TEORIA DE SINGULARIDADES E PROBLEMAS DE BIFURCAÇÃO COM SIMETRIA NOS PARÂMETROS

Angela Maria Sitta

Orientadores: Prof. Dr. Ian Stewart (*)
Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para ob-
tenção do Título de Doutor em Ciências - Área: Ma-
temática: Geometria e Topologia.

(*) Programa Doutorado Sanduíche desenvolvido em conjunto com o ICMSC-USP e
Universidade de Warwick - Inglaterra

São Carlos - SP

1993

Ao meu pai
José Sitta Filho
(in memorian)

Minha eterna gratidão

Aos orientadores: Ao Prof. *Dr. Ian Stewart*, orientador junto à Universidade de Warwick, que com sua precisa orientação abriu todos os caminhos para que este trabalho fosse concretizado. A sua confiança e entusiasmo me motivaram a seguir em frente. À Profa. *Dra. Maria Aparecida Soares Ruas*, orientadora junto ao ICMSC-USP, a quem devo minha formação básica e pacientemente acompanhou cada passo dessa etapa com sugestões e incentivos.

Ao co-orientador junto à Universidade de Warwick, Prof. *Dr. Jacques Elie Furter*, sempre incansável, pela imensa dedicação e valiosas sugestões.

Ao Prof. *Dr. James Montaldi*, por ter sugerido a “formulação por caminhos”.

Ao Prof. *Dr. Washington Luiz Marar*, por ter sugerido o Doutorado Sanduíche junto à Universidade de Warwick.

Ao meu orientador acadêmico na primeira fase do doutorado, Prof. *Dr. Paulo Ferreira da Silva Porto Junior*, pelo incentivo ao Programa Sanduíche.

Ao Prof. *Dr. Wilson Maurício Tadini*, a quem devo minha vida profissional e formação acadêmica desde os tempos de Mestrado.

Alguns professores merecem espaço nessa página pela colaboração e apoio. São eles: *Dr. Brasil Terra Leme, Dr. Carlos Biasi, Dr. Hermínio Cassago Júnior, Dr. José Alberto Cuminato, Dr. Luiz A. da C. Ladeira, Dr. Mark Roberts, Dr. Odelar Leite Linhares e Dr. Sebastião Antonio Izar.*

Aos meus procuradores, *Hélia Matiko Yano Kodama e Dr. Adalberto Spezamiglio.*

Aos amigos: *Camilo, Chlõe, Dirce, Gabriela, Greg, Lucia Helena, Miriam, Richard, Sandra e Walter.*

Ao *IBILCE-UNESP* - Campus de São José do Rio Preto. Em particular, aos professores e funcionários do *Departamento de Matemática.*

Aos professores e funcionários do *ICMSC-USP.*

À *Universidade de Warwick*. Em particular aos professores, funcionários e colegas do *Instituto de Matemática*.

À *Luisa* e ao *Chico*, pela digitação e desenhos.

À *CAPES* e ao *CNPq*.

À *minha família*, sempre companheira.

À *Deus*, por tudo.

ABSTRACT

In this work we apply techniques from singularity theory to multiparameter bifurcation problems with diagonal symmetry on both the state variables and on the bifurcation parameters.

We also present algebraic approaches for the Path Formulation in this symmetric context and describe examples which motivated the point of view which was adopted.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos técnicas da teoria de singularidades para problemas de bifurcação multiparamétricos com simetria diagonal nas variáveis-padrão e também nos parâmetros de bifurcação.

Também fazemos uma abordagem algébrica da Formulação por Caminhos neste contexto de simetria e descrevemos aplicações que motivaram o ponto de vista adotado.

Conteúdo

1 Teoria geral	1
1.1 Definições gerais e teoremas	1
1.1.1 Notação e definições	1
1.1.2 Germes Γ -invariantes	2
1.1.3 Germes Γ -equivariantes	3
1.2 Definições e resultados devidos a Damon	4
1.3 $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência	10
1.4 $\mathcal{K}_{\lambda, \text{uri}}^\Gamma(k)$ -equivalência	11
1.5 Espaços tangentes	12
1.6 Subgrupo geométrico	15
1.7 A Teoria de desdobramento	17
1.8 Determinação finita	27
1.8.1 Jatos Γ -equivariantes	27
1.8.2 A órbita de um k -jato Γ -equivariante	28
1.8.3 Lemas devidos a Damon	30
1.8.4 Germes finitamente determinados	31
1.9 O espaço tangente restrito	36
1.10 Problema do reconhecimento	39
1.10.1 Submódulos intrínsecos e termos de ordem alta	40

1.10.2	Termos de ordem alta	40
1.10.3	O subgrupo das $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalências unipotentes	41
2	O problema D_4	43
2.1	Preliminares	44
2.2	$\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência	46
2.3	Espaços tangentes	47
2.4	Mudança de coordenadas	49
2.5	Ideais intrínsecos e submódulos	52
2.6	A forma genérica normal	53
2.7	Pré-forma normal	58
2.8	Classificação parcial dos problemas D_4	62
3	Formulação por caminhos e o problema D_4	71
3.1	Σ -teoria para a formulação por caminhos	72
3.2	Espaços tangentes a um caminho	78
3.3	Formulação por caminhos e o problema D_4	93
4	Classificação dos problemas D_4 usando a fomulação por caminhos	108
4.1	Classificação dos problemas D_4 com centro organizador I.	110
5	Diagramas de bifurcação	133
5.1	Soluções do problema D_4	133
5.2	Estabilidade orbital	136
5.3	Dados para o problema D_4	137
5.4	Diagramas para a forma normal genérica	140
5.5	Diagramas de bifurcação para a forma normal quando $p_{\lambda_1}^o = 0$	170

6 Aplicações	224
6.1 Motivação física	224
6.2 Outros problemas	226
 Apêndice	 229
 Bibliografia	 235

Introdução

Neste trabalho aplicamos técnicas da teoria de singularidades para o estudo de problemas de bifurcação multiparamétricos com simetria diagonal nas variáveis-padrão e também nos parâmetros de bifurcação.

Em [15] e [16], Golubitsky, Stewart e Schaeffer estudaram problemas de bifurcação com simetria apenas nas variáveis-padrão e com um parâmetro de bifurcação. Em [18], Peters classificou problemas de bifurcação com uma variável padrão e dois parâmetros de bifurcação. Ele também estendeu alguns resultados para os problemas com simetria diagonal tanto nas variáveis-padrão como nos parâmetros de bifurcação. Simultaneamente, em [1], Lavassani escreveu sobre problemas de bifurcação multiparamétricos com simetria apenas nas variáveis-padrão, seguindo [16] e os resultados algébricos de Damon apresentados em [10].

No capítulo 1, adaptamos os resultados sobre desdobramento, a caracterização algébrica da determinação finita e o problema do reconhecimento apresentados em [16], [10], [1] para o contexto onde há simetria diagonal nas variáveis-padrão e também nos multiparâmetros de bifurcação. As técnicas da teoria de singularidades são aplicadas para problemas de bifurcação multiparamétricos Γ -equivariantes segundo a ação diagonal de um grupo de Lie Γ nas variáveis-padrão x e nos multiparâmetros λ . Observamos que a teoria aqui apresentada também se estende a problemas Γ -equivariantes onde $\Gamma = (\Gamma_1 \times \mathbf{I}, \mathbf{I} \times \Gamma_2)$ sendo Γ_1 e Γ_2 grupos de Lie compactos agindo, respectivamente, em x por $g_1 \cdot x$ e em λ por $g_2 \cdot \lambda$ e Γ agindo em (x, λ) via a composição das ações acima definidas, ou seja,

$$(g_1, g_2) \cdot (x, \lambda) = ((g_1, 1) \cdot (1, g_2)) \cdot (x, \lambda).$$

A extensão para o caso onde a ação de Γ não é diagonal parece ser tecnicamente possível para os casos mais simples e será objeto de estudo futuro.

No capítulo 2, classificamos através de formas normais os problemas de bifurcação equivariantes com duas variáveis-padrão e dois parâmetros de bifurcação segundo a ação do grupo diedral D_4 nas variáveis e nos parâmetros. Utilizamos os métodos clássicos de determinação do espaço tangente e dos termos de ordem alta para obtenção das formas normais. Os resultados obtidos corrigem a forma genérica normal obtida por Peters em [18] e estendem a classificação para diagramas de codimensão topológica um. Este

problema foi motivado pelo estudo da envergadura de uma placa quadrada quando um par de forças atua, horizontalmente e verticalmente, sobre a placa.

Consideramos no capítulo 3 o problema da *formulação por caminhos* dentro de um contexto puramente algébrico e com aplicações para o problema D_4 -equivariante apresentado no capítulo 2. Esta formulação foi apresentada em [15], onde Golubitsky e Schaeffer relacionaram problemas de bifurcação em uma variável-padrão e sem simetria com um caminho através do desdobramento miniversal de uma cuspóide, no sentido de Teoria das Catástrofes. Até então as técnicas da teoria de singularidades não eram suficientes para tratar dessa caracterização. Por isso, foi introduzido em [15], o conceito de equivalência de contato para problemas com parâmetros distinguidos. Essa idéia básica tem sido estendida e aplicada. Em [4], Montaldi e Mond aplicaram a idéia da $\mathcal{K}_V$ -equivalência, apresentada por Damon em [11], à teoria de bifurcação equivariante utilizando a formulação por caminhos. Em [23], Bridges e Furter estudaram problemas de bifurcação gradiente e equivariantes através da formulação por caminhos e definiram uma relação de equivalência para caminhos que respeita a equivalência de contato para problemas de bifurcação gradiente. O nosso trabalho apresenta uma abordagem algébrica da formulação de caminhos permitindo classificar as formas normais de uma maneira organizada e precisa. Além disso, minimiza os cálculos que são feitos utilizando-se os métodos clássicos para obtenção de formas normais como no capítulo 2. Fica ainda em aberto uma caracterização geométrica da $\mathcal{K}_V$ -equivalência para o nosso caso de simetria diagonal.

No capítulo 4, apresentamos algumas formas normais decorrentes da forma normal genérica dos problemas D_4 -equivariantes utilizando a formulação por caminhos. Trata-se da aplicação da teoria apresentada no capítulo 3 aos problemas de bifurcação D_4 -equivariantes introduzidos no capítulo 2.

O capítulo 5 trata da descrição geométrica do comportamento das soluções dos problemas de bifurcação D_4 -equivariantes através dos diagramas de bifurcação. Estudamos também a estabilidade assintótica dessas soluções. Analisamos em detalhes duas formas normais e seus respectivos desdobramentos.

No capítulo 6 relacionamos alguns problemas em outras áreas, como Mecânica, Física, Química e Teoria de Elasticidade, cuja descrição matemática se reduz a um problema

D_4 -equivariante com ação diagonal. Entre esses, o problema da envergadura de uma placa quadrada foi a motivação original da tese e está sendo por nós considerado.

Capítulo 1

Teoria geral

Neste capítulo apresentamos a teoria geral sobre desdobramento, determinação finita e problema do reconhecimento para singularidades multiparamétricas com simetria, ou seja, analisamos os problemas de bifurcação equivariantes onde um grupo de Lie compacto age diagonalmente nas variáveis-padrão e nos multiparâmetros de bifurcação. Os resultados apresentados são baseados no artigo de *James Damon* [10], na tese de doutoramento de *Ali Lari-Lavassami* [1] e no livro *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* [16].

1.1 Definições gerais e teoremas

1.1.1 Notação e definições

Denotamos as coordenadas no *espaço padrão* $\mathbb{R}^n$ por $x = (x_1 \dots x_n)$ e as coordenadas no *espaço dos parâmetros* $\mathbb{R}^\ell$ por $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_\ell)$.

Para multi-índices de números inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, $f_{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}$, denota a derivada parcial $\frac{\partial^\alpha}{\partial x} f$ e $(D_x f)$ a Jacobiana de f . Também, denotamos o valor na origem $g(0 \dots 0)$ de qualquer função g representando f ou suas derivadas por g° .

Para $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}_x$ (ou $\mathcal{E}_n$) denota o anel usual de germes suaves $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}_x$ (ou $\mathcal{M}_n$) seu ideal maximal de germes que se anulam na origem.

Para $y \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}_{x,y}$ (ou $\mathcal{E}_{n,m}$) denota o $\mathcal{E}_x$ -módulo dos germes suaves $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{M}_{x,y}$ (ou $\mathcal{M}_{n,m}$) seu submódulo de germes se anulando na origem. Quando y for claro no contexto, denotaremos $\mathcal{E}_{x,y}$ por $\vec{\mathcal{E}}_x$ e $\mathcal{M}_{x,y}$ por $\vec{\mathcal{M}}_x$.

Seja $GL(n)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis do espaço $\mathbb{R}^n$ nele mesmo e $O(n)$ o seu subgrupo ortogonal n -dimensional.

Seja Γ um grupo Lie compacto agindo no $\mathbb{R}^m$ e diagonalmente no $\mathbb{R}^{n+\ell}$ via as representações ortogonais

$$\rho_n : \Gamma \rightarrow O(n), \quad \rho_\ell : \Gamma \rightarrow O(\ell) \quad \text{e} \quad \rho_m : \Gamma \rightarrow O(m).$$

Denotamos por $\gamma_n, \gamma_\ell, \gamma_m$ as ações no $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m$ induzidas por $\rho_n, \rho_\ell, \rho_m$, respectivamente e identificamos γ_n com $\rho_n(\gamma)$, γ_ℓ com $\rho_\ell(\gamma)$ e γ_m com $\rho_m(\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

$Hom_\Gamma(\mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de aplicações lineares $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que comutam com a ação de Γ e $\mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(n)$ a componente conexa $Hom_\Gamma(\mathbb{R}^n) \cap GL(n)$ contendo a aplicação identidade.

A identidade de $GL(n)$ é denotado por $\mathbf{I}_n$ e o grupo trivial por $\mathbf{1}$.

Sejam R e S anéis, N um R -módulo, M um S -módulo e $\phi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anel. Um *homomorfismo de módulo* sobre ϕ é por definição uma aplicação $\alpha : N \rightarrow M$ satisfazendo

1. $\alpha(n_1 + n_2) = \alpha(n_1) + \alpha(n_2), \quad n_1, n_2 \in N,$
2. $\alpha(rn) = \phi(r)\alpha(n), \quad n \in N, \quad r \in R.$

O germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ induz o homomorfismo de anel, *pull-back* por g ,

$$g^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$$

$$f \mapsto f \circ g.$$

1.1.2 Germes Γ -invariantes

Seja $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ o anel dos germes suaves Γ -invariantes, isto é,

$$\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \{h : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid h(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) = h(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

e $\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ o seu ideal de germes que se anulam na origem.

Um resultado de Schwarz [7] diz que existe um conjunto finito de Γ -polinômios invariantes $\bar{u}_1(x, \lambda) \dots \bar{u}_r(x, \lambda)$ tais que todo elemento $h \in \mathcal{E}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ pode ser escrito como o pull-back por $\bar{u} = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_r)$ de uma função de $u = (u_1 \dots u_r)$, ou seja,

$$\mathcal{E}_{(x, \lambda)}^\Gamma = \bar{u}^* \mathcal{E}_u.$$

Analogamente, seja

$$\mathcal{E}_\lambda^\Gamma = \{\eta : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta(\gamma_\ell \lambda) = \eta(\lambda), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

e $\mathcal{M}_\lambda^\Gamma$ seu ideal maximal. Todo elemento $\eta \in \mathcal{E}_\lambda^\Gamma$ pode ser escrito como uma função de $\bar{v} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t)$ pulled back por $\{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t\}$, polinômios Γ -invariantes em λ dados pelo Teorema de Schwarz, ou seja,

$$\mathcal{E}_\lambda^\Gamma = \bar{v}^* \mathcal{E}_v.$$

1.1.3 Germes Γ -equivariantes

Seja $\tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ o $\mathcal{E}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ -módulo dos germes suaves Γ -equivariantes, isto é,

$$\tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma = \{f : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) = \gamma_m f(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Pelo Teorema de Finitude de Malgrange-Poénaru [24], $\tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ é gerado sobre $\mathcal{E}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ por um conjunto finito de polinômios Γ -equivariantes $g_1 \dots g_s$. Consequentemente, usando as coordenadas Γ -invariantes $u_i, 1 \leq i \leq r$, e os polinômios Γ -equivariantes, $g_j, 1 \leq j \leq s$, toda $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ pode ser escrita como

$$f = \bar{u}^*(h_1 g_1 + \dots + h_s g_s) \tag{1.1}$$

para algum $h_j \in \mathcal{E}_u$. Usando (1.1) podemos identificar $\tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ com um submódulo de $\mathcal{E}_u \times \dots \times \mathcal{E}_u = (\mathcal{E}_u)^s$ de tal forma que cada germe $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ pode ser escrito como $f = [h_1 \dots h_s]$ para algum $h_j \in \mathcal{E}_u$. Note que, em geral, esse submódulo não é a soma direta de cópias de $\mathcal{E}_u$ (cf. Capítulo 2).

Seja $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma = \{\Lambda : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \mathbb{R}^\ell \mid \Lambda(\gamma_\ell \lambda) = \gamma_\ell \Lambda(\lambda), \forall \gamma \in \Gamma\}$ o $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma$ -módulo dos germes suaves Γ -equivariantes em λ .

Analogamente, existe um conjunto finito $p_1 \dots p_i$ de polinômios Γ -equivariantes em λ tais que

$$\Lambda = \bar{v}^*(r_1 p_1 + \dots + r_i p_i)$$

para algum $r_k \in \mathcal{E}_v, 1 \leq k \leq \hat{t}$.

Denotamos por $\tilde{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, e $\tilde{\mathcal{M}}_\lambda^\Gamma$, respectivamente, os submódulos de $\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e de $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma$, formados por germes que se anulam na origem.

1.2 Definições e resultados devidos a Damon

Recordamos algumas *definições básicas e alguns resultados devidos a Damon* [10] que são necessários para estabelecer os Teoremas de Desdobramento e Determinação Finita.

Sejam $y \in \mathbb{R}^n$ e $y' \in \mathbb{R}^m$. Uma *álgebra diferencial* (DA-álgebra) consiste de uma $\mathbb{R}$ -álgebra A e um homomorfismo de álgebra sobrejetor $\psi : \mathcal{E}_y \rightarrow A$. Essas álgebras são anéis locais com ideais maximais $\mathcal{M}_A$. Se $\phi : \mathcal{E}_{y'} \rightarrow B$ definir outra DA-álgebra, então um *homomorfismo de DA-álgebra* $\alpha : A \rightarrow B$ será um homomorfismo de álgebra que levanta fornecendo o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_y & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{E}_{y'} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

onde $\tilde{\alpha} = g^*$ para alguma $g : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Exemplo 1.2.1. $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma$ são DA-álgebras.

(i) Defina $\phi : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ por $\phi(x, \lambda) = (\bar{u}_1(x, \lambda) \dots \bar{u}_r(x, \lambda))$ onde $\bar{u} = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_r)$ é dado pelo Teorema de Schwarz. Isto induz o homomorfismo de álgebra

sobrejetor

$$\begin{aligned}\phi^* : \mathcal{E}_u &\rightarrow \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ h &\mapsto h \circ \phi.\end{aligned}$$

(ii) Analogamente, seja $\{ \bar{v}_1 \dots \bar{v}_t \}$ o conjunto dos polinômios Γ -invariantes em λ . Defina

$$\begin{aligned}\psi : (\mathbb{R}^\ell, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^t, 0) \\ \lambda &\mapsto (\bar{v}_1(\lambda) \dots \bar{v}_t(\lambda)).\end{aligned}$$

Isto induz o homomorfismo de álgebra sobrejetor

$$\begin{aligned}\psi^* : \mathcal{E}_v &\rightarrow \mathcal{E}_\lambda^\Gamma \\ f &\mapsto f \circ \psi.\end{aligned}$$

Além disso $\pi_\ell : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, 0)$ induz o homomorfismo de DA-álgebra

$$\begin{aligned}\pi_\ell^* : \mathcal{E}_\lambda^\Gamma &\rightarrow \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ g &\mapsto g \circ \pi_\ell.\end{aligned}$$

Obviamente, $\pi_\ell^*(g) \in \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e π_ℓ^* é um homomorfismo de álgebra. Resta mostrar que ele levanta para formar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E}_v & \xrightarrow{H^*} & \mathcal{E}_u \\ \psi^* \downarrow & & \downarrow \phi^* \\ \mathcal{E}_\lambda^\Gamma & \xrightarrow{\pi_\ell^*} & \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma\end{array}$$

para $H : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$ definida da seguinte maneira: para todo $1 \leq j \leq t$, $\bar{v}_j \circ \pi_\ell \in \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e portanto, existe $h_j \in \mathcal{E}_u$ tal que

$$\bar{v}_j \circ \pi_\ell = \phi^*(h_j) = h_j \circ \phi,$$

isto é,

$$(\pi_\ell^* \circ \bar{v}_j)(x, \lambda) = h_j(\bar{u}(x, \lambda)).$$

Então, seja $H(u_1 \dots u_r) = (h_1(u) \dots h_t(u))$ com $u = (u_1 \dots u_r)$.

Consequentemente, para $f \in \mathcal{E}_v$,

$$\begin{aligned}
((\phi^* \circ H^*)(f))(x, \lambda) &= (f \circ H \circ \phi)(x, \lambda) \\
&= f(h_1(\bar{u}(x, \lambda)) \dots h_r(\bar{u}(x, \lambda))) \\
&= f(\bar{v}_1(\lambda) \dots \bar{v}_r(\lambda)) \\
&= f((\bar{v}_1 \circ \pi_\ell)(x, \lambda) \dots (\bar{v}_r \circ \pi_\ell)(x, \lambda)) \\
&= (f \circ \psi \circ \pi_\ell)(x, \lambda) \\
&= ((\pi_\ell^* \circ \psi^*)(f))(x, \lambda).
\end{aligned}$$

Definição. Sejam R um anel e $\mathcal{I} \subset R$ um ideal. $\mathcal{I}$ será chamado *Jacobson* se $1 + a$ for invertível em R para todo $a \in \mathcal{I}$.

Exemplo 1.2.2. $\mathcal{M}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ e $\mathcal{M}_\lambda^\Gamma$ são ideais de Jacobson.

Definição. Seja $(\mathcal{D}, <)$ um conjunto finito de índices parcialmente ordenado. Um *sistema de anéis associado a $\mathcal{D}$* consiste de um conjunto de anéis $\{R_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ junto com os homomorfismos de anéis $\phi_{\alpha\beta} : R_\alpha \rightarrow R_\beta$ definida por $\alpha \leq \beta$ tais que $\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ e $\phi_{\alpha\alpha} = id$. Denotamos tal sistema por $\{R_\alpha\}$. Um *sistema de ideais* $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ de $\{R_\alpha\}$ consiste de ideais $\mathcal{I}_\alpha \subset R_\alpha$ tais que $\phi_{\alpha\beta}(\mathcal{I}_\alpha) \subseteq \mathcal{I}_\beta$ para $\alpha \leq \beta$. Dessa forma, $\{(R_\alpha, \mathcal{I}_\alpha)\}$ denota o sistema de anéis e ideais.

Um sistema $\{R_\alpha\}$ para o qual $\mathcal{D}$ satisfaz a propriedade de que cada elemento tem, no máximo, um predecessor imediato é chamado *sistema adequadamente ordenado*.

Definição. Um *sistema de DA-álgebras* é um sistema de anéis $\{R_\alpha\}$ para os quais R_α é uma DA-álgebra e cada homomorfismo de conexão é um homomorfismo de DA-álgebra.

Exemplo 1.2.3. Segue do Exemplo 1.2.1 que $\{\mathcal{E}_\lambda^\Gamma, \mathcal{E}_{(x, \lambda)}^\Gamma\}$ é um sistema de DA-álgebras.

Exemplo 1.2.4. Sejam

$$\mathcal{E}_{(\lambda, \beta)}^\Gamma = \{g : (\mathbb{R}^{\ell+k}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid g(\gamma_\ell \lambda, \beta) = g(\lambda, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

$$\mathcal{E}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma = \{f : (\mathbb{R}^{n+\ell+k}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda, \beta) = f(x, \lambda, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Neste caso Γ age trivialmente sobre $\mathbb{R}^k$ e assim age ortogonalmente sobre $\mathbb{R}^{n+\ell+k}$. Dessa forma o Teorema de Schwarz se estende a este caso multiparamétrico da seguinte

maneira: $\mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma = \bar{v}^* \mathcal{E}_{(v,\beta)}$ e $\mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma = \bar{u}^* \mathcal{E}_{(u,\beta)}$ onde $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t)$ e $(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_r)$ foram definidos anteriormente na página 3.

