ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

1-EQUIVALÊNCIA E BORDISMO
AMBIENTAL DE SUBVARIEDADES

Carlos Biasi

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

1-EQUIVALÊNCIA E BORDISMO
AMBIENTAL DE SUBVARIEDADES

Carlos Biasi

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS - SP
1981

ABSTRACT

The concepts of L-equivalence of submanifolds (due to R. Thom) and ambient bordism of submanifolds will be the main objects of this thesis.

Let N^n be an oriented manifold, $L_k(N)$ the set of L-equivalence classes of compact oriented submanifolds $K^k \subset N$ and $\Omega_k(N)$ the k^{th} oriented bordism group of N . There is a natural map $\phi : L_k(N) \rightarrow \Omega_k(N)$.

One of the main results is the following theorem:

"If $n \geq 2k$, there is a geometric group structure on $L_k(N)$ such that ϕ is an isomorphism. In particular, if $N = S^{2k}$ there is an isomorphism $\pi_{2k}(MSO(k)) \approx \Omega_k$ ".

The main result about ambient bordism is the following:

"Let $n = 2k+1$, N^n a compact oriented manifold and K^k a compact oriented submanifold of N . Then K bounds in N if and only if $\phi([K]) = 0$, where $[K]$ is the L-equivalence class of K ".

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel, pela orientação segura desta tese e principal responsável pela minha formação científica.

Ao Prof. Dr. Mario Rameh Saab iniciador da minha formação científica como orientador do meu Programa de Mestrado.

Aos meus colegas, Janey Daccach, Roberto Carvalho Engler Pinto, Hermano de Souza Ribeiro, Claudio Martins Mendes, Wilson Mauricio Tadini e Brasil Terra Leme.

À Gisele Maria Saab pela datilografia deste trabalho.

Este trabalho dependeu parcialmente das seguintes instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I	
PRELIMINARES E TEOREMAS BÁSICOS	
§ 1. Variedades e subvariedades	1
§ 2. Homotopias e isotopias	3
§ 3. Homotopia de secções	3
§ 4. Teorema de isotopias em variedades	10
§ 5. Grupos de bordismo	15
§ 6. Uma operação para eliminar intersecções de subvariedades	20
§ 7. Espaço de Thom de um fibrado	27
§ 8. Aplicações com suporte compacto	28
§ 9. Teoria de obstrução para aplicações com suporte compacto	30
CAPÍTULO II	
L-EQUIVALÊNCIA	35
§ 1. O espaço de Thom $MSO(n)$	36
§ 2. Grupos de homotopia dos espaços $MSO(n)$	37
§ 3. O teorema de Thom para variedades não compactas	38
§ 4. L-equivalência nas esferas S^n	43
§ 5. Aplicações da teoria de obstrução	44
CAPÍTULO III	
L-EQUIVALÊNCIA E BORDISMO	
§ 1. Uma relação entre bordismo e L-equivalência	53
§ 2. Um isomorfismo entre Ω_k e $\pi_{2k}(MSO(k))$	56
§ 3. Uma estrutura de grupo em $L_k(N^{2k})$	58
§ 4. O caso $n = 2k-1$	66

CAPÍTULO IV

BORDISMO AMBIENTAL	69
§ 1. Uma decomposição de uma variedade poliédrica	73
§ 2. Geradores para certos subgrupos de $\Omega_k(N)$ ($n = 2k+1$)	76
§ 3. O teorema principal do capítulo IV	78
BIBLIOGRAFIA	85

INTRODUÇÃO

Seja N^n uma variedade orientada e $I = [0,1]$.

Segundo a definição de Thom [15], duas subvariedades compactas e orientadas K_1^k e K_2^k são L -equivalentes, se existir uma subvariedade compacta e orientada $W \subset N \times I$, tal que $\partial W = K_1 \times \{0\} \cup -K_2 \times \{1\}$. O símbolo $L_k(N)$ denota o conjunto das classes de L -equivalência.

Dada uma subvariedade compacta e orientada $K^k \subset N$, dizemos que K borda em N , se existir uma subvariedade compacta e orientada $W \subset N$, tal que $\partial W = K$.

Se X é um espaço topológico, $\Omega_k(X)$ é o k -ésimo grupo de bordismo (orientado) de X [4]. Se $X = \{p\}$ é um ponto, $\Omega_k = \Omega_k(X)$ corresponde ao k -ésimo grupo de bordismo (orientado) de Thom [15].

Existe uma aplicação natural $\phi : L_k(N) \rightarrow \Omega_k(N)$ dada por $\phi([K]) = [K, i]$ onde $i : K \rightarrow N$ é a inclusão.

Neste trabalho serão estudados os seguintes problemas:

- Em que condições, ϕ é injetora, sobrejetora ou bijetora?
- Procurar introduzir (geometricamente) uma estrutura de grupo em $L_k(N)$, de tal forma que ϕ seja isomorfismo.
- Em que condições, o anulamento do elemento $\phi([K])$ em $\Omega_k(N)$, permite concluir que K borda em N ?

Os resultados conseguidos serão apresentados a seguir. A redação está dividida em 4 capítulos.

No capítulo I serão definidos alguns conceitos básicos, necessários aos assuntos tratados nos capítulos posteriores. Neste capítulo serão demonstrados alguns teoremas envolvendo: homotopia de secções de fibrado, computação dos grupos $\Omega_k(X)$ e

teoria de obstrução para aplicações com suporte compacto. Uma atenção especial deverá ser dada às construções realizadas no § 6.

O capítulo II é inteiramente dedicado a L-equivalência de subvariedades. Consideremos o espaço de Thom $MSO(n)$ e o homomorfismo $\pi_{n+p}(MSO(n)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_p$ (Ver § 4). Seja N^n uma subvariedade orientada. Thom mostrou em [15], que se $k \leq 5$ e N é compacta, então toda classe de homologia de $H_k(N)$ é representada por subvariedade. Neste capítulo, mostraremos que se $H_1(N) = 0$ para $0 < i < k-4$ e $\phi' : \pi_{n-1}(MSO(n-k)) \longrightarrow \Omega_{k-1}$ é monomorfismo (em particular, estas condições estão satisfeitas se $k \leq 5$), então toda classe de $H_k(N)$ é representada por subvariedade. O principal resultado deste capítulo diz que, se $H_1(N) = 0$ para $0 < i \leq k-4$ e $\phi' : \pi_n(MSO(n-k)) \rightarrow \Omega_k$ é monomorfismo (se $k \leq 4$ estas condições estão satisfeitas), então duas subvariedades K_1^k e K_2^k são L-equivalentes se, e somente se, são homólogas e bordantes. Exibiremos também uma bijeção $\beta : L_4(N) \rightarrow H_4(N) \oplus \Omega_4$ para $n = 7$. No capítulo III definiremos a aplicação $\phi : L_k(N) \rightarrow \Omega_k(N)$. Para $n \geq 2k$, mostraremos que é possível dar uma estrutura de grupo em $L_k(N)$, de tal forma que ϕ seja isomorfismo (Para $n \geq 2k + 2$ a estrutura de grupo é exatamente a introduzida por Thom em [15]). Este resultado não é trivial para $n = 2k$ e para tal foi necessário demonstrar que $\phi' : \pi_{2k}(MSO(k)) \rightarrow \Omega_k$ é isomorfismo. Se $n = 2k-1$, $H_1(N) = 0$ se $0 < i \leq k-4$ e $\phi' : \pi_{2k-1}(MSO(k-1)) \rightarrow \Omega_k$ é monomorfismo (em particular, estas condições estão satisfeitas se $k \leq 4$), então é possível introduzir em $L_k(N)$ uma estrutura de grupo de tal forma que ϕ' seja isomorfismo.

No capítulo IV será tratado o problema do bordismo ambiental. Se N^n é uma variedade orientada e $n \geq 2k+2$, os teo

remas do mergulho e imersão de Whitney, permitem mostrar que uma subvariedade compacta e orientada K^k de N , borda em N , se, e somente se, $\phi([K]) = 0$ em $\Omega_k(N)$. Para $n = 2k+1$ o problema não é trivial. O teorema principal deste capítulo diz que se N^{2k+1} é uma variedade compacta e orientada, então K borda em N se, e somente se, $\phi([K]) = 0$.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES E TEOREMAS BÁSICOS

§ 1. Variedades e subvariedades

Neste trabalho os termos variedade, subvariedade (salvo menção em contrário) significam de Hausdorff, com base enumerável e de Classe C^∞ . Função ou aplicação diferenciável significa de Classe C^∞ .

Se não for feita nenhuma menção ao bordo de uma variedade, ela será considerada sem bordo.

Se N é uma variedade e $x \in N$, $T_x N$ é o espaço tangente a N em x .

Se $f : N \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável, $f'(x) : T_x N \rightarrow T_{f(x)} M$ é a derivada de f em x .

Quando N é uma variedade com bordo, ∂N denota o bordo de N . Se N for orientada, consideraremos ∂N como variedade orientada com a orientação induzida por N .

Para uma variedade N , τN é o fibrado tangente e, se $K \subset N$ é uma subvariedade, νK denota o fibrado normal. Temos a equivalência

$$\tau N|_K \approx \tau K \oplus \nu K$$

Se N é orientada e K é uma subvariedade orientada, consideraremos νK como fibrado orientado. A orientação introduzida em νK deve ser tal que a equivalência acima preserve a orientação. Se N é uma variedade orientada, $-N$ denota a va-

riedade orientada obtida de N invertendo-se a sua orientação.

Vamos definir os conceitos de bordismo abstrato e bordismo ambiental.

Definição:

Seja N uma variedade orientada e compacta. Dizemos que N borda se existe uma variedade compacta e orientada W tal que $\partial W = N$ (Inclusive coincidência de orientações).

Definição:

Seja N variedade orientada e K uma subvariedade compacta e orientada. Dizemos que K borda em N , se existe subvariedade compacta e orientada $W \subset N$ tal que $\partial W = K$ (Inclusive coincidência de orientações).

Se X é um espaço topológico, $H_n(X)$ denota o n -ésimo grupo de homologia singular de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e $H_n(X, G)$ é o n -ésimo grupo de homologia singular de X com coeficientes em um grupo G .

Definição:

Sejam N variedade orientada e K^k uma subvariedade compacta e orientada. Dizemos que K é homóloga a zero se $i_*(\mu) = 0$ onde $i_* : H_k(K) \rightarrow H_k(N)$ é a induzida da inclusão $i : K \rightarrow N$ e $\mu \in H_k(K)$ é a classe fundamental de K .

Mostra-se que se K borda em N , então K é homóloga a zero.

No capítulo II introduziremos outro conceito envolvido do bordismo, que é o conceito de L-equivalência.

§ 2. Homotopias e isotopias

Sejam X e Y espaços topológicos e $I = [0,1]$.

Definição:

Uma homotopia é uma aplicação contínua $h : X \times I \rightarrow Y$. Para cada $t \in I$ a aplicação $h_t(x) = h(t,x)$ é o estágio t da homotopia h . Dizemos então que h_0 e h_1 são homotópicas.

Definição:

Sejam N, M variedades. Uma isotopia é uma aplicação diferenciável $h : N \times I \rightarrow M$ tal que cada $h_t : N \rightarrow M$ é um mergulho.

Em particular costuma-se empregar o termo isotopia quando cada h_t é um difeomorfismo.

Vamos assumir, sem demonstração, o famoso "teorema do levantamento da isotopia" ([8], T.13, p. 180).

1.1. Teorema:

Sejam K e N variedades, com K compacta. Se $f, g: K \rightarrow N$ são dois mergulhos isotópicos, então existe um difeomorfismo $h: N \rightarrow N$ isotópico à identidade tal que $h \circ f = g$.

§ 3. Homotopia de secções

Suporemos conhecidos os conceitos de fibrado, fibrado vetorial e secções de um fibrado.

Seja (E, p, X) um fibrado com fibra F .

Definição:

Dizemos que duas secções $s, r : X \rightarrow E$ são homotópicas, se existe uma homotopia $h : X \times I \rightarrow E$ entre s e r tal que para todo $t \in I$, $h_t : X \rightarrow E$ é uma secção, ou seja, $p(h(x, t)) = x \quad \forall x \in X, \forall t \in I$.

Vamos supor que X é um poliedro (espaço triangulável) de dimensão n e que $\pi_i(F) = 0, 0 \leq i < n$ (i.e. F é $n-1$ conexo). Dadas duas secções $s, r : X \rightarrow E$, a obstrução à existência de uma homotopia entre s e r é um elemento $\sigma \in H^n(X, \pi_n(F))$ (coeficientes locais) (Ver [14]). Existe uma homotopia entre s e r se e somente se $\sigma = 0$.

Se o fibrado for tal que a fibração correspondente $p : E \rightarrow X$ é orientada (o conceito de fibração e fibração orientada pode ser encontrada em [13]) então $H^n(X, \pi_n(F))$ é exatamente o n -ésimo grupo de cohomologia singular com coeficientes em $\pi_n(F)$ (Neste caso o sistema local de grupos é trivial).

Para os demais resultados e definições deste parágrafo, (E, p, N) é um fibrado cuja fibração correspondente é orientada, N^n é uma variedade compacta, orientada e a fibra F é $n-1$ conexo ($\pi_i(F) = 0, 0 \leq i < n$).

Definição:

Sejam $s, r : N \rightarrow E$ duas secções e as induzidas $s_*, r_* : H_n(N) \rightarrow H_n(E)$.

Seja $\mu \in H_n(N)$ classe fundamental de N . Dizemos que s e r são homólogas se $s_*(\mu) = r_*(\mu)$.

É claro que se s e r são homotópicas então são homólogas.

Lema:

Se N é conexa, a sequência

$$0 \longrightarrow H_n(F) \xrightarrow{i_*} H_n(E) \xrightarrow{p_*} H_n(N) \rightarrow 0$$

é exata, onde $i : F \rightarrow E$ é a inclusão.

Prova:

Este resultado pode ser demonstrado usando a sequência espectral da fibração orientada $E \xrightarrow{p} N$ (Ver [13]).

1.2. Teorema:

Duas secções $s, r : N \rightarrow E$ são homotópicas se, e somente se, são homólogas.

Prova:

Basta fazer a prova para N conexa.

Sejam $s, r : N \rightarrow E$ duas secções homólogas.

Consideremos em N um disco fechado D e $\mathring{D} = D - \partial D$.

Temos $H^n(N - \mathring{D}, \pi_n(F)) = 0$ pois $N - \mathring{D}$ é aberta. Então não existe obstrução para a existência de uma homotopia $h : (N - \mathring{D}) \times I \rightarrow E$ tal que $h_0 = s|_{N - \mathring{D}}$, $h_1 = r|_{N - \mathring{D}}$ e $p(h(x, t)) = x \quad \forall x \in N - \mathring{D} \quad \text{e} \quad \forall t$.

Mostremos que h se estende a uma homotopia de secções entre s e r . Seja

$$S = \partial D \times I \cup D \times 0 \cup D \times 1$$

que é uma esfera n -dimensional.

Orientemos S de tal forma que sua orientação coincida com a orientação de $N \times 0$, nos pontos de $D \times 0$ e seja $\mu_S \in H_n(S)$ a classe fundamental

Seja $f : S \rightarrow E$ dada por

$$f(x,t) = \begin{cases} s(x) & x \in D \text{ e } t = 0 \\ h(x,t) & x \in \partial D \\ r(x) & x \in D \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

É geometricamente visível que $f_*(\mu_S) = s_*(\mu) - r_*(\mu)$ e como s e r são homólogas, então $f_*(\mu_S) = 0$. Observemos que $f(S) \subset p^{-1}(D)$. Como D é contrátil então o fibrado $(p^{-1}(D), p, D)$ é trivial; logo, pelo lema, a aplicação $i_* : H_n(p^{-1}(D)) \rightarrow H_n(E)$ é monomorfismo. Portanto $f_*(\mu_S) = 0$ em $H_n(p^{-1}(D))$.

Consideremos uma trivialização $\phi : p^{-1}(D) \rightarrow D \times F$, $\pi : D \times F \rightarrow F$ a projeção e seja $g : S \rightarrow F$ com $g = \pi \circ \phi \circ f$. Como $g_*(\mu_S) = 0$ então g é homotópica a uma constante (pois

$\pi_n(F) \approx H_n(F)$; logo se estende a $D \times I$.

Então f admite uma extensão $F : D \times I \rightarrow E$ tal que $p(F(x,t)) = x \forall x \in D$, o que mostra que h se estende a uma homotopia de secções entre s e r .

Observação:

A fibração ser orientada é essencial para a prova do teorema.

