SOBRE O PROBLEMA DE SEPARAÇÃO
E SOBRE A TOPOLOGIA DE CERTAS
APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Walter dos Santos Motta Junior

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
a obtenção do Título de Doutor em
Ciências (Matemática).

Orientador: *Prof. Dr. Paulo Ferreira da Silva Porto Junior*

São Carlos - SP
junho/1992

Meus sinceros agradecimentos,

- ao Prof. **Paulo Ferreira da Silva Porto Junior** (orientador), que me introduziu no estudo de aplicações genéricas, possibilitando o contato com inúmeros matemáticos no exterior, pelo seu contínuo incentivo durante toda a realização deste trabalho;
- aos excelentes matemáticos os Profs. **Carlos Biasi** (ICMSC-USP), **Osamu Sasaki** (Univ. Yamagata - Japão) e **Kiyoshi Igusa** (Univ. Brandeis - EUA), pelas inúmeras discussões e sugestões, as quais deram origem ao capítulo 1 deste trabalho, bem como a vários resultados dos capítulos 2 e 3;
- ao Prof. **Luis Ernesto Mata-Lorenzo** (Univ. Simon Bolivar-Venezuela), pelas discussões e sugestões referentes ao capítulo 3;
- ao Prof. **Ozírde Manzoli Neto** (ICMSC-USP), e a Profa. **Maria Aparecida Soares Ruas** (ICMSC-USP), pelas inúmeras discussões referentes a tópicos em topologia diferencial e algébrica;
- às Profas. **Angela Sitta** (IBILCE UNESP), **Dirce Mochida** (UFSCar) e **Miriam Manoel** (ICMSC-USP) e o Prof. **Luiz Galante** (FCT-UNESP), pelo incentivo durante a realização deste trabalho;
- aos colegas do DMT-UFMS, em especial o Prof. **Alfredo Tokuda**, pela concessão de afastamento para a realização deste trabalho;
- à Deus, por tudo.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

Abstract

In this work, we study the problem of separating the range of a given map, by its image; we also study the topology of certain stable maps.

By working with immersions with normal crossings, $M^m \rightarrow N^{m-1}$, we firstly obtain interesting results which guarantee the separation of N by $f(M)$, under certain conditions.

Then, by using the Stein Factorization of a given stable map and some results on the classification of 1-connected 4-manifolds, we obtain interesting information on the topologies of the singular set and of the domain of such a map, particularly in the special generic case.

Finally, by working with stable maps whose only singularities are fold points and whose domain has low dimension, we simplify its singular set, by cancelling components by local deformations, in order to get topological information of the source.

Conteúdo

Introdução	1
1 Propriedades de Separação de Imersões com Interseções Normais em Codimensão 1	2
1.1 Problemas Abordados	2
1.2 Definições e Principais Resultados Relacionados	3
1.3 Resultados Obtidos	5
2 Observações Topológicas Sobre Certas Aplicações Genéricas Especiais	15
2.1 Problemas Abordados	15
2.2 Definições e Principais Resultados Relacionados	16
2.3 Resultados Obtidos	22
3 Sobre a Topologia de Variedades Realizando Complexos Bidimensionais	35
3.1 Problemas Abordados	35
3.2 Definições e Principais Resultados Relacionados	36
3.3 Resultados Obtidos	45
Bibliografia	66

Introdução

Neste trabalho são dois os nossos objetivos: obter informações sobre o problema de separação envolvendo variedades fechadas e conexas, e, obter informações topológicas sobre o domínio e sobre o conjunto singular de certas aplicações estáveis. O trabalho está organizado da seguinte forma:

- no **Capítulo 1** são abordados dois problemas de separação, um dos quais é um questionamento sobre a recíproca do teorema de Jordan-Brouwer. Fazemos uma rápida exposição sobre os trabalhos relacionados a este tema, dos quais destacamos: Ballesteros-Fuster (1992), Biasi-Fuster (1992) e Feighn (1988). Assim, trabalhando com imersões com interseções normais, obtemos interessantes resultados sobre o problema de separação. Dentre eles, destacamos a obtenção, sob certas condições, de uma recíproca do teorema de Jordan-Brouwer;
- no **Capítulo 2** são abordados três problemas buscando a obtenção de informações topológicas sobre o domínio e sobre o conjunto singular de aplicações genéricas especiais. Uma ferramenta básica e de utilização essencial para o estudo de tais problemas é a fatorização de Stein associada a aplicação dada. Fazemos novamente uma rápida exposição dos principais trabalhos relacionados a este assunto, dos quais destacamos: Burlet-de Rham (1974), Porto-Furuya (1990), Fukuda (1987) e Saeki (1992). Com algumas restrições sobre as dimensões das variedades envolvidas, obtemos resultados que caracterizam o conjunto singular e a variedade domínio destas aplicações. Dentre eles, destacamos uma caracterização do não-enodamento do conjunto singular na variedade domínio, onde resultados do capítulo 1 são utilizados;
- no **Capítulo 3** desenvolvemos um estudo sobre a simplificação do conjunto singular de certas aplicações cujas únicas singularidades apresentadas são as dobras e que tem como domínio uma variedade fechada, orientada e de baixa dimensão. É evidente a dificuldade em se formalizar procedimentos para tal simplificação. Novamente a fatorização de Stein é utilizada neste estudo. Dentre os principais trabalhos relacionados a este assunto destacam-se: Levine (1965), Mata-Lorenzo (1986) e Kobayashi (1990). Assim, trabalhando com domínios de dimensões 3 e 4, via deformações locais, podemos cancelar certas componentes singulares e assim obter informações sobre a topologia da variedade domínio das referidas aplicações com dobras. Dentre os resultados obtidos, destacamos a realização em dimensões 3 e 4 de modelos bidimensionais pré-estabelecidos.

Capítulo 1

Propriedades de Separação de Imersões com Interseções Normais em Codimensão 1

1.1 Problemas Abordados

O nosso interesse, neste capítulo, é obter respostas às seguintes questões:

Problema 1.1.1. Sejam M e N variedades diferenciáveis (classe C^∞), conexas e fechadas (compactas e sem bordo) de dimensões $n - 1$ e n respectivamente, e seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão. Sobre quais condições é possível assegurar-se que $f(M)$ separa N ?

Problema 1.1.2. Seja agora M uma variedade diferenciável, conexa e fechada de dimensão $n - 1$, e seja $f : M \rightarrow S^n$ um mergulho (M consequentemente é orientável). Então, via o teorema de separação de Jordan-Brouwer, tem-se que $f(M)$ separa a n -esfera S^n em exatamente duas componentes conexas. Sobre quais condições é possível assegurar-se a recíproca deste resultado?

1.2 Definições e Principais Resultados Relacionados

Feighn (1988) considera o **Problema 1.1.1.**, obtendo resposta afirmativa para a separação quando f for uma imersão de classe C^2 e $H_1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$. Mais especificamente, Feighn estabelece o resultado descrito abaixo, de difícil demonstração (que envolve ferramentas específicas de topologia algébrica e topologia diferenciável):

Teorema 1.2.1. (Feighn (1988)). Sejam duas variedades diferenciáveis M e N de dimensões $n - 1$ e n respectivamente, e seja $f : M \rightarrow N$ uma C^2 -imersão própria. Supondo-se que $H_1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$, então $N - f(M)$ não é conexo.

Observação 1.2.2. O fato da imersão f ser de classe C^2 é essencial, pois já na categoria PL, Vaccaro (1957) apresenta um contra-exemplo ao teorema acima, exibindo uma PL-imersão da esfera S^2 (“casa de duas-salas”) cujo complemento em $\mathbb{R}^3$ é conexo.

Mais recentemente, trabalhando com aplicações 1-genéricas e quase-regulares, Ballesteros (1991), obtem um interessante resultado sobre separação, a saber:

Teorema 1.2.3. (Ballesteros (1991)). Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões $n - 1$ e n respectivamente, e seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, fechada, própria, 1-genérica e quase-regular. Então, se $H_1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$, tem-se que $N - f(M)$ não é conexo.

Observações 1.2.4. (1) Mantendo-se as notações estabelecidas em Golubitsky-Guillemin (1973), dada uma aplicação diferenciável $f : X \rightarrow Y$ entre variedades diferenciáveis X e Y , define-se as subvariedades S_r de $J^1(X, Y)$ (espaço dos 1-jatos de aplicações de X em Y) com $r = 0, 1, \dots, \min\{\dim X, \dim Y\}$ por $S_r = \{\sigma \in J^1(X, Y) / \text{corank } \sigma = r\}$. Assim, uma aplicação diferenciável $f : X \rightarrow Y$ é dita 1-genérica se $j^1 f \not\cap S_r$

para cada $r = 0, \dots, \min\{\dim X, \dim Y\}$. Denotando-se por $f^{(2)}$ a restrição da aplicação $f \times f : X^2 \rightarrow Y^2$ a $X^{(2)} = X^2 - \Delta X$; f é dita quase-regular se $f^{(2)}$ for transversal a ΔY , onde ΔW denota a diagonal do espaço W .

(2) A demonstração de (1.2.3) decorre de um resultado mais geral desenvolvido por Ballesteros (1991), o qual pode ser encontrado também em Ballesteros-Fuster (1992). Neste trabalho, as condições de diferenciabilidade podem ser suprimidas e sob certas condições topológicas foi obtido também um interessante resultado envolvendo separação. Mais especificamente, Ballesteros-Fuster estabelecem que:

“Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, própria, fechada e de codimensão 1 entre variedades topológicas X e Y , com $H_1(Y, \mathbb{Z}_2) = 0$. Se o conjunto de auto-interseções de f , $A(f) = \{x \in X / f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}\}$, for não denso em qualquer componente conexa de X , então $Y - f(X)$ é desconexo”.

Biasi-Fuster (1992) consideram o **Problema 1.1.2.** Trabalhando com imersões com interseções normais de codimensão 1 eles obtêm o seguinte resultado:

Teorema 1.2.5. (Biasi-Fuster(1992)). Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, com M e N variedades diferenciáveis, conexas, fechadas e de dimensões $n - 1$ e n respectivamente. Suponhamos que f seja imersão com interseções normais, $H_1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$ para $n > 2$, $H_1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$ e que o conjunto de auto-interseção de f seja não-vazio. Nestas condições, tem-se $\beta_0(N - f(M)) \geq 3$, onde $\beta_k(X) = \dim H_k(X, \mathbb{Z}_2)$, sendo X um espaço topológico.

Observações 1.2.6. (1) Seja V um espaço vetorial n -dimensional e sejam $S_1, \dots, S_m$ subespaços lineares de V com codimensões dadas por $\text{cod } S_j = n - \dim S_j = k_j$. Diz-se que tais subespaços estão em “posição geral” se $\text{cod}(\cap S_j) = \sum_{j=1}^m k_j$. Assim, uma imersão $f : M^{n-1} \rightarrow N^n$ é denominada “imersão com interseções normais” se, para cada $q \in f(M)$, as imagens pela aplicação tangente $Tf : TM \rightarrow TN$, de espaços tangentes a M em pontos $p_j \in f^{-1}(q)$, definirem um conjunto de subespaço lineares em posição geral no espaço tangente a N em q , $T_q N$ (tais imersões são denominadas completamente regulares por Herbert (1981)).

(2) Seja $f : M^{n-1} \rightarrow N^n$ uma imersão com interseções normais e denotemos por $A(\subset M)$ o conjunto de auto-interseções de f (isto é, o conjunto dos pontos múltiplos de f). Tal conjunto é estratificado por subvariedades $S_m : A = \bigcup_{m=2}^n S_m$ ($\text{cod} S_m = m-1$), onde S_m é o conjunto de pontos de M cujas f -imagens tem multiplicidade m . Denota-se por $B = f(A)$, o conjunto dos valores múltiplos de f , o qual é também estratificado por subvariedades $B_m = f(S_m) : B = \bigcup_{m=2}^n B_m$ ($\text{cod} B_m = m-2$). Tem-se também que $f(M)$, A e B são ANR, que a restrição da aplicação f a $M - A$, $f : M - A \rightarrow f(M) - B$, é um homeomorfismo e que as restrições de f a S_m , $f|_{S_m} : S_m \rightarrow B_m$ são recobrimentos de m -folhas (ver Biasi-Fuster (1992)).

(3) Como consequência do teorema (1.2.5), Biasi-Fuster (1992) obtém uma recíproca do teorema de Jordan-Brouwer, a qual num certo sentido nos dá uma resposta ao **Problema 1.1.2**. Mais especificamente, é estabelecido que:

“Seja $f : M^{n-1} \rightarrow N^n$ uma imersão com interseções normais entre variedades diferenciáveis, fechadas e conexas, tal que $H_1(M, Z_2) = 0$ se $n > 2$ e tal que $H_1(N, Z_2) = 0$. Então, f é mergulho se e somente se $\beta_0(N - f(M)) = 2$ ”.

(4) Uma segunda consequência de (1.2.5) estabelecida por Biasi-Fuster (1992), nos dá uma estimativa, sob certas condições, do número de componentes conexas de $N - f(M)$, a saber:

“Dada uma imersão com interseções normais $f : M^{n-1} \rightarrow N^n$ ($n > 2$), suponha-se que o conjunto de auto-interseções de f se reduza ao conjunto dos pontos duplos S_2 . Se $H_1(M, Z_2) = H_1(N, Z_2) = 0$, então $\beta_0(N - f(M)) = 2 + \dim \ker (f|_A)_*$, onde $(f|_A)_* : H_{n-2}(A, Z_2) \rightarrow H_{n-2}(B, Z_2)$ é induzida por $(f|_A)$ ”.

1.3 Resultados Obtidos

Em tudo que segue neste capítulo, M e N denotam variedades diferenciáveis (classe C^∞), conexas, fechadas (compactas e sem bordo) e de dimensões $n-1$ e n respectivamente, $f : M \rightarrow N$ representa uma imersão com interseções normais (ver observação 1.2.6) e todas as homologias tem coeficientes em Z_2 . As notações e resultados básicos utilizados abaixo seguem os textos clássicos Spanier (1966) e

Milnor-Stasheff (1974).

Lema 1.3.1. Se M for orientável e $H_1(N) = 0$, então o fibrado normal da imersão $f, \nu(f)$, é trivial.

Prova:

Uma vez que $H_1(N) = 0$, tem-se pelo teorema dos coeficientes universais que $H^1(N) = 0$. Em particular, a primeira classe de Stiefel-Whitney $w_1(TN)$ de TN é nula. Como o fibrado normal da imersão $f, \nu(f)$ é definido pela sequência exata de fibrados sobre M , dada por $0 \rightarrow TM \rightarrow f^*TN \rightarrow \nu(f) \rightarrow 0$, tem-se que $0 = f^*(w_1(TN)) = w_1(TM) + w_1(\nu(f))$. Sendo M orientada por hipótese, então $w_1(TM) = 0$. Assim, tem-se que $w_1(\nu(f)) = 0$, o que implica que o fibrado em linha $\nu(f)$ é trivial. $\square$

O conjunto de auto-interseções (e sua estratificação via S_m) e o conjunto de valores múltiplos de f (e sua estratificação via B_m) são denotados por A e B respectivamente, como em (1.2.6). Usaremos também a notação $A_m = \cup_{k \geq m} S_k$. Seja $[A] \in H_{n-2}(A)$ a classe fundamental módulo 2 determinada pelo lugar dos pontos múltiplos de 2 folhas $A_2 = A$. Notemos que $[A]$ é não nula em $H_{n-2}(A)$ e que a sua existência está assegurada em Herbert (1981) (ver observações abaixo).