Defina

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^{\ell+k}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^{t+k}, 0) \\ (\lambda, \beta) &\mapsto (\bar{v}_1(\lambda) \dots \bar{v}_t(\lambda), \beta). \end{aligned}$$

Isto induz o seguinte homomorfismo de álgebra sobrejetor

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathcal{E}_{(v,\beta)} &\rightarrow \mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma \\ g &\mapsto g \circ \Phi. \end{aligned}$$

Analogamente, defina

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathbb{R}^{n+\ell+k}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^{r+k}, 0) \\ (x, \lambda, \beta) &\mapsto (\bar{u}_1(x, \lambda) \dots \bar{u}_r(x, \lambda), \beta). \end{aligned}$$

Isto induz o homomorfismo de álgebra sobrejetor

$$\begin{aligned} \Psi^* : \mathcal{E}_{(u,\beta)} &\rightarrow \mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \\ f &\mapsto f \circ \Psi. \end{aligned}$$

As projeções

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+\ell+k} &\xrightarrow{\pi_{\ell+k}} \mathbb{R}^{\ell+k} \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{R}^k \\ (x, \lambda, \beta) &\mapsto (\lambda, \beta) \mapsto \beta \end{aligned}$$

dão origem ao sistema de DA-álgebras

$$\mathcal{E}_\beta \xrightarrow{\pi_k^*} \mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma \xrightarrow{\pi_{\ell+k}^*} \mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma,$$

pois,

$$(i) \quad \begin{aligned} \pi_k^* : \mathcal{E}_\beta &\longrightarrow \mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma \\ h &\mapsto h \circ \pi_k, \end{aligned}$$

$\pi_k^*(h) \in \mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma$, π_k^* é um homomorfismo de álgebra e levanta fornecendo o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_\beta & \xrightarrow{(\pi_k^t)^*} & \mathcal{E}_{v,\beta} & \xrightarrow{(\pi_{\ell+k}^t)^*} & \mathcal{E}_{u,v,\beta} \\ \mathbf{I}_k^* \downarrow & & \downarrow \Phi^* & & \downarrow \\ \mathcal{E}_\beta & \xrightarrow{\pi_k^*} & \mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma & \xrightarrow{\pi_{\ell+k}^*} & \mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \end{array}$$

Para isso defina $\pi_k^t : (\mathbb{R}^{t+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ como a projeção no $\mathbb{R}^k$.

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\ell+k}^* : \mathcal{E}_{(\lambda, \beta)}^\Gamma & \longrightarrow & \mathcal{E}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma \\ g & \mapsto & g \circ \pi_{\ell+k}, \end{array}$$

$\pi_{\ell+k}^*(g) \in \mathcal{E}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma$, $\pi_{\ell+k}^*$ é também um homomorfismo de álgebra e levanta dando origem ao seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{(v, \beta)} & \xrightarrow{H^*} & \mathcal{E}_{(u, \beta)} \\ \Phi^* \downarrow & & \downarrow \Psi^* \\ \mathcal{E}_{(\lambda, \beta)}^\Gamma & \xrightarrow{\pi_{k+l}^*} & \mathcal{E}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma \end{array}$$

para $H : (\mathbb{R}^{r+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{t+k}, 0)$ definida da seguinte maneira: para $1 \leq j \leq t$, $w_j : (\mathbb{R}^{\ell+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dada por $w_j(\lambda, \beta) = \bar{v}_j(\lambda)$ satisfaz $w_j \circ \pi_{\ell+k} \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma$ e assim existe $h_j \in \mathcal{E}_{(u, \beta)}$ tal que $(w_j \circ \pi_{\ell+k})(x, \lambda, \beta) = h_j(\bar{u}_1(x, \lambda) \dots \bar{u}_r(x, \lambda), \beta)$. Seja $H(u_1 \dots u_r, \beta) = (h_1(u, \beta) \dots h_t(u, \beta), \beta)$ com $u = (u_1 \dots u_r)$. Segue que para $g \in \mathcal{E}_{(v, \beta)}$,

$$\begin{aligned} ((\Psi^* \circ H^*)(g))(x, \lambda, \beta) &= (g \circ H \circ \Psi)(x, \lambda, \beta) \\ &= g \circ H(\bar{u}_1(x, \lambda) \dots \bar{u}_r(x, \lambda), \beta) \\ &= g(h_1(\bar{u}(x, \lambda), \beta) \dots h_t(\bar{u}(x, \lambda), \beta), \beta) \\ &= g(w_1 \circ \pi_{\ell+k}(x, \lambda, \beta) \dots w_t \circ \pi_{\ell+k}(x, \lambda, \beta), \beta) \\ &= g(\bar{v}_1(\lambda) \dots \bar{v}_t(\lambda), \beta) \\ &= (g \circ \Phi \circ \pi_{\ell+k})(x, \lambda, \beta) \\ &= ((\pi_{\ell+k}^* \circ \Phi^*)(g))(x, \lambda, \beta). \end{aligned}$$

Portanto, $\{\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_{(\lambda, \beta)}^\Gamma, \mathcal{E}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma\}$ é um sistema de DA-álgebras.

Para especificar nesse sistema os ideais maximais de Jacobson escrevemos

$$\{(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{M}_\beta), (\mathcal{E}_{(x, \beta)}^\Gamma, \mathcal{M}_{(x, \beta)}^\Gamma), (\mathcal{E}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma, \mathcal{M}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma)\}$$

e denotamos esse sistema de anéis e ideais por $\{(R_{(x,\lambda,\beta)}, m_{(x,\lambda,\beta)})\}$.

Fazendo $\beta = 0$, temos o seguinte sistema:

$$\{(R_{(x,\lambda)}, m_{(x,\lambda)})\} = \{(\mathcal{E}_\lambda^\Gamma, \mathcal{M}_\lambda^\Gamma), (\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma, \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma)\}.$$

Definições. Um $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ -módulo M consiste de uma soma direta $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ tal que M_1 é um $\mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ -módulo, M_2 é um $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ -módulo e M_3 é um $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma$ -módulo.

M é dito *finitamente gerado* se cada M_i for um módulo finitamente gerado sobre o anel correspondente, $1 \leq i \leq 3$.

Um $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ -homomorfismo de módulo $\psi : M \rightarrow N$ consiste de uma soma de homomorfismos $\psi_{ji} : M_j \rightarrow N_i$, para $1 \leq j \leq i \leq 3$, os quais são homomorfismos sobre os homomorfismos de conexão π_{ji}^* .

N é um $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ -submódulo de M se $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$, onde N_i é um submódulo de M_i para todo $1 \leq i \leq 3$. Se $\{\mathcal{I}_{(x,\lambda,\beta)}\} = \{\mathcal{I}_\beta, \mathcal{I}_{(\lambda,\beta)}, \mathcal{I}_{(x,\lambda,\beta)}\}$ for um sistema de ideais de $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$, definimos

$$\{\mathcal{I}_{(x,\lambda,\beta)}\}M = \mathcal{I}_{(x,\lambda,\beta)} \cdot M_1 \oplus \mathcal{I}_{(\lambda,\beta)} \cdot M_2 \oplus \mathcal{I}_\beta \cdot M_3$$

e é um $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ -submódulo de M .

Definições semelhantes podem ser feitas para o sistema $\{R_{(x,\lambda)}\}$, fazendo $\beta = 0$.

Note que cada anel em $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ é uma $\mathcal{E}_\beta$ -álgebra. Dizemos que $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ é um *sistema adequadamente ordenado de DA-álgebras sobre $\mathcal{E}_\beta$* se cada homomorfismo de conexão for um homomorfismo de $\mathcal{E}_\beta$ -álgebra e cada anel tem exatamente um predecessor.

Lema 1.2.5. Considere o sistema de DA-álgebras e ideais de Jacobson $\{R_{(x,\lambda,\beta)}, \mathcal{J}_{(x,\lambda,\beta)}\} = \{(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{M}_\beta), (\mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma, \mathcal{M}_\beta \cdot \mathcal{E}_{(x,\beta)}^\Gamma), (\mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma, \mathcal{M}_\beta \cdot \mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma)\}$. Sejam M e N $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ -módulos finitamente gerados. Suponha que $\psi : N \rightarrow M$ é um homomorfismo de módulo sobre $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$. Se

$$\psi(N) + \mathcal{M}_\beta \cdot M = M$$

então

$$\psi(N) = M \text{ e } \psi(\{\mathcal{J}_{(x,\lambda,\beta)}\}N) = \{\mathcal{J}_{(x,\lambda,\beta)}\}M.$$

Prova. Por ([10], Corolário 6.16, pág. 33), $\{R_{(x,\lambda,\beta)}, \mathcal{J}_{(x,\lambda,\beta)}\}$ é adequado pois $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ é um sistema adequadamente ordenado de DA-álgebras sobre $\mathcal{E}_\beta$.

O lema segue da definição de sistema adequado de anéis e ideais de Jacobson. ([10], Definição 6.10, pág. 30) $\square$

Observação. O Lema 1.2.5 é uma versão generalizada do Teorema de Preparação de Malgrange.

1.3 $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência

Seja

$$\mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \{T : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow M_m(\mathbb{R}) \mid T(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) \gamma_m = \gamma_m T(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

o módulo sobre $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ das matrizes que comutam com Γ .

Precisamos, também, dos seguintes $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ -módulos:

$$\tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \{X : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid X(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) = \gamma_n X(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma\},$$

$$\tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} = \{X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma \mid X^o = 0\} \text{ e dos seguintes } \mathcal{E}_\lambda^\Gamma\text{-módulos:}$$

$$\tilde{\Theta}_\lambda^\Gamma = \{\Lambda : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \mathbb{R}^\ell \mid \Lambda(\gamma_\ell \lambda) = \gamma_\ell \Lambda(\lambda), \forall \gamma \in \Gamma\},$$

$$\tilde{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o} = \{\Lambda \in \tilde{\Theta}_\lambda^\Gamma \mid \Lambda^o = 0\}.$$

O grupo de contato $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ é definido por

$$\mathcal{K}_\lambda^\Gamma = \{(T, X, \Lambda) \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \times \tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} \times \tilde{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o} \mid T^o \in \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(m), \\ (D_x X)^o \in \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(n), (D_\lambda \Lambda)^o \in \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(\ell)\}.$$

Escrevendo $\varphi_i = (X_i, \Lambda_i)$, $i = 1, 2$, então a estrutura de grupo de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ é dada pela seguinte multiplicação:

$$(S_2, \varphi_2) \circ (S_1, \varphi_1) = (S_2 \cdot (S_1 \circ \varphi_2), \varphi_1 \circ \varphi_2)$$

onde

$$S_2 \cdot (S_1 \circ \varphi_2)(x, \lambda) = S_2(x, \lambda) S_1(\varphi_2(x, \lambda))$$

e

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(x, \lambda) = (X_1 \circ \varphi_2(x, \lambda), \Lambda_1 \circ \Lambda_2(\lambda)).$$

$\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ age de uma maneira natural em $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ por

$$(T, X, \Lambda) \cdot f(x, \lambda) = T(x, \lambda) f(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)).$$

Denotamos a órbita de f por $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma \cdot f$.

Por definição, dois elementos $f, g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ são ditos $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -*equivalentes* se eles pertencerem à mesma $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -órbita.

1.4 $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -equivalência

Perturbações dos elementos em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ são descritas usando o conceito de desdobramento.

Sejam $\beta = (\beta_1 \dots \beta_k)$ e

$$\mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma = \{T : (\mathbb{R}^{n+\ell+k}, 0) \rightarrow M_m(\mathbb{R}) \mid T(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda, \beta) \gamma_m = \gamma_m T(x, \lambda, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\},$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma = \{F : (\mathbb{R}^{n+\ell+k}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid F(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda, \beta) = \gamma_m F(x, \lambda, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\},$$

$$\vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^{\Gamma,o} = \{X : (\mathbb{R}^{n+\ell+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \mid X(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda, \beta) = \gamma_n X(x, \lambda, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\},$$

$$\vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^{\Gamma,o} = \{\Lambda : (\mathbb{R}^{\ell+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, 0) \mid \Lambda(\gamma_\ell \lambda, \beta) = \gamma_\ell \Lambda(\lambda, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Um *desdobramento* de $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ com k parâmetros $\beta = (\beta_1 \dots \beta_k)$ é um germe de aplicação $F \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ tal que $F(x, \lambda, 0) = f(x, \lambda)$.

Denotamos por $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ o grupo das Γ -equivalências para desdobramentos com k parâmetros. É uma extensão de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k) = \{ & (T, X, \Lambda, \Phi) \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \times \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^{\Gamma,o} \times \vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^{\Gamma,o} \times \mathcal{M}_{\beta,\beta} \mid \\ & (T, X, \Lambda) \text{ é um desdobramento com } k \text{ parâmetros de um elemento de } \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \text{ e} \\ & \Phi \text{ é um germe de difeomorfismo} \}. \end{aligned}$$

A ação de $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ em $F \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ é definida por

$$(T, X, \Lambda, \Phi) \cdot F(x, \lambda, \beta) = T(x, \lambda, \beta) F(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), \Phi(\beta)).$$

Denotamos a órbita de F por $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k) \cdot F$.

Dizemos que $F, G \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ são $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -*equivalentes* se eles pertencerem à mesma $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -órbita.

Observações. Para o estudo de desdobramentos, o sistema adequadamente ordenado de DA-álgebras é $\{\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma, \mathcal{E}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma\}$ e para germes em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ é $\{\mathcal{E}_\lambda^\Gamma, \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma\}$.

A definição de $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ é suficiente para o que pretendemos. Na teoria geral de Damon (cf. Secção 1.6), dois grupos de equivalência são considerados para desdobramentos. Ambos são subgrupos de $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ sendo que o primeiro é dado com $\Phi = \mathbf{I}_\beta$ e o segundo com (T, X, Λ) sendo um desdobramento da identidade de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$.

1.5 Espaços tangentes

O *espaço tangente* à $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ no seu elemento identidade é definido por

$$\mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) = \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \delta_t \mid \delta_t \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma, \delta_0 = \mathbf{1} \right\}$$

e um cálculo direto mostra que existe uma identificação

$$\mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \cong \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} \oplus \vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o}. \quad (1.2)$$

Como $\mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $\vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}$ são módulos finitamente gerados sobre $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $\vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o}$ é um módulo finitamente gerado sobre $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma$, $\mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$ é uma soma direta de módulos finitamente gerados sobre o sistema de anéis $\{R_{(x,\lambda)}\}$.

Note que nessa definição, a origem ficou fixada. Quando a origem não é fixa, definimos o *espaço tangente estendido* ([10], pág. 3) e o denotamos por $\mathcal{T}_e^\Gamma$. Um vetor tangente em $\mathcal{T}_e^\Gamma$ é visto como o vetor tangente $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E_t$ à origem de um desdobramento a um parâmetro $E \in \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(1)$ da identidade de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$. Assim, temos a seguinte identificação

$$\mathcal{T}_e^\Gamma \cong \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_\lambda^\Gamma. \quad (1.3)$$

Analogamente, identificamos

$$\mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)) \cong \mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma \oplus \mathcal{E}_{\beta,\beta}. \quad (1.4)$$

Segue que $\mathcal{T}_e^\Gamma$ é um módulo finitamente gerado sobre o sistema de anéis $\{R_{(x,\lambda)}\}$ e que $\mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k))$ é um módulo finitamente gerado sobre o sistema de anéis $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$.

Seja $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$. A aplicação órbita associada com f é uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_f : \mathcal{K}_\lambda^\Gamma &\rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ (T, X, \Lambda) &\mapsto (T, X, \Lambda) \cdot f. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Identificando o espaço tangente à $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ com ele mesmo, segue que

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}_f : \mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) &\cong \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} \oplus \vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ (T, X, \Lambda) &\mapsto T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sabemos que $\mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ são módulos finitamente gerados sobre o sistema adequadamente ordenado de DA-álgebras $\{R_{(x,\lambda)}\}$. Além disso, $d\mathcal{O}_f$ é um homomorfismo de módulo sobre esse sistema, pois:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} &\rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ (T, X) &\mapsto T f + (D_x f) X \end{aligned}$$

é um homomorfismo de $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ -módulo. Note que $\mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}$ é um $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ -módulo e assim trivialmente um módulo sobre o sistema $\{R_{(x,\lambda)}\}$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma &\rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ \Lambda &\mapsto (D_\lambda f) \Lambda \end{aligned}$$

é um módulo de homomorfismo sobre $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma \xrightarrow{\pi_i^*} \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

Uma construção análoga vale para $\mathcal{T}_e^\Gamma$ e desdobramentos, ou seja, podemos estender $d\mathcal{O}_f$ para $\mathcal{T}_e^\Gamma$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}_f : \mathcal{T}_e^\Gamma &\cong \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_\lambda^\Gamma \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ (T, X, \Lambda) &\mapsto T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda. \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ é um módulo sobre $\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $\vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma$ é um módulo sobre $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma$ e assim $d\mathcal{O}_f$ é também um homomorfismo de módulo sobre o sistema $\{R_{(x,\lambda)}\}$.

Para $F \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$,

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}_F : \mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)) &\simeq \mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma \oplus \mathcal{E}_{\beta,\beta} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma \\ (T, X, \Lambda, \Phi) &\mapsto T F + (D_x F) X + (D_\lambda F) \Lambda + (D_\beta F) \Phi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k))$ e $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ são módulos finitamente gerados sobre o sistema $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ e $d\mathcal{O}_F$ é um homomorfismo de módulo sobre esse sistema.

Seguindo a teoria geral de ações de grupo em variedades, definimos os espaços tangentes como sendo a imagem da derivada da aplicação órbita e usando (1.6), (1.7) e (1.8), definimos os espaços tangentes com os quais vamos trabalhar.

Definição. Sejam $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $F \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$.

$$\mathcal{T}^\Gamma(f) = \{T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma, X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}, \Lambda \in \vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o}\}.$$

$$\mathcal{T}_e^\Gamma(f) = \{T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma, X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma, \Lambda \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{e,un}^\Gamma(k)(F) = \{T F + (D_x F) X + (D_\lambda F) \Lambda + (D_\beta F) \Phi \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma, \\ X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma, \Lambda \in \vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma, \Phi \in \mathcal{E}_{\beta,\beta}\}. \end{aligned}$$

Definindo

$$\hat{\mathcal{T}}^\Gamma(f) = \{T f + (D_x f) X \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma, X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}\},$$

$$\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(f) = \{T f + (D_x f) X \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma, X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma\},$$

$$\hat{\mathcal{T}}_{e,un}^\Gamma(k)(F) = \{T F + (D_x F) X \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma, X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma\},$$

podemos escrever

$$\mathcal{T}_e^\Gamma(f) = \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(f) + \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma(D_\lambda f),$$

$$\mathcal{T}_{e,un}^\Gamma(k)(F) = \hat{\mathcal{T}}_{e,un}^\Gamma(k)(F) + \vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma(D_\lambda F) + \mathcal{E}_{\beta,\beta}(D_\beta F).$$

A diferença entre $\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(f)$ e $\hat{\mathcal{T}}^\Gamma(f)$ é que X se anula na origem de $\hat{\mathcal{T}}^\Gamma(f)$. Assim sendo, se $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma + \mathbb{R}\{Y_1 \dots Y_t\}$ então $\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(f) = \hat{\mathcal{T}}^\Gamma(f) + \mathbb{R}\{(D_x f)Y_1 \dots (D_x f)Y_t\}$.

Os espaços tangentes definidos até agora, tem somente a estrutura de $\mathcal{E}_\lambda^\Gamma$ -módulo.

Definição. O *espaço normal estendido* é definido por

$$\mathcal{N}_e^\Gamma(f) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma}{\mathcal{T}_e^\Gamma(f)}$$

e a Γ -codimensão de um germe $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, denotada $\text{cod}^\Gamma(f)$, por

$$\text{cod}^\Gamma(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{N}_e^\Gamma(f).$$

1.6 Subgrupo geométrico

Nesta secção recordamos a metodologia geral para teoria de singularidades desenvolvida por Damon em [10] e mostramos como o nosso problema se adapta à ela. Consideremos um subgrupo $\mathcal{G}$ do grupo das equivalências de contato $\mathcal{K}$, agindo em um subespaço linear $\mathcal{F}$ de $\vec{\mathcal{E}}_x$. Assumimos que para cada inteiro positivo q , temos um grupo de desdobramentos $\mathcal{G}_{un}(q)$ (um subgrupo de $\mathcal{K}_{un}(q)$) agindo num subespaço $\mathcal{F}_{un}(q) \subset \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}$ de desdobramentos com q parâmetros $\beta = (\beta_1 \dots \beta_q)$ de germes em $\vec{\mathcal{E}}_x$. Para $q = 0$, devemos recuperar $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$.

Um grupo $\mathcal{G}$ agindo em $\mathcal{F} \subset \vec{\mathcal{E}}_x$ (junto com o correspondente grupo de desdobramento $\mathcal{G}_{un}(q)$ agindo em $\mathcal{F}_{un}(q) \subset \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}$) será chamado de *subgrupo geométrico* de $\mathcal{K}$ se satisfizer as quatro propriedades seguintes:

- naturalidade
- estrutura de espaço tangente
- aplicação exponencial
- condição de filtração

Naturalidade: o grupo e o espaço de desdobramentos são naturais com relação ao pull-back.

Podemos considerar elementos em $\mathcal{G}_{un}(q+1)$ e $\mathcal{F}_{un}(q+1)$ como desdobramentos de elementos em $\mathcal{G}_{un}(q)$ e $\mathcal{F}_{un}(q)$ via o pull-back pela imersão $\mathbb{R}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$. Dessa forma podemos calcular os espaços estendidos $\mathcal{T}_e \mathcal{G}_{un}(q)$ e $\mathcal{T}_e \mathcal{F}_{un}(q)$.

Estrutura do Espaço Tangente: essa propriedade descreve a estrutura algébrica dos espaços tangentes e dos espaços tangentes estendidos e suas respectivas relações.

Existe uma coleção de DA-subálgebras $\{R_x\}$ de $\mathcal{F}$ tal que para cada $\mathbb{R}^q$ com coordenadas locais β , $\mathcal{T}_e \mathcal{G}_{un}(q)$ e $\mathcal{T}_e \mathcal{F}_{un}(q)$ são $\{R_{(x,\beta)}\}$ -módulos finitamente gerados, com $\mathcal{T} \mathcal{G}_{un}(q)$ e $\mathcal{T} \mathcal{F}_{un}(q)$ $\{R_{(x,\beta)}\}$ -submódulos finitamente gerados e, contendo (via naturalidade) $\mathcal{T}_e \mathcal{G}$ e $\mathcal{T}_e \mathcal{F}$ como $\{R_x\}$ -submódulos. Também, para cada $F \in \mathcal{F}$, $\{R_{(x,\beta)}\}$ se torna

um sistema de DA-álgebras sobre $\mathcal{E}_\beta$ tal que

$$d\mathcal{O}_F : T_e \mathcal{G}_{un}(q) \rightarrow T_e \mathcal{F}_{un}(q)$$

é um homomorfismo de $\{R_{(x,\beta)}\}$ -módulos.

Em segundo lugar, requeremos que as aplicações naturais

$$\frac{T_e \mathcal{G}_{un}(q)}{\mathcal{M}_\beta T_e \mathcal{G}_{un}(q)} \xrightarrow{\sim} T_e \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \frac{T_e \mathcal{F}_{un}(q)}{\mathcal{M}_\beta T_e \mathcal{F}_{un}(q)} \xrightarrow{\sim} T_e \mathcal{F}$$

sejam isomorfismos de $\{R_x\}$ -módulos. Por último, requeremos que

$$\mathcal{M}_x T_e \mathcal{G} \subset T\mathcal{G} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_x T_e \mathcal{F} \subset T\mathcal{F}.$$

Esta última condição implica que ambos os espaços tangentes estendidos $T_e \mathcal{G}$ e $T_e \mathcal{F}$ diferem dos espaços tangentes $T\mathcal{G}$ e $T\mathcal{F}$ por “campos de vetores constantes”.

Aplicação Exponencial: definimos também um grupo $\mathcal{G}_{eq}(q)$ de equivalências de desdobramentos com q -parâmetros considerando os elementos de $\mathcal{G}_{un}(q)$ que são desdobramentos da identidade em $\mathcal{G}$ junto com um difeomorfismo Φ definido numa vizinhança da origem do $\mathbb{R}^q$ (cf. Secção 1.4 e [3], [10], [13]). Novamente, podemos considerar “desdobramentos” de elementos de $\mathcal{G}_{eq}(q)$ como pertencentes a $\mathcal{G}_{eq}(q+1)$ via o desdobramento a um parâmetro da identidade de $\mathcal{G}_{eq}(q)$. Calculando o espaço tangente estendido à identidade, temos a seguinte relação:

$$T_e \mathcal{G}_{eq}(q) = T_e \mathcal{G}_{un}(q) \oplus \mathcal{E}_\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \right\}.$$

A restrição da aplicação exponencial para $\mathcal{K}$ induz uma aplicação

$$\begin{aligned} \exp : T_e \mathcal{G}_{eq}(q) &\rightarrow \mathcal{G}_{eq}(q+1) \\ \xi &\mapsto \phi_t \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = \xi \cdot \phi_t$ e $\phi_0 = id$.

