isomorfo a $\pi_1(\text{int}(Wf), b)$.

Agora, a inclusão $j : M-S(f) \rightarrow M$ induz um homomorfismo $j_* : \pi_1(M-S(f), a) \rightarrow \pi_1(M, a)$, que é um epimorfismo pois todo laço em M pode ser desviado de $S(f)$, devido à codimensão de $S(f)$.

Seja agora $\gamma : S^1 \rightarrow M-S(f)$ um laço com ponto base a , representando um elemento do núcleo de j_* , isto é, γ é homotópico a zero em M , ou seja, γ admite uma extensão $H : D^2 \rightarrow M$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que H seja transversal a $S(f)$, o que implica, devido às dimensões de $S(f)$ e de D^2 , que a imagem de H é disjunta de $S(f)$, ou seja, γ é homotópico a zero em $M-S(f)$. Conclui-se daí que j_* é, na verdade, um isomorfismo.

Logo $\pi_1(M, a) \cong \pi_1(M-S(f), a) \cong \pi_1(\text{int}(Wf), b)$.
e como $\pi_1(Wf, b) \cong \pi_1(\text{int}(Wf), b)$, segue-se o resultado.##

O Teorema A' enunciado na introdução deste Capítulo é a junção das proposições 10, 11, 12 e 13.

4. Sobre os domínios das aplicações genéricas especiais

Denotando por r o posto do grupo fundamental da variedade a ser encontrada, os últimos resultados do parágrafo anterior implicam que $r = 2g + b - 1$, onde g e b são, respectivamente, o genus e o número de componentes conexas do bordo, de Wf .

Os casos em que os domínios podem ser classificados, em função de r serão enunciados a seguir:

PROPOSIÇÃO 14:

Se $r = 0$, M é difeomorfa a S^n , para $n = 4, 5, 6$ e 7 .

DEM:

Em primeiro lugar, pode-se mostrar que para todo $n \geq 3$, existe uma aplicação genérica especial definida na esfera standard S^n com valores no plano:

Se S^n é a esfera, canonicamente mergulhada em R^{n+1} , e se $p_{1,2} : R^{n+1} \rightarrow R^2$ é a projecção nas duas primeiras coordenadas, então $f = p_{1,2}/S^n : S^n \rightarrow R^2$ é uma aplicação genérica especial, cujo conjunto singular é o círculo $C = \{(y_1, y_2, 0, \dots, 0) \in S^n\}$.

De fato:

Para cada $i = 1, \dots, n+1$, os hemisférios norte e sul dados por

$$S^n(i, +) = \{y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in S^n : y_i > 0\}$$

e

$$S^n(i, -) = \{y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in S^n : y_i < 0\},$$

respectivamente, podem ser cobertos pelas cartas locais dadas pelas inversas das aplicações $\varphi(i, \pm) : B \rightarrow S^n(i, \pm) \subset S^n$ dadas por

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \pm\sqrt{1 - |x|^2}, \dots, x_{n+1}),$$

onde $B \subset R^n$ é a bola aberta unitária, $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, $|\cdot|$ é a norma usual de R^n e os sinais $+$ e $-$ se referem aos hemisférios.

Os pontos y em $S^n - C$ pertencem a hemisférios $S^n(i, \pm)$ com i distintos de 1 e 2 e como $f \circ \varphi(i, \pm)$ é a projecção canónica nestes casos, y é ponto regular de f .

Agora, se y for um ponto de C , então y está em um dos seguintes hemisférios: $S^n(1, +)$, $S^n(1, -)$, $S^n(2, +)$ e $S^n(2, -)$. Como em cada um desses casos, o tratamento é análogo, consideremos apenas o caso em que y está em $S^n(1, +)$. Então, $f(y) = p_{1,2} \circ \varphi(1, +)(x_2, \dots, x_{n+1}) = (\sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2}, x_2) = (z_1, z_2)$.

A mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_2 \\ Z_2 &= 1 - z_1^2 - z_2^2 \end{aligned}$$

esta bem definida para z_1 estritamente positivo e, nas novas coordenadas, f se expressa na forma

$$\begin{aligned} Z_1 &= x_2 \\ Z_2 &= x_3^2 + \dots + x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

o que equivale a afirmar que $y \in C$ é um ponto de dobra definida.

Nestes casos, a superfície W correspondente é um disco e, para $n = 4, 5$ e 7 , $M = S^n$ é único (a menos de difeomorfismos), já que só se tem um fibrado em $(n-2)$ -esferas sobre o disco e só há uma maneira de colapsar as fibras sobre W pois é único o fibrado em $(n-1)$ -discos sobre W .

Agora, para $n = 6$, sejam: $q : M \rightarrow W$ a aplicação quociente, $h : W \rightarrow D$ um difeomorfismo entre W e o disco standard D , e $p : D \rightarrow R$ a função altura.