Observações 1.3.2. (1) - Como f é imersão com interseções normais, em Herbert (1981), tem-se que A e B tem “bom comportamento”, no sentido de serem subvariedades imersas admitindo classes fundamentais, mais especificamente,

(2) - Herbert (1981) estabelece que: “Cada lugar dos pontos múltiplos de m -folhas não-vazio, A_m , de uma imersão com interseções normais $f : M^{n-1} \rightarrow N^n$ tem em si a classe fundamental módulo 2, unicamente determinada por sua restrição a

subvariedade mergulhada $S_m = A_m - A_{m+1}$.

Lema 1.3.3. $(f|_A)_*([A]) = 0$, onde $(f|_A)_* : H_{n-2}(A) \rightarrow H_{n-2}(B)$.

Prova:

Pelas observações acima e pelo fato (ver observação 1.2.6) de $f|_{S_2} : S_2 \rightarrow f(S_2)$ ser um recobrimento de 2-folhas, segue o resultado. $\square$

Lema 1.3.4. Suponhamos que M seja orientável e que $H_1(N) = 0$. Então, $j_*([A]) = 0$, onde $j : A \rightarrow M$ é a aplicação inclusão.

Prova:

Utilizando-se a dualidade de Poincaré, temos apenas que demonstrar que

$$(j_*([A])) \cdot \gamma = 0 \text{ para } \forall \gamma \in H_1(M), \text{ onde } (j_*([A])) \cdot \gamma$$

denota o número de interseção módulo 2 de $j_*([A])$ e γ em M . Seja c uma curva diferenciável (por partes) em M representando γ . Sem perda de generalidade podemos assumir que c não intercepta A_3 e que c intercepta transversalmente S_2 . Uma vez que, pelo lema 1.3.1, o fibrado normal $\nu(f)$ da imersão f é trivial, nós temos uma imersão $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tal que $F|_{M \times \{0\}} = f$. Seja $\tilde{c} = F(c \times \{\xi\})$, onde ξ é um real positivo suficientemente pequeno. Assim, temos que o número de interseção de A_2 e c em M é igual ao número de interseção de $f(M)$ e $\tilde{c}$ em N , isto é, $(j_*([A])) \cdot \gamma = [f(M)] \cdot [\tilde{c}]$. Como, por hipótese, $H_1(N) = 0$, segue-se que $[\tilde{c}] = 0$ em $H_1(N)$. Assim, $(j_*([A])) \cdot \gamma = 0$. Isto completa a prova. $\square$

Observação 1.3.5. Agradecemos ao Prof. Saeki pela valiosa sugestão neste lema (estabelecendo a relação de igualdade entre o número de pontos de $f(M) \cap \tilde{c}$ e

$A \cap c$).

Examinando a demonstração acima, podemos demonstrar um resultado mais geral, a saber:

Lema 1.3.6. Suponhamos que o fibrado normal da imersão $f, \nu(f)$, seja trivial. Se $f_*([M]) = 0$ em $H_{n-1}(M)$ ou se $f_* : H_1(M) \rightarrow H_1(N)$ for nula, então $j_*([A]) = 0$ em $H_1(M)$.

Prova:

Como $\nu(f)$ é trivial, tomando-se F, c e $\tilde{c}$ como acima tem-se que $(j_*([A])).\gamma = [f(M)].[\tilde{c}], \forall \gamma \in H_1(M)$. Portanto, como $[f(M)].[\tilde{c}] = f_*([M]).f_*([c])$ (por homotopia), pelas hipóteses assumidas segue o resultado. $\square$

O próximo lema tem sua demonstração baseada nos lemas 2 e 3 encontrados em Biasi-Fuster (1992). Este lema “torna claro” os objetivos pelos quais foram estabelecidos os lemas anteriores desta seção (as notações seguem as notações dos lemas anteriores).

Abaixo apresentamos duas sequências exatas de homologia que serão fundamentais para o que pretendemos; para maiores detalhes sobre a construção da sequência (b), ver Biasi-Fuster (1992):

(a) sequência de homologia do par $(N, f(M))$:

$$0 \rightarrow H_n(f(M)) \rightarrow H_n(N) \rightarrow H_n(N, f(M)) \rightarrow H_{n-1}(f(M)) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(N) \rightarrow \dots$$

(b) sequência de homologia construída por Biasi-Fuster (1992):

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B) \oplus H_{n-1}(M) \rightarrow H_{n-1}(f(M)) \rightarrow H_{n-2}(A) \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\alpha} H_{n-2}(B) \oplus H_{n-2}(M) \rightarrow H_{n-2}(f(M)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Lema 1.3.7.

(1) $\beta_0(N - f(M)) = 1 + \dim \ker i_*$, onde $i : f(M) \rightarrow N$ é a aplicação inclusão e $i_* : H_{n-1}(f(M)) \rightarrow H_{n-1}(N)$.

(2) $\beta_{n-1}(f(M)) = 1 + \dim \ker \alpha$, onde $\alpha = (f|_A)_* \oplus j_*$, com $(f|_A)_*$ e j_* definidas como nos lemas anteriores, $\alpha = (f|_A)_* \oplus j_* : H_{n-2}(A) \rightarrow H_{n-2}(B) \oplus H_{n-2}(M)$.

Prova:

(1) Tomemos a sequência (a). Com $H_n(f(M)) = 0$ segue que $H_n(N, f(M)) = H_n(N) \oplus \ker i_*$. Logo, por dualidade, tem-se que $H_0(N - f(M)) = H_n(N) \oplus \ker i_*$, o que completa a prova de (1). $\square$

(2) Tomemos a sequência (b). Como $H_{n-1}(A) = H_{n-1}(B) = 0$ e $H_{n-1}(M) = Z_2$, da sequência (b) temos a sequência exata curta,

$$0 \rightarrow Z_2 \rightarrow H_{n-1}(f(M)) \rightarrow \ker \alpha \rightarrow 0. \text{ Logo, } H_{n-1}(f(M)) = Z_2 \oplus \ker \alpha,$$

de onde tem-se que $\beta_{n-1}(f(M)) = 1 + \dim \ker \alpha$. $\square$

Vamos agora então expor os resultados que obtivemos relacionados aos Problemas 1.1.1 e 1.1.2. Como resposta ao Problema 1.1.1 obtivemos o seguinte resultado,

Teorema 1.3.8. Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão com interseções normais entre variedades diferenciáveis M e N , conexas, fechadas e de dimensões $n-1$ e n respectivamente.

(1) Se $f_*([M]) = 0$ em $H_{n-1}(N)$, então $f(M)$ separa N , onde $[M] \in H_{n-1}(M)$ denota a classe fundamental de M ;

(2) Se $\dim \ker((f|_A)_* : H_{n-2}(A) \rightarrow H_{n-2}(B)) \geq \beta_1(M) + \beta_1(N)$, então $f(M)$ separa N , onde $A(\subset M)$ denota o conjunto de auto-interseções de f , e, $\beta_i(X) = \dim H_i(X)$, para um espaço topológico X ;

(3) Suponhamos que $A \neq \emptyset$, $\beta_1(N) \leq 1$ e que $f_* : H_1(M) \rightarrow H_1(N)$ seja nula. Se o fibrado normal da imersão $f, \nu(f)$, for trivial, então $f(M)$ separa N .

Prova:

(1) Suponhamos que $N - f(M)$ seja conexo e seja $x \in f(M)$ um ponto em $f(M - A)$, ou seja, $\#f^{-1}(x) = 1$. Observemos que a existência de um ponto x nestas condições está assegurada pelo fato de f ser imersão com interseções normais. Seja $\phi : [-1, 1] \rightarrow N$ um mergulho transversal a f , $\phi \not\cap f$, tal que $\phi([-1, 1]) \cap f(M) = \{x\}$. Uma vez que $N - f(M)$ é conexo, nós temos um mergulho $\tilde{\phi} : S^1 \rightarrow N$ o qual estende ϕ e é tal que $\tilde{\phi}(S^1) \cap f(M) = \{x\}$. Como $x \in f(M - A)$, tem-se que o número de interseção módulo 2 de $f(M)$ e $\tilde{\phi}(S^1)$ é não nulo, e portanto o número de interseção módulo 2 de $f_*([M])$ e $\tilde{\phi}(S^1)$ é também não nulo: $(f_*([M])) \cdot [\tilde{\phi}(S^1)] \neq 0$. Por outro lado, como por hipótese temos que $f_*([M]) = 0$, então $(f_*([M])) \cdot [\tilde{\phi}(S^1)] = 0$ (Contradição). Portanto, $N - f(M)$ é desconexo, ou seja, $f(M)$ separa N . $\square$

(2) Pelo Lema 1.3.7 (1), temos que

$$\begin{aligned} \beta_0(N - f(M)) = 1 + \dim \ker i_* &\geq 1 + \beta_{n-1}(f(M)) - \beta_{n-1}(N) = \\ &= 1 + \beta_{n-1}(f(M)) - \beta_1(N). \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo lema 1.3.7 (2), temos que

$$\begin{aligned} \beta_{n-1}(f(M)) = 1 + \dim \ker \alpha &\geq 1 + \dim \ker (f|_A)_* - \beta_{n-2}(M) = \\ &= 1 + \dim \ker (f|_A)_* - \beta_1(M). \end{aligned}$$

Portanto, pode-se concluir que $\beta_0(N - f(M)) \geq 2 + \dim \ker (f|_A)_* - \beta_1(M) - \beta_1(N)$. Assim, pela hipótese dada, tem-se então que $\beta_0(N - f(M)) \geq 2$. Isto completa a prova. $\square$

(3) Como por hipótese $\beta_1(N) \leq 1$, nós temos que $\beta_{n-1}(N) = \beta_1(N) \leq 1$. Logo, pelo lema 1.3.7(1) temos que $\beta_0(N - f(M)) \geq \beta_{n-1}(f(M))$. Pelo lema 1.3.7(2), segue que $\beta_0(N - f(M)) \geq 1 + \dim \ker \alpha$, onde $\alpha = (f|_A)_* \oplus j_*$. Assim, é suficiente demonstrarmos que existe um elemento não nulo em $H_{n-2}(A)$ tal que sua α -imagem

é nula em $H_{n-2}(B) \oplus H_{n-2}(M)$. Logo, pelos lemas 1.3.3 e 1.3.6, tem-se a existência deste elemento em $H_{n-2}(A)$. Isto completa a prova. $\square$

O objetivo agora é apresentar uma resposta ao **Problema 1.1.2**, a qual consequentemente corresponde a uma recíproca a teorema de Jordan-Brouwer. Neste sentido, é obtido o seguinte resultado:

Teorema 1.3.9. Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão com interseções normais entre variedades diferenciáveis, conexas, fechadas e de dimensões $n - 1$ e n respectivamente, e, suponhamos que $A(\subset M)$, o conjunto de auto-interseções de f , seja não nulo.

- (1) Se M for orientável e $H_1(N) = 0$, então $\beta_0(N - f(M)) \geq 3$
- (2) Se $i_* : H_{n-1}(f(M)) \rightarrow H_{n-1}(N)$ for nulo e se o fibrado normal da imersão $f, \nu(f)$, for trivial, então $\beta_0(N - f(M)) \geq 3$, onde $i : f(M) \rightarrow N$ é a aplicação inclusão.

Prova:

(1) Uma vez que $H_1(N) = 0$, segue-se que $H_{n-1}(N) = 0$, e, então pelo lema 1.3.7(1) tem-se que $\beta_0(N - f(M)) = 1 + \beta_{n-1}(f(M))$. Por outro lado, pelos lemas 1.3.3 e 1.3.4, existe um elemento $[A] \in H_{n-2}(A)$ não nulo com $\alpha([A]) = 0$. Assim, pelo lema 1.3.7(2) tem-se que $\beta_{n-1}(f(M)) \geq 2$. Portanto, $\beta_0(N - f(M)) \geq 3$. $\square$

(2) Como $i_* : H_{n-1}(f(M)) \rightarrow H_{n-1}(N)$ é nulo, pelo lema 1.3.7(1) tem-se que $\beta_0(N - f(M)) = 1 + \beta_{n-1}(f(M))$. Por outro lado, pelos lemas 1.3.3 e 1.3.6, existe um elemento $[A] \in H_{n-2}(A)$ não nulo com $\alpha([A]) = 0$. Observemos que $f_*([M]) = 0$ em $H_{n-1}(N)$, pois $f_*([M]) = i_*([f(M)]) = 0$. Logo, pelo lema 1.3.7(2), concluímos que $\beta_{n-1}(f(M)) \geq 2$. Portanto, $\beta_0(N - f(M)) \geq 3$.

Observações 1.3.10 (1) Consideremos uma imersão com interseções normais f do círculo no toro, $f : S^1 \rightarrow T^2$, dada pela Figura 1.1 abaixo. Tem-se que o fibrado normal $\nu(f)$ é trivial, $f_*([M]) = 0$ e que $\beta_0(T^2 - f(S^1)) = 2$. Este exemplo mostra que a condição sobre i_* no Teorema 1.3.9(2) é essencial.

Fig. 1.1

(2) A condição da trivialidade de $\nu(f)$ no Teorema 1.3.9(2) é essencial como pode ser vista através da imersão “standard” com interseções normais da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^3$.

Como uma consequência imediata do Teorema 1.3.9(1) nós temos uma resposta ao Problema 1.1.2 dada pelo,

Corolário 1.3.11. Seja M uma $(n - 1)$ -variedade diferenciável, conexa, fechada e orientada, e, seja $f : M \rightarrow S^n$ uma imersão com interseções normais. Se $S^n - f(M)$

tiver exatamente duas componentes conexas, então f é um mergulho.

Mais geralmente, podemos apresentar uma caracterização de mergulhos entre imersões com interseções normais em codimensão 1, a saber,

Corolário 1.3.12. Sejam M e N variedades diferenciáveis, conexas, fechadas e de dimensões $n - 1$ e n respectivamente. Suponhamos que M seja orientada e que $H_1(N) = 0$. Então, uma imersão com interseções normais $f : M \rightarrow N$ é um mergulho se e somente se $f(M)$ separar N em exatamente duas componentes conexas.

Observações 1.3.13. (1) Substituindo-se a hipótese da orientabilidade de M por $H_1(M) = 0$ no corolário 1.3.12, Biasi-Fuster (1992) obtém também uma caracterização de mergulhos (ver observação 1.2.6(3)).

(2) Na observação 1.2.6(4), não é necessário assumir que o conjunto de auto-interseções de f se reduza ao conjunto dos pontos duplos S_2 (Podemos também substituir as hipóteses que $H_1(M) = H_1(N) = 0$, estabelecidas por Biasi-Fuster (1992), pela nulidade de $i_* : H_{n-1}(f(M)) \rightarrow H_{n-1}(N)$ e $j_* : H_{n-2}(A) \rightarrow H_{n-2}(M)$, onde i e j são inclusões).

Quando $A = S_2$, isto é, quando o conjunto de auto-interseções de f se reduz ao conjunto dos pontos duplos, temos que $\dim \ker (f|_A)_* = \beta_{n-2}(B) = \beta_0(B)$. No Teorema 1.3.9, se $A = S_2$ e $H_1(M) = 0$, então $\beta_0(N - f(M)) = 2 + \beta_0(B)$. Observemos que se $A \neq S_2$, então A não é subvariedade de M e poderemos ter situações onde $\dim \ker (f|_A)_* \neq \beta_{n-2}(B)$. Por exemplo, consideremos a imersão

com interseções normais $f : S^2 \rightarrow S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ como na Figura 1.2 abaixo,

Fig. 1.2

Então, o conjunto de auto-interseção A e sua f -imagem $f(A) = B$ são dadas como na Figura 1.3 abaixo. Assim, $\dim \ker(f|_A)_* = 4$ e $\beta_{n-2}(B) = 5$. Observemos também que $\beta_0(S^3 - f(S^2)) = 2 + \dim \ker(f|_A)_* = 6$.

