743

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

BORDISMO DE FIBRADOS E INVOLUÇÕES

Pedro Luiz Queiroz Pergher

'IVERSIDADE DE SÃO PAULO

) PAULO

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

BORDISMO DE FIBRADOS E INVOLUÇÕES

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Orientador: Prof. Dr. Janey Antonio Daccach

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS - SP
1983

À minha esposa, Maria Elizabeth e a meus filhos, Pedrinho e Fabricio, que com paciência e abnegação, souberam compreender a exclusão de uma grande quantidade de momentos de entretenimento e lazer.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Janey Antonio Daccach, pela orientação segura e dedicada, bem como pela confiança em mim depositada, meus mais sinceros agradecimentos.

Aos professores, Dr. Gilberto Francisco Loibel e Dr. Carlos Biasi, pelo apoio e encorajamento proporcionados durante os exames de qualificação.

Ao Prof. Dr. Mario Rameh Saab, iniciador de minha carreira científica como orientador do meu Programa de Mestrado.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos e do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, em particular aos colegas professores: Alice Kimie Miwa Libardi, Edson de Oliveira e Dirceu Penteado.

Aos professores do Departamento de Matemática da antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, pelo incentivo ao início à pesquisa durante os anos

de graduação.

Às senhoras Célia Maria Guastaldi Zaninetti e Neube Elisabeth Dias Gullen Stabili, pela realização de um excelente trabalho de datilografia.

Ao senhor Celso Aparecido Bruno Salvadio, chefe da gráfica da Universidade Federal de São Carlos, pelo ótimo serviço de impressão.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades:

FAPESP - através de bolsa de Iniciação Científica, durante o ano de 1975.

FINEP - através de bolsa de Pós-Graduação durante o ano de 1976.

FAPESP, CAPES e CNPq - através de auxílios concedidos ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, para bibliografia e contratação de docentes de cursos de Pós-Graduação.

ABSTRACT

The purpouse of this work is twofold.

Firstly we give necessary and suficient conditions in order to have a vector bundle $\zeta^{mk} \to M^n$ to be cobordant to one of the form $\eta^k \oplus \eta^k \oplus \ldots \oplus \eta^k \to W^n$ in the sense of Conner and Floyd as defined in their book "Periodic Differentiable Maps".

Secondly, among other results concerning involutions in low dimensional manifolds, we have complete results on non existence of involutions fixing complex projective spaces, and involutions fixing the disjoint union of product of spheres and one point.

INDICE

INTRODUÇÃO *i*

CAPITULO 0

PRELIMINARES E TEOREMAS BÁSICOS

01. Introdução 1

02. Grupos de Bordismo de um Espaço Topológico 1

03. Cobordismo de Fibrados 4

04. O Grupo de Z_2-Bordismo $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ 8

05. Fórmula de Borel-Hirzebruch 12

06. O Grupo de Z_2-Bordismo Irrestrito $I_*(Z_2)$ 15

07. A fórmula de Kosniowski-Stong 21

CAPITULO 1

DECOMPOSIÇÃO DE CLASSES DE COBORDISMO DE FIBRADOS

01. Introdução 24

02. O caso $m = 1$, k qualquer 25

03. O caso m qualquer, $k = 2$ 33

04. O caso geral 37

CAPITULO 2

CLASSES DE COBORDISMO DE INVOLUÇÕES EM DIMENSÕES BAIXAS

01. Introdução 53

02. Involuções fixando espaços projetivos em dimensões baixas 54

03. Não existência de Involuções fixando espaços projetivos complexos 106

04. Involuções fixando produtos de esferas e um ponto 110

BIBLIOGRAFIA 122

INTRODUÇÃO

Em [4], Conner e Floyd introduzem os seguintes conceitos:

a) Dados fibrados vetoriais k - dimensionais

$$\begin{array}{cc} \zeta^k & \eta^k \\ \downarrow & \downarrow \\ M^n & V^n \end{array}$$

onde M^n e V^n são variedades fechadas, C^∞, dizemos que ζ^k e η^k são cobordantes, se existe variedade compacta W^{n+1} e um fibrado vetorial k - dimensional.

$$\begin{array}{c} \mu^k \\ \downarrow \\ W^{n+1} \end{array}$$

tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n$ (união disjunta), e os fibrados $\mu^k|_{M^n}$, $\mu^k|_{V^n}$ são equivalentes, respectivamente, aos fibrados ζ^k e η^k.

b) Uma *involução* em uma variedade M^n é uma aplicação diferenciável $T: M^n \to M^n$ com $T^2 = Id$. Se M^n

é uma variedade fechada , C^∞ , e $F(T)$ é o conjunto de pontos fixos de T , cada componente conexa de $F(T)$ é uma subvariedade fechada, C^∞ , de M^n.

As variedades com involuções (T_1, M_1^n), (T_2, M_2^n), M_1^n e M_2^n fechadas, são ditas *cobordantes*, quando existe variedade compacta W^{n+1} e involução $S: W^{n+1} \to W^{n+1}$,tal que $\partial(W^{n+1}) = M_1^n \cup M_2^n$ e $S_{|M_i^n} = T_i$, $i = 1, 2$; o correspondente grupo de bordismo é denotado por $I_n(Z_2)$

Neste trabalho são abordados os seguintes problemas:

i) Dado um fibrado vetorial km - dimensional

$$\begin{array}{c} \zeta^k \\ \downarrow \\ M^n \end{array}$$

onde M^n é uma variedade fechada, obter condições necessárias e suficientes, em termos de números de Whitney de ζ^{km}, para que o mesmo seja cobordante a um fibrado da forma:

$$\begin{array}{c} \eta^k \oplus \eta^k \oplus \ldots \oplus \eta^k \\ \downarrow \\ W^n \end{array}$$

soma de Whitney de m cópias de um fibrado vetorial k-dimensional

$$\begin{array}{c} \eta^k \\ \downarrow \\ W^n \end{array}$$

A formulação de tal problema foi motivada pelo seguinte resultado, provado por Milnor em [10] : uma variedade fechada M^{2n} é cobordante (não orientávelmente) a um produto $N^n \times N^n$ se, e somente se, todo número de Whitney de M^{2n} envolvendo classes tangenciais impares, se anulam.

ii) Fixadas variedades fechadas $F^0, F^1, \ldots, F^n$, com F^i de dimensão i , o que se pode concluir a respeito das classes de cobordismo em $I_n(Z_2)$ com a propriedade de possuirem um representante (T, M^n), tal que

$F(T) = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$?

Um exemplo de resultado nesta direção é o obtido por Stong em [13]: se (T, M^n) é uma variedade com involução tal que $F(T)$ é o espaço projetivo $RP(2r)$, então $n = 4r$ e (T, M^n) é cobordante a $(S, RP(2r) \times RP(2r))$, $S(x, y) = (y, x)$

A seguir, apresentamos os resultados obtidos.

A redação do trabalho se divide em três capítulos.

No capítulo 0 estão condensados conceitos e resultados utilizados no desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No capítulo I , encontram-se os resultados obtidos concernentes ao problema i). Seja $f: BO(k) \to BO(km)$ uma aplicação classificante para o fibrado $\nu^k \oplus \ldots \oplus \nu^k$, soma de Whitney de m cópias do fibrado universal:

$$\begin{array}{c} \nu^k \\ \downarrow \\ BO(k) \end{array}$$

Provamos que ζ^{mk} é cobordante a $\eta^k \oplus \ldots \oplus \eta^k$ se, e somente se, todo número de Whitney de ζ^{mk} associado a um elemento de $\ker(f^*)$,
$f^*: H^*(BO(km), Z_2) \to H^*(BO(k), Z_2)$, se anula.

Computamos explicitamente $\ker(f^*)$ nos casos $k = 1$, m qualquer, e k qualquer, $m = 2^r$; isto também é feito no caso $k = 2$, $m = 3$, envolvendo espaços base com dimensões ≤ 4 .

Vários exemplos de tais decomposições são obtidos.

Os resultados obtidos no capitulo II referem-se ao problema ii) ; tais resultados, em sua maioria, caracterizam-se pelo fato de que $F(T)$ é constituido de espaços projetivos em dimensões baixas.

Por exemplo, provamos que em $I_5(Z_2)$ existem exatamente quatro classes que contêm um representante (T, M^5) com $F(T) = RP(1) \cup RP(2) \cup RP(3) \cup RP(4)$, e uma classe contendo um representante (T, M^5) com $F(T)=RP(2) \cup RP(4)$.

Também provamos que, em $I_6(Z_2)$, uma única classe pode ser representada por um elemento (T, M^6), com $F(T) = RP(5) \cup RP(4) \cup$ pto.

Denotemos por K_i , $i = 1, 2, 4, 8$, respectivamente, aos reais (R), complexos (C), quatérnios (Q) ou números de Cayley ($\mathcal{O}$), e por $K_i\, P(2)$ o correspondente plano projetivo. Os teoremas finais do capítulo II foram motivados pelos seguintes fatos, provados por Conner e Floyd em [4] :

para cada $i = 1, 2, 4, 8$, existe uma involução $(\tau_i , K_i\, P(2))$ com $F(\tau_i) = S^i \cup$ pto , S^i sendo a i-esfera; se (T, M^n) é tal que $F(T) = S^i \cup$ pto , então $n=2i$, $i = 1, 2, 4, 8$ e, em cada caso, (T, M^{2i}) é cobordante a $(\tau_i, K_i\, P(2))$.

O que fizemos foi obter, para $i = 1, 2, 4, 8$,

variedades com involuções (T_i, M^{4i}), com $F(T_i) = S^i \times S^i \cup \text{pto}$, e provar: se (S, V^n) é tal que $F(S) = S^i \times S^i \cup \text{pto}$, com $i \neq 2^r$, $r \geq 4$, então $n = 4i$, $i = 1, 2, 4, 8$ e, em cada caso, (S, V^{4i}) é cobordante a (T_i, M^{4i}).

Para a obtenção do resultado acima, tivemos que provar que nenhuma involução (T, M^n) pode fixar $S^{2^r k} \times S^{2^r k} \cup \text{pto}$, com $k > 1$ impar e $r \geq 0$.

O último teorema do trabalho mostra que não existe variedade com involução (T, M^n), com $F(T) = S^2 \times S^4 \cup \text{pto}$.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES E TEOREMAS BÁSICOS

1. *Introdução*

Neste capítulo reuniremos alguns fatos básicos, necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. As variedades envolvidas no trabalho serão supostas diferenciáveis, de classe C^∞.

Denotaremos por $\mathfrak{N}_* = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{N}_i$ o anel de cobordismo não orientado de Thom, o qual supomos conhecido [14]

Se M^n é uma variedade fechada n-dimensional, o símbolo $[M^n]_2$ significará ou a classe de cobordismo em $\mathfrak{N}_n$ de M^n, ou a classe de orientação modulo 2 de M^n, $[M^n]_2 \in H_n(M^n, Z_2)$, dependendo do contexto.

Para uma variedade M com bordo, o símbolo ∂M denotará o bordo de M.

2. *Grupos de Bordismo de um Espaço Topológico* [4]

Seja X um espaço topológico. Uma *variedade singular* em X é um par (B^n, f), consistindo de uma varieda

de fechada B^n e uma função contínua $f: B^n \to X$.

Dizemos que a variedade singular (B^n, f) em X *borda*, se, e somente se, existe uma variedade compacta W^{n+1} e uma função contínua $F: W^{n+1} \to X$, com $\partial(W^{n+1}) = B^n$ e $F|_{B^n} = f$.

Dadas variedades singulares em X, (B_1^n, f_1), (B_2^n, f_2), podemos formar a união disjunta $(B_1^n \cup B_2^n, f_1 \cup f_2)$, com $f_1 \cup f_2|_{B_i^n} = f_i$, $i = 1,2$; dizemos então que (B_1^n, f_1), (B_2^n, f_2) são *cobordantes*, quando a união disjunta $(B_1^n \cup B_2^n , f_1 \cup f_2)$ borda em X . Isto define uma relação de equivalência no conjunto de todas as variedades singulares em X.

A classe de equivalência de (B^n, f) é denotada por $[B^n, f]_2$, e denominada *classe de cobordismo* de (B^n, f); o conjunto de todas tais classes é denotado por $\mathfrak{N}_n(X)$.

Podemos introduzir em $\mathfrak{N}_n(X)$ uma estrutura de grupo abeliano através da união disjunta:

$$[B_1^n, f_1]_2 + [B_2^n, f_2]_2 = [B_1^n \cup B_2^n, f_1 \cup f_2]_2 \quad .$$

Neste grupo, todo elemento tem ordem dois.

Referimo-nos a $\mathfrak{N}_n(X)$ como o *grupo de bordismo n - dimensional não orientado de* X.

Se (B^n, f) é uma variedade singular em X e

M^n é uma variedade fechada, construimos a variedade singular em X, $(B^n \times M^m, g)$, com $g(x,y) = f(x)$; isto define uma estrutura de $\mathfrak{N}_*$- módulo graduado na soma direta $\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{N}_i(X) = \mathfrak{N}_*(X)$, dada por $[B^n, f]_2 [M^m]_2 = [B^n \times M^m, g]_2$.

Se $\Phi: X \to Y$ é uma função continua entre espaços topológicos, existe o *homomorfismo induzido* $\Phi_*: \mathfrak{N}_n(X) \to \mathfrak{N}_n(Y)$, dado por $\Phi_*[B^n, f]_2 = [B^n, \Phi f]_2$; $\Phi_*: \mathfrak{N}_*(X) \to \mathfrak{N}_*(Y)$ é também um homomorfismo de $\mathfrak{N}_*$- módulos graduados de grau 0.

2.1. *Teorema.*

Se X é um C-W complexo, $\mathfrak{N}_*(X)$ é um $\mathfrak{N}_*$- módulo livre graduado, isomorfo a $H_*(X, Z_2)$ ■ ([4; Teor. 8-3; pag. 21]).

2.2. *Números de Whitney de uma função* $f: M^n \to X$:

Suponha uma função $f: M^n \to X$, M^n uma variedade fechada e X um espaço topológico. Coloquemos $w_i \in H^i(M^n, Z_2)$ a i - ésima classe de Stiefel-Whitney de M^n.

Para cada classe de cohomologia $h \in H^m(X, Z_2)$ e cada partição $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n - m$, podemos associar o número $< w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_r} f^*(h), [M^n]_2 > \in Z_2$.

Tais números são denominados *números de Whitney de* f associados à classe de cohomologia h, e se reduzem aos números de Stiefel-Whitney usuais de M^n se colocamos $h = 1 \in H^0(X, Z_2)$.

O teorema abaixo estabelece que os números de Whitney de f determinam a classe de cobordismo $[M^n, f]_2 \in \mathfrak{N}_n(X)$.

2.3. *Teorema:*

Se $f: M^n \to X$ é uma variedade singular em um C-W complexo finito X, temos que $[M^n, f]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_n(X)$ se, e somente se, todos os números de Whitney de f se anulam. [4; pag. 54 ; Teor. 17.1] ∎

3. *Cobordismo de Fibrados*

Sejam

$$\begin{array}{ccc} \zeta^k & & \eta^k \\ \downarrow & , & \downarrow \\ M^n & & V^n \end{array}$$

fibrados vetoriais k - dimensionais, onde os espaços base M^n , V^n são variedades fechadas. Dizemos que ζ^k é *cobordante* a η^k , se existe variedade compacta W^{n+1} e um fibrado vetorial k-dimensional

$$\begin{array}{c} \mu^k \\ \downarrow \\ W^{n+1} \end{array}$$

tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n$, e os fibrados $\mu^k|_{M^n}$, $\mu^k|_{V^n}$ são equivalentes, respectivamente, aos fibrados ζ^k e η^k.

Esta definição é uma interpretação, em termos de fibrados, do grupo de bordismo $\mathfrak{N}_n(BO(k))$, onde $BO(k)$ é o espaço universal classificante para fibrados vetoriais k-dimensionais. Com efeito, dado um elemento $[M^n, f]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(k))$, $f: M^n \to BO(k))$, consideremos o fibrado induzido:

$$\begin{array}{c} f^*(\nu^k) \\ \downarrow \\ M^n \end{array}$$

onde $\begin{array}{c} \nu^k \\ \downarrow \\ BO(k) \end{array}$ é o fibrado universal.

Se $[M^n, f]_2 = [V^m, g]_2$ e $F: W^{n+1} \to BO(k)$ é tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n$, $F|_{M^n} = f$, $F|_{V^n} = g$, então

$$\begin{array}{c} F^*(\nu^k) \\ \downarrow \\ W^{n+1} \end{array}$$

estabelece um cobordismo entre $f^*(\nu^k)$ e $g^*(\nu^k)$.

Por outro lado, dado um fibrado

$$\begin{array}{c} \zeta^k \\ \downarrow \\ M^n \end{array}$$

tomemos uma aplicação classificante, $f: M^n \to BO(k)$.

Se $g: M^n \to BO(k)$ também classifica ζ^k, então f é homotópica a g, e portanto $[M^n, f]_2 = [M^n, g]_2$ em $\mathfrak{N}_n(BO(k))$.

Supondo agora

$$\begin{array}{c} \zeta^k \\ \downarrow \\ M^n \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \eta^k \\ \downarrow \\ V^n \end{array}$$

cobordantes, tomemos

$$f: M^n \to BO(k)$$

$$g: V^n \to BO(k)$$

aplicações classificantes e

$$\begin{array}{c} \mu^k \\ \downarrow \\ W^{n+1} \end{array}$$

um cobordismo entre ζ^k e η^k. Se $F: W^{n+1} \to BO(k)$ classifica μ^k, temos:

$$[M^n, f]_2 = [M^n, F|_{M^n}]_2 = [V^n, F|_{V^n}]_2 = [V^n, g]_2$$

em $\mathfrak{N}_n(BO(k))$.

Existe, portanto, uma correspondência biunívoca entre elementos de $\mathfrak{N}_n(BO(k))$ e classes de cobordismo de fibrados, como definidos atrás.

Denotaremos uma tal classe por $[\zeta^k \to M^n]_2$; estas podem ser somadas, transportando-se para o conjunto das mesmas a estrutura de grupo abeliano de $\mathfrak{N}_n(BO(k))$.

Denotaremos a classe de cobordismo de

$$\begin{array}{c} \zeta^k \oplus \zeta^k \oplus \ldots \oplus \zeta^k \quad (m \text{ vezes}) \\ \downarrow \\ M^n \end{array}$$

por $[m\,\zeta^k \to M^n]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(km))$.

3.1. *Números de Whitney de um elemento* $[\zeta^k \to M^n]_2$

Considere um elemento $[\zeta^k \to M^n]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(k))$ e o elemento correspondente $[M^n, f]_2$.

Temos que $H^*(BO(k), Z_2)$ é a álgebra polinomial $Z_2[v_1, v_2, \ldots, v_k]$, onde $v_i \in H^i(BO(k), Z_2)$ é a i-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal

$$\begin{array}{c} \nu^k \\ \downarrow \\ BO(k) \end{array} \qquad [1]$$

Assim, uma base para o espaço vetorial $H^i(BO(k), Z_2)$ é formada pelos monômios $v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_s}$, $j_1 + j_2 + \ldots + j_s = i$,

e $f^*(v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_s}) = \bar{v}_{j_1} \bar{v}_{j_2} \dots \bar{v}_{j_s}$, onde $\bar{v}_{j_t} \in H^{j_t}(M^n, Z_2)$ denota a j_t - ésima classe de Stiefel-Whitney de ζ^k.

Segue que $[\zeta^k \to M^n]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_n(BO(k)$ se, e somente se, todos os números da forma $< w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_r} \bar{v}_{j_1} \bar{v}_{j_2} \dots \bar{v}_{j_t}, [M^n]_2 >$, $w_{i_1}, \dots, w_{i_r}$ classes tangenciais de M^n, $i_1 + i_2 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_t = n$, se anulam.

4. *O Grupo de* Z_2 - *Bordismo Principal* $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ [4]

4.1. *Definição*

Dada uma variedade M^n, uma *involução* em M^n é uma aplicação diferenciável $T: M^n \to M^n$ com $T^2 = Id$.

Notemos que uma involução $T: M^n \to M^n$, a qual denotaremos também por (T, M^n), define uma *ação* do grupo Z_2 em M^n.

Considere agora $T: M^n \to M^n$, onde M^n é uma variedade fechada e T é uma involução sem pontos fixos; dizemos que (T, M^n) *borda* se existe uma variedade compacta W^{n+1} e uma involução $S: W^{n+1} \to W^{n+1}$ sem pontos fixos, com $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $S|_{M^n} = T$.

Dadas variedades com involuções $(T_1, M_1^n), (T_2, M_2^n)$,

M_1^n e M_2^n fechadas, T_1 e T_2 sem pontos fixos, podemos formar a união disjunta $(T_1 \cup T_2, M_1^n \cup M_2^n)$, com $T_1 \cup T_2|_{M_i^n} = T_i$, $i = 1, 2$; dizemos que $(T_1, M_1^n), (T_2, M_2^n)$ são *cobordantes*, quando a união disjunta $(T_1 \cup T_2, M_1^n \cup M_2^n)$ borda. Isto define uma relação de eqüivalência no conjunto de todos os pares (T, M^n), M^n variedade fechada e T involução sem pontos fixos.

Denotamos a classe de equivalência de (T, M^n) por $\{T, M^n\}_2$; o conjunto de todas tais classes é denotado por $\mathfrak{N}_n(Z_2)$, e possui uma estrutura de grupo abeliano, dada pela união disjunta:

$\{T_1, M_1^n\}_2 + \{T_2, M_2^n\} = \{T_1 \cup T_2, M_1^n \cup M_2^n\}_2$.

Em $\mathfrak{N}_n(Z_2)$, todo elemento tem ordem 2.

Referimo-nos a $\mathfrak{N}_n(Z_2)$ como o *grupo de* Z_2*-bordismo n - dimensional principal.*

Em $\mathfrak{N}_*(Z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{N}_i(Z_2)$ pode ser introduzida uma estrutura de $\mathfrak{N}_*$- módulo graduado, como segue: dadas $[V^m]_2 \in \mathfrak{N}_m$, $\{T, M^n\}_2 \in \mathfrak{N}_n(Z_2)$, pomos $[V^m]_2 \{T, M^n\}_2 = \{S, V^m \times M^n\}_2$, onde $S(x,y) = (x, Ty)$.

Se (T, M^n) é uma involução sem pontos fixos e M^n é uma variedade fechada, o quociente $\frac{M^n}{T}$ é também

uma variedade fechada n-dimensional. Considere

$$\begin{array}{c} \eta^1 \\ \downarrow \\ \dfrac{M^n}{T} \end{array}$$

o *fibrado - linha canonico* associado a T ; o espaço total de η^1 é $\dfrac{M^n \times R}{\sim}$, onde $\sim$ denota a relação $(m, r) \sim (Tm, -r)$.

Tomemos $f: \dfrac{M^n}{T} \to BO(1)$ uma aplicação classificante para η^1 ; isto define um elemento $[\dfrac{M^n}{T}, f]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(1))$. Não é difícil ver, de fato, que a associação:

$$\{T, M^n\}_2 \to [\frac{M^n}{T}, f]_2$$

define um homomorfismo de $\mathfrak{N}_*$ - módulos entre $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ e $\mathfrak{N}_*(BO(1))$.

Teorema 4.1. A associação

$$\{T, M^n\}_2 \to [\frac{M^n}{T}, f]_2$$

define um isomorfismo de $\mathfrak{N}_*$ - módulos entre $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ e $\mathfrak{N}_*(BO(1))$. [4; Teor. 20-4; pg 71] ■

Agora, $H^*(BO(1), Z_2) \cong H^*(RP(\infty), Z_2)$ é a álgebra polinomial $Z_2[c]$, onde $c \in H^1(RP(\infty), Z_2)$.

Escrevemos $c = f^*(c) \in H^1(\frac{M^n}{T}, Z_2)$, e chamamos c a *classe característica* da involução $T: M^n \to M^n$; notemos que c é a primeira classe de Stiefel-Whitney de η^1.

Denominamos *números de involução* de $\{T, M^n\}_2$ aos números de Whitney de $[\frac{M^n}{T}, f]_2$; estes são números da forma $< w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_j} c^r, [\frac{M^n}{T}]_2 >$, $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_j}$ classes tangenciais de $\frac{M^n}{T}$, $i_1 + \dots + i_j + r = n$.

Segue do Teorema 2.3 que $\{T, M^n\}_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_n(Z_2)$ se, e somente se, seus números de involução são nulos.

O resultado abaixo decorre de [4; Teor. 8-3; pag 21] e do Teorema 4.1:

Teorema 4.2.

$\mathfrak{N}_*(Z_2)$ é um $\mathfrak{N}_*$-módulo livre graduado, com um gerador em cada dimensão. Se S^n é a n - esfera e $A: S^n \to S^n$ é a involução antipodal, temos que $\{\{A, S^n\}_2, n = 0,1,2\dots,\dots\}$ é uma base para $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ [4; pag. 74]. ■

Segue que, para cada elemento $\{T, M^n\}_2 \in \mathfrak{N}_n(Z_2)$, existe uma *única* expressão:

$$\{T, M^n\}_2 = \sum_{i=0}^{n} [V^i]_2 \{A, S^{n-i}\}_2$$

5. *Fórmula de Borel - Hirzebruch*

Considere um fibrado vetorial k - dimensional, C^∞:

$$\begin{array}{c} \zeta^k \\ \downarrow \\ V^n \end{array}$$

onde V^n é uma variedade fechada n - dimensional. Existe o fibrado em esferas associado:

$$\begin{array}{c} S(\zeta^k) \\ \downarrow \\ V^n \end{array}$$

com fibra S^{k-1}. O espaço total $S(\zeta)$ é uma variedade fechada C^∞ $(n + k - 1)$ - dimensional.

Existe uma involução sem pontos fixos,

$$T: S(\zeta^k) \to S(\zeta^k)$$

atuando como a antipodal em cada fibra; isto decorre do fato de que a involução antipodal $A: S^{k-1} \to S^{k-1}$ comuta com todos os elementos do grupo ortogonal $O(k)$. Nós nos referimos ao par $(T, S(\zeta^k))$ como o *fibrado involução* associado

a ζ^k. Considere o *fibrado projetivo* associado a ζ^k

$$\begin{array}{c} RP(\zeta^k) \\ \downarrow p \\ V^n \end{array}$$

com projeção p, fibra RP(k-1) e espaço total $RP(\zeta^k) = \frac{S(\zeta^k)}{T}$; temos então a classe característica $c \in H^1(RP(\zeta^k), Z_2)$ da involução $(T, S(\zeta^k))$.