A composição $k = p \circ h \circ q$ é uma função de Morse com apenas dois pontos críticos, donde segue que M é homeomorfa à esfera S^6 . Pela unicidade da estrutura diferenciável de S^6 , segue que S^6 também é a única variedade fechada de dimensão 6 com grupo fundamental trivial, que pode ser domínio de uma aplicação genérica especial com conjunto singular conexo.##

OBS: Este último argumento pode também ser utilizada para $n = 4$ e 5 , o que não se pode afirmar para $n = 7$.

PROPOSIÇÃO 15:

Se $r = 1$ e M é orientado, de dimensão $n = 4$ e 6 , M é $S^1 \times S^{n-1}$.

DEM:

Neste caso, W é um anel $S^1 \times I$ e, para cada $\theta \in S^1$, $q^{-1}(\{\theta\} \times I)$ é uma $(n-1)$ -esfera, como domínio de uma função de Morse com apenas dois pontos críticos. Assim, M é um fibrado

sobre S^1 cujas fibras são $(n-1)$ -esferas e, como $\pi_0(\text{Diff}(S^3))$ e $\pi_0(\text{Diff}(S^5))$ são triviais, M só pode ser o produto.##

PROPOSIÇÃO 16:

Se $r > 1$ e M é orientado, de dimensão $n = 4$, então M é soma conexa de r cópias de $S^1 \times S^3$.

DEM:

Sabe-se que W pode ser obtido de uma superfície W_0 , cujo grupo fundamental tem posto $ro = r-1 = 2g_0 + b_0 - 1$, acrescentando-se uma asa $B = L \times I$, onde $I = [0,1]$ e, $L_x(0)$ e $L_x(1)$ são curvas que devem ser identificadas com curvas L_0 e L_1 do bordo de W_0 . Se L_0 e L_1 pertencem a uma mesma componente conexa do bordo de W_0 , tem-se que $g = g_0$ e $b = b_0 + 1$; caso contrário, $g = g_0 + 1$ e $b = b_0 - 1$.

Seja M' um S^2 -fibrado orientado sobre $W = W_0 \cup B$. Se p é a projeção do fibrado sobre W , então $p^{-1}(W_0)$ e $p^{-1}(B)$ são subfibrados de M' , que serão denotados por M_0' e B' , respectivamente.

A aplicação quociente q_0' que reduz cada fibra sobre o bordo de W_0 em um ponto, induz em $M_0 = q_0'(M_0')$ uma estrutura de variedade diferenciável de tal forma que M_0 admite uma aplicação genérica especial $f_0 : M_0 \rightarrow R^2$ e W_0 é a superfície correspondente a M_0 , pela aplicação quociente $q_0 : M_0 \rightarrow W_0$.

Sejam C_0 e C_1 duas curvas em W_0 que juntas com L_0 e L_1 , respectivamente, delimitam duas regiões D_0 e D_1 , homeomorfas a discos.

CAP. III

Seja W_0 o fecho de $W_0 - (D_0 \cup D_1)$. Então $q_0^{-1}(W_0)$ é homeomorfo a $q^{-1}(W_0)$ e, também, $q_0^{-1}(D_0)$ e $q_0^{-1}(D_1)$ são homeomorfos a dois discos, D_0' e D_1' , de dimensão 4.

Seja C um arco em M_0 ligando D_0' e D_1' . Para uma vizinhança tubular T de C , a reunião $D_0' \cup T \cup D_1'$ é um subespaço de M_0 homeomorfo a um disco D^4 .

Por outro lado, $q^{-1}(B)$ é homeomorfo a $S^3 \times I$ e seu bordo, $q^{-1}(L_0) \cup q^{-1}(L_1)$ é uma reunião de duas esferas S^3 , que podem ser ligadas por uma curva C' . A reunião de $S^3 \times I$ com $D^3 \times C'$ é homeomorfa a $S^3 \times S^1$ menos o interior de um disco, no caso orientável.

Então:

$$\begin{aligned} M &= q^{-1}(W_0 \cup B) = q^{-1}(W_0) \cup q^{-1}(B) \cong q_0^{-1}(W_0) \cup q^{-1}(B) \\ &= (q_0^{-1}(W_0) - T) \cup (q^{-1}(B) \cup T) \\ &\cong (M_0 - D_0' \cup T \cup D_1') \cup (S^3 \times S^1 - \text{int}(D^4)). \end{aligned}$$

Logo, M pode ser obtido de M_0 e $S^3 \times S^1$ retirando-se de cada um o interior de um disco e identificando-se os bordos dos dois discos, o que equivale a efetuar a soma conexa entre M_0 e $S^3 \times S^1$.

Assim, quando $r > 1$, M é homeomorfa a um espaço obtido como soma conexa de r parcelas de variedades $S^1 \times S^3$. ##

As proposições 14, 15 e 16 completam a demonstração do Teorema B', enunciado no início deste Capítulo.