Condição de Filtração: $\mathcal{G}_{un}(q)$ preserva a filtração $\{\{\mathcal{M}_x^\ell\} \mathcal{F}_{un}(q)\}$ em $\mathcal{F}_{un}(q)$ e induz uma ação no quociente $\frac{\mathcal{F}_{un}(q)}{\{\mathcal{M}_x^\ell\} \mathcal{F}_{un}(q)}$ para todo $\ell \geq 0$.

Note que $\mathcal{G} = \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ satisfaz as quatro propriedades acima descritas pois tomando $\mathcal{F} = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $\mathcal{F}_{un}(q) = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ e

$$\mathcal{G}_{un}(q) = \{(T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(q) \mid \Phi = I_\beta\}$$

temos que: a Naturalidade é óbvia e (1.3), (1.4) fornecem os espaços tangentes estendidos. A propriedade Estrutura de Espaço Tangente segue da Secção 1.5 e resultados preliminares das secções anteriores. Para verificar a propriedade Aplicação Exponencial definimos

$$\mathcal{G}_{eq}(q) = \{(T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(q) \mid (T, X, \Lambda) \text{ é um desdobramento da identidade em } \mathcal{K}_\lambda^\Gamma\}.$$

A demonstração das propriedades de $\mathcal{T}_e \mathcal{G}_{eq}(q)$ é uma simples extensão da abordagem usada em (1.3). Novamente, omitiremos os detalhes da demonstração por se estender ao nosso contexto. A Condição de Filtração é válida porque ela já existe para a situação não-equivariante e o nosso caso trata de uma ação linear de Γ .

1.7 A Teoria de desdobramento

Sejam $F \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ um desdobramento de $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ com k parâmetros $\beta = (\beta_1 \dots \beta_k)$ e $A : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$. O *pull-back* de F sob A , denotado por A^*F , é o desdobramento com r parâmetros de f definido por

$$(A^*F)(x, \lambda, \alpha) = F(x, \lambda, A(\alpha)), \quad \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_r).$$

Seja $G \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$ um desdobramento de $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ com r parâmetros $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_r)$. Dizemos que G se fatora através de F se existirem $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$, $X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$, $\Lambda \in \vec{\Theta}_{(\lambda,\alpha)}^\Gamma$ e $A : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ satisfazendo $T(x, \lambda, 0) = \mathbf{I}_m$, $X(x, \lambda, 0) = x$ e $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ tal que

$$G(x, \lambda, \alpha) = T(x, \lambda, \alpha) F(X(x, \lambda, \alpha), \Lambda(\lambda, \alpha), A(\alpha)).$$

F é *versal* se todo desdobramento G de f se fatora através de F . Se F for versal e tiver número mínimo de parâmetros, será chamado de *desdobramento miniversal* de f . Devemos provar que os desdobramentos miniversais de f são únicos a menos de $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -equivalência (cf. Teorema 1.7.7).

Lema 1.7.1. (Lema Algébrico da Teoria de Desdobramento)

Sejam $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $F \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$ um desdobramento de f com k parâmetros $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$. As seguintes condições são equivalentes:

1. $\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}_e^\Gamma(f) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}(\cdot, \cdot, 0) \dots \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}(\cdot, \cdot, 0) \right\},$
2. $\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma = \hat{\mathcal{T}}_{e,un}^\Gamma(k)(F) + \tilde{\Theta}_{(\lambda,\alpha)}^\Gamma(D_x F) + \mathcal{E}_\alpha \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \right\}.$

Prova. O fato de que 2. implica 1. é óbvio fazendo $\alpha = 0$.

Para mostrar a recíproca usamos o Lema 1.2.5 com

$$N = \mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)), \quad M = \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma \quad \text{e} \quad \psi = d\mathcal{O}_F.$$

Por (1.8), $d\mathcal{O}_F$ é um homomorfismo de módulos finitamente gerados sobre o sistema de DA-álgebras $\{R_{(x,\lambda,\alpha)}\}$. Considere o sistema

$$\{R_{(x,\lambda,\alpha)}, \mathcal{J}_{(x,\lambda,\alpha)}\} = \{(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha), (\mathcal{E}_{(\lambda,\alpha)}^\Gamma, \mathcal{M}_\alpha \cdot \mathcal{E}_{(\lambda,\alpha)}^\Gamma), (\mathcal{E}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma, \mathcal{M}_\alpha \cdot \mathcal{E}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma)\}.$$

A condição 1. é equivalente à

$$d\mathcal{O}_F \left(\frac{\mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k))}{\mathcal{M}_\alpha \cdot \mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k))} \right) = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma}{\mathcal{M}_\alpha \cdot \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma}$$

o qual é equivalente à

$$d\mathcal{O}_F(\mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k))) + \mathcal{M}_\alpha \cdot \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma = \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma.$$

Pelo Lema 1.2.5,

$$d\mathcal{O}_F(\mathcal{T}_e(\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k))) = \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma,$$

isto é,

$$\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma = \mathcal{T}_{e,un}^\Gamma(k)(F) = \hat{\mathcal{T}}_{e,un}^\Gamma(k)(F) + \tilde{\Theta}_{(\lambda,\alpha)}^\Gamma(D_\lambda F) + \mathcal{E}_\alpha \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \right\}$$

e portanto, 2. se verifica. □

Lema 1.7.2. (Lema da Redução)

Sejam $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $K \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$ um desdobramento de f com p parâmetros $\delta = (\delta_1 \dots \delta_p)$. Seja

$$\begin{aligned} L : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{p-1}, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, \lambda, \delta_1 \dots \delta_{p-1}) &\mapsto K(x, \lambda, \delta_1 \dots \delta_{p-1}, 0) \end{aligned}$$

um desdobramento com $(p-1)$ -parâmetros de f . Se existir Y , um germe de campo de vetores na origem do $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^p$, da forma

$$Y(x, \lambda, \delta) = \frac{\partial}{\partial \delta_p} + \sum_{j=1}^n X_j(x, \lambda, \delta) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^\ell \Lambda_i(\lambda, \delta) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} + \sum_{s=1}^{p-1} \xi_s(\delta) \frac{\partial}{\partial \delta_s}$$

satisfazendo

1. $X \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$ onde $X = (X_1 \dots X_n)$,
2. $\Lambda \in \tilde{\mathcal{E}}_{(\lambda,\delta)}^\Gamma$ onde $\Lambda = (\Lambda_1 \dots \Lambda_\ell)$

e $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$ tais que

$$-D_{(x,\lambda,\delta)} K \cdot Y = TK, \quad (1.9)$$

então existirá um germe de submersão $C : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ tal que K se fatora através de C^*L .

Prova. A idéia é integrar Y para gerar o germe C junto com o germe de difeomorfismo na fonte e, então, integrar o lado direito de (1.9) para criar uma família parametrizada de campos de vetores lineares no $\mathbb{R}^m$ necessários para mostrar que K se fatora através de C^*L .

A condição (1.9) pode ser expressa como

$$-\frac{\partial K}{\partial \delta_p} = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^\ell \Lambda_i \frac{\partial K}{\partial \lambda_i} + \sum_{s=1}^{p-1} \xi_s \frac{\partial K}{\partial \delta_s} + TK$$

para alguma $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$.

Agora, considere o seguinte sistema de EDOs

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \delta_p &= 1, \\
\frac{d}{dt} x_j &= X_j(x, \lambda, \delta), \quad j = 1 \dots n, \\
\frac{d}{dt} \lambda_i &= \Lambda_i(\lambda, \delta), \quad i = 1 \dots \ell, \\
\frac{d}{dt} \delta_s &= \xi_s(\delta), \quad s = 1 \dots p-1.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Suponha que o fluxo de (1.10) é dado pelo grupo a um parâmetro de germes de difeomorfismos

$$\begin{aligned}
\Psi_t : (\mathbb{R}^{n+\ell+p}, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+\ell+p} \\
(x, \lambda, \delta) &\mapsto (\rho_t(x, \lambda, \delta), \Lambda_t(\lambda, \delta), \Delta_t(\delta), t)
\end{aligned}$$

satisfazendo $\Psi_{\delta_p}(x, \lambda, \delta) = (x, \lambda, \delta)$.

A equação $\frac{d}{dt} \delta_p = 1$ implica que as curvas integrais de (1.10) são transversais ao hiperplano $\delta_p = 0$.

Dado um ponto $P \equiv (x, \lambda, \delta)$ próximo da origem, existe uma curva integral γ_P de (1.10) tal que $\gamma_P(\delta_p) = P$ onde δ_p é a $(n+1+p)$ -ésima componente de P .

Defina uma submersão $\varphi : (\mathbb{R}^{n+\ell+p}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{n+\ell+p-1}$ através da projeção de $P \equiv (x, \lambda, \delta)$ ao longo da curva integral γ_P que passa por ele até o hiperplano $\delta_p = 0$, ou seja,

$$\varphi(x, \lambda, \delta) = (\pi_{(n+\ell+p-1)} \circ \Psi_0)(x, \lambda, \delta) = (\rho_0(x, \lambda, \delta), \Lambda_0(\lambda, \delta), \Delta_0(\delta)).$$

Assim, definimos $\varphi(x, \lambda, \delta) = (\bar{\rho}(x, \lambda, \delta), \bar{\Lambda}(\lambda, \delta), \bar{\Delta}(\delta))$ onde $\bar{\rho}(x, \lambda, \delta) = \rho_0(x, \lambda, \delta)$, $\bar{\Lambda}(\lambda, \delta) = \Lambda_0(\lambda, \delta)$ e $\bar{\Delta}(\delta) = \Delta_0(\delta)$.

φ é suave por propriedades de EDOs. A restrição de φ ao hiperplano $\delta_p = 0$ é a identidade por definição. Em particular, quando $\delta = 0$,

$$\bar{\rho}(x, \lambda, 0) = x, \quad \bar{\Lambda}(\lambda, 0) = \lambda \quad \text{e} \quad \bar{\Delta}^o = 0.$$

A matriz Jacobiana de φ na origem é dada por

$$\begin{pmatrix} (D_x \bar{\rho})^\circ & \vdots & \star & \vdots & \star \\ \dots & & & & \\ 0 & \vdots & (D_\lambda \bar{\Lambda})^\circ & \vdots & \star \\ \dots & & & & \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & (D_\delta \bar{\Delta})^\circ \end{pmatrix}$$

Como $\varphi|_{\delta_{p=0}}$ é a identidade, $\text{rank } (D\varphi)^\circ = n + \ell + p - 1$. Portanto, φ é uma submersão numa vizinhança da origem e segue que

- (i) $\text{rank } (D_\delta \bar{\Delta})^\circ = p - 1$ e assim $\bar{\Delta} : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ é uma submersão,
- (ii) $\text{rank } (D_\lambda \bar{\Lambda})^\circ = \ell$ e assim $\bar{\Lambda}_\delta : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ é um difeomorfismo e $(D_\lambda \bar{\Lambda})^\circ \in \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(\ell)$.

Além disso, usando o argumento de unicidade de soluções de EDOs, a condição de Γ -equivariância $\bar{\Lambda}(\gamma_\ell \lambda, \delta) = \gamma_\ell \bar{\Lambda}(\lambda, \delta), \forall \gamma \in \Gamma$, é verdadeira.

Mais precisamente, seja $\xi(\lambda, \delta) = \gamma_\ell^t \bar{\Lambda}(\gamma_\ell \lambda, \delta)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi(\lambda, \delta) &= \gamma_\ell^t \frac{d}{dt} \bar{\Lambda}(\gamma_\ell \lambda, \delta) = \gamma_\ell^t \Lambda(\bar{\Lambda}(\gamma_\ell \lambda, \delta), \bar{\Delta}(\delta)) \\ &= \Lambda(\gamma_\ell \bar{\Lambda}(\gamma_\ell \lambda, \delta), \bar{\Delta}(\delta)) = \Lambda(\xi(\lambda, \delta), \bar{\Delta}(\delta)) \end{aligned}$$

e

$$\xi(\lambda, 0) = \gamma_\ell^t \bar{\Lambda}(\gamma_\ell \lambda, 0) = \gamma_\ell^t \gamma_\ell \lambda = \lambda.$$

Consequentemente, por unicidade, $\xi(\lambda, \delta) = \bar{\Lambda}(\lambda, \delta)$ estabelecendo a condição de equivariância requerida.

- (iii) Como $\text{rank } (D_x \bar{\rho})^\circ = n$, $\bar{\rho}_{\lambda, \delta} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo e $(D_x \bar{\rho})^\circ \in \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(n)$.

Usando o mesmo método que em (ii), $\bar{\rho}(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda, \delta) = \gamma_n \bar{\rho}(x, \lambda, \delta), \forall \gamma \in \Gamma$.

A seguir integramos o campo de vetores T para obter uma família parametrizada de campos de vetores no $\mathbb{R}^m$.

Para um dado ponto $P \equiv (x, \lambda, \delta)$, seja $\gamma_P(t) = (x(t), \lambda(t), \delta(t))$, uma curva integral de (1.10) tal que $\gamma_P(\delta_P) = P$.

Considere agora o seguinte sistema linear não autônomo

$$\frac{dy}{dt} = -T(x(t), \lambda(t), \delta(t)) y, \text{ para } y \in \mathbb{R}^m, \quad (1.11)$$

$$y^\circ = y_0. \quad (1.12)$$

As soluções de (1.11, 1.12) dependem de y_0 e $\gamma_P(t)$. Mas, para P próximo da origem, como γ_P é sempre transversal ao hiperplano $\{\delta_p = 0\}$, as soluções de (1.11, 1.12) realmente dependem somente de $(x^\circ, \lambda^\circ, \delta^\circ)$ junto com a condição inicial y_0 quando $t = 0$. A solução de (1.11, 1.12) é portanto da forma $y(t) = \hat{Y}(y_0, t; x^\circ, \lambda^\circ, \delta^\circ)$.

Da teoria clássica de EDOs, para t fixado e $(x^\circ, \lambda^\circ, \delta^\circ)$ próximo da origem, a aplicação $y_0 \mapsto y(t)$ é um difeomorfismo local ([25], Corolário 9, pág. 58).

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) &= (D_{(x, \lambda, \delta)} K) \cdot (\dot{x}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{\delta}(t)) = (D_{(x, \lambda, \delta)} K) \cdot Y(x(t), y(t), \delta(t)) \\ &= -T(x(t), \lambda(t), \delta(t)) K(x(t), \lambda(t), \delta(t)). \end{aligned}$$

Como consequência, $K(x(t), \lambda(t), \delta(t))$ satisfaz (1.11), isto é,

$$K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = \hat{Y}(K(x^\circ, \lambda^\circ, \delta^\circ), t; x^\circ, \lambda^\circ, \delta^\circ). \quad (1.13)$$

Como todo ponto $P \equiv (x, y, \delta)$ próximo da origem tem uma curva integral de (1.10) passando através dele no tempo $t = \delta_p$, deduzimos de (1.13) que

$$K(x, \lambda, \delta) = \hat{Y}(K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0), \delta_p; \varphi(x, \lambda, \delta), 0).$$

Seja $E_{x, \lambda, \delta}(y) = \hat{Y}(y, \delta_p; \varphi(x, \lambda, \delta), 0)$. $E_{x, \lambda, \delta}$ é uma família de difeomorfismos locais no $\mathbb{R}^m$ e satisfaz

$$K(x, \lambda, \delta) = E_{x, \lambda, \delta} K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0)$$

$$E_{x, \lambda, 0} = \mathbf{I}_m.$$

Usando a definição de φ ,

$$\begin{aligned} K(x, \lambda, \delta) &= E_{x, \lambda, \delta} (K(\bar{\rho}(x, \lambda, \delta), \bar{\Lambda}(\lambda, \delta), \bar{\Delta}(\delta), 0)) \\ &= E_{x, \lambda, \delta} \bar{\Delta}^* L(\bar{\rho}(x, \lambda, \delta), \bar{\Lambda}(\lambda, \delta), \delta). \end{aligned}$$

Definimos o germe de submersão C como $\bar{\Delta}$.

Por um resultado semelhante ao de Mather ([16], Proposição 1.5, pág. 170) podemos também substituir o difeomorfismo não linear $E_{x, \lambda, \delta}$ por uma matriz $S \in \mathbf{M}_{(x, \lambda, \delta)}^\Gamma$, tal que

$$K(x, \lambda, \delta) = S(x, \lambda, \delta) \bar{C}^* L(\bar{\rho}(x, \lambda, \delta), \bar{\Lambda}(\lambda, \delta), \delta),$$

$$S(x, \lambda, 0) = \mathbf{I}_m.$$

A simetria da matriz S pode ser obtida da simetria de E ou pode ser obtida calculando-se a média sobre D_4 diretamente, ou seja, calculando-se a integral de Haar conveniente já que S está próxima da identidade.

Portanto, K se fatora através de $\bar{C}^*L$ como desejado. $\square$

Observação. Esta prova é baseada na prova do Teorema 2.1 ([16], pág. 238).

Teorema 1.7.3. (O Teorema do Desdobramento)

Sejam $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $F \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$ um desdobramento de f com k parâmetros $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$. As seguintes condições são equivalentes

1. F é versal,
2. $\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}_e^\Gamma(f) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}(\cdot, \cdot, 0) \dots \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}(\cdot, \cdot, 0)\right\}$.

Prova. A prova é baseada em ([16], §7, pág. 233).

(i) 1. implica 2.

Seja $p(x, \lambda) \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ um germe arbitrário e considere o desdobramento a um parâmetro de f dado por

$$H(x, \lambda, t) = f(x, \lambda) + t p(x, \lambda).$$

Por hipótese F é versal e dessa forma H se fatora através de F , ou seja, existem $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$, $X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$, $\Lambda \in \tilde{\Theta}_{(\lambda,t)}^\Gamma$ e $A : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ satisfazendo $T(x, \lambda, 0) = \mathbf{I}_m$, $X(x, \lambda, 0) = x$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ e $H(x, \lambda, t) = T(x, \lambda, t) F(X(x, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t), A(t))$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H(x, \lambda, t) &= p(x, \lambda) \\ &= \left[\frac{\partial T}{\partial t}(x, \lambda, 0) f(x, \lambda) + (D_x f) \frac{\partial X}{\partial t}(x, \lambda, 0) + (D_\lambda f) \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(\lambda, 0) \right] \\ &\quad + \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(x, \lambda, 0) \frac{\partial A_j}{\partial t}(0) \right]. \end{aligned}$$

Como consequência, $p \in \mathcal{T}_e^\Gamma(f) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}(\cdot, \cdot, 0) \dots \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}(\cdot, \cdot, 0)\right\}$ e 2. segue.

(ii) 2. implica 1.

Seja $H \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$ um desdobramento de f com r parâmetros $\beta = (\beta_1 \dots \beta_r)$. Devemos mostrar que H se fatora através de F .

Considere a soma de desdobramentos

$$K(x, \lambda, \alpha, \beta) = F(x, \lambda, \alpha) + H(x, \lambda, \beta) - f(x, \lambda).$$

Obviamente $K \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^\Gamma$ e é um desdobramento com $(k+r)$ parâmetros de f .

Afirmamos que existe uma submersão $A : (\mathbb{R}^{k+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ tal que K se fatora através de A^*F . Concluimos a prova em três etapas.

Etapa 1. Mostramos que a afirmação estabelece 1.

Se for verdadeira, então existirão $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^\Gamma$, $X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^\Gamma$, $\Lambda \in \vec{\Theta}_{(\lambda,\alpha,\beta)}^\Gamma$ tais que $T(x, \lambda, 0) = \mathbf{I}_m$, $X(x, \lambda, 0) = x$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ e

$$K(x, \lambda, \alpha, \beta) = T(x, \lambda, \alpha, \beta) F(X(x, \lambda, \alpha, \beta), \Lambda(\lambda, \alpha, \beta), A(\alpha, \beta)).$$

Fazendo $\alpha = 0$,

$$H(x, \lambda, \beta) = K(x, \lambda, 0, \beta) = T(x, \lambda, 0, \beta) F(X(x, \lambda, 0, \beta), \Lambda(\lambda, 0, \beta), A(0, \beta)).$$

Sejam $S(x, \lambda, \beta) = T(x, \lambda, 0, \beta)$, $\xi(x, \lambda, \beta) = X(x, \lambda, 0, \beta)$, $\tilde{\Lambda}(\lambda, \beta) = \Lambda(\lambda, 0, \beta)$ e $\tilde{A}(\beta) = A(0, \beta)$. Portanto, existem $S \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$, $\xi \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda,\beta)}^\Gamma$, $\tilde{\Lambda} \in \vec{\Theta}_{(\lambda,\beta)}^\Gamma$ e $\tilde{A} : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ satisfazendo $S(x, \lambda, 0) = \mathbf{I}_m$, $\xi(x, \lambda, 0) = x$ e $\tilde{\Lambda}(\lambda, 0) = \lambda$ tais que

$$H = \tilde{A}^*F$$

o que prova que H se fatora através de F .

Etapa 2. Mostramos que A existe por indução em r .

Seja $L : (\mathbb{R}^{n+\ell+k+r-1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$L(x, \lambda, \alpha, \beta_1 \dots \beta_{r-1}) = K(x, \lambda, \alpha, \beta_1 \dots \beta_{r-1}, 0).$$

Por indução, existe uma submersão $B : (\mathbb{R}^{k+r-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ tal que L se fatora através de B^*F .

É suficiente encontrar uma submersão $C : (\mathbb{R}^{k+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k+r-1}, 0)$ tal que K se fatora através de C^*L . O resultado segue pois definindo $A : (\mathbb{R}^{k+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ pela composição de B e C , segue que A é uma submersão e que K se fatora através de A^*F .

Resta provar que existe C satisfazendo a condição desejada.

Etapa 3. Para encontrar C , aplicamos o Lema 1.7.2.

Seja $\delta = (\delta_1 \dots \delta_{k+r})$ onde $\delta_1 = \alpha_1 \dots \delta_k = \alpha_k$, $\delta_{k+1} = \beta_1 \dots \delta_{k+r} = \beta_r$, isto é, $\delta = (\alpha, \beta)$ e $p = k + r$.

Por hipótese,

$$\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}_e^\Gamma(f) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}(\cdot, \cdot, 0) \dots \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}(\cdot, \cdot, 0) \right\}.$$

Pela definição de K , podemos substituir F por K na expressão acima e assim, pelo Lema 1.7.1, isto é equivalente à

$$\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma = \hat{\mathcal{T}}_{e,un}^\Gamma(p)(K) + \tilde{\Theta}_{(\lambda,\delta)}^\Gamma(D_\lambda K) + \mathcal{E}_\alpha \left\{ \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial K}{\partial \alpha_k} \right\}.$$

Além disso, $\frac{\partial K}{\partial \delta_p} = \frac{\partial K}{\partial \beta_r} \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$ e portanto existem $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$, $X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda,\delta)}^\Gamma$ e $\Lambda \in \tilde{\Theta}_{(\lambda,\delta)}^\Gamma$ tais que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial K}{\partial \delta_p}(x, \lambda, \delta) &= T(x, \lambda, \delta) K(x, \lambda, \delta) + \sum_{j=1}^n X_j(x, \lambda, \delta) \frac{\partial K}{\partial x_j}(x, \lambda, \delta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^\ell \Lambda_i(\lambda, \delta) \frac{\partial K}{\partial \lambda_i}(x, \lambda, \delta) + \sum_{s=1}^k \xi_s(\delta) \frac{\partial K}{\partial \alpha_s}(x, \lambda, \delta). \end{aligned}$$

Assumindo $\xi_i^o = 0$, $i > k$, podemos escrever

$$-\frac{\partial K}{\partial \delta_p} = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^\ell \Lambda_i \frac{\partial K}{\partial \lambda_i} + \sum_{s=1}^{p-1} \xi_s \frac{\partial K}{\partial \delta_s} + TK. \quad (1.14)$$

Seja

$$Y(x, \lambda, \delta) = \frac{\partial}{\partial \delta_p} + \sum_{j=1}^n X_j(x, \lambda, \delta) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^\ell \Lambda_i(\lambda, \delta) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} + \sum_{s=1}^{p-1} \xi_s(\delta) \frac{\partial}{\partial \delta_s}.$$

Então $-D_{(x,\lambda,\delta)} K \cdot Y = TK$ por (1.14).

Pelo Lema 1.7.2, existe um germe de submersão $C : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ tal que K se fatora através de C^*L . $\square$

Corolário 1.7.4. Seja $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e seja $W \subset \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ um subespaço vetorial tal que

$$\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}_e^\Gamma(f) \oplus W$$

Se $p_1 \dots p_k$ for uma base para W então

$$G(x, \lambda, \alpha) = g(x, \lambda) + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j(x, \lambda)$$

será um desdobramento miniversal de g .

Prova. Segue diretamente do Teorema 1.7.3. $\square$

Teorema 1.7.5. Dois desdobramentos versais de um germe em $\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ são equivalentes como desdobramentos se e somente se eles tiverem um mesmo número de parâmetros de desdobramento.

