TEORIA DE NIELSEN PARA COINCIDÊNCIA
E ALGUMAS APLICAÇÕES

EDSON DE OLIVEIRA

Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Tese apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de
São Carlos, da Universidade de
São Paulo, para obtenção do tí-
tulo de Doutor em Ciências
(Matemática).

São Carlos

1987

Na elaboração deste trabalho ti
ve a vantagem de ter sempre ao
meu lado, me incentivando, me
apoiando, me compreendendo e me
cercando de muito carinho, minha
esposa e minhas filhas.

Assim, ele é dedicado para
MARCIA, MELISSA E VIVIANE.

MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves, pela orienta
ção objetiva, dedicada e paciente.

Ao Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher pela leitura
crítica deste trabalho e pelas diversas sugestões.

Ao Prof. Dirceu Penteado, pela amizade e pela compa-
nhia constante nos estudos e viagens, desde os momentos ini
ciais.

À Profa. Dra. Alice K.M.Libardi pelo estímulo e pela
prontidão com que sempre nos atendeu.

Aos professores e funcionários do DM da UFSCar e do
ICMSC-USP, em particular aos professores: Dr. Carlos Biasi, Dr.
Janey Antonio Daccach e Dr. Oziride Manzoli Neto.

Aos professores do IME-USP de São Paulo, pela manei-
ra acolhedora com que sempre me receberam.

Aos meus pais Ilson e Alice, e demais familiares, pe-
lo apoio humano e moral.

À Neube E.D.Guillen Stabili, Celia Maria G.Zaninetti
e Maria de Lourdes Barretto, que com dedicação realizaram um
rápido e eficiente trabalho de datilografia.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades:

CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP - através de auxílios concedidos ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, para bibliografia e contratação de docentes de cursos de Pós-Graduação.

ABSTRACT

This work is made of two parts.

In the first part, with the use of covering spaces, we study the Nielsen number of coincidence of functions.

In the second part, we make some applications of the results of the first part.

Being $f, g: M \rightarrow M$ continuous maps, with M an oriented, connected, closed manifold, we compute $\Lambda(f, g)$ when $H^*(M; \mathbb{Q})$ has a simple systems of generators.

If M is in addition an H -space with multiplication m , let us define, for $x \in M$, $m_2(x) = m(x, x)$ and $m_k(x) = m(x, m_{k-1}(x))$ for $k \geq 2$. We show that the equation $m_k(x) = m_s(x)$, $k > s$, has at least $(k-s)^\beta$ roots, where β is the first Betti number of M , and further we study the primitive roots of such equation.

ÍNDICE

Introdução	i
Capítulo 1	
Preliminares e teoremas básicos	
§1. Recobrimentos	1
§2. Subgrupos de Jiang	4
§3. Espaços ANR	8
§4. Orientação em variedades e classe de Thom	9
§5. Índice de pontos de coincidência	11
§6. Número de Lefschetz	19
Capítulo 2	
Número de Nielsen para coincidências	
§1. Classes de pontos de coincidência	23
§2. Classes de $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ -conjugação	33
§3. Número de Nielsen	37
§4. Computação do número de Nielsen	42
§5. Espaços com grupo fundamental finito	56
Capítulo 3	
Aplicações	
§1. Cálculo do número de Lefschetz $\Lambda(f,g)$ de aplicações $f,g: M \rightarrow M$ onde $H^*(M,Q)$ possui um sistema simples de geradores.	77
§2. Raízes em H-variedades	94
§3. Raízes primitivas em H-Variedades	97
Apêndice I	
Invariança homotópica do número de Nielsen	118

Apêndice II

Aproximação por aplicações que possuem somente um número finito de pontos de coincidência	129
Bibliografia	132

INTRODUÇÃO

Em [1], Boju apresentou um estudo do número de Nielsen para pontos fixos de funções entre poliedros conexos e compactos, utilizando espaços de recobrimento.

No capítulo 2, do nosso trabalho, também usando espaços de recobrimento, estudamos o número de Nielsen $N(f,g)$ para coincidência de funções $f,g: M \rightarrow N$ onde M e N são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M compacta.

Sejam $f,g: M \rightarrow M$ onde M é como acima e suponhamos que $H^*(M,Q)$ possua um sistema simples de geradores. Nestas condições, conseguimos calcular o número de Lefschetz $\Lambda(f,g)$. Fazendo uso deste cálculo, estendemos o resultado de [7] e utilizando os resultados do capítulo 2, conseguimos generalizar o resultado principal de [8].

Este trabalho é composto de três capítulos e dois apêndices.

No capítulo 1 estão colocados conceitos básicos e alguns resultados que são utilizados nos demais capítulos.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo do número de Nielsen para coincidência de funções. Sejam $f,g: M \rightarrow N$ onde M e N são variedades de dimensão n , fechadas, conexas e orientadas. Então, o número de Lefschetz $\Lambda(f,g)$ está definido. Usando os subgrupos de Jiang $J(f)$ e $J(g)$, mostramos que podemos dar estimativas para $N(f,g)$, desde que conheçamos $\Lambda(f,g)$ e os homomorfismos induzidos $f_{1*}, g_{1*}: H_1(M) \rightarrow H_1(N)$.

Se M e N possuem grupos fundamentais finitos, então $\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g})$

também está definido, onde $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são levantamentos de f e g , respectivamente. Neste caso, apresentamos algumas relações envolvendo $\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g})$.

No capítulo 3, são feitas algumas aplicações.

Sejam $f, g: M \rightarrow M$ onde M é fechada, conexa, orientada e suponhamos que $H^*(M, Q)$ possua um sistema simples de geradores.

$$i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_r}, p_{\alpha_{r+1}}, \dots, p_{\alpha_{r+s}}$$

onde i_{α_j} , $1 \leq j \leq r$ são de graus ímpares e $p_{\alpha_{r+k}}$, $1 \leq k \leq s$ são de graus pares.

Seja $f^*: H^*(M, Q) \rightarrow H^*(M, Q)$ a induzida de f .

Suponhamos que

$$f^*(i_{\alpha_u}) = \sum_{v=1}^r a_{vu} i_{\alpha_v} + t_u \quad \text{e} \quad f^*(p_{\alpha_{r+j}}) = \sum_{y=1}^s a_{r+y, r+j} p_{\alpha_{r+y}} + t_j$$

e consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} i_A & 0 \\ 0 & p_A \end{pmatrix}$$

Analogamente, se $g^*: H^*(M, Q) \rightarrow H^*(M, Q)$ é a induzida de g , podemos considerar a matriz

$$B = \begin{pmatrix} i_B & 0 \\ 0 & p_B \end{pmatrix}$$

Mostramos que $\Lambda(f, g) = \det(i_B - i_A) \cdot \phi(p_B + p_A)$ onde $\phi(p_B + p_A)$ é, a menos do sinal das permutações, o determinante da matriz $(p_B + p_A)$.

Seja a tripla (M, m, e) onde M é como acima, $e \in M$ e a aplicação $m: M \times M \rightarrow M$ é tal que $m(x, e) = m(e, x) = x$ para todo $x \in M$. Seja $m_k: M \rightarrow M$, definida do seguinte modo: $m_0(x) = e$, $m_1(x) = x$ e para todo $k \geq 2$, $m_k(x) = m(x, m_{k-1}(x))$. Considerando a equação $m_k(x) = m_s(x)$, $k > s$ obtivemos um limitante inferior para o número de soluções desta equação, estendendo o resultado de [7], onde Brown considera a equação $m_k(x) = y$, $y \in M$.

Seja $R_{k,s} = \{x \in M \text{ tal que } m_k(x) = m_s(x) \text{ e } m_i(x) \neq m_j(x) \text{ para todo } k > i > j \text{ e } s \geq j \geq 0\}$. Como $R_{k,s} \subseteq \text{Coinc}(m_k, m_s)$ então $R_{k,s}$ se separa em um número finito N de classes de equivalência. Empregando os resultados do capítulo 2, conseguimos uma estimativa para N , que generaliza o resultado principal de [8], onde Brown e Hales consideram a equação $m_k(x) = e$.

No apêndice I, se encontra a demonstração da invariância homotópica do número de Nielsen.

No apêndice II demonstramos que se $f, g: M \rightarrow N$ são aplicações onde M e N são variedades de dimensão n , compactas e conexas, então existe um par de aplicações (f', g') homotópica ao par (f, g) , tal que $\text{Coinc}(f', g')$ é um conjunto finito de pontos isolados.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES E TEOREMAS BÁSICOS

Neste capítulo foram colocados alguns fatos básicos que serão utilizados nos demais capítulos.

As aplicações envolvidas neste trabalho serão supostas sempre contínuas.

§1. RECOBRIMENTOS

Neste parágrafo vamos considerar aplicações $f: X \rightarrow Y$ onde X e Y são espaços conexos, localmente conexos por caminhos e semi-localmente 1-conexos. Portanto, X e Y admitem um recobrimento universal.

Denotemos por $p: \tilde{X} \rightarrow X$ e $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ suas aplicações de recobrimento. Escolhamos $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ como pontos bases de X e $\tilde{X}$ respectivamente e, $y_0 \in Y$ e $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0)$ como pontos bases de Y e $\tilde{Y}$, respectivamente.

Para maiores detalhes sobre o conceito de espaços de recobrimento, ver [14], capítulo 6.

1.1 - Definição

Suponhamos $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação. Se $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ satisfaz a condição $q \circ \tilde{f} = f \circ p: \tilde{X} \rightarrow Y$ então $\tilde{f}$ é chamada um levan

tamento da aplicação $f: X \rightarrow Y$.

Uma translação de $\tilde{X}$ é uma aplicação $\gamma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \gamma = p$ isto é, um levantamento da identidade de X .

1.2 - Observação

As translações de $\tilde{X}$ formam um grupo $T = T(\tilde{X}, p)$ isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$.

1.3 - Proposição

a) Para todo $x \in X$ e quaisquer $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x)$, existe uma única translação $\gamma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\gamma(\tilde{x}) = \tilde{x}'$.

b) Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação. Dados $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, sejam $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\tilde{y} \in q^{-1}(y)$ arbitrários. Então, existe um único levantamento $\tilde{f}$ de f tal que $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

c) Quaisquer que sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ levantamentos de $f: X \rightarrow Y$, existe um único $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $\tilde{f}' = \gamma \circ \tilde{f}$.

([14], cap.6)

1.4 - Definição

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação e $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ um levantamento de f . Se $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ é arbitrário, então $\tilde{f} \circ \alpha$ também é um levantamento de f . Assim, existe um único levantamento $\tilde{f}_\pi(\alpha) \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $\tilde{f} \circ \alpha = \tilde{f}_\pi(\alpha) \circ \tilde{f}$.

Portanto, fixado $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\pi: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ \alpha &\rightarrow \tilde{f}_\pi(\alpha)\end{aligned}$$

1.5 - Lema

A aplicação $\tilde{f}_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um homomorfismo. Além disso, se $\tilde{\omega}$ é qualquer caminho em $\tilde{Y}$ de $\tilde{y}_0$ até $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$ e $\omega = p\tilde{\omega}$ é sua projeção em Y , então o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\omega_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow & \underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{f}_\pi} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

é comutativo, isto é, $\tilde{f}_\pi = \omega_* \circ f_\pi$ onde f_π é o homomorfismo induzido por f , em homotopia e ω_* é o isomorfismo induzido pelo caminho ω .

([1], pag 25)

1.6 - Lema

O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\tilde{f}_\pi} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ H_1(X) & \xrightarrow{f_{1*}} & H_1(Y)\end{array}$$

onde θ é a abelianização e f_{1*} é o homomorfismo induzido por f , em homologia.

([1], pag 27)

§2. SUBGRUPOS DE JIANG

As aplicações $f: X \rightarrow Y$ envolvidas neste parágrafo são entre espaços X e Y como no parágrafo anterior.

1.7 - Definição

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação e $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ um levantamento de f . Definimos

$J(\tilde{f}) = \{\alpha \in \pi_1(Y, y_0) \text{ tal que existe uma homotopia } H: X \times I \rightarrow Y \text{ com } H(x, 0) = H(x, 1) = f(x) \text{ que se levanta a uma ho}$
 $\text{motopia } \tilde{H}: \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{Y} \text{ com } \tilde{H}(\tilde{x}, 0) = \tilde{f}(\tilde{x}) \text{ e } \tilde{H}(\tilde{x}, 1) = (\alpha \circ \tilde{f})(\tilde{x})\}$

$J(\tilde{f})$ é um subgrupo de $\pi_1(Y, y_0)$. ([1], pag 30).

1.8. Lema

$J(\tilde{f}) \subseteq Z(\tilde{f}_\pi(\pi_1(X, x_0)), \pi_1(Y, y_0)) = \{\beta \in \pi_1(Y, y_0) \text{ tal que}$
 $\beta \cdot \tilde{f}_\pi(\alpha) = \tilde{f}_\pi(\alpha) \cdot \beta \text{ para todo } \alpha \in \pi_1(X, x_0)\}$. Em particular,
 $J(\text{id}_{\tilde{X}}) \subseteq Z(\pi_1(X, x_0))$ onde $Z(\pi_1(X, x_0))$ denota o centro de
 $\pi_1(X, x_0)$.

Demonstração

Análoga à do Lema 3.3, pag 30 de [1].

1.9. Definição

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação. Definimos

$J(f, x_0) = \{\alpha \in \pi_1(Y, f(x_0)) \text{ tal que existe uma homotopia}$

$H: X \times I \rightarrow Y$ com $H(x,0) = H(x,1) = f(x)$ de modo que o laço
 $H(x_0): I \rightarrow Y$ definido por $H(x_0)(t) = H(x_0,t)$ satisfaz $\{H(x_0)\} = \alpha$.

Se $X = Y$ e f é a aplicação identidade de X , defini-
 mos $J(X) = J(\text{id}_X, x_0)$.

$J(f, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(Y, f(x_0))$. ([1], pag 31)

1.10 - Lema

$$J(f, x_0) \subseteq Z\left(f_{\pi}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, f(x_0)))\right).$$

Em particular $J(\text{id}_X) \subseteq Z(\pi_1(X, x_0))$.

Demonstração

Análoga à do lema 3.7., pag 31, de [1]. ■

1.11 - Lema

Se x e x' são dois pontos quaisquer de X então, pa-
 ra toda aplicação $f: X \rightarrow Y$ temos que $J(f, x)$ é isomorfo a
 $J(f, x')$.

Demonstração

Análoga à do lema 3.9., pag 31, de [1]. ■

1.12 - Lema

Se $f, f': X \rightarrow Y$ são aplicações homotópicas, então
 $J(f, x_0)$ é isomorfo a $J(f', x_0)$.

Demonstração

Análoga à do lema 6, pag 100, de [6]. ■

1.13 - Lema

Sejam $f: X, x_0 \rightarrow Z, z_0$ e $g: Y, y_0 \rightarrow U, u_0$. Então,
 $J(f \times g, (x_0, y_0))$ é isomorfo a $J(f, x_0) \times J(g, y_0)$.

Demonstração

Temos que $J(f, x_0) \subseteq \pi_1(Z, f(x_0))$ e $J(g, y_0) \subseteq \pi_1(U, g(y_0))$

Sejam $p_Z: Z \times U \rightarrow Z$ e $p_U: Z \times U \rightarrow U$ as aplicações
projeções. Consideremos o isomorfismo

$$(p_{Z\pi}, p_{U\pi}): \pi_1(Z \times U, (f(x_0), g(y_0))) \rightarrow \pi_1(Z, f(x_0)) \times \pi_1(U, g(y_0))$$

Basta mostrar que a restrição

$$(p_{Z\pi}, p_{U\pi})|_{J(f \times g, (x_0, y_0))}: J(f \times g, (x_0, y_0)) \rightarrow J(f, x_0) \times J(g, y_0)$$

é sobrejetora.

Tomemos $\alpha \in J(f, x_0)$ e $\beta \in J(g, y_0)$ arbitrários. Então,
existem homotopias $H: X \times I \rightarrow Z$ e $G: Y \times I \rightarrow U$ tais que:

$$H(x, 0) = H(x, 1) = f(x), \quad \{H(x_0)\} = \alpha$$

$$G(y, 0) = G(y, 1) = g(y), \quad \{G(y_0)\} = \beta$$

Consideremos a homotopia

$$S: X \times Y \times I \rightarrow Z \times U$$

definida por $S(x,y,t) = (H(x,t), G(y,t))$

$$\text{Então, } S(x,y,0) = S(x,y,1) = (f \times g)(x,y).$$

$$\text{Além disso, } S(x_0, y_0)(t) = S(x_0, y_0, t) =$$

$$(H(x_0, t), G(y_0, t)) = (H(x_0), G(y_0))(t)$$

$$\text{Portanto, } \{(H(x_0), G(y_0))\} \in J(f \times g, (x_0, y_0)) \text{ e}$$

$$(p_Z, p_U)_{\pi}(\{(H(x_0), G(y_0))\}) = (\{H(x_0)\}, \{G(y_0)\}) = (\alpha, \beta).$$

1.14 - Teorema

Seja X um poliedro conexo esférico isto é, $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $i > 1$ e seja $f: X \rightarrow X$ uma aplicação.

Então,

$$Z(f_{\pi}(\pi_1(X, x_0)), \pi_1(X, x_0)) \subseteq J(f, x_0)$$

Em particular,

$$Z(\pi_1(X, x_0)) \subseteq J(X)$$

([6], pag 102)

1.15 - Teorema

A classe dos espaços conexos por caminhos satisfazendo a condição $\pi_1(X, x_0) = J(X)$ é fechado sob homotopia e sob a operação produto topológico, e contém os seguintes:

- i) espaços simplesmente conexos
- ii) espaços de lens generalizados $L(m; q_1, q_2, \dots, q_n)$
- iii) H - espaços
- iv) espaços homogêneos da forma G/G_0 onde G é um grupo topológico e G_0 um subgrupo de Lie compacto e conexo.

([1], pag 32)

§3 - ESPAÇOS ANR

1.16 - Definição

Um subconjunto A de um espaço X é chamado um retrato de vizinhança de X , se existe um subconjunto aberto U de X contendo A , e uma retração de U em A .

1.17 - Definição

Um espaço métrico X compacto, é um retrato de vizinhança absoluto (ANR compacto) se ele possui a seguinte propriedade: se A é um subespaço de um espaço métrico separável Y e A é homeomorfo a X , então A é um retrato de vizinhança de Y .

Todo poliedro compacto e, em particular toda variedade compacta, é um ANR compacto. ([6], pag 39).

1.18 - Definição

Dizemos que um espaço métrico compacto X , com métrica d , é uniformemente localmente contrátil (ULC) se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se:

$$W = \{(x, x') \in X \times X \text{ tal que } d(x, x') < \delta\}$$

então existe uma aplicação $\gamma: W \times I \rightarrow X$ satisfazendo

$$\gamma(x, x', 0) = x \qquad \qquad \qquad \gamma(x, x', 1) = x'$$

$$\gamma(x, x, t) = x \text{ para todo } t \in I$$

$$\text{diam}(\gamma(x, x') \times I) < \epsilon \text{ para todo } (x, x') \in W.$$

Todo ANR compacto é ULC ([6], pag 39).

§4. ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES E CLASSE DE THOM

Para maiores detalhes sobre este parágrafo, ver [13], parte III, § 22 e parte IV, § 30.

Seja M uma variedade de dimensão n sem bordo e

$$M^0 = \{(x, \alpha_x) \text{ tal que } x \in M \text{ e } \alpha_x \in H_n(M, M-x) \cong \mathbb{Z}\}.$$

Para cada aberto U de M , definamos

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) \text{ tal que } x \in U \text{ e } \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\},$$

onde $j_x^U: H_n(M, M-U) \rightarrow H_n(M, M-x)$

é o homomorfismo induzido da aplicação inclusão.

Esses conjuntos formam uma base para a topologia de M^0 de forma que $p: M^0 \rightarrow M$, $p(x, \alpha_x) = x$ é uma aplicação de recobrimento cuja fibra sobre um ponto x é o módulo $H_n(M, M-x)$.

1.19 - Teorema

M é orientável se, e somente se, existe uma aplicação $s: M \rightarrow M^0$ com $\text{pos} = \text{id}_M$ tal que $s(x)$ é um gerador de $H_n(M, M-x) \cong \mathbb{Z}$, para cada $x \in M$. Tal aplicação s é chamada uma orientação de M .

([13], pag 119). ■

1.20 - Teorema

Se M é uma variedade de dimensão n , sem bordo, conexa, compacta, orientável, com orientação s , existe uma única classe $z \in H_n(M)$ tal que $i_{x*}(z) = s(x)$ para cada $x \in M$, onde $i_{x*}: H_n(M) \rightarrow H_n(M, M-x)$ é o homomorfismo induzido da inclusão. Esta classe $z \in H_n(M)$ é chamada classe fundamental de M .

([22], pag 140). ■

Seja $M^{0*} = \{(x, \alpha_x) \text{ tal que } x \in M \text{ e } \alpha_x \in H^n(M, M-x)\}$ e consideremos $p: M^{0*} \rightarrow M$, $p(x, \alpha_x) = x$.

A orientação $s: M \rightarrow M^0$ determina uma aplicação dual $s^*: M \rightarrow M^{0*}$ com $\text{pos}^* = \text{id}_M$ tal que $\langle s^*(x), s(x) \rangle = 1$, para todo $x \in M$.

Consideremos a aplicação

$$\ell_x: (M, M-x) \rightarrow (MXM, MXM - \Delta(M))$$

definida por $\ell_x(a) = (a, x)$ para todo $a \in M$.

1.21 - Teorema

Seja M uma variedade de dimensão n , sem bordo, o rientada. Então, existe uma única classe de cohomologia $\mu = \mu_M$ em $H^n(M \times M, M \times M - \Delta(M))$ tal que para todo $x \in M$, $s^*(x) = \ell_x^*(\mu)$. Esta classe é chamada classe de Thom associada à orientação s de M .

§5. INDICE DE PONTOS DE COINCIDÊNCIA

1.22 - Definição

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ onde X e Y são espaços topológicos. Uma coincidência de f e g é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Vamos denotar por $\text{Coinc}(f, g)$ o conjunto de todas as coincidências de X .

1.23 - Definição

Sejam M_1 e M_2 variedades de dimensão n , conexas, sem bordo, orientadas e suponhamos M_1 compacta. Consideremos W um subconjunto aberto de M_1 e $f, g: W \rightarrow M_2$ aplicações para as quais

$$K = \{x \in W \text{ tal que } f(x) = g(x)\}$$

é um subconjunto compacto de W .

Pela normalidade de M_1 , existe um subconjunto aberto V de M_1 com $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq W$. Denotemos por M_2^x o par $(M_2 \times M_2, M_2 \times M_2 - \Delta(M_2))$ e consideremos a composta:

$$H_n(M_1) \rightarrow H_n(M_1, M_1 - V) \xrightarrow[\cong]{\text{excisão}} H_n(W, W - V) \xrightarrow{(f,g)_*} H_n(M_2^x) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}$$

onde $(f,g): W \rightarrow M_2 \times M_2$ é dada por $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$, $\Delta(M_2) = \{(x,x) \text{ tal que } x \in M_2\}$ e $\phi: H_n(M_2^x) \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por $\phi(\alpha) = \langle \mu, \alpha \rangle$ onde $\mu \in H^n(M_2^x)$ é a classe de Thom associada a orientação dada de M_2 . Que ϕ é um isomorfismo, ver [22], páginas 150 e 177.

Assim sendo, o índice de coincidência do par (f,g) é definido como sendo o número inteiro $I(f,g,W)$ dado pela imagem da classe fundamental $z_1 \in H_n(M_1)$, sob a composição acima.

A definição é independente da escolha do aberto V .

([22], pag 177)

1.24 - Propriedades do índice

i) Localização

Sejam $f,g: W \rightarrow M_2$ como definição anterior. Se W' é outro aberto de M_1 e $f', g': W' \rightarrow M_2$ são aplicações tal que $f = f'$ e $g = g'$ em $W \cap W'$ e além disso

$K' = \{x \in W' \text{ tal que } f'(x) = g'(x)\}$ é igual a K , então

$$I(f, g, W) = I(f, g, W')$$

([22], pag 179).

ii) Aditividade

Sejam $f, g: W \rightarrow M_2$ como na definição anterior. Suponha mos que $W = \bigcup_{i=1}^r W_i$ onde cada W_i é um aberto de M_1 e $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Denotemos por K_i o compacto $K \cap W_i$, por $f_i = f|_{W_i}$ e $g_i = g|_{W_i}$. Então

$$I(f, g, W) = \sum_{i=1}^r I(f_i, g_i, W_i)$$

([22], pag 178)

iii) Invariança homotópica

Sejam $f_t, g_t: W \rightarrow M_2$, $0 \leq t \leq 1$ homotopias e denotemos por $K_t = \{x \in W \text{ tal que } f_t(x) = g_t(x)\}$ para $0 \leq t \leq 1$. Suponhamos que

$$\bigcup_{t \in I} K_t = \bigcup_{t \in I} (\text{Coinc}(f_t, g_t) \cap W)$$

seja um subconjunto compacto de W . Então,

$$I(f_0, g_0, W) = I(f_1, g_1, W)$$

([22], pag 179)

iv) Multiplicatividade

Sejam $f, g: W \subseteq M_1 \rightarrow M_2$ e $f', g': W' \subseteq M'_1 \rightarrow M'_2$ como na definição 1.23, onde M_1 e M_2 são de dimensão n e M'_1 e M'_2 são de dimensão m . Então,

$$I(f \times f', g \times g', W \times W') = I(f, g, W) \cdot I(f', g', W')$$

([22], pag 179)

1.25. Observação

Sejam $f, g: U \rightarrow N$ e $h, k: W \rightarrow M$ como na definição 1.23, onde U é um aberto de M e W é um aberto de N . Então, as composições $f^{-1}(W) \cap g^{-1}(W) \xrightarrow{hof, kog} M$ e $h^{-1}(U) \cap k^{-1}(U) \xrightarrow{foh, gok} N$ estão definidas.

Não é verdade em geral que

$$I(hof, kog, f^{-1}(W) \cap g^{-1}(W)) = I(foh, gok, h^{-1}(U) \cap k^{-1}(U)) \quad \text{ou}$$

seja, a comutatividade que é uma propriedade válida na teoria dos pontos fixos, não vale para pontos de coincidência.