CAPÍTULO IV

RELAÇÕES ENTRE APLICAÇÕES GENERICAS E IMERÇÕES

1. Introdução

Neste Capítulo serão estudados dois problemas, a saber:

-- relacionar as aplicações genéricas especiais estáveis com o problema da extensão de imersões de uma reunião C de círculos no plano, a imersões definidas em superfícies compactas com bordo;

-- relacionar famílias de aplicações genéricas especiais com "imagem-homotopia" de imersões de superfícies compactas com bordo no plano, no sentido da definição de L. Kauffman [13].

CAP. IV

2. As aplicações genéricas especiais e o problema da extensão de imersões

Dada uma imersão $\alpha: S^1 \rightarrow R^2$, o trabalho de Blank [2] permite verificar se tal imersão se estende a uma imersão $\tilde{\alpha}: D \rightarrow R^2$ do disco no plano. Mas, pelo trabalho de O. Burlet e G. de Rham [3], dada uma imersão $\tilde{\alpha}$ do disco no plano, existe uma aplicação genérica especial f da esfera S^3 no plano, de tal forma que a aplicação quociente q da fatorização de Stein de f leve S^3 no disco e $f = \tilde{\alpha} \circ q$. Assim, quando a imersão $\alpha: S^1 \rightarrow R^2$ se estende a uma imersão do disco, sua imagem pode ser obtida como imagem do conjunto singular $S(f)$ de uma aplicação genérica especial f da 3-esfera no plano.

Resumidamente, o método de Blank consiste em tomar um feixe de raios paralelos no plano e associar "palavras", da seguinte forma:

-- para cada componente conexa limitada de $R^2 - \text{Im } \alpha$, deve-se tomar um raio, com origem no seu interior,

-- os raios devem cruzar a imagem de α transversalmente,

-- cada raio deve receber um nome: $a, b, c, \dots$ e ser orientado da origem "para o ∞ ".

Então, para cada cruzamento de um raio r com a imagem da imersão, dá-se sinal positivo ou negativo, conforme a orientação induzida no plano pela base formada pelo raio e pelo vetor direcional da curva seja ou não, a orientação usual do plano.

A partir daí, toma-se um ponto de referencia qualquer sobre a imagem de α e, seguindo sua orientação, forma-se uma "palavra", cujas "letras" são dadas pelos cruzamentos de $\text{Im } \alpha$ com os raios, representados como se pode ver nos exemplos abaixo:

No primeiro exemplo, a palavra formada é $(a+)(c+)(b-)$ e, no outro, $(a+)(c+)(d+)(e+)(b+)(c+)(e-)$.

Ainda segundo o processo, subpalavras da forma $(x+)(y_1+)...(y_k+)(x-)$ ou $(x-)(y_1+)...(y_k+)(x+)$ podem ser canceladas. Se no final dos cancelamentos, a palavra obtida possuir somente sinais positivos, Blank garante que a imersão se estende ao disco.

Assim, a imersão do primeiro exemplo não se estende ao disco e a do segundo, sim. Portanto, a figura do primeiro exemplo não representa imagem do conjunto singular de nenhuma aplicação genérica especial definida em S^3 .

A generalização do resultado de O. Burlet e G. de Rham permite afirmar que, se uma imersão $\alpha: S^1 \rightarrow R^2$ se estende a uma imersão do disco, sua imagem pode ser obtida como imagem do conjunto singular de uma aplicação genérica especial definida numa variedade fechada M com grupo fundamental trivial, sendo que para $n = 3, 4, 5, 6$ e 7 , M é a esfera n -dimensional.

Mais geralmente, dada uma imersão $\alpha: C \rightarrow R^2$, onde C é uma reunião finita e disjunta de círculos, os trabalhos de S. Troyer [28], K. Bailey [1] e Troyer & Francis [7] permitem verificar se α se estende a uma imersão definida numa superfície compacta W , cujo bordo é C . Novamente, utilizando o trabalho de O. Burlet e G. de Rham, segue que existe uma aplicação genérica especial f definida numa variedade fechada V_r [v. I.5.4], cuja imagem do conjunto singular é a imagem de α . Isto será utilizado mais tarde, no estudo de "imagem-equivalência".

Estes trabalhos sobre extensão de imersões $\alpha: C \rightarrow R^2$ são generalizados por Vera Zanetti em sua tese [29], para imersões de "superfícies com fins".

Um problema relacionado, ainda em aberto, seria a extensão de uma imersão $\alpha: C \rightarrow R^2$ para um complexo bidimensional W do tipo admissível como Wf de alguma aplicação genérica f definida numa 3-variedade fechada e sem pontos cuspidais, de tal forma que a extensão restrita a cada esqueleto seja uma imersão. Neste caso, um resultado de L. Mata-Lorenzo [19] garantiria a existência de uma variedade fechada M e uma aplicação estável $f: M \rightarrow R^2$, cuja imagem do conjunto singular coincide com a imagem de α .

Ainda no trabalho de S. J. Blank, é apresentada uma classificação das extensões obtidas para uma imersão do círculo no plano, em função do número de palavras distintas que se pode obter, ao efetuar as simplificações indicadas. O exemplo a seguir mostra uma imersão que pode ser estendida de duas maneiras distintas, correspondentes a palavras positivas também distintas:

CAP. IV

Estes exemplos mostram também que com uma mesma imagem para o conjunto singular, pode-se obter aplicações genéricas especiais distintas.