Fig. 1.3

Capítulo 2

Observações Topológicas Sobre Certas Aplicações Genéricas Especiais

2.1 Problemas Abordados

Problema 2.1.1. Sejam $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial e M uma variedade diferenciável (classe C^∞), fechada (compacta e sem bordo) e de dimensão m ($m \geq n$). Sob que condições é possível obter informações sobre a topologia de M considerando-se que m e n assumem “valores pequenos”?

Problema 2.1.2. Sejam $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ uma aplicação genérica especial e M uma variedade diferenciável, conexa, fechada e de dimensão m . Sob que condições é possível assegurar-se que o conjunto singular de f , $S(f)$, é uma subvariedade não-enodada em M ?

Problema 2.1.3. Seja $GE(M, \mathbb{R}^2)$ o conjunto das aplicações genéricas especiais de uma m -variedade diferenciável e fechada M com valores no plano. Para valores

“pequenos de m ”, pode-se estabelecer alguma classificação para tais aplicações?

2.2 Definições e Principais Resultados Relacionados

Seja M uma m -variedade diferenciável, conexa e fechada. Uma aplicação diferenciável $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$) é dita *genérica especial* se para cada ponto $p \in S(f)$, onde $S(f)$ denota o conjunto singular de f , existirem sistemas de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_m)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ centrados em p e $f(p)$ respectivamente, através dos quais f se expressa (localmente) por:

$$\begin{cases} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{cases} \xrightarrow{f} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n^2 + \dots + x_m^2 \end{cases}$$

Uma ferramenta básica e de utilização essencial para a obtenção da grande maioria dos resultados relacionados aos Problemas 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 é a “Fatorização de Stein associada a aplicação dada”, a qual é definida a seguir:

Consideremos $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ genérica especial ($m > n$); f induz em M uma relação de equivalência definida por:

dados $p, p' \in M$, $p \sim p'$ se e somente se $f(p) = f(p') = r$ e p, p' estiverem na mesma componente conexa de $f^{-1}(r)$.

O quociente $M/\sim$ denotamos por W_f e a aplicação quociente $M \rightarrow W_f$ denotamos por q_f (ou simplesmente q). A comutatividade do diagrama a seguir define $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\
 \downarrow q_f & \searrow \bar{f} & \\
 W_f & &
 \end{array}$$

Assim, chamamos $(W_f, q_f, \bar{f})$, ou simplesmente W_f , de fatorização de Stein associada a f

Observações 2.2.1. (1) Quando $m = n$, a fatorização de Stein de f é a própria variedade M , não trazendo assim qualquer informação sobre f ou M .

(2) Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial ($m > n$). Analogamente ao estudo que Porto-Furuya (1990) desenvolvem para as dimensões $(m, 2)$, pode-se também introduzir estrutura diferenciável sobre $W_f - q(S(f))$ via o homeomorfismo local $\bar{f} : W_f - q(S(f)) \rightarrow \mathbb{R}^n$, e, estender tal estrutura para todo W_f , utilizando-se para tanto cartas locais $(q(K), \bar{f}|_{q(K)})$, onde $K = \{(x_1, \dots, x_m) / x_1^2 + \dots + x_m^2 < \xi^2\}$ é vizinhança de um ponto arbitrário $p \in S(f)$. Tal estrutura torna W_f uma n -variedade diferenciável, compacta, orientada e com bordo difeomorfo a $S(f)$, sendo que $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão a qual é obtida como extensão da imersão $\bar{f}|_{W_f - q(S(f))}$. Além disso, $q_f : S(f) \rightarrow \partial W_f$ é um difeomorfismo, onde ∂X denota bordo da variedade X .

Os trabalhos de Burlet-de Rham (1974), Porto-Furuya (1990) e Saeki (1992) consideram o **Problema 2.1.1**. Inicialmente, trabalhando com aplicações genéricas especiais de 3-variedades diferenciáveis e fechadas com valores no plano tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 (Burlet-de Rham (1974)). Uma 3-variedade diferenciável e fechada M admite uma aplicação genérica especial em $\mathbb{R}^2$ se e somente se M for difeomorfa a uma das seguintes variedades: $V_r (r = 0, 1, \dots)$ ou $V_r^* (r = 1, 2, \dots)$, sendo que

$V_0 = S^3, V_1 = S^1 \times S^2, V_r = \#^r V_1, V_1^* = S^1 \tilde{\times} S^2$ (isto é, o S^2 -fibrado não trivial sobre S^1) e $V_r^* = V_{r-1} \# V_1^*$, onde $\#$ denota soma conexa.

Posteriormente, trabalhando com aplicações genéricas especiais de uma m -variedade diferenciável e fechada $M(m > 3)$ com valores no plano, Porto-Furuya (1990) estabelecem o resultado:

Teorema 2.2.3 (Porto-Furuya (1990)). Seja M uma m -variedade diferenciável e fechada ($m \geq 3$), a qual admite uma aplicação genérica especial em $\mathbb{R}^2$, sendo que $\text{rank } \pi_1(M) = r$.

- (1) Se $r = 0$ e $m \geq 3$, então M é homeomorfa a S^m (quando $m = 3, 4, 5$, ou 6 tem-se que M é difeomorfa a S^m);
- (2) Se $r = 1$, então M é homotópica a um S^{m-1} -fibrado sobre S^1 (quando M for orientada e $m = 3, 4$ ou 6 tem-se que M é difeomorfa a $S^1 \times S^{m-1}$);
- (3) Se $r > 1$ sendo M orientada e $m = 3, 4$, ou 6, então $M \cong \#^r S^1 \times S^{m-1}$.

Mais recentemente, Saeki (1992) estabelece resultados mais gerais envolvendo os teoremas acima expostos, apresentando também “teoremas de classificação” envolvendo certas aplicações genéricas especiais com valores em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^2$. Dentre os principais resultados obtidos por Saeki citamos os teoremas enunciados a seguir.

Teorema 2.2.4 (Saeki (1992)). Uma m -variedade diferenciável e fechada $M(m \geq 3)$ admite uma aplicação genérica especial em $\mathbb{R}^2$ se e somente se M for difeomorfa a uma das seguintes variedades:

(1) se $m \leq 6$,

$$\#^r S^1 \times S^{m-1} \quad (r \geq 0)$$

$$(\#^{r-1} S^1 \times S^{m-1}) \# (S^1 \tilde{\times} S^{m-1}) \quad (r \geq 1)$$

(2) se $m \geq 7$,

$$(\#_{i=1}^r S^1 \times \Sigma_i^{m-1}) \# \Sigma^m \quad (r \geq 0)$$

$$(\#_{i=1}^{r-1} S^1 \times \Sigma_i^{m-1}) \# (S^1 \tilde{\times} \Sigma_r^{m-1}) \# \Sigma^m \quad (r \geq 1)$$

onde $\#$ denota soma conexa, $S^1 \tilde{\times} X$ denota X -fibrado não trivial sobre S^1 , $\Sigma^m \in \theta_m$ (grupo das classes de h-cobordismo de m -esferas homotópicas), $\Sigma_i^{m-1} \in \theta_{m-1}$, $r = \text{rank } \pi_1(M)$ e a soma conexa sobre um conjunto vazio é assumida ser S^m .

Teorema 2.2.5 (Saeki (1992)). Seja M uma 4-variedade diferenciável, fechada e 1-conexa. Então, M admite uma aplicação genérica especial em $\mathbb{R}^3$ se e somente se M for difeomorfa a uma das seguintes variedades:

$$\begin{aligned} &(\#^r S^2 \times S^2) \# \Sigma \quad (r \geq 0) \\ &(\#^{r-1} S^2 \times S^2) \# (S^2 \tilde{\times} S^2) \# \Sigma \quad (r \geq 1) \end{aligned}$$

onde $S^2 \tilde{\times} S^2$ denota o S^2 -fibrado não-trivial sobre S^2 , Σ é uma 4-esfera homotópica e $r = \text{rank } \pi_1(M)$.

Teorema 2.2.6 (Saeki (1992)). Uma superfície fechada M admite uma aplicação genérica especial em $\mathbb{R}^2$ se e somente se $\chi(M) \equiv 0 \pmod{2}$, onde χ denota a característica de Euler de M .

Burlet-de Rham (1974) consideram o Problema 2.1.2. Assumindo que $M = S^3$ e utilizando o lema de Dehn-Papakyriakopoulos eles obtêm o não-enodamento do

conjunto singular em S^3 , mais especificamente,

Teorema 2.2.7 (Burlet-de Rham (1974)). Seja $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação genérica especial. Então, o conjunto singular de f , $S(f)$, é um círculo não-enodado em S^3 .

Burlet-de Rham (1974) estabelecem também alguns resultados relacionados agora ao Problema 2.1.3. Assumindo M uma 3-variedade diferenciável e fechada, eles introduzem uma relação de equivalência em $GE(M^3, \mathbb{R}^2)$ definida por: sejam $f, g \in G(M^3, \mathbb{R}^2)$,

$f \sim g \Leftrightarrow$ existem difeomorfismos $H : M^3 \rightarrow M^3$ e $h : W_f \rightarrow W_g$ comutando o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{f} & M & \xrightarrow{H} & M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\
 & \searrow \bar{f} & \downarrow q_f & & \downarrow q_g & \nearrow \bar{g} & \\
 & & W_f & \xrightarrow{h} & W_g & &
 \end{array}$$

com tal relação Burlet-de Rham (1974) estabelecem uma interessante classificação no conjunto $GE(M^3, \mathbb{R}^2)$, a saber:

Teorema 2.2.8 (Burlet-de Rham (1974)). Mantendo-se as notações do teorema 2.2.2 tem-se que,

(1) As aplicações genéricas especiais de V_r em $\mathbb{R}^2$ se dividem em $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ classes distintas correspondentes aos inteiros b que satisfazem as condições

$$(i) \quad b = r + 1 - 2q \quad \text{e} \quad 1 \leq b \leq r + 1$$

(2) Seja o sistema formado pelas condições (i) acima e por:

$$(ii) \quad \begin{cases} 1 \leq c \leq b/2, & \text{se } g = 0 \\ 0 \leq c \leq b/2, & \text{se } g > 0 \end{cases}$$

Então, para cada par de inteiros b e c satisfazendo (i) e (ii), corresponde uma classe de aplicações genéricas especiais de V_r^* em $\mathbb{R}^2$ e reciprocamente; b é o número de componentes do conjunto singular de aplicações na classe e $2c$ é o número de tais curvas que não possuem vizinhança orientável.

Mais recentemente, Furuya (1986) introduz uma nova relação de equivalência, denominada “imagem-equivalência”, no conjunto $GE(M, \mathbb{R}^2)$ assumindo M ser uma m -variedade diferenciável ($m = 3, 4$), fechada e orientada. Tal relação é definida como segue:

Sejam $f, g \in GE(M, \mathbb{R}^2)$, $f \equiv g \Leftrightarrow$ (a) $f \sim g$ são equivalentes segundo Burlet-de Rham (1974);
 (b) $\bar{f} \equiv \bar{g}oh$, isto é, existe um difeomorfismo positivo $h_t : W_f \rightarrow W_g$ tal que as imersões $\bar{f}$ e $\bar{g}oh$ são imagem-homotópicas, onde $\bar{f}$ e $\bar{g}$ são as respectivas imersões induzidas por f e g .

Observação 2.2.9. Seja W uma superfície compacta, conexa e orientada, e $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão; ϕ é dita “positiva” se a orientação de W induzir em $\mathbb{R}^2$, através de ϕ , a orientação canônica. Assim, duas imersões positivas $\phi_0, \phi_1 : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ são ditas “imagem-homotópicas”, $\phi_0 \equiv \phi_1$, se existir um difeomorfismo positivo (preservando orientação) $h_+ : W \rightarrow W$ tal que ϕ_0 e ϕ_1oh sejam regularmente-homotópicos, ou seja, existe uma homotopia diferenciável $H : W \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo: $H(x, 0) = H_0(x) = \phi_0(x)$; $H(x, 1) = H_1(x) = \phi_1oh(x)$, e, $H_t : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ é imersão, $\forall t \in [0, 1]$, onde $H_t(x) = H(x, t)$.

Com o objetivo de simplificar a definição de “imagem-equivalência”, Furuya

(1986) demonstra que:

Teorema 2.2.10 (Furuya (1986)). Seja M uma m -variedade diferenciável, fechada e orientada, com $m=3$ ou 4 . Então,

$f, g \in GE(M, \mathbb{R}^2)$ são imagem equivalentes se, e somente se, existir um difeomorfismo positivo $H_+ : M \rightarrow M$ e uma família diferenciável (f_t) de aplicações genéricas especiais, com $t \in [0, 1]$, tal que $f_0 = f$ e $f_1 = g \circ H_+$.

Observação 2.2.11. Furuya (1986) observa que esta nova relação de equivalência decompõe as classes segundo a relação de Burlet-de Rham (1974) em subclasses, em correspondência com as classes de imagem-homotopia de imersões. Como exemplo Furuya (1986) observa que as duas aplicações cujas imagens são dadas pelas Figuras 2.1 e 2.2 abaixo, são equivalentes segundo Burlet-de Rham (1974), porém não são imagem-equivalentes.

Fig. 2.1

Fig. 2.2

2.3 Resultados Obtidos

No que segue, M denota uma m -variedade diferenciável (classe C^∞), conexa e fechada (compacta e sem bordo) e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$) denota uma aplicação

genérica especial.

Observação 2.3.1. Quando $n = 1$, pela definição de aplicações genéricas especiais, tem-se que tais aplicações são simplesmente aplicações de Morse com um ponto crítico de mínimo e outro de máximo. Neste caso, pelo teorema de Reeb (ver Hirsch (1976)), tem-se que M é homeomorfa a S^m . Assim, para certos valores pequenos de m , M é não exótica (ver Kervaire-Milnor (1963)). Portanto, aplicações genéricas especiais nestas condições estão completamente caracterizadas.

Tomando $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($m > 2$) genérica especial, Porto-Furuya (1990), obtém o isomorfismo entre $\pi_1(M)$ e $\pi_1(W_f)$. Este resultado pode ser generalizado para dimensões maiores como segue:

Lema 2.3.2. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m > n+1$) genérica especial. Então, $q_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(W_f)$ é isomorfismo.

Prova:

Serão utilizados argumentos similares aos desenvolvidos por Porto-Furuya (1990). Inicialmente, considera-se o fibrado

$$\begin{array}{ccc} S^{m-n} & \hookrightarrow & M - S(f) \\ & \downarrow q|_{W_f^\circ} & \\ & W_f^\circ & \end{array}$$

onde $q|_{W_f^\circ}$ é submersão e W_f° denota o interior de W_f . Tomando-se um ponto base $a \in M - S(f)$ e sendo $b = q(a)$, pela sequência de homologia do fibrado acima, tem-se o isomorfismo $q|_{W_f^\circ} : \pi_1(M - S(f), a) \rightarrow \pi_1(W_f^\circ, b)$. Naturalmente, $\pi_1(W_f^\circ, b)$ é isomorfo a $\pi_1(W_f, b)$. Considerando-se $j : M - S(f) \rightarrow M$ a aplicação inclusão, então é suficiente demonstrar-se que j_* é isomorfismo. De fato:

(1) j_* é sobrejetor:

Seja $\gamma : S' \rightarrow M$ um laço com ponto base a . Como $\dim S(f) = n - 1$, podemos deformar γ homotopicamente, desviando γ de $S(f)$, conforme a Figura 2.3

abaixo:

Fig. 2.3

(2) j_* é injetor:

Suponhamos que existam laços γ_1 e γ_2 com ponto base a tais que $\gamma_i \sim a$ em M , conforme as Figuras 2.4 e 2.5 abaixo:

Fig. 2.4

Fig. 2.5

Assim, é suficiente demonstrar-se que o laço descrito na Figura 2.5 acima não ocorre. Seja ϕ extensão de γ_2 ao 2-disco D^2 , $\phi : D^2 \rightarrow M$, $\phi \in C^\infty$. Usando o teorema da transversalidade de Thom, pode-se supor, sem perda de generalidade, que ϕ é transversal a $S(f)$. Logo, $\dim S(f) + \dim D^2 < \dim M$, o que implica $\phi(D^2) \cap S(f) = \emptyset$, ou seja, não existe laço nas condições descritas na Figura 2.5. $\square$

Quando $m = n + 1$ também pode-se provar que q_* é isomorfismo (Hiratuka (1992)) Fukuda (1987) estabelece o seguinte resultado:

Lema 2.3.3 (Fukuda (1987)). Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial, com $m > n$. Então,

(1) $\chi(M) \equiv \chi(S(f)) \pmod{2}$;

(2) Se $m - n + 1$ é par, então $\chi(M) = \chi(S(f))$, onde $\chi(N)$ denota a característica de Euler do espaço N .

