CLASSIFICAÇÃO DE PARES BI-ESTÁVEIS POR
R-ÁLGEBRAS

Eurípides Alves da Silva

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do Título de Doutor em
Ciências (Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Favaró

SÃO CARLOS -- SP

1982

7

A minha mãe e (*in memoriam*)
a meu pai, pela retidão de seus
exemplos.

A Maria, minha esposa, e aos
nossos filhos Vivian Lara e Alan
Roger, pela constante doação em
forma de muita compreensão e amor.

Ao nosso filhinho Roger, pe
la caridosa contribuição em favor
de nossa maturidade, desde antes
de seu prematuro retorno ...

ABSTRACT

Let $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ be a C^∞ map-germ and let us consider the local algebra of order k , $Q_k(f) = \frac{E_n}{f * M_p + M_n^{k+1}}$, associated with germ f , where E_n is the ring of germs $g: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ and M_n is the maximal ideal of germs $g: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$. The Classification of Stable Germs Theorem through the local algebras is classic: "If f and g are stable, then f and g are A -equivalent if, and only if, the associated algebras are isomorphic"; see, J. Mather [10].

In [3], J.P. Dufour has introduced the notion of stability for couples of germs $(f_1, f_2): \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0$ and has studied the problem of deformations and classification in particular cases, with his own techniques of difficult generalization.

The objective of this work is the classification of couples of bi-stable germs, by means of the local algebras associated with (f_1, f_2) and their components. To reach this objective we introduced the notion of coherent isomorphism as follows:

$$\text{Let } \phi_1: \frac{E_n}{I_{f_1} + M_n^{k+1}} \rightarrow \frac{E_n}{I_{g_1} + M_n^{k+1}} \quad \text{and} \\ \phi_2: \frac{E_n}{I_{f_2} + M_n^{k+1}} \rightarrow \frac{E_n}{I_{g_2} + M_n^{k+1}}, \text{ be isomorphisms}$$

between the algebras associated with the components of the couples $(f_1, f_2), (g_1, g_2): \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0$.

Let us suppose that there are isomorphisms θ_1 and θ_2 of E_n , for which we have $\phi_1(\alpha + I_{f_1} + M_n^{k+1}) = \theta_1(\alpha) + I_{g_1} + M_n^{k+1}$ and $\phi_2(\alpha + I_{f_2} + M_n^{k+1}) = \theta_2(\alpha) + I_{g_2} + M_n^{k+1}$. We say that isomorphisms ϕ_1 and ϕ_2 are induced by θ_1 and θ_2 , respectively. (We observe that whenever $f \sim_K g$ then the algebras $Q_k(f)$ and $Q_k(g)$ are isomorphic via an induced isomorphism).

We say, then, that the isomorphisms ϕ_1 and ϕ_2 are coherent when they are induced by the same isomorphism $\theta: E_n \rightarrow E_n$. (We prove that whenever $(f_1, f_2) \sim^{bi-K} (g_1, g_2)$ then the algebras $Q_k(f_1)$ and $Q_k(g_1)$, $Q_k(f_2)$ and $Q_k(g_2)$ are isomorphic according to coherent isomorphisms, i.e., isomorphisms induced by the only

ring-isomorphisms $\theta: E_n \rightarrow E_n$ (see chapter IV, §3)).

Thus the principal theorem can be enunciated: "If the couple of germs (f_1, f_2) and (g_1, g_2) are bi-stable, then they are bi- λ -equivalent if, and only if, the associated algebras are isomorphic through coherent isomorphisms".

Nossos sinceros agradecimentos,

- ao Prof. Dr. Luiz Antonio Fávaro, incansável Orientador deste trabalho, pela tolerância, bondosa amizade e a inestimável oportunidade que nos concedeu iniciando-nos na pesquisa;
- ao Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini, sempre infatigável no exercício de seu singular e superior dom de ajudar, pela renúncia, empenho e dedicação na co-orientação deste trabalho;
- ao Prof. Dr. Celso Volpe, do IBILCE-UNESP/SJRP, atuante benfeitor de nossa existência, a quem devemos nossa iniciação no campo do magistério e o interesse pela continuação de nossos estudos e ao Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel, do ICM-USP/SC, pela acolhida quando pacientemente nos orientou os primeiros passos junto ao ICM;
- aos ex-chefes de nosso Departamento, Profs. Drs. Antonio Espada Filho, Celso Volpe, Douglas Peres Bellomo e, atualmente, Hygino Hugueros Domingues, pela infinita compreensão desde nossos primeiros compromissos junto ao ICM-SC com nossos afastamentos semanais;
- aos colegas do IBILCE-UNESP, de São José do Rio Preto, e do ICM-USP, de São Carlos, pelo rico e fraterno incentivo;
- à Nilce, dedicada esposa do Prof. W.M.Tadini, ambos donos da virtude cristã de guardar muita paciência e de nos fazer renovar a coragem e entusiasmo;
- à Dilce Buzato, do IBILCE-UNESP/SJRP, pelo excelente e zeloso trabalho de datilografia, a despeito de sua constante e imensa responsabilidade junto a Secretaria do D.A.N.E.

Este trabalho foi parcialmente patrocinado pelas entidades: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP. Em particular pelo programa PICD/UNESP, da CAPES.

"As idéias são como as sementes: não podem germinar antes da estação própria, e a não ser em terreno preparado".

A.K.

Aos amigos, constantes e fiéis embaixadores divinos, cujos nomes não se encontram registrados aqui mas que no silêncio ensinam-nos, com bondade e paciência, o exercício da dignidade.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO I - BI-K-EQUIVALENCIA DE PARES

Introdução. K-equivalência. C-equivalência. Bi-K-equivalência. Bi-C-equivalência. Ação do grupo KK. Bi-K-espço tangente. Definição alternativa da Bi-K-equivalência. Bi-K-órbitas numa mesma K-órbita. 01

CAPÍTULO II - BI-K-DETERMINAÇÃO FINITA

Introdução. Bi-K-determinação. Condição suficiente para Bi-K-determinação. Condição necessária para Bi-K-determinação. 35

CAPÍTULO III - BI-A-EQUIVALÊNCIA E BI-K-ISOMORFISMOS DE DEFORMAÇÕES

Introdução. Deformações. Bi-K-versalidade e Bi-K-transversalidade. Pares de germes de restrições e bi-A-equivalência. Bi-A-estabilidade e bi-K-versalidade 57

CAPÍTULO IV - BI-K-EQUIVALÊNCIA E R-ÁLGEBRAS LOCAIS

Introdução. Isomorfismos coerentes, Caracterização da bi-K-equivalência por isomorfismos coerentes de R-álgebras locais. Teoremas de caracterização para pares finitamente bi-K-determinados. 71

CAPÍTULO V - BI-A-EQUIVALÊNCIA E BI-K-EQUIVALÊNCIA DE PARES ESTÁVEIS

Introdução. Caracterização da bi-A-equivalência pela bi-K-equivalência para pares estáveis. Algumas considerações sobre bi-estabilidade de pares de restrições. 83

CAPÍTULO VI - CLASSIFICAÇÃO DE PARES ESTÁVEIS POR R-ÁLGEBRAS

Introdução. Bi-K-codimensão e bi-K-determinação de pares estáveis. O teorema de classificação de pares estáveis por R-álgebras. 89

INTRODUÇÃO

Seja $f: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ um germe de aplicação C^∞ e consideremos a álgebra local de ordem k , $Q_k(f) = \frac{E_n}{f^*M_p + M_n^{k+1}}$, associada ao germe f , onde E_n é o anel dos germes $g: R^n, 0 \rightarrow R$ e M_n é o ideal maximal dos germes $g: R^n, 0 \rightarrow R, 0$. É clássico o teorema de classificação de germes estáveis, através das álgebras locais: "Se f e g são estáveis, então f e g são A -equivalentes se, e somente se, as álgebras associadas são isomorfas", ver J. Mather [10].

Em [3], J.P. Dufour introduziu a noção de bi-estabilidade para pares de germes $(f_1, f_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ e estudou o problema de deformações e classificação em casos particulares, com técnicas próprias de difícil generalização.

O objetivo deste trabalho é de classificar pares de germes bi-estáveis, através de álgebras locais associadas a (f_1, f_2) e suas componentes. Para atingir esse objetivo, introduzimos a noção de isomorfismo coerente como segue:

$$\text{Sejam } \phi_1: \frac{E_n}{I_{f_1} + M_n^{k+1}} \rightarrow \frac{E_n}{I_{g_1} + M_n^{k+1}} \quad \text{e}$$

$$\phi_2: \frac{E_n}{I_{f_2} + M_n^{k+1}} \rightarrow \frac{E_n}{I_{g_2} + M_n^{k+1}} \quad \text{isomorfismos entre as álgebras associadas às componentes dos pares } (f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0.$$

Suponhamos que existem isomorfismos θ_1 e θ_2 de E_n , para os quais se tenha $\phi_1(\alpha + I_{f_1} + M_n^{k+1}) = \theta_1(\alpha) + I_{g_1} + M_n^{k+1}$ e $\phi_2(\alpha + I_{f_2} + M_n^{k+1}) = \theta_2(\alpha) + I_{g_2} + M_n^{k+1}$. Os isomorfismos ϕ_1 e ϕ_2 dizem-se induzidos por θ_1 e θ_2 , respectivamente. (Observamos que sempre que $f \sim g$ então, as álgebras $Q_k(f)$ e $Q_k(g)$ são isomorfas via um isomorfismo induzido).

Dizemos, então, que os isomorfismos ϕ_1 e ϕ_2 são coe

rentes quando forem induzidas por um mesmo isomorfismo $\theta: E_n \rightarrow E_n$.
 bi-K
 (Prova-se que sempre que $(f_1, f_2) \sim (g_1, g_2)$ então as álgebras $Q_k(f_1)$ e $Q_k(g_1)$, $Q_k(f_2)$ e $Q_k(g_2)$ são isomorfas segundo isomorfismos coerentes, isto é, isomorfismos induzidos por um mesmo isomorfismo de anel $\theta: E_n \rightarrow E_n$, (ver capítulo IV, §3).

Assim o teorema principal pode ser enunciado: "Se os pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são bi-estáveis, então eles são bi-A-equivalentes se, e somente se, as álgebras associadas são isomorfas através de isomorfismos coerentes".

Para demonstrar esse teorema, foi realizado um extenso trabalho de construções novas e de adaptações da teoria usual do caso clássico de um único germe $f: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$, seguindo a linha desenvolvida por J. Martinet em [8]. Assim foi elaborada uma teoria de bi-K-equivalência e bi-K-determinação finita para pares de deformações, necessitando-se para tanto das noções de bi-K-espaço tangente, bi-K-órbitas e bi-K-versalidade.

O material aqui apresentado está subdividido em seis capítulos, como segue:

No primeiro é discutida a relação de bi-K-equivalência onde incluímos uma caracterização da bi-K-codimensão finita, através do estudo do espaço tangente à órbita de um par segundo esta relação de equivalência. Incluímos também um estudo sobre bi-K-órbitas numa mesma K-órbita.

O segundo capítulo trata da teoria da bi-K-determinação finita. A preocupação básica foi a de estabelecer os teoremas de caracterização da determinação finita: " $(f_1, f_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é finitamente bi-K-determinado se, e só se, existe $k \geq 1$, inteiro, tal que $M_{n, p+q}^{kE} \subset T(f_1, f_2)$, onde $T(f_1, f_2)$ é o bi-K-espaço tangente".

No terceiro capítulo caracterizamos a bi-A-estabili

dade de pares de restrições através da bi-K-versalidade de pares de deformações associados. Para atingir este objetivo construímos uma teoria paralela àquela desenvolvida por J. Martinet em [8], superando algumas dificuldades técnicas não triviais.

O capítulo quatro é dedicado à elaboração dos teoremas de caracterização da bi-K-equivalência por isomorfismos coerentes de álgebras locais: "Sejam (f_1, f_2) e (g_1, g_2) pares de germes bi-K-determinados de ordem k . Então (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são bi-K-equivalentes se, e só se, $Q_k(f_1)$ e $Q_k(g_1)$, $Q_k(f_2)$ e $Q_k(g_2)$ são R-álgebras isomorfas segundo isomorfismos coerentes".

No capítulo cinco reduzimos o problema da bi-A-equivalência ao da bi-K-equivalência, para pares de germes bi-estáveis.

No capítulo sexto apresentamos a demonstração do teorema principal, apoiando-nos sobre os dois capítulos anteriores.

CAPÍTULO I

BI-K-EQUIVALÊNCIA DE PARES DE GERMES

A noção de K-Equivalência de germes de aplicações diferenciáveis $f, g: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$, segundo a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 & \xrightarrow{1, f} & R^n \times R^p, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow H \\ R^n, 0 & \xrightarrow{1, g} & R^n \times R^p, 0 \end{array} \text{ para um conveniente}$$

par de germes inversíveis (h, H) , nos leva, naturalmente, a questionar os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$.

J.P. Dufour introduz em [3], estudando equivalência de diagramas do tipo $R^q \xleftarrow{f_2} R^n \xrightarrow{f_1} R^p$, a noção de Bi-Equivalência de pares, aqui denominada Bi-A-Equivalência, segundo a comutatividade de

$$\begin{array}{ccccc} R^q & \xleftarrow{f_2} & R^n & \xrightarrow{f_1} & R^p \\ H_2 \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow H_1 \\ R^q & \xleftarrow{g_2} & R^n & \xrightarrow{g_1} & R^p, \text{ onde } h, H_1 \text{ e } H_2 \text{ são difeomorfismos.} \end{array}$$

Estudando a K-Equivalência de diagramas do tipo $R^n \times R^q, 0 \xleftarrow{1, f_2} R^n, 0 \xrightarrow{1, f_1} R^n \times R^p, 0$, chegamos à noção de Bi-K-Equivalência de pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, segundo a comutatividade de

$$\begin{array}{ccccc} R^n \times R^q, 0 & \xleftarrow{1, f_2} & R^n, 0 & \xrightarrow{1, f_1} & R^n \times R^p, 0 \\ H_2 \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow H_1 \\ R^n \times R^q, 0 & \xleftarrow{1, g_2} & R^n, 0 & \xrightarrow{1, g_1} & R^n \times R^p, 0 \end{array} \text{ para convenientes germes inversíveis } h, H_1, H_2.$$

De início, neste capítulo, tratamos rapidamente da K-Equivalência de germes de aplicações diferenciáveis, enumerando os pré-requisitos indispensáveis à relação seguinte (Bi-K-Equivalência). As referências [5], [7] e [8] são indicadas para maiores detalhes e demonstrações.

Logo após definimos a Bi-K-Equivalência de pares de germes e estabelecemos alguns resultados que caracterizam esta classe de germes bem como o estudo da relação com os pares Bi-C-Equivalentes (particulares germes Bi-K-Equivalentes).

Em seguida, estabelecido o grupo $KK(CC)$ das Bi-K-Equivalências (Bi-C-Equivalências), caracterizamos a ação deste grupo sobre o espaço $E_{n,p+q}^0$, dos pares de germes em $0 \in \mathbb{R}^n$, reconhecendo os pares Bi-K-Equivalentes como elementos da mesma órbita segundo a ação referida.

O passo imediato surge diante da necessidade de se introduzir o conceito de "espaço tangente" à órbita de um par $(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$, segundo a ação do grupo das Bi-K-Equivalências. Então caracterizamos, mediante adaptação da teoria conhecida para um único germe (ver [5]), o E_n -módulo $T_{(f_1, f_2)}$, indispensável à continuidade deste trabalho, seja em busca da classificação dos pares bi-estáveis, seja no estudo da elaboração da determinação finita sob a ação do grupo KK .

Inicialmente queremos lembrar que a bibliografia indicada contém, com detalhes, as noções de germes de aplicações diferenciáveis, o estudo das estruturas algébricas do conjunto $E_{n,p}^0 = \{R^n, 0 \rightarrow R^p, 0\}$, a ação dos conhecidos grupos A, K, C, R, L sobre $E_{n,p}^0$, o Lema de Nakayama e outros conceitos que eventualmente apareçam aqui sem maiores referências.

§1. K-Equivalência

(1.1.) Uma Equivalência de Contacto ou K-Equivalência, trata-se de um par de germes inversíveis (h, H) , para os quais o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccccc} R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^p, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow H & & \downarrow h \\ R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^p, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \end{array}$$

onde i e π_n são os germes usuais da inclusão e projeção, respectivamente. Da comutatividade segue que $H(x, y) = (h(x), H_2(x, y))$, $\forall (x, y) \in R^n \times R^p$, com $H_2(x, 0) = 0$.

(1.2.) Dizemos que dois germes $f, g: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ são K-Equivalentes quando existe uma K-Equivalência (h, H) para a qual se tem

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 & \xrightarrow{(1, f)} & R^n \times R^p, 0 \\ \downarrow h & \curvearrowright & \downarrow H \\ R^n, 0 & \xrightarrow{(1, g)} & R^n \times R^p, 0 \end{array} \quad \text{isto é, } H \circ (1, f) = (1, g) \circ h.$$

§2. C-Equivalência

(2.1.) Uma C-Equivalência trata-se da particular K-Equivalência dada pelo par $(1_R^n, H)$, isto é, H é um germe inversível para o qual se tem

$$\begin{array}{ccccc} R^n & \xrightarrow{1} & R^n \times R^p, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \\ & \searrow 1 & \downarrow H & \searrow \pi_n & \\ & & R^n \times R^p, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} 1: \text{germe da inclusão} \\ \pi_n: \text{germe da projeção} \end{array} \right.$$

(2.2.) $f, g: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ dizem-se C-Equivalentes quando ocorre o diagrama comutativo seguinte,

$$\begin{array}{ccc} & & R^n \times R^p \\ R^n, 0 & \xrightarrow{(1, f)} & \\ & \searrow (1, g) & \\ & & R^n \times R^p, 0 \end{array} \quad \downarrow H$$

para $H(x, y) = (x, H_2(x, y))$, $\forall (x, y) \in R^n \times R^p$, com $H(x, 0) = (x, 0)$, $\forall x \in R^n$.

Em outras palavras, f e g são K-Equivalentes via a K-Equivalência $(1_R^n, H)$.

§3. Proposições, [5]

(3.1.) " $f, g: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ são K-Equivalentes se, e somente se, existe um germe inversível $h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ para o qual se tem $f \circ h$ e g germes C-Equivalentes".

(3.2.) Consideremos o anel $E_n = \{R^n, 0 \rightarrow R\}$ e seja $f: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ um germe qualquer.

Seja $I_f = f^*(M_p)$, onde $f^*: E_p \rightarrow E_n$ é o homomorfismo entre álgebras induzido por f , isto é, $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ e M_p o ideal maximal de E_p , $M_p = \{R^p, 0 \rightarrow R, 0\}$. Então I_f é o ideal de E_n gerado pelas componentes de f .

"São equivalentes as seguintes condições para os germes $f, g: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$:

- (i) f, g são C-Equivalentes;
- (ii) $I_f = I_g$;
- (iii) Existe uma matriz inversível $p \times p$, $U = (u_{ij})$, com entradas em E_n para a qual $f_i = \sum_j u_{ij} \cdot g_j$, onde $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, p$.

(3.3.) Decorre das proposições anteriores o seguinte resultado:

" $f, g: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ são germes K-Equivalentes se, e somente se, os ideais I_f e I_g são isomorficamente induzidos".

Dizemos que I_f e I_g são isomorficamente induzidos quando existe um germe de difeomorfismo $h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ para o qual o isomorfismo $h^*: E_n \rightarrow E_n$ satisfaz: $h^*(I_f) = I_g$.

§4. Bi-K-Equivalência

Consideremos o diagrama comutativo seguinte,

$$\begin{array}{ccccc} R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^p \times R^q, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow H & & \downarrow h \\ R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^p \times R^q, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \end{array}$$

onde h e H são germes inversíveis e i e π_n respectivamente os germes da inclusão e projeção usuais, para os quais se tem

$$H = (ho\pi_n, H_1 o\pi_{n,p}, H_2 o\pi_{n,q}), \text{ com}$$

$$H_1: R^n \times R^p, 0 \rightarrow R^p, 0,$$

$$H_2: R^n \times R^q, 0 \rightarrow R^q, 0,$$

$$\pi_{n,p}: R^n \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^n \times R^p, 0 \text{ (germe de projeção)}$$

$$\pi_{n,q}: R^n \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^n \times R^q, 0 \text{ (germe de projeção)}$$

Nestas condições dizemos que o par (h, H) trata-se de uma Bi-K-Equivalência.

Decorre da definição que o germe H satisfaz, para $(x, y, z) \in R^n \times R^p \times R^q$, $H(x, y, z) = (h(x), H_1(x, y), H_2(x, z))$ e $H(x, 0, 0) = (h(x), H_1(x, 0), H_2(x, 0)) = (h(x), 0, 0)$, $\forall x \in R^n$.

Mais que isso vale a pena observar que os pares $(h, (ho\pi_n, H_1))$ e $(h, (ho\pi_n, H_2))$ são K-Equivalências, isto é, fazem comutativos os diagramas

$$\begin{array}{ccccc} R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^p, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow K_1 & & \downarrow h \\ R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^p, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \end{array}$$

onde $K_1 = (ho\pi_n, H_1)$ e $K_2 = (ho\pi_n, H_2)$.

$$\begin{array}{ccccc} R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^q, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow K_2 & & \downarrow h \\ R^n, 0 & \xrightarrow{i} & R^n \times R^q, 0 & \xrightarrow{\pi_n} & R^n, 0 \end{array}$$

Esse fato sugere o nome "Bi-Equivalência" para o par (h, H) anteriormente definido.

É fácil observar, portanto, que a partir de duas K -Equivalências $(h_1, K_1), (h_2, K_2)$, onde os germes h_1 e h_2 são coincidentes, é possível reproduzir uma Bi- K -Equivalência.

§5. Pares de Germes Bi- K -Equivalentes

Consideremos os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$.

Então (f_1, f_2) e (g_1, g_2) dizem-se Bi- K -Equivalentes quando existe uma Bi- K -Equivalência (h, H) para a qual comuta o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 & \xrightarrow[\substack{1 \\ R^n, f_1, f_2}}{R^n, f_1, f_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow H = (h \circ \pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q}) \\ R^n, 0 & \xrightarrow[\substack{1 \\ R^n, g_1, g_2}}{R^n, g_1, g_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \end{array}$$

Assim $H \circ (1, f_1, f_2) = (1, g_1, g_2) \circ h$ e portanto valem as igualdades

$$H_1 \circ (1, f_1) = g_1 \circ h$$

e

$H_2 \circ (1, f_2) = g_2 \circ h$, o que equivale dizer, em particular, que os germes

$$f_1: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0, \quad g_1: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$$

e

$$f_2: R^n, 0 \rightarrow R^q, 0, \quad g_2: R^n, 0 \rightarrow R^q, 0$$

são, respectivamente, K -Equivalentes, via as K -Equivalências $(h, (h \circ \pi_n, H_1))$ e $(h, (h \circ \pi_n, H_2))$, em vista da comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 & \xrightarrow[\substack{1, f_1}]{R^n, f_1} & R^n \times R^p, 0 & R^n, 0 & \xrightarrow[\substack{1, f_2}]{R^n, f_2} & R^n \times R^q, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow (h \circ \pi_n, H_1) & h \downarrow & & \downarrow (h \circ \pi_n, H_2) \\ R^n, 0 & \xrightarrow[\substack{1, g_1}]{R^n, g_1} & R^n \times R^p, 0 & R^n, 0 & \xrightarrow[\substack{1, g_2}]{R^n, g_2} & R^n \times R^q, 0 \end{array}$$

Assim fica demonstrada a seguinte

(5.1.) Proposição: Se os pares $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são Bi- K -Equivalentes então f_1, g_1 e f_2, g_2 são, respectivamente, K -Equivalentes.

Da mesma forma, decorre da definição da Bi- K -Equivalência:

(5.2.) Proposição: Se os pares de germes (f_1, f_2) , $(g_1, g_2): \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0$ são Bi-K-Equivalentes, então os germes $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ são K-Equivalentes.

Nesta altura queremos observar que os conceitos acima definidos, surgem naturalmente quando analisamos a K-Equivalência entre os diagramas do tipo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0 \xleftarrow{1, f_2} \mathbb{R}^n, 0 \xrightarrow{1, f_1} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$$

Para tanto nos inspiramos nos trabalhos de Jean-Paul Dufour (ver bibliografia), quando tratam da Equivalência de Diagramas.

Finalizando este item, a figura abaixo empresta uma visualização geométrica à noção de Bi-K-Equivalência entre os pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) .

§6. Bi-C-Equivalência

Definimos, agora, uma particular e importante Bi-K-Equivalência.

Trata-se do par (h, H) onde $h = 1_{\mathbb{R}^n}$. Neste caso o diagrama inicial se simplifica e temos uma Bi-C-Equivalência.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R^n \times R^p \times R^q, 0 & & \\
 & \nearrow 1 & \downarrow H & \searrow \pi_n & \\
 R^n, 0 & & \emptyset & & R^n, 0 \\
 & \searrow 1 & \uparrow H & \nearrow \pi_n & \\
 & & R^n \times R^p \times R^q, 0 & &
 \end{array}$$

onde $H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q})$.

Da mesma forma aqui, dizemos que os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são Bi-C-Equivalentes quando existe uma Bi-C-Equivalência $(1, H)$ para a qual comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 & 1, f_1, f_2 & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\
 R^n, 0 & \nearrow & \downarrow H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q}) \\
 & 1, g_1, g_2 & R^n \times R^p \times R^q, 0
 \end{array}$$

É claro que, então, f_1 e g_1 e f_2 e g_2 são C-Equivalentes, via as C-Equivalências $(1, (\pi_n, H_1))$ e $(1, (\pi_n, H_2))$, respectivamente, bem como são C-Equivalentes os germes $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$, via a C-Equivalência $(1, H)$, onde

$$H = (\pi_n, 0), \quad \emptyset = (H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q}).$$

Com isso obtemos os análogos das proposições 5.1. e 5.2. anteriores.