Para justificar isso, consideremos as aplicações

$f, g, h, k: T^2 \rightarrow T^2$, onde T^2 denota o toro de dimensão 2, cujos homomorfismos induzidos $f^{1*}, g^{1*}, h^{1*}, k^{1*}: H^1(T^2) \rightarrow H^1(T^2)$ têm como matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente

No capítulo 3, vamos mostrar que se $f, g: T^2 \rightarrow T^2$ então $I(f, g, T^2) = \det(B-A)$ onde A e B são as matrizes dos homomorfismos induzidos $f^{1*}, g^{1*}: H^1(T^2) \rightarrow H^1(T^2)$.

Desta maneira

$$I(f \circ h, g \circ k, T^2) = \det(B-A \cdot C) = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$I(h \circ f, k \circ g, T^2) = \det(B-C \cdot A) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

o que justifica a observação.

1.26 - Teorema

Sejam M_1, M'_1, M_2, M'_2 variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1, M'_1 compactas. Seja $h_1: W \rightarrow W' = h_1(W)$ um homeomorfismo preservando orientação, onde W é um aberto de M_1 e W' um aberto de M'_1 . Consideremos as aplicações $f, g: W \rightarrow M_2$ e $f', g': W' \rightarrow M'_2$ tal que $K = W \cap \text{Coinc}(f, g)$ seja um subconjunto compacto de W e $K' = W' \cap \text{coinc}(f', g')$ seja um subconjunto compacto de W' . Além disso, suponhamos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f, g} & M_2 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ W' & \xrightarrow{f', g'} & M'_2 \end{array}$$

seja comutativo, onde $h_2: M_2 \rightarrow M'_2$ é um homeomorfismo local preservando orientação. Então,

$$I(f,g,W) = I(f',g',W')$$

Demonstração

Consideremos V um aberto de M_1 tal que $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq W$. Temos que $V' = h_1(V)$ é um aberto e $V' \subseteq \bar{V}' \subseteq W'$. Da comutatividade do diagrama e do fato de h_2 ser um homeomorfismo local, segue que $K' \subseteq h_1(K)$. Daí, $K' \subseteq V' \subseteq \bar{V}' \subseteq W'$.

Seja $x \in K$ arbitrário e $x' = h_1(x) \in K'$. Desde que M_1 e M'_1 são orientadas, existe um aberto U de M_1 e um aberto U' de M'_1 com $x \in U \subseteq V$, $x' \in U' \subseteq V'$ e existem $\alpha_U \in H_n(M_1, M_1 - U)$ e $\alpha_{U'} \in H_n(M'_1, M'_1 - U')$ tal que $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$ é um gerador de $H_n(M_1, M_1 - x)$ e $j_{x'}^{U'}(\alpha_{U'}) = \alpha_{x'}$ é um gerador de $H_n(M'_1, M'_1 - x')$. ([13], pag 112)

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

onde as aplicações $k_j, k'_j, i_j, i'_j, j=1,2,3$ são aplicações induzidas da inclusão e $e_j, e'_j, j=1,2,3$ são excisões.

Como h_1 preserva orientação, temos que $h_{1*} \circ e_3(\alpha_x) = e'_3(\alpha_{x'})$.
Sejam $z \in H_n(M_1)$ e $z' \in H_n(M'_1)$ classes fundamentais. Então $i_{3*}(z) = \alpha_x$ e $i'_{3*}(z') = \alpha_{x'}$.

Consideremos $\mu \in H^n(M_2^x)$ e $\mu' \in H^n(M_2'^x)$ as classes de Thom correspondentes às orientações s de M_2 e s' de M_2' , respectivamente.

Levando-se em conta os fatos acima e a comutatividade do diagrama, temos:

$$\begin{aligned} I(f', g', W') &= \langle \mu', (f', g')_* \circ e'_1 \circ i'_{1*}(z') \rangle = \\ &= \langle \mu', (h_2 \times h_2)_* \circ (f, g)_* \circ e_1 \circ i_{1*}(z) \rangle = \\ &= \langle (h_2 \times h_2)^*(\mu'), (f, g)_* \circ e_1 \circ i_{1*}(z) \rangle \end{aligned}$$

Desta forma, a demonstração ficará completa se mostrarmos que $(h_2 \times h_2)^*(\mu') = \mu$.

Consideremos $y = f(x) = g(x)$ e $y' = h_2(y)$

Em virtude de 1.21., $s^*(y) = \ell_Y^*(\mu)$ e $s'^*(y') = \ell_{Y'}^*(\mu')$ onde s^* e s'^* são duais das orientações $s: M_2 \rightarrow M_2^0$ e $s': M_2' \rightarrow M_2'^0$, respectivamente. Mas, $s(y) = \alpha_y$ e $s'(y') = \alpha_{y'}$. Por isso, basta verificarmos que $\langle \ell_Y^* \circ (h_2 \times h_2)^*(\mu'), \alpha_y \rangle = 1$.

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M_2^x) & \xrightarrow{(h_2 \times h_2)_*} & H_n(M_2'^x) \\ \uparrow \ell_{Y*} & & \uparrow \ell_{Y'*} \\ H_n(M_2, M_2 - Y) & \xrightarrow{h_{2*}} & H_n(M_2', M_2' - Y') \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle \ell_Y^* \circ (h_2 \times h_2)^* (\mu'), \alpha_Y \rangle &= \langle \mu', (h_2 \times h_2)_* \circ \ell_{Y*} (\alpha_Y) \rangle = \\ &= \langle \mu', \ell_{Y*} \circ h_{2*} (\alpha_Y) \rangle = \langle \ell_Y^* (\mu'), h_{2*} (\alpha_Y) \rangle = \end{aligned}$$

Desde que h_{2*} preserva orientação, $h_{2*} (\alpha_Y) = \alpha_{Y'}$.

Logo

$$\begin{aligned} \langle \ell_Y^* \circ (h_2 \times h_2)^* (\mu'), \alpha_Y \rangle &= \langle \ell_{Y'}^* (\mu'), \alpha_{Y'} \rangle = \\ &= \langle s'^* (Y'), \alpha_{Y'} \rangle = 1, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Seja W um aberto de M_1 e suponhamos que $f, g: W \rightarrow M_2$ tenham um único ponto de coincidência $x \in W$. Denotemos por D^n o disco unitário fechado em R^n . A aplicação $F: D^n \times D^n \rightarrow D^n$ definida por $F(x, y) = 1/2(y-x)$ induz uma equivalência de homotopia de pares

$$F: (D^n \times D^n, D^n \times D^n - \Delta(D^n)) \rightarrow (D^n, D^n - 0) \quad ([22], \text{pag } 181)$$

Consideremos $Y \subseteq M_2$ um conjunto fechado, $y = f(x) = g(x) \in Y$ e $h: Y \rightarrow D^n$ um homeomorfismo levando y na origem. Existe um aberto V de M_1 com $x \in V$, $\bar{V} \subseteq W \cap f^{-1}(Y) \cap g^{-1}(Y)$ e um homeomorfismo $k: \bar{V} \rightarrow D^n$. Vamos assumir que h e k preservam orientação.

Definamos a aplicação $\phi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ como sendo a composta.

$$S^{n-1} \xrightarrow{k^{-1}} \partial \bar{V} \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y - \Delta(Y) \xrightarrow{h \times h} D^n \times D^n - \Delta(D^n) \xrightarrow{F} D^{n-0} \xrightarrow{\pi} S^{n-1}$$

onde π denota a projeção radial da origem.

O teorema seguinte tem demonstração análoga à da proposição 6.9., pag 182, de [22].

1.27. Teorema (índice de pontos de coincidência isolados)

$$I(f,g,W) = \text{grau } \emptyset.$$

§6. NÚMERO DE LEFSCHETZ

1.28. Definição

Sejam $f,g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas e orientadas. Usando o homomorfismo de coeficientes $\varepsilon: Z \rightarrow Q$, denotemos por $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$ as imagens das classes fundamentais $z_1 \in H_n(M_1)$ e $z_2 \in H_n(M_2)$ na homologia racional, ou seja, $\bar{z}_1 = \varepsilon_*(z_1) \in H_n(M_1, Q)$ e $\bar{z}_2 = \varepsilon_*(z_2) \in H_n(M_2, Q)$.

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_Q(M_1, Q) & \xrightarrow{f_{q*}} & H_n(M_2, Q) \\ \uparrow D_1 & & \uparrow D_2 \\ H^{n-q}(M_1, Q) & \xleftarrow{g^{n-q*}} & H^{n-q}(M_2, Q) \end{array}$$

onde D_1 e D_2 representam os isomorfismos dados pela dualidade de Poincaré, correspondentes a $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$ respectivamente.

Para cada q , definamos $\theta_q: H_q(M_1, Q) \rightarrow H_q(M_1, Q)$ por $\theta_q = D_1 \circ g^{n-q*} \circ D_2^{-1} \circ f_{q*}$.

O número de Lefschetz do par (f, g) é definido como sen do o número racional.

$$\Lambda(f, g) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr } \theta_q$$

Observemos que, se $M_1 = M_2$ e g é a aplicação identidade então $\Lambda(f, g) = \Lambda(f)$.

O número $\Lambda(f, g)$ depende apenas das classes de homotopias de f e g .

1.29. Definição alternativa

Para cada r , seja $\theta'_r: H^r(M_2, Q) \rightarrow H^r(M_2, Q)$ dada por $\theta'_r = D_2^{-1} \circ f_{n-r*} \circ D_1 \circ g^{r*}$.

Definimos

$$\Lambda'(f, g) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \text{tr } \theta'_r$$

É imediato que,

$$\Lambda'(f, g) = (-1)^n \Lambda(f, g)$$

1.30 - Teorema (normalização)

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas e orientadas. Então, $I(f, g, M_1) = \Lambda(f, g)$ ([22], pag 187).

1.31 - Corolário

Se $\Lambda(f, g) \neq 0$ então f e g têm um ponto de coincidência em M_1 . ([22], pag 187).

CAPÍTULO 2

NÚMERO DE NIELSEN PARA COINCIDÊNCIA DE FUNÇÕES

Em [1], Boju estudou o número de Nielsen para pontos fixos de funções entre poliedros conexos e compactos, utilizando espaços de recobrimento.

Motivados por este fato, estudamos neste capítulo o número de Nielsen $N(f,g)$ para coincidência de funções, também usando espaços de recobrimento.

Neste caso, as aplicações $f,g: M_1 \rightarrow M_2$ envolvidas são entre variedades M_1 e M_2 de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1 compacta.

No parágrafo 4, vamos apresentar alguns resultados que permitem dar uma estimativa para $N(f,g)$. Particularmente o corolário 2.33, nos mostra que, se $J(M_2) = \pi_1(M_2)$, podemos computar $N(f,g)$ desde que conheçamos $\Lambda(f,g)$ e os homomorfismos induzidos $f_{1*}, g_{1*}: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$. Observamos que, nessas computações, exigimos a compacidade de M_2 , para garantir que $\Lambda(f,g)$ esteja definido.

Se M_1 e M_2 possuem grupos fundamentais finitos, o número de Lefschetz $\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g})$ onde $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são levantamentos de f e g , respectivamente, também está definido.

No último parágrafo deste capítulo, obtemos algumas relações envolvendo $\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g})$ que são úteis para calcular $\Lambda(f,g)$ e $N(f,g)$.

§1. CLASSES DE PONTOS DE COINCIDÊNCIA

Neste parágrafo vamos considerar aplicações $f: X \rightarrow Y$ onde X e Y são poliedros conexos e X compacto. Desde que X e Y são poliedros, eles possuem um recobrimento universal. Sejam $p: \tilde{X} \rightarrow X$ e $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ suas aplicações de recobrimento. Consideremos $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $y_0 \in Y$ e $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0)$, pontos bases de X , $\tilde{X}$, Y e $\tilde{Y}$, respectivamente.

2.1. - Proposição

$$\text{Coinc}(f, g) = \bigcup_{\tilde{f}, \tilde{g}} p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$$

onde a reunião varia sobre todos os levantamentos de f e g .

Demonstração

Decorre facilmente da proposição 1.3 e da definição de levantamento. ■

2.2 - Proposição

Se $p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}) \cap p \text{ Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}') \neq \emptyset$ então $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$ e $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}_{\pi}(\gamma^{-1})$ para algum $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ e algum $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$.

Demonstração

Suponhamos que $x \in p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}) \cap p \text{ Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}')$. Então, $x = p(\tilde{x})$ onde $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x})$ e $x = p(\tilde{x}')$ onde $\tilde{f}'(\tilde{x}') = \tilde{g}'(\tilde{x}')$. Pela proposição 1.3, existe um único $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$ e um único $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{x}' = \gamma(\tilde{x})$. Assim, $\tilde{f}'(\tilde{x}') = \tilde{g}'(\tilde{x}') = \alpha \circ \tilde{g} \circ \gamma(\tilde{x}) = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{g}(\tilde{x}) = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x}) = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1}) \circ \tilde{f}(\tilde{x}')$ o que implica pela unicidade dos levantamentos que $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1})$. ■

2.3 - Proposição

Sejam $\tilde{g}$ e $\tilde{g}'$ levantamentos de $g: X \rightarrow Y$. Portanto, $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$ para algum $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$. Se $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ são levantamentos de $f: X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$ para algum $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ então $\text{Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}') = \gamma \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$.

Demonstração

Se $\tilde{x} \in \text{Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}')$ então $\tilde{f}'(\tilde{x}) = \tilde{g}'(\tilde{x})$. Usando a hipótese, é fácil verificar que $\tilde{f}(\gamma^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{g}(\gamma^{-1}(\tilde{x}))$. Por conseguinte, $\tilde{x} \in \gamma \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$.

Por outro lado, se $\tilde{x} \in \gamma \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ então $\tilde{x} = \gamma(\tilde{x}')$ onde $\tilde{f}(\tilde{x}') = \tilde{g}(\tilde{x}')$. Consequentemente, $\tilde{f}'(\tilde{x}) = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x}') = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{g}(\tilde{x}') = (\alpha \circ \tilde{g})(\gamma(\tilde{x}')) = \tilde{g}'(\tilde{x})$ ou seja, $\tilde{x} \in \text{Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}')$. ■

2.4 - Corolário

$p\text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}) = p\text{Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}')$ se, e somente se, $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$ e $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$, para algum $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ e algum $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$.

Demonstração

Segue diretamente de 2.2 e 2.3. ■

2.5 - Definição

Sejam $\tilde{f}, \tilde{f}' : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ levantamentos de $f: X \rightarrow Y$ e $\tilde{g}, \tilde{g}' : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ levantamentos de $g : X \rightarrow Y$. Dizemos que o par de levantamentos $(\tilde{f}, \tilde{g})$ é equivalente ao par $(\tilde{f}', \tilde{g}')$ se $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$ e $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$ para algum $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ e algum $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$.

Esta relação é de equivalência. De fato:

i) Reflexiva

é imediata

ii) Simétrica

Suponhamos $(\tilde{f}, \tilde{g})$ equivalente a $(\tilde{f}', \tilde{g}')$. Então $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$ e $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$ para algum $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ e algum $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Assim, $\tilde{g} = \alpha^{-1} \circ \tilde{g}'$ e $\tilde{f} = \tilde{g}_\pi(\gamma^{-1}) \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{f}' \circ \gamma = (\tilde{g}_\pi(\gamma^{-1}) \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma)) \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma^{-1}) \circ \tilde{f}' \circ \gamma$. Não é difícil mostrar que

$\tilde{g}_\pi(\gamma^{-1}) \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma) \circ \tilde{g}' = \alpha^{-1} \circ \tilde{g}'$ o que pela unicidade dos levantamentos, implica que $\tilde{g}_\pi(\gamma^{-1}) \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma) = \alpha^{-1}$. Desta forma, a propriedade está verificada.

iii) Transitiva

Se (f, g) é equivalente a $(\tilde{f}', \tilde{g}')$ e $(\tilde{f}', \tilde{g}')$ é equivalente a $(\tilde{f}'', \tilde{g}'')$ então existem $\alpha, \alpha' \in \pi_1(Y, y_0)$ e $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$, $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$ e $\tilde{g}'' = \alpha' \circ \tilde{g}'$, $\tilde{f}'' = \alpha' \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma') \circ \tilde{f}' \circ \gamma'^{-1}$. Em decorrência, segue que $\tilde{g}'' = \alpha' \circ \alpha \circ \tilde{g}$ e $\tilde{f}'' = \alpha' \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma') \circ \alpha \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \circ \gamma'^{-1} =$
 $= (\alpha' \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma') \circ \alpha \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma'^{-1})) \circ \tilde{g}_\pi, (\gamma', \gamma) \circ \tilde{f} \circ (\gamma' \cdot \gamma)^{-1}$.

Não é difícil verificar que $\alpha' \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma') \circ \alpha \circ \tilde{g}'_\pi(\gamma'^{-1}) = \alpha' \circ \alpha$ e isto, mostra a propriedade transitiva.

2.6 - Definição

As classes de equivalência dadas pela definição anterior, são chamadas classes de levantamentos das aplicações f e g e denotadas por $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

2.7 - Definição

O subconjunto $p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ de $\text{Coinc}(f, g)$ é chamado classe de pontos de coincidência de f e g determinada pela classe de levantamentos $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

2.8 - Corolário

O conjunto $\text{Coinc}(f,g)$ se separa numa reunião disjunta de classes de pontos de coincidência. ■

Dois pontos $x_1, x_2 \in \text{Coinc}(f,g)$ estão na mesma classe de pontos de coincidência, se existem levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ de f e g , respectivamente, tal que $x_1 = p(\tilde{x}_1)$ e $x_2 = p(\tilde{x}_2)$ onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$.

Os dois resultados a seguir, nos dão uma outra maneira de verificar se dois pontos x_1 e x_2 estão na mesma classe de pontos de coincidência sem usar, explicitamente, espaços de recobrimento.

2.9 - Proposição

Dois pontos de coincidência x_1 e x_2 de $f, g: X \rightarrow Y$ pertencem à mesma classe de pontos de coincidência se, e somente se, existe um caminho λ em X de x_1 até x_2 tal que $f \circ \lambda$ é homotópico a $g \circ \lambda$ relativamente aos pontos finais.

Demonstração

Se x_1 e x_2 estão na mesma classe de pontos de coincidência então existem levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ de f e g , respectivamente, tal que $x_1 = p(\tilde{x}_1)$ e $x_2 = p(\tilde{x}_2)$ onde $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{g}(\tilde{x}_1)$ e $\tilde{f}(\tilde{x}_2) = \tilde{g}(\tilde{x}_2)$.

Seja $\tilde{\lambda}: I \rightarrow \tilde{X}$ um caminho com $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x}_1$ e $\tilde{\lambda}(1) = \tilde{x}_2$. Desde que $\tilde{Y}$ é simplesmente conexo segue que $\tilde{f} \circ \tilde{\lambda}$ é homotópico a $\tilde{g} \circ \tilde{\lambda}$. Projetando em X , obtemos que $f \circ \lambda$ é homotópico a $g \circ \lambda$ onde $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$.

Reciprocamente suponhamos que $x_1 \in p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ isto é, $x_1 = p(\tilde{x}_1)$ e $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{g}(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_1$. Mostremos que $x_2 \in p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ ou seja, $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_2)$ onde $\tilde{f}(\tilde{x}_2) = \tilde{g}(\tilde{x}_2)$. O caminho λ se levanta a um caminho $\tilde{\lambda}: I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x}_1$, $q \circ \tilde{f} \circ \tilde{\lambda} = f \circ \lambda$ e $q \circ \tilde{g} \circ \tilde{\lambda} = g \circ \lambda$. Assim, $\tilde{f} \circ \tilde{\lambda}$ e $\tilde{g} \circ \tilde{\lambda}$ são levantamentos de $f \circ \lambda$ e $g \circ \lambda$, respectivamente, começando em $\tilde{y}_1$. Como por hipótese $f \circ \lambda$ é homotópico a $g \circ \lambda$, segue que seus levantamentos que têm o mesmo ponto inicial $\tilde{y}_1$, devem ter o mesmo ponto final. Por conseguinte $\tilde{f} \circ \tilde{\lambda}(1) = \tilde{g} \circ \tilde{\lambda}(1)$. Seja $\tilde{\lambda}(1) = \tilde{x}_2$. Então $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_2)$ pois $p(\tilde{x}_2) = p \circ \tilde{\lambda}(1) = \lambda(1) = x_2$ e, portanto, $\tilde{f}(\tilde{x}_2) = \tilde{g}(\tilde{x}_2)$. ■

2.10 - Teorema

Os pontos $x_1, x_2 \in \text{Coinc}(f, g)$ estão na mesma classe de pontos de coincidência se, e somente se, dado um caminho qualquer $\gamma: I \rightarrow X$ ligando x_1 a x_2 , temos:

$$\{(f \circ \gamma^{-1}) \cdot (g \circ \gamma)\} = f_{\pi}(\alpha^{-1}) \cdot g_{\pi}(\alpha)$$

para algum $\alpha \in \pi_1(X, x_2)$

Demonstração

Se x_1 e x_2 estão na mesma classe de pontos de coincidência, segue por 2.9, que existe um caminho λ ligando x_1 a x_2 tal que $fo\lambda$ é homotópico a $go\lambda$, relativamente aos pontos finais. Seja γ um caminho arbitrário em X , ligando x_1 até x_2 . Temos que $go\gamma \circ (fo\lambda) \cdot (go\lambda^{-1}) \cdot (go\gamma) = (fo\lambda) \cdot [go(\lambda^{-1} \cdot \gamma)]$ relativamente a $\{0,1\}$ e $\lambda^{-1} \cdot \gamma$ é um laço em X com ponto base x_2 .

Seja $\sigma = \lambda^{-1} \cdot \gamma$. Então $go\gamma \circ (fo\lambda) \cdot (go\sigma)$ e σ é um laço em x_2 .

Assim,

$$\begin{aligned} (fo\gamma^{-1}) \cdot (go\gamma) &\sim (fo\gamma^{-1}) \cdot (fo\lambda) \cdot (go\sigma) = \\ &[fo(\gamma^{-1} \cdot \lambda)] \cdot (go\sigma) = (fo\sigma^{-1}) \cdot (go\sigma). \end{aligned}$$

Portanto, $\{(fo\gamma^{-1}) \cdot (go\gamma)\} = f_{\pi}(\alpha^{-1}) \cdot g_{\pi}(\alpha)$ onde $\alpha = \{\sigma\}$.

Reciprocamente, suponhamos que dado um caminho qualquer $\gamma: I \rightarrow X$ ligando x_1 a x_2 ,

$$(fo\gamma^{-1}) \cdot (go\gamma) \sim (fo\sigma^{-1}) \cdot (go\sigma) \text{ onde } \{\sigma\} = \alpha$$

Chamemos $\lambda = \gamma \cdot \sigma^{-1}$. Então,

$$(fo\lambda^{-1}) \cdot (go\lambda) = (fo\sigma) \cdot (fo\gamma^{-1}) \cdot (go\gamma) \cdot (go\sigma^{-1}) \sim \varepsilon$$

onde ε denota o laço constante em $f(x_2) = g(x_2)$. Isto quer dizer que x_1 e x_2 estão na mesma classe de pontos de coincidência. ■

2.11 - Proposição

Toda classe de pontos de coincidência de $f, g: X \rightarrow Y$ é um subconjunto aberto de $\text{Coinc}(f, g)$.

Demonstração

Seja $x_1 \in \text{Coinc}(f, g)$. Desde que X e Y têm recobrimientos universais eles são localmente conexos por caminhos e semi-localmente 1-conexos. Assim, existe uma vizinhança W de $f(x_1) = g(x_1)$ em Y tal que todo laço no ponto $f(x_1) = g(x_1)$ em W é trivial em Y e existe uma vizinhança U de x_1 , conexa por caminhos, tal que $U \subseteq f^{-1}(W) \cap g^{-1}(W)$.

Se $x_2 \in U \cap \text{Coinc}(f, g)$ é um elemento qualquer, seja λ um caminho em U de x_1 até x_2 . Então $f \circ \lambda \in W$ e $g \circ \lambda \in W$ e isto implica que $f \circ \lambda$ é homotópico a $g \circ \lambda$. Portanto, por 2.9., x_1 e x_2 estão na mesma classe de pontos de coincidência, o que mostra a proposição. ■

2.12 - Corolário

O número de classes de pontos de coincidência não vazias é finito.

Demonstração

Decorre do fato de $\text{Coinc}(f, g)$ ser um conjunto compacto. ■

2.13 - Corolário

Toda classe não vazia de pontos de coincidência de f e g é um subconjunto compacto.

Demonstração

Sejam $F_1, \dots, F_r$, classes de pontos de coincidência de f e g . Então, para cada $1 \leq k \leq r$, $F_k = \text{Coinc}(f, g) - \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r F_j$ é um subconjunto fechado em $\text{Coinc}(f, g)$. ■

2.14 - Lema

Sejam $f_0, f_1, g_0, g_1: X \rightarrow Y$ e suponhamos f_0 homotópica a f_1 e g_0 homotópica a g_1 . Então, as classes de pontos de coincidência de f_0 e g_0 estão em correspondência biunívoca com as classes de pontos de coincidência de f_1 e g_1 .

Demonstração

Seja $H: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f_0 e f_1 . Se $\tilde{f}_0$ é um levantamento da aplicação f_0 , existe um único levantamento $\tilde{H}: \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{Y}$ da homotopia H , tal que $\tilde{H}(\tilde{x}, 0) = \tilde{f}_0(\tilde{x})$, qualquer que seja $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Definamos $\tilde{f}_1: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ por $\tilde{f}_1 = \tilde{H}(\cdot, 1)$. É imediato que $\tilde{f}_1$ é um levantamento de f_1 . Analogamente, para $\tilde{f}_1$ levantamento de f_1 , utilizando-se da homotopia $H^{-1}(x, t) = H(x, 1-t)$, podemos obter um levantamento $\tilde{f}_0$ de f_0 .

Assim, a homotopia H define uma correspondência biunívoca η_H entre os levantamentos de f_0 e os levantamentos de f_1 .

Observemos que para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ e todo $\beta \in \pi_1(Y, y_0)$ temos que $\eta_H(\beta \circ \tilde{f}_0 \circ \alpha) = \beta \circ \eta_H(\tilde{f}_0) \circ \alpha$ (*)

De fato, a homotopia $\tilde{H}': \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{Y}$ definida por $\tilde{H}'(\tilde{x}, t) = \beta \circ \tilde{H}(\alpha(\tilde{x}), t)$ é um levantamento de H e além disso, $\tilde{H}'(\tilde{x}, 0) = \beta \circ \tilde{f}_0 \circ \alpha(\tilde{x})$. Desse modo, $\eta_H(\beta \circ \tilde{f}_0 \circ \alpha) = \tilde{H}'(\cdot, 1)$. Porém, para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{H}'(\tilde{x}, 1) = \beta \circ \tilde{f}_1 \circ \alpha(\tilde{x}) = \beta \circ \eta_H(\tilde{f}_1) \circ \alpha(\tilde{x})$, o que mostra a observação.