Observações 2.3.4. (a) Nesta mesma linha, Saeki (1992) mostra que se m e n forem pares, então $\chi(M) = 2\chi(W_f)$.

(b) Tomando-se $n = 2$ e m par, pelo lema 2.3.3(1) segue-se que $\chi(M)$ é par. Nestas dimensões, e sendo M orientada, Levine (1966) obtém uma estimativa mais precisa para $\chi(M)$, a saber: $\chi(M) = \sum_c r(c)$, onde $S(f)$ tem orientação bem definida, c percorre as componentes conexas de $S(f)$, sendo $r(c)$ o grau da aplicação ϕ restrita a c , onde $\phi : S(f) \rightarrow \mathbb{R}P^1$ é tal que $\phi(x)$ é a reta passando pela origem de $\mathbb{R}^2$, paralela à tangente de $f(S(f))$ em $f(x)$.

(c) Tomando-se m e n pares, novamente o lema 2.3.3(1) apenas nos diz que $\chi(M)$ é par. Nestas dimensões e supondo M orientada, Kushner (1982) estabelece uma estimativa mais precisa para $\chi(M)$, a saber: $\chi(M) = \sum_{\hat{c}} r(\hat{c})$, onde $r(\hat{c})$ é o grau de uma certa aplicação $\hat{\phi}|_{\hat{c}}$ e $\hat{c}$ percorre as componentes do conjunto singular de uma certa aplicação $\hat{d}f$ construída por Kushner (1982).

Considerando-se f como no lema 2.3.3 e assumindo que n seja ímpar, pelo fato de $S(f)$ ser difeomorfo ao bordo de W_f , tem-se que $\dim S(f) = n - 1$ (par). Assim, tomando-se $n = 3$, o teorema de classificação de superfícies nos permite obter algumas interessantes informações sobre $S(f)$, e conseqüentemente sobre M , a saber:

Teorema 2.3.5. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação genérica especial com $m > 3$. Se M for 1-conexa, então $S(f)$ é uma união finita e disjunta de 2-esferas.

Prova:

Pelo lema 2.3.2 tem-se que $q_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(W_f)$ é isomorfismo. Assim, como M é 1-conexa, segue-se que W_f também é 1-conexa. Então, $H_1(W_f, \mathbb{Z}) = 0$ e, pelo

teorema dos coeficientes universais, tem-se que $H^1(W_f, Z) = 0$.

Tomando-se a sequência exata de homologia do par $(W_f, \partial W_f)$ segue que:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & H_2(W_f, Z) & \rightarrow & H_2(W_f, \partial W_f, Z) & \rightarrow & H_1(\partial W_f, Z) \rightarrow H_1(W_f, Z) \rightarrow \dots, \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & \text{dualidade} & & 0 \\
 & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & H^1(W_f, Z) & & \\
 & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

isto é, $H_1(\partial W_f, Z) = 0$. Uma vez que $S(f)$ é difeomorfo a ∂W_f , tem-se que $S(f)$ é uma superfície, com $H_1(S(f), Z) = 0$, ou seja, $S(f) = US^2$. $\square$

Corolário 2.3.6. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação genérica especial, $m > 3$, m par. Se M for 1-conexa, então $\chi(M) = 2.(\#C_{S(f)})$, onde $\#C_{S(f)}$ denota o número de componentes conexas de $S(f)$.

Prova:

Por 2.3.3(2), temos que $\chi(M) = \chi(S(f))$. Assim, pelo teorema 2.3.5 segue-se o resultado desejado. $\square$

Corolário 2.3.7. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação genérica especial com $m = 4$ e seja M 1-conexa. Se W_f for difeomorfa ao 3-disco, então M é difeomorfa a S^4 .

Prova:

Como $S(f) \cong \partial W_f$ e pelo corolário acima $\chi(M) = 2.(\#C_{S(f)})$ tem-se que $\chi(M) = 2$. Logo, M tem homologia de S^4 , e, pela conjectura de Poincaré 4-dimensional (ver Freedman (1982)) segue-se que M é homeomorfa a S^4 . Agora, devido a unicidade da estrutura diferenciável de S^4 , segue-se o resultado. $\square$

Corolário 2.3.8. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação genérica especial com $m = 6$

e seja M 1-conexa. Se a homologia média de M for nula e W_f for difeomorfa ao 3-disco, então M é difeomorfa a S^6 .

Prova:

Utilizando-se os argumentos expostos acima, tem-se que $\chi(M) = 2$. Logo, por dualidade e pelas hipóteses sobre M , segue-se que M tem homologia de S^6 . Portanto, pela conjectura de Poincaré generalizada (ver Smale (1956)), segue-se que M é difeomorfa a S^6 . $\square$

Observação 2.3.9: Utilizando argumentos expostos acima, pode-se obter uma prova alternativa ao teorema 2.2.3.(1) quando $m = 4$. De fato: como M é 1-conexa, pelo lema 2.3.2 e a observação 2.3.4(a), tem-se que $\chi(M) = 2$. Logo, por dualidade, segue-se que M tem homologia de S^4 . Assim, pela conjectura de Poincaré 4-dimensional e pela unicidade da estrutura diferenciável de S^4 segue-se que M é difeomorfa a S^4 .

Como já havíamos observado anteriormente, se M^m admite uma aplicação f que é genérica especial e assume valores em $\mathbb{R}^m$, a sua fatorização de Stein em “nada auxilia no estudo da topologia de M ”. Contudo, considerando-se uma situação particular onde $m = 4$ e, se além das hipóteses gerais sobre M , assume-se ainda que M seja 1-conexa, então é possível estabelecer uma interessante informação sobre a topologia de M . Para tanto, observe-se inicialmente que, como $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ pelo teorema dos coeficientes universais, tem-se que $H^2(M, \mathbb{Z})$ é livre de torção, ou seja, $\text{Tor}(H^2(M, \mathbb{Z})) = 0$. Assim, construímos uma forma bilinear simétrica ω como segue: $\omega : H^2(M, \mathbb{Z}) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $\omega(a, b) = \langle a \cup b, [M] \rangle$, onde $[M] \in H_4(M, \mathbb{Z})$ é a classe fundamental de M e $\cup$ denota o produto cup. Pela dualidade de Poincaré identificamos $H^2(M, \mathbb{Z})$ com $H_2(M, \mathbb{Z})$. Logo, em homologia, para $x, y \in H_2(M, \mathbb{Z})$ pode-se “descrever geometricamente” $\omega(x, y)$ como o número de interseções de superfícies fechadas e orientadas X e Y em M , as quais se interceptam transversalmente e representam x e y respectivamente (ver Dubrovin et alli (1990)). Tem-se que ω é unimodular, isto é, qualquer matriz representando ω tem determinante ± 1 (ver Milnor (1958)). Diz-se que ω é “par” se $\omega(a, a) \in 2\mathbb{Z}$ para todo $a \in H^2(M, \mathbb{Z})$.

Agora, combinando-se os importantes resultados: Teorema de Classificação de Freedman (ver Freedman (1982)) e o Teorema de Donaldson (ver Donaldson (1983)), pode-se estabelecer como consequência que:

Lema 2.3.10 (Freedman (1982) - Donaldson (1983)).

Seja M uma 4-variedade diferenciável, fechada e 1-conexa. Se a forma ω associada a M for par e definida positiva, então M é homeomorfa a S^4 .

Recordemos a seguir um resultado obtido por Èliäsberg (1970):

Lema 2.3.11 (Èliäsberg (1970))

Seja N uma n -variedade diferenciável, fechada e orientada. Então, N admite uma aplicação genérica especial em $\mathbb{R}^n$ se e somente se M for estavelmente paralelizável.

Combinando-se os lemas 2.3.10 e 2.3.11, pode-se obter uma interessante informação sobre a topologia de M , no caso de M ser 4 dimensional e domínio de uma aplicação genérica especial, com valores em $\mathbb{R}^4$.

Teorema 2.3.12. Sejam $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação genérica especial e M uma 4-variedade diferenciável, fechada, 1-conexa. Se a forma ω associada a M for definida positiva, então M é difeomorfa a S^4 .

Prova:

Inicialmente observa-se que ω é par se e somente se a segunda classe de Stiefel-Whitney de M , $\omega_2(M)$, for nula (ver Freed-Uhlenbeck (1984)).

Por outro lado, por 2.3.11, tem-se que $TM \oplus \epsilon^1$ é trivial, onde ϵ^1 é o fibrado em linha trivial sobre M . Assim, $\omega_2(M) = \omega_2(TM \oplus \epsilon^1) = 0$. Portanto, por 2.3.10,

tem-se que M é homeomorfa a S^4 . Logo, pela unicidade da estrutura diferenciável de S^4 , segue o resultado. $\square$

Assim, como resposta ao **Problema 2.1.1**, temos a observação 2.3.1, os corolários 2.3.7 e 2.3.8, e, o teorema 2.3.12.

Quanto ao **Problema 2.1.2**, apresentamos dois interessantes resultados caracterizando o não-enodamento do conjunto singular na variedade domínio de certas aplicações genéricas especiais, a saber:

Teorema 2.3.13. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ uma aplicação genérica especial cujo conjunto singular $S(f)$ assumimos ser uma $(m-2)$ -esfera homotópica ($m \neq 5, 6$) ou uma $(m-2)$ -esfera ($m = 5, 6$). Se W_f for contrátil ($m \neq 4$) ou um $(m-1)$ -disco ($m = 4$), então $S(f)$ é não-enodada em M .

Prova:

Suponhamos inicialmente $m \geq 7$. Como W_f é uma $(m-1)$ -variedade diferenciável, contrátil, compacta, 1-conexa e com bordo difeomorfo a $S(f)$, o qual também 1-conexo, segue-se pela “caracterização diferenciável de discos” (ver proposição (A), pág. 108 em Milnor (1965)), que W_f é difeomorfa ao $(m-1)$ -disco.

Agora, se $m = 6$, então pela “caracterização diferenciável de 5-discos” (ver proposição (c), pág. 110 em Milnor (1965)), tem-se que W_f é difeomorfo ao 5-disco. Porém, quando $m = 5$, não é possível demonstrar que W_f é difeomorfa a D^4 .

Finalmente, se $m = 2$ ou 3 é natural, pelos teoremas de classificação nas referidas dimensões, que W_f seja um $(m-1)$ -disco.

Por outro lado, como a diferença entre as dimensões de M e $\mathbb{R}^{m-1}$ é igual a 1, então existe um D^2 -fibrado $\tilde{E}$ sobre W_f tal que M seja difeomorfo a $\partial\tilde{E}$ e $S(f)$ seja difeomorfo a $\partial(W_f \times \{0\})$ (ver Saeki (1992) - proposição 3.4). Como W_f é contrátil, segue-se que $\partial\tilde{E}$ é difeomorfo a $\partial(W_f \times D^2)$. Portanto, para $m \neq 5$, tem-se que $S(f)$ é uma $(m-2)$ -esfera não-enodada em $M \cong S^m$. Finalmente, quando $m = 5$, como por hipótese W_f é contrátil, tem-se que M é uma 5-esfera homotópica (ver pro-

posição 4.1 em Saeki (1992)). Assim, pela conjectura generalizada de Poincaré (ver Smale (1956)), tem-se que M é difeomorfa a S^5 . Agora, por hipótese $S(f) \cong S^3$, e, então $M - S(f) \cong S^5 - S^3$ é um S^1 -fibrado sobre o interior W_f, W_f° . Logo, tomando-se a sequência de homotopia associada e este fibrado, tem-se (W_f é contra-til) naturalmente que $S^5 - S^3$ é uma equivalência de homotopia com S^1 . Portanto, por Levine (1970), segue-se que S^3 é não-enodado em S^5 . $\square$

Corolário 2.3.14. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ uma aplicação genérica especial tal que $S(f)$ seja uma $(m-2)$ -esfera homotópica ($m \neq 5, 6$) ou $(m-2)$ -esfera ($m = 5, 6$). Se $\beta_0(\mathbb{R}^{m-1} - f(S(f))) = 2$, então $S(f)$ é não-enodado em M , onde $\beta_k(X)$ denota o k -ésimo número de Betti de X .

Prova:

Como f é genérica especial, e, portanto é uma particular aplicação estável, tem-se que $f|_{S(f)} : S(f) \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ é uma imersão com interseções normais (ver capítulo anterior). Assim, pelo corolário 1.3.10, segue-se que $S(f)$ mergulha em $\mathbb{R}^{m-1}$ (via $f|_{S(f)}$). Agora, como $q|_{S(f)}$ é difeomorfismo, tem-se que $\bar{f}|_{\partial W_f} : \partial W_f \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ é mergulho. Pelo fato de $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ ser imersão tem-se que $\bar{f}(W_f)$ é a componente limitada de $\mathbb{R}^{m-1} - \bar{f}(\partial W_f)$, tendo evidentemente como bordo $\bar{f}(\partial W_f)$ o qual é 1-conexo. Utilizando-se o biliar de $\bar{f}(\partial W_f)$ em $\mathbb{R}^{m-1}$ (sua existência é garantida por (3.6) em Milnor (1965)) e o teorema de Van Kampen tem-se que $\bar{f}(W_f)$ é 1-conexo. Como $\bar{f}(W_f)$ tem homologia de um ponto (via Mayer-Vietoris), tem-se que $\bar{f}(W_f)$ é difeomorfo ao $(m-1)$ -disco ($m \geq 6$) (via caracterizações de discos em Milnor (1965)). Agora, quando $m \leq 5$ tem-se que $\bar{f}(W_f)$ é homeomorfa ao $(m-1)$ -disco (ver (9.7) em Milnor (1965)), com bordo difeomorfo a $(m-2)$ -esfera. Observemos que para $m = 4$ tem-se, via o teorema de classificação de superfícies, que $S(f)$ é difeomorfa a S^2 . Logo, o teorema de Schoenflies generalizado assegura que $\bar{f}(W_f^3)$ é difeomorfo a D^3 .

Por outro lado, utilizando-se do teor. de Ehresmann, tem-se que $\bar{f} : W_f \rightarrow \bar{f}(W_f)$ é recobrimento de p -folhas. Logo, restringindo-se ao bordo de W_f , tem-se que $p=1$, isto é, W_f é difeomorfo a $\bar{f}(W_f)$. Portanto, pelo teorema anterior, segue-se o

resultado. $\square$

Para finalizar este capítulo, procuramos obter informações relacionadas ao Problema 2.1.3.