Por exemplo, se E é a garrafa de Klein e (E,p,S^1) é o fibrado não trivial com grupo estrutural $O(2)$, pode-se exibir exemplos de secções neste fibrado que são homólogas, mas não são homotópicas. Isto decorre do fato que $H_1(E)$ não é isomorfo a $\pi_1(E)$.

Vamos apresentar dois casos interessantes onde o teorema se aplica.

Seja (E,p,N) um fibrado vetorial orientado de posto $n+1$ ($F = \mathbb{R}^{n+1}$), onde N^n é uma variedade orientada compacta e $E_0 = \{e \in E : e \neq 0\}$.

Podemos considerar o fibrado (E_0,p,N) cuja fibra é $F_0 = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ que é $n-1$ conexo.

Neste caso "duas secções $s,r : N \rightarrow E_0$ são homotópicas se, e somente se, são homólogas".

Consideremos agora N^n variedade orientada e K^k subvariedade orientada compacta onde $n = 2k + 1$.

Sejam $\nu K = (E,p,K)$ fibrado normal, V vizinhança tubular e $\psi : V \rightarrow E$ um difeomorfismo tal que $\psi(x) = \theta(x) \forall x \in K$, onde θ é a secção nula.

Dadas duas secções $s, r : K \rightarrow E_0$ diferenciáveis, consideremos as subvariedades orientadas $s(K)$ e $r(K)$ de E_0 . Sejam $K_s = \psi^{-1}(s(K))$ e $K_r = \psi^{-1}(r(K))$ que são subvariedades de $V - K$. Observemos que s e r são homólogas se, e somente se, as subvariedades K_s e K_r são homólogas em $V - K$. Logo, pelo Teorema 1.2, s e r são homotópicas (como secções de N em E_0) se, e somente se, K_s e K_r são homólogas em $V - K$.

O teorema seguinte dá uma condição suficiente para s e r serem homólogas.

1.3. Teorema:

Se $j_* : H_{k+1}(N - K) \rightarrow H_{k+1}(N)$ é epimorfismo e K_s e K_r são homólogas em $N - K$, então são homólogas em $V - K$ e, portanto, s e r são homólogas.

Prova

Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{k+1}(V-K) & \longrightarrow & H_{k+1}(V) & \longrightarrow & H_{k+1}(V, V-K) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & H_k(V-K) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & H_k(V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \approx \downarrow \text{excisão} & & \downarrow \beta & & \downarrow \\
 H_{k+1}(N-K) & \xrightarrow[\text{epi}]{j_*} & H_{k+1}(N) & \longrightarrow & H_{k+1}(N, N-K) & \xrightarrow[\text{mono}]{\partial} & H_k(N-K) & \xrightarrow{\alpha} & H_k(N)
 \end{array}$$

Como j_* é epimorfismo então segue, do diagrama, que β aplica o núcleo de $\bar{\alpha}$ isomorficamente sobre o núcleo de α . Consideremos $\bar{x}_s, \bar{x}_r \in H_k(V-K)$ e $x_s, x_r \in H_k(N-K)$ as classes

de homologia representadas por K_s e K_r respectivamente em $V-K$ e $N-K$.

Como K_s e K_r são homólogas em $N-K$, então $\beta(\bar{x}_s - \bar{x}_r) = x_s - x_r = 0$ e como $\bar{x}_s - \bar{x}_r$ pertence ao núcleo de $\bar{\alpha}$, segue que $\bar{x}_s - \bar{x}_r = 0$ o que mostra que K_s e K_r são homólogas em $V-K$.

Observação:

Em geral $j_* : H_{k+1}(N-K) \rightarrow H_{k+1}(N)$ não é epimorfismo. Por exemplo, se $N = S^2 \times S^1$ e $K = p \times S^1$ ($p \in S^2$ é um ponto), $j_* : H_2(N-K) \rightarrow H_2(N)$ não é epimorfismo. Pode-se mostrar que se N^{2k+1} é orientada e K^k é uma subvariedade compacta, orientada, conexa e homóloga a zero então j_* é epimorfismo.

A prova para N compacta segue do diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(N-K) & \xrightarrow{j_*} & H_{k+1}(N) \\ \approx \uparrow A & & \approx \uparrow D \\ H^k(N, K) & \xrightarrow{j^*} & H^k(N) \end{array}$$

onde A é a dualidade de Alexander e D é a dualidade de Poincaré (Ver [5]).

Como K é homóloga a zero e conexa então a induzida da inclusão $i^* : H^k(N) \rightarrow H^k(K)$ é nula; logo j^* é epimorfismo e portanto j_* também o será.

§ 4. Teorema de isotopias em variedades

Definição:

Dado um fibrado vetorial $\xi = (E, p, X)$, uma métrica riemanniana em ξ é uma aplicação contínua $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que em cada fibra E_x , $Q : E_x \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática positiva definida. Notação $|e| = \sqrt{Q(e)}$.

Dar uma métrica riemanniana em uma variedade N , equivale a dar uma métrica riemanniana diferenciável no fibrado tangente τN .

Seja E espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle, \rangle$ e

$$S(E) = \{u : |u| = 1\}.$$

Dados $u, v \in S(E)$, $u \neq v$, existe uma única isometria $H_{uv} : E \rightarrow E$ satisfazendo:

- (i) $H_{uv}(u) = v$
- (ii) $H_{uv}(x) = x$ se x é ortogonal a u e v ($\langle x, u \rangle = 0$ e $\langle x, v \rangle = 0$).
- (iii) $\det H_{uv} = 1$, isto é, H_{uv} preserva orientação.

Sejam

$$A = \{(u, v) \in S(E) \times S(E) : u \neq -v\}$$

que é aberto em $S(E) \times S(E)$ e $O(E)$ o grupo de Lie das isometrias de E .

Podemos considerar a aplicação

$H : A \rightarrow 0(E)$ dada por $H(u,v) = H_{uv}$.

Pode-se mostrar que H é diferenciável.

Seja agora K^k variedade e $\xi = (E,p,K)$ um fibrado vetorial diferenciável, de posto n , dotado de uma métrica riemanniana diferenciável. Para cada $x \in K$, a fibra E_x é um espaço vetorial com produto interno; logo podemos definir o conjunto A_x e a aplicação

$$H_x : A_x \rightarrow 0(E_x)$$

Sejam $S(E) = \{e \in E : |e| = 1\}$, $0(\xi) = \bigcup_{x \in K} 0(E_x)$

(que é o espaço total do fibrado principal com grupo estrutural $O(n)$ sobre K) e

$$A = \bigcup_{x \in K} A_x = \{(e,f) \in S(E) \times S(E) : e \neq -f, p(e) = p(f)\}$$

Consideremos a aplicação $H : A \rightarrow 0(\xi)$ tal que

$$H|_{A_x} = H_x \quad \forall x \in K$$

Para $\varepsilon \geq 0$ sejam os conjuntos

$$D_\varepsilon = \{e : |e| \leq \varepsilon\} \quad (\text{Para } \varepsilon = 0, D_0 \text{ é a imagem da secção nula})$$

$$E_\varepsilon = \{e : \varepsilon < |e|\}$$

Dada uma secção diferenciável $s : K \rightarrow E_0$ sejam os conjuntos

$$F_s = \{ \lambda s(x) : \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x \in K \}$$

$$F_s^+ = \{ \lambda s(x) : \lambda \geq 0 \text{ e } x \in K \}$$

F_s e F_s^+ são subvariedades de E de dimensão $k+1$ e $\partial F_s^+ = D_0$.

Observação:

Se s e r são duas secções tais que existe $\alpha > 0$ tal que $s(x) = \alpha r(x) \quad \forall x \in K$ então $F_s = F_r$ e $F_s^+ = F_r^+$.

Vamos assumir, para o próximo teorema, que K é compacta.

1.4. Teorema:

Sejam $s, r : K \rightarrow E_0$ duas secções homotópicas. Existe uma isotopia diferenciável $h : E \times I \rightarrow E$ satisfazendo:

- (i) $h(e, t) = e$ se $t = 0$ ou $|e| = 0$ ou $|e| \geq 2$
- (ii) $|h(e, t)| = |e| \quad \forall e, \forall t$
- (iii) $h_1(F_s \cap D_1) = F_r \cap D_1$ e $h_1(F_s^+ \cap D_1) = F_r^+ \cap D_1$

Prova

Podemos supor que $|s(x)| = |r(x)| = 1 \quad \forall x \in K$

1. Suponhamos inicialmente que $s(x) \neq -r(x) \quad \forall x \in K$

Consideremos uma aplicação diferenciável

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ tal que

$\phi(x) = 0$ se $x \leq 1$, $\phi(x) = 1$ se $2 \leq x$ e

$0 < \phi(x) < 1$ se $1 < x < 2$

e a aplicação $g : E \times I \rightarrow E$ definida por:

$$g(e,t) = \left(\frac{\alpha(e,t)}{|\alpha(e,t)|}, \frac{\beta(e,t)}{|\beta(e,t)|} \right) \quad \text{onde}$$

$$\alpha(e,t) = (1-t).r(p(e)) + t.s(p(e))$$

$$\beta(t) = (1-t\phi(|e|)).r(p(e)) + t\phi(|e|).s(p(e))$$

Basta definir $h : E \times I \rightarrow E$ por

$$h(e,t) = H(g(e,t))(e)$$

e teremos a isotopia satisfazendo (i), (ii) e (iii).

2. Vamos supor que s e r são duas secções homotópicas quaisquer. Como K é compacta existe um número finito de secções $s = s_0, s_1, \dots, s_n = r$ tais que, para cada i , $s_{i-1}(x) \neq -s_i(x) \forall x \in K$.

Logo, para cada par $(s_{i-1}, s_i(x))$ existe isotopia h_i satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Basta definir a isotopia h tal que, para cada t , h_t é dada pela composição $h_t = h_{0t} \circ h_{1t} \circ \dots \circ h_{nt}$ e o teorema está demonstrado.

Observação:

Este teorema pode ser generalizado para K não compacta, embora com técnicas mais trabalhosas.

Sejam agora N^n variedade riemanniana e W, M duas subvariedades com bordo tais que $K = \partial W = \partial M$ é compacta.

Sejam $\nu K = (E, p, K)$ o fibrado normal de K em N e $s, r : K \rightarrow E_0$ as duas secções unitárias e internas a W e M respectivamente.

1.5. Teorema:

Se s e r são homotópicas, então dada uma vizinhança V de K , existe um aberto U com $K \subset U \subset V$ e uma isotopia $h : N \times I \rightarrow N$ tal que

- (i) $h(x, t) = x$ se $t = 0$ ou $x \in K$ ou $x \notin V$
- (ii) $h_1(W \cap U) = M \cap h_1(U)$

Prova

Vamos assumir, sem provar, que o teorema é verdadeiro se W e M são tangentes nos pontos de K , ou seja, $T_x W = T_x M \quad \forall x \in K$. (Ver [1]).

Se W e M não são tangentes, sejam $A \subset V$ vizinhança tubular de K e um difeomorfismo $\psi : A \rightarrow E$ tal que $\psi(x) = \theta(x)$ (θ é a secção nula).

Sejam $W' = \psi^{-1}(F_S^+)$ e $M' = \psi^{-1}(F_r^+)$. O teorema anterior permite-nos mostrar que o teorema vale para W' e M' . Como W e M são tangentes a W' e M' , respectivamente, então o teorema vale para os pares (W, W') e (M, M') . Então vale para W e M .

§ 5. Grupos de bordismo

Para maiores detalhes sobre os conceitos a serem introduzidos neste parágrafo ver [4].

Sejam X espaço topológico e $k \geq 0$ inteiro.

Vamos definir a relação de bordismo entre pares (K, f) onde K^k é uma variedade compacta e orientada e $f : K \rightarrow X$ é uma aplicação contínua.

Definição:

Dizemos que o par (K, f) borda se existe uma variedade W compacta e orientada e uma aplicação contínua $F : W \rightarrow X$ tal que $\partial W = K$ e $F|_K = f$.

Definição:

Dizemos que dois pares (K, f) e (K_1, f_1) são bordantes se existe variedade compacta e orientada W e uma aplicação contínua $F : W \rightarrow X$ tais que $\partial W = K \cup -K_1$ e $F|_{K \cup K_1} = f \cup f_1$.

Mostra-se que a relação de bordismo é uma relação de equivalência.

Seja $\Omega_k(X)$ o conjunto de todas as classes de bordismo. Denotaremos por $[K, f]$ a classe de bordismo representada pelo par (K, f) .

Podemos dar em $\Omega_k(X)$ uma estrutura de grupo abeliano onde a operação $+$ é definida por $[K, f_1] + [K_2, f_2] = [K_1 \cup K_2, f_1 \cup f_2]$ (K_1 e K_2 disjuntas).

O elemento neutro de $+$ é a classe representada pelos pares que bordam e se $[K, f] \in \Omega_k(X)$, $[-K, f]$ é o elemento oposto.

Definição:

$\Omega_k(X)$ é o k -ésimo grupo de bordismo (orientado) de X .

Se X é constituído de um único ponto p usaremos a notação $\Omega_k = \Omega_k(\{p\})$. Temos

$$\Omega_0 = \mathbb{Z}; \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0; \Omega_4 = \mathbb{Z}; \Omega_5 = \mathbb{Z}_2; \Omega_6 = \Omega_7 = 0$$

(Ver [15]).

Observação:

Se (X, A) é um par de espaços topológicos, pode-se definir uma relação de bordismo entre pares (K, f) , onde K^k é uma variedade compacta, orientada com bordo e $f : K \rightarrow X$ é uma aplicação contínua tal que $f(\partial K) \subset A$. Define-se então o

k -ésimo grupo de bordismo relativo $\Omega_k(X, A)$. Os grupos de bordismo constituem uma teoria de homologia satisfazendo todos os axiomas de Eilenberg-Steenrod, exceto o axioma da dimensão, que não se verifica.

Existe um homomorfismo natural $\mu : \Omega_k(X) \rightarrow H_k(X)$ definido por:

Se $[K, f] \in \Omega_k(X)$ e $\mu_k \in H_k(X)$ é a classe fundamental de K , então fazemos $\mu([K, f]) = f_*(\mu_k)$

As classes de homologia que estão na imagem de μ , são chamadas *Steenrod Representáveis*.

1.6. Teorema:

Seja X um complexo CW conexo tal que $H_i(X) = 0$ se $0 < i \leq k-4$.

Então a aplicação $\Omega_k(X) \rightarrow H_k(X) \oplus \Omega_k$ que a cada $[K, f]$ associa $\mu([K, f]) + [K]$ é um isomorfismo.

Prova:

Consideremos $\{E_{p,q}^r\}$ a sequência espectral de bordismo de X (Ver [4]) e a filtração

$$\Omega_k(X) = J_{k,0} \supset J_{k-1,1} \supset \dots \supset J_{0,k} \supset 0$$

Temos

$$J_{p,q}/J_{p-1,q+1} = E_{p,q}^\infty \text{ e } E_{p,q}^2 = H_p(X, \Omega_q)$$

O homomorfismo lateral

$$\Omega_k(X) = J_{k,0} \rightarrow E_{k,0}^\infty \rightarrow E_{k,0}^2 = H_k(X)$$

coincide com o homomorfismo

$$\mu : \Omega_k(X) \rightarrow H_k(X)$$

A imagem de cada homomorfismo $E_{p,q}^r \xrightarrow{d^r} E_{p-r,q+r-1}^r$ é constituída de elementos de torção ímpar. Das hipóteses sobre a homologia de X e como $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$ temos

$$H_p(X, \Omega_{k-p}) = 0 \text{ se } 0 < p < k, \text{ logo } E_{p,k-p}^\infty = 0$$

e, portanto, $J_{p,k-p} = J_{0,k}$ se $0 < p < k$. Também temos

$$H_{k-r}(X, \Omega_{r-1}) = 0 \text{ se } 2 \leq r < k, \text{ logo}$$

$$E_{k,0}^r = E_{k,0}^2 \text{ se } 2 \leq r \leq k$$

Como Ω_{k-1} não possui elementos de torção ímpar, temos $\Omega_{k-1} = E_{0,k-1}^2 = E_{0,k-1}^k$, logo o homomorfismo

$$E_{k,0}^k \xrightarrow{d^k} E_{0,k-1}^k \text{ é trivial e, portanto,}$$

$$E_{k,0}^2 = E_{k,0}^{k+1} = E_{k,0}^\infty, \text{ o que mostra que}$$

$$\mu : \Omega_k(X) \rightarrow H_k(X) \text{ é epimorfismo.}$$

Como X é conexo, segue que a aplicação $\Omega_k \rightarrow J_{0,k}$ que a cada $[K]$ associa o elemento $[K,c]$, c constante, é um isomorfismo. Logo, como o núcleo de μ é $J_{0,k}$, o teorema está demonstrado.