Consideremos agora a correspondência, que vamos denotar também por η_H , entre as classes de pontos de coincidência de f_0 e g_0 e as classes de pontos de coincidência de f_1 e g_0 , definida por

$$\eta_H: p \text{ Coinc}(\tilde{f}_0, \tilde{g}_0) \rightarrow p \text{ Coinc}(\eta_H(\tilde{f}_0), \tilde{g}_0)$$

Desde que.

$$p \text{ Coinc}(\tilde{f}_0, \tilde{g}_0) = p \text{ Coinc}(\tilde{f}'_0, \tilde{g}_0) \Leftrightarrow \tilde{f}'_0 = \tilde{g}_\pi(\gamma) \cdot \tilde{f}_0 \circ \gamma^{-1} \quad \text{para algum } \gamma \in \pi_1(X, x_0) \quad \text{por 2.4}$$

$$\Leftrightarrow \eta_H(\tilde{f}'_0) = \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \eta_H(\tilde{f}_0) \circ \gamma^{-1} \quad \text{por (*)}$$

$$\Leftrightarrow p \text{ Coinc}(\eta_H(\tilde{f}'_0), \tilde{g}_0) = p \text{ Coinc}(\tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \eta_H(\tilde{f}_0) \circ \gamma^{-1}, \tilde{g}_0) \quad \text{por 2.4}$$

então a correspondência η_H é bem definida e injetora.

A sobrejeção é óbvia.

Se $R: X \times I \rightarrow Y$ é uma homotopia entre g_0 e g_1 , analogamente R induz uma bijeção

$$\eta_R: p \text{ Coinc}(\tilde{f}_1, \tilde{g}_0) \longleftrightarrow p \text{ Coinc}(\tilde{f}_1, \eta_R(\tilde{g}_0)).$$

Desta forma, $\eta_{HR} = \eta_R \circ \eta_H$ define a correspondência biunívoca desejada. ■

2.15 - Definição

Definimos $R(f, g)$ como sendo o número de classes de pontos de coincidência de f e g , vazias ou não.

2.16 - Teorema

Sejam $f_0, f_1, g_0, g_1: X \rightarrow Y$. Se f_0 é homotópica a f_1 e g_0 é homotópica a g_1 , então:

$$R(f_0, g_0) = R(f_1, g_1)$$

Demonstração

Segue diretamente de 2.14. ■

§2 - CLASSES DE $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ conjugação

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações. Neste parágrafo também vamos supor que X e Y são poliedros conexos e X compacto.

Se $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é um levantamento de f , pela proposição 1.3.c., todos os levantamentos de f são dados por $\alpha \circ \tilde{f}$ onde $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$. Assim, de acordo com a definição 2.7., as classes de pontos de coincidência de f e g são da forma $p \text{ Coinc}(\alpha \circ \tilde{f}, \beta \circ \tilde{g})$ onde $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são levantamentos arbitrários de f e g , respectivamente, com $\alpha, \beta \in \pi_1(Y, y_0)$. Desta maneira os elementos de $\pi_1(Y, y_0)$ servem como coordenadas de levantamentos com relação aos levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, escolhidos como referência, e a introdução dessas coordenadas servirá de base para algebrização.

2.17 - Definição

Dizemos que $\alpha, \alpha' \in \pi_1(Y, y_0)$ são $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ conjugados, se existe $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ tal que

$$\alpha' = \tilde{g}_\pi(\gamma) \cdot \alpha \cdot \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1})$$

onde $\tilde{f}_\pi$ e $\tilde{g}_\pi$ são como na definição 1.4.

Claramente esta relação é de equivalência.

2.18 - Lema

$p \text{ Coinc}(\alpha \circ \tilde{f}, \beta \circ \tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\alpha' \circ \tilde{f}, \beta' \circ \tilde{g}), \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \pi_1(Y, y_0)$ se, e somente se, $\beta^{-1} \cdot \alpha$ e $\beta'^{-1} \cdot \alpha'$ são $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ - conjugados.

Demonstração

$$p \text{ Coinc}(\alpha o \tilde{f}, \beta o \tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\alpha' o \tilde{f}, \beta' o \tilde{g}) \Leftrightarrow$$

$$p \text{ Coinc}(\beta^{-1} o \alpha o \tilde{f}, \tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\beta'^{-1} o \alpha' o \tilde{f}, \tilde{g})$$

$$\Leftrightarrow \beta'^{-1} o \alpha' o \tilde{f} = \tilde{g}_\pi(\gamma) o \beta^{-1} o \alpha o \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1}) o \tilde{f} \text{ para algum}$$

$$\gamma \in \pi_1(X, x_0) \quad (\text{por 2.4})$$

$$\Leftrightarrow \beta'^{-1} o \alpha' = \tilde{g}_\pi(\gamma) o \beta^{-1} o \alpha o \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \beta'^{-1} \cdot \alpha' \text{ e } \beta^{-1} \cdot \alpha \text{ são } (\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)\text{-conjugados (por 2.17).}$$

2.19 - Corolário

As classes de pontos de coincidência de f e g estão em correspondência biunívoca com as classes de $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ -conjugação de $\pi_1(Y, y_0)$, através da correspondência

$$p \text{ Coinc}(\alpha o \tilde{f}, \beta o \tilde{g}) \longleftrightarrow [\beta^{-1} \cdot \alpha].$$

O teorema a seguir nos fornece um limitante inferior para o número $R(f, g)$.

2.20 - Teorema

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$. Então,

$$R(f, g) \geq \# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$$

onde $f_{1*}, g_{1*}: H_1(X) \rightarrow H_1(Y)$ são os homomorfismos induzidos por f e g , respectivamente.

Demonstração

Seja $\theta: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ a abelianização.

Pelo lema 1.6., os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\tilde{f}_\pi} & \pi_1(Y, y_0) \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\
 H_1(X) & \xrightarrow{f_{1*}} & H_1(Y)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\tilde{g}_\pi} & \pi_1(Y, y_0) \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\
 H_1(X) & \xrightarrow{g_{1*}} & H_1(Y)
 \end{array}$$

Seja $\eta: H_1(Y) \rightarrow \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$ o homomorfismo natural e consideremos a composta.

$$\eta \circ \theta: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$$

Para todo $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ e todo $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$, temos que:

$$\theta(\tilde{g}_\pi(\gamma) \cdot \alpha \cdot \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1})) = \theta(\tilde{g}_\pi(\gamma)) + \theta(\alpha) - \theta(\tilde{f}_\pi(\gamma)) =$$

$$\theta(\alpha) + (g_{1*} - f_{1*})(\theta(\gamma))$$

Assim sendo, o homomorfismo sobrejetor $\eta \circ \theta$ leva classes $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ -conjugadas num único elemento, donde segue o resultado. ■

§3 - NÚMERO DE NIELSEN

Se $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas com M_1 compacta, vamos definir o número inteiro não negativo $N(f, g)$ chamado o número de Nielsen do par (f, g) . Ele é um limitante inferior para a cardinalidade do conjunto dos pontos de coincidência de f e g .

2.21 - Definição

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1 compacta. De acordo com 2.11, toda classe F de pontos de coincidência de f e g é um subconjunto aberto de $\text{Coinc}(f, g)$. Por conseguinte, $F = W \cap \text{Coinc}(f, g)$ onde W é um subconjunto aberto de M_1 . Além disso, como F é um subconjunto compacto de W , podemos considerar o índice $I(f, g, W)$ visto no §5 do cap.1, e definir o índice da classe F por:

$$I(f, g, F) = I(f, g, W)$$

Este índice está bem definido pois, se W' é outro aberto de M tal que $W' \cap \text{Coinc}(f, g) = F$ então por 1.24(i), $I(f, g, W) = I(f, g, W')$.

2.22 - Definição

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas, com M_1 compacta e seja F uma classe de pontos de coincidência de f e g . Dizemos que F é essencial se $I(f, g, F) \neq 0$.

O número de classes de pontos de coincidência que são essenciais é chamado número de Nielsen de f e g e é denotado por $N(f, g)$.

2.23 - Exemplo

Consideremos S^3 a esfera de dimensão 3 e RP^3 o espaço projetivo real obtido identificando os pontos antipodais de S^3 . Sejam $x_0, x_1 \in S^3$ os polos norte e sul, respectivamente, $f: S^3 \rightarrow RP^3$ a aplicação constante em $[x_0]$ onde $[x_0]$ denota a classe de x_0 em RP^3 e $g: S^3 \rightarrow RP^3$ a aplicação projeção.

Temos que x_0 e x_1 são os únicos pontos de coincidência de f e g .

Seja W um aberto de S^3 contido no hemisfério superior, de modo que $x_0 \in W$. Consideremos $\bar{V}$ um fechado, $x_0 \in \bar{V} \subseteq W$ e $k: \bar{V} \rightarrow D^3$ um homeomorfismo levando x_0 na origem e preservando orientação.

De acordo com 1.27, temos que $I(f, g, W) = \text{grau } \phi$ sendo $\phi: S^2 \rightarrow S^2$ dada por $\phi = \pi_0 [F_0(h \times h) \circ (f, g)] \circ k^{-1}$, onde F é definida por $F(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)$ e π é a projeção radial da origem.

Porém, para todo $x \in \partial \bar{V}$, $F_0(h \times h) \circ (f, g)(x) = \frac{1}{2}h([x])$.

Desta forma, a aplicação ϕ tem grau 1. Logo, $I(f,g,W) = 1$.

De maneira análoga, se W' é qualquer aberto contido no hemisfério inferior de S^3 com $x_1 \in W'$, temos que $I(f,g,W') = 1$.

Os pontos x_0 e x_1 não estão na mesma classe de pontos de coincidência pois, caso contrário, se λ é um caminho qualquer em S^3 ligando x_0 a x_1 , segue do teorema 2.10, que

$$\{(f \circ \lambda^{-1}) \cdot (g \circ \lambda)\} = f_{\pi}(\alpha^{-1}) \cdot g_{\pi}(\alpha)$$

para algum $\alpha \in \pi_1(S^3, x_1)$. Porém, como f é a aplicação constante, temos em decorrência que $g \circ \lambda$ é homotópica ao caminho constante em $f(x_1) = g(x_1)$. Mas, isto é uma contradição visto que para todo caminho λ em S^3 , de x_0 até x_1 , $\{g \circ \lambda\}$ é um gerador de $\pi_1(RP^3, [x_0])$.

Portanto f e g possuem duas classes distintas de pontos de coincidência, $F_0 = \{x_0\}$ e $F_1 = \{x_1\}$ e, conforme vimos acima, $I(f,g,F_0) = I(f,g,F_1) = 1$. Por conseguinte $N(f,g) = 2$.

2.24 - Teorema

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1 compacta. Então,

$$i) \ N(f,g) \leq R(f,g)$$

$$ii) \ N(f,g) \leq \neq \text{Coinc}(f,g)$$

iii) Suponhamos que $h: M_1' \rightarrow M_1$ e $k: M_2 \rightarrow M_2'$ sejam homeomorfismos preservando orientação, onde M_1' e M_2' são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1' compacta. Então,

$$N(kofoh, kogoh) = N(f, g)$$

Demonstração

As partes (i) e (ii) seguem diretamente das definições 2.15 e 2.22.

É imediato que $\text{Coinc}(f, g)$ está em correspondência biunívoca com $\text{Coinc}(kofoh, kogoh)$, através da correspondência

$$\psi: x_0 \longleftrightarrow h^{-1}(x_0)$$

Além disso, ψ estabelece uma correspondência biunívoca entre as classes de pontos de coincidência de f e g e, de $kofoh$ e $kogoh$.

Suponhamos que $G = \psi(F)$ onde F é uma classe de pontos de coincidência de f e g . Seja W um aberto de M_1' tal que $W \cap \text{Coinc}(f, g) = F$. Se $W' = h^{-1}(W)$ não é difícil verificar que $W' \cap \text{Coinc}(kofoh, kogoh) = G$.

Em virtude de 1.26 a demonstração está concluída. ■

2.25 - Teorema

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e compactas. Então, a soma dos índices de todas as classes de pontos de coincidência de f e g é igual a $\Lambda(f, g)$.

Demonstração

Sejam $F_1, \dots, F_r$ as classes de pontos de coincidência de f e g . Para cada j , $1 \leq j \leq r$, escolhamos um aberto W_j de M_1 tal que $W_j \cap \text{Coinc}(f, g) = F_j$ e seja $W = \bigcup_{j=1}^r W_j$. Pela propriedade 1.24(i), $I(f, g, M_1) = I(f, g, W)$. Como $\Lambda(f, g) = I(f, g, M_1)$, o resultado segue da aditividade do índice. ■

Uma consequência do teorema acima é a seguinte: o não anulamento do número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$ implica no não anulamento do número de Nielsen, como vemos a seguir.

2.26 - Corolário

Se $\Lambda(f, g) \neq 0$ então $N(f, g) \geq 1$. ■

Um resultado importante a respeito do número de Nielsen é o seguinte: o número de Nielsen é um invariante homotópico. A demonstração deste resultado é feita, mostrando que a

correspondência biunívoca dada pelo lema 2.14, preserva índice. Acontece que essa prova envolve fatos novos cuja utilidade se restringe apenas à ela, além das técnicas envolvidas serem mais complicadas. Porisso, para não haver quebra de sequência, a invariança homotópica do número de Nielsen se encontra demonstrada no apêndice I.

Uma consequência deste fato, está enunciada no próximo resultado.

2.27 - Corolário

Se f' é homotópica a f e g' é homotópica a g então f' e g' têm no mínimo $N(f,g)$ pontos de coincidência. ■

§4 - COMPUTAÇÃO DO NÚMERO DE NIELSEN

Sejam $f,g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e compactas.

Utilizando os subgrupos de Jiang $J(f)$ e $J(g)$, vistos no §2, do cap.1, vamos definir um subgrupo $J(f,g)$ do grupo fundamental $\pi_1(M_2)$. Ele é empregado quando $\Lambda(f,g) \neq 0$ para obtermos uma condição suficiente para $N(f,g)$ ser nulo. Ele é útil também, para darmos uma estimativa para $N(f,g)$, quando $\Lambda(f,g) \neq 0$

2.28 - Observação

Sejam $f,g: X \rightarrow Y$ onde X e Y são poliedros. Então,

existem aplicações $f', g': X \rightarrow Y$ homotópicas a f e g , respectivamente, tal que $f'(x_0) = y_0 = g'(x_0)$ onde x_0 é o ponto base de X e y_0 é o ponto base de Y . ([6], lema 7, pag 100). Assim, em virtude dos lemas 1.11 e 1.12., podemos assumir que o ponto base $x_0 \in X$, satisfaz $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$.

2.29 - Definição

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ onde X e Y são poliedros. Em vista da observação acima, podemos supor que $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$, onde x_0 é o ponto base de X e y_0 é o ponto base de Y . Desta forma $J(f, x_0) \subseteq \pi_1(Y, y_0)$ e $J(g, x_0) \subseteq \pi_1(Y, y_0)$. Assim, definimos:

$$J(f, g, x_0) = [J(f, x_0) \cdot J(g, x_0)]$$

ou seja, $J(f, g, x_0)$ é o subgrupo de $\pi_1(Y, y_0)$ gerado pelo produto dos subgrupos de Jiang $J(f, x_0)$ e $J(g, x_0)$.

2.30 - Observação

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ onde X e Y são poliedros. Em virtude da observação 2.28., podemos supor que o ponto base x_0 de X , pertence ao conjunto $\text{Coinc}(f, g) = \bigcup_{\tilde{f}, \tilde{g}} p \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$. Assim, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ onde $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{g}(\tilde{x}_0) = \tilde{z}_0$ para algum levantamento $\tilde{f}$ de f e algum levantamento $\tilde{g}$ de g .

Seja $\tilde{\omega}$ um caminho em $\tilde{Y}$ de $\tilde{z}_0$ até o ponto base $\tilde{y}_0$ de $\tilde{Y}$. Então, $\omega = q_0 \tilde{\omega}$ é um laço em y_0 , o ponto base de Y e, portanto, induz um isomorfismo

$$\omega_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

Além disso, $\omega_*(J(f, x_0)) = J(\tilde{f})$ e $\omega_*(J(g, x_0)) = J(\tilde{g})$ ([1]), lema 3.6., pag 31). Desta forma, se considerarmos o subgrupo de $\pi_1(Y, y_0)$ definido por:

$$J(\tilde{f}, \tilde{g}) = [J(\tilde{f}) \cdot J(\tilde{g})]$$

é imediato que

$$\omega_*(J(f, g, x_0)) = J(\tilde{f}, \tilde{g})$$

2.31 - Lema

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1 compacta. Se $J(\tilde{f}, \tilde{g}) = \pi_1(M_2)$, então todas as classes de pontos de coincidência de f e g têm o mesmo índice.

Demonstração

Para todo $\alpha, \beta \in \pi_1(M_2)$, temos que $p \text{ Coinc}(\alpha \circ \tilde{f}, \beta \circ \tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \alpha^{-1} \circ \beta \circ \tilde{g})$.

Como $\alpha^{-1}.\beta \in \pi_1(M_2) = J(\tilde{f}, \tilde{g})$, então $\alpha^{-1}.\beta = \rho_1.\gamma_1.\rho_2.\gamma_2 \dots \rho_k.\gamma_k$ onde $\rho_i \in J(\tilde{f})$ e $\gamma_j \in J(\tilde{g})$, para todo $1 \leq i, j \leq k$.

Portanto, $p \text{ Coinc}(\alpha\tilde{f}, \beta\tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \rho_1\circ\gamma_1\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g}) = p(\text{Coinc}(\rho_1^{-1}\circ\tilde{f}, \gamma_1\circ\rho_2\circ\gamma_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g}))$.

Visto que $\rho_1^{-1} \in J(\tilde{f})$, existe uma homotopia $H: f \sim f$ que se levanta a uma homotopia $\tilde{H}$ entre ρ_1^{-1} o $\tilde{f}$ e $\tilde{f}$.

No apêndice I, vamos mostrar que a correspondência biunívoca η_{HR} dada pelo lema 2.14 preserva índice. Porisso,

$$I(f, g, p \text{ Coinc}(\rho_1^{-1}\circ\tilde{f}, \gamma_1\circ\rho_2\circ\gamma_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g})) =$$

$$I(f, g, p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \gamma_1\circ\rho_2\circ\gamma_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g}))$$

Analogamente, o fato de $\gamma_1 \in J(\tilde{g})$ implica que $\gamma_1\circ\tilde{g}$ é homotópica a $\tilde{g}$. Por conseguinte, $\gamma_1\circ\rho_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g} = \gamma_1\circ\tilde{g}\circ\tilde{g}_\pi(\rho_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k) \sim \tilde{g}\circ\tilde{g}_\pi(\rho_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k) = \rho_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g}$.

Desta maneira,

$$I(f, g, p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \gamma_1\circ\rho_2\circ\gamma_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g})) =$$

$$I(f, g, p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \rho_2\circ\gamma_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g}))$$

Aplicando seguidamente o raciocínio acima, obtemos:

$$I(f, g, p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \rho_2\circ\gamma_2\circ\dots\circ\rho_k\circ\gamma_k\circ\tilde{g})) =$$

$$I(f, g, p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})).$$

Consequentemente, $I(f, g, p \text{ Coinc}(\alpha \tilde{f}, \beta \tilde{g})) = I(f, g, p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}))$ para todo $\alpha, \beta \in \pi_1(M_2)$ o que mostra o lema. ■

2.32 - Teorema

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e compactas. Suponhamos $J(f, g, x_0) = \pi_1(M_2)$. Então,

i) quaisquer duas classes de pontos de coincidência de f e g têm o mesmo índice.

ii) se $\Lambda(f, g) = 0$ então $N(f, g) = 0$

iii) se $\Lambda(f, g) \neq 0$ então $N(f, g) = R(f, g) \geq$

$\# \text{ coker}(g_{1*} - f_{1*})$ onde $f_{1*}, g_{1*} : H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$ são as induzidas de f e g .

Demonstração

O item (i) segue diretamente da observação 2.30 e do lema anterior.

Pelo teorema 2.25., $\Lambda(f, g)$ é a soma dos índices de todas as classes de pontos de coincidência de f e g e em vista de (i), todas essas classes têm o mesmo índice. Desta forma se $\Lambda(f, g) = 0$ então todas as classes de pontos de coincidência de f e g têm índice nulo e, se $\Lambda(f, g) \neq 0$ todas as classes têm índice não nulo. ■

Visto que as classes de pontos de coincidência de f e g estão em correspondência biunívoca com as classes de $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ -conjugação de $\pi_1(M_2)$, provar a igualdade $R(f, g) =$

$\neq \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$ equivale a mostrar que o homomorfismo sobrejetor $\eta\theta$:

$$\pi_1(M_2) \xrightarrow{\theta} H_1(M_2) \xrightarrow{\eta} \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$$

onde, θ é a abelianização e η é a projeção natural, leva diferentes classes $(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ -conjugadas em elementos diferentes.

Se $\pi_1(M_2)$ é abeliano, necessariamente isto acontece pois, se α e α' são dois elementos quaisquer de $\pi_1(M_2)$ então $\eta\theta(\alpha) = \eta\theta(\alpha')$ implica que existe $\gamma \in \pi_1(M_2)$ tal que

$$\theta(\alpha) - \theta(\alpha') = (g_{1*} - f_{1*})(\theta(\gamma))$$

Levando-se em conta o lema 1.6., isto quer dizer que

$$\theta(\alpha') = \theta(\tilde{g}_\pi(\gamma) \cdot \alpha \cdot \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1}))$$

Consequentemente,

$$\alpha' = \tilde{g}_\pi(\gamma) \cdot \alpha \cdot \tilde{f}_\pi(\gamma^{-1})$$

pois θ é um isomorfismo, em virtude de $\pi_1(M_2)$ ser abeliano.

A prova da igualdade $R(f, g) = \neq \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$ só foi conseguida com hipóteses que implicam $\pi_1(M_2)$ abeliano, como por exemplo o corolário seguinte.

No caso de pontos fixos, isto é, quando $M_1 = M_2$ e $g = \text{id}_{M_2}$, igualdade acontece sem necessariamente $\pi_1(M_2)$ ser abeliano; por exemplo, se $\tilde{f}_\pi(\pi_1(M_2)) \subseteq J(f)$. ([1], pág.33).

2.33 - Corolário

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$, onde $M_1 \rightarrow M_2$ são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e compactas. Suponhamos $J(M_2) = \pi_1(M_2)$. Então quaisquer classes de pontos de coincidência de f e g têm o mesmo índice. Se $\Lambda(f, g) = 0$ então $N(f, g) = 0$. Se $\Lambda(f, g) \neq 0$ então $N(f, g) = R(f, g) = \neq \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$.

Demonstração

Visto que $J(M_2) \subseteq J(f, x_0)$ e $J(M_2) \subseteq J(g, x_0)$ ([1, pág 31]) e por hipótese, $J(M_2) = \pi_1(M_2)$ então $J(f, g, x_0) = \pi_1(M_2)$.

O resultado segue agora do teorema 2.32 e do fato de $\pi_1(M_2)$ ser abeliano. ■

2.34 - Exemplo

Sejam $f, g: S^n \rightarrow S^n$ com $n \geq 1$, onde f tem grau m e g tem grau k .

$$\text{Visto que } H_q(S^n, \mathbb{Q}) \cong H^q(S^n, \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq n \\ \mathbb{Q}, & \text{se } q=0, n \end{cases}$$

segue que:

$$\Lambda(f,g) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr } \theta_q = \begin{cases} \text{tr } \theta_0 + \text{tr } \theta_n & \text{se } n \text{ é par} \\ \text{tr } \theta_0 - \text{tr } \theta_n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Sendo $\text{tr } \theta_0 = \text{tr } g^{n*}$ e $\text{tr } \theta_n = f_{n*}$ então,

$$\Lambda(f,g) = \begin{cases} k + m & \text{se } n \text{ é par} \\ k - m & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se $n > 1$ temos que S^n é simplesmente conexa e daí por 2.9., f e g possuem apenas uma classe F de pontos de coincidência tal que:

$$I(f,g,F) = I(f,g,S^n) = \Lambda(f,g)$$

Consequentemente, $N(f,g) = 0$ se $\Lambda(f,g) = 0$ e $N(f,g) = 1$ se $\Lambda(f,g) \neq 0$.

Se $n = 1$, então $f,g: S^1 \rightarrow S^1$. Desde que S^1 é asférico e $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ é abeliano, segue do teorema 1.14 que $J(S^1) = \pi_1(S^1)$.

Assim, do corolário 2.33., decorre que:

$$N(f,g) = \# \text{ coker}(g_{1*} - f_{1*})$$

Como

$$(g_{1*} - f_{1*}) : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1) \quad \text{é dada por}$$

$$(g_{1*} - f_{1*})(\alpha) = (k-m)\alpha \quad \text{então,}$$

$$\text{coker}(g_{1*} - f_{1*}) = \frac{\mathbb{Z}}{(k-m)\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{(k-m)}$$

Portanto,

$$\# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*}) = |k-m| \text{ e daí, } N(f,g) = |k-m|$$

Por conseguinte,

$$N(f,g) = |k-m| = |\Lambda(f,g)|.$$

2.35 - Exemplo

Sejam $f, g: S^1 \times S^2 \rightarrow S^1 \times S^2$. A estrutura do anel de cohomologia $H^*(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$ é dada por:

$$H^0(S^1 \times S^2, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ com gerador } 1$$

$$H^1(S^1 \times S^2, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ com gerador } \alpha$$

$$H^2(S^1 \times S^2, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ com gerador } \beta$$

$$H^3(S^1 \times S^2, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ com gerador } \alpha \cup \beta$$

Suponhamos que $f^{1*}, g^{1*}: H^1(S^1 \times S^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$ e $f^{2*}, g^{2*}: H^2(S^1 \times S^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$ sejam dadas por $f^{1*}(\alpha) = a\alpha$, $f^{2*}(\beta) = b\beta$, $g^{1*}(\alpha) = a'\alpha$ e $g^{2*}(\beta) = b'\beta$.

Escolhamos bases $\bar{\alpha} \in H_1(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$, $\bar{\beta} \in H_2(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$, $\bar{\gamma} \in H_3(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$ tal que $\langle \alpha, \bar{\alpha} \rangle = 1$ e $\langle \beta, \bar{\beta} \rangle = 1$, $\langle \alpha \cup \beta, \bar{\gamma} \rangle = 1$. Sejam também as bases $\alpha' \in H_1(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$ e $\beta' \in H_2(S^1 \times S^2, \mathbb{Q})$, tal que $\alpha' = D(\beta)$ e $\beta' = D(\alpha)$ onde D denota o isomorfismo dado pela dualidade de Poincaré.