Teorema 5.1. (Leray - Hirsch):

$H^*(RP(\zeta^k), Z_2)$ é um módulo livre graduado sobre $H^*(V^n, Z_2)$, via p^*, com base $1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}$. [2; pag.129]. ■

Denotemos por

$$\begin{array}{ccc} \tau(RP(\zeta^k)) & , & \tau(V^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ RP(\zeta^k) & & V^n \end{array}$$

os fibrados tangentes.

Sejam

$$W = 1 + W_1 + W_2 + \ldots + W_{n+k+1}$$

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$$

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

classes de Stiefel-Whitney de $\tau(RP(\zeta^k))$, $\tau(V^n)$, ζ^k, respectivamente.

Considere os fibrados

$$\begin{array}{ccc} \tau_1 = p^*(\tau(V^n)) & , & \tau_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ RP(\zeta^k) & & RP(\zeta^k) \end{array}$$

onde τ_2 é o fibrado de vetores tangentes paralelos às fibras de $RP(\zeta^k) \xrightarrow{p} V^n$.

Pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney, a classe total de τ_1 é

$$1 + p^*(w_1) + p^*(w_2) + \ldots + p^*(w_n)$$

Quanto à classe total de τ_2, temos:

Teorema 5.2. (Borel-Hirzebruch).

A classe total de Whitney do fibrado τ_2 é:
$(1+c)^k + (1+c)^{k-1}\ p^*(v_1) + (1+c)^{k-2}\ p^*(v_2) + \ldots + p^*(v_k) =$
$= \sum_{i=0}^{k} (1+c)^{k-i}\ p^*(v_i)$. Como τ_2 é um fibrado k-1 dimensional, segue também que:

$c^k + c^{k-1}\ p^*(v_1) + \ldots + cp^*(v_{k-1}) + p^*(v_k) = 0$. [3 ; pag. 517]. ■

Como $\tau(RP(\zeta^k)) \cong \tau_1 \oplus \tau_2$, segue que a classe total de $\tau(RP(\zeta^k))$ é :

$$W = \left(\sum_{i=0}^{k} (1+c)^{k-i} \, p^*(v_i) \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{n} p^*(w_j)\right)$$

Portanto,

$$W_m = \sum_{p+q+r=m} \binom{k-p}{q} p^*(w_r \, v_p) \, c^q$$

[4 ; pag 75]

6. *O Grupo de* Z_2 *- Bordismo Irrestrito* $I_*(Z_2)$

Seja M^n uma variedade fechada, e $T: M^n \to M^n$ uma involução. Denotaremos por $F(T)$ o conjunto de pontos fixos de T; assim $F(T) = \{x \in M^n \,/\, Tx = x\}$.

É bem conhecido o fato de que cada componente conexa de $F(T)$ é uma subvariedade fechada C^∞ de M^n. [11]

Para cada k , $0 \leq k \leq n$, denotemos por $F^k \subset M^n$ a união das componentes k - dimensionais de $F(T)$, as quais são em número finito.

Assim, cada F^k é uma subvariedade fechada, C^∞, k - dimensional, eventualmente desconexa, eventualmente vazia; F^n consiste das *componentes de* M^n totalmente fixadas por T.

Fixemos em M^n uma métrica riemanniana, segundo

a qual T seja uma isometria.

Temos os fibrados normais $\eta^{n-k} \to F^k$, $0 \leq k \leq n$; pomos:

$$\begin{array}{ccc} \eta & & \bigcup_{k=0}^{n} \eta^{n-k} \\ \downarrow & = & \downarrow \\ F(T) & & F^k \end{array}$$

Denotemos por $\tau(M^n)$, $\tau(F(T))$ os fibrados tangentes.

A derivada T' define uma aplicação fibrada:

$$T' : \tau(M^n)_{|F(T)} \to \tau(M^n)_{|F(T)}$$

cobrindo a identidade $Id: F(T) \to F(T)$; além disso, $\tau(F(T)) = \{v \in \tau(M^n)_{|F(T)} \ / \ T'(x)v = v,\ v \in \tau(M^n)_x,\ x \in F(T)\}$. [4; pag.72]

Como T' é ortogonal em cada fibra, ela define portanto uma aplicação fibrada $T' : \eta \to \eta$, cobrindo a identidade $Id: F(T) \to F(T)$.

Agora, para cada $x \in F(T)$, $T'(x)^2 = Id$; também, para $v \in \eta_{|x}$, temos $T'(x)v = v$ se, e só se, $v = 0$; segue que T' atua em η como a antipodal em cada fibra.

Considere

$$\begin{array}{c} D(\eta) \\ \downarrow \\ F(T) \end{array}$$

o fibrado em discos associado a η .

Existe então uma vizinhança tubular N de $F(T)$ em M^n , com raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de maneira que:

i) N é invariante sob T;

ii) existe um difeomorfismo equivariante

$$f: (T', D(\eta)) \to (T, N). \quad [4; \text{pag.}73]$$

Aqui, a vizinhança tubular N significa uma união disjunta $N = \bigcup_{i=0}^{n} N_i$, onde cada N_i é uma vizinhança tubular de F^i.

O teorema abaixo mostra como o fibrado normal $\eta \to F(T)$ determina explicitamente a classe de cobordismo $[M^n]_2 \in \mathfrak{N}_n$

6.1. *Teorema.*

Seja (T, M^n) uma involução em uma variedade fechada e $\eta \to F(T)$ o fibrado normal do conjunto de pontos fixos. Seja

$$\begin{array}{c} \eta \oplus R \\ \downarrow \\ F(T) \end{array}$$

a soma de Whitney de η com o fibrado trivial unidimensional

$$\begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ F(T) \end{array}$$

Então, $RP(\eta \oplus R)$ é uma variedade fechada C^∞ n - dimensional e $[M^n]_2 = [RP(\eta \oplus R)]_2$ em $\mathfrak{N}_n$ [4; pag. 78] ■

No conjunto de todos os pares (T, M^n), onde M^n é uma variedade fechada e T é uma involução em M^n, podemos definir uma relação de bordismo sem impor condições sobre as involuções envolvidas; procedendo como no parágrafo 4, obtemos o *grupo de* Z_2 - *bordismo irrestrito* n - *dimensional*, denotado por $I_n(Z_2)$; a classe de cobordismo de (T, M^n) em $I_n(Z_2)$ será denotada por $[T, M^n]_2$.

Obtemos também o $\mathfrak{N}_*$ - módulo graduado $I_*(Z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(Z_2)$.

No que segue, mostraremos como o $\mathfrak{N}_*$ - módulo $I_*(Z_2)$ se relaciona com os $\mathfrak{N}_*$ - módulos $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ e $\mathfrak{N}_*(X)$, definidos nos parágrafos 4 e 2, respectivamente.

Dada uma involução (T, M^n), seja

$$\begin{array}{c}\eta\\ \downarrow\\ F(T)\end{array} = \bigcup_{k=0}^{n} \begin{array}{c}\eta\\ \downarrow\\ F^{n-k}\end{array}$$

o fibrado normal do conjunto de pontos fixos, e seja

$\mathfrak{M}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{N}_{n-k}(BO(k))$; então $[\eta \to F(T)]_2 \in \mathfrak{M}_n$. Definimos $j_*[T, M^n]_2 = [\eta \to F(T)]_2 = \sum_{k=0}^{n} [\eta^k \to F^{n-k}]_2$.

Por outro lado, dado um fibrado vetorial k - dimensional:

$$\begin{array}{c}\zeta^k\\ \downarrow\\ V^n\end{array}$$

onde V^n é uma variedade fechada, definimos $\partial([\zeta^k \to V^n]_2) = \{A, S(\zeta^k)\}_2 \in \mathfrak{N}_{n+k-1}(Z_2)$, onde $(A,S(\zeta^k))$ é o fibrado - involução associado a ζ^k , definido no parágrafo 5.

Ocorre que

$$j_*: I_*(Z_2) \to \mathfrak{M}_* = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i$$

$$\text{e} \qquad \partial : \mathfrak{M}_* \to \mathfrak{N}_*(Z_2)$$

são funções bem definidas e homomorfismos de $\mathfrak{N}_*$ - módulos graduados, com graus 0 e -1, respectivamente. [4, pag.88]

6.2. *Teorema.* A sequência

$$0 \to I_*(Z_2) \xrightarrow{j_*} \mathfrak{M}_* \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_*(Z_2) \to 0$$

é exata. Além disso, existe um homomorfismo $h: \mathfrak{N}_*(Z_2) \to \mathfrak{M}_*$ de grau +1, tal que ∂h = identidade. [4, pag.88] ■

O homomorfismo h é definido como segue: se $\{S, V^n\}_2 \in \mathfrak{N}_n(Z_2)$, existe uma expressão única:

$$\{S, V^n\}_2 = \sum_{i=0}^{n} [M^i]_2 \{A, S^{n-i}\}_2$$

Pomos $h\{S, V^n\}_2 = \sum_{i=0}^{n} [R^{n-i+1} \to M^i]_2 \in \mathfrak{M}_{n+1}$,

onde $R^{n-i+1} \to M^i$ denota o fibrado trivial $n-i+1$ - dimensional.

Parte do Teorema 6.2 decorre do fato:

6.3. *Teorema.*

Se (T, M^n) é uma involução em uma variedade fechada e $\eta \to F(T)$ é o fibrado normal do conjunto de pontos fixos, temos

$$\{T, S(\eta)\}_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \{T, S(\eta^{n-k})\}_2 = 0$$

em $\mathfrak{N}_{n-1}(Z_2)$, onde $S(\eta)$ é o fibrado em esferas associado

a η . [4; pag.78] ■

No teorema 6.3 , o fibrado em esferas $S(\eta)$ é considerado como o bordo $\partial(N)$ de uma conveniente vizinhança tubular N de $F(T)$.

O teorema 6.2 implica que a classe do fibrado normal $[\eta \to F(T)]_2 \in \mathfrak{M}_n$ determina a classe $[T, M^n]_2 \in I_n(Z_2)$.

Decorre também do Teorema 6.2 que, para cada $n \geq 0$, $\mathfrak{M}_n \cong I_n(Z_2) \oplus \mathfrak{N}_{n-1}(Z_2)$.

As dimensões de $\mathfrak{M}_n$ e $\mathfrak{N}_{n-1}(Z_2)$, como espaços vetoriais sobre Z_2 , podem ser determinadas, respectivamente, pelos Teoremas 2.1 e 4.2 ; através destes fatos , podem, portanto, serem obtidas as ordens dos grupos $I_n(Z_2)$.

Por exemplo, pode-se mostrar que as ordens de $I_4(Z_2)$, $I_5(Z_2)$, $I_6(Z_2)$ são, respectivamente, 128 , 512 e 524.288.

7. *A Fórmula de Kosniowski - Stong*

Para os fatos abaixo, vide referência [8].

Seja (T, M^n) uma involução em uma variedade fechada M^n , e

$$\begin{array}{ccc} \eta & & \eta \\ \downarrow & = & \bigcup_{k=0}^{n} \downarrow \\ F(T) & & F^{n-k} \end{array}$$

o fibrado normal do conjunto de pontos fixos.

O teorema abaixo mostra como obter os números de Stiefel-Whitney de M^n em termos dos números de Whitney de $\eta \to F(T)$.

7.1. *Teorema*. (Kosniowski - Stong)

Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio simétrico sobre Z_2, em n variáveis, de grau no máximo n. Então:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,[M^n]_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(1+y_1, \ldots, 1+y_k, z_1, \ldots, z_{n-k})}{\prod_{i=1}^{k} (1+y_i)} \; [F^{n-k}]_2$$

onde as expressões acima são obtidas substituindo-se as funções simétricas elementares $\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\sigma_i(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, $\sigma_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k})$ pelas classes de Stiefel - Whitney $w_i(M^n)$, $w_i(\eta^k)$ e $w_i(F^{n-k})$, respectivamente, e aplicando-se as resultantes classes de cohomologia nas classes fundamentais de homologia de M^n e F^{n-k}. ■

O resultado a seguir, essencialmente algébrico , facilita a manipulação da expressão à direita na fórmula de Kosniowski - Stong:

Teorema 7.2.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indeterminadas e $\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a i - ésima função simétrica elementar, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Então:

$$\sigma_i(1+y_1, 1+y_2, \ldots, 1+y_k, z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}) =$$

$$= \sum_{p+q \leq i} \binom{k-p}{i-p-q} \sigma_p(y_1, y_2, \ldots, y_k)\, \sigma_q(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}) \blacksquare$$

CAPÍTULO 1

DECOMPOSIÇÃO DE CLASSES DE COBORDISMO DE FIBRADOS

1. *Introdução*

Em [10], Milnor obtem o seguinte resultado: se M^{2n} é uma variedade fechada 2n-dimensional, temos que existe variedade fechada n-dimensional N^n com $[M^{2n}]_2 = [N^n]_2 \cdot [N^n]_2$ em $\mathfrak{N}_{2n}$ se, e somente se, todo número de Stiefel-Whitney de M^{2n} envolvendo alguma classe tangencial ímpar, se anula.

Motivados por este fato, estudamos neste capítulo o seguinte problema: dado um fibrado vetorial km-dimensional

$$\begin{array}{c} \xi^{km} \\ \downarrow \\ M^n \end{array}$$

onde M^n é uma variedade fechada, obter condições necessárias e suficientes, em termos de números de Whitney de ξ^{km}, para que o mesmo seja cobordante a um fibrado da forma:

$$\begin{array}{c} \eta^m \oplus \eta^m \oplus \ldots \oplus \eta^m \qquad \text{(k-vezes)} \\ \downarrow \\ W^n \end{array}$$

soma de Whitney de k cópias de um fibrado vetorial m-dimen

sional

$$\eta^m$$
$$\downarrow$$
$$W^n$$

onde W^n é uma variedade fechada.

2. *O Caso* $m = 1$, *k qualquer*

O teorema a seguir resolve o problema citado acima, no caso particular em que $m = 1$ e k é qualquer número natural.

2.1. *Teorema:*

Seja $\xi^k \to V^n$ fibrado vetorial k-dimensional, V^n variedade fechada C^∞.

Denotemos por

$W = 1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ classe total de V^n

$V = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ classe total de ξ^k

Seja $A = \{v_\ell \ / \ \binom{k}{\ell}$ é impar$\}$. Consideremos $B_1 = \{V_1^r + V_2^r$, onde V_i^r, $i = 1,2$, são monômios de grau r, envolvendo somente classes $v_i \in A\}$, e $B_2 = \{v_i \ / \ \binom{k}{i}$ é par$\}$. Então existe uma variedade W^n, fechada, C^∞, e um fibrado vetorial unidimensional $\eta^1 \to W^n$, tal que $[k\,\eta^1 \to W^n]_2 = [\xi^k \to V^n]_2$ em $\mathfrak{N}_n(BO(k))$ se, e somente se, todo número de Whitney da forma

$\langle w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_r} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_t} \bar{V}_\ell, [V_n]_2 \rangle$,

$i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_t + \ell = n$, com $\bar{V}_\ell \in B_1 \cup B_2$,

se anula.

Prova

Suponhamos inicialmente que

$$[\xi^k \to V^n]_2 = [\eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^1 \to W^n]_2$$

Sejam $H = 1 + h_1 + \dots + h_k$ classe total de $\eta^1 \oplus \dots \oplus \eta^1$

$U = 1 + u$ classe total de η^1

$\bar{W} = 1 + \bar{w}_1 + \dots + \bar{w}_n$ classe total de W^n

Então $H = (1+u)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i$, e portanto $h_i = \binom{k}{i} u^i$

Tomemos $V_1^r + V_2^r \in B_1$, monômio de grau r, e seja $H_1^r + H_2^r$ o monômio correspondente nos h_i

Então:

$$\langle w_{i_1} \dots w_{i_r} v_{j_1} \dots v_{j_t} (V_1^r + V_2^r), [V_n]_2 \rangle =$$
$$= \langle \bar{w}_{i_1} \dots \bar{w}_{i_r} h_{j_1} \dots h_{j_t} (H_1^r + H_2^r), [W_n]_2 \rangle =$$
$$= \langle \bar{w}_{i_1} \dots \bar{w}_{i_r} h_{j_1} \dots h_{j_t} (u^r + u^r), [W_n]_2 \rangle = 0,$$

onde $i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_t + r = n$.

Por outro lado, se $v_r \in B_2$, $\binom{k}{r}$ é par, e portanto:

$$\langle w_{i_1} \dots w_{i_r} v_{j_1} \dots v_{j_t} v_r, [V_n]_2 \rangle =$$

$$= \langle \bar{w}_{i_1} \dots w_{i_r} h_{j_1} \dots h_{j_t} \binom{k}{r} u^r, [W_n]_2 \rangle = 0$$

Reciprocamente, sejam:

$$\begin{array}{ccc} \nu^1 & , & \nu^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO(1) & & BO(k) \end{array}$$

os fibrados universais, e

$V = 1 + v_1 + \dots + v_k$, $U = 1 + u$, classes totais de ν^k, ν^1, reciprocamente. Então

$H^*(BO(1),Z_2) = Z_2[u]$

$H^*(BO(k),Z_2) = Z_2[v_1,v_2,\dots,v_k]$

Seja $f: BO(1) \to BO(k)$, uma aplicação classificante para $\nu^1 \oplus \nu^1 \oplus \dots \oplus \nu^1$ (k vezes).

Como a classe total de $\nu^1 \oplus \dots \oplus \nu^1$ é $(1+u)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i$, temos que $f^*(v_i) = \binom{k}{i} u^i$, $i=0,\dots,k$.

Consideremos os subconjuntos $\bar{A}$, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ de $H^*(BO(k),Z_2)$, conforme descritos no enunciado do teorema, só que envolvendo as classes v_i de ν^k.

Então, se $V_1^r + V_2^r \in \overline{B_1}$, $v_r \in \overline{B_2}$, $f^*(V_1^r+V_2^r) = u^r + u^r = 0$ e $f^*(v_r) = \binom{k}{r} u^r = 0$

Portanto, $\mathrm{Kern}(f^*) \supset$ Ideal gerado por $\overline{B_1} \cup \overline{B_2}$. Tomemos agora $S \in \mathrm{Kern}(f^*)$.

Escrevamos S como um polinômio:

$S = (S_1 + \ldots + S_m) + (T_1 + \ldots + T_\ell)$, onde cada S_i é um monômio envolvendo somente classes v_j, com $\binom{k}{j}$ ímpar, T_i é um monômio envolvendo alguma classe v_ℓ, com $\binom{k}{\ell}$ par; suponha grau $S_i = n_i$, $i = 1,\ldots,m$.

Segue que

$$0 = f^*(S) = \sum_{i=1}^{m} f^*(S_i) + \sum_{i=1}^{\ell} f^*(T_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f^*(S_i) = u^{n_1} + u^{n_2} + \ldots + u^{n_m}$$

A última somatória deve ter então um número par de termos, com a forma:

$$(u^{r_1}+u^{r_1}) + (u^{r_1}+u^{r_2}) + \ldots + (u^{r_t} + u^{r_t})$$

Isso significa que

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = (S_{i_1} + S'_{i_1}) + \ldots + (S_{i_t} + S'_{i_t}),$$

com grau S_{i_p} = grau $S'_{i_p} = r_p$.

Portanto $\sum_{i=1}^{m} S_i$ pertence ao ideal gerado por $\overline{B_1}$; como $\sum_{i=1}^{\ell} T_i$ pertence ao ideal gerado por $\overline{B_2}$, provamos que kern(f^*) = Ideal gerado por $\overline{B_1} \cup \overline{B_2}$.

Seja $\Phi: V^n \to BO(k)$ uma aplicação classificante para ξ^k. Então $\Phi^*(v_i)$ = i-ésima classe de Stiefel-Whitney de ξ^k, e portanto $\Phi^*(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) = B_1 \cup B_2$.

Esse fato, juntamente com a hipótese, implicam que todo número de Whitney de $[V^n,\Phi]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(k))$ associado a um elemento de kern f^*,

$$f^*: H^*(BO(k),Z_2) \to H^*(BO(1),Z_2),$$

se anula. Portanto, $[V^n,\Phi]_2$ está na imagem de

$$\mathfrak{N}_n(BO(1)) \xrightarrow{f^*} \mathfrak{N}_n(BO(k)). \quad [4.\ pg.58]$$

Isso significa que existe variedade W^n fechada, C^∞, e uma aplicação

$$g: W^n \to BO(1) \qquad \text{com}$$

$[V^n,\Phi]_2 = [W^n, fog]_2$ em $\mathfrak{N}_n(BO(k))$.

Em termos de fibrados, $\xi^k \to V^n$ é cobordante a $(fog)^*(\nu^k) \to W^n$.

Mas
$$\begin{array}{ccccc} (fog)^*(\nu^k) & & g^*f^*(\nu^k) & & \\ \downarrow & = & \downarrow & = & \\ W^n & & W^n & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} g^*(\nu^1 \oplus \nu^1 \oplus \ldots \oplus \nu^1) & & g^*(\nu^1) \oplus \ldots \oplus g^*(\nu^1) & & \\ \downarrow & = & \downarrow & & \\ W^n & & W^n & & \end{array}$$

Pondo-se

$$\begin{array}{ccc} g^*(\nu^1) & & \eta^1 \\ \downarrow & = & \downarrow \\ W^n & & W^n \end{array},$$

segue o resultado. ■

2.2. *Exemplo*

Todo fibrado vetorial 4-dimensional $\eta^4 \to S^2 \times S^2$ é cobordante a um fibrado da forma

$\theta^1 \oplus \theta^1 \oplus \theta^1 \oplus \theta^1 \to V^4$.

Com efeito, seja $\alpha \in H^2(S^2,Z_2)$ o elemento não nulo; então $H^2(S^2 \times S^2,Z_2) \cong Z_2(\alpha_1) \oplus Z_2(\alpha_2)$, $H^4(S^2 \times S^2,Z_2) \cong Z_2(\alpha_1\alpha_2)$, onde $\alpha_i = \pi_i^*(\alpha)$, $\pi_i : S^2 \times S^2 \to S^2$ a projeção no i-ésimo fator, $i = 1,2$. Nesse caso, temos

$$A = \{v_4\}, \quad B_2 = \{v_1,v_2,v_3\}, \quad \text{onde}$$

$V = 1 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ denota a classe total de η^4; então $B_1 = \{v_4^i + v_4^i, \ i = 0,1,\ldots\} = \{0\}$. Como $v_1 = v_3 = 0$ e $W(S^2 \times S^2) = 1$, temos que η^4 é cobordante a $\bigoplus_1^4 \theta^1$ se, e somente se, $\langle v_2^2, [S^2 \times S^2]_2\rangle = 0$.

Se $v_2 = \alpha_1$ ou α_2, $v_2^2 = \pi_i^*(\alpha)^2 = \pi_i^*(\alpha^2) = 0$; se $v_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, analogamente, $v_2^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$. Segue o resultado.

2.3. *Exemplo*

Consideremos um fibrado tridimensional $\eta^3 \to RP(3)$, e seja $\alpha \in H^1(RP(3),Z_2)$ o elemento não nulo; então $B_2 = \phi$, $A = \{v_1,v_2,v_3\}$, onde v_i = i-ésima classe de η^3. Portanto, $B_1 = \{v_1^2 + v_2, v_1^3 + v_3, v_1^3 + v_1v_2, v_1v_2 + v_3\}$, e como $W(RP(3)) = 1$, $\eta^3 \to RP(3)$ é cobordante a um fibrado da forma $\theta^1 \oplus \theta^1 \oplus \theta^1 \to W^3$ se, e somente se, os números $\langle v_1^3 + v_1v_2, [RP(3)]\rangle$, $\langle v_1^3+v_3,[RP(3)]\rangle$ se anulam (não nos preocupamos com $v_3 + v_1v_2$, uma vez que $(v_1^3+v_1v_2) + (v_1^3+v_3) = v_1v_2 + v_3$). Devemos ter então as rela

ções:

$$v_1^3 = v_1 v_2$$
$$v_1^3 = v_3$$

Segue que a decomposição acima se dá nos casos:

i) $v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$

ii) $v_1 = \alpha, \quad v_2 = \alpha^2, \quad v_3 = \alpha^3$

iii) $v_1 = 0, \quad v_2 = \alpha^2, \quad v_3 = 0$

2.4. *Exemplo*

Tomemos um fibrado vetorial 6-dimensional $n^6 \to S^2 \times S^4$. Sejam $\alpha \in H^2(S^2,Z_2)$, $\beta \in H^4(S^4,Z_2)$, elementos não nulos. Então $H^2(S^2\times S^4,Z_2) \cong Z_2(\bar{\alpha})$, $H^4(S^2\times S^4,Z_2) \cong$ $\cong Z_2(\bar{\beta})$, $H^6(S^2\times S^4,Z_2) \cong Z_2(\bar{\alpha}\,\bar{\beta})$, onde

$$\bar{\alpha} = \pi_1^*(\alpha), \bar{\beta} = \pi_2^*(\beta), \quad \text{e}$$

$$\pi_1^*: H^2(S^2,Z_2) \to H^2(S^2\times S^4,Z_2)$$
$$\pi_2^*: H^4(S^4,Z_2) \to H^4(S^2\times S^4,Z_2)$$

são as induzidas das projeções

$$\pi_1: S^2 \times S^4 \to S^2, \quad \pi_2: S^2 \times S^4 \to S^4.$$

Nesse caso, se $V = 1 + v_1 + \ldots + v_6$ é a classe total de n^6, temos $A = \{v_2,v_4,v_6\}$, $B_2 = \{v_1,v_3,v_5\}$, $B_1 = \{v_2^2 + v_4,\ v_2v_4 + v_6,\ v_2^3 + v_6,\ v_2^3 + v_2v_4\}$. Como $W(S^2 \times S^4) = 1$ e $v_1 = v_3 = v_5 = 0$, temos que n^6 é cobordante a um fibrado da forma $\bigoplus_1^6 \theta^1 \to W^6$ se, e somente

se os números $\langle v_2v_4 + v_6, [S^2 \times S^4]_2\rangle$, $\langle v_2^3 + v_6, [S^2 \times S^4]_2\rangle$ se anulam; temos então as relações:

$v_2v_4 = v_6$, $v_2^3 = v_6$. Se $v_2 = \bar{\alpha}$, $v_2^3 = \pi_1^*(\alpha^3) = 0$; portanto devemos ter $v_6 = 0$, $v_2v_4 = 0$. Segue que a decomposição mencionada se dá nos casos:

i) $v_2 = \bar{\alpha}$, $v_4 = 0$, $v_6 = 0$

ii) $v_2 = 0$, $v_4 = \bar{\beta}$ $v_6 = 0$

Por exemplo, sejam CP(1), QP(1), espaços projetivos unidimensionais complexo e quaterniônico, respectivamente; temos $CP(1) \cong S^2$, $QP(1) \cong S^4$. Sejam

$\xi^1 \to CP(1)$, o fibrado linha canônico de dimensão complexa 1, e $\mu^1 \to QP(1)$ o fibrado linha canônico de dimensão quaterniônica 1.