Números de Whitney e de Pontryagin

Sejam X espaço topológico e $[K,f] \in \Omega_k(X)$

Para cada i seja $\omega_i \in H^i(K, \mathbb{Z}_2)$ a i -ésima classe de Stiefel-Whitney de K e $p_i \in H^{4i}(K)$ a i -ésima classe de Pontryagin de K .

Sejam $\mu \in H_k(K)$ a classe fundamental de K e $\mu_2 \in H_k(K, \mathbb{Z}_2)$ a classe fundamental, módulo 2, de K .

Seja p inteiro tal que $0 \leq p \leq k$.

Para cada partição $i_1 + \dots + i_m = p$ e

$\alpha \in H^{k-p}(X, \mathbb{Z}_2)$ seja o número $\langle \omega_{i_1} \cdot \omega_{i_2} \cdot \dots \cdot \omega_{i_m} \cdot f^*(\alpha), \mu_2 \rangle \in \mathbb{Z}_2$,

que é o número de Whitney do par (K,f) , associado à partição dada e à classe α .

Se 4 divide p , para cada partição $(i_1, \dots, i_m)$ tal que $4(i_1 + \dots + i_m) = p$ e cada $\alpha \in H^{k-p}(X)$ consideremos o número $\langle p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_m} \cdot f^*(\alpha), \mu \rangle \in \mathbb{Z}$ que é o número de Pontryagin do par (K,f) , associado à partição e à classe α .

Mostra-se (Ver [4]) que se o par (K,f) borda, isto é, $[K,f] = 0$ em $\Omega_k(X)$, então todos os seus números de

Pontryagin e de Whitney se anulam. Logo estes números dependem somente de $[K, f]$. A recíproca em geral não é verdadeira. Mas apresentaremos abaixo um teorema que mostra que, em certas condições, o anulamento dos números de Whitney e de Pontryagin é suficiente para (K, f) bordar. Baseado no teorema 17.5 de [4] podemos demonstrar o seguinte resultado:

1.7. Teorema:

Seja X um CW complexo finito tal que a torção de $H_1(X)$ é constituída de elementos de ordem 2 se $0 < i \leq k$ e 4 divide $k-i$. Se $[K, f] \in \Omega_k(X)$ então $[K, f] = 0$ se, e somente se, seus números de Pontryagin e de Whitney se anulam.

Observação:

Note que se $X = \{p\}$ é um ponto, então X satisfaz as hipóteses do teorema 1.7 para todo k . Logo este teorema generaliza o resultado devido a C.T. Wall que diz que uma variedade compacta e orientada borda se, e somente se, seus números de Stiefel-Whitney e de Pontryagin se anulam.

§ 6. Uma operação para eliminar intersecções de subvariedades

Seja N^n variedade orientada riemaniana e sejam M_1^m e M_2^m duas subvariedades transversais, tais que $K^k = M_1 \cap M_2$ ($k = 2m - n$) seja uma variedade compacta e sejam $\nu K = (E, p, K)$ o fibrado normal de K em N e $\nu(K : M_1) = (E_1, p_1, K)$ e $\nu(K : M_2) = (E_2, p_2, K)$ os fibrados normais de K em

M_1 e M_2 , respectivamente.

Definição:

Dizemos que M_1 e M_2 estão bem situadas se:

- (i) As fibras E_{1x} e E_{2x} são ortogonais $\forall x \in K$
- (ii) Existe uma vizinhança tubular V de raio $\epsilon > 0$, de K , tal que, se

$\overset{\circ}{D}_\epsilon \xrightarrow{\phi} V$ é o difeomorfismo exponencial então

$$\phi(\overset{\circ}{D}_\epsilon \cap E_1) = M_1 \cap V \text{ e } \phi(\overset{\circ}{D}_\epsilon \cap E_2) = M_2 \cap V$$

onde $\overset{\circ}{D}_\epsilon = \{ e \in E : |e| < \epsilon \}$

A condição (ii) diz que em uma vizinhança de K , as subvariedades M_1 e M_2 são formadas por geodésicas normais a K .

Pode-se mostrar que se M_1 e M_2 são subvariedades transversais com $K = M_1 \cap M_2$ compacta, então dado um aberto U contendo K existe um difeomorfismo $h : N \rightarrow N$, isotópico à identidade, tal que:

- (a) $h(x) = x$ se $x \in K$ ou $x \notin U$
- (b) $h(M_1)$ e $h(M_2)$ estão bem situadas

Assumiremos que M_1^m e M_2^m são duas subvariedades orientadas e bem situadas. Então K é orientável. Fixemos uma o-

orientação em K e introduzimos nos fibrados $\nu(K : M_1)$ e $\nu(K : M_2)$ orientações compatíveis com as orientações de K , M_1 e M_2 . Além disso, vamos supor que exista uma equivalência entre os fibrados $\nu(K : M_1)$ e $\nu(K : M_2)$ que inverta orientação.

Vamos mostrar que dado qualquer aberto U contendo K , existe subvariedade M orientada tal que $M - U = (M_1 - U) \cup (M_2 - U)$ e com $M \cap K = \emptyset$, isto é, vamos procurar eliminar em $M_1 \cup M_2$ as auto-intersecções. Consideremos uma vizinhança tubular V de raio $\varepsilon > 0$ satisfazendo (ii) com $V \subset U$.

Sejam os difeomorfismos $\theta : E \rightarrow D_\varepsilon$ dado por

$$\theta(e) = \frac{\varepsilon}{|e|+1} \cdot e \quad \text{e} \quad \psi : E \rightarrow V \quad \text{dado por} \quad \psi = \phi \circ \theta$$

Temos,

$$\psi(E_1) = M_1 \cap V \quad \text{e} \quad \psi(E_2) = M_2 \cap V.$$

Então, a menos do difeomorfismo ψ , podemos supor que $N = E$, $M_1 = E_1$, $M_2 = E_2$, $K = D_0$ (imagem da secção nula de νK) e $U = D_2$.

Seja $T : E_1 \rightarrow E_2$ uma isometria entre os fibrados

$v(K : M_1)$ e $v(K : M_2)$ que inverta orientação. Consideremos

$$S_1 = \{ e \in E_1 : |e| = 1 \}, S_2 = \{ e \in E_2 : |e| = 1 \}$$

$$M'_1 = \{ e \in E_1 : |e| \geq 1 \}, M'_2 = \{ e \in E_2 : |e| \geq 1 \}$$

$$\text{Temos } T(S_1) = S_2, \partial M'_1 = S_1 \text{ e } \partial M'_2 = S_2$$

Seja a subvariedade

$$W = \{ (1-t)e + t T(e) : e \in S_1, 0 \leq t \leq 1 \}$$

cujo bordo é $S_1 \cup S_2$. Consideremos a subvariedade

$$M' = M'_1 \cup W \cup M'_2$$

que deixa de ser diferenciável nos pontos de $S_1 \cup S_2$. Mostremos como podemos suavizá-la. Consideremos o mergulho $f : S_1 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow E$ definido por $f(e, \lambda, t) = (1-t)\lambda e + t\lambda T(e)$

Observemos que

$$f(S_1 \times (0, \infty) \times 0) = E_1 - D_0$$

$$f(S_1 \times (0, \infty) \times 1) = E_2 - D_0, f(S_1 \times 1 \times \mathbb{R}) = W$$

Seja C uma curva diferenciável no $\mathbb{R}^2$, conforme indica a figura abaixo. Fixaremos esta curva para todas as construções deste tipo.

Basta tomar $M = f(S_1 \times C)$ e temos a subvariedade diferenciável nas condições que pretendíamos.

Usaremos a notação $M_1 \circ M_2$ para a subvariedade M obtida por este processo, embora M dependa da vizinhança tubular V e da isometria T .

Daremos abaixo algumas relações entre $M_1 \circ M_2$, M_1 e M_2 , de fácil verificação, descritas através de invariantes algébricos, no caso em que M_1 e M_2 são compactas.

Sejam $i_1 : M_1 \rightarrow N$, $i_2 : M_2 \rightarrow N$, $i : M_1 \circ M_2 \rightarrow N$ as inclusões.

Então em $\Omega_m(N)$ teremos

$$[M_1, i_1] + [M_2, i_2] = [M_1 \circ M_2, i].$$

Se $\mu_1 \in H_m(M_1)$, $\mu_2 \in H_m(M_2)$ e $\mu \in H_m(M_1 \circ M_2)$

são as classes fundamentais, então

$$i_{1*}(\mu_1) + i_{2*}(\mu_2) = i_*(\mu) \quad \text{em } H_m(N).$$

Isto mostra que a classe de bordismo e a classe de homologia associada a $M_1 \circ M_2$ não depende da vizinhança tubular e da isometria empregadas para construí-la.

Vamos continuar supondo que M_1 e M_2 são compactas.

Sejam $T, G : E_1 \times I \rightarrow E_2$ duas isometrias invertendo as orientações de $\nu(K : M_1)$ e $\nu(K : M_2)$.

Vamos supor que exista uma homotopia $H : E_1 \times I \rightarrow E_2$ com $H_0 = T$, $H_1 = G$ e tal que, para cada t , H_t é uma isometria. (A homotopia sempre existe se $\dim K = k = 0$).

Mantendo as notações, consideremos M_T, M'_T, M_G, M'_G as subvariedades de E construídas com as isometrias T e G , respectivamente.

Seja a subvariedade P' de $E \times I$ dada por

$$P' = M'_1 \times I \cup M'_2 \times I \cup \{ ((1-t)e + t H(e, \lambda), \lambda) : e \in S_1, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

Observemos que P' é orientada e

$$\partial P' = M'_T \times 0 \cup (-M'_G \times 1)$$

A subvariedade P' pode ser suavizada e podemos obter P diferenciável tal que $\partial P = M_T \times 0 \cup -M_G \times 1$.

Isto mostra que se $M_1 \circ_T M_2$ e $M_1 \circ_G M_2$ são as subvariedades de N construídas com as isometrias T e G , então existe uma subvariedade orientada, compacta, $P \subset N \times I$ tal que

$$\partial P = M_1 \circ_T M_2 \cup -M_1 \circ_G M_2$$

$$(M_1 \circ_T M_2 \text{ e } M_1 \circ_G M_2$$

são L-equivalentes (Ver capítulo II)).

Observação:

Usaremos o símbolo $v(K : M_1) \approx -v(K : M_2)$ para indicar que existe uma equivalência entre os dois fibrados que inverte orientação.

Se M_1^m e M_2^m são orientadas e bem situadas podemos não ter $v(K : M_1) \approx -v(K : M_2)$. Mas se $n = 2m$ ou $n = 2m-1$ então teremos $v(K : M_1) \approx -v(K : M_2)$ pois, neste caso, os dois fibrados são triviais.

Portanto, se M_1 e M_2 são orientadas e bem situadas com $n = 2m$ ou $n = 2m-1$ podemos realizar a operação $M_1 \circ M_2$. Porém, destaquemos a seguinte situação:

Exemplo:

Sejam duas subvariedades M_1^4 e M_2^4 compactas, orientadas e bem situadas, de $CP(3)$, que representam o gerador $\alpha \in H_4(CP(3)) \approx \mathbb{Z}$.

Mostremos que não teremos $v(K : M_1) \approx -v(K : M_2)$.

Consideremos a aplicação

$f : H_4(\mathbb{CP}(3)) \rightarrow \Omega_4$ definida por

$f(\beta) = [M]$ onde M é uma subvariedade que representa β .

Esta aplicação é bem definida e não é um homomorfismo¹

Se existissem M_1 e M_2 representando α , bem situadas e com $v(K : M_1) \approx -v(K : M_2)$ então poderíamos construir $M_1 \circ M_2$ que representaria 2α e com $f(2\alpha) = 2f(\alpha)$. Poderíamos também mostrar que para todo inteiro p , existiria M representando $p\alpha$ e tal que $f(p\alpha) = pf(\alpha)$. Então f seria homomorfismo, o que é absurdo.

§ 7. Espaço de Thom de um fibrado

Seja $\xi = (E, p, X)$ um fibrado vetorial com métrica riemanniana. Consideremos

$$D = \{ e \in E : |e| \leq 1 \} \text{ e } S = \{ e \in E : |e| = 1 \}$$

Os fibrados (D, p, X) e (S, p, X) são chamados "fibrado em disco" e "fibrado em esfera", respectivamente, do fibrado ξ .

Definição:

O espaço de Thom do fibrado ξ é o espaço $M(\xi) = D/S$ que é o espaço topológico obtido de D identificando-se os

¹ Meus agradecimentos ao Janey A. Daccach pela informação.

pontos de S em um ponto. Destacamos em $M(\xi)$ o elemento distinguido ω que corresponde aos pontos de S que foram identificados.

Observação:

Topologicamente, o espaço de Thom de um fibrado independe da métrica riemanniana empregada para construí-lo.

Dados dois fibrados ξ e η e uma aplicação fibrada $\xi \xrightarrow{F} \eta$, então colocando em ξ e η métricas riemannianas convenientes, a aplicação F induz uma aplicação contínua $F : M(\xi) \longrightarrow M(\eta)$.

§ 8. *Aplicações com suporte compacto*

Sejam X espaço topológico e Y espaço topológico com um elemento distinguido $\omega \in Y$.

Definição:

Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação com suporte compacto se existe compacto $K \subset X$ tal que $f(x) = \omega$ se $x \notin K$.

Definição:

Uma *homotopia com suporte compacto*, ou *c-homotopia*, é uma aplicação $h : X \times I \rightarrow Y$ tal que $h(x, t) = \omega$ se $x \notin K$ para algum compacto K . Neste caso dizemos que h_0 e h_1 são *c-homotópicas*.

O símbolo $[X, Y]_c$ denota o conjunto das classes de

c-homotopia de aplicações com suporte compacto.

Dado um grupo G , consideremos $H_C^n(X, G)$ o n -ésimo grupo de cohomologia, com suporte compacto, de X , com coeficientes em G .

$$H_C^n(X, G) = \varinjlim_{K \text{ compacto}} H^n(X, X-K, G)$$

Dada uma aplicação com suporte compacto, $f : X \rightarrow Y$, podemos definir a induzida

$$f^* : H^n(Y, \omega, G) \rightarrow H_C^n(X, G)$$

da seguinte forma:

Seja K compacto tal que $f(x) = \omega$ se $x \notin K$. Podemos considerar f como aplicação

$$f_K : X, X-K \rightarrow Y, \omega \quad \text{que induz}$$

$$f_K^* : H^n(Y, \omega, G) \rightarrow H^n(X, X-K, G)$$

Passando ao limite obtemos

$$f^* : H^n(Y, \omega, G) \rightarrow H_C^n(X, G)$$

É claro que se f e g são c-homotópicas então as induzidas são iguais.

Suponhamos agora que Y é um espaço $n-1$ conexo ($n > 0$), ou seja, $\pi_i(Y) = 0$, $i < n$ ($\pi_n(Y)$ abeliano se $n = 1$)

Do teorema dos coeficientes universais temos

$$H^n(Y, \pi_n(Y)) \sim \text{Hom}(H_n(Y), \pi_n(Y)) \sim \text{Hom}(H_n(Y), H_n(Y)).$$

Seja $U \in H^n(Y, \pi_n(Y))$ o elemento correspondente à identidade $I \in \text{Hom}(H_n(Y), H_n(Y))$, o qual é denominado *classe fundamental do espaço $n-1$ conexo Y* .

Como $H^n(Y, \pi_n(Y)) \approx H^n(Y, \omega, \pi_n(Y))$, podemos considerar U como elemento de $H^n(Y, \omega, \pi_n(Y))$.

Vamos definir agora uma importante aplicação

$$E : [X, Y]_C \rightarrow H_C^n(X, \pi_n(Y))$$

Dado $[f] \in [X, Y]_C$, consideremos a induzida

$$f^* : H^n(Y, \omega, \pi_n(Y)) \rightarrow H_C^n(X, \pi_n(Y))$$

$$\text{Definimos } E([f]) = f^*(U)$$

§ 9. Teoria de obstrução para aplicações com suporte compacto

Neste parágrafo X é um complexo simplicial de dimensão finita e Y é um espaço topológico com elemento distinguido ω .

Consideremos G um grupo. Seja γ o conjunto de todos os subcomplexos finitos de X .

Para cada $K \in \gamma$, $\overline{X-K}$ (fecho) é um subcomplexo de X .