Vamos calcular $\Lambda'(f,g) = \text{tr } \theta'_0 - \text{tr } \theta'_1 + \text{tr } \theta'_2 -$
 $- \text{tr } \theta'_3$.

Temos que $\theta'_3 = g^{3*}$. Assim, $\theta'_3(\alpha \cup \beta) = g^{3*}(\alpha \cup \beta) =$
 $g^{1*}(\alpha) \cup g^{2*}(\beta) = a'\alpha \cup b'\beta = a' b'(\alpha \cup \beta)$.

Analogamente, $f^{3*}(\alpha \cup \beta) = ab(\alpha \cup \beta)$. Desta forma,
 $f_{3*}(\bar{\gamma}) = ab \bar{\gamma}$ e, portanto, $\theta'_0(\bar{\gamma}) = f_{3*}(\bar{\gamma}) = ab \bar{\gamma}$.

Suponhamos que $\alpha' = m\bar{\alpha}$ e $\beta' = n\bar{\beta}$, onde $m, n \in \mathbb{Q}$.
 Então,

$$\begin{aligned} \theta'_1(\alpha) &= D^{-1} \circ f_{2*} \circ \text{Dog}^{1*}(\alpha) = a' D^{-1} \circ f_{2*} \circ D(\alpha) = \\ &= a' D^{-1} \circ f_{2*}(\beta') = a' n D^{-1} \circ f_{2*}(\bar{\beta}) = a' b' n D^{-1}(\bar{\beta}) \\ &= a' b' D^{-1}(\beta') = a' b \alpha. \end{aligned}$$

Analogamente, $\theta'_2(\beta) = ab'\beta$.

Logo, $\Lambda'(f,g) = ab - a'b + ab' - a' b'$ e consequen-
 temente, $\Lambda(f,g) = (-1)^3 \Lambda'(f,g) = a' b' + a' b - a b' - a b$.

Por 1.13, $J(S^1 \times S^2) \cong J(S^1) \times J(S^2)$. Por conseguinte,
 $J(S^1 \times S^2) \cong \pi_1(S^1 \times S^2)$.

Assim, se $ab + a' b' = a' b + a b'$ então $N(f,g) = 0$
 e se $ab + a' b' \neq a' b + a b'$ então $N(f,g) =$
 $\neq \text{coker}(g_{1*} - f_{1*}) = \neq \left(\frac{\mathbb{Z}}{(a' - a)\mathbb{Z}} \right) = |a' - a|$.

2.36 - Exemplo

Sejam $S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ e m um número inteiro positivo.

Suponhamos que w seja uma m -ésima raiz primitiva da unidade e definamos $\tau: S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ por $\tau(z_0, \dots, z_n) = (wz_0, wz_1, \dots, wz_n)$. Então o grupo Γ gerado por τ é propriamente descontínuo, atua em S^{2n+1} para todo n e

$\frac{S^{2n+1}}{\Gamma} = L^{2n+1}(m)$ é um espaço de lens ([23], pag 91).

Seja $x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^{2n+1}$. Sabemos que

$\pi_1(L^{2n+1}(m), [x_0]) \cong \mathbb{Z}_m$ onde x_0 denota a órbita do ponto x_0 .

Consideremos $f, g: L^{2n+1}(m) \rightarrow L^{2n+1}(m)$ tal que

$f_\pi, g_\pi: \pi_1(L^{2n+1}(m), [x_0]) \rightarrow \pi_1(L^{2n+1}(m), [x_0])$ sejam definidas por $f_\pi(1) = k$ e $g_\pi(1) = s$.

Visto que,

$$H_q(L^{2n+1}(m), \mathbb{Q}) \cong H^q(L^{2n+1}(m), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q=0, 2n+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então, $\Lambda(f, g) = \text{grau } g - \text{grau } f$.

Se p é um número primo, conhecemos que

$$H_q(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p) \cong H^q(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p. \quad (0 \leq q \leq 2n+1)$$

e as aplicações de Bockstein

$$\beta_p^*: H^{2q-1}(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{2q}(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p)$$

são isomorfismos, para todo $0 < q < n$. ([23], pag.92).

Se p é ímpar, considerando $i_1 \in H^1(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p)$ um gerador, então $v_2 = \beta_p^*(i_1)$ é um gerador de $H^2(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p)$ e sendo $n < \infty$, o anel de cohomologia $H^*(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p)$ é o produto tensorial..

$$H^*(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p) = \Lambda(i_1) \otimes \frac{P(v_2)}{v_2^{n+1}}$$

da álgebra exterior $\Lambda(i_1)$ e o anel polinomial truncado gerado por v_2 . ([23], pag 93).

Desta maneira, se m é um número primo p ímpar, então

$$f^{1*}, g^{1*}: H^1(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^1(L^{2n+1}(p), \mathbb{Z}_p)$$

satisfazem $f^{1*}(i_1) = ki_1$ e $g^{1*}(i_1) = si_1$. Portanto,

$$f^{2*}(v_2) = (f^{2*} \circ \beta_p^*)(i_1) = \beta_p^*(f^{1*}(i_1)) = kv_2 \quad \text{e, analogamente,}$$

$$g^{2*}(v_2) = sv_2$$

$$\text{Consequentemente, } f^{2n+1*}(i_1 \cup v_2^n) = k^{n+1}(i_1 \cup v_2^n) \quad \text{e} \\ g^{2n+1*}(i_1 \cup v_2^n) = s^{n+1}(i_1 \cup v_2^n).$$

Por outro lado, k^{n+1} e s^{n+1} são as reduções módulo p , de grau f e de grau g , respectivamente. Desta forma, $k^{n+1} \neq s^{n+1} \pmod{p}$ implica $\Lambda(f, g) \neq 0$. (*)

Se $p=2$, $L^{2n+1}(2) = \mathbb{R}P^{2n+1}$ e como $H^*(\mathbb{R}P^{2n+1}, \mathbb{Z}_2)$ é

uma álgebra polinomial truncada $\frac{P(i_1)}{i_1^{2n+2}}$ então

$$f^{2n+1*}(i_1^{2n+1}) = k^{2n+1} i_1^{2n+1} \quad \text{e} \quad g^{2n+1*}(i_1^{2n+1}) = s^{2n+1} i_1^{2n+1}.$$

Visto que $k^{2n+1} \equiv s^{2n+1} \pmod{2}$ acarreta $k^{n+1} \equiv s^{n+1} \pmod{2}$, também neste caso, a afirmação (*) se verifica.

Sendo $\varinjlim L^{2k+1}(m) = L^\infty(m) = K(Z_m, 1)$ para determinar o anel de cohomologia de um espaço de lens $L^{2n+1}(m)$, basta conhecermos o anel de cohomologia do espaço de Eilenberg-MacLane $K(Z_m, 1)$.

Em [19], pag.90, Mosher e Tangora mostraram que

$$H^*(K(Z_{2^r}, 1), Z_2) \cong \Lambda(i_1) \otimes P(d_r(i_1))$$

onde $r \geq 2$ e d_r denota o homomorfismo de Bockstein.

De forma semelhante, se p é um número primo, $p > 2$, podemos verificar que

$$H^*(K(Z_{p^r}, 1), Z_p) \cong \Lambda(i_1) \otimes P(d_r(i_1))$$

e de modo análogo ao feito anteriormente, podemos concluir o resultado (*), se $m = p^r$.

Suponhamos agora $m = p_1 \cdot p_2 \dots p_k$ onde $p_i, 1 \leq i \leq k$ são primos positivos e distintos. Desde que $Z_m \cong Z_{p_1} \oplus \dots \oplus Z_{p_k}$ então

$$H^*(K(Z_m, 1), Z_m) \cong \bigoplus_{i=1}^k H^*(K(Z_{p_i}, 1), Z_{p_i})$$

Por outro lado

$$K(Z_m, 1) = \prod_{i=1}^k K(Z_{p_i}, 1) \quad ([23], \text{ pag.256})$$

Da fórmula de Kunneth e do teorema dos coeficientes universais, obtemos:

$$H^*(K(Z_m, 1), Z_{p_i}) \cong H^*(K(Z_{p_i}, 1), Z_{p_i})$$

Consequentemente,

$$H^*(K(Z_m, 1), Z_m) \cong \Lambda(i_1) \otimes P(d(i_1))$$

onde d denota o homomorfismo de Bockstein e do mesmo modo como fizemos anteriormente, podemos verificar que (*) também é satis feita, neste caso.

Acreditamos que se m for um número inteiro positivo arbitrário, a afirmação (*) ainda se verifica.

Suponhamos então, que $m = p_1, \dots, p_k$, onde p_i , $1 \leq i \leq k$ são números primos positivos, distintos.

$$\text{Por 1.16., } J(L^{2n+1}(m)) \cong \pi_1(L^{2n+1}(m), [x_0]).$$

Também,

$$\text{coker}(g_{1*} - f_{1*}) = \frac{Z_m}{(s-k)Z_m}$$

é o grupo cíclico de ordem $\text{mdc}(s-k, m)$.

Desta forma, por 2.33., segue que: se $k^{n+1} \not\equiv s^{n+1} \pmod{m}$ então $N(f, g) = \text{mdc}(s-k, m)$.

§5. ESPAÇOS COM GRUPO FUNDAMENTAL FINITO

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ onde X e Y são espaços conexos, localmente conexos por caminhos, semi localmente 1-conexos, com grupos fundamentais $\pi_1(X)$ e $\pi_1(Y)$ finitos.

Consideremos a classe de levantamentos $[\tilde{f}, \tilde{g}]$ definida em 2.6.

Para todo $\alpha \in \pi_1(Y)$ e todo $\gamma \in \pi_1(X)$, segue diretamente da definição 1.4, que:

$$(\alpha \circ \tilde{g})_{\pi}(\gamma) \cdot \alpha = \alpha \cdot \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \quad (*)$$

Usando este fato, é imediato verificar que o produto $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ atua em $[\tilde{f}, \tilde{g}]$, do seguinte modo

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) \xrightarrow{(\gamma, \alpha)} (\alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}, \alpha \circ \tilde{g}).$$

Claramente, esta ação é transitiva.

Se denotarmos o subgrupo de isotropia por $\mathcal{I}([\tilde{f}, \tilde{g}])$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}([\tilde{f}, \tilde{g}]) &= \{(\gamma, \alpha) \in \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \text{ tal que } \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} = \tilde{f} \\ &\text{e } \alpha \circ \tilde{g} = \tilde{g}\} = \{(\gamma, \alpha) \in \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \text{ tal que } \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}_{\pi}(\gamma^{-1}) \circ \tilde{f} = \\ &= \tilde{f} \text{ e } \alpha \circ \tilde{g} = \tilde{g}\}. \end{aligned}$$

Desta maneira, em virtude da unicidade dos levantamentos, se $(\gamma, \alpha) \in \mathcal{J}([\tilde{f}, \tilde{g}])$ então $\alpha = 1$ e $\tilde{f}_\pi(\gamma) = \tilde{g}_\pi(\gamma)$. Portanto,

$$\mathcal{J}([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \{(\gamma, 1) \in \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \text{ tal que } \tilde{f}_\pi(\gamma) = \tilde{g}_\pi(\gamma)\}$$

e assim, temos o seguinte resultado:

2.37 - Lema

$$\# \mathcal{J}([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \# \text{Coinc}(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$$

2.38 - Definição

O número $\mu([\tilde{f}, \tilde{g}])$ definido por:

$$\mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \# \text{Coinc}(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$$

é chamado multiplicidade da classe de levantamentos $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

2.39 - Proposição

$\mu([\tilde{f}, \tilde{g}])$ é independente da escolha dos levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ em $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

Demonstração

Seja $(\tilde{f}', \tilde{g}') \in [\tilde{f}, \tilde{g}]$, qualquer. Então $\tilde{f}' = \alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$

e $\tilde{g}' = \alpha \circ \tilde{g}$, para algum $\alpha \in \pi_1(Y)$ e algum $\gamma \in \pi_1(X)$.

Assim,

$$\lambda \in \text{Coinc}(\tilde{f}'_{\pi}, \tilde{g}'_{\pi}) \Leftrightarrow \tilde{g}'_{\pi}(\lambda) \circ \tilde{f}' \circ \alpha^{-1} = \tilde{f}'$$

$$\Leftrightarrow \tilde{g}'_{\pi}(\lambda) \cdot \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{-1} \circ \tilde{g}'_{\pi}(\lambda) \circ \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \circ \alpha^{-1} = \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^{-1} \circ \tilde{g}')_{\pi}(\lambda) \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \circ \alpha^{-1} = \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$$

(Por *)

$$\Leftrightarrow g_{\pi}(\gamma^{-1} \cdot \lambda \cdot \gamma) \tilde{f} = \tilde{f} \circ (\gamma^{-1} \cdot \lambda \cdot \gamma) = \tilde{f}_{\pi}(\gamma^{-1} \cdot \lambda \cdot \gamma) \circ \tilde{f}$$

$$\Leftrightarrow \gamma^{-1} \cdot \lambda \cdot \gamma \in \text{Coinc}(\tilde{f}_{\pi}, \tilde{g}_{\pi})$$

Portanto,

$$\text{Coinc}(\tilde{f}'_{\pi}, \tilde{g}'_{\pi}) = \lambda_* \text{Coinc}(\tilde{f}_{\pi}, \tilde{g}_{\pi})$$

onde λ_* é o automorfismo $\lambda \rightarrow \gamma^{-1} \cdot \lambda \cdot \gamma$

Daí, segue o resultado. ■

2.40 - Lema

$$\mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot \#[\tilde{f}, \tilde{g}] = \#(\pi_1(X) \times \pi_1(Y))$$

Demonstração

Desde que a ação

$$(\pi_1(X) \times \pi_1(Y)) \times [\tilde{f}, \tilde{g}] \rightarrow [\tilde{f}, \tilde{g}]$$

$$(\alpha, \gamma), (\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow (\alpha \circ \tilde{g}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}, \alpha \circ \tilde{g})$$

é transitiva, o espaço das órbitas $\mathcal{O}([\tilde{f}, \tilde{g}])$ é igual a $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

Visto que,

$$\# \mathcal{I}([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot \# \mathcal{O}([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \# (\pi_1(X) \times \pi_1(Y))$$

o resultado segue então, do lema 2.37. ■

2.41 - Lema

$$\# (\text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}) \cap p^{-1}(x)) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}])$$

Demonstração

Seja $\tilde{x} \in \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ tal que $p(\tilde{x}) = x$. Todo ponto em $p^{-1}(x)$ tem a forma $\gamma(\tilde{x})$ onde $\gamma \in \pi_1(X)$.

Assim,

$$\tilde{f}(\gamma(\tilde{x})) = \tilde{g}(\gamma(\tilde{x})) \Leftrightarrow (\tilde{f} \circ \gamma)(\tilde{x}) = (\tilde{g} \circ \gamma)(\tilde{x}) \Leftrightarrow$$

$$\tilde{f}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{g}(\tilde{x}) \Leftrightarrow \tilde{f}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow \tilde{f}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} = \tilde{g}_{\pi}(\gamma) \circ \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_{\pi}(\gamma) = \tilde{g}_{\pi}(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \gamma \in \text{Coinc}(\tilde{f}_{\pi}, \tilde{g}_{\pi}) \quad \text{e, portanto,}$$

$$\#(\text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}) \cap p^{-1}(x)) = \# \text{Coinc}(\tilde{f}_{\pi}, \tilde{g}_{\pi}) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]). \quad \blacksquare$$

2.42 - Proposição

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas, orientadas, com grupos fundamentais $\pi_1(M_1)$ e $\pi_1(M_2)$ finitos.

Seja $F = p \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ a classe de pontos de coincidência de f e g , determinada pela classe de levantamentos $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

Então,

$$\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot I(f, g, F)$$

Demonstração

Existem aplicações $f', g': M_1 \rightarrow M_2$, homotópicas a f e g , respectivamente, tal que todos os pontos de coincidência de f' e g' são isolados (ver apêndice II).

Se H denota a homotopia entre f e f' então H induz uma

correspondência biunívoca η_H entre os levantamentos de f e f' . Seja $\tilde{f}' = \eta_H(\tilde{f})$.

Consequentemente, $\tilde{f}_\pi = \tilde{f}'_\pi$ pois, se $\alpha \in \pi_1(M_1)$ é um elemento arbitrário, por definição, $\tilde{f}_\pi(\alpha) \in \pi_1(M_2)$ é o único elemento tal que

$$\tilde{f} \circ \alpha = \tilde{f}_\pi(\alpha) \circ \tilde{f}.$$

ou seja,

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) \circ \tilde{f} \circ \alpha^{-1} = \tilde{f}.$$

Porém, isto implica que

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) \circ \eta_H(\tilde{f}) \circ \alpha^{-1} = \eta_H(\tilde{f}) \quad (\text{ver demonstração do lema 2.14})$$

Daí,

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) \circ \tilde{f}' = \tilde{f}'_\pi(\alpha) \circ \tilde{f}'$$

e, portanto,

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) = \tilde{f}'_\pi(\alpha)$$

Como α é arbitrário, devemos ter $\tilde{f}_\pi = \tilde{f}'_\pi$.

Analogamente, se R é a homotopia entre g e g' e $\eta_H(\tilde{g}) = \tilde{g}'$ então $\tilde{g}_\pi = \tilde{g}'_\pi$

Por conseguinte,

$$\mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \mu([\tilde{f}', \tilde{g}'])$$

Agora, se $F' = p \text{ Coinc}(\tilde{f}', \tilde{g}')$ e como η_{HR} preserva índice, então:

$$I(f, g, F) = I(f, g, F')$$

Além disso, o fato de $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ serem homotópicas a $\tilde{f}'$ e $\tilde{g}'$, respectivamente, nos leva a concluir que

$$\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \Lambda(\tilde{f}', \tilde{g}')$$

Desta maneira, podemos supor que os pontos de coincidência de f e g são isolados.

Desde que as orientações de $\tilde{M}_1$ e $\tilde{M}_2$ são escolhidas a partir das orientações de M_1 e M_2 , então as aplicações de recobrimento $p: \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ e $q: \tilde{M}_2 \rightarrow M_2$ são homeomorfismos locais e preservam orientação.

Seja $\tilde{W}_x$ um aberto de $\tilde{M}_1$, com $\tilde{W}_x \cap \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}) = \{\tilde{x}\}$, que é levado homeomorficamente sobre o aberto $W_x = p(\tilde{W}_x)$, onde $W_x \cap \text{Coinc}(f, g) = \{x\}$.

Então, pelo teorema 1.26.

$$I(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{W}_x) = I(f, g, W_x)$$

Em virtude de 2.41.

$$\sum_{\tilde{x} \in \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})} I(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{W}_{\tilde{x}}) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot \sum_{x \in \text{Coinc}(f, g)} I(f, g, W_x)$$

Porém,

$$\sum_{x \in \text{Coinc}(f, g)} I(f, g, W_x) = I\left(f, g, \bigcup_{x \in \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})} W_{\tilde{x}}\right) = I(f, g, F).$$

Assim,

$$\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \sum_{\tilde{x} \in \text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})} I(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{W}_{\tilde{x}}) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot I(f, g, F)$$

2.43 - Proposição

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas e orientadas, com grupos fundamentais $\pi_1(M_1)$ e $\pi_1(M_2)$ finitos.

$$\Lambda(f, g) = \frac{1}{\#(\pi_1(M_1) \times \pi_1(M_2))} \sum_{\tilde{f}, \tilde{g}} \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}).$$

Demonstração

Levando-se em conta 2.25, 2.40 e 2.42, temos:

$$\sum_{\tilde{f}, \tilde{g}} \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \sum_{\tilde{f}, \tilde{g}} \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot I(f, g, \text{pCoinc}(\tilde{f}, \tilde{g})) =$$

$$\sum_{[\tilde{f}, \tilde{g}]} \#[\tilde{f}, \tilde{g}] \cdot \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot I(f, g, p\text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})) =$$

$$\#(\pi_1(M_1) \times \pi_1(M_2)) \sum_{[\tilde{f}, \tilde{g}]} I(f, g, p\text{Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})) =$$

$$\#(\pi_1(M_1) \times \pi_1(M_2)) \cdot \Lambda(f, g) \quad \blacksquare$$

Conforme vimos no §2, as classes de pontos de coincidência de f e g são da forma $p\text{Coinc}(\alpha\tilde{f}, \beta\tilde{g})$ onde $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são levantamentos arbitrários de f e g , respectivamente e $\alpha, \beta \in \pi_1(M_2)$. Como $\text{Coinc}(\alpha\tilde{f}, \beta\tilde{g}) = \text{Coinc}(\beta^{-1}\alpha\tilde{f}, \tilde{g})$, levando-se em conta o lema 2.18, podemos, de maneira análoga ao que foi feito no teorema anterior, provar o seguinte resultado:

2.44 - Proposição

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas, orientadas, com grupos fundamentais $\pi_1(M_1)$ e $\pi_1(M_2)$ finitos. Então

$$\Lambda(f, g) = \frac{1}{\#\pi_1(M_1)} \sum_{\gamma \in \pi_1(M_2)} \Lambda(\gamma\tilde{f}, \tilde{g}). \quad \blacksquare$$

2.45 - Lema

Sejam X e Y espaços conexos, localmente conexos por caminhos e semi-localmente 1-conexos.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(Y) \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\
 H_1(X) & \xrightarrow{g_{1*} - f_{1*}} & H_1(Y)
 \end{array}$$

onde θ é a abelianização e ϕ é definida por

$$\phi(\alpha) = \tilde{g}_{\pi}(\alpha) \cdot \tilde{f}_{\pi}(\alpha^{-1})$$

para todo $\alpha \in \pi_1(X)$.

Então, o diagrama é comutativo

Demonstração

Para todo $\alpha \in \pi_1(M_1)$,

$$\theta \circ \phi(\alpha) = \theta(\tilde{g}_{\pi}(\alpha) \cdot \tilde{f}_{\pi}(\alpha^{-1})) = \theta(\tilde{g}_{\pi}(\alpha)) \cdot \theta(\tilde{f}_{\pi}(\alpha^{-1}))$$

$$= g_{1*} \circ \theta(\alpha) \cdot f_{1*} \circ \theta(\alpha) = (g_{1*} - f_{1*})(\theta(\alpha)). \quad \blacksquare$$

2.46 - Proposição

Suponhamos que a imagem da aplicação $f_{\pi}: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ esteja contida no centro de $\pi_1(Y)$. Então a aplicação ϕ definida no lema anterior é um homomorfismo. Ainda mais, consideremos o diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(X) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(Y) & \xrightarrow{\eta} & \text{coker } \phi \\
\downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta' \\
H_1(X) & \xrightarrow[g_{1*}-f_{1*}]{} & H_1(Y) & \xrightarrow{\eta} & \text{coker}(g_{1*}-f_{1*})
\end{array}$$

onde η é a projeção natural e θ' é a induzida de θ .

Se $\text{Ker } \theta \subseteq \text{im } \phi$ então.

$$\# \text{coker } \phi = \# \text{coker}(g_{1*}-f_{1*})$$

Demonstração

Afirmamos que a imagem de $\tilde{f}_\pi: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ está contida no centro de $\pi_1(Y)$.

De fato, seja $\beta \in \pi_1(Y)$ arbitrário. Para todo $\alpha \in \pi_1(X)$, se que do lema 1.5. que

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) \cdot \beta = (\omega_* \circ f_\pi)(\alpha) \cdot \beta$$

Como ω_* é um isomorfismo, $\beta = \omega_*(\gamma)$, para algum $\gamma \in \pi_1(Y)$.

Logo,

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) \cdot \beta = \omega_*(f_\pi(\alpha)) \cdot \omega_*(\gamma) = \omega_*(f_\pi(\alpha) \cdot \gamma)$$

Por hipótese, a imagem de f_π está contida no centro de $\pi_1(Y)$. Daí,

$$\tilde{f}_\pi(\alpha) \cdot \beta = \omega_*(\gamma \cdot f_\pi(\alpha)) = \omega_*(\gamma) \cdot \omega_*(f_\pi(\alpha)) = \beta \cdot \tilde{f}_\pi(\alpha),$$

o que mostra a afirmação.

Sejam $\alpha, \beta \in \pi_1(X)$ arbitrários. Então,

$$\begin{aligned}\phi(\alpha \cdot \beta) &= \tilde{g}_\pi(\alpha\beta) \cdot \tilde{f}_\pi(\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}) = \tilde{g}_\pi(\alpha) \cdot \tilde{g}_\pi(\beta) \cdot \tilde{f}_\pi(\beta^{-1}) \cdot \tilde{f}_\pi(\alpha^{-1}) = \\ &= \tilde{g}_\pi(\alpha) \cdot \tilde{f}_\pi(\alpha^{-1}) \cdot \tilde{g}_\pi(\beta) \cdot \tilde{f}_\pi(\beta^{-1}) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta).\end{aligned}$$

É imediato que θ' é sobrejetora. Portanto, basta mostrar que $\text{Ker } \theta' = 0$.

Seja $\bar{a}$ tal que $\theta'(\bar{a}) = 0$, isto é, $\theta(a) \in \text{im}(g_{1*} - f_{1*}) = \phi \text{im } \phi$.

Portanto, $\theta(a) = \theta \circ \phi(b)$ para algum $b \in \pi_1(X)$.

Daí, $\theta(a - \phi(b)) = 0$ e, em consequência $a - \phi(b) \in \text{Ker } \theta \subseteq \text{im } \phi$.

Desta forma, $a - \phi(b) = \phi(c)$ para algum $c \in \pi_1(X)$ e por conseguinte, $a = \phi(b+c)$ donde concluímos que $a \in \text{im } \phi$. Mas, isto quer dizer que $\bar{a} = 0$. ■

2.47 - Corolário

Sejam X e Y espaços conexos, localmente conexos e semi-localmente 1 conexos com grupos fundamentais $\pi_1(X)$ e $\pi_1(Y)$ finitos. Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ e suponhamos que $\pi_1(Y) = J(Y)$. Então,

$$\mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \frac{\# \pi_1(X) \cdot \# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})}{\# \pi_1(Y)}$$

quaisquer que sejam os levantamentos $\tilde{f}, \tilde{g}: \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ de f e g .