§7. Caracterização da Bi-C-Equivalência e Bi-K-Equivalência

(7.1.) Proposição: Os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são Bi-C-Equivalentes se, e somente se, $I_{f_1} = I_{g_1}$ e $I_{f_2} = I_{g_2}$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) É claro que se (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são Bi-C-Equivalentes, valem as igualdades $H_1 \circ (1, f_1) = g_1$ e $H_2 \circ (1, f_2) = g_2$, onde, $(1, (\pi_n, H_1))$ e $(1, (\pi_n, H_2))$ são C-Equivalências. Logo, f_1 e g_1 são C-Equivalentes e f_2 e g_2 também.

Assim $I_{f_1} = I_{g_1}$ e $I_{f_2} = I_{g_2}$, (ver §3, 3.2)

($\Leftarrow$) Neste caso, por hipótese, $I_{f_1} = I_{g_1}$ e $I_{f_2} = I_{g_2}$ nos garantem C-Equivalências $(1, H)$ e $(1, K)$ para as quais comutam os diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow^{1, f_1} & R^n \times R^p, 0 \\
 R^n, 0 & & \downarrow H = (\pi_n, H_1) \\
 & \searrow_{1, g_1} & R^n \times R^p, 0 \\
 & \nearrow^{1, f_2} & R^n \times R^q, 0 \\
 R^n, 0 & & \downarrow K = (\pi_n, K_1) \\
 & \searrow_{1, g_2} & R^n \times R^q, 0
 \end{array}$$

Provemos que os pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são, então, Bi-C-Equivalentes via a Bi-C-Equivalência $(\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, K_1 \circ \pi_{n,q})$.

Com efeito:

$$(\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, K_1 \circ \pi_{n,q})(1, f_1, f_2) = (1, H_1 \circ (1, f_1), K_1 \circ (1, f_2)) = (1, g_1, g_2)$$

e fica estabelecido o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow^{1, f_1, f_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\
 R^n, 0 & & \downarrow (\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, K_1 \circ \pi_{n,q}) \\
 & \searrow_{1, g_1, g_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0
 \end{array}$$

(7.2.) Proposição: Os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são Bi-K-Equivalentes se, e somente se, existe um germe de difeomorfismo $h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ para o qual se tem (f_1, f_2) e $(g_1, g_2) \circ h$ Bi-C-Equivalentes.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Por hipótese existe uma Bi-K-Equivalência (h, H) para a qual $H \circ (1, f_1, f_2) = (1, g_1, g_2) \circ h$, onde $H = (h \circ \pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q})$.

Provemos que (f_1, f_2) e $(g_1 \circ h, g_2 \circ h)$ são pares de germes Bi-C-Equivalentes via a Bi-C-Equivalência $(1, \bar{H})$, onde $\bar{H} = (h^{-1} \times 1_{R^p} \times 1_{R^q}) \circ H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q})$.

Com efeito: $\bar{H} \circ (1, f_1, f_2) = (1, H_1 \circ (1, f_1), H_2 \circ (1, f_2)) = (1, g_1 \circ h, g_2 \circ h)$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow^{1, f_1, f_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\
 R^n, 0 & & \downarrow \bar{H} \\
 & \searrow_{1, g_1 \circ h, g_2 \circ h} & R^n \times R^p \times R^q, 0
 \end{array}$$

(+) Seja $(1, H)$, $H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q})$, a Bi-C-Equivalência entre os pares de germes (f_1, f_2) e $(g_1, g_2)_{oh}$. Então $H_1 \circ (1, f_1) = g_1 \circ h$ e $H_2 \circ (1, f_2) = g_2 \circ h$.

Provemos que (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são Bi-K-Equivalentes via a Bi-K-Equivalência $(h, \bar{H})$, $\bar{H} = (h \circ \pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q})$.

Com efeito: $\bar{H} \circ (1, f_1, f_2) = (h, H_1 \circ (1, f_1), H_2 \circ (1, f_2)) = (h, g_1 \circ h, g_2 \circ h) = (1, g_1, g_2)_{oh}$.

$$\begin{array}{ccc} R^{n,0} & \xrightarrow{1, f_1, f_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\ h \downarrow & \text{O} & \downarrow \bar{H} \\ R^{n,0} & \xrightarrow{1, g_1, g_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \end{array}$$

(7.3.) Proposição: Os pares $(\delta_1, \delta_2), (g_1, g_2): R^{n,0} \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são Bi-C-Equivalentes se, e somente se, $I_{\delta_1} = I_{g_1}$, $I_{\delta_2} = I_{g_2}$ se, e somente se, existem matrizes inversíveis $p \times p$ e $q \times q$, $U = (u_{ij})$ e $V = (v_{rs})$, com entradas em E_n , tais que

$$\delta_{1i} = \sum_j u_{ij} \cdot g_{1j}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, p \quad \text{e}$$

$$\delta_{2r} = \sum_s v_{rs} \cdot g_{2s}, \quad r = 1, \dots, q, \quad s = 1, \dots, q,$$

isto é: $\delta_1 = U \cdot g_1$ e $\delta_2 = V \cdot g_2$, onde $\delta_1 = (\delta_{11}, \dots, \delta_{1p})$ e $\delta_2 = (\delta_{21}, \dots, \delta_{2q})$.

Demonstração:

A primeira equivalência já foi mostrada (prop. 7.1.).

(+) Segundo se sabe da C-Equivalência (proposição 3.2.), a existência das matrizes U e V está assegurada, nas condições enunciadas.

(+) Por hipótese os germes f_1 e g_1 e f_2 e g_2 são C-Equivalentes, isto é, $I_{f_1} = I_{g_1}$ e $I_{f_2} = I_{g_2}$ (proposição 3.2.).

Decorre daí que (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são Bi-C-Equivalentes).

Neste caso podemos construir a Bi-C-Equivalência em função das matrizes inversíveis U e V .

Para tanto consideremos os germes $H_1: R^n \times R^p, 0 \rightarrow R^p, 0$, $H_1 = (H_{11}, \dots, H_{1p})$ e $H_2: R^n \times R^q, 0 \rightarrow R^q, 0$, $H_2 = (H_{21}, \dots, H_{2q})$, definidos por $H_{1i}(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j \cdot u_{ij}(x)$, $i = 1, \dots, p$, $(x, y) \in R^n \times R^p$ e $H_{2r}(x, z) = \sum_{s=1}^q z_s \cdot v_{rs}(x)$, $r = 1, \dots, q$, $(x, z) \in R^n \times R^q, 0$.

Observemos que $H_1(x,0)=0$ e $H_2(x,0)=0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Em seguida provamos que f_1 e g_1 são C-Equivalentes via a C-Equivalência $(1, (\pi_n, H_1))$, (π_n, H_1) é, evidentemente, um germe

invertível já que $J(\pi_n, H_1)(0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial H_1}{\partial x} & U(0) \end{pmatrix}$ é u'a matriz invertível).

De fato: $(\pi_n, H_1) \circ (1, g_1)(x) = (x, H_1(x, g_1(x))) = (x, (H_{11}(x, g_1(x)), \dots, H_{1p}(x, g_1(x)))) = (x, (\sum_{j=1}^p g_{1j}(x) \cdot u_{1j}(x), \dots, \sum_{j=1}^p g_{1j}(x) \cdot u_{pj}(x))) = (x, (f_{11}(x), \dots, f_{1p}(x))) = (x, f_1(x)) = (1, f_1)(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

De modo semelhante provamos que f_2 e g_2 são C-Equivalentes via a C-Equivalência $(1, (\pi_n, H_2))$ e ficam assegurados os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0 & \xleftarrow{1, g_2} & \mathbb{R}^n, 0 \\ (\pi_n, H_2) \downarrow & & \uparrow (1, g_1) \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0 & \xleftarrow{1, f_2} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \\ & & \downarrow (\pi_n, H_1) \\ & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \end{array}$$

É claro que, então, os pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) serão Bi-C-Equivalentes segundo a Bi-C-Equivalência $(1, (\pi_n, H))$, onde $H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{n,p}, H_2 \circ \pi_{n,q})$.

(7.4.) Proposição: Os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0$ são Bi-K-Equivalentes se, e somente se, I_{f_1} e I_{g_1} e I_{f_2} e I_{g_2} são isomorficamente induzidos pelo mesmo germe de difeomorfismo h .

Demonstração:

$(f_1, f_2), (g_1, g_2)$ são Bi-K-Equivalentes $\leftrightarrow \exists h: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$, germe de difeomorfismo, para o qual se tem (f_1, f_2) e (g_1, g_2) ou Bi-C-Equivalentes (proposição 7.2.) $\leftrightarrow I_{f_1} = I_{g_1} \circ h$ e $I_{f_2} = I_{g_2} \circ h$ (proposição 7.1.) $\leftrightarrow h^*(I_{g_1}) = I_{f_1}$ e $h^*(I_{g_2}) = I_{f_2}$, isto é, I_{f_1} e I_{g_1} e I_{f_2} e I_{g_2} são isomorficamente induzidos pelo mesmo germe de difeomorfismo h .

(7.5.) Proposição: Se $(f_1, f_2), (g_1, g_2): \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0$ são Bi-C-Equivalentes, então existe u'a matriz invertível U , $(p+q) \times (p+q)$, com entradas em $\mathbb{R}_n$, tal que

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \vdots \\ \delta_{1p} \\ \delta_{21} \\ \vdots \\ \delta_{2q} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{1p} \\ g_{21} \\ \vdots \\ g_{2q} \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

$$\delta_1 = (\delta_{11}, \dots, \delta_{1p}), \delta_2 = (\delta_{21}, \dots, \delta_{2q}), g_1 = (g_{11}, \dots, g_{1p}), g_2 = (g_{21}, \dots, g_{2q}).$$

Demonstração:

Basta tomar a matriz $U = \begin{pmatrix} A & 0_1 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}$, onde 0_1 e 0_2 são matrizes nulas, respectivamente $p \times q$ e $q \times p$, e A e B as matrizes inversíveis cuja existência fica garantida pelo fato de f_1, g_1 e f_2, g_2 serem (hipótese) C-Equivalentes, com $f_1 = A \cdot g_1$ e $f_2 = B \cdot g_2$ (proposição 7.3.).

Observamos ainda que, de outro modo, como (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são em particular C-Equivalentes, os germes $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ são tais que $f = U \cdot g$, onde U é u'a matriz nas condições do enunciado (proposição 3.2.).

§8. Exemplos

(8.1.) Consideremos os pares de germes seguintes:

$$\begin{array}{lll} R, 0 & \xrightarrow{f_2} & R, 0 \\ R, 0 & \xrightarrow{g_2} & R, 0 \end{array} \quad \begin{array}{lll} R, 0 & \xrightarrow{f_1} & R, 0 \\ R, 0 & \xrightarrow{g_1} & R, 0 \end{array}$$

$$\text{onde } \begin{cases} f_1(x) = x^3 - x^2, & f_2(x) = x^2 + x \\ g_1(x) = x^2, & g_2(x) = x \end{cases}$$

Então os pares (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são Bi-C-Equivalentes exatamente porque $I_{f_1} = \langle x^3 - x^2 \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle x^2 \rangle = I_{g_1}$ e $I_{f_2} = \langle x^2 + x \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle x \rangle = I_{g_2}$.

$$(*) \quad \langle x \rangle = I_{g_2}.$$

(*) Observação: Podemos escrever $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x-1)$ e, como germe de função real, temos que $h(x) = x-1$ é invertível ($h(0) \neq 0$).

Logo,

$$\langle x^3 - x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$$

(8.2.) Sejam $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^{n,0} \rightarrow R^p \times R^q, 0$ pares de germes para os quais comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} R^{q,0} & \xleftarrow{f_2} & R^{n,0} & \xrightarrow{f_1} & R^{p,0} \\ k_2 \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow k_1 \\ R^{q,0} & \xleftarrow{g_2} & R^{n,0} & \xrightarrow{g_1} & R^{p,0}, \text{ onde } h, k_1 \text{ e } k_2 \end{array}$$

são germes de difeomorfismos. Então $(f_1, f_2), (g_1, g_2)$ dizem-se Bi-A-Equivalentes (ver [3]). Notemos que o diagrama acima pode ser expresso do modo seguinte:

$$\begin{array}{ccc} R^{n,0} & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & R^p \times R^q, 0 \\ h \downarrow & \circlearrowright & \downarrow k_1 \times k_2 \\ R^{n,0} & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & R^p \times R^q, 0 \end{array}$$

Então podemos afirmar que a Bi-A-Equivalência acarreta a Bi-K-Equivalência.

De fato. Dada a Bi-A-Equivalência $(h, k_1 \times k_2)$ entre os pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) , consideremos a Bi-K-Equivalência $(h, H) = (h, (h \circ \pi_n, k_1 \circ \pi_p, k_2 \circ \pi_q) \circ \pi_{n,q}) = (h, (h \circ \pi_n, k_1 \circ \pi_p, k_2 \circ \pi_q))$ e observemos que $H \circ (1, f_1, f_2) = (h, k_1 \circ f_1, k_2 \circ f_2) = (h, g_1 \circ h, g_2 \circ h) = (1, g_1, g_2) \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} R^{n,0} & \xrightarrow{1, f_1, f_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\ h \downarrow & \circlearrowright & \downarrow H = (h \circ \pi_n, k_1 \circ \pi_p, k_2 \circ \pi_q) = h \times k_1 \times k_2 \\ R^{n,0} & \xrightarrow{1, g_1, g_2} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \end{array}$$

(8.3.) Os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R, 0 \rightarrow R^2, 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} (f_1, f_2)(x) = (x^2, 0) \\ (g_1, g_2)(x) = (x^2, x^3) \end{array} \right.$, nos oferecem um elemento ilustrando o fato seguinte:

$$f = (f_1, f_2) \sim^K (g_1, g_2) = g \neq (f_1, f_2) \sim^{Bi-K} (g_1, g_2)$$

Com efeito.

Os germes $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ são K-Equivalentes (porque são C-Equivalentes). No entanto não são Bi-K-Equivalentes em vista de que os ideais $I_{f_1} = \langle x^2 \rangle$, $I_{g_1} = \langle x^2 \rangle$ e

$$I_{f_2} = \langle 0 \rangle, \quad I_{g_2} = \langle x^3 \rangle \text{ não são isomorfi-}$$

camente induzidos pelo mesmo germe de difeomorfismo, isto é,

$$\exists h: R, 0 \rightarrow R, 0, \text{ germe de difeo, tal que } h^* I_{f_1} = I_{g_1} \text{ e } h^* I_{f_2} = I_{g_2}.$$

A AÇÃO DO GRUPO KK DAS BI-K-EQUIVALÊNCIAS SOBRE O ESPAÇO

$$E_{n,p+q}^0 = \{(f_1, f_2) : R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0\}$$

§9. A Ação dos Grupos K e C

9.1. Consideremos o espaço vetorial $E_{n,p}^0 = \{f : R^n, 0 \rightarrow R^p, 0\}$. Então definimos a ação do grupo K sobre $E_{n,p}^0$ da seguinte maneira:

$$K \times E_{n,p}^0 \rightarrow E_{n,p}^0$$

$(H, f) \rightarrow H.f$, onde $H.f$ é o germe dado por $(1, H.f) = Ho(1, f)oh^{-1}$, onde (h, H) é uma K-equivalência.

Desta forma tem-se o resultado da ação do germe H sobre f, descrito por $H.f = H_2o(1, f)oh^{-1}$, onde $H = (ho\pi_n, H_2)$.

9.2. A ação do grupo C sobre o conjunto $E_{n,p}^0$ trata-se da restrição da ação de K e portanto dada por

$$C \times E_{n,p}^0 \rightarrow E_{n,p}^0$$

$$(H, f) \rightarrow H.f = H_2o(1, f)$$

9.3. É conhecido o seguinte resultado que relaciona a K-Equivalência de germes $f, g : R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ com suas K-órbitas (ver [12]):

"f, g são K(C)-Equivalentes se, e somente se, pertencem à mesma K(C)-órbita".

Demonstração:

f, g são K-Equivalente se, e somente se, existe um par de germes inversíveis (h, H) onde $H = (ho\pi_n, H_2)$ (K-Equivalência), tal que $Ho(1, f) = (1, g)oh$.

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 \xrightarrow{1, f} R^n \times R^p, 0 & & \\ h \downarrow \quad \quad \quad \downarrow H & \text{(\textcircled{?})} & \\ R^n, 0 \xrightarrow{1, g} R^n \times R^p, 0 & & \end{array}$$

Logo, $H_2o(1, f) = goh$ e portanto de $g = H_2o(1, f)oh^{-1} = H.f$, concluímos que g pertence à mesma K-órbita de f.

§10. A Ação $KK \times E_{n,p+q}^0 \rightarrow E_{n,p+q}^0$

Conforme visto anteriormente, uma Bi-K-Equivalência (ou KK-Equivalência) trata-se de um par de germes de difeo morfismos (h, H) , $h : R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, $H : R^n \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^n \times R^p \times R^q, 0$, onde

$$H = (h\pi_n, H_1\pi_{n,p}, H_2\pi_{n,q}).$$

Seja KK o conjunto dos germes de difeomorfismos $H = (h\pi_n, H_1\pi_{n,p}, H_2\pi_{n,q})$.

Nestas condições, com relação à composição de germes, KK tem estrutura de grupo. Da mesma forma dá-se ao conjunto CC , dos germes $H = (\pi_n, H_1\pi_{n,p}, H_2\pi_{n,q})$, estrutura de grupo. Na verdade tem-se CC um subgrupo de KK .

Definiremos a ação do grupo KK sobre o espaço $E_{n,p+q}^0 = \{(f_1, f_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0\}$ da seguinte maneira:

$$KK \times E_{n,p+q}^0 \rightarrow E_{n,p+q}^0$$

$(H, (f_1, f_2)) \rightarrow H \cdot (f_1, f_2)$, onde $H \cdot (f_1, f_2) = (g_1, g_2) \leftrightarrow (f_1, f_2)$ e (g_1, g_2) são pares de germes Bi-K-Equivalentes, segundo a Bi-K-Equivalência (h, H) .

Desta forma se $H \in KK$ e $(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$, temos que o par de germes $H \cdot (f_1, f_2)$ é definido por

$$(1, H \cdot (f_1, f_2)) = H \circ (1, f_1, f_2) \circ h^{-1}, \text{ com } H = (h\pi_n, H_1\pi_{n,p}, H_2\pi_{n,q}).$$

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 & \xrightarrow{(1, f_1, f_2)} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \\ h \downarrow & \text{Q} & \downarrow H \\ R^n, 0 & \xrightarrow{(1, H \cdot (f_1, f_2))} & R^n \times R^p \times R^q, 0 \end{array}$$

Assim ficamos com $(1, H \cdot (f_1, f_2)) = (1, H_1 \circ (1, f_1) \circ h^{-1}, H_2 \circ (1, f_2) \circ h^{-1})$ e portanto $H \cdot (f_1, f_2) = (H_1 \circ (1, f_1) \circ h^{-1}, H_2 \circ (1, f_2) \circ h^{-1})$, o que caracteriza o germe $H \cdot (f_1, f_2)$.

Lembrando, agora, que os germes $H_1: R^n \times R^p, 0 \rightarrow R^p, 0$, $H_2: R^n \times R^q, 0 \rightarrow R^q, 0$ e $h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, os quais compõem KK , são tais que $(h\pi_n, H_1)$ e $(h\pi_n, H_2)$ são K-Equivalências, e lembrando a ação de K sobre $E_{n,p}^0$ (e $E_{n,q}^0$), obtemos

$$H \cdot (f_1, f_2) = ((h\pi_n, H_1) \cdot f_1, (h\pi_n, H_2) \cdot f_2)$$

Com isso caracterizamos a "KK-ação" como um par de "K-ação". Mais exatamente temos que um elemento da KK-órbita de (f_1, f_2) se expressa segundo um elemento de $K \cdot f_1 \times K \cdot f_2$.

$$\begin{array}{ccc}
 (H, (f_1, f_2)) = ((ho\pi_n, H_1).f_1, (ho\pi_n, H_2).f_2) \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \text{ação de KK sobre } E_{n,p+q}^0 & \text{ação de K sobre } E_{n,p}^0 & \text{ação de K sobre } E_{n,q}^0
 \end{array}$$

Vale a pena observar que, na verdade, ficou demonstrada a inclusão

$$KK.E_{n,p+q}^0 \subseteq (K.E_{n,p}^0) \times (K.E_{n,p}^0),$$

enquanto que a inclusão contrária não ocorre em geral, isto é, dado o par de germes $(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$, se $g_1 \in K.f_1$ e $g_2 \in K.f_2$, não se conclui que $(g_1, g_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} (f_1, f_2)$.

O BI-K-ESPAÇO TANGENTE A UM PAR DE GERMES

§11. O K-Espaço Tangente a um Germe $f \in E_{n,p}^0$

O K-Espaço Tangente é obtido de maneira bastante natural.

Buscando inspiração no Cálculo, agindo como se estivessemos diante da ação de um grupo de Lie sobre uma variedade C^∞ , procuremos obtê-lo segundo a imagem da "diferencial" (na identidade) da aplicação natural do grupo K sobre a órbita de f, isto é, da aplicação $K \rightarrow K.f$ dada por $H \rightarrow H.f \in E_{n,p}^0$.

Considerando que o grupo $R = \{h : R^n, 0 \rightarrow R^n, 0, \text{ germes de difeomorfismos}\}$ pode ser identificado com o subgrupo de K dado pelas K-equivalências $(ho\pi_n, \pi_p)$ e que nestas condições K se expressa como semi-produto direto de R e C, $(\forall H \in K, H = (ho\pi_n, \pi_p) \circ [h^{-1} \circ \pi_n, \pi_p] \circ H) \in R \circ C$, a aplicação natural, descrita acima, pode ser vista segundo uma aplicação cujo domínio é um produto: $R \times C \rightarrow E_{n,p}^0$.

Considerando separadamente as aplicações $R \rightarrow E_{n,p}^0$ e $C \rightarrow E_{n,p}^0$, temos dois conjuntos imagens a obter (cuja soma vetorial se constitui no conjunto originariamente procurado).

$$a) R \xrightarrow{\phi} R.f \subseteq E_{n,p}^0$$

$$h \rightarrow f \circ h^{-1}$$

A "diferencial" de ϕ , na identidade de R, será uma aplicação linear $TR \rightarrow TE_{n,p}^0$, e observando que R é um subconjunto

"aberto" de $E_{n,n}^0$ ($R = \{R^n, 0 \xrightarrow{\text{difeo}} R^n, 0\}$) e que $E_{n,p}^0$ é um espaço ve torial, temos que a "diferencial" referida trata-se de uma apli-
cação $E_{n,n}^0 \rightarrow E_{n,p}^0$.

Se $g = (g_1, \dots, g_n) \in E_{n,n}^0$, isto é, g é um "vetor tangen-
te" a R em I , podemos imaginá-lo como a "diferencial", em 0 , de
curva através da identidade $(\pi_n, \pi_p) \in R$, dada por $\gamma(t) = I + t.g, (t \sim 0)$.

Considerando a curva através de f , $t \mapsto \phi \circ \gamma(t)$, obte-
mos para $x \in R^n$, $[(\phi \circ \gamma)(t)](x) = [\phi(I + t.g)](x) \stackrel{(*)}{=} [f \circ (I + t.g)](x) =$
 $= f(x_1 + t.g_1(x), \dots, x_n + t.g_n(x))$, sendo que $(\phi \circ \gamma)(0) = f$.

Logo, a "diferencial", em 0 , de $\phi \circ \gamma$, em relação a t ,
nos dá $(\phi \circ \gamma)'(0) = g_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \in E_{n,p}^0$

Assim, a "diferencial" de ϕ em $I \in R$ será a aplicação
linear $(g_1, \dots, g_n) \mapsto g_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}$, onde podemos tomar g_i
arbitrariamente em E_n . Consequentemente a imagem procurada se-
rá o submódulo (do E_n -módulo $E_{n,p}$) gerado por $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$, denomi-
nado módulo jacobiano de f e anotado por J_f .

$$\begin{aligned} \text{b) } C & \xrightarrow{\psi} E_{n,p}^0 \\ H & \rightarrow H.f \end{aligned}$$

Para efeito de simplificação, vamos identificar o ger-
me $H \in C$, $H = (\pi_n, 0)$, com o germe $\theta: R^n \times R^p, 0 \rightarrow R^p, 0$.

Então nossa aplicação ψ passa a ser dada por $\psi(H) =$
 $= H.f = H_2 \circ (1, f) = \theta \circ (1, f) = \psi(\theta)$ e se trata da restrição a C , de

(*) Para efeito de cálculo da imagem da diferencial de ϕ , podemos
supor $\phi(h) = f \circ h$, ($h \in R$).

uma aplicação linear ($\psi = \xi_f/C$, $\xi_f: E_{n+p, n+p}^0 \rightarrow E_{n, p}^0$), onde ψ coincide com sua própria "diferencial" no ponto $I \in C$.

Precisamos, então, da imagem de ψ quando aplicada a germes $\theta(x, y)$ com $\theta(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ e observando que $\theta_1(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, podemos assegurar que $\theta_1 = \sum_j y_j \cdot \alpha_j$, onde $y_1, \dots, y_p$ são os germes, em 0, das coordenadas de $\mathbb{R}^p$. Portanto $\theta_1 o(1, f) = \sum_j f_j \cdot \tilde{\alpha}_j$,

isto é, $\theta_1 o(1, f) \in f^*(m_p) = I_f$, onde $\tilde{\alpha}_j \in E_n$.

Provemos, agora, que $(d\psi)_I \cdot (T_I C) = \psi(C) = I_f \cdot E_{n, p}$.