Como γ é cofinal no conjunto dos compactos de X e como para cada $K \in \gamma$ existe $L \in \gamma$ tal que $\overline{X-L} \subset X-K$ então

$$H_C^n(X, G) = \varinjlim_{K \in \gamma} H^n(X, X-K, G) = \varinjlim_{K \in \gamma} H^n(X, \overline{X-K}, G)$$

Seja X^p o p -esqueleto de X e para cada $K \in \gamma$ se

ja $x_K^p = \overline{X-K} \cup X^p$. Assumiremos que Y é p -simples para todo p .

Lema 1:

Seja $f : x_K^p, \overline{X-K} \rightarrow Y, \omega$ uma aplicação contínua onde $K \in \gamma$.

Se $H_c^{p+1}(X, \pi_p(Y)) = 0$ então existem $J \in \gamma$, $K \subset J$, e

$g : x_J^{p+1}, \overline{X-J} \rightarrow Y, \omega$ contínua tal que

$$g(x) = f(x) \text{ se } x \in x_J^{p-1}$$

Prova

A obstrução para a extensão de $f|_{x_K^{p-1}}$ a uma aplicação $g : x_K^{p+1}, \overline{X-K} \rightarrow Y, \omega$ é um elemento de

$$H^{p+1}(X, \overline{X-K}, \pi_p(Y)) ([10]).$$

Como $H_c^{p+1}(X, \pi_p(Y)) = 0$ então existe $J \supset K$, $J \in \gamma$ tal que a obstrução para a extensão de $f|_{x_J^{p-1}}$ a uma aplicação $g : x_J^{p+1}, \overline{X-J} \rightarrow Y, \omega$ se anula.

Lema 2:

Sejam $f, g : X, \overline{X-K} \rightarrow Y, \omega$ onde $K \in \gamma$ e

$$h : x_K^p \times I, \overline{X-K} \times I \rightarrow Y, \omega$$

tal que $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, 1) = g(x)$ se $x \in x_K^p$. Se

$H^{p+1}(X, \pi_{p+1}(Y)) = 0$, então existe $J \in \gamma$, $J \supset K$ e

$k : X_J^{p+1} \times I, \overline{X-J} \times I \rightarrow Y, \omega$ tal que $k(x,t) = h(x,t)$ se $x \in X_J^{p-1}$ e $k(x,0) = f(x), k(x,1) = g(x)$ se $x \in X_J^{p+1}$

Prova

A obstrução para a extensão de $h|_{X_K^{p-1} \times I}$ a uma aplicação $k : X_K^{p+1} \times I, \overline{X-K} \times I \rightarrow Y, \omega$ tal que

$k(x,0) = f(x), k(x,1) = g(x)$ $x \in X_K^{p+1}$, é um elemento de $H^{p+1}(X, \overline{X-K}, \pi_{p+1}(Y))$ ([10]).

Como $H_C^{p+1}(X, \pi_{p+1}(Y)) = 0$ então existe $J \supset K, J \in \gamma$ tal que a obstrução para a extensão de $h|_{X_J^{p-1} \times I}$ a uma aplicação $k : X_J^{p+1} \times I, \overline{X-J} \times I \rightarrow Y, \omega$ tal que $k(x,0) = f(x), k(x,1) = g(x)$ se $x \in X_J^{p+1}$, se anula.

Para os dois teoremas a seguir, vamos assumir que Y é um espaço $n-1$ conexo ($n \geq 1$) ($\pi_1(Y)$ abeliano se $n = 1$).

Seja $U \in H^n(Y, \pi_n(Y))$ classe fundamental e

$E : [X, Y]_C \rightarrow H_C^n(X, \pi_n(Y))$ a aplicação definida no parágrafo anterior.

1.8. Teorema:

Se $H_C^{p+1}(X, \pi_p(Y)) = 0$ para $p > n$ então E é sobrejetora.

Prova

Seja $\alpha \in H_C^n(X, \pi_n(Y))$. Existem $K \in \gamma$ e $\alpha_K \in H^n(X, \overline{X-K}, \pi_n(Y))$ um elemento que no limite representa α .

Da teoria de obstrução clássica ([10]) existe aplicação $f : X_K^{n+1}, \overline{X-K} \rightarrow Y, \omega$ tal que $f^*(U) = \alpha_K$. Como $H_C^{p+1}(X, \pi_p(Y)) = 0$, $p > n$ e X tem dimensão finita, aplicando sucessivamente o lema 1, podemos conseguir $J \in \gamma$, $K \subset J$ e uma aplicação $g : X, \overline{X-J} \rightarrow Y, \omega$ tal que $g(x) = f(x)$ se $x \in X_J^n$. Como g é uma aplicação com suporte compacto o teorema está demonstrado, pois $E([g]) = g^*(U) = \alpha$.

1.9. Teorema:

Se $H_C^p(X, \pi_p(Y)) = 0$, $p > n$ então E é injetora.

Prova

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações com suporte compacto tais que $f^*(U) = g^*(U)$ e mostremos que f e g são c -homotópicas.

Dado $K \in \gamma$ tal que $f(x) = g(x)$ se $x \notin K$, consideremos $f_K, g_K : X, \overline{X-K} \rightarrow Y, \omega$ as aplicações tais que $f_K(x) = f(x)$ e $g_K(x) = g(x)$.

Como $H_C^n(X, \pi_n(Y)) = \varinjlim_{K \in \gamma} H^n(X, \overline{X-K}, \pi_n(Y))$ e $f^*(U) = g^*(U)$, então existe $K \in \gamma$ com $f(x) = g(x)$ se $x \notin K$ tal que $f_K^*(U) = g_K^*(U)$.

Da teoria de obstrução clássica existe aplicação $h : X_K^n \times I, \overline{X-K} \times I \rightarrow Y, \omega$ tal que $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, 1) = g(x)$ se $x \in X_K^n$. Aplicando sucessivamente o lema 2, podemos conseguir uma aplicação $k : X \times I, \overline{X-J} \times I \rightarrow Y, \omega$, $J \in \gamma$, $K \subset J$ tal que $k(x, 0) = f(x)$, $k(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$.

Então o teorema está demonstrado, pois $K : X \times I \rightarrow Y, \omega$ é uma c -homotopia entre f e g .

CAPÍTULO II

L-EQUIVALENCIA

O conceito de L-equivalência é devido a Thom [15].

Seja N^n variedade orientada e k inteiro com $0 \leq k < n$.

Definição:

Dizemos que duas subvariedades orientadas, compactas, K_1^k e K_2^k de N são L-equivalentes, se existir uma subvariedade orientada, compacta, $W \subset N \times I$ tal que $\partial W = K_1 \times 0 \cup -K_2 \times 1$.

Pode-se mostrar que a relação de L-equivalência é uma relação de equivalência no conjunto das subvariedades compactas e orientadas de N .

Anotaremos por $L_k(N)$ o conjunto das classes de L-equivalência. O símbolo $[K]$ denota o elemento de $L_k(N)$ representado pela subvariedade K .

Existe uma classe distingüida em $L_k(N)$ que chamaremos de "classe nula" ou "zero", constituída de todas as subvariedades K^k tais que existe subvariedade $W \subset N \times I$ tal que $\partial W = K \times 0$.

Seja K^k variedade compacta e orientada e $f, g : K \rightarrow N$ dois mergulhos isotópicos. Consideremos $h : K \times I \rightarrow N$ uma isotopia tal que $h_0 = f$ e $h_1 = g$ e seja $W = \{(h(x, t), t) \in N \times I : x \in K \text{ e } t \in I\}$.

Temos $\partial W = f(K) \times 0 \cup -g(K) \times 1$ e portanto, $f(K)$ e $g(K)$ são L-equivalentes.

§ 1. O espaço de Thom $MSO(n)$

Seja a grassmaniana $\tilde{G}_{n,p}$, que é o espaço topológico constituído de todos os subespaços n -dimensionais orientados do R^p e $\tilde{G}_n = BSO(n)$ o espaço topológico constituído de todos os subespaços n -dimensionais do $R^\infty = \varinjlim R^p$.

$$\text{Temos } \tilde{G}_n = \varinjlim \tilde{G}_{n,p}$$

Consideremos o fibrado $\tilde{\gamma}_p^n = (E_{n,p}, \pi, \tilde{G}_{n,p})$ onde $E_{n,p} = \{(H, v) : H \in \tilde{G}_{n,p} \text{ e } v \in H\}$ e o fibrado $\tilde{\gamma}_n = (E_n, \pi, \tilde{G}_n)$ onde $E_n = \{(H, v) : H \in \tilde{G}_n \text{ e } v \in H\}$ que é o fibrado classificante para os fibrados orientados de posto n .

Definição:

O espaço de Thom $MSO(n)$, é o espaço de Thom do fibrado $\tilde{\gamma}_p^n$ (Ver capítulo 1, § 7).

Se $M(\tilde{\gamma}_p^n)$ é o espaço de Thom do fibrado $\tilde{\gamma}_p^n$ então

$$MSO(n) = \varinjlim M(\tilde{\gamma}_p^n)$$

O espaço $MSO(n)$ é um complexo CW tal que, para todo q , o q -esqueleto de $MSO(n)$ está contido em $M(\tilde{\gamma}_p^n)$ para p suficientemente grande.

Logo, se X é um CW complexo de dimensão q e $f : X \rightarrow MSO(n)$ é uma aplicação contínua, então existem p e $g : X \rightarrow M(\tilde{\gamma}_p^n)$ com g homotópica a f .

§ 2. Grupos de homotopia dos espaços $MSO(n)$

Os resultados sobre os grupos de homotopia dos espaços $MSO(n)$ apresentados nos teoremas abaixo, foram conseguidos por Thom em [15].

2.1. Teorema:

$$\pi_p(MSO(n)) = 0 \quad \text{se } p < n \quad \text{e} \quad \pi_n(MSO(n)) \approx \mathbb{Z}$$

2.2. Teorema:

$$\pi_{p+n}(MSO(n)) \approx \Omega_p \quad \text{se } p < n$$

2.3. Teorema:

$$\pi_{p+n}(MSO(n)) = 0 \quad \text{se } p = 1, 2, 3$$

Para pequenos valores de n temos [15]

$$\begin{aligned} \pi_p(MSO(1)) &= \begin{cases} 0 & p \neq 1 \\ \mathbb{Z} & p = 1 \end{cases} & \pi_p(MSO(2)) &= \begin{cases} 0 & p \neq 2 \\ \mathbb{Z} & p = 2 \end{cases} \\ \pi_p(MSO(3)) &= \begin{cases} 0 & p < 3 \\ \mathbb{Z} & p = 3 \text{ ou } p = 7 \\ 0 & 3 < p < 7 \end{cases} & \pi_p(MSO(4)) &= \begin{cases} 0 & p < 4 \\ \mathbb{Z} & p = 4 \text{ ou } p = 8 \\ 0 & 4 < p < 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Observação:

1) No capítulo III mostraremos que $\pi_{2n}(MSO(n)) \approx \Omega_n$; assim, no teorema 2.2, teremos o isomorfismo inclusive para $p = n$.

2) Para informações sobre a homotopia racional dos espaços de Thom, isto é, os grupos $\pi_p(\text{MSO}(n)) \otimes \mathbb{Q}$ ver [3].

§ 3. O teorema de Thom para variedades não compactas

Thom mostrou em [15] que se N^n é uma variedade orientada compacta, então existe uma bijeção

$$[N, \text{MSO}(n-k)] \xrightarrow{L} L_k(N)$$

Com o auxílio do conceito de homotopia com suporte compacto (Ver capítulo I, § 8) apresentaremos uma formulação deste teorema para variedades N não compactas.

Consideremos em $\text{MSO}(n-k)$ o elemento distinguido ω (Ver capítulo I, § 7).

2.4. Teorema:

Seja N^n variedade orientada. Existe uma bijeção

$$[N, \text{MSO}(n-k)]_c \xrightarrow{L} L_k(N)$$

Prova

Seja $f : N \rightarrow \text{MSO}(n-k)$ uma aplicação com suporte compacto.

Seja $W \subset N$ uma subvariedade compacta, n -dimensional e com bordo tal que $f(x) = \omega$ se $x \notin W$.

Consideremos a aplicação $f_W : W \rightarrow \text{MSO}(n-k)$ tal que $f_W(x) = f(x) \quad \forall x \in W$.

Existe $g : W \rightarrow M(\tilde{\gamma}_p^{n-k})$ (p suficientemente grande) que é homotópica a f_W rel. ∂W .

Logo, a menos de uma c -homotopia, podemos supor que $f(N) \subset M(\tilde{\gamma}_p^{n-k})$ para p suficientemente grande.

Podemos também supor, a menos de uma c -homotopia, que f seja diferenciável em $N - f^{-1}(\omega)$ e que f seja transversal à subvariedade $\tilde{G}_{n-k,p} \subset M(\tilde{\gamma}_p^{n-k}) - \omega$.

Como a codimensão de $\tilde{G}_{n-k,p}$ em $M(\tilde{\gamma}_p^{n-k}) - \omega$ é $n-k$ e f tem suporte compacto, então $K = f^{-1}(\tilde{G}_{n-k,p})$ é uma subvariedade compacta e orientada de N de dimensão k .

Fazemos $L([f]) = K$

Pode-se mostrar que L é bem definida e injetora.

Mostremos que L é sobrejetora. Seja K^k subvariedade compacta e orientada de N e νK o fibrado normal. Consideremos (D, π, K) e (S, π, K) os fibrados em disco e em esfera do fibrado νK e seja $M(\nu K)$ o espaço de Thom de νK .

Podemos tomar uma vizinhança tubular V de K e um difeomorfismo $\phi : \bar{V} \rightarrow D$ com $\phi(\partial \bar{V}) = S$. O difeomorfismo ϕ induz uma aplicação $\phi' : N \rightarrow M(\nu K)$ que é constante em $N - V$. Seja $G : \nu K \rightarrow \tilde{\gamma}^{n-k}$ uma aplicação fibrada. Esta aplicação induz

$$G' : M(\nu K) \rightarrow M(\tilde{\gamma}^{n-k}) = MSO(n-k).$$

Basta considerar a aplicação $f = G' \circ \phi'$ e temos uma aplicação com suporte compacto tal que $L([f]) = [K]$.

Definição:

Seja $f : N \rightarrow MSO(n-k)$ uma aplicação com suporte compacto. Se existir p tal que $f(N) \subset M(\tilde{\gamma}_p^{n-k})$ e tal que $f : N \rightarrow M(\tilde{\gamma}_p^{n-k})$ seja diferenciável em $N-f^{-1}(\omega)$ e transversal a $\tilde{G}_{n-k,p}$ então diremos simplesmente que f é transversal a $\tilde{G}_{n-k}$.

Se $K = f^{-1}(\tilde{G}_{n-k})$ então $L([f]) = [K]$.

É claro que dada uma aplicação $f : N \rightarrow MSO(n-k)$ com suporte compacto sempre existe g , c -homotópica a f , tal que g seja transversal a $\tilde{G}_{n-k}$.

Para uma variedade orientada N^n , consideremos a aplicação

$$L_k(N) \xrightarrow{\alpha} H_k(N) \text{ definida por } \alpha([K]) = i_*(\mu_K)$$

onde $\mu_K \in H_k(K)$ é a classe fundamental de K e $i : K \rightarrow N$ é a inclusão.

A imagem de α é constituída de todas as classes de homologia que são representadas por subvariedades.

Como $MSO(n-k)$ é $n-k-1$ conexo (Teorema 2.1) e $\pi_{n-k}(MSO(n-k)) \approx \mathbb{Z}$ podemos definir a aplicação

$$[N, MSO(n-k)]_C \xrightarrow{E} H_C^{n-k}(N) \text{ com } E([f]) = f^*(U)$$

onde $U \in H^{n-k}(MSO(n-k), \omega)$ é a classe fundamental (Ver capítulo I, § 8).

Seja $D : H_C^{n-k}(N) \rightarrow H_k(N)$ a dualidade de Poincaré.

2.5. Teorema:

O diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 L_k(N) & \xrightarrow{\alpha} & H_k(N) \\
 \uparrow L & & \uparrow D \\
 [N, MSO(n-k)]_C & \xrightarrow{E} & H_C^{n-k}(N)
 \end{array}$$

Prova

Thom mostrou que este teorema vale para N compacto [15]. Usaremos este resultado na prova para N não compacta.

Seja $f : N \rightarrow MSO(n-k)$ uma aplicação com suporte compacto transversal a $\tilde{G}_{n-k}$.

Sejam $K = f^{-1}(\tilde{G}_{n-k})$, $\mu \in H_k(K)$ classe fundamental e $i : K \rightarrow N$ inclusão.

Seja γ o conjunto de todas as subvariedades W compactas, com bordo e de dimensão n de N tais que $f(x) = \omega$ se $x \notin W$.