Se $\alpha \in H^2(CP(1), Z_2)$, $\beta \in H^4(QP(1), Z_2)$ são os elementos não nulos, temos que a classe total do fibrado produto $\xi^1 \times \mu^1 \to CP(1) \times QP(1)$ é
$V = 1 + \pi_1^*(\alpha) + \pi_2^*(\beta) + \pi_1^*(\alpha)\pi_2^*(\beta)$, $\pi_1 : CP(1) \times QP(1) \to CP(1)$, $\pi_2 : CP(1) \times QP(1) \to QP(1)$ as projeções; segue que $\xi^1 \times \mu^1$ não é cobordante a um fibrado da forma $\bigoplus_1^6 \theta^1 \to w^6$.

2.5. *Exemplo*

Considere um fibrado 4-dimensional $\eta^4 \to RP(5)$. Se $\alpha \in H^1(RP(5), Z_2)$ é o elemento não nulo, temos $W(RP(5)) = 1 + \alpha^2 + \alpha^4$; como no exemplo 2.2, $B_1 = \{0\}$,

$B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde v_i é a i-ésima classe de η^4.

Segue que η^4 é cobordante a um fibrado da forma $\theta^1 \oplus \theta^1 \oplus \theta^1 \oplus \theta^1 \to W^5$ se, e somente, se os números $\langle \alpha^4 v_1, [RP(5)] \rangle$, $\langle \alpha^2 v_3, [RP(5)]_2 \rangle$ se anulam; com efeito, nessas condições temos $v_1 = 0$, $v_3 = 0$, e isso implica que qualquer número de Whitney de η^4 envolvendo classes de B_2, se anula.

A decomposição acima se dá nos casos:

i) $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$

ii) $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = \alpha^4$

iii) $v_1 = 0$, $v_2 = \alpha^2$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$

iv) $v_1 = 0$, $v_2 = \alpha^2$, $v_3 = 0$, $v_4 = \alpha^4$

3. *O Caso m qualquer, k = 2*

3.1. *Teorema*

Seja $\xi^{2m} \to V^n$ fibrado vetorial 2m-dimensional, V^n variedade fechada C^∞.

Denotemos por

$W = 1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ classe total de V^n

$V = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{2m}$ classe total de ξ^{2m}

Então existe uma variedade W^n, fechada, C^∞, e um fibrado vetorial m-dimensional $\eta^m \to W^n$ tal que

$[\eta^m \oplus \eta^m \to W^n]_2 = [\xi^{2m} \to V^n]_2$ em

$\mathfrak{N}_n(BO(2m))$ se, e somente se, todo número de Whitney da forma $\langle w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_r} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_t}, [V^n]_2 \rangle$, com algum j_i impar, se anula.

Prova

Suponhamos $[\eta^m \oplus \eta^m \to W^n]_2 = [\xi^{2m} \to V^n]_2$

Sejam

$H = 1 + h_1 + h_2 + \dots + h_{2m}$ classe total de $\eta^m \oplus \eta^m$

$U = 1 + u_1 + \dots + u_m$ classe total de η^m

$\bar{W} = 1 + \bar{w}_1 + \dots + \bar{w}_n$ classe total de W^n

Então $H = (\sum_{i=0}^{m} u_i)^2 = \sum_{i=0}^{m} u_i^2$, e portanto $h_r = 0$, se r é ímpar, e $h_{2s} = u_s^2$

Então, se algum j_i é ímpar,

$\langle w_{i_1} \dots w_{i_r} v_{j_1} \dots v_{j_t}, [V^n]_2 \rangle =$

$\langle \bar{w}_{i_1} \dots \bar{w}_{i_r} h_{j_1} \dots h_{j_t}, [W^n]_2 \rangle = 0$

Reciprocamente, suponha que todo tal número se anule. Sejam

$$\begin{array}{ccc} \nu^m & & \nu^{2m} \\ \downarrow & , & \downarrow \quad , \\ BO(m) & & BO(2m) \end{array}$$

os fibrados universais.

Sejam $V = 1 + v_1 + \dots + v_{2m}$, $U = 1 + u_1 + \dots$ $\dots + u_m$ classes totais de ν^{2m}, ν^m, respectivamente.

Então

$H^*(BO(m),Z_2) = Z_2[u_1,\ldots,u_m]$

$H^*(BO(2m),Z_2) = Z_2[v_1,v_2, \ldots, v_{2m}]$

Considere $f: BO(m) \to BO(2m)$ uma aplicação que classifica o fibrado

$$\begin{array}{c} \nu^m \oplus \nu^m \\ \downarrow \\ BO(m) \end{array}$$

A classe total de $\nu^m \oplus \nu^m$ é

$$(\sum_{i=0}^{m} u_i)^2 = (\sum_{i=0}^{m} u_i^2)$$

Portanto, se

$f^*: H^*(BO(2m),Z_2) \to H^*(BO(m),Z_2)$, temos:

$f^*(v_r) = 0$, se r é impar

$f^*(v_{2s}) = u_s^2$

Portanto, o ideal gerado por $\{v_r,\ r$ impar$\}$ está contido em Kern f^*.

Não é difícil ver que, se um polinômio

$S = s_1 + \ldots + s_\ell$ é tal que $f^*(S) = 0$, então cada monômio s_i envolve algum v_r, com r impar, e portanto

Kern f^* = Ideal gerado por $\{v_r,\ r$ impar$\}$

Seja $\Phi: V^n \to BO(2m)$ uma aplicação classificante para ξ^{2m}. A hipótese implica que todo número de Whitney de $[V^n,\Phi]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(2m))$ associado a um elemento de

kern f^* se anula, o que significa que $[V^n,\Phi]_2$ está na imagem de

$$\mathfrak{N}_n(BO(m) \xrightarrow{f^*} \mathfrak{N}_n(BO(2m)) \qquad [4, \text{pag. } 58]$$

A prova se completa seguindo raciocínio análogo ao do teorema 1. ■

3.2. *Exemplo*

Todo fibrado vetorial $\xi^{2s} \to S^{2k}$ é cobordante a um fibrado da forma $n^s \oplus n^s \to W^{2k}$, uma vez que o único número de Whitney relevante é $\langle v_{2k},[S^{2k}]_2\rangle$, v_{2k} = 2k-ésima classe de ξ^{2s}.

3.3. *Exemplo*

Todo fibrado vetorial $\xi^{2s} \to S^{2k} \times S^{2r}$ é cobordante a um fibrado da forma

$$\eta^s \oplus \eta^s \to W^{2(k+r)}$$

uma vez que os únicos números de Whitney relevantes são $\langle v_{2k}\, v_{2r}, [S^{2k} \times S^{2r}]_2\rangle$, $\langle v_{2(k+r)}, [S^{2k} \times S^{2r}]_2\rangle$.

3.4. *Exemplo*

Todo fibrado vetorial $\xi^{2s} \to CP(n)$ é cobordante a um fibrado da forma $\eta^s \oplus \eta^s \to W^{2n}$, uma vez que as classes de Whitney v_j de ξ^{2s}, com j impar, são nulas.

3.5. *Exemplo*

Considere o fibrado tangente $\tau(RP(2n)) \to RP(2n)$. Então $\tau(RP(2n))$ não é cobordante a um fibrado da forma $\mu^n \oplus \mu^n \to W^{2n}$. Com efeito seja $\alpha \in H^1(RP(2n),Z_2)$ o elemento não nulo.

Então $w_1(\tau(RP(2n))) = \alpha$, e portanto, $\langle w_1^{2n}, [RP(2n)]_2 \rangle = 1$. Note que, se $\xi^1_{2n} \to RP(2n)$ é o fibrado linha canônico, então $[\xi^1_{2n} \oplus \ldots \oplus \xi^1_{2n} \to RP(2n)]_2 \neq$ $\neq [\tau(RP(2n)) \to RP(2n)]_2$ em $\mathfrak{N}_{2n}(BO(2n))$.

3.6. *Exemplo*

Um fibrado vetorial $\xi^{2s} \to RP(2n)$ é cobordante a um fibrado da forma $\eta^s \oplus \eta^s \to W^{2n}$ se, e somente se, toda classe de Whitney v_r de ξ^{2s}, com r impar, é nula. A suficiência é óbvia, pelo Teorema 2. Por outro lado, seja $\alpha \in H^1(RP(2n),Z_2)$ o elemento não nulo, e suponhamos que alguma classe v_{2k+1} de ξ^{2s} seja não nula. Então $v_{2k+1} = \alpha^{2k+1}$, $w_1(RP(2n)) = \alpha$, e portanto $\langle w_1^{2n-2k-1} v_{2k+1}, [RP(2n)]_2 \rangle = \langle \alpha^{2n}, [RP(2n)]_2 \rangle = 1$. Segue que ξ^{2s} não se decompõe como acima. Note que este fato implica no exemplo 4.

4. *O Caso Geral*

Dados k, m, inteiros positivos, sejam

$$\begin{array}{ccc} \nu^m & , & \nu^{mk} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO(m) & & BO(mk) \end{array}$$

os fibrados universais, e

$$f: BO(m) \to BO(mk)$$

uma aplicação classificante para o fibrado mk - dimensional

$$\begin{array}{c} \nu^m \oplus \ldots \oplus \nu^m \\ \downarrow \\ BO(m) \end{array}$$

Temos então a induzida:

$$f_*: \mathfrak{N}_n(BO(m)) \to \mathfrak{N}_n(BO(mk))$$

4.1. *Teorema.*

Considere um fibrado vetorial mk - dimensional

$$\begin{array}{c} \zeta^{mk} \\ \downarrow \\ V^n \end{array}$$

onde V^n é uma variedade fechada. Então ζ^{mk} é cobordante a um fibrado da forma

$$\begin{array}{c} \eta^m \oplus \ldots \oplus \eta^m \quad \text{(k vezes)} \\ \downarrow \\ W^n \end{array}$$

onde W^n é uma variedade fechada, se, e somente se, $[\zeta^{mk} \to V^n]_2 \in \mathfrak{N}_n(BO(mk))$ está na imagem de f_*.

Prova.

Suponhamos que exista uma variedade fechada W^n e um fibrado $\eta^m \to W^n$, m - dimensional, com $[\zeta^{mk} \to V^n]_2 = f_* [\eta^m \to W^n]_2$ em $\mathfrak{N}_n(BO(mk))$.

Então, se

$$\Phi : V^n \to BO(mk)$$

$$\Psi : W^n \to BO(m)$$

classificam ζ^{mk} e η^m, respectivamente, temos $[V^n, \Phi]_2 = f_* [W^n, \Psi]_2 = [W^n, f_0 \Psi]_2$.

Segue que:

$$[\zeta^{mk} \to V^n]_2 = [(f_0 \Psi)^*(\nu^{mk}) \to W^n]_2 = [\Psi^*(f^*(\nu^{mk}) \to BO(m))]_2 =$$

$$= [\Psi^*(\nu^m \underbrace{\oplus \ \dots}_{k \text{ vezes}} \oplus \nu^m \to BO(m))]_2 =$$

$$= [\Psi^*(\nu^m) \underbrace{\oplus \ \dots}_{k \text{ vezes}} \oplus \Psi^*(\nu^m) \to W^n]_2$$

Reciprocamente, suponhamos

$$[\zeta^{mk} \to V^n]_2 = [\eta^m \underbrace{\oplus \ \dots}_{k \text{ vezes}} \oplus \eta^m \to W^n]_2$$

Tomemos

$$g: V^n \to BO(mk)$$

$$h: W^n \to BO(mk)$$

aplicações classificantes para ζ^{mk}, $\eta^m \oplus \ldots \oplus \eta^m$ (k vezes), respectivamente.

A hipótese significa que

$$[V^n, g]_2 = [W^n, h]_2 \quad \text{em} \quad \mathfrak{N}_n(BO(mk))$$

Seja $\Psi: W^n \to BO(m)$ uma aplicação classificante para

$$\begin{array}{c} \eta^n \\ \downarrow \\ W^n \end{array}$$

Então $(f_0\ \Psi)^*(\nu^{mk}) = \Psi^*(\nu^m \oplus \ldots \oplus \nu^m) =$ $= \eta^m \oplus \ldots \oplus \eta^m$, e portanto

$$f_0\ \Psi : W^n \to BO(mk)$$

também classifica $\eta^m \oplus \ldots \oplus \eta^m$. Segue que $f_0\ \Psi$ e h são homotópicas, o que significa:

$$[V^n, g]_2 = [W^n, h]_2 = [W^n, f_0\ \Psi]_2 = f_*[W^n, \Psi]_2 . \blacksquare$$

4.2. *Corolário.*

Um fibrado vetorial

$$\begin{array}{c} \xi^{mk} \\ \downarrow \\ V^n \end{array}$$

e cobordante a um fibrado da forma

$$\begin{array}{c} \eta^m \oplus \ldots \oplus \eta^m \\ \downarrow \\ W^n \end{array} \qquad (k \text{ vezes})$$

se, e somente se, todo número de Whitney de ζ^{mk} associado a um elemento de kern (f^*), $f^*: H^*(BO(mk),Z_2) \to H^*(BO(m),Z_2)$, se anula. ■

Temos, portanto, um critério, em termos de números de Whitney, para estudar a decomposição acima, no caso geral. A dificuldade está, no entanto, na computação de kern(f^*).

O conhecimento de alguns elementos de kern(f^*) dá-nos respostas negativas, em certos casos.

Por exemplo, seja $k = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \ldots + 2^{r_j}$, $r_1 > r_2 > \ldots > r_j$, a partição diádica de k; sejam

$V = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{mk}$, a classe total de ν^{mk};

$U = 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, a classe total de ν^m.

Então, a classe total de $\nu^m \oplus \nu^m \oplus \ldots \oplus \nu^m$ (k vezes) é:

$$(1 + u_1 + \ldots + u_m)^k =$$

$$= (1 + u_1 + \ldots + u_m)^{2^{r_1}} \ldots\ldots (1 + u_1 + \ldots + u_m)^{2^{r_j}} =$$

$$= (1 + u_1^{2^{r_1}} + \ldots + u_m^{2^{r_1}}) \ldots\ldots (1 + u_1^{2^{r_j}} + \ldots + u_m^{2^{r_j}}) =$$

$$= \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_j \leq m} u_{i_1}^{2^{r_1}} u_{i_2}^{2^{r_2}} \ldots\ldots u_{i_j}^{2^{r_j}}$$

Segue que

$$f(v_\ell) = \sum_{i_1 2^{r_1} + \ldots + i_j 2^{r_j} = \ell} u_i^{2^{r_1}} u_i^{2^{r_2}} \ldots\ldots u_{i_j}^{2^{r_j}}$$

Portanto, se não existem números inteiros $0 \leq i_1, \ldots, i_j \leq m$ com $i_1 2^{r_1} + \ldots + i_j 2^{r_j} = \ell$, temos que $v_\ell \in \ker(f^*)$; para haver a decomposição acima, portanto, todo número de Whitney de ζ^{mk} envolvendo a classe v_ℓ deve anular-se.

4.3. *Exemplo.*

Considere um fibrado vetorial $\zeta^{mk} \to V^n$, com k par; então $k = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \ldots + 2^{r_j}$, onde $r_1 > r_2 > \ldots\ldots > r_j \geq 1$, e portanto, para quaisquer inteiros $0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_j \leq m$, $i_1 2^{r_1} + \ldots + i_j 2^{r_j}$ é par.

Assim, para que exista fibrado vetorial $\eta^m \to W^n$ com $[k\,\eta^m \to W^n]_2 = [\zeta^{mk} \to V^n]_2$, é necessário que todo número de Whitney de ζ^{mk} envolvendo classes v_ℓ de ζ^{mk}, ℓ impar, se anulem.

Por exemplo, considere um fibrado vetorial $\zeta^{mk} \to RP(2n)$, com k par. Usando argumento semelhante ao utilizado no exemplo 2.6, concluimos que, se alguma classe v_{2r+1} de ζ^{mk} é não nula, (isso vale para o fibrado tangente $\tau(RP(2n))$), então não existe fibrado vetorial

$$\begin{array}{c} \eta^m \\ \downarrow \\ W^{2n} \end{array}$$

com $[k\,\eta^m \to W^{2n}]_2 = [\zeta^{mk} \to RP(2n)]_2$.

4.4. *Exemplo.*

Considere um fibrado vetorial da forma:

$$\begin{array}{c} \zeta^{2^r m} \\ \downarrow \\ V^n \end{array}$$

Nesse caso, para que haja a decomposição $[\zeta^{2^r m} \to V^n]_2 = [2^r\,\eta^m \to W^n]_2$, é necessário que todo número

de Whitney de $\zeta^{2^r m}$ envolvendo classes v_ℓ de $\zeta^{2^r m}$, com $\underline{\ell}$ não da forma $j2^r$, $j = 1,2,\ldots,m$, se anule.

Generalizando o Teorema 3.1 , temos uma resposta completa nesse caso: com a notação utilizada na observação posterior ao corolário 4.2 , se

$$f^*: H^*(BO(2^r m), Z_2) \to H^*(BO(m), Z_2)$$

temos:

$$f^*(v_s) = \begin{cases} u_j^{2^r} & , \text{ se } \quad s = j2^r \ , \ j = 1,2,\ldots,m \\ 0 & , \text{ nos outros casos} \end{cases}$$

Sejam V_1 , V_2 monômios de $H^*(BO(2^r m), Z_2)$ só envolvendo classes da forma v_{j2^r} , e tal que $f^*(V_1) = f^*(V_2)$; digamos,

$$V_1 = v_{j_1 \cdot 2^r}^{s_1} \quad v_{j_2 \cdot 2^r}^{s_2} \cdots\cdots v_{j_t \cdot 2^r}^{s_t} \ ,$$

$$V_2 = v_{i_1 \cdot 2^r}^{q_1} \quad v_{i_2 \cdot 2^r}^{q_2} \cdots\cdots v_{i_\ell \cdot 2^r}^{q_\ell} \ , \text{ onde } \ j_a \neq j_b, \ i_c \neq i_d,$$

se $a \neq b$, $c \neq d$. Então:

$$u_{i_1}^{q_1 \cdot 2^r} \quad u_{i_2}^{q_2 \cdot 2^r} \cdots\cdots u_{i_\ell}^{q_\ell \cdot 2^r} = u_{j_1}^{s_1 \cdot 2^r} \quad u_{j_2}^{s_2 \cdot 2^r} \cdots\cdots u_{j_t}^{s_t \cdot 2^r}$$

Pela estrutura de $H^*(BO(m), Z_2)$, concluímos que $\ell = t$ e , se necessário reordenando os índices, $i_1 = j_1$,

$i_2 = j_2 , \ldots , i_\ell = j_\ell , q_1.2^r = s_1.2^r , q_2.2^r = s_2.2^r ,$

$\ldots , q_\ell.2^r$, ou $q_1 = s_1 , \ldots , q_\ell = s_\ell$. Assim, $V_1 = V_2$

Considere agora $P \in H^*(BO(2^r m), Z_2)$ um polinômio com $f^*(P) = 0$. Podemos supor

$P = V_1 + V_2 + \ldots + V_s + \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \ldots + \bar{V}_q$, onde cada V_i é um monômio só envolvendo classes da forma v_{j2^r} , enquanto cada $\bar{V}_i$ é um monômio envolvendo pelo menos uma classe da forma v_p , com p não da forma $j2^r$. temos então:

$$0 = f^*(P) = f^*(V_1) + \ldots + f^*(V_s)$$

Pela caracterização de f^* , cada $f^*(V_i)$ é um monômio; a somatória acima deve ter, portanto, um numero par de termos, com a forma:

$$(f^*(V_1) + f^*(V_1')) + \ldots + (f^*(V_\mu) + f^*(V_\mu')) ,$$

onde $f^*(V_i) = f^*(V_i')$, $i = 1,2,\ldots,\mu$.

Pelo visto acima, $V_i = V_i'$, $i = 1,2,\ldots,\mu$, e portanto $P = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \ldots + \bar{V}_q$.

Isto significa que kern (f^*) = Ideal gerado por

$\{v_p \ , \ 0 \leq p \leq 2^r m \ , \ p$ não da forma $2^r j \ , \ j = 1,2,\ldots, m\}$.

Assim, a condição estipulada no início do exemplo para a decomposição de $[\zeta^{2^r m} \to V^n]_2$ é também suficiente.

4.5. *Observação.*

Seja, como antes,

$$f^* : H^*(BO(mk), Z_2) \to H^*(BO(m), Z_2) \ , \quad e$$

$$k = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \ldots + 2^{r_j} \ , \quad r_1 > r_2 > \ldots > r_j \geq 0 \ .$$

Coloquemos

A = Ideal gerado por $\{v_\ell \ , \ 0 \leq \ell \leq mk \ , \ \ell$ não da forma $i_1 . 2^{r_1} + i_2 . 2^{r_2} + \ldots + i_j . 2^{r_j}$,

$0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_j \leq m\} \subset H^*(BO(mk), Z_2)$.

Em geral, $A \neq \text{kern}\ (f^*)$. Por exemplo, se $k = 3$, $m = 1$, temos $k = 2^1 + 2^0$ e $0 = 0.2^1 + 0.2^0$,

$1 = 0.2^1 + 1.2^0$, $2 = 1.2^1 + 0.2^0$, $3 = 1.2^1 + 1.2^0$; assim, $A = \emptyset$.

Porém, $f^*(v_1^3 + v_1 v_2) = 0$ (Teorema 2.1)

É claro que $A \subset \text{kern}\ f^*$ sempre.

4.6. *Observação.*

Podemos obter resultados em casos particulares, através de cálculos exaustivos. Por exemplo, tomemos fibrado $\zeta^6 \to V^n$. Se quisermos saber em que condições $[\zeta^6 \to V^n]_2 = [3\eta^2 \to W^n]_2$, devemos determinar kern f^*, onde $f^*: H^*(BO(6), Z_2) \to H^*(BO(2), Z_2)$ é a induzida de $f: BO(2) \to BO(6)$, aplicação classificante para $\nu^2 \oplus \nu^2 \oplus \nu^2$, $\nu^2 \to BO(2)$ o fibrado universal.

Pomos

$$H^*(BO(6), Z_2) \cong Z_2[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$$

$$H^*(BO(2), Z_2) \cong Z_2[u_1, u_2]$$

A classe de $\nu^2 \oplus \nu^2 \oplus \nu^2$ é $(1 + u_1 + u_2)^3$.

Portanto, $f^*(w_1) = u_1$, $f^*(w_2) = u_1^2 + u_2$, , $f^*(w_3) = u_1^3$, $f^*(w_4) = u_1^2 u_2^2 + u_2$, $f^*(w_5) = u_2^2 u_1$, $f^*(w_6) = u_2^3$; assim, os monômios de $H^*(BO(6), Z_2)$ com grau ≤ 4 e suas respectivas imagens por f^* são:

$f^*(w_1) = u_1$, $f^*(w_1^2) = u_1^2$, $f^*(w_2) = u_1^2 + u_2$, $f^*(w_1^3) = u_1^3$, $f^*(w_1 w_2) = u_1^3 + u_1 u_2$, $f^*(w_3) = u_1^3$, $f^*(w_1^4) = u_1^4$, $f^*(w_1^2 w_2) = u_1^4 + u_1^2 u_2$, $f^*(w_1 w_3) = u_1^4$, $f^*(w_2^2) = u_1^4 + u_2^2$, $f^*(w_4) = u_1^2 u_2 + u_2^2$.

Efetuando-se todas as somas possíveis entre tais imagens, deduzimos que:

$$\ker(f^*) \cap (H^0(BO(6)) \oplus H^1(BO(6)) \oplus H^2(BO(6)) \oplus$$
$$\oplus H^3(BO(6)) \oplus H^4(BO(6))) \cong Z_2(w_1^3 + w_3) \oplus$$
$$\oplus Z_2(w_1^4 + w_1 w_3) \oplus Z_2(w_1^2 w_2 + w_2^2 + w_4) .$$

Isto origina resultados para variedades V^n, com $n \leq 4$:

i) Toda classe $[\zeta^6 \to V^2]_2$ se decompõe como $[\eta^2 \oplus \eta^2 \oplus \eta^2 \to W^2]_2$;

ii) Considere um fibrado vetorial $\zeta^6 \to V^3$, com classe total $1 + v_1 + v_2 + v_3$. Então ζ^6 é cobordante a um fibrado da forma $\eta^2 \oplus \eta^2 \oplus \eta^2 \to W^3$ se, e somente se, $v_1^3 = v_3$.

iii) Tomemos um fibrado vetorial $\zeta^6 \to S^2 \times S^2$, com classe total $1 + v_2 + v_4$. Como $W(S^2 \times S^2) = 1$, $v_1(\xi^6) = 0$ e $v_2^2 = 0$, $[\zeta^6 \to S^2 \times S^2]_2$ se decompõe como $[\eta^2 \oplus \eta^2 \oplus \eta^2 \to W^4]_2$ se , e somente, $v_4 = 0$. Se $R^2 \to S^2 \times S^2$ é o fibrado trivial bidimensional, e $\zeta^1 \times \mu^1 \to CP(1) \times QP(1)$ é o fibrado do exemplo 2.4 , temos que $R^2 \oplus (\zeta^1 \times \mu^1)$ não é cobordante a $[\eta^2 \oplus \eta^2 \oplus \eta^2 \to W^4]_2$

iv) Considere um fibrado $\zeta^6 \to RP(4)$, e seja $\alpha \in H^1(RP(4), Z_2)$ o elemento não nulo. Coloquemos $V = 1 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, a classe total de ζ^6 . Para haver a decomposição acima, devemos ter $< \alpha(v_1^3 + v_3), [RP(4)]_2 > = 0$, $< v_1^4 + v_1 v_3 , [RP(4)]_2 > = 0$, $< v_1^2 v_2 + v_2^2 + v_4, [RP(4)]_2 > = 0$, o que é equivalente ao sistema de relações:

$$v_1^3 = v_3 \quad , \quad v_1^2 v_2 + v_2^2 = v_4$$

Portanto, $[\zeta^6 \to RP(4)]_2 = [\eta^2 \oplus \eta^2 \oplus \eta^2 \to W^4]_2$ nos casos:

a) $v_1 = \alpha$, $v_2 = 0$, $v_3 = \alpha^3$, $v_4 = 0$

b) $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$

c) $v_1 = 0$, $v_2 = \alpha^2$, $v_3 = 0$, $v_4 = \alpha^4$

d) $v_1 = \alpha$, $v_2 = \alpha^2$, $v_3 = \alpha^3$, $v_4 = 0$

O teorema abaixo mostra como o fato de a classe de cobordismo de um fibrado se decompor pode influir na classe de cobordismo irrestrita de uma involução diferenciável $T: M^n \to M^n$, M^n variedade fechada:

4.7. *Teorema.*

Seja $T: M^{n+2k+1} \to M^{n+2k+1}$ involução com $F(T) = F^n$, onde $H^1(F^n, Z_2) = 0$.