Porém, será mostrado no parágrafo seguinte, que tais aplicações, a menos de difeomorfismos na fonte, podem ser ligadas por meio de uma família diferenciável de aplicações genéricas especiais.

3. Imagem-equivalência de aplicações genéricas especiais

3.1. Introdução

Do trabalho de O. Burlet e G. de Rham em [3] sabe-se que a imagem de uma variedade fechada tridimensional M por uma aplicação genérica especial é imagem imersa de uma superfície com bordo no plano. Tal fato vale também para variedades M de dimensão maior, como já foi visto anteriormente.

Assim, a imagem no plano dessas aplicações é algo bem conhecido.

Além disso, tendo-se a imagem, pode-se determinar a variedade M que lhe deu origem, nas dimensões 3 e 4, no caso orientável.

Quanto à aplicação, sua imagem fornece, de imediato, o número de componentes conexas do seu conjunto singular. Mas, como no caso de imersões, dada uma aplicação genérica especial f de uma variedade M no plano, se H for um difeomorfismo de M em si mesmo, a aplicação $(f \circ H)$ é genérica especial e tem a mesma imagem de f , ou seja, dada uma possível imagem, não há unicidade da aplicação genérica especial com a referida imagem.

Então, dadas duas imagens por aplicações genéricas especiais de uma variedade M , só se pode determinar uma relação entre as duas aplicações a menos de difeomorfismos na fonte.

Considere agora uma aplicação genérica especial f definida numa variedade fechada M . Sua imagem é também imagem por uma imersão f' de uma superfície com bordo W . Modificando f' através de uma homotopia regular, introduzimos alterações na sua imagem que podem ser reconhecidas visualmente como se tratassem de projeções sobre o plano de uma superfície de borracha se movimentando suavemente no espaço. Não se verifica nenhuma criação de quinas nem aparecimento ou desaparecimento de qualquer componente. No caso das aplicações genéricas especiais, será mostrado que se (f_t) é uma família diferenciável de tais aplicações, então suas imagens se deformam como no caso das

CAP. IV

Imersões.

Agora, dadas duas aplicações genéricas especiais f e g de uma variedade M no plano, cujas imagens podem ser deformadas uma na outra suavemente, como imagens de uma homotopia regular de imersões de uma superfície no plano, pode-se perguntar se existe uma família diferenciável de aplicações genéricas especiais entre f e $(g \circ H)$, onde H é um difeomorfismo de M em si mesmo.

A ilustração seguinte mostra um exemplo dessas deformações na imagem, apresentado por L. H. Kauffman em [13], onde a superfície imersa é um toro de genus 2 com um buraco; para nós, estas imagens representam aplicações genéricas especiais definidas sobre a variedade $V(4)$ obtido como soma conexa de 4 parcelas de $S^1 \times S^{n-1}$:

CAP. IV

3.2. Imagem-homotopia de imersões.

As definições e os resultados que aqui se seguem são apresentados por L. H. Kauffman em [13] e trata da classificação das imersões de superfícies W com bordo no plano, que têm imagens deformáveis uma na outra como descritas anteriormente.

Nesta parte, W será sempre uma superfície compacta, conexa, orientada e com bordo.

Diz-se que uma imersão $f : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma IMERSÃO POSITIVA se a orientação de W induz em $\mathbb{R}^2$, através de f , a orientação canônica.

Um difeomorfismo $h : W \rightarrow W$ é um DIFEOMORFISMO POSITIVO se preserva orientação.

Sejam então f e g duas imersões positivas de W no plano. Diz-se que f e g são IMAGEM-HOMOTÓPICAS ($f \sim g$) se existe um difeomorfismo positivo h de W em si mesmo de tal forma que f seja regularmente homotópica a $(g \circ h)$.

Verifica-se que a imagem-homotopia induz uma relação de equivalência no conjunto das imersões de W no plano.

Sejam $D(W)$, $R(W)$ e $I(W)$, respectivamente, os conjuntos das classes de isotopia de difeomorfismos positivos de W , das classes de homotopia regular e das classes de imagem-homotopia de imersões de W no plano. Sabe-se que $D(W)$ é um grupo que atua sobre $R(W)$ pela composição ($[f][h] = [f \circ h]$) e $I(W) \cong R(W)/D(W)$ é completamente determinado no trabalho de L. Kauffman em [13].

Tem-se, por exemplo, que se W é um disco, $I(W) = 0$ e, se W é um anel, $I(W) \cong \mathbb{Z}$.

No caso em que W é um disco com "buracos", quanto maior o número de buracos, maior o número de elementos de $I(W)$, pois há, intuitivamente falando, maior chance de "torcer as alças".

Porém, quando W é uma superfície com genus, a situação se inverte, isto é, quanto maior o genus, menor $I(W)$.