Como γ é cofinal no conjunto dos compactos de N , temos

$$H_C^{n-k}(N) = \varinjlim_{W \in \gamma} H^{n-k}(N, N-W)$$

Para cada $W \in \gamma$ seja $2W$ o dobro de W ($2W$ é a variedade obtida pela colagem de duas cópias W_1, W_2 de W coladas pelo bordo. Podemos supor $W \subset 2W$ identificando W com W_1).

Consideremos as aplicações $f_W : N, N-W \rightarrow MSO(n-k), \omega$

$f_1 : W, \partial W \rightarrow MSO(n-k), \omega$ e $f_2 : 2W \rightarrow MSO(n-k)$

dadas por

$$f_W(x) = f(x) \quad \forall x \in W, \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in W \\ \omega & \text{se } x \notin W \end{cases}$$

Sejam $\xi_W \in H_n(N, N-W)$, $\xi' \in H_n(W, \partial W)$ e

$\xi'' \in H_n(2W, 2W-W)$ as classes fundamentais

Por excisão e deformação temos os isomorfismos

$$H^{n-k}(N, N-W) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}(W, \partial W) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}(2W, 2W-W)$$

Consideremos o diagrama comutativo (Ver [5]).

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-k}(N, N-W) & \xrightarrow{\sim} & H^{n-k}(W, \partial W) & \xrightarrow{\sim} & H^{n-k}(2W, 2W-W) & \longrightarrow & H^{n-k}(2W) \\ \xi_W^n \downarrow & & \xi'^n \downarrow & & \xi''^n \downarrow & \searrow D & \\ H_k(N) & \longleftarrow & H_k(W) & \xrightarrow{\text{mono}} & H_k(2W) & & \end{array}$$

onde D é a dualidade de Poincaré.

Observemos que $K = f_2^{-1}(\tilde{G}_{n-k})$. Como o teorema vale para variedades compactas, temos $D(f_2^*(U)) = i_*(\mu)$. Logo $\xi' \cap f_1^*(U) = i_*(\mu)$ e portanto $\xi_W \cap f_W^*(U) = i_*(\mu)$. Passando ao limite teremos $Dof^*(U) = i_*(\mu) = \alpha([K]) = \alpha \circ L([f])$ donde $DoE = \alpha \circ L$.

§ 4. *L-equivalência nas esferas* S^n

Consideremos a esfera S^n e a aplicação

$$L_k(S^n) \xrightarrow{\phi} \Omega_k$$

que a cada classe $[K] \in L_k(S^n)$ associa a classe de bordismo de K .

Podemos definir uma aplicação $\pi_n(MS0(n-k)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_k$ dada pela composição das aplicações

$$\pi_n(MS0(n-k)) = [S^n, MS0(n-k)] \xrightarrow{L} L_k(S^n) \xrightarrow{\phi} \Omega_k$$

A aplicação ϕ' é um homomorfismo de grupos. Thom mostrou que se $n \geq 2k + 1$ então ϕ' é um isomorfismo. Mostraremos (capítulo III) que se $n = 2k$, ϕ' ainda é um isomorfismo.

Sabe-se que uma variedade orientada, compacta K^k mergulha no R^{2k-1} se $k \neq 4$ ([11]). Para $k = 4$ toda variedade compacta e orientada K^4 é bordante a uma variedade que mergulha no R^7 , pois o plano projetivo complexo $CP(2)$ mergulha no R^7 ([12]) e $[CP(2)]$ gera o grupo Ω_4 .

Logo se $n = 2k-1$, $\phi' : \pi_n(MS0(n-k)) \longrightarrow \Omega_k$ é epimorfismo para todo k .

Como $\pi_7(MS0(3)) \approx \mathbb{Z}$ e $\Omega_4 \approx \mathbb{Z}$ então

$\phi' : \pi_7(MS0(3)) \longrightarrow \Omega_4$ é isomorfismo.

Exemplos:

1) $\phi' : \pi_6(MSO(2)) \longrightarrow \Omega_4$ não é epimorfismo pois

$$\pi_6(MSO(2)) = 0 \quad \text{e} \quad \Omega_4 \approx \mathbb{Z}$$

2) $\phi' : \pi_{13}(MSO(5)) \longrightarrow \Omega_8$ não é monomorfismo pois

$$\pi_{13}(MSO(5)) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \Omega_8 \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$$

(ver [3]).

§ 5. *Aplicações da teoria de obstrução*

Em todo este parágrafo N^n é uma variedade orientada conexa.

Faremos neste parágrafo algumas aplicações da teoria de obstrução para aplicações com suporte compacto, desenvolvida no (capítulo I, § 9).

2.6. Teorema:

Se $n = k+1$, $n = k+2$ ou $k = 1, 2, 3$ então duas subvariedades compactas e orientadas K_1^k e K_2^k são L-equivalentes em N se, e somente se, são homólogas em N .

Prova:

Em qualquer destes casos teremos

$H_C^p(N, \pi_p(MSO(n-k))) = 0$ se $p > n-k$ (ver capítulo II, § 2); logo E é injetora (Teorema 1.9) e, portanto, α é injetora (Teorema 2.5).

Observação:

Estes resultados foram demonstrados por Thom para N compacta

Lema 1:

Seja p inteiro tal que $H_i(N) = 0$ se $0 < i \leq p$.
Para todo grupo G , finitamente gerado teremos

$$H_C^{n-i}(N, G) = 0 \text{ se } 0 < i \leq p.$$

Prova:

Do teorema dos coeficientes universais, temos

$$H_i(N, G) = 0 \text{ se } 0 < i \leq p$$

Como $H_i(N, G) \sim H_C^{n-i}(N, G)$ (segue da dualidade de Poincaré) temos $H_C^{n-i}(N, G) = 0$ se $0 < i \leq p$.

Lema 2:

Seja D um disco fechado n -dimensional mergulhado em N . Então

$$H_C^p(N - \overset{\circ}{D}, G) \sim H_C^p(N, G) \text{ se } p < n \text{ e } H_C^n(N - \overset{\circ}{D}, G) = 0$$

para todo grupo G .

Prova:

Para a prova usaremos a notação $H^p(X, A) = H^p(X, A, G)$

Seja γ o conjunto de todas as subvariedades W , n -dimensionais, orientadas, compactas, conexas e com bordo,

de N , tal que $D \subset \overset{\circ}{W}$. Temos

$$H_C^p(N) = \varinjlim_{W \in \gamma} H^p(N, N - \overset{\circ}{W}) \quad \text{e} \quad H_C^p(N - \overset{\circ}{D}) = \varinjlim_{W \in \gamma} H^p(N - \overset{\circ}{D}, N - \overset{\circ}{W})$$

Para cada $W \in \gamma$ consideremos as excisões

$$H^p(W, \partial W) \approx H^p(N, N - \overset{\circ}{W}) \quad \text{e} \quad H^p(W - \overset{\circ}{D}, \partial W) \approx H^p(N - \overset{\circ}{D}, N - \overset{\circ}{W})$$

Se $p < n$ a inclusão $W - \overset{\circ}{D}, \partial W \rightarrow W, \partial W$ induz isomorfismo

$$H^p(W - \overset{\circ}{D}, \partial W) \approx H^p(W, \partial W)$$

$$\text{Logo } H_C^p(N - \overset{\circ}{D}) \approx H_C^p(N)$$

Para $p = n$ temos $H^n(W - \overset{\circ}{D}, \partial W) = 0$ pois ∂W não é o bordo completo de $W - \overset{\circ}{D}$ e, portanto, $H_C^n(N - \overset{\circ}{D}) = 0$

Observação:

O lema é falso se trocarmos $\overset{\circ}{D}$ por D . Por exemplo, se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um disco fechado temos $H_C^2(\mathbb{R}^2 - D) \approx H_0(\mathbb{R}^2 - D) \approx \mathbb{Z}$.

2.7. Teorema:

Sejam inteiros n, k tais que

$$\pi_{n-1}(MSO(n-k)) \xrightarrow{\phi^!} \Omega_{k-1} \quad \text{é monomorfismo.}$$

Se $H_i(N) = 0$, $0 < i < k-4$, então toda classe de homologia $\mu \in H_k(N)$ é representada por subvariedade, isto é, α é sobrejetora.

Prova:

Basta mostrar que E é sobrejetora (Teorema 2.5).

Da hipótese sobre N e dos lema 1 e Teorema 2.3

temos

$$H_C^p(N, \pi_{p-1}(MSO(n-k))) = 0 \quad \text{se } n-k+1 < p < n.$$

Seja $\beta \in H_C^{n-k}(N)$. Consideremos um disco fechado, n -dimensional, D em N e seja $S = \partial D$. Pelo lema 2 temos

$$H_C^p(N-\overset{\circ}{D}, \pi_{p-1}(MSO(n-k))) \approx H_C^p(N-\pi_{p-1}(MSO(n-k))) = 0 \quad \text{se } p < n.$$

e $H_C^p(N-\overset{\circ}{D}, \pi_{p-1}(MSO(n-k))) = 0$ se $n \leq p$. Se $i : N-\overset{\circ}{D} \rightarrow N$ é a inclusão, seja $\bar{\beta} = i^*(\beta)$. Não existe obstrução para a existência de uma aplicação $g : N-\overset{\circ}{D} \rightarrow MSO(n-k)$ com suporte compacto, tal que $g^*(U) = \bar{\beta}$ (Teorema 1.8). Podemos supor que g e $h|_S$ sejam transversais a $\tilde{G}_{n-k}$. Seja a subvariedade $M = g^{-1}(\tilde{G}_{n-k})$. Temos $\partial M = h^{-1}(\tilde{G}_{n-k}) = M \cap S$.

A aplicação determina um elemento $[h] \in \pi_{n-1}(MSO(n-k))$ tal que $\phi'([h]) = [\partial M] = 0$ em Ω_{k-1} . Como ϕ' é injetora então h é homotópica à constante e, portanto, h se estende a D . Logo g se estende a uma aplicação f e o teorema está demonstrado.

Corolário 1:

Toda classe de homologia de $H_k(N)$ é representada por subvariedade se $k \leq 5$.

Observação:

O corolário 1 foi demonstrado por Thom para N compacta.

Corolário 2:

Se $n = 2k-1$ e $H_i(N) = 0$, $0 < i < k-4$, então toda classe de homologia de $H_k(N)$ é representada por subvariedades.

Prova:

A aplicação $\pi_{2k-2}(MSO(k-1)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_{k-1}$ é isomorfismo (Prova no capítulo III).

2.8. Teorema:

Sejam inteiros n, k tais que $\pi_n(MSO(n-k)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_k$ é monomorfismo.

Se $H_i(N) = 0$, $0 < i \leq k-4$, então duas subvariedades K_0^k e K_1^k são L -equivalentes se, e somente se, são homólogas e bordantes, ou seja, a aplicação

$$\beta : L_k(N) \longrightarrow H_k(N) \oplus \Omega_k \text{ dada por } \beta([K]) = (\alpha([K]), [K]) \text{ é}$$

injetora.

Prova:

Sejam K_0 e K_1 duas subvariedades homólogas e bordantes e sejam $f_0, f_1 : N \rightarrow MSO(n-k)$ duas aplicações tais que $L([f_0]) = [K_0]$ e $L([f_1]) = [K_1]$ (Todas as aplicações que surgirem durante a prova serão consideradas transversais a $\tilde{G}_{n-k}$).

Seja D um disco fechado em N , $S = \partial D$ e g_0, g_1 as restrições de f_0 e f_1 a $N - \overset{\circ}{D}$. Das hipóteses sobre N e

dos Lema 1, Lema 2 e Teorema 2.3 temos

$$H_C^p(N-\overset{\circ}{D}, \pi_p(MS0(n-k))) = 0 \text{ se } n-k < p$$

Como K_0 e K_1 são homólogas, então $f_0^*(U) = f_1^*(U)$; logo $g_0^*(U) = g_1^*(U)$ e, portanto, não existe obstrução para uma c-homotopia definida em $(N-\overset{\circ}{D}) \times I$ entre g_0 e g_1 , (Teorema 1.9). Podemos supor então, a menos de uma c-homotopia de f_0 e f_1 , que $g_0 = g_1$; logo $K_0 \cap (N-\overset{\circ}{D}) = K_1 \cap (N-\overset{\circ}{D})$.

Seja $g = g_0 = g_1$. Consideremos a esfera n-dimensional $S_1 = (S \times I) \cup (D \times 0) \cup (D \times 1)$ e a aplicação

$h : S_1 \rightarrow MS0(n-k)$ dada por

$$h(x,t) = \begin{cases} g(x) & x \in S \text{ e } \forall t \\ f_0(x) & x \in D \text{ e } t = 0 \\ f_1(x) & x \in D \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

Observemos que $h^{-1}(\tilde{G}_{n-k}) = (K_0 \cap S) \times I \cup (K_0 \cap D) \times 0 \cup (K_1 \cap D) \times 1$ é uma subvariedade de S_1 que é bordante a $K_0 \cap K_1$ e, como K_0 e K_1 são bordantes, então $h^{-1}(\tilde{G}_{n-k})$ borda.

A aplicação h determina um elemento em $\pi_n(MS0(n-k))$ e $\phi'([h]) = [h^{-1}(\tilde{G}_{n-k})] = 0$ em Ω_k ; logo, como ϕ' é injetora, segue que h é homotópica a constante e, portanto, pode ser estendida a $D \times I$. Logo f_0 e f_1 são c-homotópicas e, portanto, K_0 e K_1 são L-equivalentes.

Corolário:

Duas subvariedades, compactas e orientadas, de dimensão 4, de N , são L -equivalentes se, e somente se, são homológicas e bordantes.

Prova:

Basta notar que para todo $n > 4$, $\pi_n(MSO(n-4)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_4$ é monomorfismo. (Ver os resultados dos parágrafos 2 e 4 deste capítulo).

2.9. Teorema:

Se $n = 2k-1$, $\pi_n(MSO(n-k)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_k$ é monomorfismo e $H_i(N) = 0$ se $0 < i \leq k-4$, então a aplicação

$$\beta : L_k(N) \rightarrow H_k(N) \oplus \Omega_k \text{ dada por } \beta([K]) = (\alpha([K]), [K])$$

é uma bijeção.

Prova:

Do teorema 2.8 segue que β é injetora. Mostremos que β é sobrejetora.

Do corolário 2 do teorema 2.7, temos que toda classe de homologia de $H_k(N)$ é representada por subvariedade. Sabemos também que toda variedade orientada, compacta K^k é bordante a uma variedade que mergulha no R^{2k-1} .

Sejam $x+y \in H_k(N) \oplus \Omega_k$ e $K \subset N$ tal que $\alpha([K]) = x$ e seja $D \subset N$ um disco aberto de dimensão n tal que $D \cap K = \emptyset$.

Sejam $S \subset D$ tal que $[S] = y$ e $K_1 \subset D$ tal que $S \cap K_1 = \emptyset$ e $[K_1] = -[K]$ em Ω_k . Basta tomar a subvariedade

$P = K \cup K_1 \cup S$ e teremos $\beta([S]) = x+y$.

Corolário:

Se $n = 7$ e $k = 4$ a aplicação β do teorema 2.9 é uma bijeção.

CAPÍTULO III

L-EQUIVALÊNCIA E BORDISMO

§ 1. Uma relação entre bordismo e L-equivalência

Seja N^n variedade orientada e $\Omega_k(N)$ o k -ésimo grupo de bordismo de N .

Existe uma aplicação natural

$$L_k(N) \xrightarrow{\phi} \Omega_k(N) \text{ dada por}$$

$$\phi([K]) = [K, i] \text{ onde } i : K \rightarrow N \text{ é a inclusão}$$

Observação:

A imagem de ϕ são todas as classes de bordismo que são representadas por mergulhos.

Se $n > 2k$ temos, como consequência dos teoremas do mergulho e imersão de Whitney, que ϕ é uma bijeção. Trivialmente ϕ é sobrejetora, pois toda aplicação contínua é homotópica a um mergulho.

Mostremos que ϕ é injetora. Sejam $[K_1], [K_2] \in L_k(N)$ tais que $\phi([K_1]) = \phi([K_2])$. Então existe variedade compacta e orientada W e uma aplicação $F : W \rightarrow N$ tais que $\partial W = K_1 \cup -K_2$ e $F(x) = x$ se $x \in K_1 \cup K_2$. Podemos supor que F seja diferenciável e que $F|_V$ seja um mergulho em uma vizinhança V de $K_1 \cup K_2$. Consideremos uma aplicação diferenciável $\theta : W \rightarrow [0, 1]$ tal que $\theta(x) = 0$ se $x \in K_1$, $\theta(x) = 1$ se $x \in K_2$ e $0 < \theta(x) < 1$ se $x \notin K_1 \cup K_2$.