(i) Dado $\theta \in T_I C$, temos $\psi(\theta) = \theta o(1, f) = (\theta_1 o(1, f), \dots, \theta_p o(1, f)) \in I_f \cdot E_{n, p}$.

(ii) Dado $v \in I_f \cdot E_{n, p}$, procuremos $\theta \in T_I C$ tal que $(d\psi)_I \cdot \theta = v$.

Se tomarmos $v = (0, \dots, 0, f_j, 0, \dots, 0)$, com f_j na i -ésima posição da p -upla (um gerador canônico de $I_f \cdot E_{n, p}$), basta considerar o germe $\theta(x, y) = (0, \dots, 0, y_j, 0, \dots, 0)$, y_j na i -ésima posição, isto é, $\theta_1(x, y) = y_j$.

Neste caso será preciso, ainda, provar que $\theta \in T_I C$.

Com efeito. Seja $H_t: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ e $\gamma(t) = H_t =$

$$H_t(x, 0) = (x, 0).$$

Logo, para $t \neq -1$, $H_t \in C$ e $\gamma'(0)$ é tal que $\gamma'(0) \cdot (x, f(x)) = (0, \dots, 0, f_j(x), 0, \dots, 0)$, com $f_j(x)$ localizado na i -ésima posição.

Assim, identificando $\gamma'(0)$ com θ , chegamos ao esper

do, ou seja, $\theta \in T_1 C$.

Finalmente, em função dos itens a) e b), obtidos acima, e sob a maneira mais natural possível, chegamos a um candidato a "espaço tangente ao germe $f \in E_{n,p}^0$ ", e podemos, então, defini-lo segundo o E_n -submódulo $T_f = J_f + I_f \cdot E_{n,p}$, denominando-o "K-Espaço tangente a f ".

Neste instante pode-se definir, também, a K-codimensão de f como sendo a codimensão do subespaço vetorial real T_f em $E_{n,p}$.

Um critério para a finitude da K-codimensão surge segundo o resultado seguinte:

" $f: R^n, 0 \rightarrow R^p, 0$ tem K-codimensão finita $\leftrightarrow$ existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, tal que $M_n^k \cdot E_{n,p} \subseteq T_f$ ", (ver [5] e [8]).

Pode-se estabelecer, na sequência, o seguinte resultado o qual assegura que a K-codimensão de um germe é invariante sob a K-equivalência:

"Se dois germes $f_1, f_2 \in E_{n,p}^0$ são K-equivalentes, então eles têm a mesma K-codimensão", ([5] e [8]).

§ 12. O Bi-K-Espaço Tangente

Aqui procuraremos chegar à noção de "espaço tangente à KK-órbita de um par $(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$, em (f_1, f_2) ", segundo a maneira bastante intuitiva introduzida no parágrafo anterior (para o caso de um único germe).

A ação do grupo KK, das bi-K-equivalências, sobre o espaço $E_{n,p+q}^0$, pode ser considerada segundo a ação do grupo RoCC, o qual se identifica com KK, onde CC é o conhecido subgrupo de KK (dado pelas bi-C-equivalências) e R visto como o subgrupo de KK mediante a identificação de $h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ com o germe $(h\pi_n, \pi_p, \pi_q) \in KK$.

Com isso temos KK como o semi-produto direto, RoCC, e podemos tratar, separadamente, dos dois casos seguintes (ver capítulo anterior).

$$\begin{aligned} \text{a) } \phi: R \rightarrow R, (f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0 \\ h \mapsto (f_1, f_2) \circ h^{-1} \end{aligned}$$

Dado $h \in R$, como vimos, nós o temos identificado com $(h\pi_n, \pi_p, \pi_q) \in KK$ e, então, $(h\pi_n, \pi_p, \pi_q) \cdot (f_1, f_2) = (\pi_p \circ (1_{R^n}, f_1) \circ h^{-1}, \pi_q \circ (1_{R^n}, f_2) \circ h^{-1}) = (f_1, f_2) \circ h^{-1}$.

$$b) \psi: CC \rightarrow CC.(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$$

$$H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{np}, H_2 \circ \pi_{nq}) \rightarrow H.(f_1, f_2)$$

A ação de CC se expressa por $H.(f_1, f_2) = ((\pi_n, H_1).f_1, (\pi_n, H_2).f_2)$, (como vimos anteriormente).

Observamos, quanto ao caso a), que a ação de R sobre $E_{n,p+q}^0$ não difere fundamentalmente da ação estudada no capítulo anterior e a "diferencial" $(d\phi)_I: E_{n,n}^0 \rightarrow E_{n,p+q}^0$, I : identidade de R , é dada pela aplicação linear

$$(g_1, \dots, g_n) \rightarrow g_1 \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1} + \dots + g_n \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n}$$

(bastando, para isso, refazer os cálculos do parágrafo precedente).

Assim, a imagem de $(d\phi)_I$ aparece exatamente como o E_n -submódulo de $E_{n,p+q}^0$ dado por

$$E_n \cdot \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} = J(f_1, f_2)$$

Quanto ao caso b), temos o seguinte: a KK -ação, como já vimos, se caracteriza como um par de " K -ação". Desta forma a aplicação $\psi: CC \rightarrow CC.(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$ é dada para $H = (\pi_n, H_1 \circ \pi_{np}, H_2 \circ \pi_{nq}) \in CC$, por $\psi(H) = (\psi_1(\pi_n, H_1), \psi_2(\pi_n, H_2))$, onde $\psi_1: C \rightarrow C.f_1 \in CE_{n,p}^0$ e $\psi_2: C \rightarrow C.f_2 \in E_{n,q}^0$.

Fazendo as identificações $H \equiv (H_1 \circ \pi_{np}, H_2 \circ \pi_{nq}), (\pi_n, H_1) \equiv H_1$ e $(\pi_n, H_2) \equiv H_2$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(H) &= (\psi_1(H_1), \psi_2(H_2)) = \\ &= (\psi_1(H_1 \circ \pi_{np}), \psi_2(H_2 \circ \pi_{nq})) = \\ &= (\psi_1 \times \psi_2)(H_1 \circ \pi_{np}, H_2 \circ \pi_{nq}) = \\ &= (\psi_1 \times \psi_2)(H). \end{aligned}$$

Então, sob argumentação análoga à feita no caso do K -espaço tangente, a imagem da "diferencial" de ψ , em (π_n, π_p, π_q) , será dada pelo seguinte E_n -submódulo de $E_{n,p+q}^0$:

$$[(I_{f_1}.E_{n,p}) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2}.E_{n,q})]$$

Definimos, portanto, como o bi- K -espaço tangente a um par $(f_1, f_2) \in E_{n,p+q}^0$ o E_n -submódulo de $E_{n,p+q}^0$ dado por

$$T(f_1, f_2) = J(f_1, f_2) + [(I_{f_1}.E_{n,p}) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2}.E_{n,q})]$$

Definimos, também, a bi- K -codimensão do par (f_1, f_2) . Trata-se da codimensão de $T(f_1, f_2)$ como subespaço vetorial real de

$E_{n,p+q}^0$

§13. Proposições e Exemplos

13.1. "Uma condição necessária e suficiente para que $(f_1, f_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q$, tenha bi-K-codimensão finita é que exista $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, tal que $M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0 \subseteq T(f_1, f_2)$ ".

13.2. "Se $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são bi-K-equivalentes, então eles têm a mesma bi-K-codimensão".

Demonstração de 13.1.:

(+) Suponhamos que exista um inteiro $k \geq 1$ com $M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0 \subseteq T(f_1, f_2)$. Assim,

$$\dim_R \frac{E_{n,p+q}^0}{T(f_1, f_2)} \leq \dim_R \frac{E_{n,p+q}^0}{M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0} < +\infty$$

Portanto a bi-K-codimensão de (f_1, f_2) é finita.

(+) Suponhamos que o par (f_1, f_2) tenha a bi-K-codimensão finita em $E_{n,p+q}^0$.

Consideremos a sequência decrescente de E_n -submódulos de $E_{n,p+q}^0$:

$$T(f_1, f_2) + M_n^0 \cdot E_{n,p+q}^0 \supseteq T(f_1, f_2) + M_n^1 \cdot E_{n,p+q}^0 \supseteq \dots \supseteq T(f_1, f_2)$$

Como (f_1, f_2) tem bi-K-codimensão finita, a sequência é estacionária a partir de um certo k ; logo,

$$T(f_1, f_2) + M_n^{k+1} \cdot E_{n,p+q}^0 = T(f_1, f_2) + M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0$$

Aplicando-se o Lema de Nakayama, segue que

$$T(f_1, f_2) + M_n \cdot M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0 \supseteq T(f_1, f_2) + M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0 \supseteq M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0 \xrightarrow{\text{Lema de Nakayama}} T(f_1, f_2) \supseteq M_n^k \cdot E_{n,p+q}^0$$

Observação: Podemos tomar sempre $k=c$, onde c é a bi-K-codimensão de (f_1, f_2) .

Demonstração de 13.2.:

Identificaremos $E_{n,p+q}^0$ com o produto $E_n^0 \times \dots \times E_n^0$ ($p+q$ vezes).

Vamos proceder por etapas:

Seja $u = (u_{ij})$ uma matriz inversível $((p+q) \times (p+q))$ com entradas em E_n de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, onde $a = (a_{ij})(p \times p)$ e $b = (b_{ij})(q \times q)$. Note que a e b são matrizes inversíveis.

Tomemos $U: E_{n,p+q}^0 \rightarrow E_{n,p+q}^0$ um isomorfismo de espaço vetorial dado por $(f_1, f_2) \mapsto u \cdot (f_1, f_2)$, onde pensamos (f_1, f_2) como um vetor coluna.

Coloquemos $(g_1, g_2) = u \cdot (f_1, f_2)$, isto é, $g_1 = af_1$ e $g_2 = bf_2$.

Precisamos que U leve $T_{(f_1, f_2)}$ isomorficamente em $T_{(g_1, g_2)}$. Será suficiente mostrar que $T_{(g_1, g_2)} \subseteq U(T_{(f_1, f_2)})$ e por razões análogas teremos que $T_{(f_1, f_2)} \subseteq U^{-1}(T_{(g_1, g_2)})$ e portanto que $U(T_{(f_1, f_2)}) = T_{(g_1, g_2)}$.

É claro que o problema se reduz a estabelecer as duas inclusões: $[(I_{g_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{g_2} \cdot E_{n,q}^0)] \subseteq U(T_{(f_1, f_2)})$ e $J_{(g_1, g_2)} \subseteq U(T_{(f_1, f_2)})$.

Para a primeira, observe que $[(I_{g_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] \subseteq [(I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)] \subseteq [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)]$.

Logo, $[(I_{g_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{g_2} \cdot E_{n,q}^0)] \subseteq [(I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)] = U([(I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)]) \subseteq U(T_{(f_1, f_2)})$.

Para a segunda, observe que $J_{(g_1, g_2)} \subseteq U(J_{(f_1, f_2)}) + [(I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)] = U(J_{(f_1, f_2)}) + U([(I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)]) = U(T_{(f_1, f_2)})$. A inclusão segue pela regra da derivada do produto de duas funções.

Seja, agora, $\phi: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ um germe inversível e seja $\Phi: E_{n,p+q}^0 \rightarrow E_{n,p+q}^0$ um isomorfismo de espaços vetoriais dado por $(f_1, f_2) \mapsto (f_1, f_2) \circ \phi = (f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi) = (g_1, g_2)$.

Desejamos que Φ leve $T_{(f_1, f_2)}$ isomorficamente em $T_{(g_1, g_2)}$. Como anteriormente, é suficiente estabelecer a inclu -

são $T_{(g_1, g_2)} \subseteq \Phi(T_{(f_1, f_2)})$ que se reduz a estabelecer as 2 inclusões: $[(I_{g_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{g_2} \cdot E_{n,q}^0)] \subseteq \Phi(T_{(f_1, f_2)})$ e $J_{(g_1, g_2)} \subseteq \Phi(T_{(f_1, f_2)})$.

A primeira inclusão segue imediatamente do fato que $[(I_{g_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{g_2} \cdot E_{n,q}^0)] \subseteq \Phi[(I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0)]$.

A segunda inclusão segue pelo fato de que, pela regra da cadeia, temos, para $1 \leq i \leq n$, $(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1}) = (\sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} (\frac{\partial f_1}{\partial x_j} \circ \phi), \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} (\frac{\partial f_2}{\partial x_j} \circ \phi)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}) \circ \phi$.

Finalmente, sejam $(f_1, f_2), (h_1, h_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ pares de germes Bi-K-equivalentes. Então existe um germe inversível ϕ para o qual $(g_1, g_2) = (f_1, f_2) \circ \phi$ e (h_1, h_2) são Bi-C-equivalentes.

Logo, existe uma matriz inversível $(p+q) \times (p+q)$, $u = (u_{ij})$ com entradas em E_n para a qual $(h_1, h_2) = u \cdot (g_1, g_2)$.

Segue, pelas etapas anteriores, que o automorfismo $u \circ \phi$ do espaço vetorial $E_{n,p+q}^0$ leva $T_{(f_1, f_2)}^{E_{n,p+q}^0}$ isomorficamente em $T_{(h_1, h_2)}^{E_{n,p+q}^0}$ e assim os espaços quocientes $\frac{E_{n,p+q}^0}{T_{(f_1, f_2)}} = \frac{E_{n,p+q}^0}{T_{(h_1, h_2)}}$ são isomorfos e portanto têm a mesma dimensão, isto é, (f_1, f_2) , (h_1, h_2) têm a mesma Bi-K-codimensão.

A seguir forneceremos alguns exemplos e encerramos com uma interessante proposição a qual, digamos, caracteriza um certo tipo de pares de germes de bi-K-codimensão finita.

13.3. É claro que o bi-K-espaço tangente ao par (f_1, f_2) , $T_{(f_1, f_2)}$, é um subespaço do K-espaço tangente $T_{[f_1, f_2]}$, (espaço tangente à K-órbita do germe $f = [f_1, f_2]$).

13.4. Decorre do fato anterior que a bi-K-cod $(f_1, f_2) \geq K\text{-cod}(f)$, onde $f = (f_1, f_2)$. Assim se $\text{bi-K-cod}(f_1, f_2) < +\infty$, então, $K\text{-cod}(f) < +\infty$.

13.5. Se $(f_1, f_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, então facilmente se verifica que $K\text{-cod}(f_1) + K\text{-cod}(f_2) \leq 2 \cdot \text{bi-K-cod}(f_1, f_2)$.

Na verdade podemos verificar a seguinte desigualdade:

$$K\text{-cod}(f_1) + K\text{-cod}(f_2) \leq \text{bi-}K\text{-cod}(f_1, f_2).$$

Com efeito,

$$T(f_1, f_2) = J(f_1, f_2) + (I_{f_1} \cdot E_{n,p}^0 \times \{0_q\}) + (\{0_p\} \times I_{f_2} \cdot E_{n,q}^0), \text{ onde}$$

$$0_p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p \text{ e } 0_q = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} T(f_1, f_2) &= \langle \partial_1 f_1, \partial_1 f_2 \rangle + \langle (0, \dots, 0, f_{11}, 0, \dots, 0, 0_q) \rangle + \langle (0_p, 0, \dots, 0, \\ & f_{21}, 0, \dots, 0) \rangle \subseteq \langle (\partial_1 f_1, 0_q) \rangle + \langle (0, \dots, 0, f_{11}, 0, \dots, 0, 0_q) \rangle + \\ & + \langle (0_p, \partial_1 f_2) \rangle + \langle (0_p, 0, \dots, 0, f_{21}, 0, \dots, 0) \rangle = \\ & = T_{f_1} \oplus T_{f_2} \approx (T_{f_1} \times \{0_q\}) + (\{0_p\} \times T_{f_2}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\dim_R \frac{E_{n,p+q}^0}{T(f_1, f_2)} \geq \dim_R \frac{E_{n,p}^0 \oplus E_{n,q}^0}{(T_{f_1} \times \{0_q\}) \oplus (\{0_p\} \times T_{f_2})} = \dim_R \frac{E_{n,p}^0}{T_{f_1}} + \dim_R \frac{E_{n,q}^0}{T_{f_2}}$$

$$\text{Logo, } K\text{-cod}(f_1) + K\text{-cod}(f_2) \leq \text{bi-}K\text{-cod}(f_1, f_2).$$

13.6. Dado o par $(f_1, f_2) \in E_{2,2}$, $(x, y) \mapsto (x, y^2)$, obtemos:

$$(i) \quad T_{f_1} = J_{f_1} + I_{f_1} \cdot E_{2,1}^0 = \langle 1 \rangle \text{ e portanto } K\text{-cod}(f_1) = 0,$$

$$(ii) \quad T_{f_2} = \langle y \rangle \text{ e portanto } K\text{-cod}(f_2) = +\infty,$$

$$(iii) \quad T_f = J_f + I_f \cdot E_{2,2}^0 = \langle (1, 0), (0, y) \rangle + \langle (x, 0), (0, x), (y^2, 0), (0, y^2) \rangle \text{ e portanto } K\text{-cod}(f) = 1, \text{ onde,}$$

$$f = (f_1, f_2);$$

$$(iv) \quad T(f_1, f_2) = \langle (1, 0), (0, y) \rangle + \langle (x, 0) \rangle + \langle (0, y^2) \rangle = \langle (1, 0), (0, y) \rangle \text{ e portanto bi-}K\text{-cod}(f_1, f_2) = +\infty.$$

$$f_2) = +\infty.$$

13.7. Dado o par $(x^2, x^3) \in E_{1,2}$, temos:

$$(i) \quad T_{f_1} = \langle x \rangle;$$

$$(ii) \quad T_{f_2} = \langle x^2 \rangle;$$

$$(iii) \quad T_f = \langle (2x, 3x^2) \rangle + \langle (x^2, 0), (0, x^2), (x^3, 0), (0, x^3) \rangle = \langle (x, x^2), (x^2, 0), (0, x^2) \rangle = \langle (x, 0), (0, x^2) \rangle;$$

$$(iv) \quad T(f_1, f_2) = \langle (2x, 3x^2), (x^2, 0), (0, x^3) \rangle$$

E portanto,

$$K\text{-cod}(f_1) = 1, K\text{-cod}(f_2) = 2, K\text{-cod}(f) = 3, \text{bi-}K\text{-cod}(f_1, f_2) = 4.$$

$$13.8. (f_1, f_2) = (x^2, 0)$$

$$K\text{-cod}(f_1) = 1, K\text{-cod}(f_2) = +\infty$$

$$K\text{-cod}(f) = 3, f = (f_1, f_2), \text{bi-}K\text{-cod}(f_1, f_2) = +\infty$$

Observemos, aqui, que os "germes" $(x^2, 0)$ e (x^2, x^3) são K -equivalentes porque $(I_f = I_g)$ e portanto, necessariamente, têm a mesma K -codimensão.

Por outro lado, os pares de germes $(x^2, 0)$ e (x^2, x^3) não são bi- K -equivalentes exatamente porque têm bi- K -codimensões diferentes.

13.9. Dados os germes $f, g: R, 0 \rightarrow R, 0$, o par $(f(x), g(y))$ é descrito pelo par de germes $(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2): R^2, 0 \rightarrow R^2, 0$.

Então podemos assegurar:

" $(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$ tem bi- K -codimensão finita se e somente se o germe $h = (f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$ é um germe de difeomorfismo".

De fato.

($\leftarrow$) Por hipótese, considerando que h é um difeomorfismo local, $\dim_R \frac{E_{2,2}}{T_h} < +\infty$ pois $\dim_R \frac{E_{2,2}}{J_h}$ já é finita (lembrando que $J_h = \langle (f'(x), 0), (0, g'(y)) \rangle$ e que $f'(x) \neq 0, g'(y) \neq 0$).

Neste caso podemos generalizar o problema a dimensões superiores.

$$(\rightarrow) \text{ Por hipótese } \dim_R \frac{E_{2,2}}{T(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)} < +\infty.$$

Levando em conta que $T(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2) = \langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, 0 \right), \left(0, \frac{\partial g}{\partial y} \right) \rangle + \langle (f(x), 0), (0, g(y)) \rangle$, os germes da forma $(0, x^\alpha), (y^\alpha, 0)$, com $\alpha > 1$, não serão obtidos naquela quociente (negando a hipótese) a menos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0) \neq 0$, ou seja, a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0) & 0 \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y}(0) \end{bmatrix}$$

deve ser inversível.

BI-K-EQUIVALÊNCIA DE PARES DE GERMES - UMA DEFINIÇÃO EQUIVALENTE

§14. Consideremos os pares $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, isto é, $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in E_{n, p+q}$. Então (f_1, f_2) e (g_1, g_2) dizem-se bi-K-equivalentes se existem K-equivalências (h, H) e (k, K) , para as quais comutam os diagramas

$$\begin{array}{ccccc} R^n \times R^q, 0 & \xleftarrow{1, f_2} & R^n, 0 & \xrightarrow{1, f_1} & R^n \times R^p, 0 \\ K \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow H \\ R^n \times R^q, 0 & \xleftarrow{1, g_2} & R^n, 0 & \xrightarrow{1, g_1} & R^n \times R^p, 0 \end{array}, \text{ o que equivale,}$$

evidentemente, à comutatividade do diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} R^n, 0 & \xrightarrow{(1, f_1), (1, f_2)} & R^n \times R^p \times R^n \times R^q, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow H \times K \\ R^n, 0 & \xrightarrow{(1, g_1), (1, g_2)} & R^n \times R^p \times R^n \times R^q, 0 \end{array}$$

Tarefa bastante simples é verificar que esta nova noção de Bi-K-Equivalência, na verdade, não difere da anterior, isto é, são noções "equivalentes".

Nós a introduzimos aqui, entretanto, acreditando que um diagrama do tipo

$$\begin{array}{ccccc} n+q, 0 & \xleftarrow{1, f_2} & n, 0 & \xrightarrow{1, f_1} & n+p, 0 \\ K \downarrow & \text{ } & h \downarrow & \text{ } & \downarrow H \\ n+q, 0 & \xleftarrow{1, g_2} & n, 0 & \xrightarrow{1, g_1} & n+p, 0 \end{array}$$

não só é muito mais intuitivo, como nos permite concluir com relativa facilidade os resultados obtidos anteriormente, e outros mais.

§15. Denotaremos por $KK_{n, p+q}$ o conjunto $KK_{n, p+q} = \{H \times K; H = (h \circ \pi_n, H_2) \text{ e } K = (k \circ \pi_n, K_2)\}$, e H e K como no diagrama acima.

Observemos que no estudo da bi-K-equivalência de pares de germes, ficamos restritos à diagonal do produto $R^n \times R^n$. Podemos então, para melhor reconhecer o conjunto $KK_{n, p+q}$, levando em conta este fato, estabelecer as seguintes identificações, inclusões e igualdades:

a) $KK_{n, p+q} \subset K_{n, p+q}$ onde $K_{n, p+q}$ é o grupo dos germes

de difeomorfismos $H: R^n \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^n \times R^p \times R^q, 0$, para os quais (h, H) é uma K -equivalência (e portanto $H = (h\pi_n, H_2, H_3)$), visto mediante a identificação natural $H \approx \tilde{H}$, com $\tilde{H} = (h\pi_n, H_2, h\pi_n, H_3)$.

Notemos que $HxK(x, y, x, z) = (h(x), H_2(x, y), h(x), K_2(x, z))$, enquanto que $\tilde{H}K_{n,p+q}$ é tal que $\tilde{H}(x, y, z) = (h(x), H_2(x, y, z), h(x), H_3(x, y, z))$.

b) $KK_{n,p+q} \subset K_{n,p} \times K_{n,q}$, onde $K_{n,p} \times K_{n,q} = \{HxK, HxK_{n,p} \text{ e } KxK_{n,q}\}$, sendo que $K_{n,p}$ e $K_{n,q}$ são os grupos de germes de difeomorfismos dados, respectivamente, por $H = (h\pi_n, H_2): R^n \times R^p, 0 \rightarrow R^n \times R^p, 0$ e $K = (h\pi_n, K_2): R^n \times R^q, 0 \rightarrow R^n \times R^q, 0$, de tal modo que (h, H) e (k, K) sejam K -equivalências.

Na verdade fica estabelecida a seguinte igualdade, via a identificação natural efetuada acima:

$KK_{n,p+q} = K_{n,p+q} \cap (K_{n,p} \times K_{n,q})$, que representa uma forma diferente de identificar o nosso antigo grupo das bi- K -equivalências.

§16. A bi- K -ação

Definiremos a ação do grupo $KK_{n,p+q}$ sobre o espaço $E_{n,p+q}$ da seguinte forma:

$$KK_{n,p+q} \times E_{n,p+q} \rightarrow E_{n,p+q}$$

$(HxK, (f_1, f_2)) \rightarrow (HxK).(f_1, f_2) = (g_1, g_2) \iff (f_1, f_2)$ e (g_1, g_2) são bi- K -equivalentes via HxK .

Então temos que $(HxK).(f_1, f_2) = (H_2 o (1, f_1) o h^{-1}, K_2 o (1, f_2) o h^{-1}) = (H.f_1, K.f_2)$.

Verifiquemos, agora, que a ação de $K_{n,p+q}$, bem como a de $K_{n,p} \times K_{n,q}$, estende a ação de $KK_{n,p+q}$ sobre $E_{n,p+q}$.

De fato. Se $\tilde{H} \in K_{n,p+q}$, $\tilde{H} = (h\pi_n, H_2, h\pi_n, H_3)$ e $\tilde{H} \cdot (f_1, f_2) = (H_2, H_3) o (1, f_1, f_2) o h^{-1}$.