Suponha que o fibrado normal $\nu^{2k+1} \to F^n$ se decomponha como $\eta^1 \oplus \eta^1 \oplus \ldots \oplus \eta^1 \to W^n$. Então $[T, M^{n+2k+1}]_2 = 0$ em $I_{n+2k+1}(Z_2)$.

Prova

Sejam $V = 1 + v_1 + \ldots + v_{2k+1}$, $W = 1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, $\bar{V} = 1 + \bar{v}_1 + \ldots + \bar{v}_{2k+1}$, $\bar{W} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots + \bar{w}_n$, $U = 1 + u$, classes de Stiefel-Whitney de ν^{2k+1}, F^n, $\eta_1 \oplus \eta_1 \oplus \ldots \oplus \eta_1$, W^n, η_1, respectivamente.

Então, $\bar{V} = (1 + u)^{2k+1}$, e portanto,

$v_i = \binom{2k+1}{i} u^i$.

Denotemos por $W^{(r)}$, $V^{(r)}$, $\bar{W}^{(r)}$, $\bar{V}^{(r)}$, monômios nas correspondentes classes com grau r.

Para $n - r > 0$, temos:

$\langle W^{(r)} V^{(n-r)}, [F^n]_2 \rangle = \langle \bar{W}^{(r)} \bar{V}^{(n-r)}, [W^n]_2 \rangle =$

$= \langle W^{(r)} \varepsilon u^{n-r}, [W^n]_2 \rangle$, onde $\varepsilon = 0$ ou 1 .

Como $\bar{v}_1 = \binom{2k+1}{1} u = u$,

$\langle W^{(r)} V^{(n-r)}, [F^n]_2 \rangle = \varepsilon \langle \bar{W}^{(r)} \bar{v}_1^{n-r}, [W^n]_2 \rangle =$

$= \varepsilon \langle W^{(r)} v_1^{n-r}, [F^n]_2 \rangle = 0$, uma vez que $H^1(F^n, Z_2) = 0$.

Isso implica que $\nu^{2k+1} \to F^n$ tem os mesmos números de Whitney do fibrado trivial $R^{2k+1} \to F^n$, e portanto $[\nu^{2k+1} \to F^n]_2 = [R^{2k+1} \to F^n]_2$ em $\mathfrak{N}_n(BO(2k+1))$.

Considere a sequência exata:

$$0 \to I_{n+2k+1}(Z_2) \xrightarrow{j_*} \mathfrak{M}_{n+2k+1} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_{n+2k}(Z_2) \to 0$$

Temos $j_* [T, M^{n+2k+1}]_2 = [\nu^{2k+1} \to F^n]_2 =$

$= [R^{2k+1} \to F^n]_2$, portanto:

$$\partial [R^{2k+1} \to F^n]_2 = 0$$

Por outro lado,

$\partial [R^{2k+1} \to F^n]_2 = \{B, S^{2k+1} \times F^n\}_2 = [F^n]_2 \{A, S^{2k+1}\}_2$,onde

$B(x,y) = (A(x),y)$ e $A: S^{2k+1} \to S^{2k+1}$

é a involução antipodal.

Agora, $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ é um $\mathfrak{N}_*$- módulo livre graduado, gerado pelas classes $\{A, S^j\}$, $j = 0,1,2,3,\ldots$

Assim $[F^n]_2 \{A, S^{2k+1}\}_2 = 0$ implica que $[F^n]_2 = 0$ em

Segue que os números de Whitney de $\nu^{2k+1} \to F^n$ da forma $< W^{(r)} V^{(n-r)}, [F^n]_2 >$, com $n - r = 0$, também são nulos, o que acarreta $[\nu^{2k+1} \to F^n]_2 =$

$= j^* [T, M^{n+2k+1}]_2 = 0$ em $\mathfrak{M}_{n+2k+1}$. Portanto,

$[T, M^{n+2k+1}]_2 = 0$ em $I_{n+2k+1}(Z_2)$. ■

Decorre do teorema acima que, se (T, M^{n+1}) é uma involução com $F(T) = F^n$ e $H^1(F^n, Z_2) = 0$, então $[T, M^{n+1}]_2 = 0$ em $I_{n+1}(Z_2)$.

CAPÍTULO II

CLASSES DE COBORDISMO DE INVOLUÇÕES EM DIMENSÕES BAIXAS

1. *Introdução*

Um problema que aparece na Teoria de Cobordismo de Involuções é o seguinte: fixadas variedades fechadas, $F^0, F^1, \ldots, F^{n-1}, F^n$, com F^i de dimensão i, suponha M^n uma variedade fechada C^∞ e $T: M^n \to M^n$ uma involução com $F(T) = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$; o que se pode concluir a respeito da classe de cobordismo irrestrita $[T,M^n]_2 \in I_n(Z_2)$?

Diversos resultados existem nesta direção; por exemplo:

Teorema A

Suponha (T,M^n) variedade com involução, $n > 2r$, tal que $F(T)$ é o espaço projetivo real $RP(2r)$. Então $n = 4r$, e (T,M^n) é cobordante a $(S, RP(2r) \times RP(2r))$, $S(x,y) = (y,x)$. [13 ; Teorema Principal] ■

Teorema B

Suponha (T,M^{2n}) variedade com involução, com $F(T) = F^n$ de dimensão constante n. Então

$[T,M^{2n}]_2 = [S,F^n \times F^n]_2$ em $I_{2n}(Z_2)$, onde $S(x,y)=(y,x)$.
[8 ; Par. 5; Pg. 320] ■

Teorema C

Seja (T,M^n), $n > 0$, uma involução em uma variedade fechada tal que $F(T)$ é a união disjunta $S^k \cup$ pto de um ponto com a k-esfera. Então $k = 1,2,4$ ou 8, $n = 2k$, e (T,M^n) é cobordante a $(L,KP(2))$, $KP(2)$ sendo o apropriado plano projetivo, e $L[w_0,w_1,w_2] = [-w_0,w_1,w_2]$ em coordenadas homogêneas. [4 ; Teorema 28.4; pg 100] ■

Nesta seção, obtemos vários resultados nesta direção, utilizando, em geral, a teoria desenvolvida em [4 ; Capit.II] e a fórmula de Kosniowski-Stong [Teor.7.1 pg 22]; tal fórmula, de difícil manipulação quando usada em casos gerais, torna-se eficiente no tratamento de casos envolvendo dimensões (e codimensões) baixas.

2. *Involuções fixando espaços projetivos em dimensões baixas*

2.1. *Observação*

Existe um operador $\Gamma: I_*(Z_2) \to I_*(Z_2)$, o qual é um homomorfismo de $\mathfrak{N}_*$ - módulos de grau +1, introduzido em [12; pg. 131]. Dada (T,M^n) variedade com involução,

consideramos em $S^1 \times M^n$ as involuções:

$$T_1: S^1 \times M^n \to S^1 \times M^n, \quad T_1(z,x) = (\bar{z},x)$$

$$T_2: S^1 \times M^n \to S^1 \times M^n, \quad T_2(z,x) = (-z,Tx)$$

Como T_2 é livre de pontos fixos, o quociente $V^{n+1} = \frac{S^1 \times M^n}{T_2}$ é ainda uma variedade fechada, C^∞. Como T_1 e T_2 comutam, T_1 induz uma involução $T_1: V^{n+1} \to V^{n+1}$.

Então $\Gamma: I_*(Z_2) \to I_*(Z_2)$ é definido por $\Gamma([T,M^n]_2) = [T_1,V^{n+1}]_2$. Se $\eta \to F(T)$ é o fibrado normal do conjunto de pontos fixos de (T,M^n), então $(\eta \oplus R \to F(T)) \cup (R \to M^n)$ é o fibrado normal do conjunto de pontos fixos de (T_1,V^{n+1}).

2.2. *Lema*

Seja $\eta^2 \to V^n$ um fibrado vetorial bidimensional, V^n variedade fechada.

Então $[RP(\eta^2)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_{n+1}$. [5 ; Lema 2.1; pag. 34]. ■

2.3. *Observação*

Sejam as involuções $(\tau_1, RP(4))$, $(\tau_2,RP(3))$, $\tau_1([x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]) = [-x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$, $\tau_2([x_0,x_1,x_2,x_3]) = [-x_0,x_1,x_2,x_3]$. Os conjuntos de pontos fixos e fibrados normais de τ_1 e τ_2 são, respectivamente,

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_3^1 & & R^4 & & \xi_2^1 & & R^3 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & e & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & pto & & RP(2) & & pto \end{array} ,$$

onde ξ_3^1, ξ_2^1 são os fibrados-linha canônicos.

Considere a involução $(S, RP(2) \times RP(2))$, $S(x,y) = (y,x)$; então S fixa $RP(2)$ com fibrado normal sendo equivalente ao fibrado tangente $\tau(RP(2)) \to RP(2)$.

2.4. *Teorema*

Suponha M^4 uma variedade fechada 4-dimensional e $T: M^4 \to M^4$ uma involução com $F(T) = RP(3) \cup RP(2) \cup$ pto (união disjunta). Então $[T,M^4]_2 = [S,RP(2)\times RP(2)]_2 + [\tau_1, RP(4)]$, ou $[T,M^4]_2 = \Gamma([\tau_2, RP(3)]_2$ em $I_4(Z_2)$.

Prova

Sejam $\eta^2 \to RP(2)$, $\nu^1 \to RP(3)$, os fibrados normais. Denotemos por

$W(\eta^2) = 1 + v_1 + v_2$

$W(\nu^1) = 1 + u$, as classes totais de η^2, ν^1, e por α_1, α_2, os elementos não nulos de $H^1(RP(2),Z_2)$, $H^1(RP(3),Z_2)$, respectivamente.

Pela fórmula de Kosniowski-Stong e teorema 7.2 (Cap.0), temos:

$$0 = \langle w_1(M^4)^2,[M^4]_2\rangle = \sigma_1(x_1,x_2,x_3,x_4)^2[M^4]_2 =$$

$$= \frac{\sigma_1(1+y_1,1+y_2,1+y_3,1+y_4)^2}{\prod^4(1+y_i)}[pto]_2 +$$

$$+ \frac{\sigma_1(1+y_1,1+y_2,z_1,z_2)^2}{(1+y_1)(1+y_2)}[RP(2)]_2 +$$

$$+ \frac{\sigma_1(1+y,z_1,z_2,z_3)^2}{1+y}[RP(3)]_2 = \prod_{i=1}^{4}(1+y_i+y_i^2+y_i^3+\ldots).$$

$$\left(\sum_{p+q\leq 1}\binom{4-p}{1-p-o}\sigma_p(y_1,y_2,y_3,y_4)\right)^2[pto]_2 + (1+y_1+y_1^2+\ldots)$$

$$(1+y_2+y_2^2+\ldots)\left(\sum_{p+q\leq 1}\binom{2-p}{1-p-q}\sigma_p(y_1,y_2)\sigma_q(z_1,z_2)\right)^2$$

$$[RP(2)]_2 + (1+y+y^2+\ldots).$$

$$\left(\sum_{p+q\leq 1}\binom{1-p}{1-p-q}\sigma_p(y)\sigma_q(z_1,z_2,z_3)\right)^2[RP(3)]_2 =$$

$$= \prod_{i=1}^{4}(1+y_i+y_i^2+y_i^3+\ldots)\left(\binom{4}{1}\right)^2[pto]_2 +$$

$$+ (1+y_1+y_2+(y_1+y_2)^2+y_1y_2 + \text{termos de grau} > 2).$$

$$.\left(\binom{2}{1}+\binom{1}{0}\sigma_1(y_1,y_2)+\binom{2}{0}\sigma_1(z_1,z_2)\right)^2[RP(2)]_2 +$$

$$+ (1+\sigma_1(y)+\sigma_1(y)^2+\ldots)$$

$$\left(\binom{1}{1}+\binom{0}{0}\sigma_1(y)+\binom{0}{0}\sigma_1(z_1,z_2,z_3)\right)^2[RP(3)]_2 =$$

$= (1+v_1+v_1^2+v_2+$ termos c/grau $> 2)(v_1^2+ \ w_1(RP(2))^2)[RP(2)]_2$

$+ (1+u+u^2+u^3+\ldots)(1+u^2+w_1(RP(3))^2)\ [RP(3)]_2 =$

$= v_1^2[RP(2)]_2 + \alpha_1^2[RP(2)]_2 + u^3[RP(3)]_2 + u^3[RP(3)]_2 =$

$= v_1^2[RP(2)]_2 + \alpha_1^2[RP(2)]_2$. Segue que $v_1^2 = \alpha_1^2$, e portanto, $v_1 = \alpha_1$ (*)

Aplicando novamente a fórmula de Kosniowski--Stong, temos:

$\langle w_1(M^4)^4,[M^4]_2\rangle = \sigma_1(x_1,x_2,x_3,x_4)^4[M^4]_2 =$

$$= \frac{\sigma_1(1+y_1,1+y_2,1+y_3,1+y_4)^4}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)}[pto]_2 +$$

$$+ \frac{\sigma_1(1+y_1,1+y_2,z_1,z_2)^4}{\prod_{i=1}^{2}(1+y_i)}[RP(2)]_2 + \frac{\sigma_1(1+y,z_1,z_2,z_3)^4}{1+y}[RP(3)]_2 =$$

$= (1+v_1+v_1^2+v_2+\ \ldots)(v_1^4 + \alpha_1^4)[RP(2)]_2 + (1+u+u^2+\ldots)(1+u^4)[$

$[RP(3)]_2 = u^3[RP(3)]_2$ (**)

Pelo Teorema 6.1, Cap.0, temos,

$[M^4]_2 = [RP(\eta^2 \oplus R)]_2 + [RP(\nu^1 \oplus R]_2 + [RP(4)]_2$ em $\mathfrak{N}_4$.

Assim,

$\langle w_1(M^4)^4,[M^4]_2\rangle = \langle w_1(RP(\eta^2\oplus R))^4,[RP(\eta^2 \oplus R)]_2\rangle +$

$+ \langle w_1(RP(\nu^1 \oplus R))^4, [RP(\nu^1 \oplus R)]_2\rangle + \langle w_1(RP(4))^4, [RP(4)]\rangle =$

$= \langle w_1(RP(\eta^2 \oplus R))^4, [RP(\eta^2 \oplus R)]_2\rangle + 1$, uma vez que

$\langle w_1(RP(4))^4, [RP(4)]_2\rangle = 1$ e, sendo $\nu^1 \oplus R$ bidimensional,

$[RP(\nu^1 \oplus R)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_4$ (Lema 2-2) (***)

Calculemos $w_1(RP(\eta^2 \oplus R))^4$; sejam c, $\bar{c}$ as classes características dos fibrados-involução $(A,S(\eta^2 \oplus R))$, $(A,S(\eta^2))$, $c \in H^1(RP(\eta^2 \oplus R),Z_1)$, $\bar{c} \in H^1(RP(\eta^2),Z_2)$; sejam

$p_1 : RP(\eta^2 \oplus R) \to RP(2)$

$p_2 : RP(\eta^2) \to RP(2)$, as projeções, e

$i : RP(\eta^2) \to RP(\eta^2 \oplus R)$ a inclusão.

Usando a fórmula de Borel-Hirzebruch:

$$w_i(RP(\eta^2 \oplus R)) = \sum_{p+q+r=1} \binom{3-p}{q} p_1^*(w_r(RP(2))v_p)\, c^q =$$

$$= \binom{3-0}{1} p_1^*(1)c + \binom{2}{0} p_1^*(v_1) + \binom{3}{0} p_1^*(\alpha_1) =$$

$$= c + p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1) = c, \text{ usando } (*)$$

Pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney, $i^*(c) = \bar{c}$; além disso, $RP(\eta^2)$ é a subvariedade em $RP(\eta^2 \oplus R)$ dual a c, ou seja, $[RP(\eta^2 \oplus R)]_2 \cap c = i_*[RP(\eta^2)]_2$ ([8, parag. 2, pg 312]). Segue que:

$$\langle w_1^4(RP(\eta^2 \oplus R)), [RP(\eta^2 \oplus R)]_2 \rangle = \langle c^4, [RP(\eta^2 \oplus R)]_2 \rangle =$$

$$= \langle c^3, [RP(\eta^2 \oplus R)] \cap c \rangle = \langle c^3, i_*[RP(\eta^2)]_2 \rangle =$$

$$= \langle i^*(c^3), [RP(\eta^2)]_2 \rangle = \langle \bar{c}^3, [RP(\eta^2)]_2 \rangle \qquad (****)$$

Agora, $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$ é um $H^*(RP(2),Z_2)$ - módulo livre graduado gerado por 1, $\bar{c}$ via p_2^*, e vale a relação:

$$\bar{c}^2 + p_2^*(v_1)\bar{c} + p_2^*(v_2) = 0$$

Suponhamos a partir de agora que $v_2 = 0$; mul-

tiplicando (cup) a relação acima por $\bar{c}$, concluimos que

$\bar{c}^3 = p_2^*(\alpha_1)\bar{c}^2$. (*****)

Por outro lado, sendo $RP(\eta^2)$ tridimensional, $w_3(RP(\eta^2)) = 0$; pela fórmula de Borel-Hirzebruch,

$$0 = w_3(RP(\eta^2)) = \sum_{p+q+r=3} \binom{2-p}{q} p_2^*(w_r(RP(2))v_p)\bar{c}^q =$$

$$= p_2^*(w_1(RP(2))v_1)\bar{c} + p_2^*(w_2(RP(2))v_1) + \bar{c}^2 p_2^*(w_1(RP(2)) =$$

$$= p_2^*(\alpha_1^2)\bar{c} + \bar{c}^2\ p_2^*(\alpha_1)$$

Pela estrutura de $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$, $p_2^*(\alpha_1^2)\bar{c} \neq 0$; lembrando que $RP(\eta^2)$ é uma variedade conexa, isso significa que $\bar{c}^2 . p_2^*(\alpha_1)$ é o elemento não nulo de $H^3(RP(\eta^2),Z_2)$, o mesmo acontecendo com $\bar{c}^3$, por (*****)

Por (****), temos então

$\langle w_1^4(RP(\eta^2 \oplus R)), [RP(\eta^2 \oplus R)]_2 \rangle = 1$, e por (***),

$\langle w_1(M^4)^4, [M^4]_2 \rangle = 0$.

Finalmente, por (**), $u^3[RP(3)]_2 = 0$, o que acarreta $u = 0$.

Agora, $v_1 = \alpha_1$, $v_2 = 0$, $u = 0$ significa que

$$\begin{array}{ccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & R^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & RP(2) & & pto \end{array}$$

tem os mesmos números de Whitney de

$$\begin{array}{ccccc} R & & \xi_2^1 \oplus R & & R^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & RP(2) & & pto \end{array}$$

Pelas observações 2.1 e 2.3, concluimos que $[T,M^4]_2 = \Gamma([\tau_2, RP(3)]_2)$ em $I_n(Z_2)$.

Suponhamos agora $v_2 = \alpha_1^2$. Nesse caso, ainda $0 = w_3(RP(\eta^2)) = p^*(\alpha_1^2)\bar{c} + \bar{c}^2 p_2^*(\alpha_1)$.

A relação

$$\bar{c}^2 + p_2^*(v_1)\bar{c} + p_2^*(v_2) = 0$$

multiplicada por $\bar{c}$, acarreta

$$\bar{c}^3 = p_2^*(\alpha_1)\bar{c}^2 + p_2^*(\alpha_1^2)\bar{c} = 0 \quad \text{em} \quad H^3(RP(\eta^2),Z_2)$$

Por (****) e (***) temos $\langle w_1^4(M^4),[M^4]_2\rangle = 1$; portanto, por (**), $u^3[RP(3)]_2 = 1$, ou seja, $u = \alpha_2$.

Lembrando que a classe total de $RP(2)$ é: $W(RP(2)) = (1+\alpha_1)^3 = 1 + \alpha_1 + \alpha_1^2$, concluimos que

$$\begin{array}{ccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & R^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & RP(2) & & pto \end{array}$$

tem os mesmos números de Whitney de

$$\begin{array}{ccccc} \xi_3^1 & & \tau(RP(2)) & & R^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & RP(2) & & pto \end{array}$$

Pela observação 2.3,

$[T,M^4]_2 = [S,RP(2) \times RP(2)]_2 + [\tau_1, RP(4)]_2$ em $I_4(Z_2)$. ■

Se $w(M^n)$ é um monômio nas classes tangenciais da variedade M^n, substituiremos a notação $\langle w(M^n),[M^n]_2\rangle$ por $w[M^n]_2$; em geral, se $\alpha \in H^*(M^n,Z_2)$, usaremos $\alpha[M^n]_2$ no lu-

gar de $\langle\alpha,[M^n]_2\rangle$.

2.5. Teorema

Sejam M^6 uma variedade fechada 6-dimensional e $T: M^6 \to M^6$ involução com $F(T) = RP(5) \cup RP(4) \cup$ pto (união disjunta). Então $[T,M^6]_2 = \Gamma(\tau,RP(5)]_2)$, onde $\tau: RP(5) \to RP(5)$ é dada por $\tau([x_0,x_1,\ldots,x_5]) =$ $= [-x_0,x_1,x_2,\ldots,x_5]$.

Prova

Suponhamos $\eta^2 \to RP(4)$, $\nu^1 \to RP(5)$, fibrados normais, e

$$W(\eta^2) = 1 + v_1 + v_2$$

$$W(\nu^1) = 1 + u,$$

as classes de Stiefel-Whitney.

Denotemos por α_1, α_2, os elementos não nulos de $H^1(RP(4),Z_2)$,$H^1(RP(5),Z_2)$, respectivamente.

Aplicando a fórmula de Kosniowski-Stong e o Teorema 7.2, Cap. 0, temos:

$$0 = w_1^4[M^6]_2 = \sigma_1(x_1,x_2,\ldots,x_6)^4[M^6]_2 =$$

$$= \frac{\sigma_1(1+y_1,\ldots,1+y_6)^4}{\prod_{i=1}^{6}(1+y_i)}[pto]_2 +$$

$$+ \frac{\sigma_1(1+y_1,1+y_2,z_1,z_2,\ldots,z_4)^4}{(1+y_1)(1+y_2)}[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{\sigma_1(1+y,z_1,\ldots,z_5)}{1+y}[RP(5)]_2 =$$

$$= \prod_{i=1}^{6} (1+y_i+y_i^2+\ldots)\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{6-p}{1-p}\sigma_p(y_1,\ldots,y_6)\Big)^4[pto]_2 +$$

$$+ (1+y_1+y_1^2+\ldots)(1+y_2+y_2^2+\ldots)\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{2-p}{1-p-q}\sigma_p(y_1,y_2)\cdot$$

$$\sigma_q(z_1,\ldots,z_4)\Big)^4[RP(4)]_2 + (1+y+y^2+\ldots)$$

$$\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{1-p}{1-p-q}\sigma_p(y)\sigma_q(z_1,\ldots,z_5)\Big)^4[RP(5)]_2 =$$

$$= \prod_{i=1}^{6} (1+y_i+y_i^2+\ldots)\Big(\binom{6}{1}\Big)^4[pto]_2 +$$

$$+ (1+v_1+v_1^2+v_2+\text{termos c/grau} > 2)\Big(\binom{2}{1}+\binom{1}{0}\sigma_1(y_1,y_2)+$$

$$+ \binom{2}{0}\sigma_1(z_1,\ldots,z_4)\Big)^4[RP(4)]_2 + (1+u+u^2+\ldots)\Big(\binom{1}{1}+$$

$$+ \binom{0}{0}\sigma_1(y_1,y_2)+\binom{0}{0}\sigma_1(z_1,\ldots,z_4)\Big]^4[RP(5)]_2 =$$

$$= (1+v_1+v_1^2+v_2+\text{termos c/grau} > 2)(v_1^4+w_1(RP(4))^4)[RP(4)]_2$$

$$+ (1+u+u^2+\ldots)(1+u^4+w_1(RP(5))^4)[RP(5)]_2 =$$

$$= v_1^4[RP(4)]_2 + \alpha_1^4[RP(4)_2 + u^5[RP(5)]_2 + u^5[RP(5)]_2$$

Portanto, $v_1^4 = \alpha_1^4$, ou seja, $v_1 = \alpha_1$.