Demonstração

Desde que por hipótese, $\pi_1(Y) = J(Y)$, então $\pi_1(Y)$ é abeliano e, por conseguinte, $\text{Ker } \theta = 0$ onde $\theta: \pi_1(Y) \rightarrow H_1(Y)$ é a abelianização. Assim, por 2.46., ϕ é um homomorfismo e $\# \text{ coker } \phi = \# \text{ coker}(g_{1*} - f_{1*})$.

$$\text{Como } \frac{\pi_1(X)}{\text{Ker } \phi} \cong \text{im } \phi \quad \text{e}$$

$$\text{coker } \phi = \frac{\pi_1(Y)}{\text{im } \phi}, \text{ segue que}$$

$$\# \text{Ker } \phi = \frac{\# \pi_1(X) \cdot \# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})}{\# \pi_1(Y)}$$

Por outro lado, $\text{Ker } \phi = \{\gamma \in \pi_1(X) \text{ tal que } \phi(\gamma) = 1\} = \{\gamma \in \pi_1(X) \text{ tal que } \tilde{g}_\pi(\gamma) = \tilde{f}_\pi(\gamma)\} = \text{Coinc}(\tilde{f}_\pi, \tilde{g}_\pi)$ o que completa a demonstração. ■

2.48 - Corolário

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas, orientadas, com grupos fundamentais $\pi_1(M_1)$ e $\pi_1(M_2)$ finitos. Se $\pi_1(M_2) = J(M_2)$ então

$$\Lambda(f, g) = \frac{\# \pi_1(M_2)}{\# \pi_1(M_1)} \cdot \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}), \text{ quaisquer que sejam os levantamentos } \tilde{f}, \tilde{g}: \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2 \text{ de } f \text{ e } g.$$

Demonstração

Sendo $\pi_1(M_2) = J(M_2)$, temos de 2.47 que, quaisquer que sejam os levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ de f, g , $\mu([\tilde{f}, \tilde{g}])$ tem sempre o mesmo valor e além disso, todas as classes de pontos de coincidência de f e g têm o mesmo índice. Assim, a proposição 2.42 implica $\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \Lambda(\tilde{f}', \tilde{g}')$, quaisquer que sejam os levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ de f e $\tilde{g}$ e $\tilde{g}'$ de g . Usando 2.43., a prova está completa. ■

2.49 - Corolário

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, compactas, orientadas, com grupos fundamentais $\pi_1(M_1)$ e $\pi_1(M_2)$ finitos. Se $\pi_1(M_2) = J(M_2)$ e $\Lambda(f, g) \neq 0$, então $N(f, g) = \frac{\mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) \cdot \# \pi_1(M_2)}{\# \pi_1(M_1)}$.

Em particular, se $M_1 = M_2$, temos que $N(f, g) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}])$.

Demonstração

Segue diretamente de 2.33, e 2.47. ■

2.50 - Exemplo

Consideremos $f, g: \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ e sejam $\tilde{f}, \tilde{g}: S^3 \rightarrow S^3$ levantamentos de f e g , respectivamente. Suponhamos $\tilde{f}$ de grau $m \neq 0$ e $\tilde{g}$ de grau $k \neq 0$.

Sabemos que $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \{1, \alpha\}$ onde 1 denota a classe de homotopia do laço constante e $\alpha \neq 1$. Como $\alpha^{-1} = \alpha$, levando-se em conta o lema 2.18, temos que $p \text{ Coinc}(\alpha \tilde{f}, \alpha \tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ e $p \text{ Coinc}(\alpha \tilde{f}, \tilde{g}) = p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \alpha \tilde{g})$. Desta forma, f e g têm duas classes de pontos de coincidência: $F = p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g})$ e $G = p \text{ Coinc}(\alpha \tilde{f}, \tilde{g})$. Além disso, como $\pi_1(\mathbb{R}P^3) = J(\mathbb{R}P^3)$, decorre de 2.33. que $I(f, g, F) = I(f, g, G)$.

Se $f_\pi, g_\pi: \pi_1(\mathbb{R}P^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ são induzidas em homotopia, então, uma das situações ocorre: $f_\pi = g_\pi = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}P^3)}$ ou $f_\pi = 0$ e $g_\pi = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}P^3)}$ ou $f_\pi = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}P^3)}$ e $g_\pi = 0$ ou $f_\pi = g_\pi = 0$.

Suponhamos que $f_\pi = g_\pi = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}P^3)}$ ou $f_\pi = g_\pi = 0$. Assim, do corolário 2.48, $\Lambda(f, g) = \Lambda(\alpha \tilde{f}, \tilde{g}) = \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = k-m$ e do corolário 2.47., $\mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) = \mu([\alpha \tilde{f}, \tilde{g}]) = \# \text{ coker}(g_\pi - f_\pi) = 2$.

Se $k \neq m$ então $\Lambda(f, g) \neq 0$ e daí, por 2.49., $N(f, g) = \mu([\tilde{f}, \tilde{g}]) = 2$ isto é, as classes F e G têm índice não nulo. Assim, $I(f, g, F) = I(f, g, G) = \frac{k-m}{2}$.

Se $k = m$, segue que $\Lambda(f, g) = \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \Lambda(\alpha \tilde{f}, \tilde{g}) = 0$ e portanto $N(f, g) = 0$ o que implica $I(f, g, F) = I(f, g, G) = 0$.

Suponhamos agora que $f_\pi = 0$ e $g_\pi = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}P^3)}$ ou $f_\pi = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}P^3)}$ e $g_\pi = 0$. Se $k \neq m$ então $\Lambda(f, g) = k-m \neq 0$ e por 2.33., $N(f, g) = \# \text{ coker}(g_\pi - f_\pi) = 1$. Desta maneira f e g possuem apenas uma classe de pontos de coincidência com índice não nulo. Como, $I(f, g, F) = I(f, g, G)$ então devemos ter $F = G$ e consequentemente $I(f, g, F) = k-m$. Se $k = m$ então $N(f, g) = 0$ e daí, $I(f, g, F) = I(f, g, G) = 0$.

2.51 - Exemplo:

Seja $SO(4)$ o conjunto das transformações lineares $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que preservam o produto interno: $(Tx) \cdot (Ty) = x \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e têm determinante +1.

Temos que $S^3 \times S^3$ é um recobrimento universal de $SO(4)$.

Consideremos $f, g: SO(4) \rightarrow SO(4)$ e sejam $\tilde{f}, \tilde{g}: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3 \times S^3$ levantamentos de f e g respectivamente. A estrutura do anel de cohomologia $H^*(S^3 \times S^3, \mathbb{Q}) \cong$ é dado por:

$$H^0(S^3 \times S^3, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ com gerador } 1$$

$$H^3(S^3 \times S^3, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \text{ com geradores } \alpha \text{ e } \beta$$

$$H^6(S^3 \times S^3, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \text{ com gerador } \alpha \cup \beta$$

Suponhamos que $\tilde{f}^{3*}, \tilde{g}^{3*}: H^3(S^3 \times S^3, \mathbb{Q}) \rightarrow H^3(S^3 \times S^3, \mathbb{Q})$ sejam dadas por:

$$\tilde{f}^{3*}(\alpha) = a_{11}\alpha + a_{21}\beta$$

$$\tilde{g}^{3*}(\alpha) = b_{11}\alpha + b_{21}\beta$$

$$\tilde{f}^{3*}(\beta) = a_{12}\alpha + a_{22}\beta$$

$$\tilde{g}^{3*}(\beta) = b_{12}\alpha + b_{22}\beta$$

e sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

No capítulo 3, vamos mostrar que $\Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \det(B-A)$.

Como $SO(4)$ é um H-espço então $J(SO(4)) = \pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}_2$ e assim, pelo corolário 2.48., $\Lambda(f, g) = \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \det(B-A)$. Além dis

so f e g possuem duas classes de pontos de coincidência:

$$F = p \text{ Coinc}(\tilde{f}, \tilde{g}), \quad G = p \text{ Coinc}(\alpha \circ \tilde{f}, \tilde{g}) \quad \text{e} \quad I(f, g, F) = I(f, g, G).$$

$$\text{Se } \det(B-A) = 0 \text{ então } N(f, g) = 0.$$

$$\text{Suponhamos que } f_{\pi} = g_{\pi} = \text{id}_{\pi_1(SO(4))} \text{ ou } f_{\pi} = g_{\pi} = 0.$$

$$\begin{aligned} &\text{Desta forma, se } \det(B-A) \neq 0, \text{ temos que } N(f, g) = \\ &= \# \text{ coker}(g_{\pi} - f_{\pi}) = 2 \text{ ou seja } I(f, g, F) = I(f, g, G) \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{como} \\ &I(f, g, F) + I(f, g, G) = \Lambda(f, g) = \det(B-A), \text{ devemos ter } I(f, g, F) = \\ &\frac{1}{2} \det(B-A). \end{aligned}$$

Agora, se $f_{\pi} = \text{id}_{\pi_1(SO(4))}$ e $g_{\pi} = 0$ ou $f_{\pi} = 0$ e $g_{\pi} = \text{id}_{\pi_1(SO(4))}$ e $\det(B-A) \neq 0$, então $N(f, g) = \# \text{ coker}(g_{\pi} - f_{\pi}) = 1$.
Consequentemente, f e g possuem apenas uma classe de pontos de coincidência com índice não nulo. Logo, $F = G$ e por conseguinte, $I(f, g, F) = \det(B-A)$.

2.52 - Observação

Seja X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente 1-conexo e seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$, aplicação de recobrimento universal. Como todo $\alpha \in \pi_1(X)$ pode ser identificado com uma translação $\alpha: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, então α induz

$$\alpha_*: H_*(\tilde{X}, Q) \rightarrow H_*(\tilde{X}, Q)$$

Desta maneira, $\pi_1(X)$ atua à esquerda em $H_*(\tilde{X}, Q)$

$$\alpha, x \longrightarrow \alpha_*(x)$$

2.53 - Proposição

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de di mensão n , sem bordo, conexas, compactas, orientadas com grupos fundamentais $\pi_1(M_1)$ e $\pi_1(M_2)$ finitos. Se $\pi_1(M_2)$ atua trivialmente em $H_*(\tilde{M}_2, \mathbb{Q})$, então:

$$\Lambda(f, g) = \frac{\# \pi_1(M_2)}{\# \pi_1(M_1)} \cdot \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g})$$

quaisquer que sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ levantamentos de f e g .

Em particular, se $M_1 = M_2$, então $\Lambda(f, g) = \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g})$.

Demonstração

Para todo $\alpha \in \pi_1(M_2)$, temos:

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha \circ \tilde{f}, \tilde{g}) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{tr}(D_1 \circ \tilde{g}^{n-q} * \circ D_2^{-1} \circ (\alpha \circ \tilde{f})_{q*}) = \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{tr}(D_1 \circ \tilde{g}^{n-q} * \circ D_2^{-1} \circ \alpha_* \circ \tilde{f}_{q*}) = \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{tr}(D_1 \circ \tilde{g}^{n-q} * \circ D_2^{-1} \circ \tilde{f}_{q*}) = \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \pi_1(M_2)$, uma vez que a ação é trivial.

Levando-se em conta o corolário 2.44., temos:

$$\begin{aligned} \Lambda(f, g) &= \frac{1}{\# \pi_1(M_1)} \cdot \sum_{\alpha \in \pi_1(M_2)} \Lambda(\alpha \circ \tilde{f}, \tilde{g}) = \frac{1}{\# \pi_1(M_1)} \sum_{\alpha \in \pi_1(M_2)} \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}) = \\ &= \frac{\# \pi_1(M_2)}{\# \pi_1(M_1)} \Lambda(\tilde{f}, \tilde{g}), \text{ o que conclui a demonstração. } \blacksquare \end{aligned}$$

2.54 - Corolário

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ como na proposição anterior. Se $\pi_1(M_2)$ atua trivialmente em $H_*(\tilde{M}_2, Q)$ então $\Lambda(f, g) = 0$ implica $N(f, g) = 0$ e $\Lambda(f, g) \neq 0$ implica $N(f, g) = R(f, g) \geq \# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$.

Demonstração

Segue de 2.42. e 2.53.

2.55 - Exemplo

Consideremos o espaço dodecaédrico Σ^3 . Ele é obtido de um dodecaedro, identificando os pentágonos opostos mediante um movimento helicoidal com uma rotação de $\pi/5$ radianos.

([3], pags 56 e 57 e [20], pags 223 a 226).

A esfera S^3 é um recobrimento universal de Σ^3 e além disso, $\pi_1(\Sigma^3)$ é finito e tem ordem 120. ([3]).

Consideremos $f, g: \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^3$ e sejam $\tilde{f}, \tilde{g}: S^3 \rightarrow S^3$ levantamentos de f e g , respectivamente.

Pelo lema 1.10., o subgrupo de Jiang $J(S^3)$ está contido no centro $Z(\pi_1(\Sigma^3))$.

Como $\pi_1(\Sigma^3)$ não é abeliano, então necessariamente $J(\Sigma^3) \neq \pi_1(\Sigma^3)$. Desta forma, não podemos usar o corolário 2.48 para garantir que $\Lambda(f,g) = \Lambda(\tilde{f},\tilde{g})$.

Todavia, como $H_*(S^3, \mathbb{Q}) \cong H_*(\Sigma^3, \mathbb{Q})$, então $\pi_1(\Sigma^3)$ atua trivialmente em $H_*(S^3, \mathbb{Q})$ ([1], lema 5.7. pag 38) e portanto, o teorema 2.53, nos garante que $\Lambda(f,g) = \Lambda(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{grau } \tilde{g} - \text{grau } \tilde{f}$.

Assim, se $\text{grau } \tilde{g} \neq \text{grau } \tilde{f}$, temos pelo corolário anterior que $N(f,g) = R(f,g) \geq \# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

Os espaços M envolvidos neste capítulo, são variedades sem bordo, conexas, compactas e orientadas.

Sejam $f, g: M \rightarrow M$ aplicações. Suponhamos que existam elementos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda$ em $H^*(M, Q)$ de modo que $1 \in H^0(M, Q)$ e todos os monômios $\alpha_{j_1} \cup \alpha_{j_2} \cup \dots \cup \alpha_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \lambda$, constituam uma base para $H^*(M, Q)$ como um espaço vetorial graduado sobre Q . Nestas condições, mostramos no §1, deste capítulo, o cálculo do número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$.

Consideremos a tripla (M, m, e) onde $e \in M$, $m: M \times M \rightarrow M$ é uma aplicação tal que $m(x, e) = m(e, x) = x$ para todo $x \in M$. Definamos a aplicação $m_k: M \rightarrow M$ do seguinte modo: $m_0(x) = e$, $m_1(x) = x$ e para todo $k \geq 2$, $m_k(x) = m(x, m_{k-1}(x))$. Em [7], Brown mostrou que se y é um elemento arbitrário de M então, para todo $k \geq 2$, a equação $m_k(x) = y$ tem pelo menos k^β raízes onde β é o primeiro número de Betti de M . Considerando a equação $m_k(x) = e$, e o conjunto $R_k = \{x \in M \text{ tal que } m_k(x) = e, m_i(x) \neq e \text{ para todo } 1 \leq i < k\}$, Brown e Hales [8], definiram em R_k uma certa relação de equivalência e, para todo $k \geq 2$, forneceram uma estimativa para o número dessas classes de equivalência.

Nos parágrafos 2 e 3, conseguimos uma generalização para esses dois resultados.

Considerando a equação $m_k(x) = m_s(x)$, $k > s$, mostramos que essa equação tem pelo menos $(k-s)^\beta$ raízes onde β é o primeiro número de Betti de M .

Seja $R_{k,s} = \{x \in M \text{ tal que } m_k(x) = m_s(x) \text{ e } m_i(x) \neq m_j(x) \text{ para todo } k > i > j \text{ e } s \geq j \geq 0\}$. Considerando em $R_{k,s}$ a relação de equivalência que definimos para $\text{Coinc}(m_k, m_s)$ e fazendo uso dos resultados do capítulo 2, conseguimos uma estimativa para o número dessas classes de equivalência.

§1 - Cálculo do Número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$ de aplicações $f, g: M \rightarrow M$ onde $H^*(M, \mathbb{Q})$ possui um sistema simples de geradores

3.1. Definição (classe de coincidência de Lefschetz)

Sejam $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades conexas, sem bordo, orientadas, compactas, de dimensão n .

Seja $\mu \in H^n(M_2 \times M_2, M_2 \times M_2 - \Delta(M_2))$ a classe de Thom associada à orientação de M_2 .

Denotemos por $\tilde{\mu}$ a classe $i^*(\mu)$ onde

$$i^*: H^n(M_2 \times M_2, M_2 \times M_2 - \Delta(M_2)) \rightarrow H^n(M_2 \times M_2)$$

é a aplicação induzida da inclusão.

Consideremos a composta

$$H^n(M_2 \times M_2) \xrightarrow{(f, g)^*} H^n(M_1 \times M_1) \xrightarrow{d^*} H^n(M_1)$$

onde d é a aplicação diagonal $d(x) = (x, x)$.

A classe $\bar{L}(f,g) = d^*o(f,g)*(\bar{u})$ é chamada classe de Lefschetz do par (f,g) .

Chamemos de $L(f,g)$ a imagem de $\bar{L}(f,g)$ na homologia racional sob o homomorfismo de coeficientes. Então ,

$$\Lambda(f,g) = \langle L(f,g), \bar{z}_1 \rangle$$

onde $\bar{z}_1$ é a classe fundamental de M_1 na homologia racional ([22], pags 186-187).

3.2 - Observação

Seja M uma variedade conexa, orientada, sem bordo, compacta, de dimensão n .

Em [18], Milnor definiu uma base

$$1 = \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n = \bar{z}^*$$

para $H^*(M, \mathbb{Q})$, em ordem crescente de dimensão, onde $\bar{z}^* \in H^n(M, \mathbb{Q})$ denota a classe dual da classe fundamental $\bar{z} \in H_n(M, \mathbb{Q})$.

Seja K_p o conjunto dos números inteiros que são utilizados na indexação dos elementos que compõem α^p .

Em [10], Fadell mostrou que

$$\bar{u} = \sum c_{ij} \alpha_i \times \alpha_j = \sum_p \left(\sum_{\substack{i \in K_p \\ j \in K_{n-p}}} c_{ij} \alpha_i^p \times \alpha_j^{n-p} \right)$$

onde $\bar{u}$ é como na definição anterior.

Definindo

$$\beta_j^{n-p} = (-1)^P \sum_{k \in K_{n-p}} c_{jk} \alpha_k^{n-p}, \quad j \in K_p$$

temos que:

$$\langle \alpha_i^P \cup \beta_j^{n-p}, \bar{z} \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in K_p$$

Ainda, em [10], Fadell demonstrou que:

$$L(f, g) = \sum_P ((-1)^P \sum_{i \in K_P} (f^*(\alpha_i^P) \cup g^*(\beta_i^{n-p})))$$

3.3 - Notações

i) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n . Vamos denotar por $A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ a submatriz de A constituída das linhas $i_1, \dots, i_k$ e colunas $j_1, \dots, j_k$.

ii) $\epsilon_{(i_2 \dots i_n)}$ vai denotar o sinal da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

iii) Se $j_1, \dots, j_\ell$ são colunas quaisquer de uma matriz quadrada A de ordem n onde $1 \leq \ell \leq n$ e $0 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$ vamos denotar por $j'_1, \dots, j'_{n-\ell}$, onde $0 \leq j'_1 < \dots < j'_{n-\ell} \leq n$, as colunas complementares da matriz A . Analogamente, se $i_1, \dots, i_\ell$ são linhas arbitrárias de A , $1 \leq \ell \leq n$ e $0 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$ então $i'_1, \dots, i'_{n-\ell}$, $0 \leq i'_1 < \dots < i'_{n-\ell} \leq n$ vão denotar as linhas complementares de A .

3.4 - Proposição

Se A é uma matriz quadrada de ordem n , consideremos $j_1, \dots, j_\ell$ colunas arbitrárias de A , com $0 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$ e $1 \leq \ell \leq n$. Então,

$$\det A = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} \varepsilon(i_1 \dots i_\ell, i'_1 \dots i'_{n-\ell}) \varepsilon(j_1 \dots j_\ell, j'_1 \dots j'_{n-\ell}) \det \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_\ell \\ A & i_1 & \dots & i_\ell \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} j'_1 & \dots & j'_{n-\ell} \\ A & i'_1 & \dots & i'_{n-\ell} \end{pmatrix} \quad ([16], \text{ cap. 4})$$

3.5 - Definição

Seja M uma variedade de dimensão n , sem bordo, conexa, compacta e orientada. Dizemos que $H^*(M, Q)$ possui um sistema simples de geradores se existem elementos $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ em $H^*(M, Q)$ tal que $1 \in H^0(M, Q) \cong Q$ e todos os monômios

$$y_j = x_{j_1} \cup x_{j_2} \cup \dots \cup x_{j_r}$$

onde $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq \lambda$, constituem uma base para $H^*(M, Q)$ como um espaço vetorial graduado sobre Q .

A quantidade r de elementos que formam o monômio y_j chamamos comprimento de y_j .

Seja $f: M \rightarrow M$ uma aplicação e $f^*: H^*(M, Q) \rightarrow H^*(M, Q)$ sua induzida.

Seja $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_r}, p_{\alpha_{r+1}}, p_{\alpha_{r+2}}, \dots, p_{\alpha_{r+s}}$ um

sistema simples de geradores de $H^*(M, Q)$ onde $i_{\alpha_k}, 1 \leq k \leq r$ são de graus ímpares e $p_{\alpha_{r+j}}, 1 \leq j \leq s$ são de graus pares.

Suponhamos

$$f^*(i_{\alpha_u}) = \sum_{v=1}^r a_{vu} i_{\alpha_v} + t_u$$

$$f^*(p_{\alpha_{r+j}}) = \sum_{y=1}^s a_{r+y, r+j} p_{\alpha_{r+y}} + t_j$$

onde t_u e t_j são combinações lineares de monômios com comprimentos maiores que 1.

Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} i_A & 0 \\ 0 & p_A \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad i_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} \end{pmatrix} \quad e$$

$$p_A = \begin{pmatrix} a_{r+1, r+1} & a_{r+1, r+2} \dots a_{r+1, r+s} \\ a_{r+2, r+1} & a_{r+2, r+2} \dots a_{r+2, r+s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r+s, r+1} & a_{r+s, r+2} \dots a_{r+s, r+s} \end{pmatrix}$$

Para todo $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq r$, temos

3.6 - Lema

$$f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \left(\det \begin{matrix} i & j_1 \dots j_m \\ A & i_1 \dots i_m \end{matrix} \right) i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_m}} + t_{j_1 \dots j_m}$$

onde $t_{j_1 \dots j_m}$ é uma combinação linear de monômios com comprimentos maiores que m .

Demonstração

Faremos a prova por indução sobre o comprimento ℓ dos monômios $i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_\ell}}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq r$, $1 \leq \ell \leq m$.

É imediato que o resultado vale para todo monômio de comprimento 1.

Suponhamos agora, o resultado válido para todo monômio $i_{\alpha_{j_1}} \cup i_{\alpha_{j_2}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_{\ell-1}}}$ onde $1 \leq j_1 < \dots < j_{\ell-1} \leq r$ e $1 \leq \ell - 1 \leq m$.

Como $f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup i_{\alpha_{j_2}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_\ell}}) =$
 $= f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_{\ell-1}}}) \cup f^*(i_{\alpha_{j_\ell}})$ segue da hipótese de indução que:

$$f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_\ell}}) = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell-1} \leq r} \det \begin{matrix} i & j_1 \dots j_{\ell-1} \\ A & i_1 \dots i_{\ell-1} \end{matrix} i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_{\ell-1}}} + t_{j_1 \dots j_{\ell-1}} \right) \cup \left(\sum_{w=1}^r a_{wj_\ell} i_{\alpha_w} + t_{j_\ell} \right) =$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell-1} \leq r \\ 1 \leq w \leq r \\ w \notin \{i_1, \dots, i_{\ell-1}\}}} a_{wj_\ell} \det \begin{matrix} i & j_1 \dots j_{\ell-1} \\ A & i_1 \dots i_{\ell-1} \end{matrix} i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_{\ell-1}}} \cup i_{\alpha_w} + t_{j_1 \dots j_\ell}$$

Seja $\mathcal{J}_\ell = \{(i_1, \dots, i_\ell) \text{ tal que } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq r\}$. Se $i_{k_1} < i_{k_2} < \dots < i_{k_{\ell-1}}$ é uma sequência arbitrária de elementos de $\mathcal{J}_\ell$, seja $i'_{k_1} \in \mathcal{J}_\ell$ tal que $i'_{k_1} = \mathcal{J}_\ell - \{i_{k_1}, \dots, i_{k_{\ell-1}}\}$.

Assim,

$$f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_\ell}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq r} \left(\sum_{i_{k_1} < \dots < i_{k_{\ell-1}}} \varepsilon_{(i_{k_1}, \dots, i_{k_{\ell-1}}, i'_{k_1})} \left(\det {}^i A_{i_{k_1} \dots i_{k_{\ell-1}}}^{j_1 \dots j_{\ell-1}} \right) a_{i'_{k_1} j_\ell} \right) i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_\ell}} + t_{j_1 \dots j_\ell}$$

o que implica pela proposição 3.4 que,

$$f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_\ell}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq r} \left(\det {}^i A_{i_1 \dots i_\ell}^{j_1 \dots j_\ell} \right) i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_\ell}} + t_{j_1 \dots j_\ell}$$

como queríamos demonstrar. ■

3.7 - Definição

Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n e σ uma permutação do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Definimos o número $\phi(A)$ pela equação

$$\phi(A) = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

onde o somatório se estende sobre todas as $n!$ permutações σ do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

3.8 - Lema

Para todo $1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq s$,

$$f^*(p_{\alpha_{\ell_1}} \cup p_{\alpha_{\ell_2}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}}) = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq s} \phi \left(\begin{matrix} \ell_1 & \dots & \ell_k \\ p A & & \\ \mu_1 & \dots & \mu_k \end{matrix} \right) p_{\alpha_{\mu_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\mu_k}} + t_{\ell_1 \dots \ell_k}$$

onde $t_{\ell_1 \dots \ell_k}$ é uma combinação linear de monômios com comprimentos maiores que k .

Demonstração

Análoga à do lema 3.6. ■

3.9 - Lema

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , então

$$\det(B+A) = \sum_{p=0}^n \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \det B_A^{j_1 \dots j_p}$$

onde $B_A^{j_1 \dots j_p}$ denota a matriz obtida de B substituindo-se as colunas $j_1, \dots, j_p$ de B pelas colunas $j_1, \dots, j_p$ de A .

Demonstração

Vamos fazer a prova por indução sobre a ordem n das matrizes A e B .