Ora, no caso em que $\tilde{H} \in KK_{n,p+q}$, então $H_2 = H_2(x, y)$ e $H_3 = H_3(x, z)$ e portanto

$$(h\pi_n, H_2, h\pi_n, H_3) \cdot (f_1, f_2) = (H_2, H_3) o (1, f_1, f_2) o h^{-1} = (H_2 o (1, f_1) o h^{-1}, H_3 o (1, f_2) o h^{-1}).$$

Assim a ação de $KK_{n,p+q}$ é uma restrição da ação de $K_{n,p+q}$.

Da mesma forma quando tomamos a ação $(K_{n,p} \times K_{n,q}) \times E_{n,p+q} \rightarrow E_{n,p+q}$, obtida a partir da ação de $K_{n,p}$ e da ação de

$K_{n,q}$ sobre $E_{n,p}$ e $E_{n,q}$, respectivamente, temos:

$$[(\text{ho}\pi_n, H_2) \times (\text{ko}\pi_n, K_2)] \cdot (f_1, f_2) = [(\text{ho}\pi_n, H_2) \cdot f_1, (\text{ko}\pi_n, K_2) \cdot f_2] = (H_2 o(1, f_1) o h^{-1}, K_2 o(1, f_2) o k^{-1}).$$

Então, quando ocorre $h = k$, isto é, $H \times K \in KK_{n,p+q}$, acabamos obtendo a ação de $KK_{n,p+q}$ sobre o espaço $E_{n,p+q}$.

§ 17. O bi-K-espaço tangente

Observemos que se um grupo G atua sobre um conjunto M , podemos definir a ação do produto $G \times G$ sobre $M \times M$.

Temos,

$$(G \times G) \times (M \times M) \rightarrow M \times M$$

$$(g_1, g_2) \cdot (x_1, x_2) = (g_1 \cdot x_1, g_2 \cdot x_2).$$

Logo, $(G_1 \times G_2) \cdot (x_1, x_2) = (G_1 \cdot x_1) \times (G_2 \cdot x_2)$ e a órbita do produto passa a ser o produto das órbitas.

Assim o espaço tangente à órbita $(G \times G) \cdot (x_1, x_2)$, no ponto (x_1, x_2) , é dada por:

$$T_{(x_1, x_2)} (G \times G) \cdot (x_1, x_2) = (T_{x_1} G \cdot x_1, 0) + (0, T_{x_2} G \cdot x_2).$$

Evidentemente o fato ocorre para dois grupos G_1 e G_2 distintos.

Em particular quando tomamos $G_1 = K_{n,p}$ e $G_2 = K_{n,q}$, temos:

$$\begin{aligned} T_{(f_1, f_2)} (K_{n,p} \times K_{n,q}) \cdot (f_1, f_2) &= (T_{f_1} K_{n,p} \cdot f_1, T_{f_2} K_{n,q} \cdot f_2) = \\ &= (tf_1(m_n \theta_n) + f_1^*(m_p) \cdot 0(f_1), tf_2(m_n \theta_n) + f_2^*(m_q) \cdot 0(f_2)) = (tf_1(m_n \theta_n), \\ &tf_2(m_n \theta_n)) + [(f_1^*(m_p) \cdot 0(f_1), 0) + (0, f_2^*(m_q) \cdot 0(f_2))], \text{ onde } 0(f_1) \approx \\ &\approx E_{n,p}, 0(f_2) \approx E_{n,q} \text{ e } tf_1(m_n \theta_n) \approx Jf_1 \cdot E_n, \text{ segundo as notações de} \\ &\text{J.N. Mather e C.G. Gibson em [9] e [5], respectivamente.} \end{aligned}$$

Do mesmo modo, quando tomamos o grupo $K_{n,p+q}$, obtemos

$$T_{(f_1, f_2)} K_{n,p+q} = t(f_1, f_2) \cdot (m_n \theta_n) + (f_1, f_2)^*(m_{p+q}) \cdot 0(f_1, f_2).$$

Então o espaço tangente à bi-K-órbita $KK_{n,p+q} \cdot (f_1, f_2)$, em (f_1, f_2) , deverá resultar da intersecção dos espaços

$$T_{(f_1, f_2)} (K_{n,p} \times K_{n,q}) \cdot (f_1, f_2) \text{ e } T_{(f_1, f_2)} K_{n,p+q} \cdot (f_1, f_2).$$

O referido espaço tangente, $T_{(f_1, f_2)} KK_{n,p+q} \cdot (f_1, f_2)$, conforme a construção elaborada anteriormente (ver §12), é dado por

$$T_{(f_1, f_2)}^{KK_{n, p+q}} \cdot (f_1, f_2) = t_{(f_1, f_2)}(m_n \theta_n) + [(f_1^*(m_p) \cdot \theta(f_1), 0) + (0, f_2^*(m_q) \cdot \theta(f_2))].$$

Vê-se que é trivial a inclusão

$$(T_{(f_1, f_2)}^{K_{n, p} \times K_{n, q}} \cdot (f_1, f_2) \cap T_{(f_1, f_2)}^{K_{n, p+q}} \cdot (f_1, f_2)) \supset t_{(f_1, f_2)}(m_n \theta_n) + [(f_1^*(m_p) \cdot \theta(f_1), 0) + (0, f_2^*(m_q) \cdot \theta(f_2))], \text{ pois escrevendo o primeiro membro segundo}$$

$(A_1 + A_2) \cap (B_1 + B_2)$, observamos que

$B_1 \subset A_1 \Rightarrow B_1$ contido na intersecção

e

$A_2 \subset B_2 \Rightarrow A_2$ contido na intersecção.

A inclusão, no outro sentido, certamente não poderá ser obtida desta maneira.

BI-K-EQUIVALÊNCIA DE PARES DE GERMES - ESTUDO DAS BI-K-ÓRBITAS DE UMA PARTICULAR K-ÓRBITA.

§18. Consideremos a família de germes, a 2-parâmetros, dada por $f_{s,t}(x) = (sx, tx)$, $(s,t) \in I_\epsilon \times I_\epsilon$, $I_\epsilon = (-\epsilon, +\epsilon)$, $x \in \mathbb{R}$. Estão, todos, na mesma K-órbita se $(s,t) \neq (0,0)$.

É claro que os germes

$$\begin{cases} (sx, 0), & s \neq 0, \\ (0, tx), & t \neq 0, \\ (sx, tx), & s, t \neq 0, \end{cases}$$

definem três bi-K-órbitas distintas em $E_{1,2}^0$.

No quadrado $I_\epsilon \times I_\epsilon$, definem a seguinte partição:

Com este exemplo distinguimos quatro (04) bi-K-órbitas distintas da K-órbita de $f_{s,t}$, $((s,t) \in I_E \times I_E)$.

Vale observar que essas bi-K-órbitas não "preenchem" a K-órbita de $f_{s,t}$, no sentido de que não constituem uma partição da K-órbita. Basta notar, por exemplo, que os germes (sx, t, x^2) pertencem à K-órbita de (sx, tx) , $(s,t) \in I_E \times I_E$, $s, t \neq 0$, e no entanto não pertencem a qualquer das bi-K-órbitas anteriores.

Observemos, por intermédio dos espaços-tangentes à K-órbita e à bi-K-órbita de $(x,0) = f_{1,0}$, que, por exemplo, a KK-órbita de $(x,0)$ ($KK.(x,0)$) não é aberta na K-órbita de $(x,0)$, ($K.(x,0)$).

Com efeito. Como sabemos,

$$\begin{cases} T_{K,f} = J_f + f^*(m_y)E_{n,p} \oplus \\ T_{KK.(f_1, f_2)} = J_{(f_1, f_2)} + f_1^*(m_y)E_{n,p} \oplus f_2^*(m_z)E_{n,q} \end{cases}$$

Então temos:

$$\begin{cases} T_{K.(x,0)} = \langle (1,0) \rangle + \langle (x,0), (0,x) \rangle = \langle (1,0), (0,x) \rangle \\ \oplus \\ T_{KK.(x,0)} = \langle (1,0) \rangle + \langle (x,0) \rangle = \langle (1,0) \rangle \end{cases}$$

Vale observar que $T_{KK.(x,0)} \neq T_{K.(x,0)}$

Procuramos, agora, germes da K -órbita de $(x,0)$ cujas bi- K -órbitas a "preenchem". Observar que $K.f_{s,t} = K.(x,0)$, $(s,t) \neq (0,0)$.

Os elementos genéricos da K -órbita de $(x,0)$, nas suas formas mais simples, cujas bi- K -órbitas preenchem $K.(x,0)$, podem ser encontrados da seguinte maneira.

Tomemos o par $(p(x), q(x))$, de germes diferenciáveis, na K -órbita de $(x,0)$. É claro que $p(0)=0$ e $q(0)=0$, conforme vimos exigindo para todos os germes.

Então deve ocorrer pelo menos uma das situações seguintes: $p'(0) \neq 0$ ou $q'(0) \neq 0$.

Suponhamos que $p'(0) \neq 0$. Então podemos escrever $p(x) = x.p_1(x)$, $p_1(0) \neq 0$.

Com isso temos que $KK.(p(x), q(x)) = KK.(x, p_1(x), q(x)) = KK.(x, q(x))$.

A pergunta, agora, é: quais as possíveis formas para $q(x)$? Ora, se $q^{(n)}(x) \neq 0$, para algum $n \in \mathbb{Z}^+$, então $KK.(x, q(x)) = KK.(x, x^k)$, onde k é a ordem da menor derivada não nula de $q(x)$.

Caso contrário, isto é, se $q^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, então $q(x)$ é um germe "chato".

Logo, os germes genéricos de $K.(x,0)$, nas expressões mais simples, cujas bi- K -órbitas preenchem a K -órbita de $(x,0)$, são os seguintes (para $k > 0$):

$$\begin{cases} (x,0), (x,x), \dots, (x,x^k), \dots \\ (0,x), (x,x), \dots, (x^k,x), \dots \\ (x,h(x)) \text{ e } (k(x),x), \text{ onde } h(x) \text{ e } k(x) \text{ são germes} \end{cases}$$

"chato".

Note que temos uma quantidade enumerável de germes do tipo $(x,0), \dots, (x,x^k)$ e $(0,x), \dots, (x^k,x)$ o que é bastante significativo.

§19. Um problema interessante, motivado pelo estudo acima, seria tentar exibir uma família contínua, não enumerável, de germes chatos $R, 0 \rightarrow R, 0$, não R -equivalentes.

Podemos solucionar este problema, exibindo uma família de tais germes através de seus gráficos^(*).

Inicialmente pensou-se na maneira seguinte, a qual passamos a descrever.

Seja $\alpha \in [0, 1]$ e consideremos sua representação diádica (isto é, na base 2). Associaremos a α , a partir desta sua configuração diádica, um determinado germe cujo gráfico será construído mediante a convenção seguinte: dividimos o intervalo $[0, 1]$ mediante a partição $\{\frac{1}{r}, r \in \mathbb{Z}^{++}\}$ e o gráfico do germe (C^∞) a ser construir deverá tangenciar o eixo Ox ou o cortar transversalmente nos pontos da partição, conforme o algarismo de α seja 1 ou 0, respectivamente.

Para ilustrar, suponhamos $\alpha = 0,1101\dots$. Então teríamos o seguinte germe associado (ou seja, o seu gráfico teria a seguinte forma):

(*) Devemos a construção que se segue aos Profs. Dr.ª W.M. Tedini e G.V. Figueiredo, dos Institutos de Ciências Matemáticas e Matemática e Estatística, respectivamente, de São Carlos e São Paulo, USP.

Esta maneira de construir o germe associado, entretanto, não é oportuna uma vez que, por exemplo, o número $\beta \in [0,1]$, $\beta = 0,001101\dots$ (base 2), o qual a partir de um certo instante tem a mesma representação diática que α , nos levaria a dois germes coincidentes. Isto é, $\alpha \neq \beta$ mas os germes (chatos) associados são equivalentes.

O problema, no entanto, pode ser contornado e, como se intui, parece ser fundamental que as diferenças entre as representações diáticas dos números α e β sejam carregadas para a origem (isto é, cada estágio da convenção efetuada deve conter as diferenças entre as configurações dos números).

Novamente, por ser mais fácil ilustrar do que descrever, tomemos um exemplo:

$$\alpha = 0, 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & & & \\ \alpha_1 & & \alpha_3 & & & & \\ & \alpha_2 & & \alpha_4 & \dots & & \end{array}$$

Em cada subintervalo de $[0,1]$ reproduziremos a convenção original $1 \mapsto \text{tg}$ e $0 \mapsto \Delta$. Então teremos:

(i) Para $\alpha_1(1)$:

(ii) Para $\alpha_1, \alpha_2(1,0)$:

(iii) Para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (1, 0, 1)$:

(iv) Para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 (1, 0, 1, 0)$:

E assim, sucessivamente, construímos o germe associado a α .

Note que a configuração geométrica do germe se repete seguidamente em cada subintervalo de $[0, 1]$. Logo, números cujas representações diádicas sejam distintas, originam germes distintos (e não equivalentes).

Vale observar o seguinte cuidado nesta construção. Se o número α tiver duas representações diádicas, como por exemplo $0,1000\dots$ e $0,0111\dots$ (note que $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1/4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$), então escolhemos aquela que tenha uma infinidade de algarismos significativos. No caso, $\alpha = 0,0111\dots$.

CAPÍTULO II

BI-K-DETERMINAÇÃO FINITA

Nosso objetivo, neste capítulo, é construir uma teoria de determinação finita para pares de germes de aplicações $R^s, 0 \rightarrow R^{t_1}, 0 \rightarrow R^{t_2}, 0$, visando a classificação de diagramas estáveis (conforme o capítulo VI adiante).

§1. Definição: " $(f_1, f_2): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1}, 0 \times R^{t_2}, 0$ diz-se Bi-K-Determinado de ordem k se para todo par $(g_1, g_2): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1}, 0 \times R^{t_2}, 0$, com $(g_1, g_2) - (f_1, f_2) \in M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}$ (isto é, $(g_1, g_2)^k(0) = (f_1, f_2)^k(0)$), tivermos $(g_1, g_2) \in KK.(f_1, f_2)$ ".

Observações:

(i) Na definição acima, (f_1, f_2) diz-se, também, "KK-determinado de ordem k ".

(ii) Se (f_1, f_2) é bi-K-determinado de ordem k , então os germes f_1 e f_2 ,

$$f_1: R^s, 0 \rightarrow R^{t_1}, 0,$$

$$f_2: R^s, 0 \rightarrow R^{t_2}, 0,$$

são K-determinados de ordem k .

De fato.

Sejam $g_1: R^s, 0 \rightarrow R^{t_1}, 0$ e $g_2: R^s, 0 \rightarrow R^{t_2}, 0$ dois germes satisfazendo

$$g_1^k(0) = f_1^k(0) \quad e$$

$$g_2^k(0) = f_2^k(0)$$

Ora, então $(g_1, g_2)^k(0) = (f_1, f_2)^k(0)$ e da hipótese obtemos que $(g_1, g_2) \in KK.(f_1, f_2)$.

Segue, segundo propriedade da bi-K-equivalência, que

$$g_1 \in K.f_1 \quad e$$

$$g_2 \in K.f_2 \quad e \text{ portanto que } f_1 \text{ e } f_2 \text{ são germes finitos}$$

mente k -determinado- K , (ver cap. I, §10).

(iii) Se (f_1, f_2) é bi- K -determinado de ordem k , então o germe $f = (f_1, f_2)$ é K -determinado de ordem k .

De fato: germes bi- K -equivalentes são, em particular, K -equivalentes.

(iv) As recíprocas de (ii) e (iii) são falsas. Na verdade, mais do que isso, temos que f_1 K -determinado de ordem k , f_2 K -determinado de ordem k e (f_1, f_2) K -determinado de ordem k $\Rightarrow$ (f_1, f_2) bi- K -determinado de ordem k .

Este fato decorre, basicamente, do seguinte: Se f_1, g_1 e f_2, g_2 são germes K -equivalentes eles o podem ser mediante K -equivalências do tipo

$$H_1 = (h_1 \circ \pi_n, 0_1) \quad \text{e} \quad H_2 = (h_2 \circ \pi_n, 0_2),$$

com h_1 e h_2 germes de difeomorfismos distintos, o que não nos permitiria passar à bi- K -equivalência entre os pares (f_1, f_2) e (g_1, g_2) .

Equivalentemente, poderíamos tomar $f_1 \overset{K}{\sim} g_1$ e $f_2 \overset{K}{\sim} g_2$ de tal modo que os ideais " $f_1^*(M_y)$ e $g_1^*(M_y)$ " e " $f_2^*(M_z)$ e $g_2^*(M_z)$ " fossem isomorficamente induzidos por germes de difeomorfismos distintos, o que impediria a bi- K -equivalência entre os pares (f_1, f_2) e (g_1, g_2) .

§2. Embora no capítulo seguinte apareçam mais detalhadamente as noções de deformação de um par de germes, imagem recíproca (ou deformação induzida) de uma deformação e bi- K -equivalência entre pares de deformações, definimos, aqui, estes conceitos para que possamos atingir o teorema da bi- K -determinação finita.

Uma deformação a r -parâmetros de $(f_{01}, f_{02}) : R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ trata-se de um par de r -deformações de f_{01} e f_{02} , respectivamente.

Dizemos que (f_1, f_2) e (g_1, g_2) , como r -deformações são

bi-K-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\phi: R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^n, 0$, r-desdobramento de 1_{R^n} , para o qual se tem $\phi^*(f_1^* M_y) = g_1^* M_y$ e $\phi^*(f_2^* M_z) = g_2^* M_z$, onde M_y e M_z são os ideais maximais de E_p e E_q , respectivamente.

Dado um germe $h: R^s, 0 \rightarrow R^r, 0$, denominado mudança de parâmetros, e uma r-deformação (f_1, f_2) de (f_{01}, f_{02}) definimos a s-deformação de (f_{01}, f_{02}) dada por $h^*(f_1, f_2) = (f_1, f_2) \circ (h \times 1_{R^n})$, denominada imagem recíproca de (f_1, f_2) , via h .

Este artifício nos permite estudar a bi-K-equivalência de pares de deformações a parâmetros distintos.

2.1. O Lema da Redução (J. Martinet, Desdobr. Versais de Apl. Dif. e Classif. das Aplic. Estáveis; Springer 535; pág. 19, [8]), deve, aqui, ser adaptado à relação de Bi-K-Equivalência.

Seja $(f_1, f_2): R^{p+1} \times R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ uma $(p+1)$ -deformação.

Seja $(f_1, f_2)^0: R^p \times R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ a p-deformação restrição de (f_1, f_2) ao subespaço $\{u_0 = 0\}$, isto é,

$$(f_1, f_2)^0(u_1, \dots, u_p, x) = (f_1, f_2)(0, u_1, \dots, u_p, x).$$

Observemos que

$$(f_1, f_2)^0 = (f_1^0, f_2^0).$$

Seja agora $h: R^{p+1}, 0 \rightarrow R^p, 0$ um germe qualquer e consideremos o germe $h^*(f_1, f_2)^0$, "imagem recíproca de $(f_1, f_2)^0$ por h ", $(p+1)$ -deformação definida da seguinte forma:

$$h^*(f_1, f_2)^0: R^{p+1} \times R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$$

$$(u_0, u_1, \dots, u_p, x) \rightarrow (f_1, f_2)^0(h(u), x) = (f_1, f_2)(0, h(u), x)$$

É claro que $h^*(f_1, f_2)^0 = h^*(f_1^0, f_2^0) = (h^*f_1^0, h^*f_2^0)$.

Enunciemos, então, o

2.2. Lema da Redução

"Seja X um germe de campo de vetores, na origem de $R^{p+1} \times R^s$, da forma

$$X = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^p \varepsilon_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^s x_j(u, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ e } x_j(u, 0) \equiv 0,$$

com X satisfazendo as condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} D\phi_1 \cdot X \in \phi_1^*(M_y) \cdot (E_{u,x})^{t_1} \\ e \\ D\phi_2 \cdot X \in \phi_2^*(M_z) \cdot (E_{u,x})^{t_2}. \end{array} \right.$$

Então o par de germes $(\phi_1, \phi_2): R^{p+1} \times R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ é Bi-K-Equivalente (como deformação) ao par $(h^*\phi_1^0, h^*\phi_2^0)$, onde $h: R^{p+1}, 0 \rightarrow R^p, 0$ é um germe de submersão.

Demonstração:

Segundo o Lema da Redução para o caso da K-Equivalência, o germe de campo X , nas condições da hipótese, nos assegura que $([8], [15])$:

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 \sim^K h^*f_1^0 \\ f_2 \sim^K h^*f_2^0, \end{array} \right. \text{ para um mesmo germe } h \text{ de submersão e}$$

(ii) Os germes de difeomorfismos, $(p+1)$ -desdobramentos de 1_{R^s} ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1: R^{p+1} \times R^s, 0 \rightarrow R^{p+1} \times R^s, 0 \\ \phi_2: R^{p+1} \times R^s, 0 \rightarrow R^{p+1} \times R^s, 0, \end{array} \right. \text{ segundo os quais}$$

se tem as K-Equivalências acima, isto é, para os quais

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^*[(h^*f_1^0)^*(M_y)] = f_1^*(M_y) \\ e \\ \phi_2^*[(h^*f_2^0)^*(M_z)] = f_2^*(M_z), \end{array} \right. \text{ são coincidentes.}$$

O campo X origina os germes h (obtido a partir de

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^p \xi_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{e } \phi = \phi_1 \equiv \phi_2.$$

Em vista disso, decorrência da Bi-K-Equivalência de pares de germen, temos que (f_1, f_2) e $(h^*f_1^0, h^*f_2^0)$ são Bi-K-Equivalentes (como deformações).

2.3. Lema

"Sejam $(f, g): R^{\delta, 0} \rightarrow R^{t1} \times R^{t2, 0}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, tais que $T(f, g) = J(f, g) + [(I_f \cdot (E_x)^{t1}) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I_g \cdot (E_x)^{t2})] \supset M_x^k \cdot (E_x)^{t1+t2}$.
Seja $(h_1, h_2) \in M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t1+t2}$. Então os germes $(f, g)_u(x) = (f, g)(x) + u \cdot (h_1, h_2)(x) = (f_u, g_u)(x)$, $u \in R$, são pares Bi-K-Equivalentes ao par (f, g) , para todo u suficientemente pequeno".

Demonstração:

Fazendo-se $(f_u, g_u)(x) = (\bar{f}(u, x), \bar{g}(u, x)) = (\bar{f}, \bar{g})(u, x)$, passamos a considerar o par $(\bar{f}, \bar{g}): R \times R^{s, 0} \rightarrow R^{t1} \times R^{t2, 0}$ como uma 1-deformação do par (f, g) .

A partir daí, para estabelecer o resultado, será o bastante (segundo o Lema anterior no caso em que $p = 0$),

demonstrar a existência de um germe de campo X na vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$, da forma $X = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^s X_i(u,x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, tal que

$$\begin{cases} D\bar{f} \cdot X \in \bar{f}^*(M_y) \cdot (E_{u,x})^{t_1} \\ \text{e} \\ D\bar{g} \cdot X \in \bar{g}^*(M_z) \cdot (E_{u,x})^{t_2}, \end{cases}$$

com $X_i \in M_x \cdot E_{u,x}$.

Com efeito.

Por hipótese $T(f,g) = \langle \frac{\partial(f,g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f,g)}{\partial x_s} \rangle \cdot M_x E_x + (I_f \cdot E_x^{t_1} \times \{0\}) + (\{0\} \times I_g \cdot E_x^{t_2}) \supset M_x^{k+1}(E_x)^{t_1+t_2}$.

Sejam $G_1, \dots, G_p$ os geradores do segundo membro, os quais podem se escrever, em função da última inclusão, do seguinte modo:

$$G_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(f,g) + \left[\sum_{j,\alpha=1}^{t_1} \mu_{ij\alpha} \cdot f_j \cdot e_\alpha, \sum_{k,\beta=1}^{t_2} \mu_{ik\beta} \cdot g_k \cdot e_\beta \right], \text{ onde } i=1, \dots, p$$

$$\begin{cases} \lambda_{ij} \in M_x \cdot E_x, \\ \mu_{ij\alpha}, \mu_{ik\beta} \in E_x \\ e_\alpha, e_\beta, \text{ vetores canônicos de } R^{t_1} \text{ e } R^{t_2}, \text{ respectivamente.} \end{cases}$$

Tomemos, em seguida, os germes

$$\bar{G}_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{f}, \bar{g}) + (\sum \mu_{ij\alpha} \bar{f}_j \cdot e_\alpha, \sum \mu_{ik\beta} \bar{g}_k \cdot e_\beta) \text{ e provemos que eles geram } M_x^{k+1} \cdot (E_{u,x})^{t_1+t_2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ora, } \bar{G}_i &= \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(f,g) + u \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(h_1, h_2) \right] + \\ &+ \left[\sum \mu_{ij\alpha} \cdot (f_j + u \cdot h_{1j}) \cdot e_\alpha, \sum \mu_{ik\beta} \cdot (g_k + u \cdot h_{2k}) \cdot e_\beta \right] = \\ &= \left[\sum \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(f,g) + (\sum \mu_{ij\alpha} \cdot f_j \cdot e_\alpha, \sum \mu_{ik\beta} \cdot g_k \cdot e_\beta) \right] + \\ &+ u \cdot \left[\sum \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(h_1, h_2) + (\sum \mu_{ij\alpha} \cdot h_{1j} \cdot e_\alpha, \sum \mu_{ik\beta} \cdot h_{2k} \cdot e_\beta) \right] = \end{aligned}$$

$$= G_1 + u.M_1, \text{ onde } M_1 \in M_x^{k+1} \cdot (E_{u,x})^{t_1+t_2}.$$

"Sejam $g_1, \dots, g_p \in E_x$, um sistema dos geradores do ideal $M_x^{k+1} \cdot E_x$. Sejam $m_1, \dots, m_p \in M_x^{k+1} \cdot E_{u,x}$. Então os germes $\bar{g}_i = g_i + u.m_i \in M_x^{k+1} \cdot E_{u,x}$ geram este ideal de $E_{u,x}$ ".