Novamente,

$$0 = w_2[M^6]_2 = \sigma_2(x_1,x_2,\ldots,x_6)[M^6]_2 = \frac{\sigma_2(1+y_1,\ldots,1+y_6)}{\prod_{i=1}^{6}(1+y_i)}[pto]_2$$

$$+ \frac{\sigma_2(1+y_1,1+y_2,z_1,\ldots,z_4)}{(1+y_1)(1+y_2)}[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{\sigma_2(1+y,z_1,\ldots,z_5)}{1+y}[RP(5)]_2 = \prod_{i=1}^{6}(1+y_i+y_i^2+\ldots)\left(\binom{6}{2}\right)^2[pto]_2 +$$

$$+ (1+y_1 + y_2 + (y_1+y_2)^2 + y_1y_2 + (y_1+y_2)^3 + (y_1+y_2)^4 +$$

$$+ y_1y_2(y_1+y_2)^2 + y_1^2y_2^2 + \text{termos c/grau} > 4)(1+\sigma_1(y_1,y_2) +$$

$$+ \sigma_2(y_1,y_2) + \sigma_1(y_1,y_2)\sigma_1(z_1,\ldots,z_4) + \sigma_2(z_1,\ldots,z_4))[RP(4)]_2$$

$$+ (1 + y + y^2 + \ldots)(\sigma_1(z_1,\ldots,z_5) + \sigma_1(y)\sigma_1(z_1,\ldots,z_5) +$$

$$+ \sigma_2(z_1,\ldots,z_5))[RP(5)]_2 = 1 + (1+v_1+v_1^2+v_2+v_1^3+v_1^4+v_1^2v_2+v_2^2+\ldots$$

$$+ \ldots >4)(1+v_1+v_2+v_1w_1(RP(4)) + w_2(RP(4))[RP(4)]_2 +$$

$$+ (1+u+u^2+\ldots)(w_1(RP(5)) + u\, w_1(RP(5)) + w_2(RP(5))[RP(5)]_2 =$$

$$= 1+(v_1^3w_1(RP(4)) + v_2v_1w_1(RP(4))[RP(4)]_2 +$$

$$+ w_2(RP(5))u^3[RP(5)]_2 = 1 + \alpha_1^4[RP(4)]_2 +$$

$$+ v_2\alpha_1^2[RP(4)]_2 + \alpha_2^2u^3[RP(5)]_2 .$$

Segue que $v_2\alpha_1^2[RP(4)]_2 = \alpha_2^2\, u^3[RP(5)]_2$.

Isso acarreta que $v_2 \in H^2(RP(4),Z_2)$ é nulo se, e somente se, $u \in H^1(RP(5),Z_2)$ é nulo.

Suponhamos $v_2 = \alpha_1^2$ (e portanto $u = \alpha_2$) e considere a sequência exata:

$$0 \to I_6(Z_2) \xrightarrow{j_*} \mathfrak{M}_6 \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_5(Z_2) \to 0$$

Temos $\partial j_*([T,M^6]_2) = \{A,S(\eta^2)\}_2 + \{A,S(\nu^1)\}_2 + \{A,S^5\}_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_5(Z_2)$, portanto seus números de involu-

ção são todos nulos. Sejam $c_1 \in H^1(RP(\eta^2),Z_2)$, $c_2 \in H^1(RP(\nu^1),Z_2)$, $c_3 \in H^1(RP(5),Z_2)$, as classes características dos fibrados-involução $(A,S(\eta^2))$, $(A,S(\nu^1))$, (A,S^5), respectivamente, e

$$p_1 : RP(\eta^2) \to RP(4)$$

$$p_2 : RP(\nu^1) \to RP(5), \text{ as projeções.}$$

Então

$$c_1^5[RP(\eta^2)]_2 + c_2^5[RP(\eta^1)]_2 + c_3^5[RP(5)]_2 = 0$$

Como ν^1 é unidimensional, $p_2^*: H^*(RP(5),Z_2) \to H^*(RP(\nu^1),Z_2)$ é isomorfismo, e em $H^*(RP(\nu^1),Z_2)$ vale a relação $c_2 + p_2^*(u) = 0$; assim, $c_2^5 = p_2^*(u^5) = p_2^*(\alpha_2^5)$ é o elemento não nulo de $H^5(RP(\nu^1),Z_2)$.

Segue que $c_2^5[RP(\nu^1)]_2 = 1$

O fibrado linha associado à involução antipodal (A,S^5) é o fibrado linha canônico $\xi_5^1 \to RP(5)$; portanto $c_3 \in H^1(RP(5),Z_2)$ é não nulo, o que acarreta $c_3^5[RP(5)]_2 = 1$.

Agora, $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$ é um $H^*(RP(4),Z_2)$-módulo livre graduado, gerado por 1, c_1, via $p_1^*:H^*(RP(4),Z_2) \to H^*(RP(\eta^2),Z_2)$, sujeito à relação

$$c_1^2 + c_1p_1^*(v_1) + p_1^*(v_2) = c_1^2 + c_1p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1^2) = 0$$

Então:

$$\begin{aligned} c_1^4 &= c_1^2p_1^*(\alpha_1^2) + p_1^*(\alpha_1^4) = \\ &= (c_1p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1^2))(p_1^*(\alpha_1^2)) + p_1^*(\alpha_1^4) = \\ &= c_1p_1^*(\alpha_1^3) + p_1^*(\alpha_1^4) + p_1^*(\alpha_1^4) = c_1p_1^*(\alpha_1^3). \end{aligned}$$

Portanto

$$c_1^5 = c_1^2\, p_1^*(\alpha_1^3) = (c_1 p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1^2))p_1^*(\alpha_1^3) =$$

$$= c_1 p_1^*(\alpha_1^4) + p_1^*(\alpha_1^5) = c_1 p_1^*(\alpha_1^4),$$ uma vez que $\alpha_1^5 \in H^5(RP(4),Z_2)$.

Pela estrutura de $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$, $c_1 p_1^*(\alpha_1^4)$ é o único elemento não nulo de $H^5(RP(\eta^2),Z_2)$; isto significa que $c_1^5[RP(\eta^2)]_2 = 1$.

Segue que

$$c_1^5[RP(\eta^2)]_2 + c_2[RP(\nu^1)]_2 + c_3^5[RP(5)]_2 = 1 + 1 + 1 = 1,$$ contradição.

Portanto, $v_2 = 0$ e $u = 0$. O fibrado

$$\begin{array}{ccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & R^6 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(5) & & RP(4) & & pto \end{array}$$

tem portanto os mesmos números de Whitney de

$$\begin{array}{ccccc} R & & \xi_4^1 \oplus R & & R^6 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(5) & & RP(4) & & pto \end{array}$$

onde $\xi_4^1 \to RP(4)$ é o fibrado-linha canônico. Segue o resultado. ■

Os teorema 2.4 e 2.5 sugerem, de maneira geral, as seguintes questões:

1) Dadas variedades fechadas $F^0, F^1, \ldots, F^n$, com F^i de

dimensão i, existe uma classe $\alpha \in I_n(Z_2)$ contendo um representante (T,M^n) com $F(T) = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$?

2) Caso afirmativo, quantas e quais são as classes $\alpha \in I_n(Z_2)$ satisfazendo tal condição?

É fácil dar um exemplo de não existência de tais classes: se (T,M^n) é tal que $F(T) = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$, devemos ter $\chi(M^n) = \chi(\bigcup_{i=0}^{n} F^i)$ módulo 2 [4 ; Lema 28-2]; portanto, não existe (T,M^n) com $F(T) = RP(2r)$, se $n = 2k + 1$.

O teorema abaixo, que resolve um caso particular das questões 1) e 2), ilustra o grau de dificuldade que a questão 1) pode apresentar.

2.6. *Teorema*

i) Existe uma variedade conexa fechada M^5, 5-dimensional, e uma involução $T: M^5 \to M^5$, com $F(T) = RP(2) \cup RP(4)$ (união disjunta).

ii) Se (S,B^5) é uma variedade com involução com $F(S) = RP(2) \cup RP(4)$, então $[S,B^5]_2 = [T,M^5]_2$ em $I_5(Z_2)$.

Prova

i) Seja $\tau_1: RP(5) \to RP(5)$, $\tau_1[x_0,x_1,\ldots,x_5] =$

$= [-x_0, x_1, \ldots, x_5]$; temos $F(\tau_1) = RP(4) \cup$ pto, com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc} \xi_4^1 & & R^5 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & \text{pto} \end{array}$$

onde ξ_4^1 denota o fibrado linha canônico.

Sejam as involuções:

$r: S^2 \to S^2$, $\tau_2: RP(3) \to RP(3)$,

$r(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$, $\tau_2[x_0, x_1, x_2, x_3] =$

$= [-x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Em $S^2 \times RP(3)$, consideremos as involuções $T_1(x,w) = (A(x), \tau_2(w))$, $T_2(x,w) = (r(x), w)$, onde A é a antipodal.

Como T_1 não tem pontos fixos, o quociente $\frac{S^2 x RP(3)}{T_1}$ é uma variedade fechada, C^∞, 5-dimensional; como T_1 e T_2 comutam, T_2 induz uma involução:

$$T_2 : \frac{S^2 \times RP(3)}{T_1} \to \frac{S^2 \times RP(3)}{T_1}$$

O conjunto de pontos fixos de T_2 é $\frac{S^1 \times RP(3)}{A \times \tau_2} \cup RP(2) \cup$ pto; o fibrado normal da componente $RP(2)$ é $\xi_2^1 \oplus R^2 \to RP(2)$, $\xi_2^1 \to RP(2)$ sendo o fibrado linha canônico [5 ; parag. 5; pg 40]

Denotemos por $\mu^1 \to \frac{S^1 \times RP(3)}{A \times \tau_2}$ o fibrado normal (unidimensional) da componente $\frac{S^1 \times RP(3)}{A \times \tau_2}$.

Agora, $[\xi_4^1 \to RP(4)]_2$, $[\xi_4^1 \oplus R^2 \to RP(2)]_2$ $\varepsilon \mathfrak{M}_5 = \sum_{i=0}^{5} \mathfrak{N}_i(BO(5-i))$; afirmamos que $\partial([\xi_4^1 \to RP(4)]_2) = \partial([\xi_2^1 \oplus R^2 \to RP(2)]_2)$ em $\mathfrak{N}_4(Z_2)$; para tanto, devemos ter os números de involução dos fibrados-involução$(A,S(\xi_4^1))$, $(A,S(\xi_2^1 \oplus R^2))$ iguais.

Sejam $\alpha_1 \varepsilon H^1(RP(4),Z_2)$ o elemento não nulo, e $c_1 \varepsilon H^1(RP(\xi_4^1),Z_2)$ a classe característica de $(A,S(\xi_4^1))$; considere $p_1: RP(\xi_4^1) \to RP(4)$ a projeção.

A classe tangencial de $RP(4)$ é $(1+\alpha_1)^5 = 1 + \alpha_1 + \alpha_1^4$; portanto a classe tangencial de $RP(\xi_4^1)$ é:

$W = (1 + p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1^4))(1 + c_1 + p_1^*(\alpha_1)) =$

$= (1 + p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1^4))$, uma vez que em $H^*(RP(\xi_4^1),Z_2)$ vale a relação $c_1 + p_1^*(\alpha_1) = 0$. Também

$$w_1^i c_1^{4-i} = p_1^*(\alpha_1)^i p_1^*(\alpha_1)^{4-i} = p_1^*(\alpha_1^4), \quad i = 0,1,2,3,4.$$

Os números $w_1^i c_1^{4-i}[RP(\xi_4^1)]_2$, $i = 0,1,\ldots,4$, $w_4[RP(\xi_4^1)]_2$ são, portanto, os únicos números de involução de $(A,S(\xi_4^1))$ não nulos.

Sejam $\alpha_2 \varepsilon H^1(RP(2),Z_2)$ o elemento não nulo, $p_2: RP(\xi_2^1 \oplus R^2) \to RP(2)$ a projeção, e c_2 e $H^1(RP(\xi_2^1 \oplus R^2))$ a classe característica de $(A,S(\xi_2^1 \oplus R^2)$.

Temos que $H^*(RP(\xi_2^1 \oplus R^2),Z_2)$ é um $H^*(RP(2),Z_2)$-módulo livre graduado via $p_2^*:H^*(RP(2),Z_2) \to$

$\to H^*(RP(\xi_2^1 \oplus R^2), Z_2)$, gerado pelas classes 1, c_2, c_2^2, sujeito à relação $c_2^3 + c_2^2 p_2^*(\alpha_2) = 0$. (*)

A classe tangencial de $RP(2)$ é $(1+\alpha_2)^3 = 1 + \alpha_2 + \alpha_2^2$; a classe de $RP(\xi_2^1 \oplus R^2)$ é, portanto:

$$\bar{W} = (1 + p_2^*(\alpha_2) + p_2^*(\alpha_2^2))\,((1+c_2)^3 + (1+c_2)^2 p_2^*(\alpha_2)) =$$

$$= (1+p_2^*(\alpha_2) + p_2^*(\alpha_2^2))(1+c_2+c_2^2 + c_2^3 + p_2^*(\alpha_2) + c_2^2 p_2^*(\alpha_2)).$$

Segue que

$$\bar{w}_1 = c_2 + p_2^*(\alpha_2) + p_2^*(\alpha_2) = c_2\,;\ \bar{w}_2 = p_2^*(\alpha_2) + c_2 p_2^*(\alpha_2) + c_2^2 + p_2^*(\alpha_2^2) = c_2 p_2^*(\alpha_2) + c_2^2\ ;$$

$$\bar{w}_3 = c_2 p_2^*(\alpha_2^2) + c_2^2 p_2^*(\alpha_2) + c_2^3 + p_2^*(\alpha_2^3) + c_2^2\ p_2^*(\alpha_2) = c_2 p_2^*(\alpha_2^2) + c_2^2\ p_2^*(\alpha_2);$$

$$\overline{w_4} = c_2^2\ p_2^*(\alpha_2^2) + c_2^3\ p_2^*(\alpha_2) + c_2^2\ p_2^*(\alpha_2^2) = c_2^3\ p_2^*(\alpha_2).$$

Multiplicando a relação (*) por c_2 e por $p_2^*(\alpha_2)$, obtemos:

$$c_2^4 + c_2^3 p_2^*(\alpha_2) = 0 \qquad (**)$$

$$c_2^3 p_2^*(\alpha_2) + c_2^2 p_2^*(\alpha_2^2) = 0 \qquad (***)$$

Pela estrutura de $H^*(RP(\xi_2^1 \oplus R^2), Z_2)$, $c_2^2 p_2^*(\alpha_2^2)$ é o elemento não nulo de $H^4(RP(\xi_2^1 \oplus R^2), Z_2)$.

Portanto $c_2^3\ p_2^*(\alpha_2) = c_2^4$ é o elemento não nulo de $H^4(RP(\xi_2^1 \oplus R^2))$, e os números de involução

$\bar{w}_4[RP(\xi_2^1 \oplus R^2)]_2$, $\quad \bar{w}_1^i \; c_2^{4-i}[RP(\xi_2^1 \oplus R^2)]_2 = c_2^4[RP(\xi_2^1 \oplus R^2)]_2$,

$i = 0,1,\ldots,4$ são não nulos.

Temos, por outro lado:

$$\bar{w}_2{}^2 = c_2^2 \; p_2^*(\alpha_2^2) + c_2^4 = 0$$

$$\bar{w}_2 \; \bar{w}_1{}^2 = (p_2^*(\alpha_2)c_2 + c_2^2)c_2^2 = c_2^4 + c_2^3 \; p_2^*(\alpha_2) = 0$$

$$\bar{w}_1 \; \bar{w}_3 = c_2(c_2 p_2^*(\alpha_2^2) + c_2^2 \; p_2^*(\alpha_2)) = c_2^2 \; p_2^*(\alpha_2^2) + c_2^3 \; p_2^*(\alpha_2) = 0$$

$$c_2 \; \bar{w}_1 \; \bar{w}_2 = \bar{w}_1{}^2 w_2 = 0$$

$$c_2 \; \bar{w}_3 = \bar{w}_1 \; \bar{w}_3 = 0$$

$c_2^2 \; \bar{w}_2 = \bar{w}_1{}^2 \; \bar{w}_2 = 0$, usando as relações (**), (***). Segue que $\{A,S(\xi_4^1)\}_2 = \{A,S(\xi_2^1 \oplus R^2)\}_2$, ou seja

$$\partial([\xi_4^1 \to RP(4)]_2) = \partial([\xi_2^1 \oplus R^2 \to RP(2)]_2)$$

Pela exatidão da sequência:

$0 \to I_5(Z_2) \xrightarrow{j^*} \mathfrak{M}_5 \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_4(Z_2) \to 0$, concluimos que:

$$0 = \partial j_*([\tau_1, RP(5)]_2 + [T_2, \frac{S^2 \times RP(3)}{T_1}]_2) =$$

$$= \partial(\begin{bmatrix} \xi_4^1 \\ \downarrow \\ RP(4) \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} R^5 \\ \downarrow \\ pto \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} u^1 \\ \downarrow \\ \frac{S^1 \times RP(3)}{T_1} \end{bmatrix}_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} \xi_2^1 \oplus R^2 \\ \downarrow \\ RP(2) \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} R^5 \\ \downarrow \\ pto \end{bmatrix}_2) = \partial([\mu^1 \to \frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}]_2)$$

Segue que $\{A,S(\mu^1)\}_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_4(Z_2)$.

Sejam $W = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ a classe total de $\frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}$, $c_3 \in H^1(RP(\mu^1), Z_2)$ a classe característica de $(A, S(\mu^1))$, $p_3 : RP(\mu^1) \to \frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}$ a projeção, $v_1 \in H^1(\frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}, Z_2)$ a primeira classe de Stiefel-Whitney de μ^1.

Como em $H^*(RP(\mu^1), Z_2)$ vale a relação: $c_3 + p_3^*(v_1) = 0$, temos que a classe total de $RP(\mu^1)$ é:

$$(1 + \sum_{i=1}^{4} p_3^*(w_i))(1 + c_3 + p_3^*(v_1)) = 1 + \sum_{i=1}^{4} p_3^*(w_i)$$

Denotemos por $W^{(r)}$ um monômio de dimensão r nas classes w_i. Então, para $i = 0,1,2,3,4$, $p_3^*(v_1^i W^{(4-i)}) = c_3^i p_3^*(W^{(4-i)}) = 0$, uma vez que o último termo é um número de involução de $(A, S(\mu^1))$. Sendo p_3^* injetiva, [5, pg.34], $v_1^i W^{(4-i)} = 0$ em $H^4(\frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}, Z_2)$. Isso significa que todos os números de Whitney de

$$\begin{array}{c} \mu^1 \\ \downarrow \\ \frac{S^1 \times RP(3)}{T_1} \end{array}$$

se anulam, portanto tal fibrado borda.

Considere W^5 variedade compacta, 5-dimensional, com bordo, e $\theta^1 \to W^5$ fibrado unidimensional, com $\partial(W^5) = \frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}$ e $\theta^1 | \frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}$ equivalente a μ^1; temos o fibrado involução $(A, S(\theta^1))$, com $(A, S(\theta^1))|_{S(\mu^1)} = (A, S(\mu^1))$.

Tomemos uma vizinhança tubular N de

$\frac{S^1 \times RP(3)}{T_1}$ em $\frac{S^2 \times RP(3)}{T_1}$, invariante sob T_2, com raio suficientemente pequeno de maneira a existir um difeomorfismo equivariante:

$$f: (T_2|_{\partial(N)}, \partial(N)) \to (A, S(\mu^1))$$

Podemos então colar $\frac{S^2 \times RP(3)}{T_1} - \overset{0}{N}$ a $S(\theta^1)$ através de f, para obter uma variedade fechada 5-dimensional K^5, e uma involução $T_3: K^5 \to K^5$, com conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc} \xi_2^1 \oplus R^2 & & R^5 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(2) & & pto \end{array}$$

Sejam $B_1(pto)$, $B_2(pto)$, bolas fechadas invariantes em torno dos pontos fixos de τ_1, T_3, em $RP(5)$ e K^5, respectivamente; suponhamos tais bolas suficientemente pequenas de maneira a existir um difeomorfismo equivariante:

$$g: (\tau_1|_{\partial(B_1)}, \partial(B_1)) \to (T_3|_{\partial(B_2)}, \partial(B_2))$$

Se colarmos $RP(5) - \overset{0}{B}_1$ a $K^5 - \overset{0}{B}_2$ através de g, obteremos variedade fechada 5-dimensional M^5 e involução $T: M^5 \to M^5$ com conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc} \xi_2^1 \oplus R^2 & & \xi_4^1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(2) & & RP(4) \end{array}$$

Isto prova a primeira parte do teorema. ■

ii) Suponhamos (S,B^5) variedade com involução tal que $F(S) = RP(2) \cup RP(4)$. Sejam $\nu^1 \to RP(4)$, $\eta^3 \to RP(2)$ fibrados normais, com classes totais:

$$U = 1 + u$$

$$V = 1 + v_1 + v_2 + v_3 = 1 + v_1 + v_2,$$ respectivamente.

Aplicando a fórmula de Kosniowski-Stong repetidamente, obtemos:

$$0 = w_1[B^5]_2 = \sigma_1(x_1,x_2,\ldots,x_5)[B^5]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\,\sigma_1(1+y,z_1,z_2,z_3,z_4)\,[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\,\sigma_1(1+y_1,1+y_2,1+y_3,z_1,z_2)[RP(2)]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{1-p}{1-p-q}\sigma_p(y)\sigma_q(z_1,\ldots,z_4)\Big)[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{3-p}{1-p-q}\sigma_p(y_1,y_2,y_3)\sigma_q(z_1,z_2)\Big)[$$

$$[RP(2)]_2 = (1 + u + u^2 + u^3 + \ldots)($$

$$(1 + u + w_1(RP(4))[RP(4)]_2 +$$

$$+ (1+v_1+v_1^2+v_2+ \overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\ldots\ldots\ldots\ldots})($$

$$(1+v_1+w_1(RP(2)))[RP(2)]_2 = u^4[RP(4)]_2 + u^4[RP(4)]_2 +$$

$$+ u^3\, w_1(RP(4))[RP(4)]_2 + v_1^2[RP(2)]_2 + v_2[RP(2)] +$$

$$+ v_1^2[RP(2)]_2 + v_1w_1(RP(2))[RP(2)]_2 = u^3\alpha_1[RP(4)]_2 +$$

$$+ v_2[RP(2)]_2 + v_1\alpha_2[RP(2)]_2 .$$

$$0 = w_1^2[B^5]_2 = \sigma_1^2(x_1,x_2,\ldots,x_5)[B^5]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\,\sigma_1(1+y,z_1,z_2,z_3,z_4)^2[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\,\sigma_1(1+y_1,1+y_2,1+y_3,z_1,z_2)^2[RP(2)]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{1-p}{1-p-q}\sigma_p(y)\sigma_q(z_1,\ldots,z_4)\Big)^2[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\Big(\sum_{p+q\leq 1}\binom{3-p}{1-p-q}\sigma_p(y_1,y_2,y_3)\sigma_q(z_1,z_2)\Big)^2$$

$$[RP(2)]_2 = u^4[RP(4)]_2 + u^4[RP(4)]_2 + u^2\alpha_1^2[RP(4)]_2 +$$

$$+ v_1^2[RP(2)]_2 + v_2[RP(2)]_2 + v_1^2[RP(2)]_2 + \alpha_2^2[RP(2)]_2 =$$

$$= u^2\alpha_1^2[RP(4)]_2 + v_2[RP(2)]_2 + 1$$

$$0 = w_1^4[B^5]_2 = \sigma_1^4(x_1,x_2,\ldots,x_5)[B^5]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\,\sigma_1(1+y,Z)^4[RP(4)]_2 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\,\sigma_1(1+Y,Z)^4[RP(4)]_2 =$$

$$= u^4[RP(4)]_2 + u^4[RP(4)]_2 + \alpha_1^4[RP(4)]_2 +$$

$$+ v_1^2[RP(2)]_2 + v_2[RP(2)]_2 = 1 + v_1^2[RP(2)]_2 +$$

$$+ v_2[RP(2)]_2$$

Temos então as relações:

$$u^3\alpha_1[RP(4)]_2 + v_2[RP(2)]_2 + v_1\alpha_2[RP(2)]_2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$u^2\alpha_1^2[RP(4)]_2 + v_2[RP(2)]_2 = 1 \qquad \text{(II)}$$

$$v_1^2[RP(2)]_2 + v_2[RP(2)]_2 = 1 \qquad \text{(III)}$$

Pela estrutura multiplicativa de $H^*(RP(4),Z_2)$, $u^3\ \alpha_1 = u^2\ \alpha_1^2$ em $H^4(RP(4),Z_2)$. Somando as relações (I) e

(II), obtemos então $v_1\ \alpha_2[RP(2)]_2 = 1$

Isto acarreta $v_1 = \alpha_2$.

Da relação (III), obtemos:

$v_2[RP(2)]_2 = 1 + \alpha_1^2[RP(2)] = 0$, ou seja, $v_2 = 0$.

Usando a relação (II), temos:

$u^2\ \alpha_1^2[RP(4)]_2 = 1$, portanto $u = \alpha_1$.

Isto significa que $\nu^1 \to RP(4)$, $\xi_4^1 \to RP(4)$ têm as mesmas classes características, o mesmo acontecendo com $\eta^3 \to RP(2)$, $\xi_2^1 \oplus R^2 \to RP(2)$.

Portanto, $[\nu^1 \to RP(4)]_2 + [\eta^3 \to RP(2)]_2 =$ $= [\xi_4^1 \to RP(4)]_2 + [\xi_2^1 \oplus R^2 \to RP(2)]_2$ em $\mathfrak{M}_5$, o que acarreta $[S,B^5]_2 = [T,M^5]_2$ em $I_5(Z_2)$. ■

2.7. *Observação*

Sejam $CP(n)$ o espaço projetivo complexo n-dimensional, e S^m a m-esfera. Considere a involução:

$\tau: S^m \times CP(n) \to S^m \times CP(n)$,

$\tau(x,z) = (-x,C(z))$, onde C é a conjugação.

Como τ não tem pontos fixos, $\frac{S^m \times CP(n)}{\tau}$ é uma variedade fechada, $m + 2n$-dimensional. Tais variedades, denotadas por $P(m,n)$, são conhecidas como "variedades de Dold".

Temos que $H^*(P(m,n),Z_2)$ é uma álgebra polinomial sobre Z_2, gerada por elementos $c \in H^1(P(m,n),Z_2)$, $d \in H^2(P(m,n),Z_2)$, truncada pelas relações $c^{m+1}=0$, $d^{n+1}=0$.