Se $n = 1$, o resultado é imediato. Suponhamos então que o resultado seja verdadeiro se as ordens de A e B são ambas iguais a $r - 1$.

Se A e B têm ordem r , desenvolvendo o determinante de $B + A$ por Laplace, pela última coluna, temos:

$$\det(B+A) = \sum_{s=1}^r (-1)^{s+r} (b_{sr} + a_{sr}) \det({}^{sr}(B+A))$$

onde ${}^{sr}(B+A)$ denota a submatriz obtida de $B + A$ eliminando-se a s -ésima linha e r -ésima coluna.

Da hipótese de indução, segue que:

$$\det(B+A) = \sum_{s=1}^r (-1)^{s+r} (b_{sr} + a_{sr}) \left(\sum_{p=0}^{r-1} \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r-1} \det({}^{sr}B)_A^{j_1 \dots j_p} \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \det(B+A) &= \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r-1} \left(\sum_{s=1}^r (-1)^{s+r} (b_{sr} + a_{sr}) \det({}^{sr}B)_A^{j_1 \dots j_p} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r-1} \left(\sum_{s=1}^r (-1)^{s+r} b_{sr} \det({}^{sr}B)_A^{j_1 \dots j_p} + \sum_{s=1}^r (-1)^{s+r} a_{sr} \det({}^{sr}B)_A^{j_1 \dots j_p} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{p=0}^{r-1} \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r-1} (\det B_A^{j_1 \dots j_p} + \det B_A^{j_1 \dots j_p r}) = \sum_{p=0}^r \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r} \det B_A^{j_1 \dots j_p}$$

o que mostra o resultado

3.10 - Corolário

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n ,

$$\det(B-A) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \det B_A^{j_1 \dots j_p}$$

Demonstração

Segue do lema anterior, considerando-se $B - A = B + (-A)$.

Sejam $f, g: M \rightarrow M$ onde M é uma variedade sem bordo, conexa, compacta, orientada. Suponhamos $H^*(M, \mathbb{Q})$ tenha um sistema simples de geradores,

$$i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_r}, p_{\alpha_{r+1}}, p_{\alpha_{r+2}}, \dots, p_{\alpha_{r+s}}$$

onde i_{α_j} , $1 \leq j \leq r$ sejam de graus ímpares e $p_{\alpha_{r+k}}$, $1 \leq k \leq s$ de graus pares.

As aplicações f, g induzem $f^*, g^*: H^*(M, Q) \rightarrow H^*(M, Q)$.

Suponhamos que

$$f^*(i\alpha_u) = \sum_{v=1}^r a_{vu} i\alpha_v + t_u, \quad f^*(p\alpha_{r+j}) = \sum_{y=1}^s a_{r+y, r+j} p\alpha_{r+y} + t_j$$

$$g^*(i\alpha_u) = \sum_{v=1}^r b_{vu} i\alpha_v + t'_u, \quad g^*(p\alpha_{r+j}) = \sum_{y=1}^s b_{r+y, r+j} p\alpha_{r+y} + t'_j$$

onde t_u, t_j, t'_u, t'_j são combinações lineares de monômios com comprimentos maiores que 1 e

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} i_A & 0 \\ 0 & p_A \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} i_B & 0 \\ 0 & p_B \end{bmatrix}$$

Desta forma, temos o seguinte resultado.

3.11 - Teorema

$$\Lambda(f, g) = \phi(p_B + p_A) \cdot \det(i_B - i_A)$$

Demonstração

O elemento $1 \in H^0(M, Q)$ e todos os monômios

$$i\alpha_{j_1} \cup \dots \cup i\alpha_{j_m} \cup p\alpha_{\ell_1} \cup \dots \cup p\alpha_{\ell_k}, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq r,$$

$r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s$ formam uma base para $H^*(M, Q)$, como um espaço vetorial graduado $H^*(M, Q)$ sobre Q .

Com as notações de 3.3, é imediato que $1 \in H^0(M, Q)$ e todos os monômios

$$\varepsilon_{(j'_1 \dots j'_{r-m} j_1 \dots j_m)} i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}}$$

$1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq r$, $1 \leq j'_1 < \dots < j'_{r-m} \leq r$, também constituem uma base para $H^*(M, Q)$ como um espaço vetorial graduado sobre Q . Além disso,

$$\left\langle \left(i_{\alpha_{j'_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j'_{r-m}}} \cup p_{\alpha_{\ell'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell'_{s-k}}} \right) \cup \varepsilon_{(j'_1 \dots j'_{r-m} j_1 \dots j_m)} \left(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \right), \bar{z} \right\rangle = 1$$

onde $\bar{z} \in H_n(M, Q)$ denota a classe fundamental.

Seja $\mathcal{b}_p = \{y_{m_k} = i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \text{ tal que}$

$1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq r$, $r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s$ e grau $(y_{m_k}) = p\}$

Levando-se em conta a observação 3.2 temos:

$$L(f, g) = \sum_p (-1)^p \left[\sum_{i_{\alpha_{j'_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j'_{r-m}}} \cup p_{\alpha_{\ell'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell'_{s-k}}} \in \mathcal{b}_p} f^* \left(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \right) \cup g^* \left(\varepsilon_{(j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_{r-m})} i_{\alpha_{j'_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j'_{r-m}}} \cup p_{\alpha_{\ell'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell'_{s-k}}} \right) \right]$$

$$\sum (-1)^p \left[\sum_{i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \in \mathcal{L}_p} \epsilon_{(j_1 \dots j_m, j'_1 \dots j'_{r-m})} f^*(i_{j_1} \cup \dots \cup i_{j_m}) \cup \right. \\ \left. f^*(p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}}) \cup g^*(i_{j'_1} \cup \dots \cup i_{j'_{r-m}}) \cup g^*(p_{\alpha_{\ell'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell'_{s-k}}}) \right]$$

Dos lemas 3.6 e 3.8 decorre,

$$f^*(i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}}) \cup f^*(p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}}) \cup g^*(i_{\alpha_{j'_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j'_{r-m}}}) \cup \\ g^*(p_{\alpha_{\ell'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell'_{s-k}}}) = \left\{ \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \det \left(\begin{smallmatrix} i_{j_1} & \dots & i_{j_m} \\ i_1 & \dots & i_m \end{smallmatrix} \right) i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_m}} + t_{j_1 \dots j_m} \right] \cup \right. \\ \left[\sum_{r+1 \leq u_1 < \dots < u_k \leq r+s} \phi \left(\begin{smallmatrix} p_{\alpha_{u_1}} & \dots & p_{\alpha_{u_k}} \\ u_1 & \dots & u_k \end{smallmatrix} \right) p_{\alpha_{u_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{u_k}} + t_{\ell_1 \dots \ell_k} \right] \cup \\ \left[\sum_{1 \leq i'_1 < \dots < i'_{r-m} \leq r} \det \left(\begin{smallmatrix} i_{j'_1} & \dots & i_{j'_{r-m}} \\ i'_1 & \dots & i'_{r-m} \end{smallmatrix} \right) p_{\alpha_{i'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{i'_{r-m}}} + t_{j'_1 \dots j'_{r-m}} \right] \cup \\ \left. \left[\sum_{r+1 \leq u'_1 < \dots < u'_{s-k} \leq r+s} \phi \left(\begin{smallmatrix} p_{\alpha_{u'_1}} & \dots & p_{\alpha_{u'_{s-k}}} \\ u'_1 & \dots & u'_{s-k} \end{smallmatrix} \right) p_{\alpha_{u'_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{u'_{s-k}}} + t_{\ell'_1 \dots \ell'_{s-k}} \right] \right\}$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto cup obtemos como segundo membro da igualdade acima, a seguinte expressão

$$\sum_{\substack{1 \leq i_j < \dots < i_m \leq r \\ r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s}} \epsilon_{(i_1 \dots i_m, i'_1 \dots i'_{r-m})} \det \left(\begin{smallmatrix} i_{j_1} & \dots & i_{j_m} \\ i_1 & \dots & i_m \end{smallmatrix} \right) \det \left(\begin{smallmatrix} i_{j'_1} & \dots & i_{j'_{r-m}} \\ i'_1 & \dots & i'_{r-m} \end{smallmatrix} \right) \cdot \phi \left(\begin{smallmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_k \\ u_1 & \dots & u_k \end{smallmatrix} \right).$$

$$\phi \left(\begin{smallmatrix} p_{\alpha_{u'_1}} & \dots & p_{\alpha_{u'_{s-k}}} \\ u'_1 & \dots & u'_{s-k} \end{smallmatrix} \right) i_{\alpha_{i_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{i_r}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_{r+s}}}$$

visto que todos os outros termos que aparecem na distribuição são

nulos, por serem combinações lineares de monômios

$i_{\alpha_{q_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{q_v}} \cup p_{\alpha_{y_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{y_w}}$ onde pelo menos um dos fatores é repetido.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 L(f,g) &= \sum_p (-1)^p \left\{ \sum_{i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \in \mathcal{L}_p} \right. \\
 &\quad \sum_{r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \varepsilon_{(j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_{r-m})} \right. \\
 &\quad \left. \left. \varepsilon_{(i_1 \dots i_m i'_1 \dots i'_{r-m})} \det \begin{pmatrix} i_{j_1 \dots j_m} \\ A_{i_1 \dots i_m} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} i_{j'_1 \dots j'_{r-m}} \\ B_{i'_1 \dots i'_{r-m}} \end{pmatrix} \right] \phi \begin{pmatrix} p_{\ell_1 \dots \ell_k} \\ A_{u_1 \dots u_k} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} p_{\ell'_1 \dots \ell'_k} \\ B_{u'_1 \dots u'_k} \end{pmatrix} \right\} \\
 &\quad i_{\alpha_1} \cup \dots \cup i_{\alpha_r} \cup p_{\alpha_{r+1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{r+s}} \\
 &= \sum_p (-1)^p \left\{ \sum_{i_{j_1} \cup \dots \cup i_{j_m} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \in \mathcal{L}_p} \right. \\
 &\quad \left[\sum_{r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s} \phi \begin{pmatrix} p_{\ell_1 \dots \ell_k} \\ A_{u_1 \dots u_k} \end{pmatrix} \cdot \phi \begin{pmatrix} p_{\ell'_1 \dots \ell'_k} \\ B_{u'_1 \dots u'_{s-k}} \end{pmatrix} \right] \det \begin{pmatrix} i_{j_1 \dots j_m} \\ B_{i_A} \end{pmatrix} \right\} \\
 &\quad i_{\alpha_1} \cup \dots \cup i_{\alpha_r} \cup p_{\alpha_{r+1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{r+s}}
 \end{aligned}$$

Em virtude da definição 3.7 e da proposição 3.4., se-

gue

$$L(f,g) = \sum_p (-1)^p \left\{ \sum_{i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}} \in \mathcal{B}_p} \right. \\ \left. \phi \left({}^{p_B}_{p_A} \ell_1 \dots \ell_k \right) \det \left(\begin{smallmatrix} i_B & j_1 \dots j_m \\ i_A & \end{smallmatrix} \right) \right\} i_{\alpha_1} \cup \dots \cup i_{\alpha_r} \cup p_{\alpha_{r+1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{r+s}}$$

Agora, $i_{\alpha_{j_1}} \cup \dots \cup i_{\alpha_{j_m}} \cup p_{\alpha_{\ell_1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{\ell_k}}$ é de grau par ou ímpar, conforme m seja par ou ímpar

$$\text{Portanto,} \\ L(f,g) = \sum_{k,m} (-1)^m \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq r \\ r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s}} \phi \left({}^{p_B}_{p_A} \ell_1 \dots \ell_k \right) \det \left(\begin{smallmatrix} i_B & j_1 \dots j_m \\ i_A & \end{smallmatrix} \right) \right\} \\ = \sum_k \left\{ \sum_{r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s} \left[\sum_m (-1)^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq r} (\det \begin{smallmatrix} i_B & j_1 \dots j_m \\ i_A & \end{smallmatrix}) \phi \left({}^{p_B}_{p_A} \ell_1 \dots \ell_k \right) \right] \right\} \\ i_{\alpha_1} \cup \dots \cup i_{\alpha_r} \cup p_{\alpha_{r+1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{r+s}}$$

Do corolário 3.10, decorre que

$$L(f,g) = \left\{ \sum_k \left[\sum_{r+1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq r+s} \phi \left({}^{p_B}_{p_A} \ell_1 \dots \ell_k \right) \det(i_B - i_A) \right] i_{\alpha_1} \cup \dots \cup i_{\alpha_r} \cup p_{\alpha_{r+1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{r+s}} \right\}$$

Levando-se em conta a definição 3.7 e o lema 3.9.,

$$L(f,g) = \phi({}^{p_B}_{p_A}) \cdot \det(i_B - i_A) i_{\alpha_1} \cup \dots \cup i_{\alpha_r} \cup p_{\alpha_{r+1}} \cup \dots \cup p_{\alpha_{r+s}}$$

Por conseguinte

$$\Lambda(f, g) = \left\langle L(f, g), \left({}^i\alpha_1 \cup \dots \cup {}^i\alpha_r \cup {}^p\alpha_{r+1} \cup \dots \cup {}^p\alpha_{r+s} \right) \right\rangle = \\ \Phi({}^pB + {}^pA) \cdot \det({}^iB - {}^iA). \quad \blacksquare$$

Uma H-variedade significa uma terna (M, m, e) onde M é uma variedade sem bordo, conexa, compacta, $e \in M$ e $m: M \times M \rightarrow M$ é uma aplicação tal que $m(x, e) = m(e, x) = x$ para todo $x \in M$.

Se M é uma H-variedade o teorema de Leray-Samelson garante que $H^*(M, \mathbb{Q})$ é uma álgebra exterior $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda)$ gerada por elementos de graus ímpares ([23], pag 155).

Como um caso particular do teorema 3.11, temos o seguinte resultado.

3.12 - Corolário

Sejam $f, g: M \rightarrow M$ onde M é uma H-variedade orientada e consideremos as induzidas $f^*, g^*: H^*(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{Q})$.

$$\text{Suponhamos que para todo } 1 \leq u \leq \lambda, \\ f^*(\alpha_u) = \sum_{s=1}^{\lambda} a_{su} \alpha_s + t_u, \quad g^*(\alpha_u) = \sum_{s=1}^{\lambda} b_{su} \alpha_s + t'_u$$

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, $1 \leq i, j \leq \lambda$.

Então,

$$\Lambda(f, g) = \det(B-A) \quad \blacksquare$$

3.13 - Corolário

Sejam $f, g: T^n \rightarrow T^n$ onde T^n denota o toro n -dimensional. A cohomologia racional $H^*(T^n, \mathbb{Q})$ é uma álgebra exterior gerada por $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, onde $\alpha_i \in H^1(T^n, \mathbb{Q})$. Consideremos A e B , as matrizes de

$$f^1, g^1: H^1(T^n, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(T^n, \mathbb{Q})$$

respectivamente, em relação a base α . Então, se $\Lambda(f, g) \neq 0$,

$$N(f, g) = |\Lambda(f, g)| = |\det(B-A)|$$

Demonstração

De 3.12, segue que $\Lambda(f, g) = \det(B-A)$

Sendo T^n um H -espaço, $J(T^n) = \pi_1(T^n)$ e conseqüentemente, do corolário 2.33 temos que $N(f, g) = \# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$.

Existe uma matriz diagonal $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ tal que $D = C \cdot (B-A) \cdot F$ onde C e F são matrizes unimodulares. Assim, $\det D = \det(B-A)$ e a ordem de $\text{coker}(g_{1*} - f_{1*})$ é a ordem do grupo

$$\frac{\mathbb{Z}}{d_1 \mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{d_2 \mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{d_n \mathbb{Z}}$$

Portanto,

$$\# \text{coker}(g_{1*} - f_{1*}) = |d_1 \dots d_n| = |\det D| = |\det(B-A)|$$

Logo,

$$N(f, g) = |\det(B-A)| = |\Lambda(f, g)|$$

§2. RAÍZES EM H-VARIEDADES

Neste parágrafo, vamos calcular o número de Lefschetz $\Lambda(m_k, m_s)$ como também, vamos dar um limitante inferior para o número de soluções da equação $m_k(x) = m_s(x)$, $k > s$.

3.14 - Proposição

Seja (M, m, e) uma H-variedade orientada. Se k e s são números inteiros não negativos tal que $k > s$ então o número de Lefschetz $\Lambda(m_k, m_s)$ é dado por:

$$\Lambda(m_k, m_s) = (s-k)^\lambda$$

onde λ é o número de elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ em $H^*(M, \mathbb{Q})$, dado pelo teorema de Leray-Samelson.

Demonstração

Se $k = 1$ e $s = 0$ então m_1 é a aplicação identidade e m_0 é a aplicação constante e pelo corolário 3.12, segue que $\Lambda(m_1, m_0) = (-1)^\lambda$.

Seja agora, $k \geq 2$. Suponhamos que os elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ estejam ordenados em ordem crescente de seus graus.

Em [7], Brown mostrou que para todo $k \geq 2$ e $1 \leq i \leq \lambda$,

$$m_k^*(\alpha_i) = k\alpha_i + \sum_j a_j \gamma_j$$

onde $a_j \in \mathbb{Q}$ e $y_j = \alpha_{j_1} \cup \dots \cup \alpha_{j_\ell}$ com $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq \lambda$ e $\text{grau } \alpha_{j_\ell} < \text{grau } \alpha_{j_1}$.

Pelo corolário 3.12,

$$\Lambda(m_k, m_s) = \det(B-A)$$

onde A e B são as matrizes de ordem λ , dadas por

$$A = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} s & & & \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, $\Lambda(m_k, m_s) = (s-k)^\lambda$. ■

3.15 - Proposição

Seja (M, m, e) uma H-variedade orientada. Se k e s são números inteiros não negativos então para todo $k > s$ a equação,

$$m_k(x) = m_s(x)$$

tem pelo menos $(k-s)^\beta$ soluções, onde β denota a dimensão de $H^1(M, \mathbb{Q})$.

Demonstração

Sendo M um H-espço, então $\pi_1(M) = J(M)$ e portanto $\pi_1(M, e)$ é abeliano. Desde que $\Lambda(m_k, m_s) = (s-k)^\lambda \neq 0$, decorre de 2.33., que

$$N(f, g) = \# \text{ coker}(m_{s_\pi} - m_{k_\pi})$$

onde $m_{k_\pi}, m_{s_\pi} : \pi_1(M, e) \rightarrow \pi_1(M, e)$.

Pelo teorema fundamental dos grupos abelianos,

$$\pi_1(M, e) \cong Z^{(1)} \oplus Z^{(2)} \oplus \dots \oplus Z^{(\beta)} \oplus T = F \oplus T$$

onde cada $Z^{(i)}$ é cíclico infinito e T é finito.

É conhecido que $m_{r_\pi}(\alpha) = r \cdot \alpha$, para todo $\alpha \in \pi_1(M, e)$ ([7]).

Assim,

$$(m_{s_\pi} - m_{k_\pi})(Z^{(i)}) = (k-s) \cdot Z^{(i)}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \text{coker} \left((m_{s_\pi} - m_{k_\pi}) \Big|_F \right) &= \frac{Z^{(1)}}{(k-s)Z^{(1)}} \oplus \dots \oplus \frac{Z^{(\beta)}}{(k-s)Z^{(\beta)}} \cong \\ &\cong Z^{(1)}_{(k-s)} \oplus \dots \oplus Z^{(\beta)}_{(k-s)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(k-s)^\beta = \# \text{coker} \left((m_{s_\pi} - m_{k_\pi}) \Big|_F \right) \leq \# \text{coker} (m_{s_\pi} - m_{k_\pi}) = N(m_k, m_s)$$

Como o número de Nielsen $N(m_k, m_s)$ é um limitante inferior para o número de pontos de coincidência de m_k e m_s , segue que $(k-s)^\beta$ é um limitante inferior para o número de raízes da equação:

$$m_k(x) = m_s(x), \quad k > s.$$

§3. RAÍZES PRIMITIVAS EM H-VARIEDADES

3.16 - Definição

Uma raiz primitiva da equação

$$m_k(x) = m_s(x) \quad , \quad k > s$$

na H-variedade (M, m, e) é um ponto $x \in M$, tal que $m_k(x) = m_s(x)$ porém, $m_i(x) \neq m_j(x)$ para todo $k > i > j$; $s \geq j \geq 0$ e $k-s$ não divide $i-j$.

Como toda raiz da equação $m_k(x) = m_s(x)$ é um ponto de coincidência das funções $m_k, m_s: M \rightarrow M$ então, conforme vimos no cap. 2, o conjunto das raízes e, em particular, o conjunto das raízes primitivas se separa numa reunião disjunta e finita de classes de equivalência.

Neste parágrafo, vamos dar uma estimativa para o número dessas classes de equivalência.

Vamos supor em todo o parágrafo que $k > s$ e vamos utilizar as seguintes notações: $R_{k,s} = \{x \in M \text{ tal que } m_k(x) = m_s(x)\}$

$$R'_{k,s} = \{x \in R_{k,s} \text{ tal que } x \text{ é raiz primitiva}\}.$$

3.17 - Definição

Para todo $x \in M$ e todo k inteiro não negativo, definimos a função $L_x^k: M \rightarrow M$ por

$$L_x^k(y) = \begin{cases} y & \text{se } k = 0 \\ m(x, L_x^{k-1}(y)) & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

para todo $y \in M$.

Decorre imediatamente da definição que, para todo $k \geq 1$,
 $m_k(x) = L_x^{k-1}(x)$

3.18 - Lema

Para todo $x \in M$, $L_x^i \circ L_x^j = L_x^{i+j}$.

([8], pag 613) ■

3.19 - Lema

Para todo $\ell \geq 1$, $L_x^{\ell-1}(x) = L_x^\ell(e)$

Demonstração

É imediata, usando indução sobre ℓ . ■

3.20 - Proposição

Para todo k, s, ℓ , inteiros não negativos $R_{k,s} \subseteq R_{k+\ell, s+\ell}$

Demonstração

Para todo k e s , se $\ell = 0$, o resultado é imediato.

Então, podemos supor $\ell \geq 1$.

Seja $x \in R_{k,s}$ isto é, $m_k(x) = m_s(x)$. Como $k > s$ então necessariamente $k \geq 1$. Desta maneira,

$$\begin{aligned} m_{k+\ell}(x) &= L_x^{k+\ell-1}(x) = L_x^\ell L_x^{k-1}(x) = L_x^\ell(m_k(x)) = L_x^\ell(m_s(x)) = \\ &= L_x^{s+\ell-1}(x) = m_{s+\ell}(x). \end{aligned}$$

isto é, $x \in R_{k+\ell, s+\ell}$ ■

3.21 - Proposição

Sejam s, v inteiros, $s \geq 0, v \geq 1$. Então, para todo q inteiro positivo

$$R_{s+v, s} \subseteq R_{s+qv, s}$$

Demonstração

Se $q = 1$, o resultado é imediato. Suponhamos a proposição verdadeira para $1 \leq q < r$ e seja $x \in R_{s+v, s}$. Então $m_{s+v}(x) = m_s(x)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} m_{s+qv, s}(x) &= L_x^{s+qv-1}(x) = L_x^{s+(q-1)v+v-1}(x) = L_x^v L_x^{s+(q-1)v-1}(x) = \\ &= L_x^v(m_{s+(q-1)v}(x)) = L_x^v(m_s(x)) = L_x^{v+s-1}(x) = m_{s+v}(x) = m_s(x). \end{aligned}$$

3.22 - Lema

$R_{k,s} \cap R_{u,v} = R_{v+w,v}$ onde k, u, s e v são inteiros, tal que $k > u > s \geq v \geq 0$ e $w = \text{mdc}(k-s, u-v)$.

Demonstração

Suponhamos $v = 0$. Se $x \in R_{k,s} \cap R_{u,0}$ então $m_k(x) = m_s(x)$ e $m_u(x) = e$.

Visto que $u > 0$, não é difícil verificar que $m_{bu}(x) = e$ implica $L_x^{bu}(x) = x$ para todo inteiro positivo b . (*)

Existem inteiros positivos a e b , tal que $|a(k-s) - bu| = w$.

Podemos assumir que $a(k-s) > bu$. Daí,

$$\begin{aligned} m_w(x) &= L_x^{w-1}(x) = L_x^{a(k-s)-bu-1}(x) = L_x^{a(k-s)-bu-1} L_x^{bu}(x) = \\ &= L_x^{a(k-s)-1}(x). \end{aligned}$$

Sendo $m_k(x) = m_s(x)$ e $u > s$, pela proposição 3.20., decorre que $m_{u+(k-s)}(x) = m_u(x) = e$ e, por 3.21., $m_{u+a(k-s)}(\bar{x}) = e$. Levando-se em conta (*), temos

$$e = L_x^{u+a(k-s)-1}(x) = L_x^{a(k-s)-1} L_x^u(x) = L_x^{a(k-s)-1}(x)$$

Em consequência, $m_w(x) = e$ ou seja, $x \in R_{w,0}$

Suponhamos agora, $v \geq 1$ e seja $x \in R_{k,s} \cap R_{u,v}$. Visto que $u-v > 0$, então por 3.21.,

$$m_{v+b(u-v)}(x) = m_v(x) = m_u(x)$$

para todo inteiro positivo b .

Desta forma,

$$L_x^{v+b(u-v)-1}(x) = L_x^{v-1}(x) = L_x^{u-1}(x).$$

Existem inteiros positivos a e b , tal que

$|a(k-s) - b(u-v)| = w$. Podemos assumir que $a(k-s) > b(u-v)$. Assim,

$$\begin{aligned} m_{v+w}(x) &= L_x^{v+w-1}(x) = L_x^{a(k-s)-b(u-v)} L_x^{v-1}(x) = \\ &= L_x^{a(k-s)-b(u-v)} L_x^{v+b(u-v)-1}(x) = L_x^{u+a(k-s)-1}(x) \end{aligned}$$

Sendo $u-s > 0$ e $m_k(x) = m_s(x)$ é imediato que

$$m_{u+a(k-s)}(x) = m_u(x) = m_v(x) \quad \text{e, consequentemente,}$$

$$m_{v+w}(x) = m_v(x)$$

ou seja, $x \in R_{v+w,v}$.

Por outro lado, seja x com $m_{v+w}(x) = m_v(x)$.

Sejam p, q inteiros positivos com $k-s = pw$ e $u-v=qw$.