3.3. Equivalência entre aplicações genéricas especiais, segundo O. Burlet e G. de Rham

Dada uma variedade M fechada de dimensão 3 que pode ser domínio de aplicações genéricas especiais com valores no plano, O. Burlet e G. de Rham apresentam em [3] uma classificação das possíveis aplicações, segundo a seguinte relação de equivalência:

$f \sim g \iff$ existem difeomorfismos $H : M \xrightarrow{\sim} M$ e $h : Wf \xrightarrow{\sim} Wg$ tais que $(h \circ q\langle f \rangle) = (q\langle g \rangle \circ H^{-1})$, onde $q\langle f \rangle$ e $q\langle g \rangle$ são as aplicações quociente induzidas por f e g , respectivamente.

Pode-se observar que as aplicações genéricas especiais equivalentes a $f = f' \circ q\langle f \rangle$ são da forma $g = g' \circ q\langle g \rangle = g' \circ h \circ q\langle f \rangle \circ H = f' \circ q\langle f \rangle \circ H$, onde f' é uma imersão de Wf em R^2 e H um difeomorfismo de M em si mesmo.

Além disso, se f e g são equivalentes, os fibrados em círculos sobre Wf e Wg , induzidos por f e g , respectivamente, são isomorfos.

Obtem-se então uma classificação das aplicações genéricas especiais definidas em M que, no caso em que M é orientável, depende somente do tipo de superfície que aparece na fatorização de Stein: se f e g são aplicações genéricas especiais definidas em V_r (soma conexa de r parcelas $S^1 \times S^2$) cujas superfícies Wf e Wg têm o mesmo genus e o mesmo número de componentes conexas do bordo, são equivalentes. O número de classes de equivalência é dado, neste caso, pelo número das combinações possíveis de genus g e componentes de bordo b tais que $2g + b - 1$ é igual a r . No caso em que M não é orientável, deve-se considerar outros fatores.

A definição acima, assim como todas as decorrências citadas, podem ser estendidas ao caso 4-dimensional. No caso, V_r será soma conexa de r parcelas $S^1 \times S^3$.

CAP. IV

3.4. Imagem-equivalência

Será introduzida aqui uma nova relação de equivalência no conjunto das aplicações genéricas especiais, que refina a relação dada anteriormente em IV.3.3, utilizando o conceito de imagem-homotopia de imersões. Tal relação identifica as aplicações genéricas especiais cujas imagens podem ser deformadas umas nas outras como foi inicialmente descrito.

Para o que se segue aqui, M denotará uma variedade fechada orientada de dimensão $n = 3$ ou 4 .

Sejam então f e g duas aplicações genéricas especiais definidas em M e com valores no plano. Sejam W_f e W_g as superfícies obtidas pela fatorização de Stein, sendo $q\langle f \rangle$ e $q\langle g \rangle$ as aplicações quocientes, e f' e g' as imersões correspondentes. As imersões f' e g' poderão ser tomadas sempre positivas.

Nestas condições, f e g são ditas IMAGEM-EQUIVALENTES se:

- (i) $f \sim g$, ou seja, são equivalentes segundo a relação definida em IV.3.3;
- (ii) $f' = g' \circ h$, ou seja, a imersão f' é imagem-homotópica à imersão $g' \circ h$, onde h é um difeomorfismo de W_f em W_g .

Com essa definição, se duas aplicações são imagem-equivalentes, isto é reconhecível através de suas imagens no plano, ou através dos elementos utilizados no trabalho de L. Kauffman para a classificação das imersões por imagem-homotopia.

A definição de imagem-equivalência pode ser simplificada a partir do seguinte resultado:

TEOREMA 2:

Duas aplicações genéricas especiais $f, g : M \rightarrow R^2$ são imagem-equivalentes se, e somente se, existe um difeomorfismo positivo H de M em si mesmo, e uma família diferenciável (f_t) de aplicações genéricas especiais, com t em $[0,1]$, $f_0 = f$ e $f_1 = g \circ H$.

DEM:

Sejam f e g duas aplicações genéricas especiais imagem-equivalentes, com decomposições $f = (f' \circ q\langle f \rangle)$ e $g = (g' \circ q\langle g \rangle)$, onde $q\langle f \rangle(M) = W_f$, $q\langle g \rangle(M) = W_g$. Então existe um difeomorfismo h de W_f em W_g e H de M em M de tal forma que $g = (g' \circ h \circ q\langle f \rangle \circ H)$ e f' é imagem homotópica a $g' \circ h$, ou seja, existe um difeomorfismo positivo d de W_f em si mesmo e uma homotopia regular (k_t) entre f' e $g' \circ h \circ d$.

. Para cada t em $[0,1]$, seja $f_t : M \rightarrow R^2$ dada por $f_t(x) = k(q(x), t) = k_t \circ q(x)$.

Pode-se verificar que (f_t) é uma família diferenciável de aplicações genéricas especiais entre $f_0 = k_0 \circ q < f > = f' \circ q < f > = f$ e $f_1 = k_1 \circ q < f > = g' \circ h \circ d \circ q < f >$.