Prova. Como aqui nós não requeremos qualquer condição de equivariância nos parâmetros de desdobramento, a prova é análoga a ([16], Teorema 7.4, pág. 241). $\square$

Corolário 1.7.6. Sejam H um desdobramento versal de $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ com parâmetros $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_\ell)$ e G um desdobramento miniversal de g com parâmetros $\beta = (\beta_1 \dots \beta_k)$. Seja $\pi : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^k$ a projeção canônica. Então H e π^*G são equivalentes como desdobramentos.

Prova. É imediata usando o Teorema 1.7.5. $\square$

Baseados neste corolário, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1.7.7. (Unicidade do Desdobramento Miniversal)

Se f e $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ forem dois germes de codimensão finita $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalentes e F e $G \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$, com $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$, forem dois desdobramentos miniversais de f e g , respectivamente, então F e G serão $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -equivalentes. Dizemos que $F(G)$ são desdobramentos *universais*.

Prova. Como f e g são $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalentes existe $(S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ tal que

$$f(x, \lambda) = S(x, \lambda) g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)).$$

Considere agora o desdobramento F' de f dado por

$$F'(x, \lambda, \alpha) = S(x, \lambda) G(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), \alpha). \quad (1.15)$$

Como G é um desdobramento versal de g , pelo Teorema 1.7.3,

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}_e^\Gamma(g) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \alpha_1}(\cdot, \cdot, 0) \dots \frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(\cdot, \cdot, 0) \right\}.$$

Considere o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} H : \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma &\rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ h &\mapsto H(h) = S(h \circ (X, \Lambda)). \end{aligned}$$

Note que $H(g) = f$ e $H(\mathcal{T}_e^\Gamma(g)) = \mathcal{T}_e^\Gamma(f)$. Além disso, para todo $1 \leq i \leq k$,

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha_i}(x, \lambda, 0) = S(x, \lambda) \frac{\partial G}{\partial \alpha_i}(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), 0) = H\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha_i}(x, \lambda, 0)\right)$$

e assim

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}_e^\Gamma(f) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial F'}{\partial \alpha_1}(\cdot, \cdot, 0) \dots \frac{\partial F'}{\partial \alpha_k}(\cdot, \cdot, 0) \right\}.$$

Logo, F' é um desdobramento versal de f e, pelo Teorema 1.7.5, F e F' são $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -equivalentes, ou seja, existe $(S', X', \Lambda', A') \in \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ tal que

$$F(x, \lambda, \alpha) = S'(x, \lambda, \alpha) F'(X'(x, \lambda, \alpha), \Lambda'(x, \alpha), A'(\alpha)). \quad (1.16)$$

Substituindo (1.16) em (1.15) obtemos $(\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{\Lambda}, A') \in \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ tal que F é $\mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(k)$ -equivalente à G . $\square$

1.8 Determinação finita

1.8.1 Jatos Γ -equivariantes

Denotamos por $J_k(n + \ell, m)$ o espaço dos k -jatos na origem do $\mathbb{R}^{n+\ell}$ dos germes de aplicações suaves do $\mathbb{R}^{n+\ell}$ ao $\mathbb{R}^m$. Este espaço é identificado com P_k o qual é o subespaço de $\vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}$ formado por todas as aplicações polinomiais de grau menor ou igual a k e com termo constante nulo.

Para qualquer $f \in \vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}$, $j^k f$ é o polinômio de Taylor de grau k de f calculado em 0.

Considerando a projeção canônica do espaço de germes ao espaço de jatos

$$\begin{aligned} j^k : \vec{\mathcal{E}}_{n+\ell} &\rightarrow J_k(n + \ell, m) \\ f &\mapsto j^k f, \end{aligned}$$

definimos a seguinte ação de Γ em $J_k(n + \ell, m)$:

$$\begin{aligned}\psi_k : \Gamma \times J_k(n + \ell, m) &\rightarrow J_k(n + \ell, m) \\ (\gamma, j^k f) &\mapsto \gamma_m^t j^k f(\gamma_n \times \gamma_\ell).\end{aligned}$$

O espaço dos k -jatos Γ -equivariantes, denotado $J_k^\Gamma(n + \ell, m)$, é dado por

$$J_k^\Gamma(n + \ell, m) = J_k(n + \ell, m) \Big|_{\text{Fix}_{\psi_k}}.$$

Seja P_k^Γ o subespaço dos polinômios em P_k que são Γ -equivariantes. Assim, identificamos $J_k^\Gamma(n + \ell, m)$ com P_k^Γ e a projeção

$$\begin{aligned}j^k : \tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma &\rightarrow J_k^\Gamma(n + \ell, m) \\ f &\mapsto j^k(f) = j^k f\end{aligned}$$

é bem definida, ou seja, $j^k(f) \in J_k^\Gamma(n + \ell, m)$. Para provar essa última afirmação, usamos a expansão de Taylor para escrever $f(x, \lambda) = j^k f(x, \lambda) + f'(x, \lambda)$, onde f' é de ordem maior ou igual a $(k + 1)$.

Comparando

$$f(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) = j^k f(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) + f'(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda)$$

com

$$\gamma_m f(x, \lambda) = \gamma_m j^k f(x, \lambda) + \gamma_m f'(x, \lambda),$$

temos

$$j^k f(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) = \gamma_m j^k f(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma$$

pela unicidade da expansão de Taylor.

1.8.2 A órbita de um k -jato Γ -equivariante

Sejam $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma$ e $F \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, \beta)}^\Gamma$ com $\beta = (\beta_1 \dots \beta_r)$. $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ denota o grupo dos k -jatos de elementos de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ e $J^k \mathcal{K}_{\lambda, un}(r)$ o grupo dos k -jatos de elementos de $\mathcal{K}_{\lambda, un}^\Gamma(r)$, isto é,

$$J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma = \{(j^k T, j^k X, j^k \Lambda) \mid (T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma\}$$

e

$$J^k \mathcal{K}_{\lambda, un}^\Gamma(r) = \{(j^k T, j^k X, j^k \Lambda, j^k \Phi) \mid (T, X, \Lambda, \Phi) \in \mathcal{K}_{\lambda, un}^\Gamma(r)\}.$$

Seja $\mathcal{M}_{n+\ell}^{k+1} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}$ o conjunto de germes de aplicação cujas componentes pertencem a $\mathcal{M}_{n+\ell}^{k+1}$, isto é, são k -chatos em $0 \in \mathbb{R}^{n+\ell}$. Assim,

$$J_k(n+\ell, m) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}}{\mathcal{M}_{n+\ell}^{k+1} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}}.$$

Seja $\Omega_{(x,\lambda)}^{k+1} = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cap \mathcal{M}_{n+\ell}^{k+1} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}$, isto é, o conjunto das aplicações Γ -equivariantes cujas componentes são k -chatas na origem do $\mathbb{R}^{n+\ell}$. Então,

$$J_k^\Gamma(n+\ell, m) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma}{\Omega_{(x,\lambda)}^{k+1}}.$$

A ação de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ induz uma ação natural no quociente de $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ por $J_k^\Gamma(n+\ell, m)$ dada por

$$(j^k T, j^k X, j^k \Lambda) \cdot j^k f = j^k((S, \Lambda, f) \cdot f)$$

Analogamente, definimos a órbita de $J^k \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(r)$ no $J_k^\Gamma(n+\ell+r, m)$ como sendo o espaço dos k -jatos de desdobramentos com r parâmetros de germes em $\vec{\mathcal{E}}_{n+\ell}$.

Como sempre denotamos a órbita de $j^k f$ sob a ação do $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ por $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \cdot j^k f$ e a órbita de $j^k F$ sob a ação de $J^k \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(r)$ por $J^k \mathcal{K}_{\lambda,un}^\Gamma(r) \cdot j^k F$.

Teorema 1.8.2.1. $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ é um grupo de Lie agindo algebricamente em $J_k^\Gamma(n+\ell, m)$ e as órbitas sob essa ação são subvariedades analíticas de $J_k^\Gamma(n+\ell, m)$.

Prova. É uma adaptação equivariante da Prova de Mather e é também uma adaptação da prova do Lema 5.6 ([5], pág. 122). $\square$

Lema 1.8.2.2. Sejam $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $\mathcal{T}_k^\Gamma(f)$ o espaço tangente à órbita $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \cdot j^k f$. Então $\xi \in \mathcal{T}_k^\Gamma(f)$ se e somente se existir uma decomposição $\xi = T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda$ módulo $\Omega_{(x,\lambda)}^{k+1}$, onde $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}$ e $\Lambda \in \vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o}$.

Prova. Seja $t \mapsto (\tilde{T}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\Lambda}_t)$ a curva em $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ passando através do elemento identidade quando $t = 0$. Então o vetor tangente a $J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \cdot j^k f$ é

$$\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} j^k (\tilde{T}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\Lambda}_t) \cdot f = j^k \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\tilde{T}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\Lambda}_t) \cdot f \right).$$

Note que $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\tilde{T}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\Lambda}_t) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ e $\tilde{T}_t(x, \lambda) \in \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(m)$ para (x, λ) numa vizinhança pequena da origem, e assim, $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \tilde{T}_t(x, \lambda)$ pertence a $\mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(m)$. Podemos escrever

$$\tilde{T}_t(x, \lambda) = \mathbf{I}_m + t T(x, \lambda) + \text{termos de ordem alta em } t.$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \tilde{T}_t = T \in \mathbf{M}_{(x, \lambda)}^\Gamma.$$

Analogamente, como $\tilde{X}_0(x, \lambda) = x$ e $\tilde{\Lambda}_0(\lambda) = \lambda$, escrevemos

$$\tilde{X}_t(x, \lambda) = x + t X(x, \lambda) + \text{termos de ordem alta em } t$$

e

$$\tilde{\Lambda}_t(\lambda) = \lambda + t \Lambda(\lambda) + \text{termos de ordem alta em } t.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \tilde{X}_t = X \in \vec{\Theta}_{(x, \lambda)}^{\Gamma, o} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \tilde{\Lambda}_t = \Lambda \in \vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma, o}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi &= j^k \left(\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\tilde{T}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\Lambda}_t) \cdot f \right) \\ &= j^k (T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda) \\ &= T f + (D_x f) X + (D_\lambda f) \Lambda \quad \text{módulo } \Omega_{(x, \lambda)}^{k+1}. \end{aligned}$$

□

1.8.3 Lemas devidos a Damon

Para estabelecer o Teorema de Determinação Finita recordamos dois lemas devidos a Damon. O lema seguinte é o Lema de Mather para sistemas de DA-álgebras ([10], Lema 7.3, pág. 35) escrito em nosso contexto.

Lema 1.8.3.1. Seja $\eta : N \rightarrow M$ um homomorfismo de $\{R_{(x, \lambda, \beta)}\}$ -módulos finitamente gerados e $M_0 \subset M$ um $\{R_{(x, \lambda, \beta)}\}$ -submódulo de $\mathbb{R}$ -codimensão finita igual a c . Então

1. Existe um número ℓ que depende de c e da ação do grupo tal que

$$M_0 \subset \eta(N) + \{(m_{x,\lambda,\beta})^{\ell'}\} M_0$$

implica

$$M_0 \subset \eta(N).$$

2. Se $\dim_{\mathbb{R}} \frac{M}{\eta(N)} = r < \infty$ então existe um número ℓ' que depende de r e da ação do grupo tal que

$$\{(m_{x,\lambda,\beta})^{\ell'}\} M \subset \eta(N).$$

Observação. Um resultado semelhante vale para o sistema de DA-álgebras $\{R_{(x,\lambda)}\}$.

Agora, suponha que M e N sejam módulos finitamente gerados sobre $\{R_{(x,\lambda)}\}$ e $\psi : N \rightarrow M$ um homomorfismo de módulo sobre esse sistemas de anéis. Seja M_β um $\{R_{(x,\lambda,\beta)}\}$ módulo finitamente gerado pelos geradores de M e $\psi_1 : N_\beta \rightarrow M_\beta$ uma extensão de ψ , isto é, fazendo $\beta = 0$, $\psi_1|_M = \psi$.

Lema 1.8.3.2. ([10], Corolário 7.5, pág. 36) Na situação acima existe ℓ' tal que

$$\{(m_{x,\lambda})^{\ell'}\} M \subset \psi(N)$$

implica

$$\{(m_{x,\lambda,\beta})^{\ell'}\} M_\beta \subset \psi_1(N_\beta).$$

1.8.4 Germes finitamente determinados

Um germe $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ é $k\text{-}\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado se para todo germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ com $j^k(g) = j^k(f)$ for $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a f . Um germe é *finitamente* $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado se for $k\text{-}\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado para algum inteiro k .

Obviamente, se f for $k\text{-}\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado então será $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente ao $j^k(f)$.

Recorde de (1.2) e (1.6) que

$$\mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \simeq \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} \oplus \vec{\Theta}_\lambda^{\Gamma,o} \text{ e } d\mathcal{O}_f(\mathcal{T}\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) = \mathcal{T}^\Gamma(f).$$

Considerando a projeção natural $j^k : \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \rightarrow J_k^\Gamma(n + \ell, m)$, segue que $j^k(\mathcal{T}^\Gamma(f)) = \mathcal{T}_k^\Gamma(f)$, pelo Lema 1.8.2.2 e $(\text{Ker } j^k) \cap \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{k+1}$.

Consequentemente,

$$(j^k)^{-1}(\mathcal{T}_k^\Gamma(f)) = \mathcal{T}^\Gamma(f) + \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{k+1}. \quad (1.17)$$

Teorema 1.8.4.1. (Teorema de Determinação Finita)

Dado $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, as seguintes condições são equivalentes:

1. f é finitamente $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado,
2. Para algum inteiro s , $\Omega_{(x,\lambda)}^s \subset \mathcal{T}_e^\Gamma(f)$,
3. Para algum inteiro k , $\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^k \subset \mathcal{T}^\Gamma(f)$,
4. $\text{cod}^\Gamma(f)$ é finita,
5. $\dim_{\mathbf{R}} \frac{\vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma}{\mathcal{T}^\Gamma(f)}$ é finita.

Prova. (i) É óbvio que 2. implica 4. pois $\Omega_{(x,\lambda)}^s$ tem codimensão finita em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

Para mostrarmos que 4. implica 2., aplicamos o Lema 1.8.3.1 com

$$\eta = d\mathcal{O}_f, \quad N = \mathcal{T}_e^\Gamma \text{ e } M = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma.$$

Seja $\{R_{(x,\lambda)}\}$ o sistema de anéis descrito em (1.2) e de (1.6), $d\mathcal{O}_f$ é um homomorfismo de módulos finitamente gerados sobre $\{R_{(x,\lambda)}\}$.

Usando o Lema 1.8.3.1, $\dim_{\mathbf{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma}{\mathcal{T}_e^\Gamma(f)} < \infty$ implica que existe um s tal que $\Omega_{(x,\lambda)}^s \subset \mathcal{T}_e^\Gamma(f)$.

(ii) Analogamente, mostramos que 3. e 5. são equivalentes.

(iii) 2. implica 3. trivialmente pois

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^s \subset \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \mathcal{T}_e^\Gamma(f) \subset \mathcal{T}^\Gamma(f).$$

(iv) Vamos verificar que 3. implica 4. As inclusões

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^k \subset \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \subset \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$$

ocorrem entre espaços de codimensão finita. Portanto, $\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^k$ tem codimensão finita em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

Além disso,

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^k \subset \mathcal{T}^\Gamma(f) \subset \mathcal{T}_e^\Gamma(f)$$

e assim $\mathcal{T}_e^\Gamma(f)$ tem codimensão finita em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

(v) Vamos agora mostrar que 1. e 5. são equivalentes. Primeiro, mostramos que 1. implica 3. e consequentemente 5.

Suponha que f é $r\text{-}\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado. Com ℓ como no Lema 1.8.3.1, seja $b = r + \ell$ e

$$A = \left\{ Z \in J_b^\Gamma(n + \ell, m) \mid Z^o = 0 \text{ e } j^r(Z) = j^r(f) \right\}.$$

Podemos identificar A com o espaço afim

$$j^r(f) + j^b \left(\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{r+1} \right)$$

e portanto,

$$TA = j^b \left(\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{r+1} \right).$$

Por outro lado, como f é $r\text{-}\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado, $A \subset J^k \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \cdot j^k f$. Logo, $TA \subseteq \mathcal{T}_k^\Gamma(f)$. Tomando a imagem inversa sob j^b e usando (1.17) temos

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{r+1} \subset \mathcal{T}^\Gamma(f) + \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{\ell+r+1}.$$

Para obter 3., aplicamos o Lema 1.8.3.1 com

$$\eta = d\mathcal{O}_f, \quad M = \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma, \quad N = \mathcal{T}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \text{ e } M_0 = \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{r+1}.$$

Para completar a prova do teorema resta mostrar que 5. implica 1. Seguimos ([10], Teorema 10.2, pág. 42). Para isso, precisamos:

Proposição 1.8.4.2. Existe um inteiro r tal que se $p \in \Omega_{(x,\lambda)}^r$ e $F_t = f + tp$ com $t \in [0, 1]$, então dado t_1 , para t suficientemente pequeno, F_{t_1} e $F_{(t_1+t)}$ serão $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalentes com os germes de mudança de coordenadas se anulando na origem de $\mathbb{R}^{n+\ell}$. Mais precisamente existirão germes $X \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$, $\Lambda \in \vec{\mathcal{M}}_{(\lambda,t)}^\Gamma$ e $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$ com $X(0,0,t) = 0$ e $\Lambda(0,t) = 0$ tais que

$$F_{(t_1+t)} = T \cdot F_t(X, \Lambda).$$

Essa proposição conclui a prova de que 5. implica 1. Na verdade, como X e Λ se anulam na origem, para cada t , (T_t, X_t, Λ_t) pode ser considerada como um elemento de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$. Pela compacidade e conexidade de $[0, 1]$, $f = F_0$ é $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente à $f + p = F_1$. Portanto, f é $(r-1)$ - $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -determinado. $\square$

Para provar a Proposição 1.8.4.2 precisamos dos seguintes Lemas.

Lema 1.8.4.3. Se $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma}{\mathcal{T}^\Gamma(f)}$ for finita, então existirá um inteiro r tal que se $g \equiv f$ módulo $\Omega_{(x,\lambda)}^r$ então $\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^r \subset \mathcal{T}^\Gamma(g)$.

Prova. Por 3., existe um inteiro k tal que

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^k \subset \mathcal{T}^\Gamma(f).$$

Como $g \equiv f$ módulo $\Omega_{(x,\lambda)}^r$, temos que $d\mathcal{O}_g \equiv d\mathcal{O}_f$ módulo $\Omega_{(x,\lambda)}^r \cdot \mathcal{T}_e^\Gamma$.

Aplicando ambos os membros a $\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$ e recordando que $\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \mathcal{T}_e^\Gamma \subset \mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$, obtemos

$$\mathcal{T}^\Gamma(f) \equiv \mathcal{T}^\Gamma(g) \text{ módulo } \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{r-1}. \quad (1.18)$$

Sejam $\eta = d\mathcal{O}_g$, $N = \mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$, $M = \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $M_0 = \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^k$ and $r = k + \ell + 1$, onde ℓ como no Lema 1.8.3.1. Por (1.18),

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^r \subset \mathcal{T}^\Gamma(g) + \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{r-1} = \mathcal{T}^\Gamma(g) + \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^{k+\ell}.$$

Pelo Lema 1.8.3.1, $\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^r \subset \mathcal{T}^\Gamma(g)$. $\square$

Para $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_s)$, let $\Omega_{(x,\lambda,\alpha)}^r = \mathcal{M}_{(x,\lambda)}^r \cdot \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)} \cap \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha)}^\Gamma$ e $\Omega_{(\lambda,\alpha)}^r = \mathcal{M}_\lambda^r \cdot \vec{\mathcal{E}}_{(\lambda,\alpha)} \cap \vec{\mathcal{E}}_{(\lambda,\alpha)}^\Gamma$. Fixando t_1 na sequência da Proposição 1.8.3.2, veja F_{t_1} como um elemento de $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e $F_{(t_1+t)}$ como seu desdobramento a um parâmetro, isto é, $F_{(t_1+t)} \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$.

Lema 1.8.4.4. Existem germes $\hat{T}_t \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$, $\hat{X}_t \in \Omega_{(x,\lambda,t)}^1$ e $\hat{\Lambda}_t \in \Omega_{(\lambda,t)}^1$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{(t_1+t)} = p = \hat{T}_t F_{(t_1+t)} + (D_x F_{(t_1+t)}) \hat{X}_t + (D_\lambda F_{(t_1+t)}) \hat{\Lambda}_t.$$

Em outras palavras, $p \in d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}}([T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t)$ onde $[T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t$ denota o módulo com os geradores de $T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$ vistos sobre o sistema de anéis $\{\mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{(\lambda,t)}^\Gamma, \mathcal{E}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma\}$ ao invés de $\{\mathcal{E}_\lambda^\Gamma, \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma\}$.

Prova. Temos que $F_{(t_1+t)} - F_{t_1} = t p \in \mathcal{M}_t \cdot \Omega_{(x,\lambda,t)}^r$. Por um lado, isso implica que

$$p = \frac{\partial}{\partial t}(F_{(t_1+t)} - F_{t_1}) \in \Omega_{(x,\lambda,t)}^r.$$

Portanto, para mostrar o Lema 1.8.4.4 é suficiente provar que

$$\Omega_{(x,\lambda,t)}^r \subset d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}}([T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t). \quad (1.19)$$

Por outro lado, considerando $(F_1 \times \mathbf{I})(x, \lambda, t) = F_1(x, \lambda)$ temos

$$d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}} = d\mathcal{O}_{(F_1 \times \mathbf{I})} \text{ módulo } \Omega_{(x,\lambda,t)}^r. \quad (1.20)$$

Na notação do Lema 1.8.3.2, sejam $N = T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$, $M = \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $M_t = \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$ e $N_t = [T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t$.

A aplicação $\psi = d\mathcal{O}_{F_{t_1}} : N \rightarrow M$ admite para extensão $\psi_1 = d\mathcal{O}_{(F_{t_1} \times \mathbf{I})} : N_t \rightarrow M_t$.

Note que $F_{t_1} - f = t_1 p \in \Omega_{(x,\lambda)}^r$ e assim pelo Lema 1.8.4.3,

$$\mathcal{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \cdot \Omega_{(x,\lambda)}^r \subset d\mathcal{O}_{F_{t_1}}(T^\Gamma(F_{t_1})).$$

Logo, as hipóteses do Lema 1.8.3.2 estão satisfeitas e portanto

$$\Omega_{(x,\lambda,t)}^r \subset \psi_1(N_t) = d\mathcal{O}_{(F_{t_1} \times \mathbf{I})}([T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t).$$

Por (1.20),

$$\Omega_{(x,\lambda,t)}^r \subset d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}}([T^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t).$$

□

Prova da Proposição 1.8.4.2. As hipóteses do Lema da Redução, Lema 1.7.2, são satisfeitas pelo Lema 1.8.4.4 e assim existe uma submersão $C : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \{0\}$ tal que $F_{(t_1+t)}$ se fatora através de $C^* F_{t_1} = F_{t_1}$. Além disso, do fato de que $\hat{X}_t \in \Omega_{(x,\lambda,t)}^1$ e $\hat{\Lambda}_t \in \Omega_{(\lambda,t)}^1$, ou seja, que eles se anulam na origem, podemos concluir da prova do Lema da Redução que a mudança de coordenadas (X_t, Λ_t) preserva a origem. □

1.9 O espaço tangente restrito

Dizemos que dois germes $f, g \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ são *fortemente* $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -*equivalentes* se eles forem $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalentes com $\Lambda(\lambda) = \lambda$. Portanto, o grupo que induz a $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência forte é

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) = \{(T, X) \mid (T, X, \mathbf{I}_\ell) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma\}.$$

O espaço tangente a $\mathcal{R}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$ no seu elemento identidade é chamado *espaço tangente restrito* e denotado $\mathcal{RT}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)$. É definido por

$$\mathcal{RT}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) = \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \delta_t \mid \delta_t \in \mathcal{R}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma), \delta_0 = \mathbf{1} \right\}$$

e assim existe uma identificação

$$\mathcal{RT}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \simeq \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \oplus \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}.$$

A aplicação órbita associada a $f \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_f : \mathcal{R}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) &\rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ (T, X) &\mapsto (T, X) \cdot f. \end{aligned}$$

O espaço tangente a órbita $\mathcal{R}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \cdot f$ é

$$\mathcal{RT}^\Gamma(f) = d\mathcal{O}_f(\mathcal{RT}(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)) = \{Tf + (D_x f)X \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma, X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}\}.$$

O Teorema seguinte fornece uma condição necessária para que um germe $p \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ esteja no conjunto dos termos de ordem alta de f , os quais são termos que podem ser removidos da expansão de Taylor de f . Ele generaliza o Teorema 1.3 ([16], pág. 168) e parcialmente o Teorema 2.2 ([22]).