Então,

$$m_{v+pw}(x) = m_v(x) \quad \text{e} \quad m_{v+qw}(x) = m_v(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} m_k(x) &= m_{s+(k-s)}(x) = m_{s+pw}(x) = L_x^{s+pw-1}(x) = L_x^{s-v} L_x^{v+pw-1}(x) = \\ &= L_x^{s-v} L_x^{v-1}(x) = L_x^{s-1}(x) = m_s(x) \end{aligned}$$

e analogamente $m_u(x) = m_v(x)$. Portanto, $x \in R_{k,s} \cap R_{u,v}$. ■

3.23 - Lema

Se k, s, u, v são inteiros tal que $k > s > u > v \geq 0$
então $R_{k,s} \cap R_{u,v} \subseteq R_{k,s} \cap R_{s,v'}$ para algum inteiro $v' < s$.

Demonstração

Seja $x \in M$ com $m_k(x) = m_s(x)$ e $m_u(x) = m_v(x)$.

Então $m_{u+(s-u)}(x) = m_{v+(s-u)}(x)$ implica

$$m_s(x) = m_{v+(s-u)}(x).$$

Pondo-se $v' = v + s - u$, segue o resultado. ■

3.24 - Observação

Segundo a definição 3.16., o conjunto $R'_{k,s}$ das raízes primitivas da equação $m_k(x) = m_s(x)$, $k > s+1$, é dada por:

$$\begin{aligned} R'_{k,s} = R_{k,s} - \bigcup_{\substack{k > u > s \geq v \geq 0 \\ k-s \nmid i-j}} R_{k,s} \cap R_{u,v} - \bigcup_{\substack{k > s > u > v \geq 0 \\ k-s \nmid i-j}} R_{k,s} \cap R_{u,v} - \\ - \bigcup_{\substack{k > s > v \geq 0 \\ k-s \nmid i-j}} R_{k,s} \cap R_{s,v} \end{aligned}$$

Na virtude do lema 3.23., podemos escrever

$$R'_{k,s} = R_{k,s} - \bigcup_{\substack{k > u > s \geq v \geq 0 \\ k-s \nmid i-j}} R_{k,s} \cap R_{u,v} - \bigcup_{\substack{k > s > v \geq 0 \\ k-s \nmid i-j}} R_{k,s} \cap R_{s,v}$$

3.25 - Corolário

i) Se $k-s = 1$ então $R'_{k,s} = \emptyset$

ii) Se $k-s > 1$ então $R'_{k,s} = R_{k,s} - \bigcup_{\substack{k>u>s>v\geq 0 \\ k-s \nmid u-v}} R_{k,s} \cap R_{u,v}$

Demonstração

A parte (i) segue diretamente da definição 3.16.

Para a parte (ii), suponhamos $x \in \bigcup_{\substack{k>s>v\geq 0 \\ k-s \nmid u-v}} R_{k,s} \cap R_{s,v}$.

Então $m_s(x) = m_v(x)$ para algum s e algum v , tal que $k>s>v\geq 0$ e $k-s \nmid s-v$.

Assim, $m_{s+1}(x) = m_{v+1}(x)$ e como $k > s+1 \geq s > v \geq 0$ segue que

$x \in \bigcup_{\substack{k>u>s>v\geq 0 \\ k-s \nmid u-v}} R_{k,s} \cap R_{u,v}$. A conclusão decorre agora, da observação

anterior.

3.26 - Teorema

Se $k-s > 1$ então,

$R'_{k,s} = \{x \in R_{k,s} \text{ tal que } x \notin R_{v+w,v} \text{ onde}$

$w = \text{mdc}(k-s, u-v) \text{ para todo } k>u>s\geq v\geq 0 \text{ e } k-s \nmid u-v\}$

O resultado , decorre imediatamente da parte (ii) do corolário 3.25 e do lema 3.22. ■

3.27 - Teorema

Seja $k-s > 1$ e $P_{k,s} = \{x \in R_{k,s} \text{ tal que } x \notin R_{s+\frac{k-s}{q},s} \text{ para todo primo } q \text{ dividindo } k-s\}$

Então,

$$R'_{k,s} = P_{k,s}$$

Demonstração

Seja $x \in R'_{k,s}$ e suponhamos $x \in R_{s+\frac{k-s}{q},s}$ para algum primo q dividindo $k-s$. Desde que $k-s > \frac{k-s}{q}$ então $k > s + \frac{k-s}{q} > s$ e, por conseguinte, $x \in R_{k,s} \cap R_{u,v}$ o que é uma condição, pois $x \in R'_{k,s}$ $\begin{matrix} k > u > s > v > 0 \\ k-s \nmid u-v \end{matrix}$

Por outro lado, consideremos $x \in P_{k,s}$ e $x \in R_{v+w,v}$ onde $w = \text{mdc}(k-s, u-v)$, para algum u e v tal que $k > u > s > v > 0$ e $k-s \nmid u-v$. Seja q um número primo qualquer dividindo $k-s$, e suponhamos que $k-s = r \cdot q$, com $r > 1$. Desde que w divide $k-s$ então w divide $r \cdot q$ e como q é primo, temos em decorrência que $w = 1$, $w = q$ ou w divide r .

Se $w = 1$, como $x \in R_{v+1,v}$ segue da proposição 3.21. ,
que $x \in R_{v+\frac{k-s}{q},v}$. Desse modo,

$$\begin{aligned} m_{s+\frac{k-s}{q}}(x) &= L_x^{s+\frac{k-s}{q}-1}(x) = L_x^{s-v} L_x^{v+\frac{k-s}{q}-1}(x) = L_x^{s-v} L_x^{v-1}(x) = \\ &= L_x^{s-1}(x) = m_s(x) \quad \text{ou seja } x \notin P_{k,s}. \end{aligned} \quad (*)$$

Se $w = q$ então $k-s = r.q = r.w$. Seja p um número primo dividindo r . Portanto, $r = a.p$ para algum número inteiro e positivo a . Desse modo, $k-s = a.p.w$. isto é, $\frac{k-s}{p} = a.w$. Agora $x \in R_{v+w,v}$ implica $x \in R_{v+aw,v}$ ou seja, $x \in R_{v+\frac{k-s}{p},v}$ e por conseguinte $x \notin P_{k,s}$.

Se w divide r temos que $r = b.w$, para algum número inteiro e positivo b . Visto que $x \in R_{v+w,v}$ então $x \in R_{v+bw,v} = R_{v+\frac{k-s}{q},v}$ e analogamente a (*) concluímos que $x \notin P_{k,s}$.

Finalmente, se $k-s = q$ então $k-s$ é primo. Estamos considerando que $k-s$ não divide $u-v$. Visto que w divide $k-s$ então $w \neq k-s$ e assim, necessariamente, $w = 1$. De modo análogo a (*), mostramos que $m_{s+1}(x) = m_s(x)$ o que equivale a dizer que $x \notin P_{k,s}$.

Como $R_{k,s} = \text{Coinc}(m_k, m_s)$ então, conforme vimos no capítulo 2, $R_{k,s}$ se separa numa reunião disjunta e finita de classes de equivalência. Seja $\mathcal{R}_{k,s}$ o conjunto dessas classes de equivalência.

Se s, v são inteiros, $s \geq 0$ e $v \geq 1$ então para todo inteiro $q \geq 1$, temos que $R_{s+v,s} \subseteq R_{s+qv,s}$

Sejam $\tilde{m}_k, \tilde{m}_s: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ levantamentos de $m_k, m_s: M \rightarrow M$ respectivamente. Consideremos a aplicação

$$i_q: \mathcal{R}_{s+v,s} \longrightarrow \mathcal{R}_{s+qv,s}$$

$$F_{\alpha,\beta} \longrightarrow G_{q\alpha,q\beta}$$

onde $F_{\alpha,\beta}$ é determinada pela classe de levantamentos $[\alpha, \tilde{m}_{s+v}, \beta, \tilde{m}_s]$ e $G_{q\alpha,q\beta}$ é determinada pela classe de levantamentos $[(q\alpha), \tilde{m}_{s+qv}, (q\beta), \tilde{m}_s]$.

3.28 - Proposição

i_q é bem definida.

Demonstração

Suponhamos $F_{\alpha,\beta} = F_{\alpha',\beta'}$. Pelo lema 2.18., existe $\gamma \in \pi_1(M, e)$ tal que

$$\alpha' - \beta' = (\tilde{m}_{s+v})_{\pi}(\gamma) + \alpha - \beta - (\tilde{m}_s)_{\pi}(\gamma)$$

Para cada inteiro positivo r , $(\tilde{m}_r)_\pi$ é a composta

$$\pi_1(M, e) \xrightarrow{(\tilde{m}_r)_\pi} \pi_1(M, m_r(e)) \xrightarrow{w^*} \pi_1(M, e)$$

$(\tilde{m}_r)_\pi$

Como $m_r(e) = e$, segue que $(\tilde{m}_r)_\pi = (\tilde{m}_r)_\pi$. Além disso, para todo $\gamma \in \pi_1(M, e)$ é conhecido que $(\tilde{m}_r)_\pi(\gamma) = r\gamma$, [7].

Por conseguinte, $q\alpha' - q\beta' = q[(s+v)\gamma + \alpha - \beta - s\gamma] = (s+qv)\gamma + q\alpha - q\beta - s\gamma = (\tilde{m}_{s+qv})_\pi(\gamma) + q\alpha - q\beta - (\tilde{m}_s)_\pi(\gamma)$.

o que implica por 2.18., que

$$G_{q\alpha, q\beta} = G_{q\alpha', q\beta'}$$

Uma classe de raízes da equação $m_k(x) = m_s(x)$, $k > s$ é chamada totalmente primitiva se ela possui apenas raízes primitivas.

3.29 - Corolário

As classes de raízes totalmente primitivas da equação $m_k(x) = m_s(x)$, $k-s > 1$, são aquelas que não pertencem a $i_q \left(\mathcal{P}_{s + \frac{k-s}{q}, s} \right)$ para todo primo q dividindo $k-s$.

Demonstração

Segue diretamente de 3.27.

Desde que $\text{coker}((m_k)_\pi - (m_s)_\pi) = \text{coker}((m_{k-s})_\pi)$, segue do Corol. 2.19. e da correspondência biunívoca dada pelo homomorfismo $\eta \circ \theta$ da página 47 que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{k,s} & \xrightarrow{\Psi} & \text{coker}((m_{k-s})_\pi) \\ F_{\alpha,\beta} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\beta^{-1}\alpha} \end{array}$$

onde $\overline{\beta^{-1}\alpha}$ denota a classe lateral de $\beta^{-1}\alpha$, é uma bijeção.

3.30 - Observação

Se π é um grupo abeliano, para todo número inteiro e positivo q , o homomorfismo

$$\mu_q : \pi \rightarrow \pi, \quad \gamma \rightarrow q \cdot \gamma,$$

induz um homomorfismo bem definido

$$\bar{\mu}_q : \text{coker } \mu_s \rightarrow \text{coker } \mu_{qs}$$

$$a + s\pi \rightarrow qa + qs\pi$$

Lembrando que $(m_q)_\pi = \mu_q$, então o resultado abaixo é imediato.

3.31 - Proposição

O seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{s+v,s} & \xrightarrow{\Psi} & \text{coker}((m_v)_\pi) \\ \downarrow i_q & & \downarrow \bar{\mu}_q \\ \mathcal{R}_{s+qv,s} & \xrightarrow{\Psi} & \text{coker}((m_{qv})_\pi) \end{array} \quad \blacksquare$$

Se k é um número inteiro não negativo tal que q divide k , não é difícil verificar que $\bar{\mu}_q(\text{coker } \mu_{k/q}) = q(\text{coker } \mu_k)$.

Assim, levando-se em conta o corolário 3.29 e a comutatividade do diagrama acima, temos:

3.32 - Corolário

Se (M, m, e) é uma H -variedade orientada e k e s são números inteiros não negativos com $k - s > 1$ então o número de classes totalmente primitivas da equação $m_k(x) = m_s(x)$ é precisamente o número de elementos do $\text{coker}((m_{k-s})_\pi)$ que não estão em $\bar{\mu}_q(\text{coker}(m_{\frac{k-s}{q}})_\pi) = q \text{ coker}(m_{\frac{k-s}{q}})_\pi$ para todo número primo q dividindo $k-s$. \blacksquare

Se p e q são primos dividindo k , é imediato que $p \text{ coker } \mu_k \cap q \text{ coker } \mu_k = p \cdot q \text{ coker } \mu_k$.

Suponhamos agora, que π seja um grupo abeliano finitamente gerado. Para todo número primo p , denotemos por $r_p(\pi)$ o

número de grupos cíclicos cuja ordem é uma potência de p e por $r_{\infty}(\pi)$ o número de grupos cíclicos infinitos na decomposição canônica de π .

Se π é finito, então

$$\#(p \cdot q \cdot \pi) = (\# \pi) \cdot \begin{pmatrix} p^{-r_p(\pi)} & p^{-r_q(\pi)} \\ q^{-r_p(\pi)} & q^{-r_q(\pi)} \end{pmatrix}$$

3.33 - Teorema

Seja (M, m, e) uma H -variedade orientada e denotemos por $\pi = \pi_1(M, e)$. Se k e s são números inteiros não negativos tal que $k - s > 1$, então o número de classes totalmente primitivas da equação $m_k(x) = m_s(x)$ é:

$$N = (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) \cdot \prod_{\substack{q|k-s \\ q \text{ primo}}} \left(1 - q^{-(r_{\infty}(\pi) + r_q(\pi))} \right)$$

Demonstração

Pelo corolário 3.32, N é o número de elementos de $\text{coker}(\mu_{k-s})$, que não estão em $q \text{ coker}(\mu_{k-s})$ para todo primo q dividindo $k-s$.

Fazendo uso do teorema 6.4; [17], pag 124, segue que

$$N = (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) - \sum_{\substack{p|k-s \\ p \text{ primo}}} (\# p \text{ coker } \mu_{k-s}) +$$

$$\sum_{\substack{p,q|k-s \\ p,q \text{ primos}}} \# (p \text{ coker } \mu_{k-s} \cap q \text{ coker } \mu_{k-s}) - \dots$$

$$= (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) - \sum_{\substack{p|k-s \\ p \text{ primo}}} (\# p \text{ coker } \mu_{k-s}) +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q|k-s \\ p,q \text{ primos}}} \# (p.q \text{ coker } \mu_{k-s}) - \dots$$

para simplificar a notação, no que se segue, vamos denotar $r_p(\text{coker } \mu_{k-s})$ simplesmente por r_p . Assim,

$$\begin{aligned} N &= (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) \left(1 - \sum_{\substack{p|k-s \\ p \text{ primo}}} p^{-r_p} + \sum_{\substack{p,q|k-s \\ p,q \text{ primos}}} p^{-r_p} p.q^{-r_q} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{p,q,v|k-s \\ p,q,v \text{ primos}}} p^{-r_p} p.q^{-r_q} . v^{-r_v} + \dots \right) \\ &= (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) \left[(1-p^{-r_p}) - q^{-r_q} (1-p^{-r_p}) - v^{-r_v} (1-p^{-r_p}) \right. \\ &\quad \left. - q^{-r_q} v^{-r_v} (1-p^{-r_p}) - \dots \right] \\ &= (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) (1-p^{-r_p}) \left[(1-q^{-r_q}) - v^{-r_v} (1-q^{-r_q}) - \dots \right] \\ &= (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) \left[(1-p^{-r_p}) (1-q^{-r_q}) . (1-v^{-r_v}) \dots \right] \end{aligned}$$

ou seja

$$N = (\# \text{ coker } \mu_{k-s}) \prod_{\substack{q|k-s \\ q \text{ primo}}} \left(1 - q^{-r_q(\text{coker } \mu_{k-s})} \right)$$

Porém, quando $k-s$ divide q , temos

$r_q(\text{coker } \mu_{k-s}) = r_\infty(\pi) + r_q(\pi)$ e daí, segue o resultado.

3.34 - Corolário

Se (M, m, e) é uma H -variedade orientada com $\pi_1(M, e)$ cíclico infinito e se k e s são números inteiro não negativos tal que $k > s + 1$, então o número de classes totalmente primitivas da equação $m_k(x) = m_s(x)$ é

$$N = \phi(k-s)$$

onde ϕ denota a função de Euler de $k-s$.

Demonstração

Como $\pi = \pi_1(M, e)$ é cíclico infinito, então $r_\infty(\pi) = 1$ e $r_p(\pi) = 0$ para todo número primo p dividindo $k-s$. Daí,

$$N = (k-s) \cdot \prod_{\substack{p|k-s \\ p \text{ primo}}} (1-p^{-1}) = \phi(k-s)$$

3.35 - Corolário

Se (M, m, e) é uma H-variedade orientada e $\pi = \pi_1(M, e)$ é infinito, então a equação $m_k(x) = m_s(x)$ admite pelo menos uma raiz primitiva em (M, m, e) se $k - s > 1$.

Demonstração

É só observar que $N \neq 0$, pois $r_\infty(\pi) \neq 0$ ■

3.36 - Corolário

Se (M, m, e) é uma H-variedade orientada, com $\pi = \pi_1(M, e)$ finito e p é um número primo dividindo $\neq \pi$, então a equação $m_{p^k}(x) = m_{p^s}(x)$ tem pelo menos uma raiz primitiva onde k e s são números inteiros não negativos tal que $k > s \geq 1$.

Demonstração

Sendo $\pi = \pi_1(M, e)$ finito, π é uma soma direta de grupos p -primários e portanto $r_\infty(\pi) = 0$.

Como p divide $\neq \pi$, π possui pelo menos um sub-grupo cíclico cuja ordem é uma potência de p e portanto, $r_p(\pi) \geq 1$. Sendo $k > s \geq 1$, temos que p divide $p^k - p^s$.

Agora, pelo teorema 3.33, o número de classes totalmente primitivas da equação $m_{p^k}(x) = m_{p^s}(x)$ é maior ou igual a 1, o que conclui a demonstração. ■

Se (M, m, e) é uma H-variedade orientada, com $\pi = \pi_1(M, e)$ finito, não é verdade em geral que uma equação do tipo

$$m_k(x) = m_s(x)$$

tem sempre raízes primitivas em (M, m, e) .

O corolário 3.36., garante a existência de raízes primitivas, apenas para certos valores de k e s .

Em [8], Brown e Hales construíram um exemplo de uma H-variedade (M, m, e) tal que, para todo $k \geq 2$, a equação

$$m_k(x) = e$$

não possui nenhuma raiz primitiva em (M, m, e) .

A seguir vamos mostrar que para todo $k > s$, a equação

$$m_k(x) = m_s(x)$$

não possui nenhuma raiz primitiva nessa H-variedade.

Antes disso, vamos repetir a construção dada por Brown e Hales.

Seja $S^3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $S^3 = \{(w, t, x) \text{ tal que } w^2 + t^2 + \|x\|^2 = 1\}$.

Consideremos $H: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ a multiplicação quaterniônica.

Para cada $j > 0$, definamos

$$f_j: S^3 \rightarrow S^3$$

por $f_j(w, t, x) = (w + \frac{1-w^2}{j}, at, ax)$ onde $a \geq 0$ é escolhido de forma que $\|f_j(w, t, x)\| = 1$.

Consideremos em S^1 , a multiplicação complexa e seja:

$$C_j: S^1 \rightarrow S^1$$

$$x \rightarrow x^j$$

Esta aplicação induz:

$\Sigma^2 C_j: S^3 \rightarrow S^3$ definida por

$$\Sigma^2 C_j(w, t, x) = \begin{cases} (w, t, x) & \text{se } x = 0 \\ \left(w, t, \|x\| C_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Se $e = (1, 0, 0)$, definamos os subconjuntos $\delta_j \subseteq S^3 \times S^3$ do seguinte modo:

$$\delta_0 = e \times S^3, \quad \delta_1 = S^3 \times e$$

$$\delta_j = \{(y, f_{j-1} \circ \Sigma^2 C_{j-1}(y)) \text{ tal que } y \in S^3\}$$

Seja $\Delta_{k,s} = \bigcup_{j=0}^{k-s} \delta_j$ e definamos

$$m^{(k,s)}: \Delta_{k,s} \rightarrow S^3 \text{ por}$$

$$m^{(k,s)}(e, y) = m^{(k,s)}(y, e) = y$$

$$m^{(k,s)}(y, y) = f_2 \circ \Sigma^2 C_2(y)$$

e, para $j \geq 3$.

$$m^{(k,s)}(y, f_{j-1} \circ \Sigma^2 C_{j-1}(y)) = f_j \circ \Sigma^2 C_j(y).$$

Seja $(H|_{\Delta_{k,s}})$ a restrição de H a $\Delta_{k,s}$ então

$$(H|_{\Delta_{k,s}})^* = m^{(k,s)*} : H^3(S^3) \rightarrow H^3(\Delta_{k,s}).$$

Do teorema da classificação de Hopf, decorre que $H|_{\Delta_{k,s}} \sim m^{(k,s)}$. Assim, $m^{(k,s)}$ se estende a uma aplicação, que vamos chamar também de $m^{(k,s)}$,

$$m^{(k,s)} : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$$

Pela própria definição, $m^{(k,s)}$ é um produto de S^3 e $\underline{po}$ $(S^3; m^{(k,s)}, e = (1,0,0))$ é uma H -variedade orientada.

Para todo $y \in S^3$, observemos que:

$$m_2(y) = m^{(k,s)}(y, m_1(y)) = m^{(k,s)}(y, y) = f_2 \circ \Sigma^2 C_2(y).$$

$$m_3(y) = m^{(k,s)}(y, m_2(y)) = m^{(k,s)}(y, f_2 \circ \Sigma^2 C_2(y)) = f_3 \circ \Sigma^2 C_3(y)$$

Analogamente, para todo $r \geq 4$,

$$m_r(y) = f_r \circ \Sigma^2 C_r(y)$$

Portanto, se $y = (w, t, x) \in S^3$, para todo $r \geq 1$,

$$m_r(w, t, x) = \begin{cases} \left(w + \frac{1-w^2}{r}, at, ax \right) & \text{se } x = 0 \\ \left(w + \frac{1-w^2}{r}, at, a \|x\| C_r \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Consideremos a equação $m_k(y) = e$. Brown e Hales mostraram em [8] que para todo $k \geq 2$, esta equação não possui nenhuma raiz primitiva em $(S^3, m^{(k,0)}, e)$.

Consideremos a equação $m_k(y) = m_1(y) = y$, para todo $k \geq 3$. Desse modo, $w + \frac{1-w^2}{k} = w$ o que implica $w = \pm 1$. Como $w^2 + t^2 + \|x\|^2 = 1$, temos que $t = 0$ e $x = 0$. Por isso, $y = (w, t, x) = (\pm 1, 0, 0)$. Mas, para todo $i < k$, $m_i(\pm 1, 0, 0) = (\pm 1, 0, 0)$, por conseguinte, a equação $m_k(y) = y$, $k \geq 3$, não possui nenhuma raiz primitiva em $(S^3, m^{(k,s)}, e)$.

Consideremos agora, a equação $m_k(y) = m_s(y)$ para todo $k-2 \geq s \geq 2$. Então $w + \frac{1-w^2}{k} = w + \frac{1-w^2}{s}$ o que implica $k = s$, o que contradiz a hipótese.

Consequentemente a equação

$$m_k(x) = m_s(x)$$

não possui nenhuma raiz primitiva na H-variedade $(S^3, m^{(k,s)}, e)$, para todo $k > s$.

APÊNDICE I

INVARIANÇA HOMOTÓPICA DO NÚMERO DE NIELSEN

Sejam $f_0, f_1: U \rightarrow X$ onde U é um subconjunto aberto do poliedro conexo X , H uma homotopia entre f_0 e f_1 e F_i classes de pontos fixos de f_i , $i = 0, 1$. Suponhamos que $\eta_H(F_0) = F_1$ onde η_H é a correspondência biunívoca induzida por H . Em [1], Boju fez uma demonstração da invariância homotópica do número de Nielsen para pontos fixos. Para isso, ele considerou a aplicação $\mathcal{H}: U \times I \rightarrow X \times I$ dada por $\mathcal{H}(x, t) = (H(x, t), t)$ e mostrou que existe uma classe de pontos fixos F de $\mathcal{H}$ tal que $I(\mathcal{H}, F) = I(f_i, F_i)$ $i = 0, 1$. Para chegar a este resultado ele usou, dentre outras, a propriedade comutativa do índice de pontos fixos.

Na tentativa de demonstrar a invariância homotópica do número de Nielsen para pontos de coincidência, numa linha análoga à de Boju, nos deparamos com algumas dificuldades como, por exemplo, a não validade da propriedade comutativa do índice para pontos de coincidência.

Observemos também que estamos usando a definição de índice dada por Vick, que é para aplicações entre variedades sem bordo, enquanto a aplicação $\mathcal{H}: U \times I \rightarrow X \times I$ envolve variedades com bordo.

Assim sendo, procuramos um novo caminho e conseguimos mostrar a invariância homotópica do número de Nielsen para coincidência, provando que a correspondência biunívoca dada pelo lema

2.14 preserva índice. Para isso, necessitamos fundamentalmente do Teorema I.8., cuja demonstração foi motivada pela prova da invariança do número de Nielsen para pontos fixos, apresentada em [6], por Brown.

I.1. Observação

Seja $f: X \rightarrow Y$ onde X e Y são espaços topológicos e X é localmente compacto e regular. Então, podemos pensar homotopias de aplicações de X em Y , como caminhos em $\text{Map}(X,Y)$ (com a topologia compacto-aberta) e todo caminho em $\text{Map}(X,Y)$ pode ser visto como uma homotopia ([15], pág 155).

Se H é um caminho em $\text{Map}(X,Y)$ e C é um caminho em X , podemos formar um novo caminho

$$\langle H, C \rangle: I \rightarrow Y$$

definido por

$$\langle H, C \rangle(t) = H(t)(C(t)), \text{ para todo } t \in I$$

I.2. Definição

Sejam $f_0, f_1, g_0, g_1: X \rightarrow Y$ aplicações, onde X e Y são poliedros conexos e X é compacto. Suponhamos que H seja uma homotopia entre f_0 e f_1 e R uma homotopia entre g_0 e g_1 . Para cada $x_0 \in \text{Coinc}(f_0, g_0)$ e $x_1 \in \text{Coinc}(f_1, g_1)$, dizemos que x_0 é H, R relacionado com x_1 , e denotamos $x_0 H, R x_1$, se existe um caminho $C: I \rightarrow X$ com $C(0) = x_0$ e $C(1) = x_1$ tal que $\{\langle H, C \rangle\} = \{\langle R, C \rangle\}$.