Assim, do Lema acima (ver [8] J. Martinet, 535, página 38), os germes $\bar{g}_i, i=1, \dots, p$, geram $M_x^{k+1} \cdot (E_{u,x})^{t_1+t_2}$ e portanto

$$\begin{aligned} (h_1, h_2) &\in M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \subset M_x^{k+1} \cdot (E_{u,x})^{t_1+t_2} \\ &= \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_p \rangle \cdot E_{u,x} \subset \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{f}, \bar{g}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}(\bar{f}, \bar{g}) \right\rangle \cdot M_x \cdot E_{u,x} + \\ &+ (I_{\bar{f}} \cdot (E_{u,x})^{t_1} \times \{0\}) + (\{0\} \times I_{\bar{g}} \cdot (E_{u,x})^{t_2}). \end{aligned}$$

Com isso podemos escrever

$$\begin{aligned} (h_1, h_2) &= \sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{f}, \bar{g}) + \left(\sum_{j,\alpha=1}^{t_1} \mu_{j\alpha} \cdot \bar{f}_j \cdot \theta_\alpha, \right. \\ &\left. \sum_{k,\beta=1}^{t_2} \mu_{k\beta} \cdot \bar{g}_k \cdot \theta_\beta \right) = \left(\sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{f}, \sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g} \right) + \left(\sum_{j,\alpha=1}^{t_1} \mu_{j\alpha} \bar{f}_j \cdot \theta_\alpha, \right. \\ &\left. \sum_{k,\beta=1}^{t_2} \mu_{k\beta} \bar{g}_k \cdot \theta_\beta \right) = \left(\sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{f} + \sum_{j,\alpha=1}^{t_1} \mu_{j\alpha} \cdot \bar{f}_j \cdot \theta_\alpha, \sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g} + \right. \\ &\left. + \sum_{k,\beta=1}^{t_2} \mu_{k\beta} \cdot \bar{g}_k \cdot \theta_\beta \right) \text{ com } x_i \in M_x \cdot E_{u,x} \text{ e } \mu_{j\alpha}, \mu_{k\beta} \in E_{u,x}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} h_1 = \sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{f} + \sum_{j,\alpha=1}^{t_1} \mu_{j\alpha} \cdot \bar{f}_j \cdot \theta_\alpha \\ \text{e} \\ h_2 = \sum_{i=1}^s (-x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g} + \sum_{k,\beta=1}^{t_2} \mu_{k\beta} \cdot \bar{g}_k \cdot \theta_\beta \end{cases}$$

Considerando que $(\bar{f}, \bar{g}) = (f, g) + u \cdot (h_1, h_2)$, podemos escrever

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \sum_{i=1}^s x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{f} \in I_{\bar{f}} \cdot (E_{u,x})^{t_1} \\ \text{e} \\ \frac{\partial \bar{g}}{\partial u} + \sum_{i=1}^s x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g} \in I_{\bar{g}} \cdot (E_{u,x})^{t_2} \end{cases}$$

Com isso, tomando o germe de campo

$$X = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^s X_i(u, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ ficamos com}$$

$$\begin{cases} D\bar{f}.X \in \bar{f}^*(M_{t_1}) \cdot (E_{u,x})^{t_1} \\ 0 \\ D\bar{g}.X \in \bar{g}^*(M_{t_2}) \cdot (E_{u,x})^{t_2}. \end{cases}$$

o que queríamos provar.

2.4. Teorema

"Sejam $(f, g): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ um par de germes de KK-cod. finita e $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, tal que $M_x^k \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \subseteq T(f, g)$.

Então (f, g) é bi-K-determinado de ordem $k+1$ ".

Demonstração:

Provemos que $(f+h_1, g+h_2)$ é bi-K-equivalente a (f, g) , para $(h_1, h_2) \in M_x^{k+2} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}$, qualquer.

Para tanto, conforme o Lema anterior, consideremos o par (f_u, g_u)

$$\begin{cases} f_u = f + u \cdot h_1 \\ g_u = g + u \cdot h_2, \quad u \in R \end{cases}$$

Então temos:

$$1) \forall u \in R, T(f_u, g_u) \supseteq M_x^k \cdot (E_x)^{t_1+t_2}$$

De fato.

$$T(f_u, g_u) = J(f_u, g_u) + (I_{f_u} \cdot E_x^{t_1} \times \{0\}) + (\{0\} \times I_{g_u} \cdot E_x^{t_2}) =$$

observando que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_u, g_u) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f, g) \text{ Mod } M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}, \\ f_{u_j} = f_j \text{ Mod } M_x^{k+2} \cdot E_x \\ g_{u_k} = g_k \text{ Mod } M_x^{k+2} \cdot E_x, \end{cases}$$

obtemos $T(f_u, g_u) = T(f, g) \text{ Mod } M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}$ ou, equivalentemente,

$$T(f_u, g_u) + M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} = T(f, g).$$

Agora, da hipótese feita sobre $T(f, g)$, temos

$$T(f_u, g_u) + M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \supset M_x^k \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \text{ e portanto que}$$

$$T(f_u, g_u) \supset M_x^k \cdot (E_x)^{t_1+t_2}, \text{ (Nakayama).}$$

$$ii) T(f_u, g_u) = T(f, g) \text{ para todo } u \in R$$

De fato.

Como vimos em (i),

$$\begin{cases} T(f_u, g_u) + M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} = T(f, g) \\ e \\ T(f_u, g_u) \supset M_x^k \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \supset M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } T(f_u, g_u) = T(f, g).$$

iii) $(f_u, g_u) \stackrel{b_{1-K}}{\sim} (f_{u_0}, g_{u_0}), \forall u_0 \in R$ fixo, com $|u - u_0|$ suficientemente pequeno.

De fato.

$$\begin{cases} T(f_{u_0}, g_{u_0}) = T(f, g) \supset M_x^k \cdot (E_x)^{t_1+t_2}, \\ (h_1, h_2) \in M_x^{k+2} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \subset M_x^{k+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}, \\ (f_u, g_u) = (f_{u_0}, g_{u_0}) + (u - u_0) \cdot (h_1, h_2), \end{cases}$$

acarretam, pelo Lema anterior, que

$(f_u, g_u) \stackrel{b_{1-K}}{\sim} (f_{u_0}, g_{u_0})$ para $\|u - u_0\|$ suficientemente pequeno.

$$iv) (f_u, g_u) \stackrel{b_{1-K}}{\sim} (f, g), \forall u \in R$$

De fato.

Pela conexidade de R (e compacidade de $[a, b]$)

temos que

$$(f_u, g_u) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} (f_0, g_0)_{(u_0=0)} = (f, g), \quad \forall u \in R.$$

Em particular, para $u = 1$, temos

$$v) (f + h_1, g + h_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} (f, g)$$

Com isso (f, g) é $(k+1)$ -Bi-K-Determinado, como queríamos demonstrar.

2.5. Corolário

$$KK\text{-cod}(\delta_1, \delta_2) < +\infty \implies \begin{cases} K\text{-cod}(\delta_1) < +\infty \\ K\text{-cod}(\delta_2) < +\infty \\ K\text{-cod}(\delta_1, \delta_2) < +\infty \end{cases}$$

Demonstração:

teor. ant.
 $KK\text{-cod}(f_1, f_2) < +\infty \implies (f_1, f_2): \text{finitamente KK-determinado} \implies f_1: \text{finit. K-determinado}, f_2: \text{finit. K-det. e } (f_1, f_2): \text{finitamente K-det.}$

Logo, considerando que

" $f: R^s, 0 \rightarrow R^t, 0, K\text{-cod}(f) < +\infty \iff f: \text{finitamente K-determinado}$ ", temos a conclusão procurada.

2.6. Proposição: (Invariança do grau de KK-Determinação)

"Se $(\delta_1, \delta_2): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ é KK-determinado de ordem k , então todo elemento da bi-A-órbita de (δ_1, δ_2) é ainda k -det.-KK".

Demonstração:

O que temos a demonstrar é que se (f_1, f_2) é k -det.-KK, então $\psi_0(f_1, f_2) \circ \phi^{-1}$ é k -det.-KK, onde $\phi: R^s, 0 \rightarrow R^s, 0$ e $\psi = \psi_1 \times \psi_2: R^{t_1} \times R^{t_2}, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ são germes de difeomorfismos.

Com efeito, [14].

Suponhamos $(g_1, g_2) \in (E_x)^{t_1+t_2}$ tal que $(g_1, g_2)^k(0) = [\psi \circ (f_1, f_2) \circ \phi^{-1}]^k(0)$.

Então temos

$$(f_1, f_2)^k(0) = [\psi^{-1} \circ (g_1, g_2) \circ \phi]^k(0).$$

Logo, considerando que (f_1, f_2) é k -determinado-KK, temos que $\psi^{-1} \circ (g_1, g_2) \circ \phi \in \text{KK} \cdot (f_1, f_2)$ e portanto $(g_1, g_2) \in^{(*)} \text{KK} \cdot (f_1, f_2)$.

§3. Neste parágrafo nos ocuparemos em estabelecer a recíproca do Teorema 2.4. anterior, segundo o qual a bi-K-codimensão finita de $(f, g): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}$ o torna um par finitamente bi-K-determinado.

Mais precisamente temos:

3.1. Teorema

"Se $(f_1, f_2): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}$, 0 é um par de germes bi-K-determinado de ordem r , então $m_x^{r+1}(E_x)^{t_1+t_2} \subset T_{(f_1, f_2)}"$.

Demonstração:

a) Processo heurístico

$$\begin{aligned} \text{Seja } E &= \{(g_1, g_2) \in (E_x)^{t_1+t_2}, (g_1, g_2)^r = (f_1, f_2)^r\} = \\ &= (f_1, f_2)^r + m_x^{r+1}(E_x)^{t_1+t_2}. \end{aligned}$$

Observemos que $E \subset \text{KK} \cdot (f_1, f_2)$, dado que (f_1, f_2) é r -bi-K-determinado.

Então $T_{(f_1, f_2)} E \subset T_{(f_1, f_2)} \text{KK} \cdot (f_1, f_2)$, onde

$T_{(f_1, f_2)} \text{KK} \cdot (f_1, f_2)$ trata-se do bi-K-espaco tangente ao par (f_1, f_2) anteriormente definido.

Em seguida temos que

$$T_{(f_1, f_2)} E = T_{(f_1, f_2)} [(f_1, f_2)^r + m_x^{r+1}(E_x)^{t_1+t_2}] = m_x^{r+1}(E_x)^{t_1+t_2}.$$

(*) Sabe-se que a Bi-A-Equivalência acarreta a Bi-K-Equivalência. Logo, $\psi^{-1} \circ (g_1, g_2) \circ \phi$ e (g_1, g_2) são Bi-K-Equivalentes.

Então $m_x^{r+1}(E_x)^{t_1+t_2} \subset T_{(f_1, f_2)}$, como queríamos demonstrar.

b) De modo mais rigoroso, por justificação dos germes envolvidos, podemos elaborar a seguinte demonstração do teorema enunciado.

Seja $E = \{(g_1, g_2)^{r+1} \in J^{r+1}(s, t_1+t_2), (g_1, g_2)^r = (f_1, f_2)^r\}$, isto é, $E = \pi_{r+1, r}^{-1}(\pi_{r+1, r}(z))$, com $z = (f_1, f_2)^{r+1}$, onde

$\pi_{r+1, r}: J^{r+1} \rightarrow J^r$ é a projeção canônica.

Então $z \in (KK)^{r+1}$, pois, para todo $(g_1, g_2)^{r+1} \in E$ temos que $(g_1, g_2)^r = (f_1, f_2)^r$ e portanto, da hipótese do teorema, que $(g_1, g_2) \in KK.(f_1, f_2)$, de onde fica assegurada a existência de um germe de difeomorfismo H , $H \in KK$, para o qual se tem $(g_1, g_2) = H.(f_1, f_2)$ e, assim, $(g_1, g_2)^{r+1} = H^{r+1}.(f_1, f_2)^{r+1} \in (KK)^{r+1}.(f_1, f_2)^{r+1}$.

Considerando, agora, que $\pi_{r+1, r}: J^{r+1}(s, t_1+t_2) \rightarrow J^r(s, t_1+t_2)$ é um germe de submersão, temos que E é uma subvariedade de $J^{r+1}(s, t_1+t_2)$ e $T_z E = \ker(\pi_{r+1, r}) = \pi^{r+1} \left[m_x^{r+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \right]$, onde π^{r+1} é o germe definido por

$$\begin{aligned} \pi^{r+1}: m_x^{r+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} &\rightarrow J^{r+1}(s, t_1+t_2) \\ \xi &\rightarrow (\xi^1(0), \dots, \xi^{(r+1)}(0)), \text{ com } \ker(\pi^{r+1}) = \\ &= m_x^{r+2} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}, \text{ (ver [14])}. \end{aligned}$$

Então $\pi^{r+1} \left[m_x^{r+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \right] \subset \pi^{r+1}(T_{(f_1, f_2)})$ e portanto $m_x^{r+1} \cdot (E_x)^{t_1+t_2} \subset T_{(f_1, f_2)} + m_x^{r+2} \cdot (E_x)^{t_1+t_2}$.

Considerando que $T_{(f_1, f_2)} = J_{(f_1, f_2)} + I_{f_1} \cdot (E_x)^{t_1} \oplus I_{f_2} \cdot (E_x)^{t_2}$, temos que $m_x^{r+1} \cdot \left[(E_x)^{t_1+t_2} \right] \subset T_{(f_1, f_2)}$, (Nakayama). Isto encerra a demonstração.

3.2. Uma observação a ser feita antes de encerrarmos este parágrafo, é que o grupo KK , das bi-K-equivalências $H \times K$

$= (\text{hom}_s, H_2) \times (\text{hom}_s, K_2) \in K_{s,t_1} \times K_{s,t_2}$, é tal que $(KK)^r$ é fechado em $K_{s,t_1+t_2}^r$ (considerando a estrutura de grupo de Lie de $K_{s,t_1+t_2}^r$).

Este fato é importante na medida em que nos permite concluir acerca da estrutura da variedade de $(KK)^r$ e, consequentemente, das $(KK)^r$ -órbitas dos pares $(f_1, f_2) \in (E_x)^{t_1+t_2}$ juntamente com seus espaços tangentes.

Se denotamos por J o conjunto $\{h^r, H^r, k^r, K^r\}$, com $h, k: R^s, 0 \rightarrow R^s, 0$ e $H, K: R^s \times R^{t_1} \times R^{t_2}, 0 \rightarrow R^s \times R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$ germes de difeomorfismos, então J é aberto em R^N , para algum $N_0 \in \mathbb{Z}^{++}$ e, ainda,

$K_{s,t_1}^r \times K_{s,t_2}^r$ e $K_{s,t_1+t_2}^r$ são subconjuntos fechados de J .

Assim $(KK)^r = [(K_{s,t_1}^r) \times (K_{s,t_2}^r)] \cap K_{s,t_1+t_2}^r$ é fechado em J . Por outro lado, $K_{s,t_1+t_2}^r \supset (KK)^r$ e portanto $(KK)^r$ é fechado em $K_{s,t_1+t_2}^r$; (ver "Bi-K-Equivalência - Uma definição alternativa", cap. I, §14 e seguintes).

§4. Exemplos:

4.1. Um trabalho a ser desenvolvido oportunamente, será o de elaborar formas normais para a bi-K-determinação em dimensões baixas.

A título de ilustração, consideremos o par $(f_1, f_2): R, 0 \rightarrow R \times R, 0$, finitamente bi-K-determinado. Como se sabe, as componentes f_1 e f_2 serão finitamente K-determinadas e, portanto, podemos garantir a existência de inteiros positivos r_1 e r_2 para os quais $f_1^{(r_1)}(0) \neq 0$ e $f_2^{(r_2)}(0) \neq 0$.

Por mudança de coordenadas do grupo R , podemos escrever $f = (f_1, f_2) = (\pm x^{a_1}, (f_2 \circ \phi)(x))$, para $a_1 \in \mathbb{N}$ e, por Taylor, $f = (f_1, f_2) \sim (\pm x^{a_1}, \pm b \cdot x^{a_2} + x^{a_2+1} \cdot g(x))$, onde $b \neq 0$ e $g \in C^\infty$.

Ora, desta forma, considerando a identificação vista no capítulo I, §12, segundo a qual $R \subset KK$, podemos garantir para o par $(g_1, g_2)(x) = (x^{a_1}, x^{a_2})$, que $(f_1, f_2) \sim^{KK} (g_1, g_2)$, uma vez que

$$\langle \pm x^{a_1} \rangle = \langle x^{a_1} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \pm b, x^{a_2} + x^{a_2+1} \cdot g(x) \rangle = \langle x^{a_2} \rangle, \quad (b \neq 0).$$

4.2. Uma observação a ser feita é que se $f = (f_1, f_2)$ é r - K -determinado, $r < +\infty$, não se tem, necessariamente, f_1 e f_2 finitamente K -determinados. Entretanto, no caso da bi- K -determinação, este fato é verdadeiro. Mais precisamente, se (f_1, f_2) é r -bi- K -determinado, $r < +\infty$, então cada componente f_i será r - K -determinada e isto, sem dúvida, facilita o estudo das formas normais, como ilustra do acima.

§5. Neste parágrafo apresentamos alguns lemas da teoria dos germes de deformações e campos de vetores, demonstrando algumas proposições propostas na bibliografia indicada, (ver [7], [8] e [15]).

Para efeito de estudo do Lema da Redução, no caso de um único germe de deformação, aparecem nos trabalhos citados (ver referências bibliográficas) de Jean Martinet, os enunciados abaixo, os quais procuraremos demonstrar após a colocação de alguns conceitos e breve estudo das órbitas de determinados campos.

5.1. Seja $f_0 \in E_n$ um germe de função em n variáveis $x_1, \dots, x_n$. Uma p -deformação de f_0 trata-se de um germe f , $f: R^p \times R^n, 0 \rightarrow R$ para o qual se tem $f(0, x) = f_0(x)$, para todo x .

Duas p -deformações f e g de f_0 dizem-se equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Phi: R^p \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^n, 0$, da forma $(t, x) \rightarrow (t, \phi(t, x))$ com $\Phi(0, x) = (0, x)$, tal que $g = f \circ \Phi$.

$$\begin{array}{ccc}
 R^p \times R^n, 0 & \xrightarrow{f} & R \\
 \Phi \uparrow & \Omega & \\
 R^p \times R^n, 0 & \xrightarrow{g} &
 \end{array}$$

O germe Φ diz-se um p -desdobramento do germe da identidade 1_{R^n} .

Uma p -deformação de f_0 será denominada trivial se ela for equivalente à p -deformação constante de f_0 , dada por $C: R^p \times R^n, 0 \rightarrow R$, $C(t, x) = f_0(x)$, para todo par (t, x) .

5.2. Consideremos, na origem de $R \times R^n$, o seguinte germe de campo de vetores: $X(t, x) = (1, X_1, \dots, X_n) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $X_i(t, 0) = 0$ para todo t .

A curva integral do campo X , passando pelo ponto $(0, x)$, é dada por $\phi(t, x) = (t, \phi(t, x))$, $\phi(0, x) = (0, x)$, onde $\phi: R \times R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ é a solução do sistema $\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x)$, $i=1, \dots, n$, associado ao ger-

me de campo X , com a condição inicial $\phi(0, x) = x$, ([13]).

Fica associado, então, ao germe de campo de vetores X , um único germe de difeomorfismo $\phi: R \times R^n, 0 \rightarrow R \times R^n, 0$, germe de desdobramento a um parâmetro do germe da identidade do R^n (1_{R^n}).

Pode-se, na verdade, tornar biunívoca esta associação, tomando-se o germe de campo $X = \partial/\partial t + \sum (\partial \phi_i / \partial t)(t, x) \cdot (\partial/\partial x_i)$, para um dado germe de difeomorfismo $\phi: R \times R^n, 0 \rightarrow R \times R^n, 0$, $\phi(t, x) = (t, \phi(t, x))$, com $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$.

Uma observação a ser feita é que, dado aquele campo, o germe de difeomorfismo associado é tal que as curvas $\gamma_x: R \rightarrow R \times R^n$, dadas por $\gamma_x(t) = \phi(t, x) = (t, \phi(t, x))$, são as curvas integrais de X passando por $(0, x)$, para cada x de R^n previamente fixado. Note que o germe de difeomorfismo ϕ transforma a família de retas $R \times \{x\}$, $x \in R^n$, na família de curvas integrais do germe de campo X , (passando por $(0, x)$).

5.3. Observemos, ainda com respeito ao germe de campo X , que podemos associá-lo canonicamente a um germe de submersão $h: R \times R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, cujas fibras são exatamente as curvas integrais de X , (as quais são transversais ao eixo $0 \times R^n$, uma vez que a primeira componente do campo é constante e não nula, dada por $(t, x) \mapsto \partial/\partial t$).

Para a expressão de h temos: dado o par $(t, x) \in R \times R^n$, existe $\bar{x}$ em R^n para o qual $(t, x) = \gamma_{\bar{x}}(t) = \phi(t, \bar{x}) = (t, \phi(t, \bar{x})) = (t, \phi_t(\bar{x}))$, (considerando, obviamente, (t, x) numa conveniente vizinhança de $(0, 0)$), onde $\phi_t: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$ é um germe de difeomorfismo com $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, $(t=0)$. Então $\phi_t(\bar{x}) = x$ e portanto $\bar{x} = \phi_t^{-1}(x) = \phi(-t, x)$, de onde fazemos $h(t, x) = \bar{x} = \phi(-t, x)$, para todo $(t, x) \in \gamma(0, 0)$ de $R \times R^n$.

5.4. Lema 1. "Uma deformação $F: R \times R^n, 0 \rightarrow R$, de um germe $f: R^n, 0 \rightarrow R$ é trivial se, e somente se, existe um germe de campo de vetores X , na origem de $R \times R^n$, da forma $X = \partial/\partial t + \sum X_i(t, x) \cdot \partial/\partial x_i$, $i=1, \dots, n$, tal que $X.F = 0$ ".

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $F: R \times R^n, 0 \rightarrow R$ é trivial, por definição existe um germe de difeomorfismo, 1-desdobramento da identidade de R^n , $\phi(t, x) = (t, \phi(t, x))$, $\phi(0, x) = (0, x)$, para o qual $F \circ \phi(t, x) = C(t, x) = f(x)$. Diferenciando a relação anterior, em relação ao parâmetro t , ficamos com $(\partial F/\partial t \quad \partial F/\partial x_1 \quad \dots \quad \partial F/\partial x_n) \cdot (1 \quad \partial \phi_1/\partial t \quad \dots \quad \partial \phi_n/\partial t)^t = 0$, (o segundo membro da relação independente do parâmetro t). Assim ficamos com

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\phi(t, x)} + \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{\phi(t, x)} \cdot \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{\phi(t, x)} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial x_n} \right|_{\phi(t, x)} \cdot \left. \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \right|_{\phi(t, x)} = 0,$$

isto é, $(\partial/\partial t + \sum X_i(t, x) \cdot (\partial/\partial x_i))|_{\phi(t, x)} \cdot F = 0$, onde podemos escrever $X.F = 0$ para X nas condições do enunciado do Lema, (claro - que $\phi(t, x)$ percorre todo o espaço $R \times R^n$, numa vizinhança de $(0, 0)$).

Vale a pena observar que, para o caso da recíproca, a condição $X.F = 0$ é equivalente a dizer que o germe F é constante ao longo das curvas integrais do germe de campo X .

Com efeito: $F \circ \phi(t, x)$ independe da variável t , considerando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (F \circ \phi(t, x)) &= DF(\phi(t, x)) \cdot \phi'(t, x) = DF(\phi(t, x)) \cdot X(\phi(t, x)) = \\ &= X.F(\phi(t, x)) \equiv 0. \text{ Logo } F \circ \phi(t, x) = F(\phi(t, x)) = F(\phi(0, x)) = F(0, x) = \\ &= f(x), \text{ para todo } (t, x) \text{ numa vizinhança de } (0, 0) \text{ de } R \times R^n. \end{aligned}$$

Desta forma, se por hipótese temos X nas condições do enunciado, então o germe de difeomorfismo Φ , associado a X conforme o parágrafo anterior, nos permite concluir que, para cada x numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$, $F(\gamma_x(t)) = F(\Phi(t, x)) = F_0\Phi(t, x) = F_0\Phi(0, x) = F(\Phi(0, x)) = F(0, x) = f(x)$, $t=0$. Com isso obtivemos a trivialidade de F .

O fato demonstrado acima, isto é, a recíproca do Lema 1, poderia ser alcançado de um modo mais geral. Supondo existir um germe de campo X na origem de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, C^∞ , tendo a origem como ponto regular, ($X(0,0) \neq (0,0)$), de tal modo que para um germe $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável se tenha $X.F \equiv 0$, pode-se concluir a existência de um germe de difeomorfismo $\Psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0$, para o qual $F \circ \Psi$ não dependa da variável t . Para tanto utiliza-se o Teorema do Fluxo Tubular [13] e obtém-se $X \in C^\infty$ -conjugado ao campo $Y \equiv \partial/\partial y_1$, numa vizinhança de $(0,0)$. Utilizando a caracterização dos germes de campos conjugados (ver Cap. VI - Equações Diferenciais, J. Sotomayor, [13]), obtém-se Ψ , um germe de difeomorfismo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, tal que $\Psi'(t, x)(Y(t, x)) = X(t, x) \cdot (t, x) \in \mathcal{V}(0,0)$. Então, aplicando $F'(\Psi(t, x))$, ficamos com a igualdade seguinte: $(F \circ \Psi)'(t, x) \cdot Y(t, x) = X.F(\Psi(t, x)) = 0, (t, x)$ numa vizinhança de $(0,0)$. Logo $Y.(F \circ \Psi)(t, x) = \partial/\partial y_1 (F \circ \Psi)(t, x) \equiv 0$ e, em decorrência, o germe $G = F \circ \Psi$ não depende da variável t . Para encerrar esta observação, lembramos que se o germe de campo X possuir as particulares componentes admitidas no enunciado do lema proposto, então teríamos o germe Ψ , obtido pela conjugação- C^∞ acima, como exatamente o germe de 1-desdobramento associado a X .