Consideremos M uma m -variedade diferenciável ($m = 4, 5$) e fechada. Seja $GE(M, \mathbb{R}^2)$ o conjunto das aplicações genéricas especiais de M em $\mathbb{R}^2$. A relação introduzida por Burlet-de Rham (1974) sobre $GE(M^3, \mathbb{R}^2)$, com M tridimensional, "generaliza-se" para dimensões maiores de M . Em dimensões $m = 4, 5$, com M orientada, sabe-se que se tais variedades M são domínio de aplicações genéricas com valores no plano, então M é difeomorfo a um dos seguintes tipos:

$S^4, \#^r S^1 \times S^3 (r \geq 1)$, em dimensão 4 (ver teorema 2.2.3);

$S^5, \#^r S^1 \times S^4 (r \geq 1)$, em dimensão 5 (ver teorema 2.2.4). Assim, pode-se generalizar o teorema 2.2.8 (1) como segue:

Teorema 2.3.15. Suponhamos que M seja uma m -variedade diferenciável ($m = 4, 5$), fechada e orientada. Então, o conjunto $GE(M, \mathbb{R}^2)$ munido da relação $\sim$ (extensão natural da relação estabelecida por Burlet-de Rham (1974)), tem o número de classes distintas dado pelo número de inteiros b satisfazendo as condições $b \equiv r+1 \pmod{2}$ e $1 \leq b \leq r+1$, onde $r = \text{rank } \pi_1(M)$.

Prova:

Seja $k \in GE(M, \mathbb{R}^2)$. Então, existe um único S^{m-2} -fibrado M' sobre W_k com grupo estrutural $Diff_+(S^{m-2})$ (difeomorfismos preservando orientação), tal que M é obtido de M' identificando-se os pontos das fibras sobre o bordo de W_k (ver Porto-Furuya (1990)).

Logo, dados $f, g \in GE(M, \mathbb{R}^2)$, sejam (M', π', W_f) e (M'', π'', W_g) os fibrados induzidos por f e g respectivamente. Uma vez que, $\pi_0(Diff_+(S^{m-2})) = 0$ ($m = 4, 5$), tem-se que tais fibrados são triviais. Assim, dado um difeomorfismo $h : W_f \rightarrow W_g$, este induz um difeomorfismo $\tilde{H} : W_f \times S^{m-2} \rightarrow W_g \times S^{m-2}$ satisfazendo a igual-

dade $h\circ\pi' = \pi''\circ\tilde{H}$. Logo, constroi-se um difeomorfismo H comutando o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 M' \cong W_f \times S^{m-2} & \xrightarrow{\tilde{H}} & M'' \cong W_g \times S^{m-2} \\
 \pi' \searrow q' & \curvearrowright & q'' \searrow \pi'' \\
 & M \xrightarrow{H} M & \\
 q_f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow q_g \\
 W_f & \xrightarrow{h} & W_g
 \end{array}$$

onde q', q'' são as respectivas projeções de M' e M'' sobre M tais que $q_f \circ q' = \pi'$ e $q_g \circ q'' = \pi''$. Portanto, quando W_f for difeomorfo a W_g , as aplicações f e g estão na mesma classe. Assim, o número de classes distintas está em correspondência com o número de superfícies W_f não difeomorfas entre si com $f \in GE(M, \mathbb{R}^2)$. Uma vez que $M \cong \#^r S^1 \times S^{m-1} (n \geq 1)$ ou $M \cong S^4$ ou $S^5 (r = 0)$, tem-se que $\text{rank } \pi_1(M) = \text{rank } \pi_1(W_f) = r = 2g + b - 1$, onde g e b representam respectivamente os genus e o número de componentes de bordo de W_f . Logo, existem “tantos W_f não difeomorfos” quantas forem o número de combinações de g e b com $b = (r + 1) - 2g$. Isto completa a prova. $\square$

Observação 2.3.16. Quando M for não-orientada, pode-se também estender o teorema 2.2.8(2) para dimensões 4 e 5. Nestas dimensões, utilizando-se do trabalho de Saeki (1992), é possível caracterizar todas as variedades não-orientadas que são domínio de aplicações genéricas especiais à valores em $\mathbb{R}^2$. Assim, via os resultados (2.1), (2.2) e (2.3) encontrados em Porto-Furuya (1990), e, o fato de $\pi_o(Diff_+(S^{m-2})) = 0$ ($m = 4, 5$), pode-se mostrar (de forma similar ao obtido

por Burlet-de Rham (1974)) que: “Dada $f \in GE(M^m, \mathbb{R}^2)$ ($m = 4, 5$) sua classe se corresponde biunivocamente a um revestimento de duas folhas de W_f ”, o que é essencial para a extensão de 2.2.8 (2).

Observação 2.3.17. Seja M uma m -variedade diferenciável, fechada e orientada onde $\pi_0(Diff_+(S^{m-2})) = 0$ (por exemplo, $m = 5$). Então, naturalmente o teorema 2.2.10 nestas condições continua válido. Para tanto, utilizamos o resultado (2.3) em Porto-Furuya (1990) e o fato de que todo S^{m-2} -fibrado orientado (grupo estrutural é $Diff_+(S^{m-2})$ sobre uma superfície compacta e orientada é trivial (m nas condições acima).

Como visto anteriormente, a relação Ξ estabelecida por Furuya (1986) refina a relação $\sim$ estabelecida por Burlet-de Rham (1974). Em alguns casos particulares pode-se determinar o número de classes distintas sob tais relações. Para tanto, considerando-se M^m ($m = 3, 4$ ou 5) m -variedade diferenciável, fechada e orientada, toma-se $A = \{f \in GE(M, \mathbb{R}^2) \text{ tal que } W_f \cong D_{(k)}^2, \text{ onde } D_{(k)}^2 \text{ representa um 2-disco com } k\text{-buracos}\}$.

Observação 2.3.18. Seja W uma superfície orientada e compacta, tendo $a_0, \dots, a_k$ componentes de bordo, tal que exista $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão positiva. Cada curva (simples) a_i pode ser representada por uma aplicação $\alpha_i : S^1 \rightarrow W$ diferenciável. Assim, define-se o grau de ϕ com respeito a a_i , $g_\phi(a_i)$, como o grau de curva $\phi \circ \alpha_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (este grau é invariante por homotopia-regular). Denota-se por β_k a coleção de conjunto de inteiros $\{\eta_0, \dots, \eta_k\}$ satisfazendo $\sum_{j=0}^k \eta_j = k - 1$. Assim, para $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$, define-se $\beta(\phi) = \{g_\phi(a_0), \dots, g_\phi(a_k)\} \in \beta_k$. Em Kauffman (1979) (ver proposição 2.3) tem-se que $\beta(\cdot)$ é invariante por imagem-homotopia. Logo, se $I(W)$ denota o conjunto de classes de imagem-homotopia de imersões positivas de $W \rightarrow \mathbb{R}^2$, tem-se que $I(W) \approx \beta_k$.

Assim, considerando-se A munido da relação Ξ , tem-se que o número de classes

distintas fica determinado pelo número de elementos $\beta_k, \#\beta_k$. Então, quando $k = 0$ uma vez que $\#\beta_0 = 1$, observa-se que as duas relações ($\sim$ e $\bar{\sim}$) coincidem quando a fatorização de Stein correspondente for um 2-disco. Agora, quando $k = 1$, segundo a relação $\sim$ existe uma só classe realizando $D_{(1)}^2$, contudo desde que $\beta_1 = N$ (conjunto dos números naturais) (ver Kauffman (1979)), tem-se uma quantidade enumerável de subclasses distintas segundo a relação $\bar{\sim}$.

Capítulo 3

Sobre a Topologia de Variedades Realizando Complexos Bidimensionais

3.1 Problemas Abordados

Problema 3.1.1 Dada uma aplicação estável $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^2$, esta induz um homomorfismo $q_f : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(W_f)$. Sob quais condições é possível assegurar-se que q_f é epimorfismo?

Problema 3.1.2 Considere-se W um complexo bidimensional pré-determinado, o qual corresponde à fatorização de Stein de uma m -variedade diferenciável M^m a valores no plano, cujas únicas singularidades são as dobras. Sob quais condições, em dimensões baixas ($m = 3, 4$), é possível obter informações sobre a topologia da variedade M que realiza o modelo W ?

3.2 Definições e Principais Resultados Relacionados

Seja M uma m -variedade diferenciável e fechada. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita “estável” se para cada ponto singular p em M existirem sistemas de coordenadas locais $(u, x, y_1, \dots, y_{m-2})$ e (U, Y) centrados em p e $f(p)$ respectivamente, através dos quais f se expressa por:

- (i) $(u, x, y_1, \dots, y_{m-2}) \longrightarrow (u, x^2 + \sum_{i=1}^{m-2} y_i^2)$ (dobras definidas ou pontos de $S_0(f)$);
- (ii) $(u, x, y_1, \dots, y_{m-2}) \longrightarrow (u, x^2 - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{m-2} y_i^2)$ (dobras indefinidas ou pontos de $S_1(f)$);
- (iii) $(u, x, y_1, \dots, y_{m-2}) \longrightarrow (u, \frac{x^3}{3} - ux + x^3 - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{m-2} y_i^2)$ (cúspides ou pontos de $C(f)$);

f deve ainda satisfazer às seguintes condições globais:

- (iv) $f^{-1}(f(p)) \cap S(f) = \{p\}$, sempre que $p \in C(f)$, onde $S(f)$ denota o conjunto singular de f ;
- (v) $f|_{S(f)-C(f)}$ é uma imersão com interseções normais.

Denota-se o conjunto das aplicações estáveis de M em $\mathbb{R}^2$ por $S(M, \mathbb{R}^2)$.

Observações 3.2.1. (a) Quando $\lambda = 0$ ($\lambda > 0$) a singularidade correspondente é dita definida (resp. indefinida).

(b) Uma aplicação f é dita “genérica” se satisfazer as condições anteriores (i), (ii) e (iii).

(c) Uma aplicação f tal que $S(f) = S_0(f)$ é dita “genérica especial” (ver capítulo 2, seção 2).

(d) O conjunto singular $S(f)$ é uma subvariedade fechada 1-dimensional de M . Logo, $S(f)$ se expressa como uma união finita e disjunta de curvas difeomorfas a S^1 . Os subconjuntos $S_0(f)$ e $S_1(f)$ são abertos em $S(f)$, os quais são círculos ou arcos abertos, em cujas extremidades se encontram os pontos de $C(f)$.

(e) $C(f)$ é um conjunto discreto em $S(f)$, sendo que as cúspides definidas separam arcos de $S_0(f)$ de arcos de $S_1(f)$, enquanto que as cúspides indefinidas apresentam arcos de $S_1(f)$ de ambos os lados. Portanto, o número de cúspides definidas de cada componente conexa de $S(f)$ é sempre par, e estas sempre podem ser canceladas (ver Levine (1965)).

(f) Define-se a fatorização de Stein associada a f , $(W_f, q_f, \bar{f})$, de forma análoga ao que foi definido anteriormente para aplicações genéricas especiais. É interessante observar que, dada uma aplicação contínua ϕ entre espaços topológicos, $\phi : X \rightarrow Y$, pode-se definir analogamente a fatorização de Stein W_ϕ associada a ϕ . Quando X e Y forem métricos e X compacto pode-se provar que W_ϕ é métrico e compacto (ver Mata-Lorenzo (1986)).

(g) Se $p \in S(f)$, então $q_f^{-1}(q_f(p)) \cap S(f)$ tem no máximo dois pontos singulares. Quando $q_f(p) = q_f(p')$, os pontos singulares p e p' pertencem necessariamente a $S_1(f)$ e denominam-se pontos duplos. Por outro lado, quando p for o único ponto na q_f^{-1} -imagem de $q(p)$, este denomina-se simples.

Mata-Lorenzo (1986) considera o **Problema 3.1.1**, obtendo resposta afirmativa quanto à sobrejetividade de q_f , quando M for uma 3-variedade diferenciável, fechada e orientada. Para tanto, considerando $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ estável e M sob tais hipóteses, Mata-Lorenzo (1986) utiliza as configurações locais admissíveis para o espaço W_f ,

obtidas por Kushner-Levine-Porto (1984), a saber:

$$\gamma = q_f(p)$$

$$q_f^{-1}(\gamma) \cap S(f) = \emptyset$$

$$\gamma = q_f(p)$$

$$p \in S_0(f)$$

$$\gamma = q_f(p)$$

$$p \in S_1(f) \text{ é simples}$$

$$\gamma = q_f(p)$$

$$p \in C(f)$$

$$\gamma = q_f(p) = q_f(p')$$

$$p, p' \in S_1(f) \text{ são}$$

$$\text{duplos.}$$

onde as linhas escuras representam as q_f -imagens de arcos singulares e os números internos representam o número de componentes conexas das f -fibras.

Observação 3.2.2 No trabalho de Porto-Furuya (1990), para uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ sendo M uma 4-variedade diferenciável fechada e orientada, encontramos todas as configurações locais admissíveis para W_f , cujos 10 modelos básicos são dados por:

$$\gamma = q_f(p)$$

$$q_f^{-1}(\gamma) \cap S(f) = \emptyset$$

Fig. 3.1

$$\gamma = q_f(p)$$

$$p \in S_0(f)$$

Fig. 3.2

Fig. 3.3

$y = q_f(p)$
 $p \in S_f(f)$ é simples

Fig. 3.4

$p \in C(f)$ (definida)

Fig. 3.5

$p \in C(f)$ (indefinida)

Fig. 3.6

Fig. 3.7

Fig. 3.9

$y = q_f(p) = q_f(p')$
 $p, p' \in S_f(f)$ são
 duplos.

Fig. 3.8

Fig. 3.10

onde as linhas escuras representam as q_f -imagens de arcos singulares e os símbolos g_1, g_2, g_3 e g representam o genus das q_f^{-1} -imagens de pontos nas respectivas regiões.

O Problema 3.1.2 está relacionado ao Problema 2.1.1, pois é evidente que aplicações genéricas especiais são particulares aplicações com dobras. Observemos

ainda que quando trabalhamos com aplicações de $M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sabendo-se que neste caso a característica de Euler de M é nula, então podemos assumir que tais aplicações não apresentam cúspides (ver teorema (1) em Levine (1965)). Assim, modelos de complexos bidimensionais realizados por 3-variedades diferenciáveis fechadas e orientadas podem ser considerados sem apresentar q -imagens de pontos cuspidais. Neste sentido, os trabalhos de Burlet-de Rham (1974) e Porto-Furuya (1990) estão relacionados ao Problema 3.1.2, onde, por exemplo, se considerarmos W difeomorfo ao 2-disco D^2 ou ao anel $D^2_{(1)}$, temos que as únicas variedades M^m realizando W são:

$$W \cong D^2 \longrightarrow \begin{cases} M^3 \cong S^3 \text{ (ver teorema 2.2.2)} \\ M^4 \cong S^4 \text{ (ver teorema 2.2.3)} \end{cases}$$

$$W \cong D^2_{(1)} \longrightarrow \begin{cases} M^3 \cong S^1 \times S^2 \text{ (ver teorema 2.2.2)} \\ M^4 \cong S^1 \times S^3 \text{ (ver teorema 2.2.3)} \end{cases}$$

onde $\cong$ denota difeomorfismo.