Teorema 1.9.1. Dada $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, seja p um germe qualquer em $\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

1. Se $\mathcal{RT}^\Gamma(f + tp) = \mathcal{RT}^\Gamma(f)$ para todo $t \in [0, 1]$ então $f + tp$ é fortemente $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente à f para todo $t \in [0, 1]$.

2. Se $\text{cod}^\Gamma(f)$ for finita e $\mathcal{T}^\Gamma(f + tp) = \mathcal{T}^\Gamma(f)$ para todo $t \in [0, 1]$ então $f + tp$ será $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente à f para todo $t \in [0, 1]$.
3. Se $\text{cod}^\Gamma(f)$ for finita e $\mathcal{T}_e^\Gamma(f + tp) = \mathcal{T}_e^\Gamma(f)$ para todo $t \in [0, 1]$ então $f + tp$ será $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a f para todo $t \in [0, 1]$.

Prova. 1. É semelhante à prova do Teorema 1.3 ([16], pág. 172).

2. Seja $F_t(x, \lambda) = F(x, \lambda, t) = f(x, \lambda) + tp(x, \lambda)$, $t \in [0, 1]$. Para um dado t_1 e t suficientemente pequenos afirmamos que existem germes $T_t \in \mathbf{M}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma$, $X_t \in \Omega_{(x, \lambda, t)}^1$ e $\Lambda_t \in \Omega_{(\lambda, t)}^1$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{(t_1+t)} = p = T_t F_{(t_1+t)} + (D_x F_{(t_1+t)}) X_t + (D_\lambda F_{(t_1+t)}) \Lambda_t. \quad (1.21)$$

Seguindo nossa notação anterior, (1.21) simplesmente significa que $p \in d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}}([\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t)$.

Como na prova do Teorema 1.8.4.2, se (1.21) for verdadeira, então $F_{(t_1+t)}$ e F_{t_1} serão $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalentes com germes de mudança de coordenadas se anulando na origem de $\mathbb{R}^{n+\ell}$. Então, 2. segue de um argumento de compacidade e conexidade.

Para provar a afirmação, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.9.2. Como f tem codimensão finita e $\mathcal{T}^\Gamma(f + tp) = \mathcal{T}^\Gamma(f)$ para todo $t \in [0, 1]$ então

$$d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}}([\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t) = d\mathcal{O}_f([\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t)$$

para todo $t_1 \in [0, 1]$.

Prova. Primeiro observamos que $[\vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma]_t = \vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma$, $[\vec{\mathcal{M}}_{(x, \lambda)}^\Gamma]_t = \vec{\mathcal{M}}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma$,

$$[\mathbf{M}_{(x, \lambda)}^\Gamma]_t = \mathbf{M}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma, [\vec{\mathcal{M}}_\lambda^\Gamma]_t = \vec{\mathcal{M}}_{(\lambda, t)}^\Gamma \text{ e } [\mathbb{R}]_t = \mathcal{E}_t.$$

Uma combinação dessas igualdades fornece

$$[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)]_t = \mathbf{M}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma \oplus \vec{\mathcal{M}}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma \oplus \vec{\mathcal{M}}_{(\lambda, t)}^\Gamma.$$

Para ver, por exemplo, que $[\vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma]_t = \vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma$, considere a inclusão natural

$$i : [\vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^\Gamma]_t \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, t)}^\Gamma$$

$$f_t(x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda, t).$$

Queremos provar que i é sobrejetora. Note que i é um homomorfismo de módulo finitamente gerado sobre o sistema de DA-álgebras $\{\mathcal{E}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma, \mathcal{E}_{(\lambda,t)}^\Gamma, \mathcal{E}_t\}$. Por ([10], Corolário 6.16, pág. 33), $\{(\mathcal{E}_t, \mathcal{M}_t), (\mathcal{E}_{(\lambda,t)}^\Gamma, \mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_{(\lambda,t)}^\Gamma), (\mathcal{E}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma, \mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma)\}$ é adequado. Também,

$$i\left(\left[\mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma\right]_t\right) + \mathcal{M}_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$$

e assim pelo Lema 1.2.5,

$$i\left(\left[\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma\right]_t\right) = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma.$$

As provas das outras igualdades são semelhantes a essa.

Agora, como $\text{cod}^\Gamma(f)$ é finita, para algum inteiro q , temos $\{p_i\}_{i=1}^q \subset \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ tais que

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \mathcal{T}^\Gamma(f) + \mathbb{R}\{p_1 \dots p_q\}. \quad (1.22)$$

Calculando $[\]_t$ de ambos os lados de (1.22) e usando as observações preliminares, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma = d\mathcal{O}_f\left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)\right]_t\right) + \mathcal{E}_t\{p_1 \dots p_q\}. \quad (1.23)$$

Afirmamos que

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma = d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}}\left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)\right]_t\right) + \mathcal{E}_t\{p_1 \dots p_q\}. \quad (1.24)$$

O Lema segue então de (1.23) e (1.24).

Para provar a afirmação (1.24), definimos

$$\Psi : \left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)\right]_t \oplus (\mathcal{E}_t)^q \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma$$

$$(T, X, \Lambda, Y_1 \dots Y_q) \mapsto T F_{(t_1+t)} + (D_x F_{(t_1+t)}) X + (D_\lambda F_{(t_1+t)}) \Lambda + \sum_{i=1}^q Y_i p_i.$$

Note que a imagem de Ψ é igual a expressão do lado direito de (1.24). Assim, é suficiente provar que Ψ é sobrejetora. Ψ é um homomorfismo de módulo finitamente gerado sobre sistema de DA-álgebras $\{\mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{(\lambda,t)}^\Gamma, \mathcal{E}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma\}$. Pelo conceito de adequado, para mostrar que Ψ é sobrejetora é suficiente provar que

$$\text{Im } \Psi \oplus \mathcal{M}_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma. \quad (1.25)$$

Como $F_{(t_1+t)} = f + t_1 p + t p$, a imagem de Ψ pode ser decomposta como

$$d\mathcal{O}_{(f+t_1 p)}\left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma)\right]_t\right) + \mathbb{R}\{p_1 \dots p_q\} + \mathcal{M}_t \cdot \{p_1 \dots p_q\}.$$

Assim, (1.25) pode ser reescrito como

$$d\mathcal{O}_{(f+t_1 p)} \left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \right]_t \right) + \mathbb{R}\{p_1 \dots p_q\} = \mathcal{M}_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma.$$

Pelo Teorema de Preparação de Malgrange, isto é equivalente à

$$d\mathcal{O}_{(f+t_1 p)} \left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \right]_t \right) + \mathcal{E}_t\{p_1 \dots p_q\} = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,t)}^\Gamma \quad (1.26)$$

Por hipótese,

$$d\mathcal{O}_{(f+t_1 p)} \left(\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \right) = \mathcal{T}^\Gamma(f + t_1 p) = \mathcal{T}^\Gamma(f).$$

Por (1.22),

$$d\mathcal{O}_{(f+t_1 p)} \left(\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \right) + \mathbb{R}\{p_1 \dots p_q\} = \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma.$$

Calculando $[]_t$ de ambos os lado, obtemos (1.26) e consequentemente (1.25) é verificado.

□

Resta provar (1.21).

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{(t_1+t)} = p \in d\mathcal{O}_f \left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda) \right]_t \right)$$

e assim pelo Lema 1.9.2.,

$$p \in d\mathcal{O}_{F_{(t_1+t)}} \left(\left[\mathcal{T}^\Gamma(\mathcal{K}_\lambda^\Gamma) \right]_t \right).$$

Isto conclui a prova de 2.

3. Usando o mesmo argumento acima, dado qualquer t_1 podemos mostrar que para t suficientemente pequeno, $F_{(t_1+t)}$ e F_{t_1} são $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalentes. Embora estejamos trabalhando com o espaço tangente estendido, podemos sempre encontrar germes de mudança de coordenadas que se anulam nas respectivas origens, estabelecendo a $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência requerida. Note que pelo Lema 1.7.2, não temos essa propriedade a menos que a origem seja um ponto singular do campo de vetores que estamos integrando, mas como f tem Γ -codimensão finita, um argumento padrão da Teoria de Singularidades, análogo ao de ([22], Proposição 2.11) garante que essas equivalências preservam a origem. □

1.10 Problema do reconhecimento

O *problema do reconhecimento* trata de estabelecer quando um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ é $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a uma forma normal dada.

Resolver um problema do reconhecimento particular significa caracterizar explicitamente a classe de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência em termos de um número finito de igualdades e desigualdades polinomiais a serem satisfeitas pelos coeficientes de Taylor dos elementos da classe.

1.10.1 Submódulos intrínsecos e termos de ordem alta

Seja $\Phi = (T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ e considere a aplicação

$$f \mapsto \Phi(f) = T \cdot f \circ (X, \Lambda).$$

Definição. Um submódulo $\mathcal{J} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ é *intrínseco* se $\Phi(f) \in \mathcal{J}$ para toda $f \in \mathcal{J}$ e toda $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência Φ .

Definição. Seja $V \subset \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$. A *parte intrínseca* de V é definida por

$$\text{Intr}V = \sum \{ \text{submódulos intrínsecos de } \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \text{ contidos in } V \}.$$

Pode também ser caracterizado como o maior submódulo intrínseco contido em V .

Submódulos intrínsecos $\mathcal{J}$ tem a propriedade de que: se $h \in \mathcal{J}$ então $\mathcal{T}^\Gamma(h) \subset \mathcal{J}$. (cf. [16], pág. 203).

1.10.2 Termos de ordem alta

Seja $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$. Dizemos que $p \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ é de *ordem alta* com respeito a f se $g + p$ for $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a f para toda g que for $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a f . Por definição, tais termos não podem pertencer ao conjunto solução do problema de reconhecimento de f . Denotamos por $\mathbf{P}(f)$ o conjunto de todos os termos de ordem alta de f , ou seja,

$$\mathbf{P}(f) = \{ p \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \mid g + p \sim f, \forall g \sim f \} \quad (1.27)$$

onde $\sim$ denota $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência.

Proposição 1.10.2.1. Para cada $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, o conjunto $\mathbf{P}(f)$ é um submódulo intrínseco de $\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

Prova. ([16], Proposição 7.5, pág. 205). □

1.10.3 O subgrupo das $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalências unipotentes

Considere a seguinte projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \times \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \times \vec{\mathcal{M}}_\lambda^\Gamma &\rightarrow \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(m) \times \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(n) \times \mathring{\mathcal{L}}_\Gamma(\ell) \\ (T, X, \Lambda) &\mapsto (T^\circ, (D_x X)^\circ, (D_\lambda \Lambda)^\circ). \end{aligned}$$

π é um epimorfismo de grupo e seu núcleo, dado por

$$\mathcal{U}_\lambda^\Gamma = \{(T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \mid T^\circ = \mathbf{I}_m, (D_x X)^\circ = \mathbf{I}_n, (D_\lambda \Lambda)^\circ = \mathbf{I}_\ell\},$$

é um subgrupo normal de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ formado de difeomorfismos unipotentes e é chamado de *subgrupo das Γ -equivalências unipotentes*.

O espaço tangente à $\mathcal{U}_\lambda^\Gamma$ no seu elemento identidade é definido por

$$\mathcal{T}(\mathcal{U}_\lambda^\Gamma) = \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{U}_t \mid \mathcal{U}_t \in \mathcal{U}_\lambda^\Gamma \text{ e } \mathcal{U}_0 = \mathbf{1} \right\}$$

onde $\mathcal{U}_t(x, \lambda) = (\tilde{T}_t(x, \lambda), \tilde{X}_t(x, \lambda), \tilde{\Lambda}_t(\lambda))$ satisfaz

$$\begin{aligned} \tilde{T}_t^\circ &= \mathbf{I}_m, \quad \tilde{T}_0(x, \lambda) = \mathbf{I}_m, \\ \tilde{X}_0(x, \lambda) &= x, \quad (D_x \tilde{X}_t)^\circ = \mathbf{I}_n, \quad \tilde{X}_t^\circ = 0, \\ \tilde{\Lambda}_0(\lambda) &= \lambda, \quad (D_\lambda \tilde{\Lambda}_t)^\circ = \mathbf{I}_\ell, \quad \tilde{\Lambda}_t^\circ = 0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Segue que

- (i) $\tilde{T}_t(x, \lambda) = \mathbf{I}_m + t T(x, \lambda) + o(t)$ onde $T(x, \lambda) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{T}_t(x, \lambda)$,
- (ii) $\tilde{X}_t(x, \lambda) = x + t X(x, \lambda) + o(t)$ onde $X(x, \lambda) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{X}_t(x, \lambda)$,
- (iii) $\tilde{\Lambda}_t(\lambda) = \lambda + t \Lambda(\lambda) + o(t)$ onde $\Lambda(\lambda) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\Lambda}_t(\lambda)$.

Usando as condições (1.28), temos que $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $T^\circ = 0$, $X \in \vec{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, $(D_x X)^\circ = 0$, $\Lambda \in \vec{\mathcal{M}}_\lambda^\Gamma$ e $(D_\lambda \Lambda)^\circ = 0$.

Portanto,

$$\mathcal{T}(\mathcal{U}_\lambda^\Gamma) = \{(T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \mid T^\circ = 0, (D_x X)^\circ = 0, (D_\lambda \Lambda)^\circ = 0\}.$$

Para $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, o Γ -espaço tangente unipotente a f , denotado $\mathcal{TU}^\Gamma(f)$, é definido de um modo análogo ao descrito em (1.5) e portanto é dado por

$$\mathcal{TU}^\Gamma(f) = \{Tf + (D_x f)X + (D_\lambda f)\Lambda \mid (T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^\Gamma \text{ com } T^o = 0, (D_x X)^o = 0, (D_\lambda \Lambda)^o = 0\}. \quad (1.29)$$

O Γ -espaço tangente restrito unipotente à f , denotado $\mathcal{RTU}^\Gamma(f)$, é dado por

$$\mathcal{RTU}^\Gamma(f) = \{Tf + (D_x f)X \mid (T, X) \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \times \tilde{\mathcal{M}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \text{ com } T^o = 0 \text{ e } (D_x X)^o = 0\} \quad (1.30)$$

de acordo com as equivalências fortes unipotentes (cf. section 1.9).

Como uma consequência do Teorema 1.17 ([22], pág. 108) temos a seguinte proposição:

Proposição 1.10.3.1. Se $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ for de Γ -codimensão finita, então

$$\mathbf{P}(f) \supset \text{Intr } \mathcal{TU}^\Gamma(f).$$

Corolário 1.10.3.2. Seja $p \in \text{Intr } \mathcal{TU}^\Gamma(f)$. Então $f + p$ é $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a f .

Observação. Dada uma forma normal g , seja $h \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ satisfazendo certas condições de não-degenericidade, as quais são definidas por um número finito de desigualdades envolvendo um número finito de derivadas de h na origem. Para provar que h é $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalente a g é suficiente mostrar que

$$\Phi(h - p) - p' = g \quad (1.31)$$

onde Φ é uma $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência, $p, p' \in \text{Intr } \mathcal{TU}^\Gamma(g)$ com p sendo termos da expansão de Taylor de h e p' termos da expansão de Taylor de $\Phi(h - p)$.

Prova da Observação. De (1.31), segue que

$$h - p \sim g + p'$$

e pelo Corolário 1.10.3.2, $h - p \sim g$. Usando a definição de $\mathbf{P}(g)$ e a Proposição 1.10.3.1,

$$h = (h - p) + p \sim g.$$

□

Capítulo 2

O problema D_4

Um *problema de bifurcação* Γ é um germe $f \in \mathcal{E}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ tal que $f^o = 0$ e $(D_x f)^o = 0$ com (x, λ) denotando as variáveis-padrão e os parâmetros de bifurcação.

Daqui para frente, κ denota a reflexão

$$\begin{aligned}\kappa : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z}\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\kappa : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y)\end{aligned}$$

e μ denota a ação em $\mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto (e^{i\frac{\pi}{2}} \kappa) \cdot z = i \bar{z}.\end{aligned}$$

Neste capítulo o nosso objetivo é resolver o problema do reconhecimento para *problemas de bifurcação* D_4 onde o grupo diedral $D_4 = \langle \hat{\kappa}, \hat{\mu} \rangle$ age sobre $(z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, por

$$\begin{aligned}\hat{\kappa} \cdot (z, \lambda_1, \lambda_2) &= (\kappa z, \lambda_1, \lambda_2) = (\bar{z}, \lambda_1, \lambda_2), \\ \hat{\mu} \cdot (z, \lambda_1, \lambda_2) &= (\mu z, \kappa(\lambda_1, \lambda_2)) = (i\bar{z}, \lambda_1, -\lambda_2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Esta ação é motivada por um problema em Mecânica. Considere uma placa quadrada, não espessa e não isotrópica e dois pares de forças F_1 e F_2 agindo sobre a placa, horizontalmente e verticalmente, como mostra a Fig. 2.1

(Fig. 2.1)

Construindo um modelo matemático para essa situação obtemos uma descrição onde duas coordenadas x_1, x_2 representam modos de envergadura diferentes e os dois parâmetros F_1, F_2 correspondem aos valores das forças. Para estudar fenômenos, como o da envergadura da placa podemos explorar o fato de que o modelo apresenta a seguinte simetria: a situação física não muda sob as transformações:

$$(x_1, x_2, F_1, F_2) \rightarrow (x_1, -x_2, F_1, F_2),$$

$$(x_1, x_2, F_1, F_2) \rightarrow (x_2, x_1, F_2, F_1).$$

Essas duas transformações geram uma ação do grupo D_4 . Introduzindo novas variáveis

$$\lambda_1 = F_1 + F_2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = F_1 - F_2$$

essa ação aparece como em (2.1).

Alguns resultados preliminares foram estabelecidos por Martin Peters em sua Tese de Doutorado [18].

2.1 Preliminares

Usando a mesma notação do capítulo 1, seja

$$\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{D_4} = \{h : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid h(\hat{\kappa} \cdot (z, \lambda)) = h(z, \lambda) \text{ e } h(\hat{\mu} \cdot (z, \lambda)) = h(z, \lambda)\},$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4} = \{f : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\hat{\kappa} \cdot (z, \lambda)) = \kappa f(z, \lambda) \text{ e } f(\hat{\mu} \cdot (z, \lambda)) = \mu f(z, \lambda)\},$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{(z,\lambda)}^{D_4} = \{f \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4} \mid f^o = 0\},$$

$$\mathbf{M}_{(z,\lambda)}^{D_4} = \{T : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow GL_2(\mathbb{R}) \mid T(\hat{\kappa} \cdot (z, \lambda)) \kappa = \kappa T(z, \lambda) \\ \text{e } T(\hat{\mu} \cdot (z, \lambda)) \mu = \mu T(z, \lambda)\},$$

$$\mathcal{E}_\lambda^{D_4} = \{\eta : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta(\kappa \lambda) = \eta(\lambda)\},$$

$$\vec{\mathcal{E}}_\lambda^{D_4} = \{\Lambda : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C} \mid \Lambda(\kappa \lambda) = \kappa f(\lambda)\}.$$

Denotamos por N , δ , Δ , u_4 as seguintes expressões:

$$N = z\bar{z}, \delta = -\frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2), \Delta = \delta^2, u_4 = \lambda_2^2.$$

Seja $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ com $u_1 = N$, $u_2 = \Delta$, $u_3 = \lambda_1$, $u_4 = \lambda_2^2$ e $u_5 = \delta\lambda_2$. Note que temos uma única relação: $u_5^2 = u_2 u_4$.

Proposição 2.1.1. 1. $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{D_4} = \bar{u}^* \mathcal{E}_u$, isto é, para todo $h \in \mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ existe $p \in \mathcal{E}_u$ tal que $h(z, \lambda) = p(\bar{u})$.

2. $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ é gerado por $z, \delta\bar{z}, \lambda_2\bar{z}$ como um $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ -módulo.

3. $\mathbf{M}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ é o $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ -módulo gerado pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} S_1(z, \lambda) w &= w, & S_4(z, \lambda) w &= i\omega\bar{w}, \\ S_2(z, \lambda) w &= \lambda_2\bar{w}, & S_5(z, \lambda) w &= -i\lambda_2\omega w, \\ S_3(z, \lambda) w &= \delta\bar{w}, & S_6(z, \lambda) w &= -i\delta\omega w, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \omega = \frac{i}{4}(\bar{z}^2 - z^2).$$

Prova. Veja ([18], pág. 126-130). □

É mais conveniente trabalhar com módulos livres e por isso, daqui para frente, consideraremos $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ onde como anteriormente $u_1 = N$, $u_2 = \Delta$, $u_3 = \lambda_1$ e $u_4 = \lambda_2^2$.

Proposição 2.1.2. $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ é gerado livremente por $z, \delta\bar{z}, \lambda_2\bar{z}, \delta\lambda_2 z$ como um $\mathcal{E}_u$ -módulo.

Prova. Veja ([18], pág. 131). □

Proposição 2.1.3. $\mathbf{M}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4}$ é o $\mathcal{E}_v$ -módulo gerado livremente pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\hat{S}_1(z, \lambda) w &= w, & \hat{S}_5(z, \lambda) w &= i\omega\bar{w}, \\ \hat{S}_2(z, \lambda) w &= \lambda_2\bar{w}, & \hat{S}_6(z, \lambda) w &= -i\lambda_2\omega w, \\ \hat{S}_3(z, \lambda) w &= \delta\bar{w}, & \hat{S}_7(z, \lambda) w &= -i\delta\omega w, \\ \hat{S}_4(z, \lambda) w &= \delta\lambda_2 w, & \hat{S}_8(z, \lambda) w &= i\delta\lambda_2\omega\bar{w}.\end{aligned}$$

Prova. Veja ([18], pág. 133). □

Observação. As provas das Proposições 2.1.1. a 2.1.3. podem também ser vistas no Apêndice, fazendo $\alpha = 0$.

Proposição 2.1.4. Seja $\bar{v} = (\lambda_1, u_4)$.

1. $\mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4} = \bar{v}^* \mathcal{E}_v$, isto é, para todo $\eta \in \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ existe $\xi \in \mathcal{E}_v$ tal que $\eta(\lambda) = \xi(\lambda_1, u_4)$.
2. $\mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ é gerado livremente por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

como um $\mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -módulo.

Prova. Veja ([18], pág. 131). □

2.2 $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -equivalência

O grupo de contato $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ é

$$\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4} = \{(T, X, \Lambda) \in \mathbf{M}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4} \times \vec{\mathcal{M}}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4} \times \vec{\mathcal{M}}_\lambda^{\mathbf{D}_4} \mid T^\circ, (D_z X)^\circ \text{ e } (D_\lambda \Lambda)^\circ \in \mathring{\mathcal{L}}_{\mathbf{D}_4}(2)\}.$$

Observe que como $n = m$, $\vec{\Theta}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4^\circ} = \vec{\mathcal{M}}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4}$.

Dizemos que dois problemas de bifurcação $\mathbf{D}_4$ f, g são $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -*equivalentes* se existir $(T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ tal que $g(z, \lambda) = T(z, \lambda) f(X(z, \lambda), \Lambda(\lambda))$.

2.3 Espaços tangentes

Da Proposição 2.1.2., $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathbb{D}_4}$ pode ser escrita como

$$f(z, \lambda) = p(u)z + q(u)\delta\bar{z} + r(u)\lambda_2\bar{z} + s(u)\delta\lambda_2z$$

onde $u = (N, \Delta, \lambda_1, u_4)$ e identificamos f com $[p, q, r, s]$.