Consideremos a aplicação $G : W \rightarrow N \times I$ dada por $G(x) = (F(x), \theta(x))$ e notemos que $G|_V$ é um mergulho. Se $n > 2k+1$

podemos aproximar G por um mergulho G_1 tal que $G_1|V = G|V$ e teremos $\partial G_1(W) = K_1 \times 0 \cup -K_2 \times 0$. Se $n = 2K+1$ podemos aproximar G por uma imersão G_1 tal que $G_1|V = G|V$ e tal que $G_1(W-V) \cap (K_1 \cup K_2) = \emptyset$. Além disso podemos supor que G_1 satisfaça:

1) Existe somente um número finito de pontos $z_1, \dots, z_p$ de $N \times I$ tais que $\# G_1^{-1}(z_i) > 1$

2) Para cada i $\# G_1^{-1}(z_i) = 2$

3) Se $G_1^{-1}(z_i) = \{x_i, y_i\}$ então

$$G_1'(x_i)(T_{x_i}W) + G_1'(y_i)(T_{y_i}W) = T_{z_i}N \times I$$

Em cada ponto z_i da subvariedade imersa $G_1(W)$ podemos eliminar a auto-intersecção (Ver capítulo I, § 6) e obter uma subvariedade $W' \subset N \times I$ tal que $\partial W' = K_1 \times 0 \cup -K_2 \times 1$ e, portanto, ϕ é injetora.

Se $n > 2k$ podemos dar em $L_k(N)$ uma estrutura de grupo abeliano onde a operação é definida da seguinte forma : Se K_1^k e K_2^k são subvariedades compactas e orientadas de N podemos através de uma isotopia, tomar K_1 disjunta de K_2 . Fazemos $[K_1] + [K_2] = [K_1 \cup K_2]$. A boa definição de $+$ segue facilmente do fato que ϕ é uma bijeção, conforme veremos.

Se $[K_1] = [K_1']$ e $[K_2] = [K_2']$ em $L_k(N)$, então temos

$$\begin{aligned} \phi([K_1 \cup K_2]) &= \phi([K_1]) + \phi([K_2]) = \phi([K_1']) + \phi([K_2']) = \\ &= \phi([K_1' \cup K_2']) \end{aligned}$$

logo $[K_1 \cup K_2] = [K_1' \cup K_2']$ e, portanto, $+$ é bem definida.

O elemento neutro de $+$ é exatamente a classe nula de $L_k(N)$. Se $[K] \in L_k(N)$, o elemento oposto de $[K]$ é $[-K]$.

De tudo o que foi visto podemos enunciar o teorema:

3.1. Teorema:

Se $n > 2k$ $L_k(N) \xrightarrow{\phi} \Omega_k(N)$ é um isomorfismo.

3.2. Teorema:

Se $n = 2k$ a aplicação ϕ é sobrejetora.

Prova:

Seja $[K, f] \in \Omega_k(N)$

O teorema da imersão de Whitney, permite-nos supor (a menos de uma homotopia) que $f : K \rightarrow N$ é uma imersão. Podemos ainda supor que f satisfaça:

- 1) Existe somente um número finito de pontos $z_1, \dots, z_p$ de N tais que $\# f^{-1}(z_i) > 1$
- 2) Para cada i $\# f^{-1}(z_i) = 2$
- 3) Se $f^{-1}(z_i) = \{x_i, y_i\}$ então

$$f'(x_i)(T_{x_i} K) \oplus f'(y_i)(T_{y_i} K) = T_{z_i} N$$

Em cada ponto da subvariedade imersa $f(K)$ podemos eliminar a auto-intersecção (Ver capítulo I, § 6) e obter uma subvariedade K' tal que $[K, f] = [K', i]$ o que mostra que ϕ é sobrejetora.

§ 2. Um isomorfismo entre Ω_k e $\pi_{2k}(MSO(k))$

Se $k < n$ então $\Omega_k(S^n) \approx \Omega_k$; logo a aplicação

$L_k(S^n) \xrightarrow{\phi} \Omega_k(S^n)$ é identificada com a aplicação

$L_k(S^n) \xrightarrow{\phi} \Omega_k$ descrita no capítulo II, § 4.

Relembremos também a aplicação $\pi_n(MSO(n-k)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_k$.

Para a prova do lema, a seguir, vamos usar um resultado devido a Wu, Wen-Tsün [16] que diz que se $K^k (k > 1)$ é uma variedade compacta, conexa, então dois mergulhos quaisquer $f, g : K \rightarrow R^{2k+1}$ são isotópicos, o que mostra (Teorema 1.1) que existe um difeomorfismo $h : R^{2k+1} \rightarrow R^{2k+1}$ isotópico à identidade, tal que $h(f(K)) = g(K)$.

Lema:

Uma subvariedade conexa, compacta e orientada K^k do R^{2k+1} borda em R^{2k+1} se, e somente se, borda.

Prova:

Para $k = 1$, Seifert mostrou que todo nó K do R^3 é bordo de uma superfície (Ver também [1]).

Suponhamos $k > 1$. Seja $K^k \subset R^{2k+1}$ conexa, compacta e orientada e W uma variedade compacta, orientada e conexa tal que $\partial W = K$. Sabemos que W mergulha no R^{2k+1} (toda variedade aberta de dimensão p , mergulha no R^{2p-1}) [7]. Suponhamos então $W \subset R^{2k+1}$. Existe um difeomorfismo $h : R^{2k+1} \rightarrow R^{2k+1}$ isotópico à

identidade tal que $h(\partial W) = K$, o que mostra que K borda no R^{2k+1} .

3.3. Teorema:

A aplicação $L_k(S^{2k}) \xrightarrow{\phi} \Omega_k$ é uma bijeção e, portanto,

$\pi_{2k}(MSO(k)) \xrightarrow{\phi'} \Omega_k$ é um isomorfismo

Prova:

Do teorema 3.2 segue que ϕ é sobrejetora.

Mostremos que ϕ é injetora. Para $k = 1$ é trivial, pois $\pi_2(MSO(1)) = 0$ e $\Omega_1 = 0$.

Suponhamos $k > 1$. Como $k > 1$, podemos, através de cirurgias, tornar K conexa (sem alterar a classe de L -equivalência). Consideremos as subvariedades orientadas $M = K \times [0, 1/2]$, $M_1 = K \times [1/2, 1]$ e $L = K \times 1/2$.

Temos $\partial M = K \times 0 \cup -L$. Como K borda, pelo lema anterior existe $W \subset S^{2k} \times (0, 1)$ tal que $\partial W = L$. Seja $\nu L = (E, p, L)$ o fibrado normal a L em $S^{2k} \times (0, 1)$ e $s, r : L \rightarrow E_0$ duas secções tais que s é interna a W e r é externa a M .

Consideremos duas subvariedades $K_s \subset W$ e $K_r \subset M_1$ associadas às secções s e r (Ver capítulo I, § 3). Observemos que K_s e K_r são homólogas a zero em $S^{2k} \times (0, 1) - L$ e, portanto, são homólogas entre si em $S^{2k} \times (0, 1) - L$.

Como $j_* : H_{k+1}(S^{2k} \times (0, 1) - L) \rightarrow H_{k+1}(S^{2k} \times (0, 1)) = 0$ é um espimorfismo, então, pelo teorema 1.3 concluímos que s e r são homólogas e, portanto (Teorema 1.2), são homotópicas (como secções não nulas). Então, pelo teorema 1.5, podemos, por uma

isotopia de N , alterar W de tal forma que W e M se emdem diferenciavelmente ao longo de L . Além disso podemos supor que $W-L$ e $M-L$ estão bem situadas. Logo, podemos construir a subvariedade $(W-L) \circ (M-L)$ (capítulo I, § 6). Basta, agora, tomar $M_2 = ((W-L) \circ (M-L)) \cup L$ e teremos uma subvariedade tal que $\partial M_2 = K \times 0$.

Observação:

Do teorema 3.3, segue que $L_k(R^{2k}) \xrightarrow{\phi} \Omega_k$ também é uma bijeção.

§ 3. Uma estrutura de grupo em $L_k(N^{2k})$

Mostramos anteriormente como introduzir uma estrutura de grupo em $L_k(N^n)$, $n > 2k$.

Vamos procurar introduzir uma estrutura de grupo em $L_k(N^n)$ para $n = 2k$.

Seja N^{2k} uma variedade orientada dotada de uma métrica riemanniana. Dados $[K_1], [K_2] \in L_k(N)$, podemos supor que K_1 e K_2 estão bem situadas (capítulo I, § 6).

Como $K_1 \cap K_2$ é um número finito de pontos, podemos realizar a operação descrita no capítulo I, § 6 e obter a subvariedade $K_1 \circ K_2$.

Definimos a seguinte operação $+$ em $L_k(N)$:

$$[K_1] + [K_2] = [K_1 \circ K_2]$$

Vamos mostrar que esta operação é bem definida. Como $\dim K_1 \cap K_2 = 0$, a classe de L -equivalência de $K_1 \circ K_2$ não

depende da isometria empregada para construí-la (capítulo I, § 6).

Sejam K_1, K'_1, K_2, K'_2 , com K_1 L-equivalente a K'_1 e K_2 L-equivalente a K'_2 e sejam $W_1 \subset N \times I$, $W_2 \subset N \times I$ tais que $\partial W_1 = K_1 \times 0 \cup -K'_1 \times 1$ e $W_2 = K_2 \times 0 \cup -K'_2 \times 1$.

Consideremos em $N \times I$ a métrica produto.

Podemos supor que W_1 e W_2 estão bem situadas em $N \times I$ e que

$$W_1 \cap N \times [0, 1/3) = K_1 \times [0, 1/3), \quad W_1 \cap N \times (2/3, 1] = K'_1 \times (2/3, 1],$$

$$W_2 \cap N \times [0, 1/3) = K_2 \times [0, 1/3) \quad \text{e} \quad W_2 \cap N \times (2/3, 1] = K'_2 \times (2/3, 1]$$

Como $W_1 \cap W_2$ tem dimensão 1, podemos realizar a operação descrita no capítulo I, § 6 e obter $W_1 \circ W_2$. Então $K_1 \circ K_2$ é L-equivalente a $K'_1 \circ K'_2$ pois

$$\partial(W_1 \circ W_2) = (K_1 \circ K_2) \times 0 \cup -(K'_1 \circ K'_2) \times 1,$$

o que mostra que $+$ é bem definida.

Observação:

A operação $+$ é descrita em termos da métrica riemanniana introduzida em N . Mostraremos posteriormente que a operação não depende da métrica.

Pode-se mostrar, facilmente, que $+$ é associativa, comutativa e que possui elemento neutro, que é exatamente a classe nula de $L_k(N)$. Então $(L_k(N), +)$ é um monóide comutativo. Passaremos a empregar simplesmente o símbolo $L_k(N)$ para este monóide e o símbolo 0 para a classe nula de $L_k(N)$.

A aplicação $\phi : L_k(N) \rightarrow \Omega_k(N)$ é um homomorfismo de monóides, pois $\phi(0) = 0$ e

$$\phi([K_1] + [K_2]) = \phi([K_1 \circ K_2]) = \phi([K_1]) + \phi([K_2])$$

Observemos que se $\phi^{-1}(0) = 0$ então $L_k(N)$ é um grupo, pois $\phi([K] + [-K]) = 0$ e, então, $[K] + [-K] = 0$. Esta observação será muito importante na prova do teorema principal deste capítulo, que demonstraremos a seguir.

3.4. Teorema:

O monóide $L_k(N)$ é um grupo e $L_k(N) \xrightarrow{\phi} \Omega_k(N)$ é um isomorfismo.

Prova:

Do teorema 3.2 temos que ϕ é sobrejetora.

Faremos a prova deste teorema em vários passos:

(a) Se N é uma bola aberta do R^{2k} o teorema vale.
(Teorema 3.3)

(b) Se $N = A \cup B$ onde A e B são abertos em N tais que o teorema vale em A e B , então o teorema vale em N .

Prova do passo (b)

$$\text{Seja } \Omega_k(A \cap B) \xrightarrow{\beta_1} \Omega_k(A) \times \Omega_k(B) \xrightarrow{\beta_2} \Omega_k(N) \xrightarrow{\beta_3} \Omega_{k-1}(A \cap B)$$

o trecho da seqüência de Mayer-Vietoris da tripla (N, A, B) . Consideremos a seqüência

$$L_k(A \cap B) \xrightarrow{\alpha_1} L_k(A) \times L_k(B) \xrightarrow{\alpha_2} L_k(N) \xrightarrow{\alpha_3} L_{k-1}(A \cap B)$$

onde $\alpha_1([K]) = ([K], [-K])$ e $\alpha_2([K], [S]) = [K] + [S]$.

A aplicação α_3 é definida da seguinte forma: Seja $[K] \in L_k(N)$. Seja W^{2k} uma subvariedade compacta, com bordo tal que $W \subset A$ e $K - B \subset \overset{\circ}{W}$. Podemos ainda supor que ∂W é transversal a K . Sejam $K_1^* = W \cap K$, $K_2^* = K - \overset{\circ}{W}$ e $S = \partial W \cap K = \partial K_1^* = \partial K_2^*$.

Orientemos K_1^* pela orientação de K e S pela orientação induzida por K_1^* .

Definimos $\alpha_3([K]) = [S] \in L_{k-1}(A \cap B)$

Observemos que a classe de L-equivalência de S não depende da subvariedade W escolhida nas condições acima e não depende das subvariedades K que estão em uma mesma classe de L-equivalência. Logo α_3 é bem definida.

Mostremos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 L_k(N) & \xrightarrow{\alpha_3} & L_{k-1}(A \cap B) \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 \Omega_k(N) & \xrightarrow{\beta_3} & \Omega_{k-1}(A \cap B)
 \end{array}$$

A aplicação β_3 é dada pela composição

$$\Omega_k(N) \longrightarrow \Omega_k(N, B) \xrightarrow{\sim} \Omega_k(A, A \cap B) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{k-1}(A \cap B)$$

onde a aplicação central é a inversa da excisão

$$\Omega_k(A, A \cap B) \longrightarrow \Omega_k(N, B)$$

Observemos que esta excisão aplica o elemento $[K_1^*, i]$ no elemento $[K, i]$; logo está provada a comutatividade pois $\partial([K_1^*, i]) = [S, i]$.

Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_k(A \cap B) & \xrightarrow{\alpha_1} & L_k(A) \times L_k(B) & \xrightarrow{\alpha_2} & L_k(N) & \xrightarrow{\alpha_3} & L_{k-1}(A \cap B) \\
 \text{sobre} \downarrow \phi = \phi_1 & & \text{iso} \downarrow (\phi, \phi) = \phi_2 & & \downarrow \phi = \phi_3 & & \text{iso} \downarrow \phi = \phi_4 \\
 \Omega_k(A \cap B) & \xrightarrow{\beta_1} & \Omega_k(A) \times \Omega_k(B) & \xrightarrow{\beta_2} & \Omega_k(N) & \xrightarrow{\beta_3} & \Omega_{k-1}(A \cap B)
 \end{array}$$

A sequência superior é constituída de homomorfismo de monóides.

Observemos que ϕ_1 é sobrejetora (Teorema 3.2), ϕ_2 é isomorfismo, pois o teorema vale para A e B e ϕ_4 é isomor

fismo uma vez que $\dim(A \cap B) > 2(k-1)$ (Ver capítulo III, § 1). Observemos também que da comutatividade do diagrama e da exatidão da seqüência inferior temos $\text{im } \alpha_1 = \alpha_2^{-1}(0)$ e que $\text{im } \alpha_2 \subset \alpha_3^{-1}(0)$. Mostremos que $\alpha_3^{-1}(0) \subset \text{im } \alpha_2$, com o qual a seqüência superior se torna exata. Então se $[K] \in L_k(N)$ e $\phi([K]) = 0$ teremos $[K] = 0$ e o teorema vale para N .

Seja, portanto, $[K] \in L_k(N)$ tal que $\alpha_3([K]) = 0$ e seja $S \subset K \cap A \cap B$ tal que $\alpha_3([K]) = [S]$. Sejam duas subvariedades K_1^* e K_2^* com $K_1^* \subset A$, $K_2^* \subset B$ tais que $K_1^* \cup K_2^* = K$ e $S = \partial K_1^* = \partial K_2^* = K_1^* \cap K_2^*$ (Ver definição de α_3).