Observação 3.2.3. Na realidade o Problema 3.1.2 é motivado pela seguinte conjectura estabelecida por Porto-Kushner: “Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação estável cujo conjunto singular $S(f)$ apresenta somente dobras simples, sendo M uma 3-variedade diferenciável, fechada e orientada. Suponhamos também que cada vizinhança $N(c')$ de uma componente $c' = q_f(c)$ (onde c é uma componente de dobra indefinida) seja trivial ($c' \times Y$) e nunca o “ Y -fibrado torcido não trivial.” Então, W_f (e consequentemente M) é descrito através de seis “modelos básicos” de complexos bidimensionais

listados abaixo:

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

os quais são realizados unicamente pelas seguintes 3-variedades,

$$(1) \rightarrow S^3$$

$$(3) \rightarrow S^3$$

$$(5) \rightarrow S^1 \times S^1 \times S^1$$

$$(2) \rightarrow S^1 \times S^2$$

$$(4) \rightarrow S^1 \times S^2$$

$$(6) \rightarrow S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2 . "$$

Como poderemos ver adiante tal conjectura é falsa, haja visto que existem por exemplo modelos básicos admitindo "infinitas" realizações.

Kobayashi (1990) considera o **Problema 3.1.2**. Trabalhando com uma classe especial M_1 de 4-variedades diferenciáveis, onde uma 4-variedade diferenciável M pertence a M_1 se M for fechada, 1-conexa, admitindo uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, com " W_f difeomorfo ao 2-disco D^2 " (apresentando possivelmente q_f -imagens de componentes singulares em seu interior), e, tendo como q_f -fibras regulares somente esferas ou toros, ele obtém interessantes informações sobre a topologia de M e sobre o conjunto singular de f . Mais especificamente, dada $M \in M_1$ uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $W_f \cong D^2$ é dita "simples" se f

não apresentar mais do que uma cúspide, e $q_f|_{S(f)-\{cúspides\}}$ for um mergulho; Então:

Lema 3.2.4 Seja $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação simples, com $M \in M_1$ e seja $\mathfrak{R}$ uma componente conexa de $W_f - q_f(S(f))$ tal que $\mathfrak{R} \cong D^2$. Então, $q_f^{-1}(x) \cong S^2, \forall x \in \mathfrak{R}$.

Observações 3.2.5 (1) Se $M \in M_1$, então demonstra-se que sempre existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, que é simples. Para tanto, como $M \in M_1$ existe uma aplicação estável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ nas condições que definem a classe M_1 . Assim, via deformações locais descritas por homotopias (ver Levine (1965)) podemos modificar ϕ localmente, preservando a fatorização como sendo D^2 , e obter $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ estável, nas condições de M_1 , tal que f não tenha cúspides se $\chi(M)$ for par, ou tenha uma única cúspide se $\chi(M)$ for ímpar. Logo, supondo-se que $q_f|_{S(f)-\{cúspides\}}$ tenha pontos duplos, então os genus das fibras regulares ao redor destes pontos são descritos como abaixo (ver Furuya (1986)):

o que contradiz o fato de que o genus é, por hipótese, no máximo 1. Portanto, não podem existir pontos duplos em $S(f)$, ou seja, $q_f|_{S(f)-\{cúspides\}}$ é mergulho.

(2) O lema acima nos diz que certos modelos de complexos bidimensionais não são realizáveis por quaisquer $M \in \mathcal{M}_1$, por exemplo:

Fig. 3.11

Fig. 3.12

onde os números internos representam o genus das q_f^{-1} -imagens de pontos sobre tais regiões.

(3) Dada uma componente conexa W_o de $W - q(S(f))$ tem-se que $q^{-1}(W_o)$ é um fibrado sobre W_o tal que se o fecho de $q^{-1}(W_o)$ contiver pontos de dobra definida, então as q_f^{-1} -imagens de pontos de W_o são esferas bidimensionais (ver corolário 1.11 em Porto-Furuya (1990)). Assim, é obvio que as q^{-1} -imagens de dois pontos sobre W_o são superfícies de mesmo genus e é por este motivo que nas figuras acima e em outras figuras que se seguem, o inteiro “0” comparece nas regiões adjacentes ao seu exterior. Convém ainda ressaltar que a passagem de uma componente conexa para outra em $W_f - q(S(f))$ produz modificações nos genus relacionados às respectivas componentes e o “controle” sobre o valor do genus é feito através das configurações descritas na observação 3.2.2.

Lema 3.2.6 (Kobayashi (1990)). Seja $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação simples com $M \in \mathcal{M}_1$. Seja $J \cong [-1, 1]$ um arco transversal a duas componentes de dobras indefinidas, não interceptando a q_f -imagem da cúspide, e, tal que as extremidades

de J sejam 2-esferas S^2 (isto é, $q_f^{-1}(-1) \cong q_f^{-1}(1) \cong S^2$). Então, $q_f^{-1}(J) \cong S^2 \times J$.

Observação 3.2.7. Em outras palavras, o lema 3.2.6 nos diz que os dois pontos singulares determinados por $q_f^{-1}(J) \cap S(f)$ são canceláveis (no sentido do “teorema de cancelamento” - ver Milnor (1965)). Assim, podemos deformar f localmente por homotopias e obter uma nova aplicação estável $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ contendo (localmente) a imagem de duas cúspides, como ilustram as Figuras abaixo:

Teorema 3.2.8 (Kobayashi (1990)). Dados os dois complexos bidimensionais (1) e (2) descritos abaixo, as únicas 4-variedades diferenciáveis, fechadas, 1-conexas e realizando tais complexos são S^4 e CP^2 (ou $\overline{CP}^2 \equiv$ complexo projetivo, com orientação contrária) respectivamente.

3.3 Resultados Obtidos

Com respeito ao Problema 3.1.1, utilizando-se as configurações obtidas para W_f no caso 4-dimensional (ver 3.2.2), podemos obter resposta afirmativa sobre a sobrejetividade de q_f nesta dimensão, como segue.

Lema 3.3.1 Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação estável onde M é uma 4-variedade diferenciável, fechada e orientada. Então, W_f é um poliedro bidimensional.

Prova:

Todos os 10 modelos apresentados em (3.2.2) são naturalmente triangularizáveis. Como W_f pode ser coberto por um número finito de tais modelos, pode-se refinar as triangularizações locais subdividindo os complexos simpliciais correspondentes ao longo de algum simplexo 1-dimensional. Desta forma obtém-se uma triangularização global de W_f . $\square$

Teorema 3.3.2 Para f e M nas condições acima tem-se que $q_f : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(W_f)$ é epimorfismo.

Prova:

Por (3.3.1), segue-se que W_f é um poliedro (complexo simplicial) bidimensional. Consideremos então $(K, \emptyset)$ uma triangulação de W_f , ou seja, K é um complexo simplicial bidimensional e $\emptyset : |K| \rightarrow W_f$ é um homeomorfismo, sendo $|K| = \bigcup_{s \in K} s$ espaço topológico subjacente a K e s são os simplexos de K . Sem perda de generalidade podemos assumir que os 1-simplexos desta triangularização sejam de um dos tipos abaixo:

- (a) completamente contidos em $W_f - q(S(f))$ com exceção de no máximo 1 vértice;
- (b) completamente contidos em arcos de pontos de dobras definidas com exceção de no máximo 1-vértice;
- (c) completamente contidos em arcos de pontos de dobras indefinidas com exceção

de no máximo 1-vértice;

Consideremos uma aplicação contínua e arbitrária $\mu : S^1 \rightarrow W_f$; se encontrarmos uma aplicação contínua $\beta : S^1 \rightarrow M$ tal que $q_f \circ \beta$ seja homotópica a μ , $q_f \circ \beta \sim \mu$, segue-se o resultado. Na construção de uma tal aplicação contínua β , considere-se os passos:

1º passo) Constrói-se uma aproximação simplicial ψ de μ nas condições abaixo.

Seja $(\tilde{K}, \tilde{\emptyset})$ uma triangularização de S^1 e $(K, \emptyset)$ uma triangulação de W_f como descrita acima.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\mu} & W_f \\ \tilde{\phi} \uparrow & & \uparrow \phi \\ |\tilde{K}| & \dashrightarrow & |K| \end{array}$$

Assim, pode-se considerar $\mu : |\tilde{K}| \rightarrow |K|$. Pelo teorema de aproximação simplicial (ver Rotman (1988)) existe $\psi : Sd^n \tilde{K} \rightarrow K$ uma aproximação simplicial de μ para algum inteiro $n \geq 1$, sendo Sd a subdivisão baricêntrica de A onde $Sd^n A = Sd(Sd^{n-1} A)$ e $Sd^0 A = A$. Como ψ é aproximação simplicial de μ temos $|\psi| \sim \mu$. Denotemos por $\mu' : S^1 \rightarrow W_f$ o correspondente à $|\psi|$ (a menos de homeomorfismos). Por outro lado, $|\psi|$ pode ser obtida como soma de um número finito de caminhos simples acarretando que μ' é também obtida como soma finita de caminhos simples $a_i : [0, 1] \rightarrow W_f$, $i = 1, \dots, r$, onde $a_i([0, 1])$ é 1-simplexo de W_f nas condições (a), (b) ou (c) acima.

2º passo) Com as condições acima, $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ é conexo por caminhos.

De fato, $a_i[0, 1]$ é compacto e conexo em W_f , e segue-se que $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ é métrico, conexo e compacto (ver observação 2.1(e)). Agora, a decomposição de M em fibradados descrita em Furuya (1986) mostra que $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ é homeomorfa a um espaço localmente conexo. Portanto, segue-se o desejado.

Em $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ consideremos os pontos $x_j \in q_f^{-1}(a_i(j))$, $j \in \{0, 1\}$. Logo, existe

um caminho $b_i : [0, 1] \rightarrow q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ com $b_i(0) = x_{i0}$ e $b_i(1) = x_{i1}$. Assim, temos que $q_f \circ b_i$ é caminho em W_f com $q_f \circ b_i(j) = a_i(j)$, $j \in \{0, 1\}$.

3º passo) $q_f \circ b_i \sim a_i$ rel. $\{0, 1\}$.

De fato, a_i é homeomorfismo sobre sua imagem; podemos então escrever $q_f \circ b_i = a_i \circ c_i$, onde $c_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é definido por $c_i = a_i^{-1} \circ q_f \circ b_i$ com $c_i(0) = 0$ e $c_i(1) = 1$.

Como $c_i \sim \text{id}$ rel $\{0, 1\}$ segue que $q_f \circ b_i \sim a_i$ rel $\{0, 1\}$.

4º passo) Constrói-se β colando-se nas fibras os caminhos b_i .

Considerando-se os caminhos b_i , $i = 1, \dots, r$, em M com $q_f \circ b_i \sim a_i$ rel $\{0, 1\}$, se $b_i(1) = b_{i+1}(0)$ tem-se o caminho $b_i \cdot b_{i+1}$. Por outro lado, se para algum k , $b_k(1) \neq$

$b_{k+1}(0)$ (ou $b_r(1) \neq b_1(0)$) então com $b_k(1)$ e $b_{k+1}(0)$ estão na mesma q -fibra que por sua vez é conexa por caminhos (ver Furuya (1986)), podemos tomar c_k nesta q -fibra de forma a se obter o caminho $b_k.c_k.b_{k+1}$. Destas justaposições obtem-se $\beta : S^1 \rightarrow M$ nas condições requeridas. $\square$

Observação 3.3.3 Consideremos $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como em (3.3.2). Suponhamos que além das condições impostas anteriormente, M seja também 1-conexa e que W_f seja uma superfície mergulhada (via $\bar{f}$) em $\mathbb{R}^2$. Então, W_f é difeomorfo a algum $H_k = 2$ -disco com k buracos. Logo, via o epimorfismo q_{f*} , segue-se que $W_f \cong D^2$. Assim, as configurações descritas pelas Figuras 3.4, 3.5, 3.8, 3.9 e 3.10 encontradas na observação 3.2.2 não podem comparecer em W_f nestas condições.

Vamos dividir o nosso estudo relacionado ao **Problema 3.1.2** em dois casos:

- 1º caso) realizações de complexos bidimensionais por 4-variedades diferenciáveis fechadas;
- 2º caso) realizações de complexos bidimensionais por 3-variedades diferenciáveis fechadas;

Quanto ao primeiro caso, obtemos alguns interessantes resultados que serão descritos abaixo.

Seja $\phi : S \rightarrow N$ uma imersão com interseções normais, onde S é uma união finita e disjunta de círculos, e N é uma superfície fechada e conexa com $H_1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$. Denotemos por A_ϕ o conjunto dos pontos múltiplos de ϕ . Como extensão natural dos lemas (2) e (3) obtidos por Biasi-Fuster (1992) temos:

Lema 3.3.4 Se $A_\phi \neq \emptyset$, então $\beta_0(N - \phi(S)) \geq 2.\#S + 1$, onde $\beta_k(X)$ denota o k -ésimo número de Betti de X , e $\#S$ denota o número de componentes conexas de S .

Prova:

Pela sequência de homologia do par $(N, \phi(S))$ e dualidade, tem-se que $H_0(N - \phi(S)) = \mathbb{Z}_2 \oplus H_1(\phi(S))$. Por outro lado, utilizando-se do lema 3 e notações estabelecidas por Biasi-Fuster (1992), segue-se que $H_1(\phi(S)) = \bigoplus_1^{\#S} \mathbb{Z}_2 \oplus \ker \alpha \geq 2.\#S$. Portanto, $\beta_0(N - \phi(S)) \geq 2.\#S + 1$. $\square$

Em analogia à classe $\mathcal{M}_1$ definida por Kobayashi (1990), consideremos a classe $\tilde{\mathcal{M}}_1$ constituída de 4-variedades diferenciáveis M as quais são fechadas, 1-conexas, com característica de Euler par e admitem uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo W_f uma superfície mergulhada (via $\tilde{f}$) em $\mathbb{R}^2$, e, $S(f)$ constituído somente de pontos de dobra.

Observações 3.3.5 (1) As variedades S^4 , CP^2 e $S^2 \times S^2$ são exemplos de elementos de $\tilde{\mathcal{M}}_1$.

(2) Dada uma 4-variedade diferenciável M sendo fechada (orientada) e 1-conexa com $\chi(M)$ par, assumir que M admite uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $S(f)$ constituído apenas por pontos de dobra não representa restrição, haja visto que, o conjunto das aplicações estáveis de M em $\mathbb{R}^2$ é um subconjunto aberto e denso em $C^{00}(M, \mathbb{R}^2)$ e, como $\chi(M)$ é par, uma aplicação estável $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ através de processos de eliminação de cúspides descritos por Levine (1965), pode ser deformada homotopicamente, sem alterar sua fatorização, de forma a se obter uma aplicação estável de M em $\mathbb{R}^2$ com conjunto singular constituído apenas por pontos de dobra.

(3) Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ nas condições acima, como M é 1-conexo e q_f é epimorfismo (ver teorema 3.3.2), segue-se que $W_f \cong D^2$. Assim, dados $M \in \tilde{\mathcal{M}}_1$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ nas condições que definem a classe $\tilde{\mathcal{M}}_1$, como f é estável, tem-se que $f|_{S(f)} : S(f) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma imersão com interseções normais e $S(f)$ é uma união finita e disjunta de círculos. Logo, o lema anterior nos motiva a definição a seguir.

Definição 3.3.6 Sendo $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ nas condições acima, f é dita “trivial” se $\beta_0(\mathbb{R}^2 - f|_{S(f)}(S(f))) = \#S(f) + 1$. Em outras palavras, $S(f)$ é constituído apenas por pontos de dobra simples e as únicas configurações locais para W_f são as

descritas pelas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 em (3.2.2).