A classe tangencial de $P(m,n)$ é $W = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1}$. Vide referência [15].

Em particular, a classe tangencial da variedade 5-dimensional $P(1,2)$ é:

$W(P(1,2)) = (1+c)(1+c+d)^3 = (1+d+cd+d^2)$, uma vez que $c^2=0$, $d^3 = 0$; então $w_2w_3[P(1,2)]_2 = cd^2[P(1,2)]_2 = 1$, e é fácil verificar que este é o único número de Stiefel-Whitney não nulo de $P(1,2)$.

A classe de cobordismo $[P(1,2)]_2$ é, portanto, o gerador de $\mathfrak{N}_5 \cong Z_2(x_5)$

2.8. *Teorema*

A variedade M^5, construida no teorema 2-6, é cobordante à variedade de Dold, $P(1,2)$; portanto, $[M^5]_2$ é o gerador de $\mathfrak{N}_5$.

Prova

Pela observação 2.8, basta mostrar que $w_2w_3[M^5]_2 = 1$. Usando a notação do teorema 2.6, temos:

$$w_2w_3[M^5]_2 = \sigma_2(x_1,\ldots,x_5)\ \sigma_3(x_1,\ldots,x_5)\ [M^5]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\ \sigma_2(1+y,z_1,\ldots,z_4)\ \sigma_3(1+y,z_1,\ldots,z_4)[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)} \sigma_2(1+y_1,1+y_2,1+y_3,z_1,z_2)\sigma_3(1+y_1,1+y_2,1+y_3,z_1,z_2)$$

$$)[RP(2)]_2 = (1+y+y^2+\ldots)(\sum_{p+q\leq 2} \binom{1-p}{2-p-q}\sigma_p(y)\sigma_q(z_1,\ldots,z_4)).($$

$$)(\sum_{p+q\leq 3} \binom{1-p}{3-p-q} \sigma_p(y)\sigma_q(z_1,\ldots,z_4))[RP(4)]_2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\right)(\sum_{p+q\leq 2} \binom{3-p}{2-p-q} \sigma_p(y_1,y_2,y_3)\sigma_q(z_1,z_2)) ($$

$$)(\sum_{p+q\leq 3} \binom{3-p}{3-p-q} \sigma_p(y_1,y_2,y_3) \sigma_q(z_1,z_2)) [RP(2)]_2$$

Se $q < 2$, o coeficiente binomial $\binom{1-p}{3-p-q}$ se anula módulo 2; para $q = 2$ ou $q = 3$, $\sigma_q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ denotará $w_2(RP(4))$, $w_3(RP(4))$, que são nulos.

Portanto,

$$w_2 w_3[M^5]_2 = \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\right)$$

$$(\sum_{p+q\leq 2} \binom{3-p}{2-p-q}\sigma_p(y_1,y_2,y_3)\sigma_q(z_1,z_2))($$

$$)(\sum_{p+q\leq 3} \binom{3-p}{3-p-q}\sigma_p(y_1,y_2,y_3)\sigma_q(z_1,z_2))[RP(2)]_2 =$$

$$= (1 + \alpha_2 + \alpha_2^2 + \overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\cdots\cdots\cdots\cdots})(1 + \alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^2)(1+\alpha_2+$$

$$+ \alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^3)[RP(2)]_2 = (1 + \alpha_2 + \alpha_2^2 + \overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\cdots\cdots\cdots\cdots}).($$

$$)(1+\alpha_2)(1+\alpha_2^2)[RP(2)]_2 = (1 + \alpha_2^2 + \alpha_2^4)[RP(2)]_2 = \alpha_2^2[RP(2)] = 1 \blacksquare$$

2.9. *Teorema*

i) Existe uma involução $T: P(1,2) \to P(1,2)$ com $F(T) = RP(2) \cup CP(2)$ (união disjunta).

ii) Se (S,V^5) é uma variedade 5-dimensional, com involução, com $F(S) = RP(2) \cup CP(2)$, então $[S,V^5]_2 = [T,P(1,2)]_2$ em $I_5(Z_2)$.

Prova

i) Seja $C: CP(2) \to CP(2)$ a conjugação; definamos $\tilde{T}: S^1 \times CP(2) \to S^1 \times CP(2)$ por $\tilde{T}(x,z) = (\bar{x},z)$; seja $\tau: S^1 \times CP(2) \to S^1 \times CP(2)$ como definida na observação 2.7.

Temos que $\tilde{T}$ e τ comutam; portanto, $\tilde{T}$ define uma involução:

$$T: P(1,2) \to P(1,2)$$

Notemos que

$$[T,P(1,2)]_2 = \Gamma[C,CP(2)]_2,$$

onde $\Gamma: I_4(Z_2) \to I_5(Z_2)$ é o homomorfismo definido na observação 2.1.

Agora, $F(C) = RP(2)$, com fibrado normal equivalente ao fibrado tangente $\tau(RP(2)) \to RP(2)$; através da observação 2.1, concluimos então que $F(T) = RP(2) \cup CP(2)$, com fibrado normal:

$$\begin{array}{ccc} \tau(RP(2)) \oplus R & & R \\ \downarrow & U & \downarrow \\ RP(2) & & CP(2) \end{array}$$

Isso prova i). ■

ii) Suponhamos (S,V^5) variedade com involução, com $F(S) = RP(2) \cup CP(2)$.

Sejam

$$\begin{array}{ccc} \nu^1 & & \eta^3 \\ \downarrow & , & \downarrow \\ CP(2) & & RP(2) \end{array}$$

fibrados normais, com classes de Stiefel-Whitney:

$U(\nu^1) = 1 + u$

$V(\eta^3) = 1 + v_1 + v_2$

É claro que $u = 0$, uma vez que $H^1(CP(2),Z_2)=0$

A classe tangencial de $RP(2)$ é $(1+\alpha)^3 = 1 + \alpha + \alpha^2$, sendo $\alpha \in H^1(RP(2),Z_2)$ o elemento não nulo. Pela parte i), é suficiente portanto mostrar que $v_1 = \alpha$, $v_2 = \alpha^2$.

Temos:

$$0 = w_1[V^5]_2 = \sigma_1(x_1,x_2,\ldots,x_5)[V^5]_2 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\sigma_1(1+y,Z)[CP(2)]_2 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\sigma_1(1+Y,Z)[$$

$$[RP(2)]_2 = (1 + y + y^2 + \ldots)($$

$$(\sum_{p+q\leq 1}(\frac{1}{1-p} - \frac{p}{q})\sigma_p(y)\sigma_q(Z))[CP(2)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\Big(\sum_{p+q\leq 1}(1^3 - \bar{p} - \bar{q})\sigma_p(Y)\sigma_q(Z)\Big)[RP(2)]_2 =$$

$$= (1+u+u^2+\ldots)(1+u+w_1(CP(2)))[CP(2)]_2 +$$

$$+(1+v_1+v_1^2+v_2+\overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\ldots\ldots\ldots\ldots})(1+v_1+w_1(RP(2)))$$

$$[RP(2)]_2 = (v_1^2+v_1w_1(RP(2)) + v_1^2 + v_2)[RP(2)]_2 =$$

$$= (v_1\alpha + v_2)[RP(2)]_2$$

Portanto, $v_1\alpha = v_2$ em $H^2(RP(2),Z_2)$; pela estrutura multiplicativa de $H^*(RP(2),Z_2)$, $v_1 = 0$ se, e somente se, $v_2 = 0$.

Novamente,

$$0 = w_1^2[V^5]_2 = \sigma_1^2(x_1,\ldots,x_5)[V^5]_2 = \frac{1}{1+y}\sigma_1(1+Y,Z)^2[CP(2)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\Pi(1+Y)}\sigma_1(1+Y,Z)^2[RP(2)]_2 = (1+u+u^2+\ldots)($$

$$)(1+u^2+w_1(CP(2))^2)[CP(2)]_2 + (1+v_1+v_1^2+v_2+\overset{\text{termos c/grau}\geq 3}{\ldots\ldots\ldots\ldots})$$

$$)(1+v_1^2+\alpha^2)[RP(2)]_2 = (v_1^2 + \alpha^2)[RP(2)]_2 .$$ Segue que $v_1^2=\alpha^2$.

Portanto, $v_1 = \alpha$, $v_2 = \alpha^2$, o que acarreta $[T,P(1,2)]_2 = [S,V^5]_2$ em $I_5(Z_2)$. ■

O teorema a seguir determina todas as classes $\alpha \in I_5(Z_2)$ contendo um representante (T,M^n) com $F(T) = RP(1) \cup RP(2) \cup RP(3) \cup RP(4)$ (união disjunta). Antes, necessitamos de alguns lemas.

Denotaremos por $\xi_n^1 \to RP(n)$ o fibrado-linha canônico, e por $r\xi_n^1 \to RP(n)$ a soma de Whitney de r cópias

pias de ξ^1_η.

2.10. *Lema*

Não existe fibrado vetorial bidimensional $\eta^2 \to RP(3)$, com classes de Stiefel-Whitney $w_1(\eta^2) = \alpha$, $w_2(\eta^2) = \alpha^2$, onde $\alpha \in H^1(RP(3),Z_2)$ é o elemento não nulo.

Prova

Temos $\mathfrak{N}_4(Z_2) \cong Z_2(\beta_1) \oplus Z_2(\beta_2) \oplus Z_2(\beta_3) \oplus$ $\oplus Z_2(\beta_4)$, onde $\beta_1 = \{A,S^4\}_2$, $\beta_2 = [RP(2)]_2\{A,S^2\}_2$, $\beta_3 =$ $= [RP(4)]_2\{A,S^0\}_2$, $\beta_4 = [RP(2)\times RP(2)]_2\{A,S^0\}_2$; aqui, $A:S^n \to S^n$ denota a antipodal, e o produto de classes é relativo à estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo de $\mathfrak{N}_*(Z_2)$.

Calculemos alguns números de involução dos geradores de $\mathfrak{N}_4(Z_2)$; dado $\{T,M^n\}_2 \in \mathfrak{N}_n(Z_2)$, denotemos, de maneira geral, por $c \in H^1(\frac{M^n}{T},Z_2)$ a primeira classe de Whitney do fibrado-linha associado a T, ou seja, a classe característica de (T,M^n), e por $w_i \in H^i(\frac{M^n}{T},Z_2)$ a i-ésima classe tangencial de $\frac{M^n}{T}$; eventualmente, denotaremos o número de involução $c^j W^{(n-j)}[\frac{M^n}{T}]_2$ por $c^j W^{(n-j)}(\{T,M^n\}_2)$.

Desejamos obter $c^3 w_1(\beta_2), c^2 w_2(\beta_2), w_1^4(\beta_2)$, $w_4(\beta_2)$ e $w_2^2(\beta_2)$.

Sejam $\gamma_1 \in H^1(RP(2),Z_2)$, $\gamma_2 \in H^1(RP(2),Z_2)$, geradores correspondentes à cópias disjuntas do espaço pro-

jetivo $RP(2)$.

O espaço de órbitas de $(Id \times A, RP(2) \times S^2)$ é $RP(2) \times RP(2)$; a classe tangencial de $RP(2) \times RP(2)$ é:

$$W = (1+\gamma_1+\gamma_1^2) \times (1+\gamma_2+\gamma_2^2)$$

O fibrado-linha associado à involução $(Id \times A; RP(2) \times S^2)$ é o fibrado induzido $\pi_2^*(\xi_2^1)$, onde $\pi_2: RP(2) \times RP(2) \to RP(2)$ é a projeção no 2º fator; portanto, a classe característica c de $(Id \times A, RP(2) \times S^2)$ é $c = \pi_2^*(\gamma_2) = 1 \times \gamma_2$.

Segue que:

$c^3 w_1(\beta_2) = (1 \times \gamma_2^3)(1 \times \gamma_2 + \gamma_1 \times 1)\,[RP(2) \times RP(2)]_2 = 0$,

uma vez que $\gamma_2^3 \in H^3(RP(2), Z_2)$;

$c^2 w_2(\beta_2) = (1\times\gamma_2^2)(1\times\gamma_2^2+\gamma_1\times\gamma_2+\gamma_1^2\times 1)[RP(2) \times RP(2)]_2 =$

$= (1\times\gamma_2^4+\gamma_1\times\gamma_2^3+\gamma_1^2\times\gamma_2^2)[RP(2) \times RP(2)]_2 = \gamma_1^2[RP(2)]_2\gamma_2^2[RP(2)]_2 =$

$= 1$; $w_4(\beta_2) = \gamma_1^2 \times \gamma_2^2[RP(2) \times RP(2)]_2 = 1$;

$w_1^4(\beta_2) = (1 \times \gamma_2^4 + \gamma_1^4 \times 1)\,[RP(2) \times RP(2)]_2 = 0$;

$w_2^2(\beta_2) = (1 \times \gamma_2^4 + \gamma_1^2 \times \gamma_2^2 + \gamma_1^4 \times 1)[RP(2)\times RP(2)]_2 = 1$.

Os espaços de órbitas de (A, S^4), $(Id \times A, RP(4) \times S^0)$, $(Id \times Id \times A, RP(2) \times RP(2) \times S^0)$ são $RP(4)$, $RP(4)$, $RP(2) \times RP(2)$, com fibrados-linhas associados, nesta ordem, dados por:

$$\begin{array}{ccccc} \xi_4^1 & & R & & R \\ \downarrow & , & \downarrow & , & \downarrow \\ RP(4) & & RP(4) & & RP(2)\times RP(2) \end{array}$$

Com tais informações, obtemos a seguinte tabela de números de involução:

	β_1	β_2	β_3	β_4
w_1^4	1	0	1	0
w_4	1	1	1	1
$c^2 w_2$	0	1	0	0
w_2^2	0	1	0	1
$c^3 w_1$	1	0	0	0

Suponhamos a existência do fibrado $\eta^2 \to RP(3)$; sejam $c \in H^1(RP(\eta^2),Z_2)$ a classe característica do fibrado involução $(A,S(\eta^2))$, e $p: RP(\eta^2) \to RP(3)$ a projeção.

A classe tangencial de $RP(\eta^2)$ é:

$$W(RP(\eta^2)) = p^*(W(RP(3))((1+c)^2 + (1+c)p^*(\alpha) + p^*(\alpha^2)) =$$

$$= (1+c^2+p^*(\alpha)+cp^*(\alpha)+p^*(\alpha^2)).$$

Mas em $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$ vale a relação:

$$c^2 + cp^*(\alpha) + p^*(\alpha^2) = 0 \qquad (*)$$

Portanto, $W(RP(\eta^2)) = 1 + p^*(\alpha)$, e assim, $w_1^4\{A,S(\eta^2)\}_2 = p^*(\alpha^4)[RP(\eta^2)]_2 = 0$, uma vez que $\alpha^4 \in H^4(RP(3),Z_2)$.

Também $w_4\{A,S(\eta^2)\}_2 = w_2^2\{A,S(\eta^2)\}_2 =$
$= c^2 w_2\{A,S(\eta^2)\}_2 = 0$.

Multiplicando a relação (*) por $cp^*(\alpha)$ e

$p^*(\alpha^2)$, obtemos:

(**) $c^3p^*(\alpha) + c^2p^*(\alpha^2) + cp^*(\alpha^3) = 0$

(***) $c^2p^*(\alpha^2) + cp^*(\alpha^3) + p^*(\alpha^4) = c^2p^*(\alpha^2)+cp^*(\alpha^3) = 0$

Estas relações acarretam $c^3p^*(\alpha) = 0$, o que significa $c^3w_1\{A,S(\eta^2)\}_2 = 0$.

Efetuando-se todas as somas possíveis dos elementos β_i, obtemos todos os elementos de $\mathfrak{N}_4(Z_2)$ e, através da tabela atrás construída, verificamos que nenhum elemento de $\mathfrak{N}_4(Z_2)$ não nulo possui todos os números de involução constantes na tabela nulos.

Segue que $\{A,S(\eta^2)\}_2 = 0$.

Por outro lado, pela estrutura de $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$, $cp^*(\alpha^3)$ é o elemento não nulo de $H^4(RP(\eta^2),Z_2)$; pela relação (***), o mesmo acontece com $c^2p^*(\alpha^2)$.

Multiplicando a relação (*) por c^2, obtemos:

$c^4 + c^3p^*(\alpha) + c^2p^*(\alpha^2) = c^4 + c^2p^*(\alpha^2) \neq 0$

Portanto, c^4 é o elemento não nulo de $H^4(RP(\eta^2),Z_2)$; mas $1 = c^4[RP(\eta^2)]_2$ é um número de involução de $\{A,S(\eta^2)\}_2$, o que é uma contradição. ■

2.11. *Lema*

Sejam $\mu^3 \to RP(2)$, $\bar{\mu}^3 \to RP(2)$, $\xi^4 \to RP(1)$, fibrados vetoriais com classes de Stiefel-Whitney $w_1(\mu^3) = 0$,

$w_2(\mu^3) \neq 0$, $w_1(\bar{\mu}^3) \neq 0$, $w_2(\bar{\mu}^3) = 0$, $w_1(\xi^4) \neq 0$. Então, em $\mathfrak{N}_4(Z_2)$, vale:

i) $\partial(\mu^3+\xi^4) = [RP(4)]_2\{A,S^0\}_2$

ii) $\partial(\bar{\mu}^3) = \{A,S^4\}_2$

Prova

i) Usaremos a notação do lema anterior. Sejam $c_1 \in H^1(RP(\mu^3),Z_2)$, $c_2 \in H^1(RP(\xi^4),Z_2)$, classes características dos fibrados-involução $(A,S(\mu^3))$, $(A,S(\xi^4))$, $\alpha_1 \in H^1(RP(2),Z_2)$, $\alpha_2 \in H^1(RP(1),Z_2)$, elementos não nulos e

$$p_1: RP(\mu^3) \to RP(2)$$

$$p_2: RP(\xi^4) \to RP(1),$$

as projeções.

A classe tangencial de $RP(\mu^3)$ é:

$$W(RP(\mu^3)) = p_1^*(W(RP(2)))((1+c_1)^3 + (1+c_1)p_1^*(\alpha_1^2)) =$$

$$= (1+p_1^*(\alpha_1) + p_1^*(\alpha_1^2))(1+c_1+c_1^2+c_1^3+p_1^*(\alpha_1^2)+c_1p_1^*(\alpha_1^2))$$

Em $H^*(RP(\mu^3),Z_2)$ vale a relação:

$$c_1^3 + c_1p_1^*(\alpha_1^2) = 0 \qquad (*)$$

Portanto, $w_1(RP(\mu^3)) = c_1+p_1^*(\alpha_1)$, $w_2(RP(\mu^3)) = c_1^2 + c_1p_1^*(\alpha_1)$, $w_3(RP(\mu^3) = c_1^2p_1^*(\alpha_1) + c_1p_1^*(\alpha_1^2)$, $w_4(RP(\mu^3)) = c_1^2p_1^*(\alpha_1^2)$.

Multiplicando a relação (*) por c_1, obtemos:

$$c_1^4 + c_1^2 p_1^*(\alpha_1^2) = 0$$

Pela estrutura de $H^*(RP(\mu^3),Z_2)$, $c_1^2 p_1^*(\alpha_1^2)$ é o elemento não nulo de $H^4(RP(\mu^3),Z_2)$; portanto, o mesmo acontece com c_1^4.

Multiplicando a relação (*) por $p_1^*(\alpha_1)$, obtemos:

$$c_1^3 p_1^*(\alpha_1) + c_1 p_1^*(\alpha_1^3) = c_1^3 p_1^*(\alpha_1) = 0,$$

uma vez que $\alpha_1^3 \in H^3(RP(2),Z_2)$.

Passemos agora ao fibrado $\xi^4 \to RP(1)$.

A classe tangencial de $RP(\xi^4)$ é:

$$W(RP(\xi^4)) = p_2^*(W(RP(1)))((1+c_2)^4 + (1 + c_2)^3 p_2^*(\alpha_2)) =$$

$$= 1 + c_2^4 + p_2^*(\alpha_2) + c_2 p_2^*(\alpha_2) + c_2^2 p_2^*(\alpha_2) + c_2^3 p_2^*(\alpha_2)$$

Como em $H^*(RP(\xi^4),Z_2)$ vale a relação:

$$c_2^4 + c_2^3 p_2^*(\alpha_2) = 0 \qquad (**),$$

obtemos

$w_1(RP(\xi^4)) = p_2^*(\alpha_2)$, $w_2(RP(\xi^4) = c_2 p_2^*(\alpha_2)$,

$w_3(RP(\xi^4)) = c_2^2 p_2^*(\alpha_2)$, $w_4(RP(\xi^4)) = 0$

Pela estrutura de $H^*(RP(\xi^4),Z_2)$, $c_2^3 p_2^*(\alpha_2)$ é o elemento não nulo de $H^4(RP(\xi^4),Z_2)$. Juntando tais informações, obtemos:

$w_1^4(\partial(\mu^3+\xi^4)) = (c_1^4+p_1^*(\alpha_1^4))[RP(\mu^3)]_2 + p_2^*(\alpha_2^4)[RP(\xi^4)]_2 = 1 +$

$+ 0 + 0 = 1$, pois $\alpha_1^4 \in H^4(RP(2),Z_2)$, $\alpha_2^4 \in H^4(RP(1),Z_2)$;

$w_4(\partial(\mu^3+\xi^4)) = c_1^2 p_1^*(\alpha_1^2)[RP(\mu^3)]_2 = 1$;

$w_2^2(\partial(\mu^3+\xi^4)) = (c_1^4 + c_1^2 p_1^*(\alpha_1^2))[RP(\mu^3)] +$

$+ c_2^2 p_2^*(\alpha_2^2)[RP(\xi^4)]_2 = 1 + 1 + 0 = 0$, pois $\alpha_1^2 \in H^2(RP(1),Z_2)$;

$c^2 w_2(\partial(\mu^3+\xi^4)) = (c_1^4+c_1^3 p_1^*(\alpha_1))[RP(\mu^3)]_2 +$

$+ c_2^3 p_2^*(\alpha_2)[RP(\xi^4)]_2 = 1 + 0 + 1 = 0$

$c^3 w_1(\partial(\mu^3+\xi^4)) = (c_1^4 + c_1^3 p_1^*(\alpha_1))[RP(\mu^3)]_2 +$

$+ c_2^3 p_2^*(\alpha_2)[RP(\xi^4)]_2 = 1 + 0 + 1 = 0$

Uma consulta à tabela construída no lema anterior mostra que o único elemento de $\mathfrak{N}_4(Z_2)$ com tais números de involução é $[RP(4)]_2\ \{A,S^0\}_2$, o que prova i). ■

ii) Sejam $c_3 \in H^1(RP(\bar{\mu}^3),Z_2)$, classe característica do fibrado-involução $(A,S(\bar{\mu}^3)$, $\alpha_3 \in H^1(RP(2),Z_2)$ o elemento não nulo e

$$p_3: RP(\bar{\mu}^3) \to RP(2)$$

a projeção.

A classe tangencial de $RP(\bar{\mu}^3)$ é:

$W(RP(\bar{\mu}^3)) = p_3^*(W(RP(2)))((1+c_3)^3 + (1+c_3^2)p_3^*(\alpha_3)) =$

$= (1+p_3^*(\alpha_3) + p_3^*(\alpha_3^2))(1 + c_3^3 + c_3^2 + c_3^3 +$

$+ p_3^*(\alpha_3) + c_3^2 p_3^*(\alpha_3))$

A relação:

$$c_3^8 + c_3^2 p_3^*(\alpha_3) = 0, \qquad (***)$$

válida em $H^*(RP(\bar{\mu}^3),Z_2)$, acarreta:

$w_1(RP(\bar{\mu}^3)) = c_3$, $w_2(RP(\bar{\mu}^3)) = c_3^2 + c_3 p_3^*(\alpha_3)$; $w_3(RP(\bar{\mu}^3)) = c_3^2 p_3^*(\alpha_3) + c_3 p_3^*(\alpha_3^2)$; $w_4(RP(\bar{\mu}^3)) = c_3^2 p_3^*(\alpha_3^2)$.

Se multiplicarmos a relação (***) por $p_3^*(\alpha_3)$, c_3, obteremos:

$$c_3^3 p_3^*(\alpha_3) + c_3^2 p_3^*(\alpha_3^2) = 0$$

$$c_3^4 + c_3^3 p_3^*(\alpha_3) = 0$$

O elemento $c_3^2 p_3^*(\alpha_3^2)$ é o gerador de $H^4(RP(\bar{\mu}^3), Z_2)$; das relações acima, concluimos que o mesmo se passa com $c_3^3 p_3^*(\alpha_3)$ e c_3^4.

Com tais dados, obtemos:

$$w_1^4(\partial(\bar{\mu}^3)) = c_3^4[RP(\bar{\mu}^3)]_2 = 1$$

$$w_4(\partial(\bar{\mu}^3)) = c_3^2 p_3^*(\alpha_3^2)[RP(\bar{\mu}^3)]_2 = 1$$

$$w_2^2(\partial(\bar{\mu}^3)) = (c_3^4 + c_3^2 p_3^*(\alpha_3^2))[RP(\bar{\mu}^3)]_2 = 1+1=0$$

$$c^2 w_2(\partial(\bar{\mu}^3)) = (c_3^2 + c_3^3 p_3^*(\alpha_3))[RP(\bar{\mu}^3)]_2 = 1+1=0$$

$$c^3 w_1(\partial(\bar{\mu}^3)) = c_3^4[RP(\bar{\mu}^3)]_2 = 1$$

Usamos então a tabela do lema anterior para concluir que $\partial(\bar{\mu}^3) = \{A, S^4\}_2$. ■

2.12. *Teorema*

i) Existem variedades 5-dimensionais com involução (T_i, M_i^5), $i = 1, 2, 3, 4$, com $F(T_i) = RP(1) \cup RP(2) \cup RP(3) \cup RP(4)$ (união disjunta) e $[T_i, M_i^5]_2 \neq [T_j, M_j^5]_2$, se

$i \neq j$, em $I_5(Z_2)$.

ii) Se V^5 é uma variedade 5-dimensional e $S: V^5 \to V^5$ uma involução com $F(S) = \bigcup_{i=1}^{4} RP(i)$, então $[S,V^5]_2 = [T_j, M^5]_2$, para algum $j = 1,2,3,4$.