I.3. Definição

Sejam $f_0, f_1, g_0, g_1: X \rightarrow Y$ aplicações onde X e Y são poliedros conexos e X é compacto. Suponhamos que H seja um caminho em $\text{Map}(X,Y)$ de f_0 até f_1 e R um caminho em $\text{Map}(X,Y)$ de g_0 até g_1 . Seja F uma classe de pontos de coincidência de f_0 e g_0 e G uma classe de pontos de coincidência de f_1 e g_1 . Dizemos que F e G são H,R relacionadas, e escrevemos FH, RG , se existe $x_0 \in F$ e $x_1 \in G$ tal que x_0 e x_1 são H,R relacionados.

A definição é independente da escolha dos pontos x_0 e x_1 . A prova deste fato é análoga à demonstração do teorema 7, pág 90, de [6].

I.4. Lema

Sejam X e Y poliedros conexos e X compacto.

Consideremos H um caminho em $\text{Map}(X,Y)$ de f_0 até f_1 e R um caminho em $\text{Map}(X,Y)$ de g_0 até g_1 . Sejam F e F' classes de pontos de coincidência de f_0 e g_0 e G, G' classes de pontos de coincidência de f_1 e g_1 . Se FH, RG e FH, RG' então $G = G'$ e se FH, RG e $F'H, RG$ então $F = F'$.

Demonstração

Análoga à do teorema 12, pág 92, de [6]. ■

I.5. Proposição

Consideremos $f_0, f_1, g_0, g_1: X \rightarrow Y$, onde X e Y são poliedros conexos com X compacto, $H: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f_0 e f_1 e $R: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre g_0 e g_1 . Seja F uma classe de pontos de coincidência de f_0 e g_0 , G uma classe de pontos de coincidência de f_1 e g_1 e suponhamos $\eta_{H,R}(F) = G$ onde $\eta_{H,R}$ é a correspondência biunívoca induzida por H e R , dada no lema 2.14. Então FH, RG .

Demonstração

Seja $F = p \text{ Coinc}(\tilde{f}_0, \tilde{g}_0)$ e sejam $\tilde{H}, \tilde{R}: \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{Y}$ levantamentos das homotopias H e R , começando em $\tilde{f}_0$ e $\tilde{g}_0$, respectivamente. Então, $G = p \text{ Coinc}(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1)$ onde $\tilde{f}_1 = \tilde{H}(\cdot, 1)$ e $\tilde{g}_1 = \tilde{R}(\cdot, 1)$. Consideremos $x \in F$ e $x' \in G$ arbitrários. Portanto, $x = p(\tilde{x})$ e $x' = p(\tilde{x}')$ onde $\tilde{f}_0(\tilde{x}) = \tilde{g}_0(\tilde{x})$ e $\tilde{f}_1(\tilde{x}') = \tilde{g}_1(\tilde{x}')$. Se $\tilde{\lambda}$ é um caminho em $\tilde{X}$ de $\tilde{x}$ até $\tilde{x}'$, temos que $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$ é um caminho X , de x até x' .

Os caminhos $\tilde{H}', \tilde{R}': I \rightarrow \tilde{Y}$ definidos por $\tilde{H}'(t) = \tilde{H}(\tilde{\lambda}(t), t)$, $\tilde{R}'(t) = \tilde{R}(\tilde{\lambda}(t), t)$, para todo $t \in I$, começam em $\tilde{g}_0(\tilde{x})$ e terminam em $\tilde{g}_1(\tilde{x}')$. Em virtude de $\tilde{Y}$ ser simplesmente conexo, temos que $q_0 \tilde{H}' \sim q_0 \tilde{R}'$. Porém, $q_0 \tilde{H}' = \langle H, \lambda \rangle$ e $q_0 \tilde{R}' = \langle R, \lambda \rangle$ e daí, a demonstração está terminada. ■

I.6. Corolário

Consideremos $f_0, f_1, g_0, g_1: X \rightarrow Y$ onde X e Y são po

poliedros conexos e X compacto. Seja H uma homotopia entre f_0 e f_1 e R uma homotopia entre g_0 e g_1 . Seja F uma classe de pontos de coincidência de f_0 e g_0 e suponhamos $\eta_{H,R}(F) = G$. Se G' é outra classe de pontos de coincidência de f_1 e g_1 tal que FH, RG' , então $G = G'$.

Demonstração

Segue do lema I.4 e proposição I.5. ■

I.7. Definição

Seja $H: I \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ e $r, s \in I = [0, 1]$. Definimos o caminho $H_r^s: I \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ por $H_r^s(t) = H(r + t(s-r))$.

I.8. Teorema

Sejam X e Y poliedros conexos e X compacto.

Suponhamos que H seja uma homotopia entre $f_0, f_1: X \rightarrow Y$, R uma homotopia entre $g_0, g_1: X \rightarrow Y$ e consideremos $u, v \in I$. Denotemos por $F_1^{(u,v)}, F_2^{(u,v)}, \dots, F_n^{(u,v)}$ as classes de pontos de coincidência de $H(u), R(v): X \rightarrow Y$ onde $H(u)(x) = H(x, u)$ e $R(v)(x) = R(x, v)$ para todo $x \in X$. Então existem abertos $U_1, \dots, U_n$ de X e $\epsilon > 0$ tal que:

$$(1) F_j^{(u,v)} \subseteq U_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(2) U_i \cap U_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

(3) se $|u-a| \leq \varepsilon, |v-b| \leq \varepsilon$ e $G^{(a,b)}$ é uma classe de pontos de coincidência de $H(a)$ e $R(b)$ então existe $j, 1 \leq j \leq n$ tal que $G^{(a,b)} \subseteq U_j$ e $\eta_{H_u^a, R_v^b}(F_j^{(u,v)}) = G^{(a,b)}$.

(4) se $|u-a| \leq \varepsilon$ e $|v-b| \leq \varepsilon$ então $H(a)$ e $R(b)$ não têm pontos de coincidência em $\bigcup_{j=1}^n \partial U_j$ onde ∂U_j denota a fronteira de U_j .

Demonstração

Desde que X é um espaço de Hausdorff, compacto, então X é normal e como $F_1^{(u,v)}, \dots, F_n^{(u,v)}$ são fechados em X , existem conjuntos abertos $U'_1, \dots, U'_n$ satisfazendo (1) e (2).

Sendo X um espaço uniformemente localmente contrátil, consideremos o número $\varepsilon' > 0$ garantido pela definição 1.18. Pela continuidade uniforme de H e R , existe $\delta > 0, \delta < \varepsilon'/4$ tal que se $d(x, x') < \delta, |u-a| < \delta$ e $|v-b| < \delta$ então $d(H(u)(x), H(a)(x')) < \varepsilon'/4$ e $d(R(u)(x), R(v)(x')) < \varepsilon'/4$.

Para cada $x \in F_j^{(u,v)}$, escolhamos $\varepsilon_x > 0, \varepsilon_x \leq \delta$ de modo que o conjunto $U(x, \varepsilon_x) = \{y \in \text{Coinc}(H(u), R(v)) \text{ tal que } d(y, x) < \varepsilon_x\}$ esteja contido em U'_j . A compacidade de $\text{Coinc}(H(u), R(v))$ assegura a existência de abertos, conexos $U(x_1, \varepsilon_{x_1}), U(x_2, \varepsilon_{x_2}), \dots, U(x_m, \varepsilon_{x_m})$ com $x_k \in \text{Coinc}(H(u), R(v))$, de modo que $\text{Coinc}(H(u), R(v)) \subseteq \bigcup_{k=1}^m (U(x_k, \varepsilon_{x_k}))$.

Tomemos $U_j = \bigcup (U(x_k, \varepsilon_{x_k}))$ onde a reunião é tomada so

bre todos os k tal que $x_k \in F_j^{(u,v)}$. Afirmamos que $F_j^{(u,v)} \subseteq U_j$. De fato, se $x \in F_j^{(u,v)}$ é um elemento qualquer, então $x \in U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ para algum $k = 1, \dots, m$. Portanto, existe um caminho C em $U(x_k, \varepsilon_{x_k})$, de x até x_k . Assim, para todo $t \in I$, $d(C(t), x) < \varepsilon_{x_k} \leq \delta$ e daí, $d(H(u)(C(t)), H(u)(x)) < \varepsilon'/4$ e $d(R(v)(C(t)), R(v)(x)) < \varepsilon'/4$.

Levando-se em conta que $H(u)(x) = R(v)(x)$ pois, $x \in F_j^{(u,v)}$, temos que

$$d(H(u)(C(t)), R(v)(C(t))) \leq d(H(u)(C(t)), H(u)(x)) + d(R(v)(C(t)), R(v)(x)) < \varepsilon'/4 + \varepsilon'/4 = \varepsilon'/2 < \varepsilon'. \quad (*)$$

Em virtude de 1.18, podemos definir $L: I \times I \rightarrow Y$ por $L(t, s) = \gamma(H(u)(C(t)), R(v)(C(t)), s)$ a qual é uma homotopia entre $H(u) \circ C$ e $R(v) \circ C$. Consequentemente, por 2.9., $x_k \in F_j^{(u,v)}$ e portanto, $x \in U_j$, o que mostra a afirmação. Por outro lado, quando $x_k \in F_j^{(u,v)}$, temos que $U(x_k, \varepsilon_{x_k}) \subseteq U_j^!$ e por conseguinte $U_j \subseteq U_j^!$. Desta forma os conjuntos U_j , $j = 1, \dots, n$ satisfazem as condições (1) e (2).

Seja $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_m}\}$. Desde que $\text{Coinc}(H(u), R(v)) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$, existe $\tau > 0$ tal que, se $x \in (X - \bigcup_{j=1}^n U_j)$ então $d(H(u)(x), R(v)(x)) > 2\tau$. Novamente pela continuidade de H e R , existe $\varepsilon_2 > 0$ com a seguinte propriedade: $|u-a| < \varepsilon_2$ e $|v-b| < \varepsilon_2$ implica $d(H(u)(x), H(a)(x)) < \tau$ e $d(R(v)(x), R(b)(x)) < \tau$, para todo $x \in X$. Em decorrência, $d(H(a)(x), R(b)(x)) \geq d(H(u)(x), R(v)(x)) - d(H(u)(x), H(a)(x)) - d(R(v)(x), R(b)(x)) > 2\tau - \tau - \tau = 0$ isto é, $H(a)(x) \neq R(b)(x)$ para todo $x \in X - \bigcup_{j=1}^n U_j$. Equivalentemente, $\text{Coinc}(H(a), R(b)) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$

Seja $\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Mostremos que $U_1, \dots, U_n$ e $\varepsilon > 0$ satisfazem (3) e (4).

Suponhamos $|u-a| \leq \varepsilon$, $|v-b| \leq \varepsilon$ e $x_{a,b} \in G^{(a,b)}$ onde $G^{(a,b)}$ é uma classe de pontos de coincidência de $H(a)$ e $R(b)$. Sendo $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, segue que $x_{a,b} \in U_j$ para algum $j = 1, \dots, n$ pois, conforme vimos acima, $x_{a,b} \in (X - \bigcup_{j=1}^n U_j)$ implica que $H(a)(x_{a,b}) \neq R(b)(x_{a,b})$ o que contradiz o fato de $x_{a,b}$ pertencer a $\text{Coinc}(H(a), R(b))$. Assim, $x_{a,b} \in U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ para algum $x_k \in F_j^{(u,v)}$ e por isso, existe um caminho C em $U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ de x_k até $x_{a,b}$. Desta maneira, para todo $t \in I$, segue de (*) que:

$$d(H(u)(C(t)), R(v)(C(t))) < \varepsilon'/2.$$

Para todo $t \in I$, $H_u^a(t) = H(t')$ e $R_v^b(t) = R(t'')$ onde $t' = u + t(u-a)$ e $t'' = v + t(v-b)$ de modo que,
 $|u-t'| = |t||u-a| \leq |u-a| \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \delta < \varepsilon'/4$ e
 $|v-t''| = |t||v-b| \leq |v-b| \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \delta < \varepsilon'/4$. Portanto,
 $d(\langle H_u^a, C \rangle(t), \langle R_v^b, C \rangle(t)) = d(H_u^a(t)(C(t)), R_v^b(t)(C(t))) =$
 $d(H(t')(C(t)), R(t'')(C(t))) \leq d(H(u)(C(t)), H(t')(C(t))) +$
 $d(H(u)(C(t)), R(v)(C(t))) + d(R(v)(C(t)), R(t'')(C(t))) <$
 $\varepsilon'/4 + \varepsilon'/2 + \varepsilon'/4 = \varepsilon'.$

Em virtude de 1.18., podemos definir $P: I \times I \rightarrow Y$ por $P(t,s) = \gamma(\langle H_u^a, C \rangle(t), \langle R_v^b, C \rangle(t), s)$, a qual é uma homotopia entre $\langle H_u^a, C \rangle$ e $\langle R_v^b, C \rangle$. Porém, isto quer dizer que $x_k H_u^a, R_v^b x_{a,b}$ ou seja, $F_j^{(u,v)} H_u^a, R_v^b G^{(a,b)}$.

Observemos que H_u^a é uma homotopia entre $H(u)$ e $H(a)$ e R_v^b é uma homotopia entre $R(v)$ e $R(b)$. Logo, pelo corolário I.6.,

$$\eta_{H_u^a, R_v^b} (F_j^{(u,v)}) = G^{(a,b)} \quad \text{o que verifica (3).}$$

Desde que $\varepsilon < \varepsilon_2$, se $|u-a| \leq \varepsilon$ e $|v-b| \leq \varepsilon$, concluímos pela definição de ε_2 que $H(a)$ e $R(b)$ não têm pontos de coincidência em $X - \bigcup_{j=1}^n U_j$ e, em particular, $H(a)$ e $R(b)$ não têm pontos de coincidência em $\bigcup_{j=1}^n \partial U_j$, o que mostra (4). ■

I.9. Teorema

Sejam $f_0, f_1, g_0, g_1: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1 compacta. Sejam $H, R: M_1 \times I \rightarrow M_2$ homotopias tal que $H(x, 0) = f_0(x)$, $H(x, 1) = f_1(x)$, $R(x, 0) = g_0(x)$ e $R(x, 1) = g_1(x)$, para todo $x \in M_1$. Suponhamos que F seja uma classe de pontos de coincidência de f_0 e g_0 e consideremos a classe $G = \eta_{H,R}(F)$ de pontos de coincidência de f_1 e g_1 , onde $\eta_{H,R}$ é a correspondência biunívoca dada pelo lema 2.14. Então,

$$I(f_0, g_0, F) = I(f_1, g_1, G)$$

Demonstração

Seja $\varepsilon > 0$ dado pelo teorema I.8. Então, se $|a| \leq \varepsilon$, $|b| \leq \varepsilon$ e $G^{(a,b)}$ é uma classe de pontos de coincidência de $H(a)$ e $R(b)$, existe um aberto U de M_1 tal que $F \subseteq U$, $G^{(a,b)} \subseteq U$,

$$\eta_{H_0^a, R_0^b}(F) = G^{(a,b)} \quad \text{e} \quad U \cap \text{Coinc}(H(a), R(b)) = G^{(a,b)}.$$

Portanto, $I(H(a), R(b), G^{(a,b)}) = I(H(a), R(b), U)$ e
 $I(f_0, g_0, F) = F(f_0, g_0, U)$.

Observemos que H_0^a é uma homotopia entre f_0 e $H(a)$ e
 R_0^b é uma homotopia entre g_0 e $R(b)$.

Afirmamos que

$Y = \bigcup_t (\text{Coinc}(H_0^a(t), R_0^b(t)) \cap U)$ é um subconjunto com
 pacto de U .

Como M_1 é compacto, isto é equivalente a dizer que Y é
 fechado em U .

Seja (u_j) sequência de pontos de Y , convergindo para um
 ponto u , no fecho de U . Então existe uma subsequência (t_j) em
 $[0,1]$ tal que $H_0^a(t_j)(u_j) = R_0^b(t_j)(u_j)$. Desde que $[0,1]$ é compac-
 to, podemos supor que t_j converge para $t \in [0,1]$.

Como $H_0^a(t_j)(u_j) = H(t_j \cdot a, u_j)$ e $R_0^b(t_j)(u_j) = R(t_j \cdot b, u_j)$,
 pela continuidade uniforme de H e R , segue que $H_0^a(t)(u) = R_0^b(t)(u)$.

Para todo $t \in [0,1]$, $|t \cdot a| \leq |a| \leq \epsilon$ e $|t \cdot b| \leq |b| \leq \epsilon$.
 Assim, por I.8. (4), $H_0^a(t) = H(ta)$ e $R_0^b(t) = R(tb)$ não têm pon-
 tos de coincidência no bordo de U . Porisso, $u \in U$ e por consequin-
 te $u \in Y$ o que mostra a afirmação.

Desse modo, pela invariança homotópica,

$$I(f_0, g_0, U) = I(H_0^a(1), R_0^b(1), U)$$

e, consequentemente,

$$I(f_0, g_0, F) = I(H_0^a(1), R_0^b(1), G^{(a,b)})$$

para todo $|a| \leq \epsilon$ e $|b| \leq \epsilon$.

Sendo $I = [0,1]$ conexo,

$$I(f_0, g_0, F) = I(H_0^a(1), R_0^b(1), G^{(a,b)})$$

para todo $a, b \in [0,1]$.

Em particular

$$I(f_0, g_0, F) = I(H_0^1(1), R_0^b(1), G^{(1,1)}) = I(f_1, g_1, G^{(1,1)})$$

Visto que $\eta_{H_0^1, R_0^b}^{(1,1)}(F) = G^{(1,1)}$ e como $H_0^1(t) = H(t)$ e

$R_0^1(t) = R(t)$ para todo $t \in [0,1]$, então

$$G^{(1,1)} = \eta_{H,R}(F) = G.$$

Daí,

$I(f_0, g_0, F) = I(f_1, g_1, G)$, o que conclui a demonstração. ■

I.10. Teorema (invariança homotópica do número de Nielsen).

Sejam $f_0, f_1, g_0, g_1: M_1 \rightarrow M_2$ onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , sem bordo, conexas, orientadas e M_1 compacta. Suponhamos que f_0 é homotópica a f_1 e g_0 é homotópica a g_1 . Então;

$$N(f_0, g_0) = N(f_1, g_1).$$

Demonstração

Desde que $\eta_{H,R}$ é uma correspondência biunívoca entre as classes de pontos de coincidência de f_0 e g_0 e as classes de pontos de coincidência de f_1 e g_1 , o resultado segue do teorema anterior. ■

APÊNDICE II

Neste apêndice vamos demonstrar que se $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ são aplicações onde M_1 e M_2 são variedades de dimensão n , conexas, compactas e trianguláveis. Então existe um par de aplicações (f', g') homotópicas ao par (f, g) tal que $\text{Coinc}(f', g')$ é um conjunto finito de pontos isolados.

Seja K um complexo simplicial finito e L um subcomplexo de K . O complexo K_L , chamado subdivisão baricêntrica de K módulo L , é definido do seguinte modo: os vértices de K_L são os vértices de L juntamente com os elementos $v(s)$, um para cada simplexo $s \in K-L$. Para $p > 0$, definimos os p -simplexos como sendo as $(p+1)$ -uplas da forma $\{v_0, \dots, v_q, v(s_{q+1}), \dots, v(s_p)\}$, onde $\{v_0, \dots, v_q\}$ é um simplexo de L contido no simplexo s_{q+1} de $K-L$ e $s_i \subset s_{i+1}$, para cada $i = q+1, \dots, p-1$. A definição inclui os casos degenerados $q+1 = 0$ e $q = p$.

Teorema

Sejam M_1 e M_2 variedades de dimensão n , conexas e compactas e trianguláveis. Consideremos as aplicações $f, g: M_1 \rightarrow M_2$. Então, existe uma triangulação (K', τ') de M_1 e aplicações $f', g' : M_1 \rightarrow M_2$ homotópicas a f e g respectivamente, tal que $\text{Coinc}(f', g')$ é um conjunto finito e, se $x \in \text{Coinc}(f', g')$, então x pertence a $\tau'(|s|)$ para algum simplexo maximal $s \in K'$.

Demonstração

Seja $T = (K, \tau)$ uma triangulação de M_1 e $S = (R, \sigma)$ uma triangulação de M_2 . Existem aproximações simpliciais $\phi, \psi : (M_1, T) \rightarrow (M_2, S)$ de f e g respectivamente, para algum inteiro r . ([21]).

Suponhamos que v_0 seja um vértice de K_r tal que $|\phi|(|v_0|) = |\psi|(|v_0|)$. Desde que ϕ e ψ são simpliciais, devemos ter $\phi(v_0) = \psi(v_0) = u_0$ para algum vértice u_0 de R . Como u_0 não é maximal, existe um simplexo maximal u^* de R tal que $u_0 \subset u^*$, $u_0 \neq u^*$.

Seja L o subcomplexo de K_r consistindo de todos os simplexos de K_r que não contêm v_0 .

Consideremos o complexo simplicial K_{r_L} e definamos $\phi_L, \psi_L : K_{r_L} \rightarrow R$ nos vértices, como segue. Se v é um vértice de L , $\phi_L(v) = \phi(v)$ e $\psi_L(v) = \psi(v)$. Se $v_0 \subset t_j$ e $v_0 \neq t_j$, coloquemos $\phi_L(v(t_j)) = u_0$ e $\psi_L(v(t_j)) = v$ onde v é qualquer elemento de $u^* - u_0$. Finalmente coloquemos $\phi_L(v(v_0)) = v$ e $\psi_L(v(v_0)) = u_0$.

As aplicações ϕ_L e ψ_L se estendem naturalmente a aplicações simpliciais $\phi_L, \psi_L : K_{r_L} \rightarrow R$. Repetindo essa construção para cada vértice v de K_r tal que $|\phi|(|v|) = |\psi|(|v|)$, obtemos um refinamento K' de K e funções simpliciais $\phi', \psi' : K' \rightarrow R$ de modo que, se v é um vértice de K' então $|\phi'|(|v|) \neq |\psi'|(|v|)$.

Agora, se $t \in K'$ é um 1-simplexo não maximal e $|\phi'|(|x|) = |\psi'|(|x|)$ para algum $x \in |t|$, como nenhum vértice é ponto de coincidência de $|\phi'|$ e $|\psi'|$, necessariamente devemos ter $|\phi'|(|t|) = |\psi'|(|t|)$. Sendo ϕ' e ψ' são simpliciais e t não maxi

mal, então $\phi'(t) = \psi'(t) = s$ é um simplexo não maximal de R . Repetindo o raciocínio para todos os outros 1-simplexos nas condições de t , achamos um refinamento K'' de K' e aplicações simpliciais $\phi'', \psi'' : K'' \rightarrow R$ com a seguinte propriedade: se x pertence a $|t|$ onde $t \in K''$ é um 1-simplexo, então $|\phi''|(x) \neq |\psi''|(x)$.

Apliquemos a idéia acima para todos os 2-simplexos não maximais t de K'' tal que $|\phi''|(x) = |\psi''|(x)$, para algum $x \in |t|$. Em seguida, façamos o mesmo para os outros simplexos não maximais de dimensões superiores. Após um número finito de aplicações, vamos obter um refinamento K' de K e aplicações simpliciais $\phi', \psi' : K' \rightarrow R$ de modo que, se x pertence ao interior de algum simplexo não maximal de K' então $|\phi'|(x) \neq |\psi'|(x)$.

Seja $t \in K'$ um simplexo maximal e suponhamos que $x, x' \in |t|$ satisfaçam $|\phi'|(x) = |\psi'|(x)$ e $|\phi'|(x') \neq |\psi'|(x')$. Se r é um número real tal que $y = r.x + (1-r).x'$ pertence ao fecho de $|t|$, então $|\phi'|(y) = |\psi'|(y)$ pois $|\phi'|$ e $|\psi'|$ são lineares. Porém, para algum r, y pertence ao bordo de $|t|$, que é uma reunião de realizações geométricas de simplexos não maximais, o que contradiz a construção de ϕ' e ψ' . Assim, $|\phi'|$ e $|\psi'|$ possuem no máximo um ponto de coincidência no interior da realização geométrica de cada simplexo maximal.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOJU, J.; Nielsen Fixed Point Theory; Contemporary Math., vol. 14 (1983).
- [2] BOJU, J.; Estimation of Nielsen numbers; Chinese Math. 5 (1964), pgs 330-339.
- [3] BREDON, G.E.; Introduction to compact transformation groups; Academic Press, Inc. (1972).
- [4] BROOKS, S.; BROWN, R.; A lower bound for the Δ -Nielsen number; Trans. AMS 143 (1969).
- [5] BROOKS, R.B.S.; BROWN, R.F.; PAK, J.; TAYLOR, D.H.; Nielsen numbers of maps of tori; Proc. of A.M.S.; vol. 52 (1975).
- [6] BROWN, R.F.; The Lefschetz fixed point theorem; Scott - Foresman; 1971.
- [7] BROWN, R.F.; Divisible H-spaces; Proc. AMS, vol. 26, no 1 (1970), pgs 185-189.
- [8] BROWN, R.F.; HALES, A.W.; Primitive roots of unity in H-manifolds; Amer. Journal Math., vol. 92 (1970); pgs. 612-618.
- [9] DOLD, A.; Lectures on Algebraic Topology; Springer - Verlag, (1980).

- [10] FADELL, E.; On a coincidence theorem of F.B.Fuller; Pacific. J.Math. 15(1965); pgs. 825-834.
- [11] FADELL, E.; Recent results in the fixed point theory of continuous maps; Bull. AMS 76 (1970); pgs 10-29.
- [12] GONÇALVES, D.L.; KILHL, J.C.S.; Teoria do Indíce, 14º Colóquio Bras.Matem; IMPA (1983).
- [13] GREENBERG, M.J.; Lectures on Algebraic Topology; W.A.Benjamin; INC (1967).
- [14] HILTON, P.J.; WYLIE S.; Homology Theory: An introduction to Algebraic Topology; Cambridge Univ.Press (1960).
- [15] HU, S.T.; Elements of general Topology; Holden Day Inc (1964).
- [16] KOWALEWSKI, G.; Determinanten theorie; Chelsea Publish Comp. (1948).
- [17] LEVEQUE, WILLIAM J., Fundamental of Number Theory ; Addison - Wesley Publish. Comp. (1977).
- [18] MILNOR, J.; STASHEFF, J.D., Characteristic classes ; Princeton Univ.Press. (1974).
- [19] MOSHER, R.E., TANGORA, M.C.; Cohomology operations and

applications in homotopy theory; Harper and Row Publishers.
(1968).

- [20] SEIFERT, A.; THRELFALL, W.; A textbook of Topology; Academic Press, Inc (1980).
- [21] SPANIER, E.H.; Algebraic Topology; McGraw-Hill (1966)
- [22] VICK, J.; Homology theory; N.York and London Academic Press (1973).
- [23] WHITEHEAD, G.W.; Elements of homotopy theory; Springer-Verlag (1978).