Consideremos $M \in \tilde{\mathcal{M}}_1$ e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ trivial. Tomemos uma curva $\gamma \in q_f(S(f))$, sendo γ q_f -imagem de uma componente de dobras indefinidas (portanto contida no interior de W_f), e, consideremos $V_\gamma \cong J_\gamma \times \gamma$, vizinhança tubular de γ com $J_\gamma \cong [-\epsilon, \epsilon]$ onde ϵ é um número real positivo e suficientemente pequeno tal que $V_\gamma \cap q_f(S(f)) = \gamma$ e $\{0\} \times \gamma \cong \gamma$. Pode-se dizer (a menos de $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^2$) que γ divide $\mathbb{R}^2$ em uma “região limitada” e outra “ilimitada”. Assim, orientamos J_γ tendo origem o na região limitada e extremidade e na ilimitada. Então, diz-se que $\gamma \in D_f$ se a superfície $q_f^{-1}(o)$ tiver genus maior que $q_f^{-1}(e)$ ($D_f \equiv$ genus decrescente), e, em caso contrário diz-se que $\gamma \in C_f$ ($C_f \equiv$ genus crescente).

Observação 3.3.7 Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é trivial ($M \in \tilde{\mathcal{M}}_1$) e o número de componentes de D_f e C_f são iguais, então, por exemplo, as configurações admissíveis para W_f são da forma:

Enquanto que, por exemplo, os modelos descritos abaixo não são realizáveis por tais

variedades que admitem aplicações triviais nestas condições:

Teorema 3.3.8 Sejam $M \in \tilde{\mathcal{M}}_1$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ trivial com $\#D_f = \#C_f$. Sendo $q_f^{-1}(x)$ uma superfície de genus menor ou igual a 1, $\forall x \in W_f - q_f^{-1}(S(f))$, então M é difeomorfa a S^4 , onde $\#D_f(\#C_f)$ representa o número de componentes de $D_f(C_f)$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ componente conexa de $W_f - q_f(S(f))$ com $\mathcal{R} \cong D^2$. Logo, pelo lema 3.2.4, tem-se que $q_f^{-1}(x) \cong S^2$, $\forall x \in \mathcal{R}$. Assim, podemos dizer que a configuração (*) descrita abaixo é “normal” em W_f :

Logo, tomando-se $J \cong [-1, 1]$ transversal às q_f -imagens de dobras indefinidas em (*), tem-se que $q_f^{-1}(J) \cong S^2 \times J$ (ver lema 3.2.6). Então, os pontos críticos $q_f^{-1}(p_i)$ são canceláveis, de forma que podemos deformar localmente f , via o teorema de cancelamento (ver Milnor (1965)), obtendo uma nova aplicação estável com duas

cúspides canceláveis:

Agora, podemos deformar localmente f , por uma homotopia π -estável (ver Furuya (1986)), de tal forma que as transições das fatorizações ao longo desta homotopia são descritas por:

Portanto, procedendo sucessivas vezes como acima, obtemos uma aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $W_g \cong D^2$ e g é genérica especial. Logo, pelo teorema 2.2.3 (1) tem-se o resultado. $\square$

Observemos que o modelo (5) em 3.3.7 somente não satisfaz a condição $\#D_f = \#C_f$. Tal modelo foi alvo de estudos de Kobayashi (1990), o qual utilizando argumentos encontrados em Levine (1966), obteve que variedades $M \in \mathcal{M}_1$ que realizam (5), com $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ simples, tem o segundo número de Betti, $b_2(M)$, igual a 2. Assim, associamos a tais variedades uma forma bilinear simétrica ω definida como no capítulo 2, $\omega : H^2(M, \mathbb{Z}) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\omega(x, y) = \langle x \cup y, [M] \rangle$. Denotando

o índice de M por $\sigma(M)$, segue que:

Teorema 3.3.9 Seja $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ realizando o modelo (5), com $\sigma(M) = 0$. Então, M é homotopicamente equivalente a:

$$\begin{cases} S^2 \times S^2, & \text{se } \omega \text{ for par} \\ CP^2 \# \overline{CP}^2, & \text{se } \omega \text{ for impar.} \end{cases}$$

Prova:

Por hipótese M é 1-conexa e como $b_2(M) = 2$, por dualidade, segue que $\chi(M) = 4$. Assim, como $\sigma(M) = 0$, então M é uma equivalência de homotopia com o espaço total de um S^2 -fibrado sobre S^2 (ver teorema 5 em Hillman (1991)). Por outro lado, existem exatamente dois S^2 -fibrados sobre S^2 (tais fibrados são classificados por $\pi_1(SO(3))$ o qual é um grupo de ordem 2, ver Steenrod (1951)), com espaços totais dados por $S^2 \times S^2$ ou $S^2 \tilde{\times} S^2 \cong CP^2 \# \overline{CP}^2$. $\square$

Observação 3.3.10 Sejam $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2$) aplicações estáveis, sendo M_i 4-variedades diferenciáveis fechadas, orientadas e conexas. Assim, podemos construir uma aplicação estável $f_1 \# f_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como segue: tomemos um ponto $a_i \in \partial W_{f_i}$ e um arco mergulhado γ_i em W_{f_i} o qual conecta dois pontos de ∂W_{f_i} e é transversal a ∂W_{f_i} tal que γ_i contorna a_i como abaixo:

Seja U_i a região limitada por γ_i , em W_{f_i} , contendo a_i . Então, por Levine (1966), tem-se que $q_{f_i}^{-1}(U_i) \cong D^4$ e $q_{f_i}^{-1}(\gamma_i) = \partial q_{f_i}^{-1}(U_i)$. Por Levine (1985), as duas funções

$q_{f_i}|_{q_{f_i}^{-1}(\gamma_i)} : S^3 \rightarrow \gamma_i$ são funções de Morse sobre S^3 e são equivalentes. Assim, sejam ϕ e ψ difeomorfismos comutando o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc} q_{f_1}^{-1}(\gamma_1) & \xrightarrow{\phi} & q_{f_2}^{-1}(\gamma_2) \\ \downarrow q_{f_1}| & & \downarrow q_{f_2}| \\ \gamma_1 & \xrightarrow{\psi} & \gamma_2 \end{array}$$

Observe-se que podemos tomar ϕ invertendo orientação, pois caso contrário, tomamos $k : q_{f_2}^{-1}(\gamma_2) \rightarrow q_{f_2}^{-1}(\gamma_2)$ um difeomorfismo invertendo orientação o qual satisfaz $q_{f_2}|_{q_{f_2}^{-1}(\gamma_2)} = q_{f_2}|_{q_{f_2}^{-1}(\gamma_2)} \circ k$ e inverte a orientação de cada superfície de nível de $q_{f_2}|_{q_{f_2}^{-1}(\gamma_2)}$. Então, $k \circ \phi$ inverte orientação e $(k \circ \phi, \psi)$ nos dá a equivalência das duas funções de Morse.

Consideremos $M'_i = \overline{M_i - q_{f_i}^{-1}(U_i)}$ e $W'_i = \overline{W_{f_i} - U_i}$. Quando ψ inverte orientação, podemos colar as triades $(M'_i, q_{f_i}|_{M'_i}, W'_i)$ por ϕ e ψ e obter $(M_1 \# M_2, \tilde{q}, W_{f_1} \# W_{f_2})$, onde $\tilde{q}$ é uma C^0 -aplicação satisfazendo $\tilde{q} = q_{f_i}$ sobre M'_i . Através de uma pequena perturbação, transformamos $\tilde{q}$ em uma aplicação estável tal que $\tilde{q}$ e q_{f_i} são equivalentes (à esquerda) sobre M'_i . Agora, modificamos a imersão $\tilde{f}_2$ por uma equivalência (à esquerda) de modo a $f_2(M'_2)$ colar-se com $f_1(M'_1)$. Então, $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ podem também ser coladas e nós obtemos uma imersão $h : W_{f_1} \# W_{f_2} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Portanto, temos uma aplicação estável $ho\tilde{q} : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, a qual denotamos por $f_1 \# f_2$.

Por outro lado, se ψ preservar orientação, tomemos $l : W'_{f_2} \rightarrow W'_{f_2}$ um difeomorfismo invertendo orientação. Então, colamos as triades $(M'_1, q_{f_1}|_{M'_1}, W'_{f_1})$ e $(M'_2, q_{f_2}|_{M'_2}, W'_{f_2})$ por ψ e $l|_{W'_{f_2}} \circ \psi$. Analogamente ao caso acima, modificando a imersão $\tilde{f}_2 \circ l^{-1}$ obtemos uma aplicação estável $f_1 \# f_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Portanto, obtemos uma aplicação estável $f_1 \# f_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ determinada por f_1 e f_2 , a qual é única a menos de equivalência e satisfaz as condições:

- (1) $f_1 \# f_2$ é equivalente a f_i sobre M'_i , $i = 1, 2$
- (2) $W_{f_1 \# f_2} = W_{f_1} \# W_{f_2}$
- (3) $q_{f_1 \# f_2}$ é equivalente a q_{f_i} sobre M'_i , $i = 1, 2$

Observação 3.3.11 Kobayashi (1990) estabelece que $M \in \mathcal{M}_1$ realizando o modelo (a) descrito abaixo é difeomorfo a CP^2 . Então, se considerarmos no modelo (5) a seguinte situação:

(a)

(5)

seja $J \cong [-1,1]$ transversal à componente de dobra indefinida como acima (na realidade é transversal a sua q -imagem). Se $q_f^{-1}(x_i) = p_i$ ($i=1,2$) forem “pontos críticos canceláveis”, então pode-se deformar (5) e descrevê-lo como abaixo:

Logo, pela observação acima e o teorema 3.2.8, tem-se que M realizando (5) sob tais condições é difeomorfo a $CP^2 \# CP^2$. Pode-se descrever (via funções de Morse) $q_f^{-1}(J)$ como a colagem de dois toros sólidos menos dois 3-discos abertos contidos cada um deles no interior de um respectivo toro sólido. Assim, $q_f^{-1}(J) \cong \hat{L}(p, q)$ (espaço de lens removendo-se 2 discos D^3). Logo, p_1 e p_2 são canceláveis se $p = 1$ pois $\hat{L}(1, q) \cong \hat{S}^3 \cong S^2 \times J$. É então natural que se ponha a seguinte questão, na qual estamos trabalhando: “que condições adicionais devem ser impostas à M para se garantir que $p=1$?

Vamos agora considerar os nossos estudos relacionados ao (2º caso), ou seja, realizações de complexos por 3-variedades diferenciáveis e fechadas.

Na observação 3.2.3 são apresentados seis “modelos básicos de complexos”, e se tem uma conjectura sobre suas realizações. As observações abaixo mostram quais são as realizações de alguns destes modelos, de onde se observa as impossibilidades da utilização de tais modelos no problema proposto por Porto-Kushner.

Observações 3.3.12 (1) Dado o complexo bidimensional (*) descrito abaixo, então se M for uma 3-variedade diferenciável realizando (*) tem-se que M é difeomorfa a uma das seguintes variedades: $S^1 \times S^2$; S^3 ou o espaço de lens S^3/Z_n , onde Z_n atua livremente sobre $S^3 = \{z \in C^2 / \|z\| = 1\}$ por $m.(z_1, z_2) = (\xi^m.z_1, \xi^m.z_2)$, sendo ξ uma n -ésima raiz primitiva de 1.

De fato: na configuração (**) acima x representa um ponto de sela e y_1 e y_2 são dois “pontos marcados”. Em uma vizinhança da componente de (*) abaixo em negrito temos duas famílias de “pontos marcados”:

Em (1), os pontos marcados formam um círculo c_1 em $S^1 \times S^1 = \partial(S^1 \times D^2)$, e, em (2) tais pontos formam um círculo c_2 também contido no $\partial(S' \times D^2)$. Sejam n_i ($i=1,2$) o “número de vezes que c_i se enrola em $S^1 \times D^2$ ”. Então, tais números determinam completamente M , sendo que: se $n_1 = n_2$, então $M = S' \times S^2$; se $n_1 - n_2 = \pm 1$, então $M = S^3$ e se $n_1 - n_2 = \pm n$, então $M = S^3/Z_n$ (ver Rolfsen (1976)).

(2) Consideremos agora o complexo bidimensional (**) descrito a seguir,

Logo, as 3-variedades realizando (**) são classificadas por um par de inteiros (n, m) os quais contam o número de vezes que as “marcas” sobre os círculos c_1 e c_2

enrolam-se ao redor do “topo” e da “base” respectivamente como na figura abaixo:

Assim, as 3-variedades realizando (**) são da forma $S^1 \times S^1 \times I/f$, onde $I \cong [0, 1]$ e $f : S^1 \times S^1 \times \{0\} \rightarrow S^1 \times S^1 \times \{1\}$ é o “entrelaçamento de Dehn” $f = \begin{pmatrix} 1 & m-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Consideremos M uma 3-variedade diferenciável, fechada, conexa e orientada. Então, M tem uma “decomposição de Heegaard” $M = M_1 \cup_\psi M_2$, onde M_1 e M_2 são dois “handlebodies” sólidos 3-dimensionais de mesmo genus com $\partial M_1 = \partial M_2 = S$ sendo uma superfície conexa, e a aplicação $\psi : S \rightarrow S$ é um “difeomorfismo de colagem”. Nestas condições, pode-se obter um difeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ tal que $M_1 \cup_\phi M_2 = S^3$. Observemos, ainda que qualquer difeomorfismo ϕ de uma superfície S é isotópico a composição de “entrelaçamento de Dehn” (Dehn twists), e que $M_1 \cup_\phi M_2$ depende somente da classe de isotopia de ϕ . Para as demonstrações dos resultados descritos acima ver Dubrovin (1990). Assim, podemos estabelecer o resultado:

Teorema 3.3.13 Seja M uma 3-variedade diferenciável, fechada, conexa e orientada. Então, existem aplicações genéricas $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e um homeomorfismo $h : W_f \rightarrow W_g$ comutando o diagrama abaixo:

Prova:

Tomemos uma decomposição de Heegaard de M , $M = M_1 \cup_\psi M_2$, nas condições acima.

Seja $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse tal que 0 é valor regular de F , $M_1 = F^{-1}(-\infty, 0]$ e $M_2 = F^{-1}[0, \infty)$. Consideremos ϵ um número real positivo suficientemente pequeno para que F não tenha valores críticos em $(-\epsilon, \epsilon)$. Assim, escolhemos números a_i , $i = 1, \dots, n$ tais que $0 < a_1 \dots < a_n < \epsilon$ são valores regulares de F . Logo, nas subvariedades $S_i = F^{-1}(a_i)$ contidas em M tomemos curvas fechadas c_i para cada i . Nestas condições, existe uma aplicação genérica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, tal que $f_1 = F$, $(a_i, 0)$ é valor regular de f e c_i é uma componente de $f^{-1}(a_i, 0)$.

Por outro lado, escolhemos um difeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ ($S = \partial M_1 = \partial M_2$) tal que $M_1 \cup_\phi M_2 = S^3$, e ϕ (a menos de isotopia) é expresso pela composição $\phi = \phi_n \circ \dots \circ \phi_1$, onde ϕ_i é um entrelaçamento de Dehn sobre a curva c_i respectivamente. Observe que $f_2 \circ \phi_i = f_2$ sobre cada S_i . Logo, $M_\phi = M_1 \cup_\phi M_2 = \tilde{M}_0 \cup_{\phi_1} \tilde{M}_1 \cup \dots \cup_{\phi_n} \tilde{M}_n$ onde $\tilde{M}_0 = F^{-1}(-\infty, a_1]$, $\tilde{M}_i = F^{-1}[a_i, a_{i+1}]$ ($0 < i < n$) e $\tilde{M}_n = F^{-1}[a_n, \infty)$. Nestas condições, existe uma aplicação genérica $g : M_\phi \rightarrow \mathbb{R}^2$ (tome $g|_{\tilde{M}_i} = f|_{\tilde{M}_i}$) e um homeomorfismo $h : W_f \rightarrow W_g$. $\square$

Observação 3.3.14 Sabe-se que a característica de Euler de uma 3-variedade diferenciável, fechada, conexa e orientada é nula. Assim, utilizando-se o teorema (1) em Levine (1965), podemos deformar as aplicações f e g dadas acima, de forma a obter novas aplicações $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ nas condições de (3.3.13) e que não apresentam cúspides (suas únicas singularidades são dobras). Para a construção de $\tilde{f}$ acima ver Apêndice.