M sendo orientado, o fibrado em $(n-2)$ -esferas M' sobre Wf é orientável e, portanto, trivial devido às dimensões aqui consideradas que são $n = 3$ e 4 (conforme mostrado em III.2).

Assim, o difeomorfismo positivo $d : Wf \rightarrow Wf$ induz aplicações fibradas D_+' e D_-' de M' em $M' \cong Wf \times S^{n-2}$, dadas por $(x, @) \rightarrow (d(x), @)$ e $(x, @) \rightarrow (d(x), A(@))$, respectivamente, onde A é um difeomorfismo de S^{n-2} em si mesmo, que inverte a orientação.

Então, D_+' e D_-' são difeomorfismos de M' em si mesmo, sendo que D_+' preserva a orientação e D_-' inverte a orientação. Tais difeomorfismos induzem difeomorfismos D_+ e D_- de M em M de tal forma que o diagrama abaixo comuta:

Nestas condições, D_+ preserva orientação e D_- inverte. Seja $D = D_+$ ou D_- , conforme H preserve ou inverta a orientação de M , respectivamente.

CAP. IV

$$\begin{aligned} \text{Assim, } f &= g' \circ h \circ d \circ q \langle f \rangle = g' \circ h \circ q \langle f \rangle \circ D = \\ &= g' \circ h \circ q \langle f \rangle \circ H \circ H^{-1} \circ D = g \circ H^{-1} \circ D = \\ &= g \circ H^+ \text{ onde } H^+ = H^{-1} \circ D \text{ é um difeomorfismo positivo} \end{aligned}$$

de M em M .

Logo $(f_t)_{t \in [0,1]}$ é uma família diferenciável de aplicações genéricas especiais entre f e $(g \circ H^+)$.

Reciprocamente, sejam f e g duas aplicações genéricas especiais e H^+ um difeomorfismo positivo de M em M de tal forma que exista uma família diferenciável de aplicações genéricas especiais (f_t) com $f_0 = f$ e $f_1 = (g \circ H^+)$.

Como o conjunto das aplicações genéricas especiais é um aberto em $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$, o intervalo de definição do parâmetro t da família acima pode ser um intervalo aberto $I' = (-\epsilon, 1+\epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$.

Seja $F : M \times I' \dashrightarrow \mathbb{R}^2 \times I'$ dada por $F(x, t) = (f_t(x), t)$.

Se $y = (y, t)$ é um ponto de $\mathbb{R}^2 \times I'$, então $F^{-1}(y) = f_t^{-1}(y) \times \{t\}$ e suas componentes conexas são da forma $S \times \{t\}$, onde S é uma componente conexa de $f_t^{-1}(y)$.

Aplicando uma versão da fatorização de Stein apresentada por L. Mata-Lorenzo em [19] sobre a aplicação F , obtém-se um espaço metrizável WF e uma aplicação $F' : WF \dashrightarrow \mathbb{R}^2 \times I'$ que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times I' & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathbb{R}^2 \times I' \\ & \searrow Q \quad \nearrow F' & \\ & WF & \end{array}$$

Além disso, $WF = \bigcup_{t \in I'} W_t$ e $F' = \bigcup_{t \in I'} f'_t$ onde, para cada t em I' ,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f_t \quad} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow q_t \quad \nearrow f'_t & \\ & W_t & \end{array}$$

dá a fatorização de Stein de f_t .

CAP. IV

AFIRMAÇÃO 1: Como as aplicações $f_t : M \rightarrow R^2$ são genéricas especiais, WF pode ser munido de uma estrutura de 3-variedade (não compacta) cujo bordo é $\bigcup_{t \in I'} \partial W_t$ e F' se torna uma imersão.

De fato:

Seja $S(F)$ o conjunto singular de F . A restrição de F ao conjunto $(M \times I' - S(F))$ é uma submersão com fibras compactas e induz na sua imagem, que é o interior de WF , uma estrutura de 3-variedade aberta de tal forma que a restrição de F' a esse aberto seja uma imersão.

Agora, para cada ponto $a = (p, t)$ em $S(F)$ tem-se que a é o único ponto da componente conexa da fibra de $F(a)$ que o contém, o que implica que a aplicação quociente Q leva $S(F)$ homeomorficamente sobre sua imagem. Isto decorre do fato que a é um ponto isolado de $F^{-1}(F(a)) = f_t^{-1}(f_t(p)) \times \{t\}$.

Falta mostrar que $Q(S(F))$ é o bordo de WF como variedade diferenciável, ou seja, a estrutura definida acima se estende para WF de tal forma que a imagem por Q do conjunto singular $S(F)$ seja seu bordo.

Prosseguiremos os cálculos para $n = 3$, pois o caso $n = 4$ é análogo.