Como S é L -equivalente a zero em $A \cap B$ e $\dim(A \cap B) = 2 \dim S + 2$ então S borda em $A \cap B$ (Ver capítulo IV, introdução). Seja, então, $M \subset A \cap B$ uma subvariedade compacta e orientada tal que $\partial M = S$ e seja $\nu M = (E, p, M)$ o fibrado normal a M e $\nu_S^K = (E_1, p, S)$ o fibrado normal de S em K . Como $H^k(M) = 0$ (retirando de M , se necessário, todas as componentes conexas sem bordo) não existe obstrução para a existência de uma secção $s : M \rightarrow E_0$. Com pequenas modificações em K podemos supor que $s(x)$ seja tangente a K e interna a K_1^* nos pontos $x \in S$; logo E_1 se torna subfibrado de $E|S$ (Isto é possível pois $\dim(N) = 2 \dim S + 2$). Mais ainda, podemos supor que K e $M-S$ estão bem situadas.

Seja V vizinhança tubular, de raio ε , de M . Modifiquemos ainda K de tal forma que se $\theta : V \rightarrow \mathring{D}_\varepsilon$ é o inverso do difeomorfismo exponencial então $\theta(K \cap V) = E_1 \cap \mathring{E}_\varepsilon$, onde $\mathring{D}_\varepsilon = \{e \in E : |e| < \varepsilon\}$.

Para maior facilidade de raciocínio vamos supor que $\mathring{D}_\varepsilon$ seja todo E . Assim temos $\theta : V \rightarrow E$ e $\theta(K \cap V) = E_1$.

Também suporemos que a secção s seja unitária ($|s(x)| = 1$
 $\forall x \in M$).

Dado um conjunto $X \subset E$, empregaremos o mesmo símbolo X para o conjunto $\theta^{-1}(X) \subset V$.

Dado um conjunto $X \subset M$, consideremos os seguintes conjuntos em E :

$$D(X) = \{\lambda s(x) : |\lambda| \leq 1 \text{ e } x \in X\} \quad F(X) = \{\lambda s(x) : |\lambda| = 1 \text{ e } x \in X\}.$$

$$M_1 = \{s(x) : x \in M\} \quad M_2 = \{-s(x) : x \in M\}$$

Sejam

$$S_1 = \{s(x) : x \in S\} \quad S_2 = \{-s(x) : x \in S\}$$

Orientemos M_2 pela orientação de M e M_1 com a orientação oposta.

Podemos supor que em $A \cap B$, M_1 e M_2 estão bem situadas com K , respectivamente.

Seja U uma vizinhança "colarinho" fechada de S em $M(S \times [0,1] \sim U)$ e sejam $S' = \partial U - S$, $U_1 = U - S$.

Consideremos em N os conjuntos

$$\bar{P} = (M_1 \cup M_2 - F(U)) \cup D(S')$$

$$\bar{K}_1 = (K_1^* - D(S)) \cup M_1 \text{ e } \bar{K}_2 = (K_2^* - D(S)) \cup M_2$$

Observemos que $\bar{P}$ é uma subvariedade que deixa de ser C^∞ nos pontos de $F(S')$ e que $\partial D(M - U_1) = \bar{P}$. Podemos suavizar $\bar{P}$ nos pontos de $F(S')$ e obter uma subvariedade P diferenciável e ainda de tal forma que $P \subset D(M - U_1)$ e, portanto, P borda em $A \cap B$, logo é L -equivalente a zero.

Os conjuntos $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$ são subvariedades imersas em N que deixam de ser C^∞ nos pontos de S_1 e S_2 respectivamente. Podemos suavizá-las nestes pontos e suas auto-intersecções podem ser eliminadas pelo processo descrito no capítulo I, § 6 e obtemos, então, duas subvariedades diferenciáveis K_1 e K_2 com $K_1 \subset A$ e $K_2 \subset B$.

Observemos que $K_1 \circ K_2$ é L -equivalente a $K \circ P$; logo $[K_1] + [K_2] = [K] + [P] = [K]$. Então $\alpha_2([K_1], [K_2]) = [K]$. Isto demonstra o passo (b).

c) O teorema vale para N qualquer.

Pelo lema de Zorn existe um aberto A maximal onde o teorema vale. Se $A \neq N$ então podemos tomar um aberto B difeomorfo a uma bola aberta do R^{2k+1} tal que $B - A \neq \emptyset$. Então por (b) o teorema vale para $A \cup B$ o que contraria o fato de A ser maximal. Então $A = N$.

§ 4. O caso $n = 2k-1$

Nos parágrafos anteriores mostramos como introduzir uma estrutura de grupo em $L_k(N^n)$ de tal forma que

$\phi : L_k(N) \rightarrow \Omega_k(N)$ seja isomorfismo se $n \geq 2k$.

Veremos o que é possível fazer se $n = 2k-1$.

Seja N^{2k-1} uma variedade orientada conexa.

Dados $[K_1], [K_2] \in L_k(N)$ podemos supor que K_1 e K_2 estão bem situadas. Como $K_1 \cap K_2$ tem dimensão 1, podemos construir $K_1 \circ K_2$ (capítulo I, § 6).

Podemos tentar definir uma operação em $L_k(N)$ fazendo

$$[K_1] + [K_2] = [K_1 \circ K_2]$$

Infelizmente, neste caso, não podemos empregar a técnica utilizada no caso $n = 2k$ para mostrar que $+$ é bem definida. Mas apresentaremos alguns teoremas que garantem, em certas situações, a boa definição de $+$.

3.5. Teorema:

Se $\phi : L_k(N) \rightarrow \Omega_k(N)$ é injetora, então $+$ é bem definida, $L_k(N)$ é um grupo e ϕ é um monomorfismo.

Prova:

Sejam $[K_1] = [K'_1]$, $[K_2] = [K'_2]$ tais que K_1, K_2 e K'_1, K'_2 estão bem situadas, respectivamente. Temos (Ver capítulo I, § 6):

$$\phi([K_1 \circ K_2]) = \phi([K_1]) + \phi([K_2]) = \phi([K'_1] + [K'_2]) = \phi([K'_1 \circ K'_2])$$

Então $[K_1 \circ K_2] = [K'_1 \circ K'_2]$ e temos a boa definição de $+$.

As afirmações restantes do enunciado seguem trivialmente.

3.6. Teorema:

Se $\phi' : \pi_{2k-1}(MSO(k-1)) \rightarrow \Omega_k$ é injetora e N é tal que $H_i(N) = 0$ se $0 < i \leq k-4$, então $+$ é bem definida, $L_k(N)$ é um grupo e ϕ é um isomorfismo.

Prova:

Dos teoremas 1.6 e 2.9 segue que ϕ é uma bijeção; logo o teorema segue do teorema 3.5.

3.7. Corolário:

Se N^7 é uma variedade orientada, então $L_4(N)$ é um grupo com a operação $+$ e ϕ é um isomorfismo.

Observação:

Não consegui exibir nenhum exemplo de uma variedade N^{2k-1} onde $+$ não esteja bem definida.

CAPÍTULO IV

BORDISMO AMBIENTAL

Seja N^n variedade orientada.

Recordemos que uma subvariedade $K^k \subset N^n$ compacta e orientada, borda em N se existe uma subvariedade compacta e orientada, $W \subset N$ tal que $\partial W = K$.

Mostra-se, facilmente, que se K borda em N então o elemento $[K, i]$ é nulo em $\Omega_k(N)$ onde $i : K \rightarrow N$ é a inclusão. Apresentaremos neste capítulo algumas situações em que o anulamento de $[K, i]$, permite concluir que K borda em N .

Se $n \geq 2k+2$ pode-se mostrar, usando os teoremas de mergulho e imersão de Whitney, que uma subvariedade $K^k \subset N$ borda em N se, e somente se, $[K, i] = 0$. Faremos a prova para o caso $n = 2k+2$ (os outros são triviais).

Se $[K, i] = 0$ então existem variedade compacta e orientada W e $F : W \rightarrow N$ contínua tais que $\partial W = K$ e $F(x) = x \forall x \in K$. Podemos supor que F seja diferenciável e que exista uma vizinhança V de K em W tal que $F|_V$ seja um mergulho e $F(W-V) \cap K = \emptyset$.

Podemos ainda supor que F seja uma imersão satisfazendo:

- (1) Existe somente um número finito de pontos $z_1, \dots, z_p$ de N tais que $\# F^{-1}(z_i) > 1$
- (2) Para cada i , $\# F^{-1}(z_i) = 2$
- (3) Se $F^{-1}(z_i) = \{x_i, y_i\}$, então

$$F'(x_i)(T_{x_i} W) \oplus F'(y_i)(T_{y_i} W) = T_{z_i} N$$

Em cada ponto z_i podemos eliminar a auto-intersecção da subvariedade imersa $F(W)$ (capítulo I, § 6) e obter uma subvariedade $W' \subset N$ tal que $\partial W' = K$.

Vamos nos prender, neste capítulo, ao caso $n = 2k+1$.

Para $n \leq 2k$ o problema é mais complicado. Daremos um exemplo em que temos o anulamento de $[K, i]$, mas K não borda em N .

Exemplo:

Seja $N = \mathbb{R}^2$ e K^1 a reunião de dois círculos concêntricos com a origem, e orientados no sentido anti-horário.

Como $\Omega_1(\mathbb{R}^2) = 0$ então $[K, i] = 0$, mas K não borda no $\mathbb{R}^2$.

É claro que existe $W \subset \mathbb{R}^2$, compacta e orientada, tal que $\partial W = K$, mas a orientação induzida por W no bordo não coincide com a orientação de K .

Observação:

Uma subvariedade $K \subset N$ pode não bordar em N , mesmo que borde abstratamente, mas um outro mergulho seu pode bordar em N . Morris W-Hirsch [9] estudou o seguinte problema: Se uma variedade compacta, conexa e orientada K^k borda, existe um mergulho de K^k no $\mathbb{R}^n$, que borda no $\mathbb{R}^n$? A resposta é sempre sim se $n \geq 2k$.

1.4. Teorema:

Seja N^{2k} variedade orientada. Uma subvariedade orientada e compacta $K^k \subset N \times R$ borda em $N \times R$ se, e somente, se $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(N \times R)$.

Prova:

Seja $p : N \times R \rightarrow N$ a projeção.

Dizemos que $x \in p(K)$ é um ponto múltiplo se $p^{-1}(x) \cap K$ tem mais de um ponto. Se $p^{-1}(x) \cap K$ tem dois pontos dizemos que x é um ponto duplo.

Podemos supor, a menos de uma isotopia de $N \times R$, que K satisfaça as seguintes condições:

- a) A restrição $p|_K : K \rightarrow N$ é uma imersão.
- b) Existe somente um número finito de pontos múltiplos e estes pontos são duplos.
- c) Para cada ponto duplo $x \in p(K)$ existem um aberto U contendo x e um difeomorfismo $U \xrightarrow{h} R^{2k}$ com $h(x) = 0$, tal que

$$g(p^{-1}(U) \cap K) = (H_1, t_1) \cup (H_2, t_2)$$

onde (x, t_1) e (x, t_2) são os pontos de K com $p(x, t_1) = p(x, t_2) = x$ e $g : U \times R \rightarrow R^{2k} \times R$ é o difeomorfismo $g(x, t) = (h(x), t)$ e H_1 e H_2 são subespaços lineares k -dimensionais e ortogonais do R^{2k} .

Podemos também supor que $K \subset N \times (0, \infty)$.

Consideremos um ponto duplo x e introduzimos em H_1 e H_2 orientações compatíveis com a orientação de K .

Seja $T : H_1 \rightarrow H_2$ uma isometria que inverte orientação.

Consideremos os conjuntos em R^{2k+1} :

$$R = \{ ((1-\lambda)v + \lambda T(v), (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) : v \in H_1, |v| \leq 1 \text{ e } \lambda \in [0,1] \}$$

$$L = \{ ((1-\lambda)v + \lambda T(v), (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) : v \in H_1, |v| = 1 \text{ e } \lambda \in [0,1] \}$$

Seja D o disco fechado unitário do R^{2k} .

Na prova deste teorema, certas subvariedades não diferenciáveis que surgirem, serão consideradas diferenciáveis, pois poderemos suavizá-las sem grande dificuldade.

Consideremos a subvariedade $K' = (K - g^{-1}(D \times R)) \cup L$ e observemos que em $p(K')$ foi eliminado o ponto duplo x . Procedendo desta forma em cada ponto duplo, conseguiremos uma subvariedade K'' tal que $p|_{K''} : K'' \rightarrow N$ seja um mergulho. Observemos que $[K'', i] = [K, i]$ em $\Omega_k(N \times R)$; logo $[K'', i] = 0$ e portanto, $[p(K''), i] = 0$ em $\Omega_k(N)$ e, pelo teorema 3.4, $p(K'')$ é L -equivalente a zero. Então existe uma subvariedade compacta e orientada M_1 contida em $N \times (-\infty, 0]$ tal que $\partial M_1 = p(K'') \times 0$. Para cada $x \in p(K'')$ seja $f(x) \in R$ tal que $(x, f(x)) \in K''$.

Consideremos as subvariedades

$$M_2 = \{ (x, t) \in N \times R : x \in p(K'') \text{ e } 0 \leq t \leq f(x) \} \text{ e}$$

$$M = M_1 \cup M_2. \text{ Temos } \partial M = K''.$$

Finalmente, se em cada ponto duplo adicionarmos a M os conjuntos $g^{-1}(R)$, obtemos uma subvariedade W compacta e orientada tal que $\partial W = K$.

Corolário:

Se $N = R^{2k+1}$ ou $N = S^{2k+1}$, então uma subvariedade compacta e orientada K^k borda em N se, e somente se, borda.

§ 1. Uma decomposição de uma variedade poliédrica

Fixaremos, neste parágrafo, inteiros n, k com $0 \leq k < n$.

Sejam $S = (a_0, \dots, a_n)$ um n -simplexo de vértices $a_0, \dots, a_n$, a k -face $\tau = (a_0, \dots, a_k)$ e a $n-k-1$ -face $\eta = (a_{k+1}, \dots, a_n)$, oposta a τ ;

Sejam

$$M_\tau(S) = \left\{ \frac{x+y}{2} : x \in \tau \text{ e } y \in \eta \right\}$$

$$A_\tau(S) = \{ (1-t)x+ty : x \in \tau, y \in \eta \text{ e } 0 \leq t \leq 1/2 \}$$

$$B_\tau(S) = \{ (1-t)x+ty : x \in \tau, y \in \eta \text{ e } 1/2 \leq t \leq 1 \}$$

Seja a aplicação $f_S^1 : M_\tau(S) \times [-1,1] \rightarrow S$ dada por

$$f_S^1\left(\left(\frac{x+y}{2}, t\right)\right) = \frac{(t+1)x + (1-t)y}{2}$$

que é uma aplicação celular.

Seja $\{S_i\}_{i \in I}$ a família dos n -simplexos da subdivisão baricêntrica de S e, para cada $i \in I$, seja τ_i a única k -face de S_i que está contida em alguma k -face de S e seja η_i a $n-k-1$ -face oposta de τ_i em S_i .

Sejam

$$M(S) = \bigcup_{i \in I} M_{\tau_i}(S_i), \quad A(S) = \bigcup_{i \in I} A_{\tau_i}(S_i)$$

$$B(S) = \bigcup_{i \in I} B_{\tau_i}(S_i) \quad E^*(S) = \bigcup_{i \in I} \eta_i$$

$$n=2 \quad k=1$$

$$n=2 \quad k=0$$

Seja $f_S : M(S) \times [-1,1] \rightarrow S$ tal que

$$f_S|_{M(S_i) \times [-1,1]} = f_{S_i}^1 \quad \forall i \in I$$

$M(S) \times [-1,1]$ é um complexo celular e a aplicação f_S é celular.

Consideremos agora P um complexo simplicial cujo espaço subjacente $N = |P|$ seja uma variedade poliédrica (sem bordo).

Seja γ a coleção dos n -simplexos de P .

Sejam

$$M = \bigcup_{S \in \gamma} M(S) \quad A = \bigcup_{S \in \gamma} A(S) \quad B = \bigcup_{S \in \gamma} B(S) \quad E^* = \bigcup_{S \in \gamma} E^*(S)$$

$$n = 2 \quad k = 0$$

Seja a aplicação $f : M \times [-1,1] \rightarrow N$ tal que

$$f|_{M(S) \times [-1,1]} = f_S$$

Observemos que M , A e B são subvariedades, lineares por partes, de N (em uma conveniente subdivisão) e que $M = \partial A = \partial B = A \cap B$ e $N = A \cup B$.

Consideremos E o espaço subjacente do k -esqueleto de P .

O conjunto E^* é o espaço subjacente do $n-k-1$ -esqueleto da subdivisão celular dual de P (Ver [12]).