Prova

i) Considere as involuções:

$r_1: RP(4) \to RP(4)$, $\tau_1: RP(4) \to RP(4)$, $r_1[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] =$

$= [-x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$, $\tau_1[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = [-x_0,-x_1,x_2,x_3,x_4]$.

Então $F(r_1) = RP(3) \cup$ pto, com fibrados normais

$$\begin{array}{ccc} \xi_3^1 & & R^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & \text{pto} \end{array}$$

enquanto que $F(\tau_1) = RP(1) \cup RP(2)$, com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc} 3\xi_1^1 & & 2\xi_2^1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(1) & & RP(2) \end{array}$$

Sejam

$$\Phi_1: \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times r_1} \to \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times r_1},$$

$$\Psi_1: \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times \tau_1} \to \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times \tau_1},$$

$\Phi_1([u,x]) = [\bar{u},x]$, $\Psi_1([u,x] = [\bar{u},x]$, onde $A: S^1 \to S^1$ é a antipodal e a barra denota a conjugação em S^1.

Pela observação 2.1, $F(\Phi_1) = RP(4) \cup RP(3) \cup \cup$ pto, com fibrados normais

$$\begin{array}{ccccc} R & & \xi_3^1 \oplus R & & R^5 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & \text{pto}, \end{array}$$

enquanto que $F(\Psi_1) = RP(4) \cup RP(2) \cup RP(1)$, com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccccc} R & & 2\xi_2^1 \oplus R & & 3\xi_1^1 \oplus R \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

Considere outra cópia de $RP(4)$ e o fibrado:

$$\begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ RP(4) \times I \end{array}$$

onde $I = [0,1]$; o fibrado-involução associado é $(Id \times A, (RP(4) \times I) \times S^0)$.

Tomemos vizinhanças tubulares N^1 de $RP(4)$ em $\frac{S^1 \times RP(4)}{A \times r_1}$, N^2 de $RP(4)$ em $\frac{S^1 \times RP(4)}{A \times \tau_1}$, invariantes, respectivamente, sob ϕ_1 e ψ_1, com raios suficientemente pequenos de maneira a existirem difeomorfismos equivariantes:

$$f_1 : (\Phi_1|_{\partial(N^1)}, \partial(N^1)) \to (Id\times A, (RP(4)\times 0)\times S^0)$$

$$f_2 : (\Psi_1|_{\partial(N^2)}, \partial(N^2)) \to (Id\times A, (RP(4)\times 1)\times S^0)$$

Colamos $(\frac{S^1\times RP(4)}{A\times r_1} - \overset{0}{N}_1) \cup (\frac{S^1\times RP(4)}{A\times \tau_1} - \overset{0}{N}_2)$ a $(RP(4)\times I) \times S^0$ através de f_1, f_2, para obtermos variedade fechada K_1^5, e involução $\rho_1 : K_1^5 \to K_1^5$, com conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais:

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_3^1 \oplus R & & 2\xi_2^1 \oplus R & & 3\xi_1^1 \oplus R & & R^5 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(3) & & RP(2) & & RP(1) & & pto \end{array}$$

O processo acima é essencialmente semelhante ao utilizado no teorema 2.6, que consistiu em eliminar da variedade com involução o interior de uma conveniente vizinhança tubular de uma componente do conjunto de pontos fixos, condicionado ao fato de que o fibrado normal à tal componente seja cobordante a zero; colando-se, a seguir, através do bordo, uma conveniente variedade com involução sem pontos fixos, obtemos uma variedade com involução sem a referida componente de pontos fixos.

No caso acima, tal componente é:

$$RP(4) \cup RP(4) \subset \frac{S^1\times RP(4)}{A\times r_1} \cup \frac{S^1\times RP(4)}{A\times \tau_1}$$

Considere então:

$r_2 : RP(5) \to RP(5); \quad r_2[x_0, x_1, \ldots, x_5] = [-x_0, x_1, \ldots, x_5]$

Através dos pontos fixos isolados de ρ_1 e r_2, e usando o argumento acima, obtemos a soma conexa equivariante $M_1^5 = K_1^5 \# RP(5)$, e involução $T_1 : M_1^5 \to M_1^5$, com conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais:

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_4^1 & & \xi_3^1 \oplus R & & 2\xi_2^1 \oplus R & & 3\xi_1^1 \oplus R \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

Para obter (T_2, M_2^5), consideramos:

$\tau_2 : RP(5) \to RP(5), \quad \tau_2[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] =$

$= [-x_0, -x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$; então $F(\tau_2) = RP(1) \cup RP(3)$,

com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc} 4\xi_1^1 & & 2\xi_3^1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(1) & & RP(3) \end{array}$$

Como $w_1(4\xi_1^1) = 0$ e $W(RP(1)) = 1$, $[4\xi_1^1 \to RP(1)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_1(BO(4))$; o processo acima produz então variedade K_2^5 e involução $\rho_2 : K_2^5 \to K_2^5$, com conjunto de pontos fixos e fibrado normal:

$$\begin{array}{c} 2\xi_3^1 \\ \downarrow \\ RP(3) \end{array}$$

Se colocamos $(T_2, M_2^5) = (\Psi_1 \cup \rho_2, \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times \tau_1} \cup K_2^5)$, obtemos $F(T_2) = \bigcup_{j=1}^{4} RP(j)$, com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccccccc} R & & 2\xi_3^1 & & 2\xi_2^1 \oplus R & & 3\xi_1^1 \oplus R \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

Para a obtenção de (T_3, M_3^5), (T_4, M_4^5) tomaremos a variedade com involução (T, M^5) construida no teorema 2-6, com a propriedade de ter como conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc} \xi_2^1 \oplus R^2 & & R^5 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(2) & & pto \end{array}$$

Utilizando-se os pontos fixos isolados de $T: M^5 \to M^5$ e $r_2: RP(5) \to RP(5)$, obtem-se

$$\Phi_2: K_3^5 \to K_3^5,$$

onde K_3^5 é a soma conexa equivariante $M^5 \# RP(5)$. Aqui, $F(\Phi_2) = RP(2) \cup RP(4)$ com fibrados normais (como no Teore-

ma 2.6]:

$$\begin{array}{ccc} \xi_4^1 & & \xi_2^1 \oplus R^2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(2) \end{array}$$

Pomos $(T_3, M_3^5) = (\phi_2 \cup \tau_2,\ K_3^5 \cup RP(5))$; o conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais de T_3 é:

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_4^1 & & 2\xi_3^1 & & \xi_2^1 \oplus R^2 & & 4\xi_1^1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

Agora, $[2\xi_3^1 \to RP(3)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_3(BO(2))$, uma vez que $w_1(2\xi_3^1) = 0$ e $W(RP(3)) = 1$; a partir de $(\tau_2, RP(5))$, obtemos então variedade com involução (Ψ_2, K_4^5) com $F(\Psi_2) = RP(1)$, e $4\xi_1^1 \to RP(1)$ como fibrado normal.

Através dos pontos fixos isolados de

$$\phi_1 : \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times r_1} \to \frac{S^1 \times RP(4)}{A \times r_1} \quad \text{e}$$

$$T : M^5 \to M^5, \quad \text{obtemos} \quad (\Psi_3, K_5^5);$$

pomos $(T_4, M_4^5) = (\Psi_2 \cup \Psi_3,\ K_4^5 \cup K_5^5)$.

Temos $F(T_4) = \bigcup_{j=1}^{4} RP(j)$ com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccccccc} R & & \xi_3^1 \oplus R & & \xi_2^1 \oplus R^2 & & 4\xi_1^1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

Agora, através de números de Whitney, não é difícil ver que $[R \to RP(4)]_2 \neq [\xi_4^1 \to RP(4)]_2$ em $\mathfrak{N}_4(BO(1))$, e $[\xi_3^1 \oplus R \to RP(3)]_2 \neq [\xi_3^1 \oplus \xi_3^1 \to RP(3)]_2$ em $\mathfrak{N}_3(BO(2))$; estes fatos acarretam

$$[T_i, M_i^5]_2 \neq [T_j, M_j^5], \quad \text{se} \quad i \neq j, \quad \text{em} \quad I_5(Z_2).$$

Isto encerra a prova de i). ■

Prova de ii

Sejam

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & \mu^3 & & \xi^4 \\ \downarrow & , & \downarrow & , & \downarrow & , & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1), \end{array}$$

os fibrados normais, e denotemos por:

$$V = 1 + v_1$$

$$\theta = 1 + \theta_1 + \theta_2$$

$$U = 1 + u_1 + u_2$$

$$H = 1 + h_1$$

as classes de Stiefel-Whitney de ν^1, η^2, μ^3, ξ^4, respectivamente.

Temos:

$$0 = w_1[V^5]_2 = \frac{1}{1+y}\sigma_1(1+y,z_1,z_2,z_3,z_4)[RP(4)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}(1+y_i)}\sigma_1(1+y_1,1+y_2,z_1,z_2,z_3)[RP(3)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{3}(1+y_i)}\sigma_1(1+y_1,1+y_2,1+y_3,z_1,z_2)[RP(2)]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)}\sigma_1(1+y_1,\ldots,1+y_4,z)[RP(1)]_2 =$$

$$= (1+v_1+v_1^2+v_1^3+\ldots)(1+v_1+w_1(RP(4)))[RP(4)]_2 +$$

$$+ (1+\theta_1+\theta_1^2+\theta_2+\underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{termos c/grau}\geq 3})\ (\theta_1+w_1(RP(3)))[RP(3)]_2+$$

$$+ (1+u_1+u_1^2+u_2+\underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{termos c/grau}\geq 3})(1+u_1+w_1(RP(2)))[RP(2)]_2+$$

$$+ (1+h_1+\underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{termos c/grau}\geq 2})(h_1+w_1(RP(1)))[RP(1)]_2 =$$

$$= v_1^4[RP(4)]_2 + v_1^4[RP(4)]_2 + v_1^3w_1[RP(4)]_2 +$$

$$+ \theta_1^3[RP(3)]_2 + \theta_1\theta_2[RP(3)]_2 + u_1^2[RP(2)]_2 + u_2[RP(2)]_2 +$$

$$+ u_1^2 [RP(2)] + u_1 w_1 [RP(2)]_2 + h_1 [RP(1)]_2 =$$

$$= v_1^3 w_1 [RP(4)]_2 + \theta_1^3 [RP(3)]_2 + \theta_1 \theta_2 [RP(3)]_2 +$$

$$+ (u_1 w_1 (RP(2)) + u_2) [RP(2)] + h_1 [RP(1)]_2 .$$

Também,

$$0 = w_1^2 [V^5]_2 = (1+v_1+v_1^2+v_1^3+ \ldots)(1+v_1^2+w_1^2(RP(4)) [RP(4)]_2 +$$

$$+ (1+\theta_1+\theta_1^2+\theta_2+ \underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{termos c/grau}} \geq 3)(\theta_1^2+w_1^2(RP(3))) [RP(3)]_2 +$$

$$+ (1+u_1+u_1^2+u_2+ \underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{termos c/grau}} \geq 3) (1+u_1^2+w_1^2(RP(2))) [RP(2)]_2 +$$

$$+ (1+h_1+ \underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{termos c/ grau}} \geq 2)(h_1^2+w_1^2(RP(1)) [RP(1)]_2 =$$

$$= v_1^4 [RP(4)]_2 + v_1^4 [RP(4)]_2 + v_1^2 w_1^2 [RP(4)]_2 + \theta_1^3 [RP(3)]_2 +$$

$$+ u_1^2 [RP(2)]_2 + u_1^2 [RP(2)]_2 + u_2 [RP(2)]_2 + w_1^2 [RP(2)]_2 =$$

$$= v_1^2 w_1^2 [RP(4)]_2 + \theta_1^3 [RP(3)]_2 + u_2 [RP(2)]_2 + 1$$

Finalmente,

$$0 = w_1^4 [V^5]_2 = (1+v_1+v_1^2+v_1^3+\ldots)(1+v_1^4+w_1^4(RP(4)) [RP(4)]_2 +$$

$$+ (1+\theta_1+\ldots)(\theta_1^4+w_1^4(RP(3))) [RP(3)]_2 +$$

$$+ (1+u_1+u_1^2+u_2+ \overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots})(1+u_1^4+w_1^4(RP(2)))[RP(2)]_2 +$$

$$+ (1+h_1+\ldots)(h_1^4)[RP(1)] = w_1^4[RP(4)]_2 +$$

$$+ u_1^2[RP(2)]_2 + u_2[RP(2)]_2 = 1 + u_1^2[RP(2)]_2 + u_2[RP(2)]_2.$$

Portanto, obtemos as relações:

$$v_1^3 w_1[RP(4)]_2 + \theta_1^3[RP(3)]_2 + \theta_1\theta_2[RP(3)]_2 + (u_1w_1+u_2)[RP(2)]_2 +$$

$$+ h_1[RP(1)]_2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$v_1^2 w_1^2[RP(4)]_2 + \theta_1^3[RP(3)]_2 + u_2[RP(2)]_2 = 1 \qquad \text{(II)}$$

$$u_1^2[RP(2)]_2 + u_2[RP(2)]_2 = 1 \qquad \text{(III)}$$

A relação (III) implica que $u_1 \in H^1(RP(2),Z_2)$ é nulo se, e somente se, $u_2 \in H^2(RP(2),Z_2)$ é não nulo; este fato acarreta que $(u_1w_1+u_2)[RP(2)]_2 = 1$.

Pela estrutura de $H^*(RP(4),Z_2)$, $v_1^3w_1[RP(4)]_2 = v_1^2w_1^2[RP(4)]_2$; portanto, somando-se as relações (I) e (II), obtemos:

$$\theta_1\theta_2[RP(3)] + 1 + h_1[RP(1)]_2 + u_2[RP(2)]_2 = 1, \text{ ou,}$$

$$\theta_1\theta_2[RP(3)] + h_1[RP(1)]_2 + u_2[RP(2)]_2 = 0$$

Pelo lema 2.11, $\theta_1\theta_2[RP(3)]_2 = 0$; portanto, $h_1[RP(1)]_2 = u_2[RP(2)]_2$.

Suponhamos que $u_1 = 0$ em $H^1(RP(2),Z_2)$; então $u_2 \in H^2(RP(2),Z_2)$ é o elemento não nulo, e h_1 é o elemento não nulo de $H^1(RP(1),Z_2)$.

Considere a sequência exata:

$$0 \to I_5(Z_2) \xrightarrow{j_*} \mathfrak{M}_5 \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_4(Z_2) \to 0$$

Pelo Lema 2.11, parte i), temos:

$\partial([\mu^3 \to RP(2)]_2 + [\xi^4 \to RP(1)]_2) = [RP(4)]_2' \{A,S^0\}_2$ em $\mathfrak{N}_4(Z_2)$.

Mas

$\partial([\nu^1 \to RP(4)]_2 + [\eta^2 \to RP(3)]_2 + [\mu^3 \to RP(2)]_2 + [\xi^4 \to RP(1)]_2) = 0$

em $\mathfrak{N}_4(Z_2)$.

Segue que:

$$\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = \partial([\nu^1 \to RP(4)]_2) + [RP(4)]_2' \{A,S^0\}_2 \qquad (*)$$

Não é difícil ver que, se $v_1 = 0$, $\partial([\nu^1 \to RP(4)]_2) = [RP(4)]_2' \{A,S^0\}_2$, enquanto que, se $v_1 \in$ $\in H^1(RP(4),Z_2)$ é o elemento não nulo,

$$\partial([\nu^1 \to RP(4)]_2') = \{A,S^4\}_2. \qquad (**)$$

Na primeira hipótese, temos $\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = 0$ em $\mathfrak{N}_4(Z_2)$, portanto os números de involução do fibrado-involução $(A,S(\eta^2))$ são todos nulos.

Sejam $p: RP(\eta^2) \to RP(3)$ a projeção, e c a classe característica de $(A,S(\eta^2))$.

A classe tangencial de $RP(\eta^2)$ é:

$W(RP(\eta^2)) = W(RP(3))((1+c)^2 + (1+c)p^*(\theta_1) + p^*(\theta_2)) =$

$= (1+c^2+p^*(\theta_1)+cp^*(\theta_1) + p^*(\theta_2)) = 1 + p^*(\theta_1)$, uma vez que em $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$ vale a relação $c^2+cp^*(\theta_1)+p^*(\theta_2) = 0$.

Mas então $cp^*(\theta_1^3) = 0$ em $H^4(RP(\eta^2),Z_2)$, uma vez que $cp^*(\theta_1^3)[RP(\eta^2)]_2 = c\, w_1^3(RP(\eta^2))[RP(\eta^2)]_2$ é um número de involução de $(A,S(\eta^2))$.

Pela estrutura de $H^*(RP(\eta^2),Z_2)$, $p^*(\theta_1^3) = 0$, ou seja, $\theta_1 = 0$.

Concluimos, nesse caso, que

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & \mu^3 & & \xi^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

tem os mesmos números de Whitney de

$$\begin{array}{ccccccc} R & & 2\xi_3^1 & & 2\xi_2^1 \oplus R & & 3\xi_1^1 \oplus R \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array},$$

o que implica $[S,V^5]_2 = [T_2,M_2^5]_2$ em $I_5(Z_2)$.

Na segunda hipótese de (**), e através de (*), temos:

$$\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = \{A,S^4\}_2 + [RP(4)]_2 \{A,S^0\}_2$$

Então, necessariamente $\theta_1 \neq 0$; caso contrário, teríamos $[\eta^2 \to RP(3)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_3(BO(2))$, o que acarre

taria $\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = \alpha$.

Como $\theta_1\theta_2 = \alpha$, temos $\theta_2 = 0$ em $H^2(RP(3),Z_2)$.

Nesse caso,

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & \mu^3 & & \xi^4 \\ \downarrow & U & \downarrow & U & \downarrow & U & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

é cobordante a

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_4^1 & & \xi_3^1 \oplus R & & 2\xi_2^1 \oplus R & & 3\xi_1^1 \oplus R \\ \downarrow & U & \downarrow & U & \downarrow & U & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

significando isto que $[S,V^5]_2 = [T_1,M_1^5]$ em $I_5(Z_2)$.

Suponhamos agora que $u_1 \in H^1(RP(2),Z_2)$ é o elemento não nulo; então $u_2 = 0$, $h_1 = 0$.

Pelo Lema 2.11, parte ii), temos:

$$\partial([\mu^3 \to RP(2)]_2) = \{A,S^4\}_2$$

Também $[\xi^4 \to RP(1)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_1(BO(4))$, uma vez que $h_1 = 0$ e $W(RP(1)) = 1$.

Segue que

$$\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = \partial([\nu^1 \to RP(4)]_2) + \partial([\mu^3 \to RP(2)]_2) +$$

$$+ \partial([\xi^4 \to RP(1)]_2) = \partial([\nu^1 \to RP(4)]_2) + \{A,S^4\}_2.$$

Na segunda hipótese de (**), temos:

$\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = 0$; como já visto atrás, isto acarreta $\theta_1 = 0$.

Concluimos, nesse caso, que $j_*([S,V^5]_2) =$

$$= \begin{bmatrix} \xi_4^1 \\ \downarrow \\ RP(4) \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} 2\xi_3^1 \\ \downarrow \\ RP(3) \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} \xi_2^1 \oplus R^2 \\ \downarrow \\ RP(2) \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} 4\xi_1^1 \\ \downarrow \\ RP(1) \end{bmatrix}_2 =$$

$= j_*([T_3,M_3^5]_2)$, e portanto, $[S,V^5]_2 = [T_3,M_3^5]_2$.

Finalmente, valendo a primeira hipótese de (**), temos:

$$\partial([\eta^2 \to RP(3)]_2) = [RP(4)]_2 \{A,S^0\}_2 + \{A,S^4\}_2$$

Então, como antes, $\theta_1 \neq 0$, $\theta_2 = 0$. O fibrado

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^1 & & \eta^2 & & \mu^3 & & \xi^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

é, nesse caso, cobordante a

$$\begin{array}{ccccccc} R & & \xi_3^1 \oplus R & & \xi_2^1 \oplus R^2 & & 4\xi_1^1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(4) & & RP(3) & & RP(2) & & RP(1) \end{array}$$

o que implica $[S,V^5]_2 = [T_4,M_4^5]_2$ em $I_5(Z_2)$.

Isso completa a prova de ii). ■

2.13. *Observação*

Considere a involução:

$\tau: RP(2k+3) \to RP(2k+3)$, dada por

$$\tau([x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2k+3}]) = [-x_0, -x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2k+3}]$$

Então $F(\tau) = RP(2k+1) \cup RP(1)$, com fibrado normal:

$$\begin{array}{ccc} 2\xi^1_{2k+1} & & (2k+2)\xi^1_1 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(2k+1) & & RP(1) \end{array}$$

Temos $[(2k+2)\xi^1_1 \to RP(1)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_1(BO(2k+2))$, uma vez que $v_1((2k+2)\xi^1_1) = 0$.

Obtemos então variedade M^{2k+3} e involução $\Phi: M^{2k+3} \to M^{2k+3}$, com $F(\Phi) = RP(2k+1)$ e fibrado normal $2\xi^1_{2k+1} \to RP(2k+1)$.

Temos $v_1(2\xi^1_{2k+1}) = 0$, $v_2(2\xi^1_{2k+1}) = \alpha^2$, onde $\alpha \in H^1(RP(2k+1), Z_2)$ é o elemento não nulo; a classe tangencial de $RP(2k+1)$ é $W(RP(2k+1)) = (1+\alpha)^{2k+2} = (1+\alpha^2)^{k+1}$, o que implica $w_j(RP(2k+1)) = 0$ se j é ímpar.

Segue que os números de Whitney relevantes de $2\xi^1_{2k+1} \to RP(2k+1)$ são da forma:

$$v_2^s\, w_{2i_1}\, w_{2i_2} \cdots w_{2i_r}\, [RP(2k+1)]_2,$$

onde os w_i denotam classes tangenciais de $RP(2k+1)$; tais

números são nulos, uma vez que o monômio acima tem grau par.

Concluímos que $[2\xi^1_{2k+1} \to RP(2k+1)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_{2k+1}(BO(2))$; portanto, $[\Phi, M^{2k+3}]_2 = 0$ em $I_{2k+3}(Z_2)$.

O teorema abaixo mostra que este fato tem um caráter mais geral:

2.14. *Teorema*

Se (T, M^n) é uma variedade com involução, com $F(T) = RP(2k+1)$ e $n = 2k + 3$, então $[T, M^n]_2 = 0$ em $I_n(Z_2)$.

Prova

Seja

$$\begin{array}{c} \eta^2 \\ \downarrow \\ RP(2k+1) \end{array}$$

o fibrado normal, e $V = 1 + v_1 + v_2$, a classe total de η^2.

Temos

$$0 = w_1^{2k}[M^{2k+3}]_2 = \sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+3})^{2k}\ [M^{2k+3}]_2 =$$

$$= \frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)}\ \sigma_1(1+y_1, 1+y_2, z_1, z_2, \ldots, z_{2k+1})^{2k}[RP(2k+1)]_2 =$$

$$= \frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)} \left(\sum_{p+q\leq 1} \binom{2-p}{1-p-q}\sigma_p(Y)\sigma_q(Z)\right)^{2k} [RP(2k+1)]_2 =$$

$$=(1+v_1+v_1^2+v_2+ \text{termos c/grau} \geq 3)\ (v_1+w_1(RP(2k+1)))^{2k}\ [$$

$$[RP(2k+1)]_2 = (1+v_1+v_1^2+v_2+ \text{termos c/grau} \geq 3)$$

$$(v_1^{2k})[RP(2k+1)]_2 = v_1^{2k+1}[RP(2k+1)]_2.$$

Segue que $v_1 \in H^1(RP(2k+1),Z_2)$ é nulo.

O mesmo raciocínio utilizado na observação 2.13 mostra que $[n^2 \to RP(2k+1)]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_{2k+1}(BO(2))$, o que acarreta $[T,M^n]_2 = 0$ em $I_n(Z_2)$. ■

3. *Não Existência de Involuções Fixando Espaços Projetivos Complexos*

3.1. *Teorema*

i) Não existe involução $T: M^n \to M^n$, com $n = 4k + 2$ e $F(T) = CP(2k)$, o espaço projetivo complexo 2k-dimensional.

ii) Não existe involução $T; M^n \to M^n$, com $n = 8k + 4$ e $F(T) = CP(4k)$.

Prova de i

Supondo a existência, sejam $\eta^2 \to CP(2k)$ o fibrado normal, e $V = 1 + v_1 + v_2$ a classe total de η^2.

Temos $\chi(CP(2k)) \equiv 1 \mod.2$, e $\chi(CP(2k)) \equiv$ $\equiv w_{4k}[CP(2k)]_2 \mod.2$. Por outro lado,

$$0 = w_{4k}[M^{4k+2}]_2 = \sigma_{4k}(x_1, x_2, \ldots, x_{4k+2})[M^{4k+2}]_2 =$$

$$= \frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)} \sigma_{4k}(1+y_1, 1+y_2, z_1, z_2, \ldots, z_{4k})[CP(2k)]_2 =$$

$$= \frac{1}{(1+y_1)(1+y_2)} \sum_{p+q \leq 4k} \binom{2-p}{4k-p-q} \sigma_p(Y)\sigma_q(Z)[CP(2k)]_2$$

O coeficiente binomial $\binom{2-p}{4k-p-q}$ se anula quando $2 - p < 4k - p - q$, ou $q < 4k - 2$; além disso, $H^j(CP(2k), Z_2) = 0$, se j é ímpar.

Então

$$0 = w_{4k}[M^{4k+2}]_2 = (1 + v_1 + v_1^2 + v_2 + \overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\cdots\cdots})($$
$$)(\binom{2}{2} w_{4k-2}(CP(2k)) + \binom{0}{0} v_2 w_{4k-2}(CP(2k)) +$$

$$+ \binom{2}{0} w_{4k}(CP(2k)))[CP(2k)]_2 = (1 + v_2 + \overset{\text{termos c/grau} \geq 3}{\cdots\cdots})($$
$$)(w_{4k-2}(CP(2k)) + v_2 w_{4k-2}(CP(2k)) + w_{4k}(CP(2k)))($$

$$)[CP(2k)]_2 = v_2 w_{4k-2}[CP(2k)]_2 + v_2 w_{4k-2}[CP(2k)]_2 +$$

$$+ w_{4k}[CP(2k)]_2 = w_{4k}[CP(2k)]_2,$$ o que é uma contradição. Segue o resultado. ■

Prova de ii)

Supondo a existência, sejam $\eta^4 \to CP(4k)$ o fibrado normal, e $V = 1 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ a classe total de η^4.