Antes de passarmos ao parágrafo seguinte, vale registrar que o Lema 1 nos dá uma condição infinitesimal para a trivialização do germe de 1-deformação F . Ou seja,

$$\partial F / \partial t = (X_1(t, x), (\partial F / \partial x_1)) \in \langle \partial F / \partial x_1, \dots, \partial F / \partial x_n \rangle \cdot E_{t, x}, \quad \text{onde}$$

$$E_{t, x} = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

5.5. Consideremos, agora, um germe de campo X da forma $X(t,x) = \partial/\partial t_1 + \sum_2^p \xi_i(t) \cdot \partial/\partial t_i + \sum_1^n X_j(t,x) \cdot \partial/\partial x_j$, com $X_j(t,0) \equiv 0$, definido na origem de $R^p \times R^n$.

O campo X diz-se um levantamento do campo ξ , onde $\xi(t) = \partial/\partial t_1 + \sum \xi_i(t,x) \cdot \partial/\partial t_i$, $i=2, \dots, p$, no sentido de que para todo (t,x) no domínio de X tem-se $X(t,x) = \xi(t) + \bar{X}(t,x)$. A figura abaixo ilustra o fato observado.

Seja, a seguir, $f: R^{p+1} \times R^n, 0 \rightarrow R$ um germe de $(p+1)$ -deformação. Seja $f^0: R^p \times R^n, 0 \rightarrow R$ a p -deformação "restrição de f ao subespaço $\{t_0=0\}$ ", isto é, $f^0(t_1, \dots, t_p, x) = f(0, t_1, \dots, t_p, x)$.

Seja $h: R^{p+1}, 0 \rightarrow R^p, 0$ um germe qualquer. Então definimos o germe denominado "imagem recíproca" de f^0 por h , segundo: $h^*f^0: R^{p+1} \times R^n, 0 \rightarrow R$, $h^*f^0(v,x) = f^0(h(v), x)$.

Podemos, então, enunciar o seguinte lema:

Lema 2. "Suponhamos que exista um germe de campo de vetores X , na origem de $R^{p+1} \times R^n$, da forma $X(t,x) = \partial/\partial t_0 + \sum \xi_i(t) \cdot \partial/\partial t_i + \sum X_j(t,x) \cdot \partial/\partial x_j$, $i=1, \dots, p$ e $j=1, \dots, n$, tal que $X \cdot \delta = 0$, onde $\delta: R^{p+1} \times R^n, 0 \rightarrow R$.

É importante observar que a projeção de X sobre o espaço $x=0$, isto é, $R \times R^p$, é constante e igual a ξ , considerando que $X_j(t,0) \equiv 0$. Assim é que, na figura anterior, a curva integral de X , que passa pelo ponto $(0, h(t), x)$, está localizada sobre a superfície cilíndrica gerada por uma reta perpendicular ao plano $R \times R^p$, que se apoia na curva integral do germe de campo ξ que passa pelo ponto $t = (t_0, t_1, \dots, t_p)$.

Então podemos concluir a demonstração do lema 2 lembrando que a condição $X.f = 0$ (conforme vimos anteriormente) torna f constante sobre cada curva integral de X . Assim, para todo par (t, x) nas vizinhanças de $(0,0) \in R^{p+1} \times R^n$ temos que $f \circ \Phi(t, x) = f(\Phi(t, x)) = f(0, h(t), 0)$, uma vez que tanto $\Phi(t, x)$ quanto $(0, h(t), x)$ são pontos da mesma curva integral de X . Desta forma ficamos com $f \circ \Phi(t, x) = f^0(h(t), x) = h^* f^0(t, x)$, ou seja, fica estabelecida a comutatividade do diagrama seguinte, o que torna f equivalente ao germe $h^* f^0$, como queríamos.

$$\begin{array}{ccc}
 R^{p+1} \times R^n, 0 & & \\
 \Phi \uparrow & \circlearrowright & f \searrow \\
 R^{p+1} \times R^n, 0 & & R \\
 & & g = h^* f^0 \nearrow
 \end{array}$$

Obs.: Note que os germes Φ e h dependem exclusivamente do germe de campo X .

CAPÍTULO III

BI-A-EQUIVALÊNCIA E BI-K-ISOMORFISMOS DE DEFORMAÇÕES

Procuramos inicialmente, neste capítulo, introduzir as definições que envolvem os conceitos básicos de deformações de pares, bi-K-equivalência e bi-K-isomorfismos e proposições que interligam estas noções. Em seguida trabalhamos com pares de germes de restrições, procurando obter informações acerca dos pares de deformações a partir dos germes de restrições associados.

§1. Deformações, bi-K-equivalência e bi-K-versalidade de pares de germes.

1.1. Definições

1.1.1. Uma r -deformação de um par $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ trata-se de um par $(f_1, f_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ para o qual $(f_1, f_2)(0, x) = (f_{01}, f_{02})(x)$, isto é, f_1 e f_2 são r -deformações usuais de f_{01} e f_{02} , respectivamente.

1.1.2. $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, r -deformações de $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, dizem-se bi-K-equivalentes quando existe um germe de difeomorfismo, r -desdobramento de 1_{R^n} ,

$\phi: R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^n, 0$, para o qual

$$\phi^*(f_{1p}^*) = g_{1p}^* \quad \text{e} \quad \phi^*(f_{2q}^*) = g_{2q}^*.$$

Na linguagem conhecida da bi-K-equivalência, dizemos que os ideais I_{f_1} e I_{g_1} , I_{f_2} e I_{g_2} são isomorficamente induzidos pelo mesmo germe de difeomorfismo $\phi(u, x) = (u, \phi(u, x))$, com $\phi(0, x) = x$.

1.1.3. Seja $(f_1, f_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ uma r -deformação. Dado o germe $h: R^s, 0 \rightarrow R^r, 0$, definimos a "imagem recíproca de (f_1, f_2) via h " (ou a " s -deformação induzida por h ") como sendo a s -deformação $h^*(f_1, f_2): R^s \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ para a qual se tem $[h^*(f_1, f_2)](v, x) = (f_1, f_2)(h(v), x)$. Observemos que $h^*(f_1, f_2) = (h^*f_1, h^*f_2)$. O germe h recebe o nome de mudança de parâmetros.

1.1.4. Dois pares de r -deformação

$(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, de um mesmo par de germes, dizem-se bi- K -isomorfos se existe um germe de difeomorfismo $h: R^r, 0 \rightarrow R^r, 0$ para o qual se tem um dos pares bi- K -equivalente ao par induzido do outro, via h .

1.1.5. Consideremos, agora, dois pares de deformações a r e s parâmetros respectivamente, de um mesmo par

$$(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0.$$

Podemos, então, compará-los segundo a relação de bi- K -equivalência mediante uma mudança de parâmetros $h: R^s, 0 \rightarrow R^r, 0$.

Com efeito, se $(f_1, f_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ e

$(g_1, g_2): R^S \times R^N, 0 \rightarrow R^P \times R^Q, 0$, observemos que $(h^*f_1, h^*f_2): R^S \times R^N, 0 \rightarrow R^P \times R^Q, 0$ e (g_1, g_2) passam a ter o mesmo número de parâmetros.

Então definimos: um par (f_1, f_2) , r -deformação de (f_{01}, f_{02}) , diz-se bi-K-versal se qualquer outro par (g_1, g_2) , deformação de (f_{01}, f_{02}) , for bi-K-equivalente a (h^*f_1, h^*f_2) para algum germe h entre os espaços de parâmetros de (f_1, f_2) e (g_1, g_2) .

Quando o par (f_{01}, f_{02}) tiver bi-K-codimensão $= c < +\infty$, então (f_1, f_2) , como c -deformação bi-K-versal de (f_{01}, f_{02}) , dir-se-á uma deformação bi-K-universal.

1.1.6. Dado o par $(f_1, f_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, r -deformação de (f_{01}, f_{02}) , definimos as "velocidades iniciais" de (f_1, f_2) segundo as restrições $(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_i(x) = (\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, x), \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, x))$, $i = 1, \dots, r$.

Dizemos que a r -deformação (f_1, f_2) é bi-K-transversal quando o subespaço vetorial

$$R \cdot \{(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1, \dots, (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_r\}$$

for tal que

$$R \cdot \{(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1, \dots, (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_r\} + T_{(f_{01}, f_{02})} = E_{n, p+q},$$

onde $T_{(f_{01}, f_{02})} = J_{(f_{01}, f_{02})} + I_{f_{01}} \cdot E_{n, p} \oplus I_{f_{02}} \cdot E_{n, q}$ é o bi-K-espaço tangente ao par (f_{01}, f_{02}) .

Nestas condições dizemos que o par (f_{01}, f_{02}) admite uma r -deformação bi-K-transversal (e, necessariamente, a bi-K-codimensão de (f_{01}, f_{02}) é menor ou igual a r). A recíproca é verdadeira considerando que é sempre possível construir uma r -deformação bi-K-transversal de (f_{01}, f_{02}) quando sua bi-K-codimensão é finita. (ver [11]).

É possível provar, a partir do Lema da Redução para pares de germes (ver Capítulo 2, da bi-K-determinação), que uma r -deformação (f_1, f_2) é bi-K-versal se, e somente se, (f_1, f_2) é

bi-K-transversal, (ver [11]).

1.2. Proposições; Bi-K-versalidade

São válidas as seguintes proposições acerca da bi-K-versalidade de pares de germes (para a demonstração ver [11], Capítulo II):

1.2.1. Todas as deformações bi-K-universais de um mesmo par (de bi-K-codimensão finita) são bi-K-isomorfas.

1.2.2. Seja (f_{01}, f_{02}) um par de bi-K-codimensão finita, igual a c . Seja (f_1, f_2) uma deformação bi-K-universal de (f_{01}, f_{02}) . Então, para $d \geq c$, qualquer d -deformação de (f_{01}, f_{02}) , bi-K-versal, será bi-K-isomorfa à deformação constante, a $(d-c)$ -parâmetros, de (f_1, f_2) .

Assim quaisquer duas d -deformações de (f_{01}, f_{02}) , bi-K-versais, serão bi-K-isomorfas.

§2. Pares de germes de restrições e bi-A-equivalência.

2.1. Seja $(f_1, f_2): R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ o seguinte par de $(p+q)$ -deformações^(*) de $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$:

$$(f_1, f_2): R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$$

$$(y, z, x) \rightarrow (-y, -z) + (f_{01}, f_{02})(x).$$

Consideremos, em seguida, as subvariedades abaixo (note que as deformações dadas são regulares):

$$V_{f_1} = f_1^{-1}(0) \subset R^p \times R^q \times R^n,$$

$$V_{f_2} = f_2^{-1}(0) \subset R^p \times R^q \times R^n \quad \text{e}$$

(*) As deformações envolvidas neste capítulo, em virtude de determinadas identificações a serem efetuadas posteriormente, serão a $r = p+q$ parâmetros.

$$V_{f_1} \cap V_{f_2} = (f_1, f_2)^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n.$$

Tomemos, agora, os seguintes germes de restrições das projeções usuais:

$$\begin{aligned} \Pi_{f_1} : V_{f_1} \cap V_{f_2}, 0 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^p, 0 \\ (y, z, x) &\rightarrow y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{f_2} : V_{f_1} \cap V_{f_2}, 0 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^q, 0 \\ (y, z, x) &\rightarrow z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Pi_{f_1}, \Pi_{f_2}) : V_{f_1} \cap V_{f_2}, 0 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0 \\ (y, z, x) &\rightarrow (y, z) \end{aligned}$$

Observemos que a subvariedade $V_{f_1} \cap V_{f_2}$ se identifica naturalmente com o gráfico do par (f_{01}, f_{02}) , considerando que $(y, z, x) \in V_{f_1} \cap V_{f_2} \iff (f_1, f_2)(y, z, x) = (0, 0) \iff y = f_{01}(x), z = f_{02}(x)$.

Vale observar, ainda, o seguinte fato:

$$\text{codim}_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n} (V_{f_1} \cap V_{f_2}) = p+q \text{ e, consequentemente, } \dim(V_{f_1} \cap V_{f_2}) = n.$$

Desta forma podemos fazer as seguintes naturais identificações:

$$\begin{aligned} \Pi_{f_1} &\equiv f_{01}, \quad \Pi_{f_2} \equiv f_{02} \text{ (quando } \Pi_{f_1} \text{ e } \Pi_{f_2} \text{ restritos a} \\ V_{f_1} \cap V_{f_2} \text{) e } (\Pi_{f_1}, \Pi_{f_2}) &\equiv (f_{01}, f_{02}). \end{aligned}$$

Evidentemente que podemos definir o par de restrições (Π_{f_1}, Π_{f_2}) para qualquer $(p+q)$ -deformação regular. O fato de termos a particular deformação anterior, $(f_1, f_2)(y, z, x) = (-y, -z) + (f_{01}, f_{02})(x)$, se prende à necessidade de, mais adiante, transferirmos certas propriedades do par (f_{01}, f_{02}) para o par (Π_{f_1}, Π_{f_2}) , via a identificação natural conseguida.

2.2. Conforme sabemos, dois pares $(f_{01}, f_{02}), (g_{01}, g_{02}) : R^{n,0} \rightarrow R^p \times R^q, 0$ dizem-se bi-A-equivalentes (ver [3]) se existem germes de difeomorfismos h, k_1 e k_2 para os quais comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} R^{q,0} & \xleftarrow{f_{02}} & R^{n,0} & \xrightarrow{f_{01}} & R^{p,0} \\ k_2 \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow k_1 \\ R^{q,0} & \xleftarrow{g_{02}} & R^{n,0} & \xrightarrow{g_{01}} & R^{p,0} \end{array}$$

Definiremos, então, a bi-A-equivalência entre pares de germes de restrições associados a $(p+q)$ -deformações regulares $(f_1, f_2), (g_1, g_2) : R^p \times R^q \times R^{n,0} \rightarrow R^p \times R^q, 0$, segundo a comutatividade dos seguintes diagramas, onde $\phi : R^p \times R^q \times R^{n,0} \rightarrow R^p \times R^q \times R^{n,0}$, dado por $\phi(y, z, x) = (\psi_1(y), \psi_2(z), \phi(y, z, x))$ é um germe de difeomorfismo:

$$\begin{array}{ccccc} R^{q,0} & \xleftarrow{\pi_{f_2}} & V_{f_2}, 0 & & V_{f_1}, 0 \xrightarrow{\pi_{f_1}} R^{p,0} \\ \psi_2 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \phi/V_{f_2} & & \downarrow \phi/V_{f_1} \\ R^{q,0} & \xleftarrow{\pi_{g_2}} & V_{g_2} & & V_{g_1}, 0 \xrightarrow{\pi_{g_1}} R^{p,0} \\ & & & & \downarrow \psi_1 \end{array}$$

Observação:

No particular caso de deformações (f_1, f_2) e (g_1, g_2) dadas conforme o item 2.1. anterior, podemos explicitar o germe do difeomorfismo ϕ , que dá a bi- Λ -equivalência entre os pares (π_{f_1}, π_{f_2}) e (π_{g_1}, π_{g_2}) , em função da bi- Λ -equivalência entre os pares (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) .

$$V_{f_1} \equiv g_1 \circ f(f_{01}) \times \mathbb{R}^q$$

$$V_{g_1} \equiv g_1 \circ f(g_{01}) \times \mathbb{R}^q$$

Por hipótese vale o diagrama comutativo seguinte:

$$\begin{array}{ccccc}
 R^q, 0 & \xleftarrow{f_{02}} & R^n, 0 & \xrightarrow{f_{01}} & R^p, 0 \\
 k_2 \downarrow & \mathcal{Q} & \downarrow h & \mathcal{Q} & \downarrow k_1 \\
 R^q, 0 & \xleftarrow{g_{02}} & R^n, 0 & \xrightarrow{g_{01}} & R^p, 0
 \end{array}$$

Tomemos, então, o germe de difeomorfismo

$$\phi: R^p \times R^1 \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q \times R^n, 0, \quad \phi(y, z, x) = (k_1(y), k_2(z), h(x)).$$

Observemos que $\phi: V_{f_1} \rightarrow V_{g_1}$, $i = 1, 2$.

De fato: $\forall (y, z, x) \in V_{f_1}$, temos $y = f_{01}(x)$ e portanto

$$\phi(y, z, x) = \phi(f_{01}(x), z, x) = (k_1 \circ f_{01}(x), k_2(z), h(x)) = (g_{01} \circ h(x), k_2(z), h(x)) \in \text{raf}(g_{01}) \times R^q \cap V_{g_1}.$$

Da mesma forma verificamos que $\phi: V_{f_2} \rightarrow V_{g_2}$.

Por fim a comutatividade dos diagramas, que é facilmente verificada:

$$\begin{array}{ccccc}
 R^q, 0 & \xleftarrow{\pi_{f_2}} & V_{f_2}, 0 & & V_{f_1}, 0 \xrightarrow{\pi_{f_1}} R^p, 0 \\
 k_2 \downarrow & \mathcal{Q} & \downarrow \phi/V_{f_2} & & \downarrow \phi/V_{f_1} \mathcal{Q} \downarrow k_1 \\
 R^q, 0 & \xleftarrow{\pi_{g_2}} & V_{g_2}, 0 & & V_{g_1}, 0 \xrightarrow{\pi_{g_1}} R^p, 0
 \end{array}$$

2.3. A proposição seguinte caracteriza a bi-A-equivalência entre pares de germes de restrições, a partir da noção de bi-K-isomorfismo via uma mudança de parâmetros do tipo produto cartesiano, $h = h_1 \times h_2$.

Proposição:

"Sejam $(h_1, h_2), (g_1, g_2): R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, $(p+q)$ -deformações regulares de $(h_{01}, h_{02}), (g_{01}, g_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, respectivamente. Então (π_{h_1}, π_{h_2}) e (π_{g_1}, π_{g_2}) são bi-A-equivalentes se, e somente se, (h_1, h_2) e (g_1, g_2) são bi-K-isomorfos via uma mudança de parâmetros $h: R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, $h = h_1 \times h_2$ ".

($\Rightarrow$) Da hipótese temos a existência de um germe de difeomorfismo $\tilde{\Phi}: R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q \times R^n, 0$, tal que $\tilde{\Phi}: V_{f_1} \rightarrow V_{g_1}$ e $\tilde{\Phi}: V_{f_2} \rightarrow V_{g_2}$.

Como (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são regulares, recaímos no caso usual e então teremos $\tilde{\Phi}^*(g_1^* m_y) = f_1^* m_y$ e $\tilde{\Phi}^*(g_2^* m_z) = f_2^* m_z$, (ver [8]).

Desta forma podemos escrever, para $\tilde{\Phi}(y, z, x) = (y, z, \phi(y, z, x))$, onde $\tilde{\Phi}(y, z, x) = (\psi_1(y), \psi_2(z), \phi(y, z, x))$ é o germe de difeomorfismo garantido pela hipótese:

$$\tilde{\Phi}^*(I_{\psi^* g_i}) = I_{\psi^* g_i} \circ \tilde{\Phi} = I_{g_i} \circ \tilde{\Phi} = I_{f_i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{onde}$$

$$\psi = \psi_1 \times \psi_2.$$

Com isso, por definição, temos a bi-K-equivalência entre os pares (f_1, f_2) e $\psi^*(g_1, g_2)$, sendo que ψ é o germe de difeomorfismo dado pelo produto $\psi_1 \times \psi_2$.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos $(f_1, f_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} h^*(g_1, g_2)$, onde $h = h_1 \times h_2: R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é um germe de difeomorfismo.

Da definição da bi-K-equivalência garantimos a existência de matrizes inversíveis M_1 e M_2 , com entradas em E_{p+q+n} , de ordem p e q , respectivamente, e de um germe de difeomorfismo, $(p+q)$ -desdobramento de 1_{R^n} , $\phi: R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q \times R^n, 0$, para os quais podemos escrever:

$$(f_1, f_2) = (M_1 \cdot h^* g_1 \circ \phi, M_2 \cdot h^* g_2 \circ \phi) = (M_1 \cdot g_1 \circ \phi, M_2 \cdot g_2 \circ \phi)$$

O germe de difeomorfismo ϕ é definido considerando a igualdade seguinte:

$$(h^* g_i \circ \phi)(y, z, x) = h^* g_i(y, z, \tilde{\phi}(y, z, x)) = g_i(h(y, z), \tilde{\phi}(y, z, x)) = g_i(h_1(y), h_2(z), \tilde{\phi}(y, z, x)) = (g_i \circ \phi)(y, z, x), \quad (i=1, 2).$$

Agora basta seguir o roteiro estabelecido pelo caso usual, observando que $\forall (y,z,x) \in V_{f_1}$, temos $0 = f_1(y,z,x) = M_1(y,z,x) \cdot [(g_1 \circ \Phi)(y,z,x)]$ e portanto que $g_1(\Phi(y,z,x)) = 0$, isto é, $\Phi: V_{f_1} \rightarrow V_{g_1}$, $i=1,2$, e teremos provado a comutatividade dos diagramas seguintes, para $\Phi(y,z,x) = (h_1(y), h_2(z), \bar{\Phi}(y,z,x))$:

$$\begin{array}{ccc}
 R^{q,0} \leftarrow \pi_{f_2} V_{f_2,0} & & V_{f_1,0} \xrightarrow{\pi_{f_1}} R^{p,0} \\
 \downarrow h_2 & \searrow \Phi/V_{f_2} & \downarrow \Phi/V_{f_1} \\
 R^{q,0} \leftarrow \pi_{g_2} V_{g_2,0} & & V_{g_1,0} \xrightarrow{\pi_{g_1}} R^{p,0}
 \end{array}$$

Isto prova a proposição.

§3. Bi-estabilidade e bi-K-versalidade.

3.1. Seja $(f_1, f_2): R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ uma $(p+q)$ -deformação regular de $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$.

Seja $(\bar{f}_1, \bar{f}_2): R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ uma extensão regular de (f_1, f_2) , isto é, uma r -deformação de (f_1, f_2) .

Então o par de germes de restrições associado a $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$, ou seja, $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}): V_{\bar{f}_1} \cap V_{\bar{f}_2}, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0$

$$(u, y, z, x) \mapsto (u, y, u, z)$$

é um r -desdobramento de (π_{f_1}, π_{f_2}) , no sentido que $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})(u, y, z, x) = (u, \pi_{f_1}(y, z, x), u, \pi_{f_2}(y, z, x))$ e $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})(0, y, z, x) = (0, \pi_{f_1}(y, z, x), 0, \pi_{f_2}(y, z, x))$, uma vez que $(0, y, z, x) \in V_{\bar{f}_1} \cap V_{\bar{f}_2} \iff (y, z, x) \in V_{f_1} \cap V_{f_2}$.

Então podemos enunciar a proposição seguinte:

3.2. Proposição:

" $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é um desdobramento trivial de (π_{f_1}, π_{f_2}) "

se, e somente se, $(\overline{f}_1, \overline{f}_2)$ é bi-K-equivalente a $h^*(\delta_1, \delta_2)$, com $h: R^r \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ um germe de submersão onde $h(u, y, z) = (h_1(u, y), h_2(u, z))$.

Demonstração:

$$(\pi_{\overline{f}_1}, \pi_{\overline{f}_2}) \text{ é trivial} \leftrightarrow (\pi_{\overline{f}_1}, \pi_{\overline{f}_2}) \stackrel{\text{bi-A}}{\sim} (\pi_{c_{f_1}}, \pi_{c_{f_2}}),$$

$$\text{onde } (\pi_{c_{f_1}}, \pi_{c_{f_2}}): R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0 \quad (\pi_{c_{f_1}}, \pi_{c_{f_2}})$$

$$(u, y, z, x) = (u, \pi_{f_1}(y, z, x), u, \pi_{f_2}(y, z, x)), \text{ é o desdobramento}$$

constante de (π_{f_1}, π_{f_2}) , sendo que:

$$(c_{f_1}, c_{f_2}): R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$$

$$(u, y, z, x) \rightarrow (f_1, f_2)(y, z, x)$$

é a extensão constante de (f_1, f_2) .

A bi-A-equivalência entre pares de desdobramentos é definido pelos diagramas comutativos abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} R^r \times R^q, 0 & \xleftarrow{\pi_{\overline{f}_2}} & V_{\overline{f}_2}, 0 & & V_{\overline{f}_1}, 0 \xrightarrow{\pi_{\overline{f}_1}} R^r \times R^p, 0 \\ & & \downarrow \Phi/V_{\overline{f}_2} & & \downarrow \Phi/V_{\overline{f}_1} \\ R^r \times R^q, 0 & \xleftarrow{\pi_{\overline{g}_2}} & V_{\overline{g}_2}, 0 & & V_{\overline{g}_1}, 0 \xrightarrow{\pi_{\overline{g}_1}} R^r \times R^p, 0 \\ & & \downarrow \Phi/V_{\overline{g}_2} & & \downarrow \Phi/V_{\overline{g}_1} \end{array}$$

onde $k_1 = (u, k_{12})$ e $k_2 = (u, k_{22})$ são r-desdobramentos (usuais) de 1_{R^p} e 1_{R^q} , respectivamente, e $\Phi(u, y, z, x) = (u, k_{12}(u, y), k_{22}(u, z),$

$\phi(u, y, z, x))$ um germe de difeomorfismo de $R^r \times R^p \times R^q \times R^n$, na vizinhança de 0.