Os conjuntos A e B são vizinhanças de E e E^* , respectivamente.

Consideremos a aplicação $h : M \times (-1,1) \rightarrow N - (E \cup E^*)$ dada pela restrição de f a $M \times (-1,1)$ que é um homeomorfismo diferenciável por partes (considerando em $M \times (-1,1)$ a estrutura P.L. produto). Observemos que

$$h(x,0) = x \quad \forall x \in M, \quad h(M \times [0,1)) = A - E \quad e$$

$$h(M \times [(-1,0]) = B - E^*$$

§ 2. Geradores para certos subgrupos de $\Omega_k(N)$ ($n = 2k+1$)

Seja N^{2k+1} variedade orientada e consideremos uma triangulação diferenciável em N .

Para maior facilidade de raciocínio identifiquemos cada simplexo da triangulação como um subconjunto de N .

Os simplexos da triangulação serão considerados abertos e, portanto, são subvariedades abertas de N .

Seja E um subcomplexo da triangulação, de dimensão menor ou igual a k e F o $k-1$ esqueleto de E .

O objetivo deste parágrafo é caracterizar o núcleo de

$$i_* : \Omega_k(N-E) \rightarrow \Omega_k(N) \quad \text{onde } i : N-E \rightarrow N \text{ é a inclusão.}$$

Para cada k -simplexo σ de E , seja $D \subset N$ um disco fechado orientado de dimensão $k+1$ satisfazendo:

- a) $E \cap S = \emptyset$ onde $S = \partial D$
- b) D é transversal a σ
- c) $\sigma \cap D = E \cap D$ e esta intersecção é constituída de um único ponto.

A esfera S determina um elemento $e_\sigma \in \Omega_k(N-E)$ que, a menos de sinal, não depende do disco escolhido D . Observe-mos que e_σ pertence ao núcleo de i_* . Vamos mostrar que estes elementos e_σ geram o núcleo de i_* .

Consideremos uma vizinhança tubular V de $E-F$. Do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k(N-E) & \xrightarrow{i_*} & \Omega_k(N-F) \\ & \searrow i_* & \downarrow \approx \\ & & \Omega_k(N) \end{array}$$

Concluimos que o núcleo da flecha horizontal i_* coincide com o núcleo de i_* , pois a flecha vertical é um isomorfismo. Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{k+1}(V, V-E) & \longrightarrow & \Omega_k(V-E) & \xrightarrow{j_*} & \Omega_k(V) \\ \approx \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\ \Omega_{k+1}(N-F, N-E) & \longrightarrow & \Omega_k(N-E) & \xrightarrow{i_*} & \Omega_k(N-F) \end{array}$$

Como β é uma excisão então, do diagrama, concluímos que α aplica o núcleo de j_* sobre o núcleo de i_* .

Para cada simplexo σ de E consideremos um disco fechado $D \subset V$ nas condições (a), (b) e (c) descritas anteriormente.

A esfera $S = \partial D$ determina elementos

$\bar{e}_\sigma \in \Omega_k(V-E)$ e $e_\sigma \in \Omega_k(N-E)$. Como os elementos $\bar{e}_\sigma$ geram o núcleo de j_* (ver observação abaixo), então os elementos e_σ geram o núcleo de i_* .

Observação:

V é uma reunião disjunta $V = \bigcup V_\sigma$ onde cada V_σ é uma vizinhança tubular de σ . Como existem equivalências de homotopia

$$V_\sigma - \sigma \approx R^{k+1} - \{0\} \approx S^k \quad \text{e} \quad V_\sigma \approx \sigma \times R^{k+1} \approx \{0\}$$

então a aplicação $j_* : \Omega_k(V_\sigma - \sigma) \rightarrow \Omega_k(V_\sigma)$ é identificada com a aplicação

$$j_* : \Omega_k(S^k) \rightarrow \Omega_k(0) = \Omega_k \quad \text{onde} \quad j : S^k \rightarrow \{0\}$$

é a aplicação constante. O núcleo desta aplicação j_* é gerado pelo elemento $[S^k, I]$, onde $I : S^k \rightarrow S^k$ é a identidade, e este elemento $[S^k, I]$ é identificado com o elemento $\bar{e}_\sigma$.

§ 3. O teorema principal do capítulo IV

Definição:

Dizemos que uma variedade orientada N^{2k+1} satisfaz a condição (*), se toda subvariedade compacta e orientada K^k , tal que $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(N)$, borda em N .

Do teorema 4.1 e seu corolário concluímos que R^{2k+1} , S^{2k+1} e toda variedade da forma $N^{2k} \times R$, onde N é orientada, satisfazem a condição (*).

4.2. Teorema:

Seja $N^{2k+1} = A \cup B$ uma variedade orientada onde A e B são subvariedades $2k+1$ - dimensionais tais que $\partial A = \partial B = A \cap B$ e seja $M = A \cap B$. Seja V vizinhança tubular de M em N e $A^+ = A \cup V$, $B^+ = B \cup V$. Vamos supor que A^+ satisfaça a condição (*) e que todo elemento do núcleo de $i_* : \Omega_k(M) \rightarrow \Omega_k(B)$ é representado por uma subvariedade que borda em B^+ . Então toda subvariedade $K^k \subset \overset{\circ}{A}$ tal que $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(N)$, borda em N .

Prova:

Seja $K^k \subset \overset{\circ}{A}$ tal que $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(N)$.

Consideremos a sequência exata de Mayer-Vietoris da tripla (N, A, B)

$$\Omega_k(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega_k(A) \oplus \Omega_k(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_k(N) \quad \text{onde}$$

$\alpha(x) = i_{a_*}(x) - i_{b_*}(y)$ $\beta(x, y) = j_{a_*}(x) + j_{b_*}(y)$ sendo i_a, i_b, j_a, j_b as inclusões.

Temos $\beta([K, i], 0) = 0$; logo existe $x \in \Omega_k(M)$ tal que $i_{a_*}(x) = [K, i]$ e $i_{b_*}(x) = 0$. Então x é representado por uma subvariedade S que borda em B^+ . Temos ainda $[S, i] = [K, i]$ em $\Omega_k(A^+)$ e como A^+ satisfaz a condição (*) existe uma subvariedade $W_1 \subset A^+$ tal que $\partial W_1 = K \cup -S$. Seja $W_2 \subset B^+$ tal que $\partial W_2 = S$.

Consideremos $\nu S = (E, p, S)$ o fibrado normal de S em N e $r : S \rightarrow E_0$ uma secção normal a M e interna a A e $s_1, s_2 : S \rightarrow E_0$ as secções unitárias internas a W_1 e W_2 respectivamente.

Mostremos que as secções r e s_1 são homólogas (Ver capítulo I, § 3) e, portanto, homotópicas (como secções não nulas) (Teorema 1.2).

Observemos que as subvariedades K_r e K_{s_1} associadas a r e s_1 , respectivamente, são homólogas em $A^+ - S$ e, como $j_* : H_{k+1}(A^+ - S) \rightarrow H_{k+1}(A^+)$ é epimorfismo, então r e s_1 são homólogas (Teorema 1.3).

Analogamente, mostramos que s_2 e $-r$ (oposta de r) são homólogas e, também, homotópicas.

Então pelo teorema 1.5 podemos alterar W_1 em uma pequena vizinhança de S de tal forma que W_1 e W_2 se emendem diferenciavelmente ao longo de S . Podemos também supor que $\dot{W}_1$ e $\dot{W}_2$ estão bem situadas (capítulo I, § 6); logo podemos construir $\dot{W}_1 \circ \dot{W}_2$ e obter a subvariedade $W = (\dot{W}_1 \circ \dot{W}_2) \cup S \cup K$ cujo bordo é K .

O objetivo do resto deste parágrafo é mostrar que toda variedade compacta e orientada N^{2k+1} satisfaz a condição (*).

Consideremos uma variedade compacta e orientada N^{2k+1} e consideremos uma triangulação diferenciável de N .

Sejam E o k -esqueleto e E^* o k -esqueleto da subdivisão celular dual.

Mostramos no parágrafo 1 que existem subvariedades PL (lineares por partes) M, A, B tais que

$$N = A \cup B \quad M = \partial A = \partial B = A \cap B \quad \text{com} \quad E \subset \overset{\circ}{A} \quad \text{e} \quad E^* \subset \overset{\circ}{B}$$

e um homomorfismo PD (Diferenciável por partes)

$$h : M \times (-1,1) \rightarrow N - (E \cup E^*) \quad \text{tal que}$$

$$h(x,0) = x \quad \forall x \in M, \quad h(M \times [0,1)) = A-E \quad \text{e} \quad h(M \times (-1,0]) = B-E^*$$

Além disso, o par $(M \times (-1,1), h)$ corresponde a uma triangulação diferenciável da variedade $N - (E \cup E^*)$. Logo, pelo "teorema $M \times R$ " ([6], teorema 7.7, p. 41) existe uma estrutura diferenciável em M e um difeomorfismo

$h' : M \times (-1,1) \rightarrow N - (E \cup E^*)$ isotópico a h através de uma isotopia PD. Como M é compacta, então $M' = h'(M \times 0)$ é uma subvariedade diferenciável compacta de $N - (E \cup E^*)$, portanto $A' = h'(M \times [0,1)) \cup E$ e $B' = h'(M \times (-1,0]) \cup E^*$ são vizinhanças de E e E^* respectivamente.

Resumindo (voltando a usar os mesmos símbolos para o caso diferenciável), podemos obter subvariedades diferenciáveis A, B, M (compactas) com

$N = A \cup B, \quad M = \partial A = \partial B = A \cap B, \quad E \subset \overset{\circ}{A} \quad \text{e} \quad E^* \subset \overset{\circ}{B} \quad \text{e um difeomorfismo}$

$$h : M \times (-1,1) \rightarrow N - (E \cup E^*) \quad \text{tal que}$$

$$h(x,0) = x \quad \forall x \in M, \quad h(M \times [0,1)) = A-E \quad \text{e} \quad h(M \times (-1,0]) = B-E^*$$

4.3. Teorema:

$\overset{\circ}{A}$ e $\overset{\circ}{B}$ satisfazem a condição (*).

Prova:

Mostremos que $\overset{\circ}{A}$ satisfaz (*).

Consideremos o difeomorfismo

$h : M \times (-1,1) \rightarrow N - (E \cup E^*)$ e, para cada $t > 0$, sejam

$$M_t = h(M \times t), \quad B_t = h(M \times [t,1)) \cup E \quad \text{e} \quad A_t = h(M \times (0,t])$$

Para cada k -simplexo σ , seja D_σ um disco fechado orientado de dimensão $k+1$ satisfazendo as condições (a), (b) e (c) do parágrafo 2 deste capítulo. A esfera $S_\sigma = \partial D_\sigma$ determina um elemento e_σ em $\Omega_k(N-E)$ e estes elementos e_σ geram o núcleo de $\Omega_k(N-E) \xrightarrow{i_*} \Omega_k(N)$ (capítulo IV, § 2).

Seja U uma vizinhança de E com $U \subset \overset{\circ}{A}$, tal que $S_\sigma \cap U = \emptyset \quad \forall \sigma$. Como M é compacta existe $t > 0$ tal que $M_t \subset U$. Podemos ainda supor que M_t seja transversal a todos os discos D_σ . Sejam as subvariedades $R_\sigma = M_t \cap D_\sigma$ que determinam elementos $\bar{e}_\sigma \in \Omega_k(M_t)$. Estes elementos geram o núcleo de $i_* : \Omega_k(M_t) \rightarrow \Omega_k(B_t)$. Observemos que cada R_σ borda em B_t , logo todo elemento do núcleo de i_* é representado por uma subvariedade que borda em B_t .

Seja $A_t^+ = h(M \times (0, t_1))$, ($t < t_1 < 1$), que satisfaz (*) pois é difeomorfo a $M \times R$ (Teorema 4.1).

Dada $K \subset \overset{\circ}{A}$ tal que $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(\overset{\circ}{A})$ podemos supor, a menos de uma isotopia, que $K \subset A_t^+$.

Logo, aplicando o teorema 4.2, concluímos que K borda em $\overset{\circ}{A}$.

Analogamente podemos mostrar que B satisfaz (*).

Apresentaremos agora o teorema principal deste capítulo.

4.4. Teorema:

Toda variedade compacta e orientada N^{2k+1} satisfaz a condição (*), isto é, uma subvariedade compacta e orientada K^k borda em N se, e somente se, $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(N)$.

Prova:

Consideremos a decomposição $N = A \cup B$, V uma vizinhança tubular de $M = A \cap B$, $A^+ = A \cup V$ e $B^+ = B \cup V$.

Como $\overset{\circ}{A}$ e $\overset{\circ}{B}$ satisfazem a condição (*) então A^+ e B^+ também satisfazem (*).

Dada $K^k \subset N$ tal que $[K, i] = 0$ em $\Omega_k(N)$, podemos sempre supor, a menos de uma isotopia, que $K \subset \overset{\circ}{A}$. Logo do teorema 4.2 concluímos que K borda em N .

4.5. Teorema:

Seja N^9 uma variedade compacta, orientada e conexa. Se uma subvariedade compacta e orientada K^4 é homóloga a zero e borda, então borda em N .

Prova:

Do teorema 1.6 concluímos que $[K, i] = 0$ em $\Omega_4(N)$.

4.6. Teorema:

Seja $N^{2k+1} (k \leq 3)$ uma variedade compacta e orientada. Se K^k é homóloga a zero, então K borda em N .

Prova:

Se $k \leq 3$ a aplicação $\mu : \Omega_k(N) \rightarrow H_k(N)$ é um isomorfismo (teorema 1.6).

Observação:

A prova do teorema 4.6 para $k = 1$ encontra-se em [1].

4.7. Teorema:

Seja N^{2k+1} uma variedade compacta e orientada tal que a torção de $H_1(N)$ é constituída de elementos de ordem 2 para todo i tal que $0 < i \leq k$ e 4 divide $k-i$. Seja K^k uma subvariedade compacta e orientada com fibrado normal trivial e homóloga a zero. Então K borda em N .

Prova:

Pode-se mostrar que os números de Whitney e de Pontryagin do par $[K, i]$ se anulam.

Logo, pelo teorema 1.7 concluímos que $[K, i] = 0$ em $\mathcal{U}_k(N)$.

4.8. Teorema:

Seja N nas condições do teorema 4.7. Se K é uma esfera k -dimensional mergulhada em N , e homóloga a zero, então K borda em N .

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BIASI, C; Bordismo de Família Finita de Nós Orientados em Variedades 3-Dimensionais.
Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, São Carlos (1975).
- [2] - BOÉCHAT, J.; HAEFLIDER, A.; Plongements différentiables des Variétés Orientees de Dimension 4 dans R^7 .
Essays on Topology and Related Topics, Springer-Verlag.
- [3] - BURLET, O.; Rational Homotopy of oriented Thom spaces.
Proc. Adv. Study, Inst. Alg. Top; August 10-23, 1970, Aarhus Denmark.
- [4] - CONNER, P.E.; FLOYD, E.E., Differentiable Periodic Maps
Springer-Verlag (1964).
- [5] - GREENBERG, M.J., Lectures on Algebraic Topology.
Mathematics Lecture Note Series (1967).
- [6] - HIRSCH, M., MAZUR, B., Smoothing of Piecewise Linear Manifolds; Annals of Mathematics Studies, Princeton, 1974.
- [7] - HIRSCH, M., On embedding differentiable Manifolds in euclidean space; Ann. of Math., Vol. 73, n.º 3 (1961).
- [8] - HIRSCH, M., Differential Topology, Springer-Verlag.
- [9] - HIRSCH, M., On embedding of bounding manifolds in euclidean space; Ann. of Math. (2) 74 (1961), 494-497.
- [10] - LOIBEL, G.F., Introdução à Teoria da Obstrução (Vol. I e II) EESC-USP, São Carlos (1963).
- [11] - MASSEY, W., PETERSON, F., On the dual Stiefel-Whitney classes of a Manifold.
Bol. Soc. Mat. Mexicana; 1-13 (1963).
- [12] - SEIFERT, H., THRELFALL, W., Lecciones de Topologia.
Publicaciones del CSIC (Madrid).
- [13] - SPANIER, E.H., Algebraic Topology.
Mc. Graw Hill Book Company, N.Y., 1966.
- [14] - STEENROD, N., Topology of Fibre Bundles; Princeton (1951).
- [15] - THOM, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables; Comment. Math. Helv. 28, 17-86 (1954)
- [16] - Wu, WEN-TSUN; On the isotopy of C^r -Manifolds of dimension n in euclidean $(2n+1)$ -space; Sci-Record (N.S.) 2 (1958), 271-275.