Como em i), $1 = w_{8k}[CP(4k)]_2 \equiv \chi(CP(4k)) \bmod 2$.

Por outro lado,

$$0 = w_{8k}[M^{8k+4}]_2 = \sigma_{8k}(x_1, x_2, \ldots, x_{8k+4})[M^{8k+4}]_2 =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} \sigma_{8k}(1+y_1, \ldots, 1+y_4, z_1, z_2, \ldots, z_{8k})[CP(4k)]_2 =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} \sum_{p+q \leq 8k} \binom{4}{8k-p-q} \sigma_p(Y)\sigma_q(Z)[CP(4k)]_2$$

Não é difícil ver que:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} = 1 + s_1(Y) + s_2(Y) + s_{11}(Y) + s_3(Y) + s_{12}(Y) +$$

$$+ s_{111}(Y) + s_4(Y) + s_{13}(Y) + s_{22}(Y) + s_{112}(Y) + s_{1111}(Y).$$

Aqui, s_w denotam as polinomiais definidas em [9; pag. 58], onde $w = i_1 i_2 \ldots i_r$ é uma partição de $\ell \leq 4$. Utilizando-se os cálculos efetuados em [9;pag.59], temos:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} \equiv 1 + \sigma_1(Y) + \sigma_1^2(Y) + \sigma_2(Y) + \sigma_1^3(Y) +$$

$$+ \sigma_1(Y)\sigma_2(Y) + \sigma_3(Y) + \sigma_1(Y)\sigma_2(Y) + \sigma_3(Y) + \sigma_3(Y) +$$

$$+ \sigma_1^4(Y) + \sigma_1^2(Y)\sigma_2(Y) + \sigma_1(Y)\sigma_3(Y) + \sigma_2^2(Y) + \sigma_1(Y)\sigma_3(Y) +$$

$$+ \sigma_4(Y) \equiv 1 + \sigma_1(Y) + \sigma_1^2(Y) + \sigma_2(Y) + \sigma_1^3(Y) + \sigma_3(Y) +$$

$$+ \sigma_1^4(Y) + \sigma_1^2(Y)\sigma_2(Y) + \sigma_2^2(Y) + \sigma_4(Y) \mod. 2$$

O coeficiente binomial $\binom{4-p}{8k-p-q}$ se anula quando $4 - p < 8k - p - q$, ou $q < 8k - 4$.

Juntando tais fatos, e lembrando que $H^j(CP(4k),Z_2) = 0$ para j ímpar, temos:

$$0 = w_{8k}[M^{8k+4}]_2 = (1+v_1+v_1^2+v_2+v_1^3+v_3+v_1^4+v_1^2v_2+v_2^2+v_4+ \text{termos c/grau} \geq 5)(\binom{4}{4} w_{8k-4}(CP(4k)) + \binom{2}{2}v_2\, w_{8k-4}(CP(4k)) +$$

$$+ \binom{0}{0} v_4\, w_{8k-4}(CP(4k)) + \binom{4}{2} w_{8k-2}(CP(4k)) +$$

$$+ \binom{2}{0} v_2 w_{8k-2}(CP(4k)) + \binom{4}{0} w_{8k}(CP(4k)))[CP(4k)]_2 =$$

$$= (1 + v_2 + v_2^2 + v_4 + \text{termos c/grau} \geq 5)(w_{8k-4} + v_2\, w_{8k-4} +$$

$$+ v_4\, w_{8k-4} + v_2 w_{8k-2} + w_{8k})[CP(4k)]_2 =$$

$$= v_4 w_{8k-4}[CP(4k)]_2 + v_2 w_{8k-2}[CP(4k)]_2 +$$

$$+ w_{8k}[CP(4k)]_2 + v_2^2 w_{8k-4}[CP(4k)]_2 + v_2^2\, w_{8k-4}[CP(4k)]_2 +$$

$$+ v_4\, w_{8k-4}[CP(4k)]_2 = v_2\, w_{8k-2}[CP(4k)]_2 + w_{8k}[CP(4k)]_2$$

Agora, a classe tangencial de $CP(4k)$ é $W = (1+\alpha)^{4k+1}$, onde $\alpha \in H^2(CP(4k),Z_2)$ é o elemento não nulo, e portanto:

$w_{8k-2}(CP(4k)) = \binom{4k+1}{4k-1} \alpha^{4k-1} = 0$, uma vez que $\binom{4k+1}{4k-1} \equiv 0$ mod.2.

Concluimos que $w_{8k}[CP(4k)]_2 = 0$, o que é um absurdo. ■

No próximo parágrafo, demonstraremos mais alguns resultados de não existência de involuções, envolvendo produtos de esferas.

4. *Involuções Fixando Produtos de Esferas e Um Ponto*

Neste parágrafo, obtemos alguns resultados na linha do teorema C, página 54, envolvendo produtos de esferas e um ponto.

Denotaremos por K_i, $i = 1,2,4,8$, respectivamente, aos reais (R), complexos (C), quatérnios (Q) ou números de Cayley ($\mathcal{O}$), e por $K_iP(2)$ o correspondente plano projetivo.

Considere a involução:

$T_i: K_iP(2) \to K_iP(2)$, $i = 1,2,4,8$, dada, em coordenadas homogêneas, por $T_i[w_0,w_1,w_2] = [-w_0,w_1,w_2]$.

Então, $F(T_i) = S^i \cup pto$; além disso, se

$\nu^i \to S^i$ denota o fibrado normal à componente S^i, temos que $w_i(\nu^i) \in H^i(S^i, Z_2)$ é o elemento não nulo [4; Teorema 28.4; pg. 100].

Consideremos agora:

$T_i \times T_i : K_i P(2) \times K_i P(2) \to K_i P(2) \times K_i P(2)$, e sejam $\alpha_i \in H^i(S^i, Z_2)$ o elemento não nulo, $\pi_1^i : S^i \times S^i \to S^i$, $\pi_2^i : S^i \times S^i \to S^i$, as projeções; então

$F(T_i \times T_i) = S^i \times S^i \cup S^i \times pto \cup pto \times S^i \cup pto \times pto$ com fibrados normais:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1^{i*}(\nu^i) \oplus \pi_2^{i*}(\nu^i) & & \nu^i \oplus R^{2i} & & R^{2i} \oplus \nu^i & & R^{4i} \\
\downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\
S^i \times S^i & & S^i \times pto & & pto \times S^i & & pto
\end{array}$$

Como $[\nu^i \oplus R^{2i} \to S^i \times pto]_2 + [R^{2i} \oplus \nu^i \to pto \times S^i]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_i(BO(3i))$, obtemos, utilizando o processo da página variedades com involução (τ_i, M^{4i}), $i = 1,2,4,8$, com conjunto de pontos fixos e respectivos fibrados normais:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1^{i*}(\nu^i) \oplus \pi_2^{i*}(\nu^i) & & R^{4i} \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
S^i \times S^i & & pto
\end{array}$$

Notemos que $w_{2i}(\pi_1^{i*}(\nu^i) + \pi_2^{i*}(\nu^i)) = \pi_1^{i*}(\alpha_i)\, \pi_2^{i*}(\alpha_i) = \alpha_i \times \alpha_i$.

4.1. *Teorema*

Se (S,V^n) é uma variedade com involução, com $F(S) = S^i \times S^i \cup$ pto, para $i = 1,2,4$ ou 8, então $n = 4i$ e $[S,V^n]_2 = [\tau_i, M^{4i}]_2$ em $I_{4i}(Z_2)$.

Para a prova, necessitamos do

4.2. *Lema*

Seja (T,M^{2n}) variedade com involução, com $\chi(M^{2n}) \equiv 1 \mod 2$ e $F(T) = \bigcup_{m=0}^{2n-1} F^m$, F^m denotando a união dos componentes de $F(T)$ com dimensão m.

Seja $\eta \to F(T)$ o fibrado normal.

Então existe m, $n \leq m \leq 2n$, tal que $w_{2n-m}(\eta^{2n-m}) \neq 0$ em $H^{2n-m}(F^m,Z_2)$. [4; Parag. 28; pg.100] ∎

Prova de 4.1.

Temos $\chi(V^n) \equiv \chi(S^i \times S^i \cup \text{pto}) \equiv 1 \mod 2$; portanto, n é par, digamos, $n = 2r$.

Seja $\eta^{2r-2i} \to S^i \times S^i$ o fibrado normal à componente $S^i \times S^i$; pelo lema 4.2, $w_{2r-2i}(\eta^{2r-2i}) \neq 0$ em $H^{2r-2i}(S^i \times S^i, Z_2)$. Agora, $H^i(S^i \times S^i, Z_2) \cong Z_2(\pi_1^{i*}(\alpha_i)) \oplus$ $\oplus\, Z_2(\pi_2^{i*}(\alpha_i))$, $H^{2i}(S^i \times S^i, Z_2) \cong Z_2(\pi_1^{i*}(\alpha_i)\pi_2^{i*}(\alpha_i))$, $H^j(S^i \times S^i, Z_2) = 0$ nos outros casos. Segue que $2r - 2i = i$ ou $2r - 2i = 2i$. Suponha a primeira hipótese; nesse caso,

como $W(S^i \times S^i) = 1$, o único número de Whitney relevante de $\eta^i \to S^i \times S^i$ é $w_i(\eta^i)^2[S^i \times S^i]_2$, o qual é nulo.

Portanto, $[\eta^i \to S^i \times S^i]_2 = 0$ em $\mathfrak{N}_{2i}(BO(i))$.

Considerando a sequência exata:

$0 \to I_{3i}(Z_2) \xrightarrow{j^*} \mathfrak{M}_{3i} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_{3i-1}(Z_2) \to 0$, temos então

$0 = \partial j^* ([S, V^{3i}]_2) = \partial([\eta^i \to S^i \times S^i]_2 + [R^{3i} \to pto]_2 =$

$= \{A, S^{3i-1}\}_2$ em $\mathfrak{N}_{3i-1}(Z_2)$, o que é impossível.

Segue que $2r - 2i = 2i$, ou $n = 2r = 4i$, enquanto $w_{2i}(\eta^{2i}) = \pi_1^{i*}(\alpha_i)\pi_2^{i*}(\alpha_i)$; isto acarreta que

$$\begin{array}{ccc} \eta^{2i} & & R^{4i} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ S^i \times S^i & & pto \end{array}$$

tem os mesmos números de Whitney de

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{i*}(\nu^i) \oplus \pi_2^{i*}(\nu^i) & & R^{4i} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ S^i \times S^i & & pto \end{array}$$

e portanto $[S, V^{4i}]_2 = [\tau_i, M^{4i}]_2$ em $I_{4i}(Z_2)$. ■

O teorema 4.1 sugere a seguinte conjectura, a qual é uma espécie de generalização do Teorema C, pag. 54, para involuções fixando produtos de esferas e um ponto: se (S, V^n) é tal que $F(S) = S^i \times S^i \cup pto$, então $n = 4i$, $i = 1, 2, 4$ ou 8, e $[S, V^{4i}]_2 = [T_i, M^{4i}]_2$ em $I_{4i}(Z_2)$.

O resultado abaixo reforça tal conjectura.

4.3. *Teorema*

Não existe variedade com involução (S,V^n) com $F(S) = S^{2^r k} \times S^{2^r k} \cup pto$, sendo k impar, $k > 1$, $r \geq 0$.

Prova

Suponhamos a existência de (S,V^n); usando o Lema 4.2, concluimos, como na prova do Teorema 4.1, que $n = 2^{r+2}k$.

Seja $\eta^{2^{r+1}k} \to S^{2^r k} \times S^{2^r k}$ o fibrado normal.

Usando a fórmula de Kosniowski-Stong, obtemos:

$$w_1^{2^{r+2}k}[V^{2^{r+2}k}]_2 = \sigma_1(x_1,x_2,\ldots,x_{2^{r+2}k})[V^{2^{r+2}k}]_2 =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^{r+2}k}(1+y_i)} \sigma_1(1+y_1,\ldots,1+y_{2^{r+2}k})^{2^{r+2}k}[pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^{r+1}k}(1+y_i)} \sigma_1(1+y_1,\ldots,1+y_{2^{r+1}k},z_1,z_2,\ldots,z_{2^{r+1}k})^{2^{r+2}k}[$$

$$[S^{2^r k} \times S^{2^r k}]_2 =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^{r+2}k}(1+y_i)} \left(\sum_{p\leq 1} \binom{2^{r+2}k - p}{1 - p}\sigma_p(Y)\right)^{2^{r+2}k}[pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^{r+1}k}(1+y_i)} \left(\sum_{p+q\leq 1} \binom{2^{r+1}k-p}{1-p-q}\sigma_p(Y)\sigma_q(Z)\right)^{2^{r+2}k}[S^{2^r k}\times S^{2^r k}]_2 =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^{r+2}k}(1+y_i)} \binom{2^{r+2}k}{1}\sigma_0(Y)^{2^{r+2}k}\ [pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^{r+1}k}(1+y_i)}\left(\binom{2^{r+1}k}{1} + \binom{2^{r+1}k-1}{0}w_1(\eta^{2^{r+1}k}) + \right.$$

$$\left. + \binom{2^{r+1}k}{0}w_1(S^{2^r k}\times S^{2^r k})\right)^{2^{r+2}k}([S^{2^r k}\times S^{2^r k}]_2) = 0$$

Por outro lado, temos, usando o Teorema 6.1, Cap.0: $[V^{2^{r+2}k}]_2 = [RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 + [RP(2^{r+2}k)]_2$, em $\mathfrak{N}_{2^{r+2}k}$.

Portanto:

$$0 = w_1^{2^{r+2}k}[V^{2^{r+2}k}]_2 = w_1^{2^{r+2}k}\ [RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 +$$

$$+ w_1^{2^{r+2}k}[RP(2^{r+2}k)]_2 = w_1^{2^{r+2}k}[RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 + 1,$$

ou seja,

$$w_1^{2^{r+2}k}\ [RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 = 1$$

Sejam $p: RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R) \to S^{2^r k} \times S^{2^r k}$, $\bar{p}: RP(\eta^{2^{r+1}k}) \to S^{2^r k} \times S^{2^r k}$, as projeções, e $c \in H^1(RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R),Z_2)$, $\bar{c} \in H^1(RP(\eta^{2^{r+1}k}),Z_2)$, as clas

ses características dos fibrados-involução

$(A,S(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R))$, $(A,S(\eta^{2^{r+1}k}))$, respectivamente; seja

$i: RP(\eta^{2^{r+1}k}) \to RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)$

a inclusão.

Usando a fórmula de Borel-Hirzebruch, e o fato de que $k > 1$, obtemos:

$w_1(RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)) =$

$$= \sum_{p+q+s=1} \binom{2^{r+1}k+1-p}{q} p^*(w_s(S^{2^r k} \times S^{2^r k}) w_p(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)) c^q =$$

$= \binom{2^{r+1}k + 1}{1} c = c$, o que acarreta

$$c^{2^{r+2}k}[RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 = 1$$

Segue que:

$$\bar{c}^{2^{r+2}k-1}([RP(\eta^{2^{r+1}k})]_2) = i^*(c)^{2^{r+2}k-1}([RP(\eta^{2^{r+1}k})]_2) =$$

$$= c^{2^{r+2}k-1}(i_*[RP(\eta^{2^{r+1}k})]_2) = c^{2^{r+2}k-1}([RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 \cap c) =$$

$$= c^{2^{r+2}k}[RP(\eta^{2^{r+1}k} \oplus R)]_2 = 1$$

Por outro lado,

$$w_{2^{r+1}}(RP(\eta^{2^{r+1}k})) = \sum_{p+q+s=2^{r+1}} \binom{2^{r+1}k-p}{q} \bar{p}^*(w_s(S^{2^r k} \times S^{2^r k}).$$

$w_p(\eta^{2^{r+1}k}))\bar{c}^q = \binom{2^{r+1}k}{2^{r+1}} \bar{c}^{2^{r+1}}$, uma vez que, sendo $k \geq 3$, temos $2^r k \geq 2^r(2+1) = 2^{r+1} + 2^r > 2^{r+1}$, significando isto que $w_{2^r k}(\eta^{2^{r+1}k})$ não participa da somatória acima.

Suponha $k = 1.2^0 + \sum_{i=1}^{t} m_i 2^i$, $m_i = 0$ ou 1, a partição diádica de k; então

$2^{r+1}k = 1.2^{r+1} + \sum_{i=1}^{t} m_i \, 2^{r+1+i}$, o que acarreta:

$$\binom{2^{r+1}k}{2^{r+1}} \equiv \binom{0}{0} \cdots \binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{m_1}{0} \cdots \binom{m_t}{0} \equiv 1 \mod.2$$

Segue que

$$w_{2^{r+1}}(RP(\eta^{2^{r+1}k})) = \bar{c}^{2^{r+1}}$$

Obtemos, portanto, o número de involução:

$$\bar{c}^{2^{r+1}(2k-1)-1} w_{2^{r+1}}'\{A, S(\eta^{2^{r+1}k})\}_2 = \bar{c}^{2^{r+2}k-1}[RP(\eta^{2^{r+1}k})]_2 =$$

$= 1$

Agora, a classe tangencial de $RP(2^{r+2}k-1)$ é: $W = (1+\alpha)^{2^{r+2}k} = (1 + \alpha^{2^{r+2}})^k$, onde $\alpha \in H^1(RP(2^{r+2}k-1), Z_2)$ é o elemento não nulo; portanto, $w_{2^{r+1}}(RP(2^{r+2}k-1)) = 0$,

o que acarreta

$$c^{2^{r+1}(2k-1)-1} w_{2^{r+1}} \, '\{A, S^{2^{r+2}k-1}\}_2 = 0$$

Concluimos que

$'\{A, S^{2^{r+2}k-1}\}_2 \neq '\{A, S(\eta^{2^{r+1}k})\}_2$ em $\mathfrak{N}_{2^{r+2}k-1}(Z_2)$; considerando a sequência exata,

$$0 \to I_{2^{r+2}k}(Z_2) \xrightarrow{j_*} \mathfrak{M}_{2^{r+2}k} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_{2^{r+2}k-1}(Z_2) \to 0,$$

obtemos a contradição:

$$0 = \partial j_*([S, V^{2^{r+2}k}]_2) =$$

$$= '\{A, S^{2^{r+2}k-1}\}_2 + '\{A, S(\eta^{2^{r+1}k})\}_2. \quad \blacksquare$$

Para involuções fixando produtos em esferas $S^i \times S^j$ e um ponto, com $i \neq j$, não temos resultados de caráter geral como os acima; nem mesmo conhecemos um exemplo de variedade com involução (T, M^n) com $F(T) = S^i \times S^j \cup$ $\cup$ pto, $i \neq j$. A tentativa de obter tais exemplos imitando o processo da página 72 não produz resultados; mais ainda, mesmo que existam variedades com involução (T_1, M_1^n), (T_2, M_2^m), com $F(T_1) = S^i \cup$ pto, $F(T_2) = S^j \cup$ pto, $i \neq j$, pode não existir (S, V^r) com $F(S) = S^i \times S^j \cup$ pto, como mostra o teorema abaixo:

4.4. *Teorema*

Não existe variedade com involução (T,M^n) com $F(T) = S^2 \times S^4 \cup$ pto.

Prova

Supondo a existência, seja $\nu^{n-6} \to S^2 \times S^4$ o fibrado normal; pelo Lema 4.2, devemos ter $n = 8$, 10 ou 12.

O caso $n = 8$ é eliminado, usando-se a sequência exata:

$0 \to I_8(Z_2) \xrightarrow{j^*} \mathfrak{M}_8 \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_7(Z_2) \to 0$ e o fato de que $[\nu^2 \to S^2 \times S^4]_2 \in \mathfrak{M}_8$ é nulo.

Suponhamos $n = 12$. Temos:

$[M^{12}]_2 = [RP(\nu^6 \oplus R)]_2 + [RP(12)]_2$ em $\mathfrak{N}_{12}$.

Portanto:

$w_3^4[M^{12}]_2 = w_3^4[RP(\nu^6 \oplus R)]_2 + w_3^4[RP(12)]_2$ e

$w_1^{12}[M^{12}]_2 = w_1^{12}[RP(\nu^6 \oplus R)]_2 + w_1^{12}[RP(12)]_2$

Se $\alpha \in H^1(RP(12),Z_2)$ é o elemento não nulo, temos $w_3(RP(12)) = \binom{13}{3}\alpha^3 = 0$, $w_1(RP(12)) = \alpha$.

Portanto,

$w_3^4[M^{12}]_2 = w_3^4[RP(\nu^6 \oplus R)]_2$ e

$w_1^{12}[M^{12}]_2 = w_1^{12}[RP(\nu^6 \oplus R)]_2 + 1$

Os termos do lado esquerdo podem ser computados através da fórmula de Kosniowski-Stong; denotando por $V = 1 + v_2 + v_4$ a classe total de ν^6, temos:

$$w_3^4[M^{12}]_2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{12}(1+y_i)}\sigma_3(1+y_1,\ldots,1+y_{12})^4[pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{6}(1+y_i)}\sigma_3(1+y_1,\ldots,1+y_6,z_1,\ldots,z_6)^4[S^2\times S^4]_2 =$$

$$= \binom{12}{3}^4 \sigma_0(Y)[pto]_2 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{6}(1+y_i)}((\binom{6}{3}\sigma_0(Y)\sigma_0(Z) +$$

$$+ \binom{4}{1}v_2)^4[S^2\times S^4]_2 = 0$$

Também

$$w_1^4[M^{12}]_2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{12}(1+y_i)}\binom{12}{1}^{12}\sigma_0(Y)[pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{6}(1+y_i)}((\binom{6}{1}\sigma_0(Y)\sigma_0(Z))^{12}[S^2\times S^4]_2 = 0$$

Através da fórmula de Borel-Hirzebruch, obtemos:

$w_3(RP(\nu^6 \oplus R)) = \binom{7}{3}c^3 + \binom{5}{1}cp^*(v_2) = c^3 + cp^*(v_2)$ e

$w_1(RP(\nu^6 \oplus R)) = \binom{7}{1}c = c$

Aqui, $c \in H^1(RP(\nu^6 \oplus R),Z_2)$ é a classe carac

terística do fibrado involução $(A, S(\nu^6 \oplus R))$, e $p: RP(\nu^6 \oplus R) \to S^2 \times S^4$ é a projeção.

Juntando os fatos acima, temos:

$0 = w_3^4[M^{12}]_2 = w_3^4[RP(\nu^6 \oplus R)]_2 = C^{12}[RP(\nu^6 \oplus R)]_2$, uma vez que $v_2^4 \in H^8(S^2 \times S^4, Z_2)$ é nulo.

Por outro lado,

$0 = w_1^{12}[M^{12}]_2 = w_1^{12}[RP(\nu^6 \oplus R)]_2 + 1 = c^{12}[RP(\nu^6 \oplus R)]_2 + 1$,

o que é absurdo.

Só podemos ter então $n = 10$; nesse caso:

$$0 = w_2^2[M^{10}]_2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{10}(1+y_i)} \sigma_2(1+y_1, \ldots, 1+y_{10})^2[pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} \sigma_2(1+y_1, \ldots, 1+y_4, z_1, \ldots, z_6)^2[S^2 \times S^4]_2 =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{10}(1+y_i)} \binom{10}{2}^2 \sigma_0(Y)[pto]_2 +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} \left(\sum_{p+q \leq 2} \binom{4-p-q}{p} \sigma_p(Y)\sigma_q(Z)\right)^2[S^2 \times S^4]_2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} \left(\binom{4}{2}\sigma_0(Y)\sigma_0(Z) + \binom{2}{0}\sigma_2(Y)\right)^2[S^2 \times S^4]_2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1+y_i)} v_2^2[S^2 \times S^4]_2 = 1,$$ uma vez que $v_2^2 \in H^4(S^2 \times S^4)$ é nulo.

Segue o resultado. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] BOREL, A.; La cohomologie mod 2 des certains espaces homogènes; Comment. Math. Helvetia; Vol.27 (1953); pgs. 165-197.

[2] BOREL, A.; Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groups de Lie Compacts; Annals of Mathematycs (2); Vol.57 (1953); pgs. 115-207.

[3] BOREL, A.; HIRZEBRUCH, F.; On Characteristic classes of homogeneous spaces, I; American Journal Math.; Vol.80 (1958); pgs. 458-538.

[4] CONNER, P.E.; FLOYD, E.E.; Differentiable Periodic Maps; Springer-Verlag; (1979).

[5] CONNER, P.E.; FLOYD, E.E.; Fibring within a cobordism class; Michigan Mathematycal Journal; Vol.12 (1965); pgs. 33-47.

[6] GREEMBERG, M.J.; Lectures on Algebraic Topology; Mathematics Lecture Note Series (1967).

[7] HIRSCH, M.; Differential Topology; Springer-Verlag.

[8] KOSNIOWSKI, C.; STONG, R.E.; Involutions and Characteristic Number; Topology, Vol.17 (1978);pgs. 309-330.

[9] MILNOR, J.W.; Lectures on Characteristic Classes (mimeographed) - Princeton University (1958).

[10] MILNOR, J.W.; On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds; Topology, Vol.3 (1965); pgs. 223-230.

[11] MONTGOMERY, D.; ZIPPIN, L.; Topologycal Transformation Groups; Interscience Publishing Co. (1955).

[12] ROYSTER, D.C.; Aspherical generators of unoriented cobordism; Proceedings Amer. Math. Soc.; Vol.66 (1977); pgs. 131-137.

[13] STONG, R.E.; Involutions fixing projective spaces; Michigan Mathematycal Journal, Vol.13 (1966); pgs. 445-447.

[14] THOM, R.; Quelques proprietés globales des varietés differentiables - Comment. Math. Helvet.; Vol.28 (1954); pgs. 18-88.

[15] WALL, C.T.C.; Determination of the Cobordism Ring, Annals of Mathematics; Vol.72 , nº 2 (1960); pgs. 292-311.