Consideremos agora dois complexos bidimensionais descritos pelas Figuras 3.16

e 3.17 abaixo:

Fig. 3.16

Fig. 3.17

onde S_0^i correspondem a dobras definidas, S_1 corresponde a dobras indefinidas e os números internos correspondem ao número de componentes de f -fibras.

Pelo teorema de Realização (ver Mata-Lorenzo (1986)), existem realizações (M_1, f_1) e (M_2, f_2) das Figuras 3.16 e 3.17 respectivamente, com M_i sendo uma 3-variedade diferenciável, fechada e orientada e $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ estável. Assim, pelo teorema 2.2.2, segue que $M_2 \cong S^1 \times S^2$, sendo f_2 genérica especial. Façamos um estudo sobre a realização do modelo descrito na Figura 3.16. Tomemos neste modelo um ponto arbitrário de dobra indefinida, x_o . Logo, utilizando-se de resultados obtidos por Levine (1985) temos a existência (local) de:

- um mergulho de $I \times J \cong (-1, 1) \times [-1, 1]$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $f_1(x_o)$ corresponde a $(0, 0)$;
- uma aplicação diferenciável $g : I \times T \rightarrow J$, com $g|_{\{u\} \times T} : \{u\} \times T \rightarrow J$ sendo uma função de Morse, onde T é a componente conexa de $f_1^{-1}(\{0\} \times J)$ contendo x_o ;
- um mergulho topológico de $W_{1 \times g}$ sobre sua imagem em W_{f_1} .

Assim, localmente, (M, f, W_f) corresponde à configuração descrita a seguir:

onde $T \cong D^2_{(1)} (= S^2 \times I)$ é um 2-disco com um buraco correspondendo a Hirsch (1976)).

Demonstremos que nas condições acima, $W_{1 \times g} = I \times Y$. Para tanto, construiremos um difeomorfismo $\emptyset : I \times T \rightarrow I \times T$, com $\emptyset(t, x) = (t, \emptyset_t(x))$, tal que modulo este difeomorfismo $1 \times g$ é da forma $1 \times h$, onde h é a função altura

Afirmção 1. Seja $\phi : I \times D^2 \rightarrow I \times [0, 1]$ uma aplicação diferenciável com $\phi(t, x) = (t, \phi_t(x))$. Suponhamos que para qualquer $t \in I$, ϕ_t seja uma função de Morse com justamente uma singularidade de índice zero no interior de D^2 , e, cujo valor crítico é zero, e sendo ainda $\phi_t(\partial D^2) = 1$. Então, existe difeomorfismo $A : I \times D^2 \rightarrow I \times D^2$ tal que $\phi \circ A = 1 \times h_1$, onde $h_1 : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$h_1(x, y) = x^2 + y^2.$$

Afirmção 2. Seja $\psi : I \times D_{(2)}^2 \rightarrow I \times J$ uma aplicação diferenciável com $\psi(t, x) = (t, \psi_t(x))$. Suponhamos que para qualquer $t \in I$, ψ_t seja uma função de Morse com justamente uma singularidade de índice 1 no interior de $D_{(2)}^2$, e, tal que duas componentes do bordo de $D_{(2)}^2$ tenham 1 como ψ_t -imagem e a outra componente tenha -1 como ψ_t -imagem. Então, existe difeomorfismo $B : I \times D_{(2)}^2 \rightarrow I \times D_{(2)}^2$ tal que $\psi \circ B = 1 \times h_2$ onde h_2 é a função altura

Observação 3.3.15 As demonstrações das afirmações acima podem ser encontradas em Mata-Lorenzo (1986), são bastante técnicas e elaboradas, envolvendo importantes resultados, tais como Lema de Morse Parametrizado (ver Igusa (1986)) e Teorema de Extensão de Isotopia (ver Hirsch (1976)). Assim, a menos dos difeomorfismos A e B acima, tem-se que $W_\psi = I \times \downarrow$ e $W_\psi = I \times Y$.

Lema 3.3.16 Seja $f : I \times D_{(1)}^2 \rightarrow I \times J$ uma aplicação diferenciável com $f(t, x) = (t, f_t(x))$. Suponhamos que para qualquer $t \in I$, f_t seja uma função de Morse com somente duas singularidades, sendo uma de índice 1 e outra de índice dois, ambas no interior de $D_{(1)}^2$, e tais que seus valores críticos são 0 e $\frac{1}{2}$ respectivamente. Se as f_t -imagens de duas componentes do $\partial D_{(1)}^2$ forem 1 e -1 respectivamente, então existe um difeomorfismo $F : I \times D_{(1)}^2 \rightarrow I \times D_{(1)}^2$ tal que $f \circ F = 1 \times h$, onde h é a

função altura

Prova:

Tomemos t positivo suficientemente pequeno, e, próximo do máximo (local) de f_t retiramos um 2-disco $\tilde{D}$. Assim, $\tilde{D}_{(1)} \cong D_{(2)}^2 \cup_h \tilde{D}$, onde h é difeomorfismo entre o bordo de $\tilde{D}$ e a correspondente componente do bordo de $D_{(2)}^2$. Qualquer difeomorfismo isotópico a h induz a mesma estrutura diferenciável sobre o “espaço colado” (ver Hirsch (1976)). Agora, como $h \in \text{Diff}_+(S^1)$ ($D_{(1)}^2$ é orientado) e sendo que $\pi_0(\text{Diff}_+(S^1)) = 0$, tem-se que a construção de $D_{(1)}^2$ via “colagem” é independente de h .

Assim, decompomos $f_t = \phi_t \cup_h \psi_t$ onde $\phi_t : \tilde{D} \rightarrow [0, 1]$ e $\psi_t : D_{(2)}^2 \rightarrow J$. Logo, podemos decompor f por, $f = (1 \times \phi) \cup_h (1 \times \psi)$ com $1 \times \phi : I \times \tilde{D} \rightarrow I \times [0, 1]$ e $1 \times \psi : I \times D_{(2)}^2 \rightarrow I \times J$ nas condições das afirmações acima.

Portanto, encontramos F dado por $F_t = A_t \cup_h B_t$ nas condições requeridas. $\square$

Assim, a configuração local de (M_1, f_1, W_{f_1}) corresponde a um $D_{(1)}^2$ -fibrado sobre I , onde pode-se construir uma homotopia regular realizando (localmente) as deformações

Desta forma, modificando $1 \times h$ (correspondente a $1 \times g$ a menos de difeomorfismo)

em $q^{-1}(I \times Y)$, construímos uma nova aplicação $\tilde{f}_1$ que é estável tendo duas cúspides na correspondente configuração local, descrita geometricamente abaixo:

Portanto, W_{f_1} pode ser descrito por,

que a menos de homotopia se reduz a segue que:

, ou seja, $W_{\tilde{f}_1}$ é um anel, de onde

Teorema 3.3.17 O modelo descrito na Figura 3.16 se realiza unicamente por

$$S' \times S^2.$$

Observação 3.3.18 Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ estável com W_f descrito a seguir. Então, utilizando-se os mesmos argumentos acima expostos podemos concluir que M é difeomorfa a S^3 .

W_f

Bibliografia

- Ballesteros J.J.N. (1991) - Sobre la función de bitangencia asociada a una curva genérica en $\mathbb{R}^3$, Tesis Doctoral, Universitat de Valencia.
- Ballesteros J.J.N. and Fuster, M.C.R. (1992) - Separation properties of continuous maps in condimension-1 and geometrical applications (to appear in *Topology and its Applications*).
- Biasi C. and Fuster, M.C.R. (1992) - A converse of the Jordan - Brouwer theorem (to appear in *Illinois Journal of Math.*).
- Burlet O. and de Rham, G. (1974) - Sur certaines applications génériques d'une variété closé a 3-dimensions dans le plan, *Enseign. Math.* 20:275-292.
- Cerf J. (1968) - Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$), *Lecture Notes in Math.*, 53, Springer-Verlag.
- Cerf J. (1970) - La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelle et le théorème de la pseudo-isotopie, *Publ. math. de l'Inst. des Hantes Etudes Sci.*, 39.
- Donaldson D. (1983) - An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, 18:269-316.
- Dubrovin B.; Fomenko, A. and Novikov, S. (1990) - Modern geometry-methods in applic., Part-III - Introd. to homology theory, GTM 124, Springer-Verlag.
- Èliäsberg J.M. (1970) - On singularities of folding type, *Math. USSR Izv.*4: 1119-113.
- Feighn M.E. (1988) - Separation properties of codimension-1 immersions, *Topology*, 27:319-321.
- Freedman M. (1982) - The topology of 4-manifolds, *J. Diff. Geom.*, 17:357-453.
- Freed D. and Uhlenbeck, K (1984) - Instantons and four-manifolds, *Math. Sci. Res. Institute* 1.

- Furuya Y.K.S. (1986) - Sobre aplicações genéricas $M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Tese de Doutorado, ICMSC-USP.
- Fukuda T. (1987) - Topology of folds, cusps and Morin singularities, In: A Fete of Topology, Tokyo, Academic Press: 331-353.
- Golubitsky M. and Guillemin, V. (1973) - Stable mapping and their singularities, GTM 14, Springer-Verlag.
- Hatcher. A.E. (1983) - A proof of the Smale conjecture $Diff(S^3) \simeq SO(4)$, Annals of Math., 117:553-607.
- Herbert R.J. (1981) - Multiple points of immersed manifolds, Memoirs of the AMS 34 (250).
- Hirsch M. (1976) - Differential topology, GTM 33, Springer-Verlag.
- Hiratuka J.T. (1992) - Aplicações Genéricas Especiais de uma Variedade Fechada de Dimensão $n+1$ no $\mathbb{R}^n$ - DISSERTAÇÃO DE MESTRADO - IME.
- Hillman J.A. (1991) - On 4-manifolds homotopy equivalent to surface bundles over surfaces, Topology and its Applications 40:275-286.
- Igusa K. (1986) - Parametrized Morse theory, In: 5o Encontro Brasileiro de Topologia, ICMSC-USP:93-102.
- Kauffman L.H. (1979) - Planar surface immersions, Illinois Jour. of Math., 23(4):648-665.
- Kervaire M. and Milnor, J. (1963) - Groups of homotopy spheres, Annals of Math., 77(3):504-537.
- Kobayashi M. (1990) - Studying manifolds over simple discriminants, Sûrikaiseikikenkôsho Kôkyôroku, 725:81-89 (Math. Reviews 91i:58018).
- Kushner L. (1982) - On mappings into $\mathbb{R}^{2l}$, Bol. SBM, 13(1):45-54.
- Kushner L.; Levine, H. and Porto, P. (1984) - Mapping 3-manifolds into the plane, Bol. Soc. Mexicana, 29(1):11-34.
- Levine H. (1965) - Elimination of cusps, Topology, 3:263-296.
- _____ (1966) - Mappings of manifolds into the plane, Amer. J. of Math., 88(2):357-365.

- _____ (1985) - Classifying immersions into $\mathbb{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbb{R}^2$, Lecture Notes in Math. 1157, Springer-Verlag.
- Levine J. (1970) - An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helv., 45:185-198.
- Mata-Lorenzo L.E. (1986) - The Stein factorization of stable maps and stable arcs of maps from 3-manifolds into the plane, Doctor Thesis, Brandeis University.
- _____ (1986) - Stable mappings from 3-manifolds into the plane and immersed polyhedra, In: 5o Encontro Brasileiro de Topologia, ICMSC-USP:103-109.
- _____ (1989) - Polyhedrons and pi-stable homotopies from 3-manifolds into the plane, Nova Série Bol. SBM, 20(1):61-85.
- Milnor J. (1958) - On simply - connected 4-manifolds. In: Symposium Inter. de Topologia Algebrica, México, 122-128.
- _____ (1965) - Lectures on h-codordism theorem, Princeton Univ. Press.
- Milnor J. and Stasheff, J. (1974) - Characteristic classes, Ann. of Math. Stud.76, Princeton Univ. Press.
- Porto P.F.S. (1983) - Informações topológicas sobre o domínio de certas aplicações estáveis, Tese de Livre-Docência, ICMSC-USP.
- Porto P.F.S. and Furuya, Y.K.S. (1990) - On special generic maps from a closed manifold into the plane, Topology and its Aplications, 35:41-52.
- Rolfsen D. (1976) - Knots and links, Publish or Perisch Inc, Berkeley.
- Rotman J. (1988) - An introduction to algebraic topology, GTM 119, Springer-Verlag.
- Saeki O. (1992) - Topology of special generic maps (to appear in Topology and its Applications).
- Smale S. (1956) - Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greather than 4, Annals of Math., 64:399-405.

_____ (1959) - Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc., 10:621-626.

Spanier E. (1966) - Algebraic topology, McGraw-Hill, New-York.

Steenrod N. (1951) - The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press.

Vaccaro M. (1957) - Proprietà topologiche delle rappresentazioni localmente biunivoche, Math. Ann., 133:173-184.

Apêndice

Seja $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse com M uma 3-variedade fechada, conexa e orientada, e, sejam $a_1 < \dots < a_m$ valores regulares de F . Além disso, seja c_i curva fechada simples em $F^{-1}(a_i)$. Então, existe $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ genérica tal que $f_1 = F$; $(a_i, 0)$ é valor regular de f e c_i é uma componente de $f^{-1}(a_i, 0)$, $\forall i$.

Prova:

Sejam $b_1 < \dots < b_k$ valores críticos de F e tomemos vizinhanças I_j de b_j em $\mathbb{R}$ com $\cap I_j = \emptyset$ e $\cup I_j$ não contém a_i . Seja $M_j = F^{-1}(I_j)$.

Inicialmente construímos f_2 sobre M_j como segue: para uma componente de M_j que não contenha o ponto crítico de F em M_j esta é difeomorfa a (superfície fechada e orientada) $\times$ (intervalo). Assim, escolhemos uma função de Morse sobre tal superfície e definimos f_2 como sendo tal função. Se M_{j_0} é uma componente contendo o crítico de F , nós construímos f_2 sobre M_{j_0} tal que (F, f_2) é genérica sobre M_{j_0} e f_2 é Morse sobre o bordo de M_{j_0} . Existem 3 casos de acordo com o índice do ponto crítico em M_{j_0} e nós podemos construir tal f_2 de forma standard em cada caso. Agora, construímos f_2 sobre $F^{-1}(a_i)$. É fácil ver que existe uma função de Morse sobre $F^{-1}(a_i)$ tal que c_i é componente da imagem inversa do valor regular zero. Então definimos f_2 como sendo tal função sobre $F^{-1}(a_i)$. Finalmente, vamos definir f_2 sobre o conjunto intermediário. Seja M_0 componente de $M - (\cup M_j \cup \cup F^{-1}(a_i))$. Seja N_0 o fecho de M_0 . Observemos que N_0 é difeomorfo a (superfície fech. e orient.) $\times$ (intervalo) e que sobre o bordo de N_0 f_2 já foi definida e é Morse. Como $\mathbb{R}$ é contrátil nós podemos conectar duas funções de Morse sobre duas componentes conexas do bordo de N_0 . Por um argumento de Cerf (1970) escolhemos uma homotopia (superfície fechada) $\times$ (intervalo) $\rightarrow \mathbb{R} \times$ (intervalo) que é genérica. Definimos então f_2 por tal homotopia sobre N_0 . Portanto, temos f_2 construída sobre M tal que $f = (F, f_2)$ satisfaz as condições desejadas.