Considere coordenadas locais (u, x, y, t) e (U, Y, T) definidas em vizinhanças de a e $F(a)$, respectivamente, de tal forma que F é dada por:

$$U = u; Y = x^2 + y^2; T = t$$

Nessas coordenadas, o conjunto dado por $u^2 + x^2 + y^2 + t^2 < \varepsilon^2$ que representa uma vizinhança de a é levado sobre a região limitada situada entre o parabolóide $U^2 + T^2 + Y < \varepsilon^2$ e o plano $Y = 0$, sendo que os pontos desse plano correspondem a pontos de $S(F)$ dados por $x = y = 0$.

CAP. IV

Basta definir, portanto, (U, Y, I) como coordenadas locais na vizinhança do ponto $Q(a)$, completando assim a estrutura diferenciável de WF como 3-variedade com bordo $Q(S(F))$.

Considerando agora a seguinte composição:

$$\begin{array}{ccc} WF & \xrightarrow{F'} & R^2 \times I' \xrightarrow{p} I' \\ & \searrow G & \nearrow \end{array}$$

tem-se que G é uma submersão sobre I' , assim como sua restrição ao bordo de WF . Além disso, G é própria, pois dado um compacto K de I' , tem-se que $G^{-1}(K) = Q(M \times K)$ é compacto.

Assim, pelo Teorema de Ehresmann, $WF \xrightarrow{G} I'$ é uma fibração. Além disso, sendo I' contrátil, a fibração é trivial.

Logo, existe um difeomorfismo ϕ que comuta o diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} W_0 \times I' & \xrightarrow{\phi} & WF & \xrightarrow{F'} & R^2 \times I' \xrightarrow{p_1} R^2 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow G & & \downarrow p \\ I' & \xrightarrow{\quad} & I' & \xrightarrow{\quad} & I' \end{array}$$

onde p_1 e p_2 são projecções nos fatores.

Então, $F' \circ \phi(z, t) = (f'_t(\phi(z, t)), t)$ e portanto, pode-se definir, para cada t em $I = [0, 1]$ a aplicação $k_t : W_0 \rightarrow R^2$ dada por $k_t(z) = f'_t(\phi(z, t)) = f'_t \circ \phi_t(z) = p_1 \circ F' \circ \phi_t(z)$, que é uma imersão.

Além disso, $k_0 = f'_0 \circ \phi_0 = f'_0 = f'$ e $k_1 = f'_1 \circ \phi_1$ e (k_t) é uma família diferenciável em t .

AFIRMAÇÃO 2: $f_1 = g \circ H^+$ implica que $f_1' = (g \circ H^+)' = g' \circ k$, onde k é um difeomorfismo de $W = W \langle g \circ H^+ \rangle$ sobre W_g .

$$\begin{array}{ccccccc} R^2 & \xleftarrow{f} & M & \xrightarrow{H^+} & M & \xrightarrow{g} & R^2 \\ \uparrow f' & & \downarrow q \langle f \rangle & & \downarrow q \langle g \rangle & & \uparrow g' \\ & & W_f & \xrightarrow{\phi} & W & \xrightarrow{k} & W_g \end{array}$$

CAP. IV

Seja $k : W \dashrightarrow Wg$ dada por $k(q_1(x)) = q\langle g \rangle(H+(x))$.

k está bem definida pois se $q_1(x) = q_1(x')$, então $g \circ H+(x) = g \circ H+(x') = y$ e x e x' estão na mesma componente conexa em $(g \circ H+)^{-1}(y)$, o que implica, por $H+$ ser um difeomorfismo, que $H+(x)$ e $H+(x')$ estão na mesma componente conexa em $g^{-1}(y)$ e, portanto, $q\langle g \rangle(H+(x)) = q\langle g \rangle(H+(x'))$.

Além disso, k é um difeomorfismo e $g' \circ k(q_1(x)) = g' \circ q\langle g \rangle \circ H+(x) = g \circ H+(x)$, o que implica que $g' \circ k$ é a imersão de W em R^2 que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g \circ H+} & R^2 \\ & \searrow q_1 = q\langle g \circ H+ \rangle & \nearrow g' \circ k \\ & W & \end{array}$$

e portanto, $g' \circ k = (g \circ H+)'$, como foi afirmado.

Agora, como $k \circ \emptyset$ é um difeomorfismo de $W_0 = Wf$ em Wg , as aplicações f e g são equivalentes segundo a relação dada em 3.3 e existem difeomorfismos H de M em si mesmo e h de Wf em Wg que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R^2 & \xleftarrow{f} & M & \xleftarrow{H} & M & \xrightarrow{g} & R^2 \\ & \nwarrow f' & \downarrow q\langle f \rangle & & \downarrow q\langle g \rangle & \nearrow g' & \\ & & Wf & \xrightarrow{h} & Wg & & \end{array}$$

Assim, f' é regularmente homotópica a $g' \circ k \circ \emptyset_1$, que pode ser escrito como $(g' \circ h) \circ (h^{-1} \circ k \circ \emptyset_1) = (g' \circ h) \circ d$, onde d é um difeomorfismo de W_0 em si mesmo.