O $\mathbb{D}_4$ -espaço tangente estendido à $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathbb{D}_4}$, definido no Capítulo 1, é

$$\mathcal{T}_e^{\mathbb{D}_4}(f) = \mathbf{M}_{(z,\lambda)}^{\mathbb{D}_4} f + (D_z f) \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathbb{D}_4} + (D_\lambda f) \vec{\mathcal{E}}_\lambda^{\mathbb{D}_4}.$$

Proposição 2.3.1. $\mathcal{T}_e^{\mathbb{D}_4}(f) = \mathcal{E}_u < g_1 \dots g_{12} > + \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < g_{13}, g_{14} >$ onde

$$g_1 = [p, q, r, s].$$

$$g_2 = [u_4 r, u_4 s, p, q].$$

$$g_3 = [\Delta q, p, \Delta s, r].$$

$$g_4 = [Np - \Delta q, p - Nq, -Nr + \Delta s, -r + Ns].$$

$$g_5 = [\Delta p - N\Delta q, Np - \Delta q, N\Delta s - \Delta r, \Delta s - Nr].$$

$$g_6 = [-Nu_4 r + \Delta u_4 s, -u_4 r + Nu_4 s, Np - \Delta q, p - Nq].$$

$$g_7 = [\Delta u_4 s, u_4 r, \Delta q, p].$$

$$g_8 = [-\Delta u_4 r + N\Delta u_4 s, -Nu_4 r + \Delta u_4 s, \Delta p - N\Delta q, Np - \Delta q].$$

$$g_9 = [2Np_N + 4\Delta p_\Delta + p, 2Nq_N + 4\Delta q_\Delta + 3q, \\ 2Nr_N + 4\Delta r_\Delta + r, 2Ns_N + 4\Delta s_\Delta + 3s].$$

$$g_{10} = [-2\Delta p_N - 4N\Delta p_\Delta + \Delta q, -2\Delta q_N - 4N\Delta q_\Delta - 2Nq + p, \\ -2\Delta r_N - 4N\Delta r_\Delta + \Delta s, -2\Delta s_N - 4N\Delta s_\Delta - 2Ns + r].$$

$$g_{11} = [-2\Delta u_4 s_N - 4N\Delta u_4 s_\Delta - 2Nu_4 s + u_4 r, -2u_4 r_N - 4Nu_4 r_\Delta + u_4 s, \\ -2\Delta q_N - 4N\Delta q_\Delta - 2Nq + p, -2p_N - 4Np_\Delta + q].$$

$$g_{12} = [2N\Delta u_4 s_N + 4\Delta^2 u_4 s_\Delta + 3\Delta u_4 s, 2Nu_4 r_N + 4\Delta u_4 r_\Delta + u_4 r, \\ 2N\Delta q_N + 4\Delta^2 q_\Delta + 3\Delta q, 2Np_N + 4\Delta p_\Delta + p].$$

$$g_{13} = [p_{\lambda_1}, q_{\lambda_1}, r_{\lambda_1}, s_{\lambda_1}].$$

$$g_{14} = [2u_4 p_{u_4}, 2u_4 q_{u_4}, 2u_4 r_{u_4} + r, 2u_4 s_{u_4} + s].$$

Prova. Os geradores $g_1 \dots g_8$ são obtidos por $g_i = \hat{S}_i[p, q, r, s]$, $1 \leq i \leq 8$, onde $\hat{S}_i$ são os geradores livres de $\vec{\mathbf{M}}_{(z, \lambda)}^{D_4}$ dados na Proposição 2.1.3.

Os geradores $g_9 \dots g_{12}$ surgem de $(D_z f) X_j$, $1 \leq j \leq 4$, onde X_j são geradores livres de $\vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{D_4}$ da Proposição 2.1.2 e

$$g_{13} = (D_\lambda f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_{14} = (D_\lambda f) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

O D_4 -espaço tangente unipotente à $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{D_4}$, definido no Capítulo 1, é

$$\mathcal{TU}^{D_4}(f) = \{Tf + (D_z f)X + (D_\lambda f)\Lambda \mid (T, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{D_4}, \\ T^\circ = 0, (D_z X)^\circ = 0, (D_\lambda \Lambda)^\circ = 0\}.$$

Proposição 2.3.2.

$$\mathcal{TU}^{D_4}(f) = \mathcal{E}_u < Ng_1, \Delta g_1, \lambda_1 g_1, u_4 g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, \\ Ng_9, \Delta g_9, \lambda_1 g_9, u_4 g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12} > \\ + \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < \lambda_1^2 g_{13}, u_4 g_{13}, \lambda_1 g_{14}, u_4 g_{14} >$$

com g_i , $1 \leq i \leq 14$, como definidos na Proposição 2.3.1.

Prova. É imediato usando a definição do espaço tangente unipotente à f . $\square$

Proposição 2.3.3. $\mathcal{T}_e^{D_4}(f) = \mathcal{TU}^{D_4}(f) + \mathbb{R}\{g_1, g_9, g_{13}, \lambda_1 g_{13}, g_{14}\}$.

Prova. Segue das Proposições 2.3.1 e 2.3.2. $\square$

O D_4 -espaço tangente restrito unipotente f , definido no Capítulo 1, é

$$\mathcal{RTU}^{D_4}(f) = \mathbf{M}_{(z, \lambda)}^{D_4} f + (D_z f) \vec{\mathcal{M}}_{(z, \lambda)}^{D_4}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{RTU}^{D_4}(f) = \mathcal{E}_u < Ng_1, \Delta g_1, \lambda_1 g_1, u_4 g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, \\ Ng_9, \Delta g_9, \lambda_1 g_9, u_4 g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12} > \quad (2.2)$$

e

$$\mathcal{TU}^{D_4}(f) = \mathcal{RTU}^{D_4}(f) + \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < \lambda_1^2 g_{13}, u_4 g_{13}, \lambda_1 g_{14}, u_4 g_{14} >. \quad (2.3)$$

A D_4 -codimensão de $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{D_4}$ é dada por $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{D_4}}{\mathcal{T}_e^{D_4}(f)}$ e denotada $\text{cod}^{D_4}(f)$.

Definimos a D_4 -codimensão topológica de um problema de bifurcação D_4 como sendo sua D_4 -codimensão menos o número de parâmetros modais.

2.4 Mudança de coordenadas

Seja $e = (T, X, \Lambda)$ uma $\mathcal{K}_\lambda^{\text{D}_4}$ -equivalência onde

$$\begin{aligned} X &= [a, b, c, d]; \quad a, b, c, d \in \mathcal{E}_u \text{ e } a^o > 0, \\ \Lambda &= (\Lambda_1, \lambda_2 \Lambda_2); \quad \Lambda_1 \in \mathcal{M}_\lambda^{\text{D}_4}, (\Lambda_1)_{\lambda_1}^o > 0 \text{ e } \Lambda_2 \in \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4}, \\ T &= \sum_{i=1}^8 A_i \hat{S}_i; \quad A_i \in \mathcal{E}_u \text{ e } A_1^o > 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para simplificar, definimos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 &= a^2 N - 2ab\Delta + b^2 \Delta N + c^2 N u_4 - 2cd\Delta u_4 + d^2 N \Delta u_4, \\ \tilde{N}_2 &= -2ac + 2adN + 2bcN - 2bd\Delta, \\ D_1 &= a^2 - 2abN + b^2 \Delta + c^2 u_4 - 2cdN u_4 + d^2 \Delta u_4, \\ D_2 &= -2acN + 2ad\Delta + 2bc\Delta - 2bdN\Delta, \\ \Delta_1 &= D_1^2, \quad \tilde{\Delta}_1 = \Delta \Delta_1 + u_4 \Delta_3, \\ \Delta_2 &= D_1 D_2, \quad \tilde{\Delta}_2 = 2 \Delta_2, \\ \Delta_3 &= D_2^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Usando (2.5),

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= N \circ X = \tilde{N}_1 + \delta \lambda_2 \tilde{N}_2, \\ \tilde{\Delta} &= \Delta \circ X = \tilde{\Delta}_1 + \delta \lambda_2 \tilde{\Delta}_2, \\ \tilde{\lambda}_1 &= \lambda_1 \circ \Lambda = \Lambda_1, \\ \tilde{u}_4 &= u_4 \circ \Lambda = u_4 \Lambda_2^2, \\ \tilde{\delta} &= \delta \circ X = D_1 \delta + D_2 \lambda_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para $p, q, r, s \in \mathcal{E}_u$, definimos

$$\tilde{p} = p(\tilde{N}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4), \quad \tilde{q} = q(\tilde{N}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4), \quad \tilde{r} = r(\tilde{N}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) \text{ e } \tilde{s} = s(\tilde{N}, \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4).$$

Seja $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{\text{D}_4}$ dada por $f = [p, q, r, s]$. Novamente para simplificar, fazemos a mudança de coordenadas em duas etapas: na primeira, $(I, X, \Lambda) \cdot f = f'$ e na segunda, $(T, I, I) \cdot f' = f''$, obtendo assim o resultado final.

Segue que

(i) $f' = (I, X, \Lambda) \cdot f = [p', q', r', s']$ onde

$$\begin{aligned} p' &= a\hat{p} + D_1\Delta b\hat{q} + D_2u_4c\hat{q} + \Lambda_2u_4c\hat{r} + D_1\Lambda_2\Delta u_4d\hat{s} + D_2\Lambda_2u_4a\hat{s}, \\ q' &= b\hat{p} + D_1a\hat{q} + D_2u_4d\hat{q} + \Lambda_2u_4d\hat{r} + D_2\Lambda_2u_4b\hat{s} + D_1\Lambda_2u_4c\hat{s}, \\ r' &= c\hat{p} + D_1\Delta d\hat{q} + D_2a\hat{q} + \Lambda_2a\hat{r} + D_1\Lambda_2\Delta b\hat{s} + D_2\Lambda_2u_4c\hat{s}, \\ s' &= d\hat{p} + D_1c\hat{q} + D_2b\hat{q} + \Lambda_2b\hat{r} + D_1\Lambda_2a\hat{s} + D_2\Lambda_2u_4d\hat{s}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

(ii) $f'' = (T, I, I) \cdot f' = [p'', q'', r'', s'']$ onde

$$\begin{aligned} p'' &= (A_1 + A_4N + A_5\Delta)p' + (A_3 - A_4 - A_5N)\Delta q' + (A_2 - A_6N - A_8\Delta)u_4r' \\ &\quad + (A_6 + A_7 + A_8N)\Delta u_4s', \\ q'' &= (A_3 + A_4 + A_5N)p' + (A_1 - A_4N - A_5\Delta)q' + (A_7 - A_6 - A_8N)u_4r' \\ &\quad + (A_2 + A_6N + A_8\Delta)u_4s', \\ r'' &= (A_2 + A_6N + A_8\Delta)p' + (A_7 - A_6 - A_8N)\Delta q' + (A_1 - A_4N - A_5\Delta)r' \\ &\quad + (A_3 + A_4 + A_5N)\Delta s', \\ s'' &= (A_6 + A_7 + A_8N)p' + (A_2 - A_6N - A_8\Delta)q' + (A_3 - A_4 - A_5N)r' \\ &\quad + (A_1 + A_4N + A_5\Delta)s'. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Recorde que $\bar{u} = (u, u_5)$ onde $u = (N, \Delta, \lambda_1, u_4)$ e $u_5 = \delta\lambda_2$. Usando a relação $u_5^2 = \Delta u_4$ e o Teorema de Taylor com parâmetros ([15], pág. 77), podemos escrever

$$p(\bar{u}) = p_1(u) + \delta\lambda_2 p_2(u).$$

Lema 2.4.1. Sejam $p \in \mathcal{E}_u$ e X, Λ como em (2.4). Seja $\tilde{p} = p \circ (X, \Lambda)$. Então existem germes $p_1, p_2 \in \mathcal{E}_u$ tais que

$$\tilde{p}(u) = p(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) + \delta\lambda_2 p_1(u) + \Delta u_4 p_2(u).$$

Prova. ([18], pág. 146). □

Seja $f = [p, q, r, s]$. Do Lema 2.4.1, podemos escrever

$$\tilde{p}(u) = p \circ (X, \Lambda) = \tilde{p}_1(u) + \delta\lambda_2 \tilde{p}_2(u)$$

onde

$$\hat{p}_1(u) = p(\hat{N}_1, \hat{\Delta}_1, \hat{\lambda}_1, \hat{u}_4) + \Delta u_4 p_2(u) \quad \text{e} \quad \hat{p}_2(u) = p_1(u).$$

Analogamente,

$$\tilde{q} = q \circ (X, \Lambda) = \tilde{q}_1 + \delta\lambda_2 \tilde{q}_2,$$

$$\tilde{r} = r \circ (X, \Lambda) = \tilde{r}_1 + \delta\lambda_2 \tilde{r}_2,$$

$$\tilde{s} = s \circ (X, \Lambda) = \tilde{s}_1 + \delta\lambda_2 \tilde{s}_2.$$

Usando essa decomposição, escrevemos as expressões em (2.7) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f' &= (I, X, \Lambda) \cdot f = f \circ (X, \Lambda) = [p', q', r', s'] \quad \text{onde} \\ p' &= a\tilde{p}_1 + d\Delta u_4 \tilde{p}_2 + D_1 \Delta b \tilde{q}_1 + D_2 c u_4 \tilde{q}_1 + D_2 u_4 \Delta b \tilde{q}_2 \\ &\quad + \Delta u_4 D_1 c \tilde{q}_2 + u_4 \Lambda_2 c \tilde{r}_1 + \Delta u_4 \Lambda_2 b \tilde{r}_2 + u_4 D_2 \Lambda_2 a \tilde{s}_1 \\ &\quad + u_4 \Delta \Lambda_2 D_1 d \tilde{s}_1 + D_2 u_4^2 \Delta \Lambda_2 d \tilde{s}_2 + \Lambda_2 \Delta u_4 D_1 a \tilde{s}_2, \\ q' &= b\tilde{p}_1 + u_4 c \tilde{p}_2 + D_1 a \tilde{q}_1 + D_2 u_4 d \tilde{q}_1 + D_2 u_4 a \tilde{q}_2 + \Delta u_4 D_1 d \tilde{q}_2 \\ &\quad + u_4 \Lambda_2 d \tilde{r}_1 + u_4 \Lambda_2 a \tilde{r}_2 + u_4 \Lambda_2 D_2 b \tilde{s}_1 + u_4 \Lambda_2 D_1 c \tilde{s}_1 \\ &\quad + \Lambda_2 \Delta u_4 D_1 b \tilde{s}_2 + D_2 u_4^2 \Lambda_2 c \tilde{s}_2, \\ r' &= c\tilde{p}_1 + \Delta b \tilde{p}_2 + D_2 a \tilde{q}_1 + D_1 \Delta d \tilde{q}_1 + \Delta D_1 a \tilde{q}_2 + D_2 u_4 \Delta d \tilde{q}_2 \\ &\quad + \Lambda_2 a \tilde{r}_1 + u_4 \Delta \Lambda_2 d \tilde{r}_2 + \Lambda_2 D_1 \Delta b \tilde{s}_1 + u_4 \Lambda_2 D_2 c \tilde{s}_1 + D_2 \Delta u_4 \Lambda_2 b \tilde{s}_2 \\ &\quad + \Lambda_2 \Delta u_4 D_1 c \tilde{s}_2, \\ s' &= d\tilde{p}_1 + a\tilde{p}_2 + D_2 b \tilde{q}_1 + D_1 c \tilde{q}_1 + \Delta D_1 b \tilde{q}_2 + D_2 u_4 c \tilde{q}_2 + \Lambda_2 b \tilde{r}_1 \\ &\quad + u_4 \Lambda_2 c \tilde{r}_2 + \Lambda_2 D_1 a \tilde{s}_1 + u_4 \Lambda_2 D_2 d \tilde{s}_1 + u_4 D_2 \Lambda_2 a \tilde{s}_2 + \Lambda_2 \Delta u_4 D_1 d \tilde{s}_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.5 Ideais e submódulos intrínsecos

Recorde que um submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ é um submódulo que é invariante sob a ação do grupo das $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalências e um ideal em $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ é dito intrínseco se for invariante sob a ação do grupo de mudança de coordenadas:

$$(z, \lambda) \mapsto (X(z, \lambda), \Lambda(\lambda))$$

onde X e Λ satisfazem (2.4).

Recorde ainda que $(\vec{\mathcal{M}}_{(z,\lambda)}^{D_4})^k$ é intrínseco para todo $k \geq 1$. Além disso, segue de (2.6) que somas e produtos de ideais intrínsecos $\langle \lambda_1, u_4 \rangle$ são intrínsecos.

Na proposição a seguir consideramos a decomposição do Lema 2.4.1.

Proposição 2.5.1. Seja $\mathcal{J} = [J_1, J_2, J_3, J_4]$ um submódulo de codimensão finita de $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ e $h = [p, q, r, s] \in \mathcal{J}$ com $p, q, r, s \in \mathcal{E}_u$. Se as seguintes condições

1. $p(\tilde{u}) \in J_1, q(\tilde{u}) \in J_2, r(\tilde{u}) \in J_3, s(\tilde{u}) \in J_4$ com $\tilde{u} = (\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4)$ e $p_1(u) \in J_4$,
2. $\langle \Delta, u_4 \rangle \subset J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq J_4$,

forem satisfeitas então $\mathcal{J}$ é um submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$.

Prova. Seja $e = (T, X, \Lambda)$ uma $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência.

Primeiro, verificamos que $h' = (I, X, \Lambda) \cdot h \in \mathcal{J}$. Seja $h' = [p', q', r', s']$. Usando (2.9), Lema 2.4.1. e as hipóteses, segue que $p' \in J_1, q' \in J_2, r' \in J_3, s' \in J_4$ e assim $h' \in \mathcal{J}$. Seja $h'' = (T, I, I) \cdot h'$ com $h' \in \mathcal{J}$ e $h'' = [p'', q'', r'', s'']$.

É imediato que $h'' \in \mathcal{J}$ usando (2.8) e as hipóteses.

Portanto, $\mathcal{J}$ é um submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ pois $e \cdot h \in \mathcal{J}$. □

Observação 2.5.2. A Proposição 2.5.1. estabelece condições suficientes para um submódulo finito $\mathcal{J} = [J_1, J_2, J_3, J_4]$ de $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ ser intrínseco, considerando relações particulares entre os ideais $J_i, 1 \leq i \leq 4$. A maior dificuldade em trabalhar com ideais e submódulos intrínsecos é determiná-los quando existem simetrias nas variáveis-padrão e nos parâmetros de bifurcação como nesse contexto. A verificação será feita caso-a-caso usando a definição como segue.

Sejam $e = (T, X, \Lambda)$ uma $\mathcal{K}_\lambda^{\text{D}_4}$ -equivalência e $h = [p, q, r, s] \in \mathcal{J} = [J_1, J_2, J_3, J_4]$.

Podemos escrever $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ com $h_1 = [p, 0, 0, 0]$, $h_2 = [0, q, 0, 0]$, $h_3 = [0, 0, r, 0]$ e $h_4 = [0, 0, 0, s]$.

Pelo Lema 2.4.1.,

(i) $h_1 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{p}(u) [a, b, c, d]$ com

$$\tilde{p}(u) = p(\tilde{u}) + \delta\lambda_2 p_1(u) + \Delta u_4 p_2(u),$$

(ii) $h_2 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{q}(u) [b\Delta D_1 + cu_4 D_2, aD_1 + du_4 D_2, d\Delta D_1 + aD_2, cD_1 + bD_2]$,

(iii) $h_3 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{r}(u) [u_4 c\Lambda_2, u_4 d\Lambda_2, a\Lambda_2, b\Lambda_2]$,

(iv) $h_4 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{s}(u) [D_1\Lambda_2\Delta u_4 d + D_2\Lambda_2 u_4 a, D_1\Lambda_2 u_4 c + D_2\Lambda_2 u_4 b, D_1\Lambda_2\Delta b + D_2\Lambda_2 u_4 c, D_1\Lambda_2 a + D_2\Lambda_2 u_4 d]$,

onde decompomos $\tilde{q}(u), \tilde{r}(u), \tilde{s}(u)$ da mesma forma que em (i) e usamos que

$$\delta\lambda_2 [p, q, r, s] = [\Delta u_4 s, u_4 r, \Delta q, p].$$

Primeiro mostramos que $h' = (I, X, \Lambda) \cdot h \in \mathcal{J}$. Para isso, verificamos a relação $h_i \circ (X, \Lambda) \in J_i$, $1 \leq i \leq 4$. Depois disso, usando (2.8) verificamos se $h'' = (T, I, I) \cdot h' \in \mathcal{J}$, para estabelecer que $e \cdot h \in \mathcal{J}$ e assim, que $\mathcal{J}$ é intrínscio. $\square$

2.6 A forma genérica normal

Teorema 2.6.1. Seja $f = [mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0]$ onde $\epsilon_o^2 = \epsilon_5^2 = 1$ e $m \neq \pm 1, 0$. Então f tem D_4 -codimensão 1 e todo problema de bifurcação D_4 $h = [p, q, r, s]$ que satisfizer $p^\circ = 0$, $p_N^\circ \neq 0$, $p_N^\circ \neq \pm q^\circ$, $p_{\lambda_1}^\circ \neq 0$ e $r^\circ \neq 0$ será $\mathcal{K}_\lambda^{\text{D}_4}$ -equivalente à f com os coeficientes ϵ_o, ϵ_5 e m dados por $\epsilon_o = \text{sg } p_{\lambda_1}^\circ$, $\epsilon_5 = \text{sg } q^\circ$ e $m = \frac{p_N^\circ}{|q^\circ|}$.

A prova do Teorema é consequência dos seguintes lemas:

Lema 2.6.2. Seja $f = [mN + \mathcal{E}_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0]$ como definido acima. Então o D_4 -espaço tangente unipotente é dado por

$$\mathcal{TU}^{D_4}(f) = [\mathcal{E}_u < N^2, N\lambda_1, \lambda_1^2, \Delta, u_4 >, \mathcal{M}_u, \mathcal{M}_u, \mathcal{E}_u].$$

Prova. De (2.2), um simples cálculo mostra que

$$\mathcal{RTU}^{D_4}(f) + < \lambda_1, u_4 > \vec{\mathcal{E}}_u = [\mathcal{E}_{N\Delta} < N^2, \Delta >, \mathcal{M}_{N\Delta}, \mathcal{M}_{N\Delta}, \mathcal{E}_{N\Delta}]$$

desde que $m \neq \pm 1, 0$.

Segue que

$$\frac{\vec{\mathcal{E}}_u}{\mathcal{RTU}^{D_4}(f) + < \lambda_1, u_4 > \vec{\mathcal{E}}_u}$$

é gerado por $[N, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]$ e $[0, 0, 1, 0]$ como um espaço vetorial real.

Seja $R = [< N^2, N\lambda_1, \lambda_1^2, \Delta, u_4 >, \mathcal{M}_u, \mathcal{M}_u, \mathcal{E}_u]$. Mostraremos que $R = \mathcal{TU}^{D_4}(f)$.

(i) $\mathcal{TU}^{D_4}(f) \subset R$.

Pelo Teorema de Preparação de Malgrange, $\frac{\vec{\mathcal{E}}_u}{\mathcal{RTU}^{D_4}(f)}$ é gerado por $[N, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]$ e $[0, 0, 1, 0]$ como um $\mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)}$ -módulo, e assim $\phi \in R$ pode ser representada como $\phi = \phi_1 [N, 0, 0, 0] + \phi_2 [1, 0, 0, 0] + \phi_3 [0, 1, 0, 0] + \phi_4 [0, 0, 1, 0] + \tilde{\phi}$ onde $\phi_i \in \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)}$, $1 \leq i \leq 4$ e $\tilde{\phi} \in \mathcal{RTU}^{D_4}(f)$.

Como $\mathcal{RTU}^{D_4}(f) \subset R$, isto implica que, $\phi_1 [N, 0, 0, 0] + \phi_2 [1, 0, 0, 0] + \phi_3 [0, 1, 0, 0] + \phi_4 [0, 0, 1, 0] \in R$ e portanto $\phi_1, \phi_3, \phi_4 \in \mathcal{M}_{(\lambda_1, u_4)}$, e $\phi_2 \in \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < \lambda_1^2, u_4 > .$

Logo, $\frac{R}{\mathcal{RTU}^{D_4}(f)}$ é gerado por

$$\begin{aligned} &[N\lambda_1, 0, 0, 0], [Nu_4, 0, 0, 0], [\lambda_1^2, 0, 0, 0], [u_4, 0, 0, 0], \\ &[0, \lambda_1, 0, 0], [0, u_4, 0, 0], [0, 0, \lambda_1, 0], [0, 0, u_4, 0] \end{aligned} \quad (2.10)$$

como um $\mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)}$ -módulo.

De (2.3),

$$\mathcal{TU}^{D_4}(f) = \mathcal{RTU}^{D_4}(f) + \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < [\lambda_1^2, 0, 0, 0], [u_4, 0, 0, 0], [0, 0, \lambda_1, 0], [0, 0, u_4, 0] >, \quad (2.11)$$

mostrando que $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) \subset R$.

(ii) $R \subset \mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)$.