A proposição anterior, aplicada neste caso, nos conduz à bi-K-equivalência entre os pares $(\overline{f}_1, \overline{f}_2)$ e $\psi^*(c_{f_1}, c_{f_2})$, onde

de $\psi: R^r \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^q, 0$ é o germe de difeomorfismo dado por

$$\psi(u, y, z) = (u, k_{12}(u, y), k_{22}(u, z)).$$

Assim $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é trivial, se e somente se,

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} \psi^*(\pi^* f_1, \pi^* f_2)$, uma vez que se $\pi: R^r \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é o germe usual de projeção $\pi(u, y, z) = (y, z)$, temos que $\pi^* f_i(u, y, z, x) = f_i(\pi(u, y, z), x) = f_i(y, z, x) = c_{f_i}(u, y, z, x)$, $i = 1, 2$.

Continuando, temos $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ trivial se, e somente

se, $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ é bi-K-equivalente a $h^*(f_1, f_2)$, onde

$h = \pi \circ \psi: R^r \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é o germe de submersão $h(u, y, z) = (k_{12}(u, y), k_{22}(u, z))$.

3.3. O par $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ diz-se bi-estável se todo seu r-desdobramento $(F_1, F_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0$

$$(u, x) \rightarrow (u, f_1(u, x), u, f_2(u, x))$$

é trivial.

Seja, então, $(f_1, f_2): R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ uma $(p+q)$ -deformação regular de (f_{01}, f_{02}) . Podemos enunciar a seguinte

Proposição:

"Se (π_{f_1}, π_{f_2}) é bi-estável, então (f_1, f_2) é bi-K-ver-sal".

Demonstração:

Seja $(\bar{g}_1, \bar{g}_2): R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ uma r-deformação do par (f_{01}, f_{02}) . Suponhamos $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)(u, x) = (f_{01}, f_{02})(x) + (g_1, g_2)(u, x)$, onde $(g_1, g_2)(0, x) = (0, 0)$.

Então a $(r+p+q)$ -deformação de (f_{01}, f_{02}) , dada por $(\bar{f}_1, \bar{f}_2): R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$

$$(u, y, z, x) \rightarrow (f_1, f_2)(y, z, x) + (g_1, g_2)(u, x),$$

é uma extensão de (f_1, f_2) e por isso o par

$$(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}): V_{\bar{f}_1} \cap V_{\bar{f}_2}, 0 \in R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0$$

$$(u, y, z, x) \rightarrow (u, y, u, z)$$

é um r -dobramento de $(\pi_{f_1}, \pi_{f_2}): V_{f_1} \cap V_{f_2}, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$.

Da hipótese concluímos que $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é trivial e co

como tal (proposição anterior) temos que $(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} h^*(f_1, f_2)$, onde $h: R^r \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é um germe de submersão. Da definição de bi-K-equivalência podemos escrever:

$$\bar{f}_1 = M_1 \cdot (h^* f_1 \circ \phi) = M_1 \cdot (f_1 \circ \phi) \quad \text{e}$$

$\bar{f}_2 = M_2 \cdot (h^* f_2 \circ \phi) = M_2 \cdot (f_2 \circ \phi)$, para M_1 e M_2 matrizes invertíveis $\phi: R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0$, $\phi(u, y, z, x) = (u, y, \bar{\phi}(u, y, z, x))$.

Se, agora, fazemos $y=0$ e $z=0$, ficamos com $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)(u, 0, 0, x) = (f_1, f_2)(0, 0, x) + (g_1, g_2)(u, x) = (f_{01}, f_{02})(x) + (g_1, g_2)(u, x) = (\bar{g}_1, \bar{g}_2)(u, x)$, e portanto

$$\bar{g}_1(u, x) = M_{01}(u, x) \cdot h_0^* f_1(u, \bar{\phi}_0(u, x)) \quad \text{e}$$

$$\bar{g}_2(u, x) = M_{02}(u, x) \cdot h_0^* f_2(u, \bar{\phi}_0(u, x)),$$

onde $h_0: R^r, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é o germe dado por $h_0(u) = h(u, 0, 0)$.

Desta forma o germe de difeomorfismo $\psi: R^r \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^n, 0$, $\psi = \phi|_{\{y=0, z=0\}}$, nos permite obter

$$\bar{g}_1 = M_{01} \cdot (h_0^* f_1) \circ \psi \quad \text{e} \quad \bar{g}_2 = M_{02} \cdot (h_0^* f_2) \circ \psi,$$

ou seja, a bi-K-equivalência entre os pares $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ e $h_0^*(f_1, f_2)$, o que encerra a proposição.

Observação:

Se na proposição anterior $r = a+b$, então $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} h_0^*(f_1, f_2)$, onde $h_0: R^a \times R^b, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ é tal que $h_0(u, v) = (h_{01}(u), h_{02}(v))$.

Com efeito. A r -bi-estabilidade de Dufour, como pro-

vamos adiante, acarreta a bi-estabilidade do tipo $(s, r-s)$.

Então, da hipótese da bi-estabilidade de (π_{f_1}, π_{f_2}) , concluimos que $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}): V_{\bar{f}_1} \cap V_{\bar{f}_2}, 0 \subset R^a \times R^b \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow$

$\rightarrow R^a \times R^b \times R^p \times R^q, 0$ é trivial como (a, b) -desdobramento do par (π_{f_1}, π_{f_2}) ; (note que $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})(u, v, y, z, x) = (u, y, v, z)$ e

$(0, 0, y, z, x) \mapsto (0, y, 0, z) = (0, \pi_{f_1}(y, z, x), 0, \pi_{f_2}(y, z, x))$).

Assim temos que $(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \stackrel{b1-K}{\sim} h^*(f_1, f_2)$,

$h: R^a \times R^b \times R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$

$(u, v, y, z) \mapsto (h_1(u, y), h_2(v, z))$

Logo, quando fazemos $y=0$ o $z=0$, de acordo com o desenvolvimento anterior, ficamos com $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \stackrel{b1-K}{\sim} h_0^*(f_1, f_2)$, onde

$h_0(u, v) = h(u, v, 0, 0) = (h_1(u, 0), h_2(v, 0)) = (h_{01}(u), h_{02}(v)) =$

$= h_{01} \times h_{02}(u, v)$ é uma mudança do tipo produto.

CAPÍTULO IV

BI-K-EQUIVALÊNCIA E R-ÁLGEBRAS LOCAIS. ISOMORFISMOS COERENTES

§1. Seja E_n a R-álgebra dos germes $(R^n, 0) \rightarrow R$. Seja $\theta, \theta: E_n \rightarrow E_n$, um isomorfismo de álgebra.

Então o germe h definido por intermédio das coordenadas de R^n $h: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n))$, é um germe de difeomorfismo.

Por outro lado o isomorfismo $h^*: E_n \rightarrow E_n$, induzido por h , é tal que $h^*(x_1) = \theta(x_1)$, o que nos permite concluir a igualdade $h^* = \theta$.

§2. Sejam $f, g: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ e consideremos as R-álgebras de dimensão finita

$$Q_k(f) = \frac{E_n}{I_f + m_n^{k+1}} \quad \text{e} \quad Q_k(g) = \frac{E_n}{I_g + m_n^{k+1}}, \quad \text{onde} \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$k \geq 1, \quad I_f = f^* m_p \quad \text{e} \quad I_g = g^* m_p.$$

Na verdade $Q_k(f)$ e $Q_k(g)$ são quocientes da álgebra dos k-jatos, isto é, $J^k(R^n, 0) / J^k(f^* m_p)$ e $J^k(R^n, 0) / J^k(g^* m_p)$, respectivamente.

Seja, agora, $\phi: Q_k(f) \rightarrow Q_k(g)$ um isomorfismo de R-álgebras para o qual supomos existir $\theta: E_n \rightarrow E_n$, um isomorfismo, de tal modo que

$$\phi(\alpha + I_f + m_n^{k+1}) = \theta(\alpha) + I_g + m_n^{k+1}$$

Então podemos escrever:

$$\begin{aligned} \alpha \in I_f + m_n^{k+1} &\leftrightarrow \alpha + I_f + m_n^{k+1} = I_f + m_n^{k+1} \leftrightarrow \phi(\alpha + I_f + m_n^{k+1}) = \\ &= \phi(I_f + m_n^{k+1}) \leftrightarrow \theta(\alpha) + I_g + m_n^{k+1} = I_g + m_n^{k+1} \leftrightarrow \theta(\alpha) \in I_g + m_n^{k+1}. \end{aligned}$$

Como θ é um isomorfismo, temos então que (*)

$$\theta(I_f + m_n^{k+1}) = I_g + m_n^{k+1} \quad \text{e portanto que} \quad \theta(I_f) = I_g \bmod m_n^{k+1}, \quad (**).$$

(*), (**): Ver o final do parágrafo.

Com isso verificamos o seguinte fato:

Proposição:

"Se $\Omega_k(f) \sim \Omega_k(g)$ é um isomorfismo de R -álgebras dado por $\phi(\alpha + I_f + m_n^{k+1}) = \theta(\alpha) + I_g + m_n^{k+1}$, para algum $\theta: E_n \rightarrow E_n$, isomorfismo, então $\theta(I_f) = I_g \bmod m_n^{k+1}$ ".

O diagrama abaixo ilustra a hipótese da proposição.

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\pi} & E_n / I_f + m_n^{k+1} \\ \theta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \phi \\ E_n & \xrightarrow{\pi} & E_n / I_g + m_n^{k+1} \end{array}$$

Observações:

(*) $\alpha \in I \leftrightarrow \theta(\alpha) \in J$ nos permite concluir que $\theta(I) \subset J$ e, considerando que θ é sobrejetora, todo elemento $\beta \in J$ é tal que $\beta = \theta(\alpha)$ com $\alpha \in I$. Logo $\theta(I) = J$.

(**) θ , como isomorfismo, leva o ideal $m_n \subset E_n$, maximal, no próprio m_n . Logo, $\theta(I_f + m_n^{k+1}) = \theta(I_f) + m_n^{k+1}$ e portanto $\theta(I_f) + m_n^{k+1} = I_g + m_n^{k+1}$, de onde $\theta(I_f) = I_g \bmod m_n^{k+1}$.

Por fim, lembramos a validade da recíproca da proposição ao ma.

§3. Tomemos os isomorfismos de R -álgebras, ϕ_1 e ϕ_2 , conforme o parágrafo anterior. Então existem isomorfismos θ_1 e θ_2 , de E_n , os quais comutam os diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \\ \theta_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \phi_1 \\ E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E_n & \xrightarrow{\pi_2} & \frac{E_n}{I_{f_2} + m_n^{k+1}} \\
 \theta_2 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \phi_2 \\
 E_n & \xrightarrow{\pi_2} & \frac{E_n}{I_{g_2} + m_n^{k+1}}
 \end{array}$$

Portanto,

$$\phi_1(\alpha + I_{f_1} + m_n^{k+1}) = \theta_1(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1}$$

e

$$\phi_2(\alpha + I_{f_2} + m_n^{k+1}) = \theta_2(\alpha) + I_{g_2} + m_n^{k+1}$$

Os isomorfismos ϕ_1 e ϕ_2 dizem-se induzidos por θ_1 e θ_2 , respectivamente.

Podemos então estabelecer a seguinte definição.

3.1. Definição:

Consideramos os isomorfismos de R-álgebras ϕ_1 e ϕ_2 ,

$$E_n / I_{f_1} + m_n^{k+1} \xrightarrow{\phi_1} E_n / I_{g_1} + m_n^{k+1} \quad \text{e} \quad E_n / I_{f_2} + m_n^{k+1} \xrightarrow{\phi_2} E_n / I_{g_2} + m_n^{k+1}.$$

Então ϕ_1 e ϕ_2 dizem-se coerentes se forem induzidos por um mesmo $\theta: E_n \rightarrow E_n$, isomorfismo.

Decorre, da definição, a existência de um isomorfismo θ comum, comutando os diagramas abaixo, para o caso de ϕ_1 e ϕ_2 serem coerentes:

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{E_n}{I_{f_2} + m_n^{k+1}} & \xrightarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \\
 \phi_2 \downarrow & & \downarrow \theta & & \downarrow \phi_1 \\
 \frac{E_n}{I_{g_2} + m_n^{k+1}} & \xrightarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}}
 \end{array}$$

3.2. Exemplo:

Sejam $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ dois pares de germe: bi-K-equivalentes.

Então, conforme é conhecido, existe um germe de difeomorfismo $h, h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, para o qual o isomorfismo $h^*: E_n^0$ satisfaz:

$$\begin{cases} h^*(I_{f_1}) = I_{g_1} \\ \text{e} \\ h^*(I_{f_2}) = I_{g_2} \end{cases} \text{ e portanto } h^*(I_{f_i} + m_n^{k+1}) = I_{g_i} + m_n^{k+1},$$

$i = 1, 2$, e todo $k \geq 0$. (ver cap. I, §7, prop. 7.4.).

Logo as R-álgebras $Q_k(f_1), Q_k(g_1)$ e $Q_k(f_2), Q_k(g_2)$ são isomorfas mediante isomorfismos coerentes.

Com efeito. Definimos ϕ_1 e ϕ_2 por:

$$Q_k(f_1) = \frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \xrightarrow{\phi_1} \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}} = Q_k(g_1)$$

$$\alpha + I_{f_1} + m_n^{k+1} \mapsto h^*(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1}$$

e

$$Q_k(f_2) = \frac{E_n}{I_{f_2} + m_n^{k+1}} \xrightarrow{\phi_2} \frac{E_n}{I_{g_2} + m_n^{k+1}} = Q_k(g_2)$$

$$\alpha + I_{f_2} + m_n^{k+1} \mapsto h^*(\alpha) + I_{g_2} + m_n^{k+1}$$

3.3. Observações:

$$(1) \text{ Sejam } \frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \xrightarrow{\phi_1} \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}} \text{ e}$$

$$\frac{E_n}{I_{f_2} + m_n^{k+1}} \xrightarrow{\phi_2} \frac{E_n}{I_{g_2} + m_n^{k+1}} \text{ isomorfismos coerentes.}$$

Então existe $\theta: E_n^0 \rightarrow E_n^0$, isomorfismo, para o qual

$$\phi_1(\alpha + I_{f_1} + m_n^{k+1}) = \theta(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1}$$

e

$$\phi_2(\alpha + I_{f_2} + m_n^{k+1}) = \theta(\alpha) + I_{g_2} + m_n^{k+1}$$

Por outro lado, como vimos no parágrafo 2, se ϕ_1 e ϕ_2 são coerentes, então

$$\theta(I_{f_1}) = I_{g_1} \text{ mod } m_n^{k+1}$$

e

$$\theta(I_{f_2}) = I_{g_2} \text{ mod } m_n^{k+1}$$

Recorrendo ao parágrafo 1, podemos supor $\theta = h^*$, onde h é um germe de difeomorfismo, $h: R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$

Decorre daí que os ideais I_{f_1}, I_{g_1} e I_{f_2}, I_{g_2} são isomorficamente induzidos pelo mesmo germe de difeomorfismo, módulo o ideal m_n^{k+1} , e portanto

$$(f_1, f_2) \sim^{b1-K} (g_1, g_2) \text{ mod } m_n^{k+1}.$$

Este fato será utilizado adiante e merece ser destacado aqui.

Com efeito, acabamos de estabelecer a seguinte

Proposição:

"Se $\frac{I_n}{I_{f_i} + m_n^{k+1}} \xrightarrow{\phi_i} \frac{I_n}{I_{g_i} + m_n^{k+1}}$, $i = 1, 2$, são isomorfismos coerentes então $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são pares bi-K-equivalentes módulo m_n^{k+1} ".

Em termos de jatos podemos reescrever a tese acima segundo " $j^k(f_1, f_2)$ e $j^k(g_1, g_2)$ são pares bi- K^k -equivalentes".

(11) Notemos que se

$$Q(f_1) = \frac{E_n}{I_{f_1}} \overset{\phi_1}{\sim} \frac{E_n}{I_{g_1}} = Q(g_1)$$

e

$$Q(f_2) = \frac{E_n}{I_{f_2}} \overset{\phi_2}{\sim} \frac{E_n}{I_{g_2}} = Q(g_2)$$

são isomorfismos coerentes, então $(f_1, f_2) \overset{\text{bi-K}}{\sim} (g_1, g_2)$.

Basta observar que, como em (i), anterior, temos $h^*(I_{f_i}) = I_{g_i}$, $i=1,2$, para algum germe de difeomorfismo $h: R^n, 0 \xrightarrow{\text{bi-K}} R^q, 0$ (ver, também, §2). Logo $(f_1, f_2) \overset{\text{bi-K}}{\sim} (g_1, g_2)$.

Com isso podemos completar a proposição 7.4. do capítulo I, "Bi-K-Equivalência de Pares de Germes", enunciando:

Proposição:

" $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ são bi-K-equivalentes $\iff I_{f_1}, I_{g_1}$ e I_{f_2}, I_{g_2} são isomorficamente induzidos pelo mesmo germe de difeomorfismo $\iff$ as R -álgebras $Q(f_1), Q(g_1)$ e $Q(f_2), Q(g_2)$ são isomorfas por isomorfismos coerentes.

§4. Vejamos, a seguir, no intuito de melhor esclarecer a coerência de isomorfismos, uma condição suficiente para a coerência de isomorfismos induzidos.

Sejam $\phi_1: Q_k(f_1) \rightarrow Q_k(g_1)$ e $\phi_2: Q_k(f_2) \rightarrow Q_k(g_2)$ isomorfismos induzidos por θ_1 e θ_2 , respectivamente.

Então, conforme a definição, comutam os diagramas

$$\begin{array}{ccccc} \frac{E_n}{I_{f_2} + m_n^{k+1}} & \xleftarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \\ & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 \\ \frac{E_n}{I_{g_2} + m_n^{k+1}} & \xleftarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}} \end{array}$$

e podemos enunciar:

Proposição:

"Os isomorfismos $Q_k(g_1) \xrightarrow{\phi_1} Q_k(g_1)$ e $Q_k(g_2) \xrightarrow{\phi_2} Q_k(g_2)$ são coerentes se $\forall \alpha \in E_n$, $\theta_1(\alpha) + I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1} = \theta_2(\alpha) + I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1}$."

Demonstração:

Seja $\theta: E_n \rightarrow E_n$ um isomorfismo definido de tal modo que $\theta(\alpha) + I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1} = \theta_1(\alpha) + I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1} = \theta_2(\alpha) + I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1}$.

Então podemos escrever para $\alpha \in E_n$: $(\bar{\pi}_1 \circ \theta)(\alpha) = \bar{\pi}_1(\theta(\alpha)) = \theta(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1} \quad (*)$
 $= \theta_1(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1} = \phi_1(\alpha + I_{f_1} + m_n^{k+1}) =$
 $= (\phi_1 \circ \pi_1)(\alpha).$

Da mesma forma obtemos $(\bar{\pi}_2 \circ \theta)(\alpha) = (\phi_2 \circ \pi_2)(\alpha)$, $\forall \alpha \in E_n$, e assim fica estabelecida a comutatividade abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{E_n}{I_{f_2} + m_n^{k+1}} & \xleftarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \\ \downarrow \phi_2 & \circlearrowleft & \downarrow 0 & \circlearrowright & \downarrow \phi_1 \\ \frac{E_n}{I_{g_2} + m_n^{k+1}} & \xleftarrow{\bar{\pi}_2} & E_n & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}} \end{array}$$

(*) O isomorfismo $\theta: E_n \rightarrow E_n$ é tal que, módulo $[I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1}]$, os elementos $\theta(\alpha)$, $\theta_1(\alpha)$ e $\theta_2(\alpha)$ coincidem, para todo $\alpha \in E_n$.

Logo, com maior razão, módulo $I_{g_1} + m_n^{k+1}$, os elementos

coincidem ($i=1,2$).

Uma observação a ser feita, aqui, é a seguinte: se ϕ_1 e ϕ_2 são coerentes, existe $\theta: E_n \rightarrow E_n$, para o qual se pode escrever:

$$\theta_1(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1} = \theta(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1}$$

e

$$\theta_2(\alpha) + I_{g_2} + m_n^{k+1} = \theta(\alpha) + I_{g_2} + m_n^{k+1}.$$

Logo, $\theta_1 \equiv \theta_2$ módulo $I_{g_1} + I_{g_2} + m_n^{k+1}$. E isto não nos autoriza a deduzir que θ_1 e θ_2 , módulo $I_{g_1} \cap I_{g_2} + m_n^{k+1}$, coincidem.

§5. Podemos então, neste parágrafo, estabelecer o dual, para o caso de pares, do Teorema 2.1. (§2. pág. 230) de John N. Mather em "Stability of C^∞ - Mappings, IV", [10], dado por:

Teorema:

"Sejam $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ e $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$. Então $j^k(f_1, f_2)$ e $j^k(g_1, g_2)$ pertencem à mesma bi- K^k -órbita^(*) se, e somente se, as R -álgebras $\mathcal{Q}_k(f_1), \mathcal{Q}_k(g_1)$ e $\mathcal{Q}_k(f_2), \mathcal{Q}_k(g_2)$ são isomorfas segundo isomorfismos coerentes".

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos $j^k(f_1, f_2) \sim^{bi-K^k} j^k(g_1, g_2)$. Então existe um germe de difeomorfismo $H \in KK$ para o qual $j^k(g_1, g_2) = j^k H * j^k(f_1, f_2) = j^k(H.(f_1, f_2))$.

Logo podemos escrever que $(g_1, g_2) = H.(f_1, f_2) \bmod m_n^{k+1}$ e portanto que

$$(f_1, f_2) \sim^{bi-K} (g_1, g_2) \bmod m_n^{k+1}$$

Desta forma existe $h: R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, germe de difeomorfismo, para o qual

$$h^*(I_{f_1}) = I_{g_1} \bmod m_n^{k+1}$$

e

$$h^*(I_{f_2}) = I_{g_2} \bmod m_n^{k+1}$$

Assim os isomorfismos induzidos por $h^*: E_n \rightarrow E_n$,

$$\frac{E_n}{I_{f_1} + m_n^{k+1}} \xrightarrow{\phi_1} \frac{E_n}{I_{g_1} + m_n^{k+1}}$$

$\alpha + I_{f_1} + m_n^{k+1} \rightarrow h^*(\alpha) + I_{g_1} + m_n^{k+1}$, $i=1,2$, são isomorfismos

coerentes.

(+) Suponhamos os isomorfismos coerentes ϕ_1 e ϕ_2 , entre os pares de R-álgebras dados. Então (observação (1), §3.) temos que $(f_1, f_2) \sim^{bi-K} (g_1, g_2) \bmod m_n^{k+1}$, isto é, $j^k(f_1, f_2) \sim^{bi-K^k} j^k(g_1, g_2)$.

Observações:

(*) A ação do grupo KK sobre $E_{n,p+q}$ induz uma ação de $(KK)^k$, isto é, do grupo dos k-jatos das bi-K-equivalências, sobre $j^k(n, p+q)$.

(**) O teorema anterior, na linguagem da bi-determinação finita, pode ser dado mediante um enunciado mais elegante:

Teorema:

"Sejam $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in E_{n,p+q}$ pares bi-K-determinados de ordem k. Então $(f_1, f_2) \sim^{bi-K} (g_1, g_2) \iff Q_k(f_1), Q_k(g_1)$ e $Q_k(f_2), Q_k(g_2)$ são R-álgebras isomorfas segundo isomorfismos coerentes".

Demonstra-se o teorema, evidentemente, de modo análogo à versão anterior:

(+) $(f_1, f_2), (g_1, g_2): bi-K\text{-equivalentes} \Rightarrow \exists h: R^n, 0 \rightarrow$ germe de difeomorfismo, tal que $h^*(I_{f_1}) = I_{g_1}$, $i=1,2 \Rightarrow Q_k(f_1) \sim Q_k(g_1)$, $i=1,2$, segundo isomorfismos ϕ_1 e ϕ_2 coerentes.

(+) $Q_k(f_1) \sim^{phi_1} Q_k(g_1)$, $i=1,2$, ϕ_1 e ϕ_2 coerentes, então (obs. 1, §3.) $(f_1, f_2), (g_1, g_2)$ são bi-K-equivalentes módulo m_n^{k+1} .

Assim, da hipótese da bi-K-determinação finita (de ordem k) dos pares (f_1, f_2) e (g_1, g_2) , temos:

$$(f_1, f_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} j^k(f_1, f_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} j^k(g_1, g_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} (g_1, g_2)$$

Note que, então, fica caracterizada a bi-K-equivalência de pares finitamente bi-K-determinados, em função das R-álgebras locais associadas às componentes dos pares de germes dados.

(***) A respeito desta caracterização, notemos que a proposição vista no §4, a qual fornecia uma condição apenas suficiente para a coerência de ϕ_1 e ϕ_2 , isomorfismos induzidos por θ_1 e θ_2 , pode ser, então, revista em função do próprio enunciado da proposição anterior.

Ficaria, portanto, caracterizada aquela noção para pares finitamente bi-K-determinados.

Com efeito:

"Sejam $(f_1, f_2), (g_1, g_2): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ pares de germes bi-K-determinados de ordem k . Então uma condição necessária e suficiente para que os isomorfismos induzidos

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1: Q_k(f_1) \rightarrow Q_k(g_1) \\ \alpha \mapsto \theta_1(\alpha) + I \\ e \\ \phi_2: Q_k(f_2) \rightarrow Q_k(g_2) \\ \alpha \mapsto \theta_2(\alpha) + J \end{array} \right.$$

sejam coerentes, isto é, para que exista um isomorfismo de anéis $\theta: E_n \rightarrow E_n$, comum, comutando o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} Q_k(f_2) & \xrightarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & Q_k(f_1) \\ \phi_2 \downarrow & & \downarrow \theta & & \downarrow \phi_1 \\ Q_k(g_2) & \xrightarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & Q_k(g_1) \end{array}$$

é que os pares (f_1, f_2) e (g_1, g_2) sejam bi-K-equivalentes".