Logo, f' e $g' \circ h$ são imagem-homotópicas, e portanto, f e g são imagem-equivalentes. ##

Substituindo a definição de imagem-equivalência pela condição dada pela proposição, é fácil ver que é uma relação de equivalência e independe da particular decomposição na fatorização de Stein.

A nova relação de equivalência decompõe as classes segundo O. Burlet e G. de Rham em subclasses, em correspondência com as classes de imagem-homotopia de imersões. Por exemplo, duas aplicações cujas imagens são, respectivamente:

CAP. IV

são equivalentes segundo O. Burlet e G. de Rham, porém, não são imagem-equivalentes.

Além disso, as extensões distintas de imersões de círculos no plano a imersões definidas no disco, na classificação de Blank, citadas no paragrafo 2 deste Capítulo, representam aplicações genéricas especiais definidas na esfera S^n e são imagem-equivalentes, já que só se tem uma classe de imagem-homotopia de imersões definidas no disco.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BAILEY, K. D., Extending closed curves to immersions of a disk with n handles, Trans. Am. Math. Soc. 206 (1975), 1-24.
- [2] - BLANK, S. J., Extending immersions and regular homotopies in cod. 1, Thesis, Brandeis University (1967).
- [3] - BURLET, O. & DE RHAM, G., Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan, L'Enseignement Math. XX (1974) 275-292.
- [4] - CERF, J., La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le Théorème de la Pseudo-isotopie (1970).
- [5] - CERF, J., Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\pi_2 = 0$), Lecture Notes in Math., 53, Springer (1968).
- [6] - CHINCARO, E. A., Bifurcações de aplicações de Whitney, Tese, IMPA, Rio de Janeiro; resumo de SOTOMAYOR, J., Proc. of Univ. of Warwick Symposium on Dynamical Systems, Lecture Notes 468, Springer Verlag, 75-77.
- [7] - FRANCIS, G. K. & TROYER S. F., Excellent maps with given folds and cusps, Houston J. of Math., v.3, 2 (1977).
- [8] - GOLUBTSKY, M. & GUILLEMIN, V., Stable mappings and their singularities, Grad. Texts in Math. 14 Springer (1973).
- [9] - HAEFLIGER, A., Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan, Annales I. Fourier 10 (1970), 47-60.

- [10] - HATCHER, A. E., A proof of the Smale Conjecture, $\text{Diff}(S^3) \neq O(4)$, Ann. of Math., 117 (1983), 553-607.
- [11] - HIRSCH, M., Differential Topology, Grad. Texts in Math. 33 Springer (1976).
- [12] - IGUSA, K., Higher singularities of smooth functions are unnecessary, Ann. of Math., 119 (1984), 1-58.
- [13] - KAUFFMAN, L. H., Planar surface immersions, Illinois J. of Math., v.23, 4 (1979).
- [14] - KERVAIRE, M. & MILNOR, J., Groups of homotopy spheres, Annals of Math. (2) 77 (1963) 504-537.
- [15] - KIRBY, C. R. & SIEBENMANN, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations, Ann. of Math. Studies 88, Princeton University Press (1977).
- [16] - KUSHNER, L. & LEVINE, H. & PORTO Jr, P., Mapping 3-manifolds into the plane, Bol. Soc. Mex., v. 29, no. 1 (1984) 11-34.
- [17] - LEVINE, H., Elimination of Cusps, Topology 3 (1965) 263-296.
- [18] - LEVINE, J., Inertia groups of manifolds and diffeomorphisms of spheres, Am. Journal of Math. 92 (1970), 243-258
- [19] - MATA-LORENZO, L. E., The Stein Factorization for stable maps and π -stable arcs of maps from 3-manifolds into the plane, Dissertation, Brandeis Univ., 1986.
- [20] - MILNOR, J. W., Lecture notes on the H-cobordism Theorem, Math. Notes, Princeton (1965).
- [21] - MILNOR, J. W., Morse Theory, Annals of Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1968).

- [22] - MILNOR, J. W., Topology from the differential view point, The University Press of Virginia, Charlottesville (1965).
- [23] - NOVIKOV, S. P., Differentiable sphere bundles (em russo), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat 29 (1965), 71-76 (trad. em ingl.).
- [24] - ROURKE, C. P., On Conjectures of Smale and Others concerning the diffeomorphism group of S^n & On structure theorems, Math. Inst. University of Warwick Coventry (1972).
- [25] - SMALE, S., Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Am. Math. Soc. 10 (1959), 621-626.
- [26] - SOTOMAYOR, J., Singularidades de aplicações diferenciáveis, III ELAM, IMPA, Rio de Janeiro (1976).
- [27] - PORTO Jr., P., Informações topológicas sobre o domínio de certas aplicações estáveis, Tese p/ Livre-Docência, ICMSO-USP, São Carlos (1983).
- [28] - TROYER, S. F., Extending a boundary immersion to the disk with n holes, Dissertation, Northeastern U. Boston (1973)
- [29] - ZANETIC, V., A Extensão de Imersões em dimensão dois e as funções diferenciáveis com imagem do conjunto singular especificada, Tese, IME-USP, São Paulo (1984).