Etapla 1. Considere o seguinte conjunto de geradores obtido de $\mathcal{RTU}^{\mathcal{D}_4}(f)$ módulo

$$\mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < [\lambda_1^2, 0, 0, 0], [u_4, 0, 0, 0], [0, 0, \lambda_1, 0], [0, 0, u_4, 0] > \text{ e com } m \neq \pm 1, 0 :$$

$$h'_1 = [mN^2 + \epsilon_o N \lambda_1, \epsilon_5 N, N, 0],$$

$$h'_2 = [mN\Delta + \epsilon_o \Delta \lambda_1, \epsilon_5 \Delta, \Delta, 0],$$

$$h'_3 = [mN\lambda_1, \epsilon_5 \lambda_1, 0, 0],$$

$$h'_4 = [mNu_4, \epsilon_5 u_4, 0, 0],$$

$$h'_5 = [0, 0, mN, \epsilon_5],$$

$$h'_6 = [\epsilon_5 \Delta, mN + \epsilon_o \lambda_1, 0, 1],$$

$$h'_7 = [0, (m - \epsilon_5)N + \epsilon_o \lambda_1, -N, 0],$$

$$h'_8 = [(m - \epsilon_5)N\Delta + \epsilon_o \Delta \lambda_1, mN^2 + \epsilon_o N \lambda_1 - \epsilon_5 \Delta, -\Delta, -N],$$

$$h'_9 = [-Nu_4, -u_4, mN^2 + \epsilon_o N \lambda_1 - \epsilon_5 \Delta, (m - \epsilon_5)N + \epsilon_o \lambda_1],$$

$$h'_{10} = [0, u_4, \epsilon_5 \Delta, mN + \epsilon_o \lambda_1],$$

$$h'_{11} = [-\Delta u_4, -Nu_4, (m - \epsilon_5)N\Delta + \epsilon_o \Delta \lambda_1, mN^2 + \epsilon_o N \lambda_1 - \epsilon_5 \Delta],$$

$$h'_{12} = [\epsilon_o N \lambda_1, 0, N, 0],$$

$$h'_{13} = [\epsilon_o \Delta \lambda_1, 0, \Delta, 0],$$

$$h'_{14} = [m\Delta, \epsilon_5 N, 0, 0],$$

$$h'_{15} = [0, 0, \epsilon_5 N, m],$$

$$h'_{16} = [0, 0, \epsilon_5 \Delta, mN].$$

Etapla 2. Sejam I o $\mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)}$ -módulo gerado por $\{h'_1 \dots h'_{16}, \Delta h'_{12}, \Delta h'_{15}, Nh'_6, Nh'_{14}\}$ e S o $\mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)}$ -módulo gerado por

$$\begin{aligned} & \{[N^2, 0, 0, 0], [N\lambda_1, 0, 0, 0], [N\Delta, 0, 0, 0], [\Delta, 0, 0, 0], [Nu_4, 0, 0, 0], [0, N, 0, 0], \\ & [0, \Delta, 0, 0], [0, \lambda_1, 0, 0], [0, N^2, 0, 0], [0, u_4, 0, 0], [0, 0, N, 0], [0, 0, N^2, 0], [0, 0, \Delta, 0], \\ & [0, 0, N\Delta, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, N], [0, 0, 0, N^2], [0, 0, 0, \Delta]\}. \end{aligned}$$

É imediato que $I \subset S$ e um longo cálculo mostra que

$$I + \mathcal{M}_{\lambda, u_4} S = S.$$

Pelo Lema de Nakayama, $S \subset I$ e portanto $I = S$.

De (2.10) e (2.11),

$$\frac{R}{\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)} = \mathcal{E}_{(\lambda_1, u_4)} < [N\lambda_1, 0, 0, 0], [Nu_4, 0, 0, 0], [0, \lambda_1, 0, 0], [0, u_4, 0, 0].$$

Portanto,

$$\frac{R}{\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)} \subset I \subset \mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f), \text{ isto é, } R \subset \mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)$$

e, de (i) e (ii),

$$\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) = R = [\mathcal{E}_u < N^2, N\lambda_1, \lambda_1^2, \Delta, u_4 >, \mathcal{M}_u, \mathcal{M}_u, \mathcal{E}_u].$$

□

Lema 2.6.3. $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) = [\mathcal{E}_u < N^2, N\lambda_1, \lambda_1^2, \Delta, u_4 >, \mathcal{M}_u, \mathcal{M}_u, \mathcal{E}_u]$ é um submódulo intrínseco de $\tilde{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{\mathcal{D}_4}$.

Prova. Segue direto da Proposição 2.5.1. □

Prova do Teorema 2.6.1.

Pelo Lema 2.6.2.,

$$\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) = [\mathcal{E}_u < N^2, N\lambda_1, \lambda_1^2, \Delta, u_4 >, \mathcal{M}_u, \mathcal{M}_u, \mathcal{E}_u]$$

e, pela Proposição 2.3.3.,

$$\mathcal{T}_e^{\mathcal{D}_4}(f) = \mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) + \mathbb{R} \{g_1, g_9, g_{13}, \lambda_1 g_{13}, g_{14}\}$$

onde

$$g_1 = [mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0],$$

$$g_9 = [3mN + \epsilon_o \lambda_1, 3\epsilon_5, 1, 0],$$

$$g_{13} = [\epsilon_o, 0, 0, 0],$$

$$g_{14} = [0, 0, 1, 0].$$

Logo,

$$\mathcal{T}_e^{\mathcal{D}_4}(f) = \mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) + \mathbb{R} \{m[N, 0, 0, 0] + \epsilon_5[0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0], [\lambda_1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]\},$$

e assim, $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathcal{D}_4} = \mathcal{T}_e^{\mathcal{D}_4}(f) + \mathbb{R}\{[N, 0, 0, 0]\}$.

Portanto, f tem $\mathcal{D}_4$ -codimensão 1 e codimensão topológica 0, pois m é um parâmetro modal.

Do Lema 2.6.3 e Proposição 1.10.3.1,

$$\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) = \text{Intr } \mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f) \subset \mathbf{P}(f).$$

Seguindo o método clássico descrito no Capítulo 1 (pág. 42), fazemos mudanças de coordenadas usando as fórmulas (2.8) e (2.9) módulo $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)$ o qual está contido no conjunto dos termos de ordem alta de f . Para $h = [p, q, r, s] \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathcal{D}_4}$, seja $\hat{h} = h$ módulo termos em $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)$. Então,

$$\hat{h} = [p_N^\circ N + p_{\lambda_1}^\circ \lambda_1, q^\circ, r^\circ, 0].$$

Sejam $h' = (I, X, \Lambda) \cdot \hat{h} = [p', q', r', s']$ e $h'' = (T, I, I) \cdot h' = [p'', q'', r'', s'']$.

Usando (2.8) e trabalhando módulo termos em $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)$, obtemos

$$p_N'' = A_{10} p_N',$$

$$p_{\lambda_1}'' = A_{10} p_{\lambda_1}',$$

$$q_o'' = A_{10} q_o',$$

$$r_o'' = A_{10} r_o'.$$

Usando (2.9) e novamente trabalhando módulo termos em $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(f)$, segue que

$$p_N'' = A_{10} a_o^3 p_N^\circ,$$

$$p_{\lambda_1}'' = A_{10} a_o \Lambda_{11} p_{\lambda_1}^\circ,$$

$$q_o'' = A_{10} a_o^3 q_o^\circ,$$

$$r_o'' = A_{10} \Lambda_{20} a_o r_o^\circ.$$

Fazendo

$$A_{10} = \frac{1}{a_o^3 |q^\circ|}, \quad \Lambda_{11} = \frac{1}{A_{10} a_o |p_{\lambda_1}^\circ|} \quad \text{e} \quad \Lambda_{20} = \frac{1}{A_{10} a_o r_o^\circ}, \quad \text{obtemos}$$

$$p''_N = m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \quad p''_{\lambda_1} = \epsilon_o, \quad \epsilon_o = sg \, p_{\lambda_1}^o, \quad q''_o = \epsilon_5, \quad \epsilon_5 = sg \, q^o \quad \text{e} \quad r''_o = 1.$$

Logo,

$$(T, X, \Lambda) \cdot h \text{ módulo } \mathcal{TU}^{D_4}(f) \text{ é equivalente à } [mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0].$$

Portanto, todos os problemas de bifurcação D_4 , $h = [p, q, r, s]$, satisfazendo $p^o = 0$, $p_N^o \neq 0$, $p_N^o \neq \pm q^o$, $p_{\lambda_1}^o \neq 0$ e $r^o \neq 0$ são equivalentes à $f = [mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0]$ com

$$m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \quad \epsilon_o = sg \, p_{\lambda_1}^o \quad \text{e} \quad \epsilon_5 = sg \, q^o.$$

□

2.7 Pré-forma normal

Nesta secção apresentamos alguns resultados preliminares para obter uma pré-forma normal para problemas de bifurcação D_4 , $f = [p, q, r, s]$, quando $q^o \neq 0$.

Denotamos por $\mathcal{C}_\lambda^{D_4}$ o subgrupo de $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ dado por

$$\mathcal{C}_\lambda^{D_4} = \{(T, \mathbf{I}, \mathbf{I}) \mid (T, \mathbf{I}, \mathbf{I}) \in \mathcal{K}_\lambda^{D_4}\}.$$

O $\mathcal{C}_\lambda^{D_4}$ -espaço tangente restrito e o $\mathcal{C}_\lambda^{D_4}$ -espaço tangente restrito unipotente à f , denotado, respectivamente, por $\mathcal{RT}^c(f)$ e $\mathcal{RTU}^c(f)$ são

$$\mathcal{RT}^c(f) = \{Tf \mid T \in \mathbf{M}_{(z, \lambda)}^{D_4}\} = \mathcal{E}_u < f, T_2 f \dots T_8 f >$$

e

$$\mathcal{RTU}^c(f) = \{Tf \mid T \in \mathbf{M}_{(z, \lambda)}^{D_4} \text{ com } T^o = 0\} = \mathcal{E}_u < \mathcal{M}_{(z, \lambda)}^{D_4} f, T_2 f \dots T_8 f >$$

onde $T_1 = \mathbf{I}_2, T_2 \dots T_8$ são as matrizes reais associadas às aplicações lineares $\hat{S}_i$, $1 \leq i \leq 8$, definidas na Proposição 2.1.3.

Especificamente,

$$\mathcal{RT}^c(f) = \mathcal{E}_u < g_1, g_2 \dots g_8 >$$

e

$$\mathcal{RTU}^c(f) = \mathcal{E}_u < Ng_1, \Delta g_1, \lambda_1 g_1, u_4 g_1, g_2 \dots g_8 >$$

onde

$$\begin{aligned}
g_1 &= [p, q, r, s], \\
g_2 &= [u_4 r, u_4 s, p, q], \\
g_3 &= [\Delta q, p, \Delta s, r], \\
g_4 &= [Np - \Delta q, p - Nq, -Nr + \Delta s, -r + Ns], \\
g_5 &= [\Delta p - N\Delta q, Np - \Delta q, N\Delta s - \Delta r, \Delta s - Nr], \\
g_6 &= [-Nu_4 r + \Delta u_4 s, -u_4 r + Nu_4 s, Np - \Delta q, p - Nq], \\
g_7 &= [\Delta u_4 s, u_4 r, \Delta q, p], \\
g_8 &= [-\Delta u_4 r + N\Delta u_4 s, -Nu_4 r + \Delta u_4 s, \Delta p - N\Delta q, Np - \Delta q].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A Proposição seguinte é a versão para a $\mathcal{C}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -equivalência do Teorema 1.3 ([16], pág. 168).

Proposição 2.7.1. Seja $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4}$ um problema de bifurcação e p um germe qualquer em $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4}$. Suponha que

$$\mathcal{RT}^c(f + tp) = \mathcal{RT}^c(f)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Então $f + tp$ é $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -equivalente à f para todo $t \in [0, 1]$.

Prova. A prova é semelhante à prova do Teorema 1.3 mencionado acima e está feita com detalhes em ([16], §2*, pág. 172). A idéia básica é provar que o argumento da Proposição 2.7.1. é verdadeiro numa vizinhança de $t = \bar{t}$, para todo $\bar{t} \in [0, 1]$. O resultado segue de um argumento de compacidade e conexidade. $\square$

Proposição 2.7.2. Sejam f um problema de bifurcação $\mathbf{D}_4$ e $p \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\mathbf{D}_4}$.

Se $p \in \mathcal{RTU}^c(f)$ então $\mathcal{RT}^c(f + tp) = \mathcal{RT}^c(f)$, para todo $t \in [0, 1]$.

Prova. Se $p \in \mathcal{RTU}^c(f)$ então $p(z, \lambda) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(u) u_i f + \sum_{j=2}^8 \beta_j(u) T_j f$ com $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{E}_u$. Recorde que $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ onde $u_1 = N, u_2 = \Delta, u_3 = \lambda_1$, e $u_4 = \lambda_2^2$.

Os geradores de $\mathcal{RT}^c(f + tp)$ são somas dos geradores de $\mathcal{RT}^c(f)$ com os geradores

de $t \mathcal{RT}^c(p)$. As inclusões $\mathcal{RT}^c(p) \subset \mathcal{RT}^c(f) + \mathcal{M}_{(z,\lambda)}^{D_4} \mathcal{RT}^c(f)$ e $\mathcal{RT}^c(f + tp) \subset \mathcal{RT}^c(f)$ são imediatas.

Pelo Lema de Nakayama, $\mathcal{RT}^c(f) \subset \mathcal{RT}^c(f + tp)$ pois

$$\mathcal{RT}^c(f) \subset \mathcal{RT}^c(f + tp) + \mathcal{M}_{(z,\lambda)}^{D_4} \mathcal{RT}^c(f).$$

Portanto, $\mathcal{RT}^c(f + tp) = \mathcal{RT}^c(f)$, para todo $t \in [0, 1]$. $\square$

Corolário 2.7.3. Sejam f um problema de bifurcação D_4 e p qualquer germe em $\tilde{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$. Se $p \in \mathcal{RTU}^c(f)$ então $f + p$ é $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente à f .

Prova. Segue das Proposições 2.7.1. e 2.7.2. fazendo $t = 1$. $\square$

Observação. 2.7.4. Em particular segue que $\mathcal{RTU}^c(f) \subset \mathbf{P}(f)$ que é o conjunto de termos de ordem alta de f com relação à $\mathcal{C}_\lambda^{D_4}$ -equivalência.

Além disso, denotando por $\mathcal{UC}_\lambda^{D_4}$ o grupo $\mathcal{C}_\lambda^{D_4}$ -equivalências unipotentes, isto é,

$$\mathcal{UC}_\lambda^{D_4} = \left\{ (S, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2) \in \mathcal{C}_\lambda^{D_4} \mid S^\circ = \mathbf{I}_2 \right\},$$

verificamos que $\mathcal{RTU}^c(f)$ é $\mathcal{UC}_\lambda^{D_4}$ -intrínseco, ou seja, se $p \in \mathcal{RTU}^c(f)$ e $(S, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2)$ for uma $\mathcal{UC}_\lambda^{D_4}$ -equivalência então $(S, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2) \cdot p \in \mathcal{RTU}^c(f)$.

Lema 2.7.5. Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^∞ definidas numa vizinhança de zero e que se anulam na origem. Suponha que

$$(a) \quad \psi(y) = 0 \text{ implica } \phi(y) = 0$$

$$(b) \quad \nabla_{\phi^\circ} \neq 0, \nabla_{\psi^\circ} \neq 0$$

onde ∇ indica o gradiente. Então $a(y) = \frac{\phi(y)}{\psi(y)}$ é C^∞ e não nula em alguma vizinhança da origem. Além disso, $sg a^\circ = sg < \nabla_{\phi^\circ}, \nabla_{\psi^\circ} >$.

Prova. ([15], pág. 39). $\square$

Proposição 2.7.6. (Pré-Forma Normal)

Seja $f = [p, q, r, s]$ um problema de bifurcação D_4 . Se $q^\circ \neq 0$ então f é $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente à pré-forma normal $h = [\hat{p}, \epsilon, \hat{r}, 0]$ com $\epsilon = sg q^\circ$ e $\hat{p}, \hat{r}$ dependendo de N, λ_1 e u_4 somente.

Prova. $f = [p, q, r, s]$ é trivialmente $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente à $\bar{h} = [\bar{p}, \epsilon, \bar{r}, \bar{s}]$ com $\epsilon = sg q^\circ$, pois $q^\circ \neq 0$.

De (2.12), considere o gerador de $\mathcal{RTU}^c(\bar{h})$ dado por

$$\bar{g}_1 = \frac{1}{\epsilon(1 - u_4 \bar{s}^2)} (g_2 - \epsilon u_4 \bar{s} g_1) = \left[\frac{u_4(\bar{r} - \epsilon \bar{p} \bar{s})}{\epsilon(1 - u_4 \bar{s}^2)}, 0, \frac{\bar{p} - \epsilon u_4 \bar{s}}{\epsilon(1 - u_4 \bar{s}^2)}, 1 \right].$$

Usando a Observação 2.7.4, $\bar{g}_1 \in \mathbf{P}(f)$ e assim $\bar{h}$ módulo $\bar{s} \bar{g}_1$ é $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -equivalente à $\tilde{h} = [\tilde{p}, \epsilon, \tilde{r}, 0]$, isto é, podemos fazer $\bar{s} = 0$.

Agora, considere os seguintes geradores simplificados de $\mathcal{RTU}^c(\tilde{h})$:

$$\tilde{g}_2 = (\tilde{p} - \epsilon N) g_1 - \epsilon g_4 - \tilde{r} g_2 = [\Delta + \tilde{p}^2 - 2\epsilon N \tilde{p} - u_4 \tilde{r}^2, 0, 0, 0],$$

$$\tilde{g}_3 = \epsilon(\tilde{p} - \epsilon N) g_2 - g_6 - \epsilon u_4 \tilde{r} g_1 = [0, 0, \Delta + \tilde{p}^2 - 2\epsilon N \tilde{p} - u_4 \tilde{r}^2, 0].$$

Seja $Y = (N, \lambda_1, u_4)$ e defina

$$h(Y, \Delta) = \tilde{p}^2 - 2\epsilon N \tilde{p} - u_4 \tilde{r}^2$$

e

$$F(Y, \Delta) = \Delta + h(Y, \Delta).$$

F satisfaz $F^\circ = 0$ e $F_\Delta^\circ \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita existem vizinhanças I de 0 em $\mathbb{R}$ e V de Y em $\mathbb{R}^3$ e a função $g : V \rightarrow I$ tais que, para todo $Y \in V$, $\Delta = g(Y)$ é a única solução de $F(Y, \Delta) = 0$ e $g^\circ = 0$.

Defina o seguinte homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{E}_{(Y, \Delta)} &\rightarrow \mathcal{E}_Y \\ Y &\mapsto Y \\ \Delta &\mapsto g(Y). \end{aligned}$$

Obviamente, $\text{Ker } \phi = \langle \Delta - g(Y) \rangle$. Fazendo $G(Y, \Delta) = \Delta - g(Y)$, vemos que F e G satisfazem as condições do Lema 2.7.5. Logo, podemos escrever

$$G(Y, \Delta) = a(Y, \Delta) F(Y, \Delta)$$

isto é,

$$\langle \Delta - g(Y) \rangle \subset \langle \Delta + h(Y, \Delta) \rangle.$$

Como $\langle \Delta + h(Y, \Delta) \rangle \subset \text{Ker } \phi$, segue que

$$\text{Ker } \phi = \langle \Delta + h(Y, \Delta) \rangle.$$

Pelo Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{\mathcal{E}_{Y,\Delta}}{\text{Ker } \phi} = \frac{\mathcal{E}_{Y,\Delta}}{\langle \Delta + h(Y, \Delta) \rangle} \simeq \text{Im } \varphi \subset \mathcal{E}_Y.$$

Usando esse isomorfismo e o Corolário 2.7.3.,

$\tilde{h} = [\tilde{p}, \epsilon, \tilde{r}, 0]$ módulo $\mathcal{E}_{Y,\Delta}\{\tilde{g}_2, \tilde{g}_3\}$ is $\mathcal{K}_\lambda^{\text{D}_4}$ -equivalente à

$\hat{h} = [\hat{p}, \epsilon, \hat{r}, 0]$ com $\hat{p}$ e $\hat{r}$ dependendo de N, λ_1 e u_4 somente.

Portanto, a proposição se verifica. □

2.8 Classificação parcial dos problemas D_4

Nesta subsecção resolvemos o problema do reconhecimento para as primeiras degeneridades da forma normal genérica dada pelo Teorema 2.6.1. Para cada forma normal também achamos o desdobramento miniversal.

Mostraremos como classificar problemas de bifurcação D_4 até codimensão topológica 2, usando Formulação por Caminhos, no Capítulo 4.

Denotamos por $\Delta_{x,y}(p, q)$ a expressão $p_x q_y - p_y q_x$.

Teorema 2.8.1. (Teorema I)

$f = [p, q, r, s] \in \tilde{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{\text{D}_4}$ é de codimensão topológica 0 ou 1 se e somente se pertencer à seguinte lista. Além disso, f será $\mathcal{K}_\lambda^{\text{D}_4}$ -equivalente à forma normal dada em cada caso se e somente se satisfizer os correspondentes conjuntos de condições de definição e condições de não-degenericidade. Em todos os casos $p^\circ = 0$.

O desdobramento miniversal é obtido adicionando-se à forma normal o correspondente termo do desdobramento relacionado em cada caso.

CASO I_0 (Teorema 2.6.1)

Forma genérica normal: $[mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0]$.

Coeficientes: $\epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^\circ$, $\epsilon_5 = sg q^\circ$, $m = \frac{p_N^\circ}{|q^\circ|}$.

Condições de não-degenericidade: $p_N^\circ \neq 0$, $p_N^\circ \neq \pm q^\circ$, $p_{\lambda_1}^\circ \neq 0$, $r^\circ \neq 0$.

Termo do desdobramento: $m[N, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D₄-codim: 0 / 1.

CASO I₁

Condição de definição: $p_{\lambda_1}^o = 0$.

Forma normal: $[mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_5, 1, 0]$.

Coeficientes: $\epsilon_4 = sg p_{\lambda_1 \lambda_1}^o$, $\epsilon_5 = sg q^o$, $\epsilon_3 = \epsilon_5 sg (p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o)$, $m = \frac{p_N^o}{|q^o|}$.

Condições de não-degenericidade: $q^o \neq 0$, $p_N^o \neq \pm q^o$, $p_{\lambda_1 \lambda_1}^o \neq 0$, $r^o \neq 0$,

$$p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m[N, 0, 0, 0] + \alpha[1, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D₄-codim: 1 / 2.

CASO I₂

Condição de definição: $r^o = 0$.

Forma normal: $[mN + \epsilon_o \lambda_1 + n N u_4, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_8 u_4, 0]$.

Coeficientes: $m = \frac{p_N^o}{|q^o|}$, $\epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^o$, $\epsilon_5 = sg q^o$,

$$\epsilon_8 = \epsilon_o sg \frac{(p_N^{o^2} - q^{o^2}) \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r)}{p_{\lambda_1}^o (q^o s^o - r_N^o p_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o^2} - q^{o^2})},$$

$$n = \frac{\epsilon_5 p_{\lambda_1}^o (q^{o^2} - p_N^{o^2})}{q^{o^2} [p_{\lambda_1}^o (s^o q^o - p_N^o r_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o^2} - q^{o^2})]^2} \xi_3, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = & (p_N^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}) \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, q) + q^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}) (p_{N \lambda_1}^o p_{u_4}^o - p_{N u_4}^o p_{\lambda_1}^o) \\ & + p_{\lambda_1}^o q^o p_N^o (r_N^{o^2} + s^{o^2}) - r_N^o p_{\lambda_1}^o s^o (p_N^{o^2} + q^{o^2})). \end{aligned}$$

Condições de não-degenericidade: $q^o \neq 0$, $p_N^o \neq \pm q^o$, $p_{\lambda_1}^o \neq 0$, $\xi_3 \neq 0$,

$$\Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r) \neq 0,$$

$$\xi_4 = p_{\lambda_1}^o (q^o s^o - p_N^o r_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}) \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m[N, 0, 0, 0] + n[N u_4, 0, 0, 0] + \alpha[0, 0, 1, 0]$.

Codim topológica / D₄-codim: 1 / 3.

CASO II

Condição de definição: $p_N^o = 0$.

Forma normal: $[\epsilon_o \lambda_1 + \epsilon_2 N^2, \epsilon_5, 1, 0]$.

Coeficientes: $\epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^o$, $\epsilon_2 = sg p_{NN}^o$, $\epsilon_5 = sg q^o$.

Condições de não-degenericidade: $p_{\lambda_1}^o \neq 0$, $q^o \neq 0$, $p_{NN}^o \neq 0$, $r^o \neq 0$.

Termos do desdobramento: $\alpha[N, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D₄-codim: 1 / 1.

CASO III

Condição de definição: $p_N^o = -q^o$.

Forma normal: $[\epsilon_o \lambda_1 - \epsilon_5 N, \epsilon_5, 1 + \epsilon_{12} N, 0]$.

Coeficientes: $\epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^o$, $\epsilon_5 = sg q^o$, $\epsilon_{12} = sg \xi_1$, onde

$$\xi_1 = -\frac{1}{2q^o} (p_{NN}^o + 2p_{\Delta}^o + 2q_N^o) - \frac{1}{p_{\lambda_1}^o} (p_{N\lambda_1}^o + q_{\lambda_1}^o) + \frac{1}{r^o} (s^o + r_N^o).$$

Condições de não-degenericidade: $q^o \neq 0$, $p_{\lambda_1}^o \neq 0$, $r^o \neq 0$, $\xi_1 \neq 0$.

Termos do desdobramento: $\alpha[N, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D₄-codim: 1 / 1.

CASO IV

Condição de definição: $p_N^o = q^o$.

Forma normal: $[\epsilon_1 N + \epsilon_o \lambda_1 + \epsilon_2 N^2, \epsilon_1 + m_2 \lambda_1, 1, 0]$.