6. Dado o par $(f_{01}, f_{02}): R^S, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$, dizemos

que $(F_1, F_2): R^r \times R^s, 0 \rightarrow R^r \times R^{t_1} \times R^r \times R^{t_2}, 0$ é um r -desdobramento de (f_{01}, f_{02}) se $(F_1, F_2)(u, x) = (u, f_1(u, x), u, f_2(u, x))$, com $f_1(0, x) = f_{01}(x)$ e $f_2(0, x) = f_{02}(x)$.

Então podemos enunciar.

Proposição:

"Sejam $(F_1, F_2), (G_1, G_2): R^r \times R^s, 0 \rightarrow R^r \times R^{t_1} \times R^r \times R^{t_2}, 0$,

r -desdobramentos dos pares $(f_{01}, f_{02}), (g_{01}, g_{02}): R^s, 0 \rightarrow R^{t_1} \times R^{t_2}, 0$, respectivamente. Suponhamos os isomorfismos coerentes $Q_k(F_i) \xrightarrow{\phi_i} Q_k(f_i)$, $i=1,2$. Então as R -álgebras associadas aos germes desdobrados, isto é, $Q_k(f_{0i})$ e $Q_k(g_{0i})$, $i=1,2$, são, também, isomorfas por isomorfismos coerentes".

Demonstração:

Com efeito, se ϕ_1 e ϕ_2 são isomorfismos coerentes, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} Q_k(F_2) & \xleftarrow{\pi_2} & E_{u,x} & \xrightarrow{\pi_1} & Q_k(F_1) \\ \phi_2 \downarrow & & \downarrow \theta & & \downarrow \phi_1 \\ Q_k(G_2) & \xleftarrow{\pi_2} & E_{u,x} & \xrightarrow{\pi_1} & Q_k(G_1) \end{array}$$

Por outro lado, para cada i , temos $Q_k(F_i) \sim Q_k(f_{0i})$ (ver [3], página 43, teorema 3.2).

Desta maneira podemos estabelecer o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E_{u,x} & \xrightarrow{\pi} & \frac{E_{u,x}}{I_{F_i}^{m^{k+1}} + m_{u,x}^{k+1}} & \xrightarrow{\delta_1} & \frac{E_x}{I_{f_{01}}^{m^{k+1}} + m_x^{k+1}} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \psi_1 = \delta_1 \circ \phi_1 \circ \delta_1^{-1} \\ E_{u,x} & \xrightarrow{\pi} & \frac{E_{u,x}}{I_{G_i}^{m^{k+1}} + m_{u,x}^{k+1}} & \xrightarrow{\delta_1} & \frac{E_x}{I_{g_{01}}^{m^{k+1}} + m_x^{k+1}} \end{array}$$

CAPÍTULO V

BI-A-EQUIVALÊNCIA E BI-K-EQUIVALÊNCIA DE PARES BI-ESTÁVEIS

Este capítulo, a partir dos resultados estabelecidos no de número 3, encerra o importante teorema segundo o qual po de-se obter a bi-A-equivalência entre pares de germes mediante a relação de bi-K-equivalência, desde que sob a hipótese da bi-estabilidade.

§1. Teorema: "Sejam $(f_{01}, f_{02}), (g_{01}, g_{02}) : R^{n,0} \rightarrow R^p \times R^q, 0$ pares de germes bi-estáveis. Então $(f_{01}, f_{02}) \sim_{bi-A} (g_{01}, g_{02})$ se, e somente se, $(f_{01}, f_{02}) \sim_{bi-K} (g_{01}, g_{02})$ ".

Demonstração:

A partir da bi-A-equivalência temos, trivialmente, a bi-K-equivalência entre os pares.

Suponhamos, então, (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) bi-K-equivalentes.

Tomemos as $(p+q)$ -deformações regulares $(f_1, f_2), (g_1, g_2) : R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, definidas anteriormente, para as quais temos as identificações $(\pi_{f_1}, \pi_{f_2}) \equiv (f_{01}, f_{02})$ e $(\pi_{g_1}, \pi_{g_2}) \equiv (g_{01}, g_{02})$.

Da bi-estabilidade da hipótese concluímos que (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são bi-K-versais.

Tomemos a $(p+q)$ -deformação bi-K-versal $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ de (g_{01}, g_{02}) , definida por $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)(y, z, x) = (M_1(x) \cdot f_1(y, z, \phi(x)), M_2(x) \cdot f_2(y, z, \phi(x)))$, onde M_1, M_2 e ϕ são, respectivamente, matrizes inversíveis e um germe de difeomorfismo $R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, cuja existência é garantida pela bi-K-equivalência entre (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) , mediante a igualdade $(g_{01}, g_{02}) = (M_1 \cdot f_{01} \circ \phi, M_2 \cdot f_{02} \circ \phi)$.

Da observação do item 3.3., do Capítulo 3, concluímos

que $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \stackrel{\text{bi-K}}{\sim} h^*(g_1, g_2)$, onde $h = h_1 \times h_2: R^p \times R^q, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$.

Do fato de $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ e (g_1, g_2) serem deformações bi-K-versais do mesmo par, concluímos que h é um germe de difeomorfismo, isto é, $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ e (g_1, g_2) são bi-K-isomorfos via uma mudança do tipo produto. Com isso temos que $(\pi_{\bar{g}_1}, \pi_{\bar{g}_2}) \stackrel{\text{bi-A}}{\sim} (\pi_{g_1}, \pi_{g_2})$, conforme a proposição 2.3. do capítulo III.

Por outro lado, consideremos o germe de difeomorfismo $\Phi = 1_{R^p} \times 1_{R^q} \times \phi: R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q \times R^n, 0$. Observemos que $\Phi: V_{\bar{g}_1} \rightarrow V_{f_1}$, $i=1,2$.

De fato: $\forall (y, z, x) \in V_{\bar{g}_1} \Rightarrow g_1(y, z, x) = 0$ e portanto $M_1(x) \cdot f_1(y, z, \phi(x)) = 0$, de onde $f_1(\Phi(y, z, x)) = 0$, isto é, $\Phi(y, z, x) \in V_{f_1}$, $i=1,2$.

Com isso $(\pi_{\bar{g}_1}, \pi_{\bar{g}_2}) \stackrel{\text{bi-A}}{\sim} (\pi_{f_1}, \pi_{f_2})$, conforme se pode verificar e, desta forma, podemos concluir a bi-A-equivalência entre os pares (π_{f_1}, π_{f_2}) e (π_{g_1}, π_{g_2}) .

Finalmente, via a identificação natural efetuada, chegamos à bi-A-equivalência entre os pares (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) .

Observação:

O par $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ construído na demonstração do teorema, $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)(y, z, x) = (M_1(x) \cdot f_1(y, z, \phi(x)), M_2(x) \cdot f_2(y, z, \phi(x)))$, é bi-K-versal em virtude do seguinte fato.

Podemos escrever $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ segundo a forma $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)(y, z, x) = M(x) \cdot [(f_1, f_2) \circ \Phi](y, z, x)$, onde M é a matriz inversível com entradas em E_n , $(p+q) \times (p+q)$, dada por

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & M_2 \end{pmatrix}.$$

Ora, assim obtemos para $w = (y, z): \left(\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial w_1} (0, 0, x), \right.$

$$\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial w_1}(0,0,x) = M(x) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}(0,0,\phi(x)), \frac{\partial f_2}{\partial w_1}(0,0,\phi(x)) \right), \text{ isto é,}$$

$$(\dot{g}_1, \dot{g}_2)_1(x) = M(x) \cdot (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1(\phi(x)), \quad i=1, \dots, p+q.$$

Então, de

$$R \cdot \{(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1, \dots, (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_{p+q}\} + T(f_{01}, f_{02}) = E_{n,p+q}, \text{ te-}$$

$$\text{mos } R \cdot \{(\dot{g}_1, \dot{g}_2)_1, \dots, (\dot{g}_1, \dot{g}_2)_{p+q}\} + T(g_{01}, g_{02}) = E_{n,p+q}, \text{ con-}$$

siderando que M e ϕ nos permitem definir o automorfismo $H: E_{n,p+q} \rightarrow E_{n,p+q}$ dado por $H(\alpha) = M(\alpha \circ \phi)$, o qual transforma o espaço $T(f_{01}, f_{02})$ em $T(g_{01}, g_{02})$ e, ainda, satisfaz $H((\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1) = M \cdot [(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1 \circ \phi] = (\dot{g}_1, \dot{g}_2)_1$.

§2. Fazemos, em seguida, algumas considerações acerca da bi-estabilidade de pares de germes de restrições.

Consideremos a bi-estabilidade por t -desdobramentos definidos por Dufour (ver definição no capítulo 3) segundo a qual $(F_1, F_2): R^t \times R^n, 0 \rightarrow R^t \times R^p \times R^t \times R^q, 0$, $(F_1, F_2)(w, x) = (w, f_1(w, x), w, f_2(w, x))$, é trivial se é bi- A -equivalente ao par $(C_1, C_2)(w, x) = (w, f_{01}(x), w, f_{02}(x))$, o t -desdobramento constante de (f_{01}, f_{02}) .

Podemos provar, então, que a bi-estabilidade acima acarreta a (s, r) -bi-estabilidade, isto é, torna o par $(F_1', F_2')(u, v, x) = (u, f_1(u, v, x), v, f_2(u, v, x))$ bi- A -equivalente ao par $(C_1', C_2')(u, v, x) = (u, f_{01}(x), v, f_{02}(x))$, onde consideramos $w = (u, v)$ quando f_1 e f_2 não dependem de $\underline{v}$ e $\underline{u}$, respectivamente.

Com efeito. Inicialmente observemos que a (s, r) -bi-estabilidade, neste caso, nos leva a um tipo de (s, r) -desdobramento mais particular do que à primeira vista poderia parecer.

Mais precisamente observemos que se (F_1', F_2') é trivial, vale a comutatividade abaixo, onde H, K_1, K_2 são germes de desdobramentos usuais de $1_{R^n}, 1_{R^p}$ e 1_{R^q} , respectivamente, a $s+r$,

s e r parâmetros.

$$\begin{array}{ccccc}
 R^r \times R^q, 0 \leftarrow & \overset{F'_2}{\curvearrowright} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \overset{F'_1}{\rightarrow} & R^s \times R^p, 0 \\
 \uparrow K_2 & & \uparrow H & & \uparrow K_1 \\
 R^r \times R^q, 0 \leftarrow & \underset{C'_2}{\curvearrowright} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \underset{C'_1}{\rightarrow} & R^s \times R^p, 0
 \end{array}$$

Assim, mediante aquela restrição, a (s, r) -bi-estabilidade nos leva a estudar pares de desdobramentos (F_1, F_2) , onde F_1 e F_2 são desdobramentos usuais de f_{01} e f_{02} , a s e r parâmetros, respectivamente.

(Desta forma a bi-equivalência entre os pares (F_1, F_2) e (G_1, G_2) de (s, r) -desdobramentos pode ser dada mediante a comutatividade seguinte:

$$\begin{array}{ccccc}
 R^r \times R^q, 0 \leftarrow & \overset{F'_2}{\curvearrowright} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \overset{F'_1}{\rightarrow} & R^s \times R^p, 0 \\
 \downarrow K_2 & & \downarrow H & & \downarrow K_1 \\
 R^r \times R^q, 0 \leftarrow & \underset{G'_2}{\curvearrowright} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \underset{G'_1}{\rightarrow} & R^s \times R^p, 0
 \end{array}$$

onde,

$$\begin{cases} G'_1 \circ (H/v=0) = K_1 \circ (F'_1/v=0) \\ s \\ G'_2 \circ (H/u=0) = K_2 \circ (F'_2/u=0) \end{cases}$$

Quanto à prova de que a $t=s+r$ -bi-estabilidade acarreta a particular (s, r) -bi-estabilidade, partimos do diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 R^s \times R^r \times R^q, 0 \leftarrow & \overset{F_2}{\curvearrowright} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \overset{F_1}{\rightarrow} & R^s \times R^r \times R^p, 0 \\
 \downarrow K_2 & & \downarrow H & & \downarrow K_1 \\
 R^s \times R^r \times R^q, 0 \leftarrow & \underset{C_2}{\curvearrowright} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \underset{C_1}{\rightarrow} & R^s \times R^r \times R^p, 0
 \end{array}$$

e provamos que suprimindo os espaços de parâmetros R^s , da esquer

da, e R^r , da direita, o diagrama remanescente ainda comuta. Em outras palavras o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccccc}
 R^r \times R^q, 0 & \xleftarrow{F'_2} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \xrightarrow{F'_1} & R^s \times R^p, 0 \\
 K'_2 \downarrow & & \downarrow H' & & \downarrow K'_1 \\
 R^r \times R^q, 0 & \xleftarrow{C'_2} & R^s \times R^r \times R^n, 0 & \xrightarrow{C'_1} & R^s \times R^p, 0,
 \end{array}$$

deve ser tal que $C'_1 \circ (H'/v=0) = K'_1 \circ (F'_1/v=0)$ e $C'_2 \circ (H'/u=0) = K'_2 \circ (F'_2/u=0)$, onde

$$F'_1(u, v, x) = (u, f_1(u, v, x)), \quad F'_2(u, v, x) = (v, f_2(u, v, x)),$$

$$C'_1(u, v, x) = (u, f_{01}(x)) \text{ e } C'_2(u, v, x) = (v, f_{02}(x)).$$

Ora, da hipótese da comutatividade do primeiro diagrama temos:

a) Para $v=0$

$$\begin{array}{ccc}
 R^s \times \{0\} \times R^n, 0 & \xrightarrow{F'_1/v=0} & R^s \times \{0\} \times R^p, 0 \\
 (u, 0, x) & & (u, 0, f_1(u, 0, x)) \\
 H/v=0 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow K'_1/v=0 \\
 R^s \times \{0\} \times R^n, 0 & \xrightarrow{C'_1/v=0} & R^s \times \{0\} \times R^p, 0 \\
 (u, 0, h(u, 0, x)) & & (u, 0, f_{01}(h(u, 0, x)))
 \end{array}$$

Então $C'_1 \circ (H/v=0) = K'_1 \circ (F'_1/v=0)$ e podemos escrever:

$$(K'_1 \circ F'_1)(u, 0, x) = K'_1(u, f_1(u, 0, x))$$

Se definirmos $K'_1: R^s \times R^p, 0 \rightarrow R^s \times R^p, 0$ tal que $K'_1(u, x) = K_1(u, 0, x)$, ficamos com $(K'_1 \circ F'_1)(u, 0, x) = K_1(u, 0, f_1(u, 0, x)) = (K_1 \circ F_1)(u, 0, x)$.

Por outro lado, $(C'_1 \circ H')(u, 0, x) = C'_1(H'(u, 0, x)) = C'_1(u, 0, h(u, 0, x)) = (u, f_{01}(h(u, 0, x))) = (u, 0, f_{01}(h(u, 0, x))) = C_1(u, 0, h(u, 0, x)) = (C_1 \circ H)(u, 0, x)$, onde o germe de difeomorfismo H' é o próprio germe H .

b) Para $u=0$, idem.

Com isso fica estabelecida a comutatividade procurada.

Este fato se aplica, então, aos pares de restrições

$$(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}): V_{\bar{f}_1} \cap V_{\bar{f}_2}, 0 \subset R^r \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0.$$

No caso, fazendo $r = a + b$ e tomando o par de germes de restrições

$$(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}): V_{\bar{f}_1} \cap V_{\bar{f}_2}, 0 \subset R^a \times R^b \times R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^a \times R^p \times R^b \times R^q, 0,$$

$(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})(u, v, y, z, x) = (u, y, v, z)$, concluímos a trivialização des

te par a partir do primeiro. Note que o par $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$, como

(a, b) -resdobramento de (π_{f_1}, π_{f_2}) , é da particular forma solicitada no início do parágrafo.

CAPÍTULO VI

CLASSIFICAÇÃO DE PARES ESTÁVEIS POR R-ÁLGEBRAS

Neste capítulo estabelecemos o teorema de classificação dos pares de germes bi-estáveis, segundo a relação de bi-A-equivalência, por intermédio das R-álgebras locais associadas aos pares dados conforme o capítulo 4.

§1. Para atingir o teorema, iniciamos com o seguinte resultado:

Lema:

"Seja $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ um par bi-estável. Então (f_{01}, f_{02}) tem bi-K-codimensão menor ou igual a $p+q$ ".

Demonstração:

O par (f_{01}, f_{02}) tem por $(p+q)$ -deformação regular o par $(f_1, f_2): R^p \times R^q \times R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ dado por $(f_1, f_2)(y, z, x) = (-y + f_{01}(x), -z + f_{02}(x))$.

Conforme visto anteriormente, o par $(\pi_{f_1}, \pi_{f_2}): V_{f_1} \cap V_{f_2}, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$, $(\pi_{f_1}, \pi_{f_2})(y, z, x) = (y, z)$, se identifica naturalmente com (f_{01}, f_{02}) o qual supomos bi-estável.

Então, conforme a proposição 3.3. do capítulo 3, concluímos a bi-K-versalidade do par (f_1, f_2) . Desta forma o par (f_{01}, f_{02}) tem, necessariamente, bi-K-codimensão menor ou igual ao número de parâmetros com o qual é deformado, isto é, bi-K-cod. $(f_{01}, f_{02}) \leq p+q$. E o lema fica demonstrado.

§2. Conforme vimos no estudo do bi-K-espaço tangente, capítulo 1 - §13, uma condição necessária e suficiente para que (f_{01}, f_{02}) tenha bi-K-codimensão finita é que exista $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, tal que $M_n^k \cdot E_{n, p+q} \subseteq T(f_{01}, f_{02})$.

Vale observar que, no caso, é sempre possível tomar o inteiro $k = \text{bi-K-codimensão} = c$ (finita) e assegurar a inclusão referida.

Desta forma a bi-estabilidade do par (f_{01}, f_{02}) nos conduz à desigualdade $p+q \geq c = \text{bi-K-codim}(f_{01}, f_{02})$ e, portanto, à inclusão $M_n^{p+q} \subset M_n^c$, de onde é possível concluir que $M_n^{p+q} \cdot E_{n,p+q}^c \subset C^T(f_{01}, f_{02})$.

Assim, do capítulo 2 - §2, que trata de bi-K-determinação finita, podemos garantir que (f_{01}, f_{02}) é $(p+q+1)$ -bi-K-determinado.

E fica demonstrado o resultado seguinte:

Lema:

"Seja $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ um par bi-estável. Então (f_{01}, f_{02}) é $(p+q+1)$ -bi-K-determinado".

§3. Pressupomos, agora, o estudo feito no capítulo 4 acerca das R-álgebras associadas a um par de germes e a consequente relação de isomorfismos coerentes, para estabelecer o teorema de classificação:

Teorema:

"Sejam $(f_{01}, f_{02}), (g_{01}, g_{02}): R^n, 0 \rightarrow R^p \times R^q, 0$ pares de germes bi-estáveis.

Então (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) são bi-A-equivalentes se, e somente se, as R-álgebras $Q_k(f_{01})$ e $Q_k(g_{01})$, $Q_k(f_{02})$ e $Q_k(g_{02})$, $k = p+q+1$, são isomorfas segundo isomorfismos coerentes".

Demonstração:

($\Rightarrow$) A bi-A-equivalência acarreta, em particular, a bi-K-equivalência. Logo, do §3 do capítulo dos isomorfismos coerentes, temos que $Q_k(f_{0i}) \xrightarrow{\phi_i} Q_k(g_{0i})$, $i=1,2$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são isomorfismos coerentes (para todo $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$).

(*) Suponhamos $Q_k(f_{01}) \overset{\phi_1}{\sim} Q_k(g_{01})$, $i=1,2$, $k=p+q+1$, ϕ_1 e ϕ_2 isomorfismos coerentes.

Dos lemas anteriores, temos que (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) são $(p+q+1)$ -bi-K-determinados.

Por outro lado, de acordo com o teorema - §5, do capítulo IV dos isomorfismos coerentes, concluímos que (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) são bi-K-equivalentes. Como, por hipótese, são bi- Λ -estáveis temos que (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) são bi- Λ -equivalentes, conforme o teorema principal do capítulo anterior.

§4. Exemplos

4.1. Do parágrafo 2, conforme o lema demonstrado, os pares bi-estáveis são em particular pares de bi-K-codimensão finita.

Por outro lado sabemos que se $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in E_{n,p+q}$ são bi-K-determinados de ordem k (k finito), podemos garantir que $(f_1, f_2) \overset{\text{bi-K}}{\sim} (g_1, g_2) \iff Q_k(f_1) \overset{\phi_1}{\sim} Q_k(g_1)$, ϕ_1 e ϕ_2 isomorfismos coerentes.

Logo o estudo da bi- Λ -equivalência entre dois pares bi-estáveis pode ser realizado pela condição que se apresenta mais facilmente computável na prática, isto é, pela bi-K-equivalência.

4.2. Os pares $(f_{01}, f_{02}): R^n, 0 \rightarrow R \times R, 0$ descritos pelos modelos abaixo,

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, y),$$

$$(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x, x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2),$$

$$(x, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x, x^2 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2) \text{ e}$$

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2),$$

constituem alguns exemplos de modelos bi-estáveis, (ver [2], pág. 169).

Dos modelos acima descritos temos, por exemplo, que são bi-K-equivalentes os pares

$$(f_{01}, f_{02})(x, y) = (x, x+y^2) \text{ e } (g_{01}, g_{02})(x, y) = (y, y+x^2).$$

Basta observar que se trata de pares bi-K-equivalentes, via o esquema comutativo (ver cap. IV, §3)

$$\begin{array}{ccccc} \frac{E_2}{\langle x+y^2 \rangle} & \xleftarrow{\pi_2} & E_2 & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_2}{\langle x \rangle} \\ \downarrow \phi_2 & \curvearrowright & \downarrow \theta & \curvearrowright & \downarrow \phi_1 \\ \frac{E_2}{\langle y+x^2 \rangle} & \xleftarrow{\bar{\pi}_2} & E_2 & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & \frac{E_2}{\langle y \rangle} \end{array}$$

onde $\theta = h^*$, $h: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ o germe do difeomorfismo definido por $h(x, y) = (y, x)$ e $\phi_i(\alpha + I_{f_{0i}}) = h^*(\alpha) + I_{g_{0i}}$, $i=1, 2$.

4.3. Sejam $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathcal{E}_{n, p+q}$ pares bi-K-determinados de ordem k ($k < \infty$). Então se $Q_k(f_1) \stackrel{\phi_1}{\sim} Q_k(g_1)$, $i=1, 2$, são isomorfos por isomorfismos ϕ_1 e ϕ_2 coerentes, temos que

$$a) Q_k(f_1, f_2) \sim Q_k(g_1, g_2)$$

$$b) Q_k(f_1) \sim Q_k(g_2)$$

$$c) Q_k(f_2) \sim Q_k(g_1)$$

De fato. Por hipótese podemos escrever o seguinte esquema comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{E_n}{I_{f_2} + M_n^{k+1}} & \xleftarrow{\pi_2} & E_n & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{E_n}{I_{f_1} + M_n^{k+1}} \\ \downarrow \phi_2 & \curvearrowright & \downarrow \theta & \curvearrowright & \downarrow \phi_1 \\ \frac{E_n}{I_{g_2} + M_n^{k+1}} & \xleftarrow{\bar{\pi}_2} & E_n & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & \frac{E_n}{I_{g_1} + M_n^{k+1}} \end{array}$$

Logo os itens b) e c) são imediatos.

Quanto ao item a), observemos que por hipótese os pares (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são bi-K-equivalentes. Logo, em particular, são K-equivalentes e portanto (porque são também k-K-determinados) são tais que $Q_k(f_1, f_2) \sim Q_k(g_1, g_2)$, de conformidade com o caso usual.

Este fato pode facilitar o estudo da bi-A-equivalência.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BETTINI, L.J. - *Deformações versais e classificação de aplicações estáveis*. Dissertação de Mestrado, ICMSC - USP (1977).
- [2] DUFOUR, J.-P. - *Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^{ème} série, 10 (1977), 153-174.
- [3] DUFOUR, J.-P. - *Stabilité simultanée de deux fonctions*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, (1979), 263-282.
- [4] DUFOUR, J.-P. - *Bi-stabilité des fonctions*. C.R.Acad. Sci. Paris, 285 (1977), 445-448.
- [5] GIBSON, C.G. - *Singular points of smooth mappings*. Research Notes in Mathematics, vol. 25, Pitman, (1979).
- [6] GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN, V. - *Stable mappings and their singularities*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, (1973).
- [7] MARINET, J. - *Singularités des fonctions e applications différentiables*. Monografias de Matemática de PUC/RJ, n^o 1, (1977).
- [8] MARINET, J. - *Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables*. Lectures Notes in Mathematics, n^o 535, Springer, 1-44, (1976).
- [9] MATHER, J.N. - *Stability of C^∞ -mappings, III: Finitely determined map germs*. Publ. Math. I.H.E.S., 35, 127-156, (1968).
- [10] MATHER, J.N. - *Stability of C^∞ -mappings, IV: Classification of stable germs by R-algebras*. Publ. Math. I.H.E.S., 37, 223-248, (1969).
- [11] PEDROSO, H.A. - *Bi-equivalência de contacto*. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, (1980).
- [12] SILVA, E.A. - *Bi-K-equivalência de pares de germes*. Métrica: Estudos e Pesquisas em Matemática - UNESP, vol. 2, n^o 11, (1980).
- [13] SOTOMAYOR, J. - *Lições de equações diferenciais ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

[14] TADINI, W.M. - *Germes finitamente determinados e símbolo de Boardman*. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, (1976).

[15] WAN, Y.-H. - *Generic deformations of varieties*. Transactions of the American Math. Society, vol. 259, nº 1, (1980).