Coeficientes: $\epsilon_1 = sg p_N^o$, $\epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^o$, $\epsilon_2 = sg (p_{NN}^o + 2p_{\Delta}^o - 2q_N^o)$,

$$m_2 = \frac{2 |q^o|}{r^o |p_{\lambda_1}^o| |p_{NN}^o + 2p_{\Delta}^o - 2q_N^o|} \xi_2, \text{ onde}$$

$$\xi_2 = p_{\lambda_1}^o (r_N^o - s^o) + r^o (q_{\lambda_1}^o - p_{N\lambda_1}^o).$$

Condições de não-degenericidade: $p_N^\circ \neq 0$, $r^\circ \neq 0$, $p_{\lambda_1}^\circ \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$,

$$p_{NN}^\circ + 2p_\Delta^\circ - 2q_N^\circ \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m_2[0, \lambda_1, 0, 0] + \alpha[N, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: $1/2$.

CASO V

Condição de definição: $q^\circ = 0$.

Forma normal: $[\epsilon_1 N + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_6 \Delta + m_1 \lambda_1, 1, 0]$.

Coeficientes: $\epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^\circ$, $\epsilon_1 = sg p_N^\circ$, $\epsilon_6 = \epsilon_1 sg \Delta_{N,\Delta}(p, q)$,

$$m_1 = \frac{\epsilon_1 \Delta_{N,\lambda_1}(p, q)}{|p_{\lambda_1}^\circ| |\Delta_{N,\Delta}(p, q)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Condições de não-degenericidade: $p_N^\circ \neq 0$, $p_{\lambda_1}^\circ \neq 0$, $r^\circ \neq 0$,

$$\Delta_{N,\Delta}(p, q) \neq 0, \Delta_{N,\lambda_1}(p, q) \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m_1[0, \lambda_1, 0, 0] + \alpha[0, 1, 0, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: $1/2$.

Prova. Seguimos o método clássico descrito na prova do Teorema 2.6.1. Omitiremos os cálculos.

Para cada fórmula normal g , encontramos um submódulo intrínseco R' contido na parte intrínseca do D_4 -espaço tangente unipotente de g e, pela Proposição 1.10.3.1, R' está contido no conjunto de termos de ordem alta de g . A seguir fazemos mudanças de coordenadas módulo R' para um problema de bifurcação D_4 , $f = [p, q, r, s]$, estabelecendo que f será $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente a g se e somente se f satisfizer as condições de definição e não-degenericidade escritas em cada caso.

Aplicamos o Corolário 1.7.4 para obter informação sobre os desdobramentos miniver-sais.

Para cada caso, escrevemos os dados básicos. Para simplificar, denotamos $\mathcal{M}_u$ por $\mathcal{M}$ e $\mathcal{E}_u$ por $\mathcal{E}$. Recordamos, novamente, que $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ onde $u_1 = N$, $u_2 = \Delta$, $u_3 = \lambda_1$ e $u_4 = \lambda_2^2$.

Caso I₀ foi provado no Teorema 2.6.1.

Para o **Caso I₁**, seja $g = [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_5, 1, 0]$ onde $\epsilon_3^2 = \epsilon_4^2 = \epsilon_5^2 = 1$ e $m \neq \pm 1, 0$. E assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{TU}^{D_4}(g) = [\mathcal{M}^3 + \langle N^2, \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle N, \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}, \mathcal{E}] \\ + \langle [mN \lambda_1, \epsilon_5 \lambda_1, 0, 0] \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e^{D_4}(g) = \mathcal{TU}^{D_4}(g) + \mathbb{R} \{ [mN, \epsilon_5, 0, 0], [\lambda_1^2, 0, 0, 0], [\epsilon_3 N + 2\epsilon_4 \lambda_1, 0, 0, 0], \\ [N \lambda_1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0] \}. \end{aligned}$$

Como consequência, g tem D_4 -codimensão 2 e codimensão topológica 1 pois m é um parâmetro modal e $[1, 0, 0, 0]$ é, também, um termo de desdobramento.

$$\text{Agora, seja } R' = [\mathcal{M}^3 + \langle N^2, \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle N, \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}, \mathcal{E}].$$

Pela Proposição 2.5.1, R' é intrínscio.

Para o **Caso I₂**, seja $g = [mN + \epsilon_o \lambda_1 + nNu_4, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_8 u_4, 0]$ onde $m \neq \pm 1, 0$, $\epsilon_o^2 = \epsilon_5^2 = \epsilon_8^2 = 1$ e $n \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{TU}^{D_4}(g) = [\mathcal{M}^3 + \langle N^2, N \lambda_1, \Delta \rangle + \mathcal{M}_{(\lambda_1, u_4)}^2, \mathcal{M}^2 + \langle N, \Delta, \lambda_1 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta \rangle, \mathcal{M}] \\ + \langle [mNu_4, \epsilon_5 u_4, 0, 0], [0, 0, N, \epsilon_5 m], [0, 0, \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5 (1 - m^2)], [\epsilon_o u_4, 0, u_4, 0] \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e^{D_4}(g) = \mathcal{TU}^{D_4}(g) + \mathbb{R} \{ [mN + nNu_4, \epsilon_5, 0, 0], [\epsilon_o, 0, 1, 0], [\epsilon_o \lambda_1, 0, \lambda_1, 0], \\ [2nNu_4, 0, \lambda_1, 0], [0, 0, u_4, 0] \}. \end{aligned}$$

Os termos de desdobramento são $[N, 0, 0, 0]$, $[Nu_4, 0, 0, 0]$ e $[0, 0, 1, 0]$. Segue que g tem D_4 -codimensão 3 e codimensão topológica 1, pois m, n são parâmetros modais.

$$\text{Seja } R' = [\mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \Delta \rangle + \mathcal{M}_{(\lambda_1, u_4)}^2, \mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2, \mathcal{M}].$$

A Proposição 2.5.1 não se aplica aqui. Para mostrar que R' é intrínscio temos que usar a definição, conforme o que foi descrito na Observação 2.5.2.

Para isso, sejam

$$J_1 = \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \Delta \rangle + \mathcal{M}_{(\lambda_1, u_4)}^2, \quad J_2 = \mathcal{M}^2, \quad J_3 = \mathcal{M}, \quad h = [p, q, r, s] \in R'$$

e $e = (T, X, \Lambda)$ uma $\mathcal{K}_\lambda^{\text{D}_4}$ -equivalência.

Primeiro mostramos que $h' = (I, X, \Lambda) \cdot h \in R'$ e, para isso, decompomos

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \text{ com } h_1 \in J_1, \quad h_2, h_3 \in J_2 \text{ e } h_4 \in J_3.$$

(i) Do Lema 2.4.1,

$$\begin{aligned} h_1 \circ (X, \Lambda)(u) &= \tilde{p}(u) [a, b, c, d] \\ &= p(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) [a, b, c, d] + \delta \lambda_2 p_1(u) [a, b, c, d] \\ &\quad + \Delta u_4 p_2(u) [a, b, c, d]. \end{aligned}$$

Por (2.5),

$$\mathcal{M}_{(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4)}^3 + \mathcal{M}_{(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4)} \langle \tilde{\Delta}_1 \rangle + \mathcal{M}_{(\tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4)}^2 \in J_1$$

e como $p \in J_1$, segue que $p(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) [a, b, c, d] \in R'$.

É imediato que $\Delta u_4 p_2(u) [a, b, c, d] \in R'$. Para verificar que

$$\delta \lambda_2 p_1(u) [a, b, c, d] = p_1(u) [\Delta u_4 d, u_4 c, \Delta b, a] \in R',$$

é suficiente mostrar que $p_1 a \in \mathcal{M}$, o que é verdadeiro olhando para a ordem dos monômios de $p \in J_1$.

Logo, $h_1 \circ (X, \Lambda) \in R'$.

(ii) $h_2 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{q}(u) [b\Delta D_1 + cu_4 D_2, aD_1 + du_4 D_2, d\Delta D_1 + aD_2, cD_1 + bD_2]$.

Usando o Lema 2.4.1 e (2.5) temos que $h_2 \circ (X, \Lambda)(u) \in R'$ se $\Delta a D_1 q_1 \in \mathcal{M}^2$. Uma inspeção dos monômios de $\tilde{q}(u)$ mostra que $q_1 \in \mathcal{M}$ e portanto $h_2 \circ (X, \Lambda) \in R'$.

(iii) $h_3 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{r}(u) [u_4 c \Lambda_2, u_4 d \Lambda_2, a \Lambda_2, b \Lambda_2] \in R'$ se $u_4 a \Lambda_2 r_1 \in \mathcal{M}^2$ o que é verdadeiro, pois $r_1 \in \mathcal{M}$.

$$(iv) \ h_4 \circ (X, \Lambda)(u) = \hat{s}(u) [D_1 \Lambda_2 \Delta u_4 d + D_2 \Lambda_2 u_4 a, D_1 \Lambda_2 u_4 c + D_2 \Lambda_2 u_4 b, \\ D_1 \Lambda_2 \Delta b + D_2 \Lambda_2 u_4 c, D_1 \Lambda_2 a + D_2 \Lambda_2 u_4 d].$$

É direto que $h_4 \circ (X, \Lambda) \in J_3$. Segue que $h' = h \circ (X, \Lambda) \in R'$ e para verificar que $h'' = (T, I, I) \circ h' \in R'$, usamos as relações (2.8).

Portanto, R' é intrínscico.

Para o **Caso II**, seja $g = [\epsilon_o \lambda_1 + \epsilon_2 N^2, \epsilon_5, 1, 0]$ onde $\epsilon_o^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_5^2 = 1$.

$$\mathcal{TU}^{D_4}(g) = [\mathcal{M}^3 + \langle N \lambda_1, \lambda_1^2, \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}, \mathcal{M}, \mathcal{E}].$$

$$\mathcal{T}_e^{D_4}(g) = \mathcal{TU}^{D_4}(g) + \mathbb{R}\{[N^2, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0], [\lambda_1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0]\}.$$

O termo de desdobramento é $[N, 0, 0, 0]$ e por definição g tem D_4 -codimensão e codimensão topológica iguais a 1.

Note que neste caso, $\mathcal{TU}^{D_4}(g)$ é intrínscico pela Proposição 2.5.1.

Para **Caso III**, seja $g = [\epsilon_o \lambda_1 - \epsilon_5 N, \epsilon_5, 1 + \epsilon_{12} N, 0]$ onde $\epsilon_o^2 = \epsilon_5^2 = \epsilon_{12}^2 = 1$.

$$\mathcal{TU}^{D_4}(g) = [\mathcal{M}^3 + \langle \Delta^2, u_4, \lambda_1^2, N \Delta \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, \lambda_1, u_4 \rangle, \mathcal{M}] \\ + \langle [N^2, -N, 0, 0], [\epsilon_o N \lambda_1, 0, N, 0], [\Delta, -N, 0, 0], [-N \lambda_1, \lambda_1, 0, 0], \\ [\epsilon_o N \lambda_1 - \epsilon_5 N^2, 0, 0, 0], [0, 0, -N, 1] \rangle.$$

$$\mathcal{T}_e^{D_4}(g) = \mathcal{TU}^{D_4}(g) + \mathbb{R}\{[-N, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0], [\lambda_1, 0, 0, 0], [0, 0, N, 0], [0, 0, 1, 0]\}.$$

Consideramos $[N, 0, 0, 0]$ como termo de desdobramento e g têm ambas as codimensões iguais a 1. Seja

$$R' = [\mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \Delta \rangle + \langle \lambda_1^2, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, \lambda_1, u_4 \rangle, \mathcal{M}].$$

Para verificar que R' é intrínscico, usamos a Observação 2.5.2. Todas as relações são imediatas exceto a de que $p_1 \in \mathcal{M}$, o que se verifica analisando a ordem dos monômios de

$$p \in \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \Delta \rangle + \langle \lambda_1^2, u_4 \rangle.$$

Para o **Caso IV**, seja $g = [\epsilon_1 N + \epsilon_o \lambda_1 + \epsilon_2 N^2, \epsilon_1 + m_2 \lambda_1, 1, 0]$ onde $\epsilon_o^2 = \epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1$ e $m_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{TU}^{D_4}(g) = & [\mathcal{M}^3 + \langle u_4, \lambda_1^2, \Delta^2, \Delta \lambda_1, \Delta N \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, \lambda_1, u_4 \rangle, \mathcal{M}] \\ & + \langle [N \lambda_1, \lambda_1, 0, 0], [N^2, N, 0, 0], [N^2 - \Delta, 0, 0, 0], [0, \epsilon_o \lambda_1, 0, 1], [0, 0, N, 1] \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e^{D_4}(g) = \mathcal{TU}^{D_4}(g) + \mathbb{R} \{ & [\epsilon_1 N + \epsilon_2 N^2, \epsilon_1, 0, 0], [\epsilon_2 N^2 - \epsilon_o \lambda_1, 0, 0, 0], \\ & [\epsilon_o, m_2, 0, 0], [\epsilon_o \lambda_1, m_2 \lambda_1, 0, 0], [0, 0, 1, 0] \}. \end{aligned}$$

Escolhemos $[N, 0, 0, 0]$ e $[0, \lambda_1, 0, 0]$ como termos do desdobramento e assim g tem D_4 -codimensão 2 e codimensão topológica 1 pois m_2 é parâmetro modal.

$$\text{Seja } R' = [\mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \Delta \rangle + \langle \lambda_1^2, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle \Delta, \lambda_1, u_4 \rangle, \mathcal{M}].$$

R' é intrínscio. (Veja **Caso III**).

Para o **Caso V**, seja $g = [\epsilon_1 N + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_6 \Delta + m_1 \lambda_1, 1, 0]$ onde $\epsilon_o^2 = \epsilon_1^2 = \epsilon_6^2 = 1$ e $m_1 \neq 0$.

$$\mathcal{TU}^{D_4}(g) = [\mathcal{M}^2 + \langle \Delta, u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle [0, \epsilon_1 N + \epsilon_o \lambda_1, 0, 0], u_4 \rangle, \mathcal{M}, \mathcal{E}].$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e^{D_4}(g) = \mathcal{TU}^{D_4}(g) + \mathbb{R} \{ & [\epsilon_1 N, \epsilon_6 \Delta, 0, 0], [0, 2\epsilon_6 \Delta + m_1 \lambda_1, 0, 0], [\epsilon_o, m_1, 0, 0], \\ & [\epsilon_o \lambda_1, m_1 \lambda_1, 0, 0], [0, 0, 1, 0] \}. \end{aligned}$$

Sejam $[0, \lambda_1, 0, 0]$ e $[0, 1, 0, 0]$ os termos de desdobramento. Segue que g tem D_4 -codimensão 2 e codimensão topológica 1 pois m_1 é parâmetro modal.

$$\text{Seja } R' = [\mathcal{M}^2 + \langle u_4 \rangle, \mathcal{M}^2 + \langle u_4 \rangle, \mathcal{M}, \mathcal{E}].$$

$R' \subset \mathcal{TU}^{D_4}(g)$ e para mostrar que ele é intrínscio sejam

$J_1 = \mathcal{M}^2 + \langle u_4 \rangle, J_2 = \mathcal{M}, J_3 = \mathcal{E}, e = (T, X, \Lambda)$ uma $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência e $h = [p, q, r, s] \in R'$.

Primeiro mostramos que $h' = (I, X, \Lambda) \cdot h \in R'$. Escrevemos

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \text{ com } h_1 = [p, 0, 0, 0] \in J_1, h_2 = [0, q, 0, 0] \in J_1$$

$$h_3 = [0, 0, r, 0] \in J_2, \text{ e } h_4 = [0, 0, 0, s] \in J_3.$$

(i) Do Lema 2.4.1,

$$h_1 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{p}(u) [a, b, c, d] = p(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) [a, b, c, d] + \delta \lambda_2 p_1(u) [a, b, c, d] \\ + \Delta u_4 p_2(u) [a, b, c, d].$$

Usando (2.5) e que $p \in J_1$, verificamos que $p(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) [a, b, c, d] \in R'$ pois $\mathcal{M}_{(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4)}^2 + \langle \tilde{u}_4 \rangle \subset J_1$.

É direto que $\Delta u_4 p_2(u) [a, b, c, d]$ e $\delta \lambda_2 p_1(u) [a, b, c, d]$ pertencem à R' .

Consequentemente, $h_1 \circ (X, \Lambda) \in R'$.

$$(ii) h_2 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{q}(u) [b\Delta D_1 + cu_4 D_2, aD_1 + du_4 D_2, d\Delta D_1 + aD_2, cD_1 + bD_2].$$

Pelo Lema 2.4.1, é suficiente mostrar que $q(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) aD_1 \in J_1$. Usando que $q \in J_1$ e (2.5), temos $h_2 \circ (X, \Lambda) \in R'$.

$$(iii) h_3 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{r}(u) [u_4 c \Lambda_2, u_4 d \Lambda_2, a \Lambda_2, b \Lambda_2].$$

Analogamente a (ii), $h_3 \circ (X, \Lambda) \in R'$ se e somente se $r(\tilde{N}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_4) a \Lambda_2 \in \mathcal{M}$ o que se verifica por (2.5) e usando o fato de que $r \in \mathcal{M}$.

$$(iv) h_4 \circ (X, \Lambda)(u) = \tilde{s}(u) [D_1 \Lambda_2 \Delta u_4 d + D_2 \Lambda_2 u_4 a, D_1 \Lambda_2 u_4 c + D_2 \Lambda_2 u_4 b, \\ D_1 \Lambda_2 \Delta b + D_2 \Lambda_2 u_4 c, D_1 \Lambda_2 a + D_2 \Lambda_2 u_4 d].$$

É imediato que $h_4 \circ (X, \Lambda) \in R'$.

Logo, $h' = h \circ (X, \Lambda) \in R'$ pois $h_i \circ (X, \Lambda) \in J_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Seja $h'' = (T, I, I) \cdot h' = [p'', q'', r'', s'']$ onde $h' \in R$. Usando (2.8), segue que $h'' \in R'$ e portanto, $e = (T, X, \Lambda) \cdot h \in R'$, estabelecendo que R' é intrínscico. $\square$

Capítulo 3

Formulação por caminhos e o problema D_4

Neste capítulo, usamos a formulação por caminhos no espaço dos parâmetros para classificar problemas de bifurcação equivariantes, em particular, os problemas D_4 -equivariantes apresentados no capítulo 2.

A idéia básica foi sugerida por Golubitsky e Schaeffer em [15] para problemas de bifurcação sem simetria nos parâmetros. Esta idéia, já presente nos primeiros artigos de Mather e Martinet para Teoria de Singularidades, tem sido estendida e aplicada (cf. [23],[11],[4]). A principal referência é [23].

Na secção (3.1) desenvolvemos a teoria de formulação por caminhos para problemas de bifurcação Γ -equivariantes segundo a ação de Γ descrita no capítulo 1. A idéia básica é considerar problemas Σ -equivariantes onde Σ é o subgrupo de isotropia dos parâmetros de bifurcação e aplicar a teoria usual inicialmente proposta por [15] para essa classe de problemas. A seguir definimos uma ação no espaço dos caminhos de tal forma que o pull-back do Σ -desdobramento do centro organizador por um caminho desse espaço se torne um problema Γ -equivariante.

Na secção (3.2) definimos o espaço tangente e o espaço tangente unipotente a um caminho Γ -equivariante. O resultado central estabelece um isomorfismo entre o espaço normal a um caminho Γ -equivariante e o espaço normal ao pull-back do Σ -desdobramento do centro organizador por esse caminho. A teoria aqui desenvolvida trata de uma caracterização algébrica dos espaços tangentes aos caminhos Γ -equivariantes. Fica em aberto

uma caracterização geométrica usando a $\mathcal{K}_V$ -equivalência definida por Damon em [11] e também apresentada em [23] e [4].

Na secção (3.3) mostramos que dado um problema de bifurcação D_4 -equivariante, digamos f , existe um caminho D_4 -equivariante que torna o pull-back do Σ -desdobramento do centro organizador de f por esse caminho um problema de bifurcação $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente a f . Provamos, também, o teorema equivalente para os respectivos desdobramentos.

3.1 Σ -teoria para a formulação por caminhos

Recorde do capítulo 1 que Γ é um grupo de Lie compacto agindo no $\mathbb{R}^m$ e diagonalmente no $\mathbb{R}^{n+\ell}$ via as representações diagonais:

$$\rho_n : \Gamma \rightarrow O(n), \quad \rho_\ell : \Gamma \rightarrow O(\ell) \quad \text{e} \quad \rho_m : \Gamma \rightarrow O(m).$$

Definimos Σ como o subgrupo de Γ que deixa os parâmetros de bifurcação λ fixados, ou seja, $\Sigma = \text{Ker } \rho_\ell$ e, portanto, é um subgrupo normal de Γ .

Seguindo nossa notação, sejam

$$\mathcal{E}_x^\Sigma = \{g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid g(\sigma_n x) = g(x), \forall \sigma \in \Sigma\}$$

o conjunto dos germes Σ -invariantes,

$$\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma = \{h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid h(\sigma_n x) = \sigma_m h(x), \forall \sigma \in \Sigma\}$$

o conjunto dos germes Σ -equivariantes,

$$\vec{\Theta}_x^\Sigma = \{X : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid X(\sigma_n x) = \sigma_n X(x), \forall \sigma \in \Sigma\}$$

o conjunto dos campos de vetores Σ -equivariantes e

$$\mathbf{M}_x^\Sigma = \{T : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow M_m(\mathbb{R}) \mid T(\sigma_n x) \sigma_m = \sigma_m T(x), \forall \sigma \in \Sigma\}$$

o conjunto das matrizes que comutam com Σ .

Para $h \in \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$,

- $\mathcal{T}_e^\Sigma(h) = \{Th + (D_x h)X \mid T \in \mathbf{M}_x^\Sigma, X \in \vec{\Theta}_x^\Sigma\}$ é o Σ -espaço tangente estendido de h .

- $\mathcal{N}_e^\Sigma(h) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)}$ é o Σ -espaço normal de h .

- $\text{cod}^\Sigma(h) = \dim_{\mathbf{R}} \mathcal{N}_e^\Sigma(h)$.
- Se $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{N}_e^\Sigma(h) = r \in \mathbb{N}$, e $\{h_i\}_{i=1}^r \subset \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$ for uma base para $\mathcal{N}_e^\Sigma(h)$ então $F = h + \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i$ será o Σ -desdobramento miniversal de h .

Para as provas, veja ([15]). □

Seja $f \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$. O *centro organizador* de f é definido por

$$f_0(x) = f(x, 0).$$

Obviamente, f_0 é não somente Σ -equivariante, como também, é Γ -equivariante.

Supomos f_0 um germe de codimensão finita, ou seja, f_0 satisfaz a seguinte hipótese:

$$\text{cod}^\Sigma(f_0) = r. \quad (\text{H0})$$

Uma *observação importante* é que a Σ -teoria para a formulação de caminhos é válida se (H0) for satisfeita. Em geral, não é verdade que se $\text{cod}^\Gamma(f)$ for finita então $\text{cod}^\Sigma(f_0)$ será finita (cf. Observação 3.2.20).

Seja $F_0 : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ o Σ -desdobramento miniversal de f_0 com r parâmetros, $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_r)$, obtido considerando-se a base $\{h_i\}_{i=1}^r$ de $\mathcal{N}_e^\Sigma(f_0)$, ou seja,

$$F_0(x, \alpha) = f_0(x) + \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(x).$$

Primeiro, construímos uma família parametrizada de caminhos Γ -equivariantes através do espaço dos parâmetros de F_0 . Para isso, considere o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \theta : \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} &\rightarrow \mathbb{R}^r \\ \theta([g]) &= \theta \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i \right) = (\alpha_1 \dots \alpha_r). \end{aligned}$$

Seja φ a ação of Γ em $\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$ definida por

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma \times \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma &\rightarrow \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma \\ \varphi(\gamma, g) &= \gamma_m^t(g \circ \gamma_n). \end{aligned}$$

Lema 3.1.1. φ é bem definida.

Prova. Temos que verificar que

$$\varphi(\gamma, g)(\sigma_n x) = \sigma_m \varphi(\gamma, g)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Como Σ é um subgrupo normal de Γ e $g \in \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$,

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma, g)(\sigma_n x) &= \gamma_m^t g(\gamma_n(\sigma_n x)) = \gamma_m^t g(\sigma'_n(\gamma_n x)) \\ &= \gamma_m^t (\sigma'_m g(\gamma_n x)) = \sigma_m (\gamma_m^t g(\gamma_n x)) \\ &= \sigma_m \varphi(\gamma, g)(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.2. Como f_0 é Γ -equivariante, $\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)$ é um φ -submódulo invariante de $\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$.

Prova. Seja $h \in \mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)$, ou seja, existem $T \in \mathbf{M}_x^\Sigma$ e $X \in \vec{\Theta}_x^\Sigma$ tais que

$$h(x) = T(x) f_0(x) + (D_x f_0)(x) X(x).$$

Temos que mostrar que

$$\varphi(\gamma, h) \in \mathcal{T}_e^\Sigma(f_0), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Para isso, computamos

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma, h)(x) &= \gamma_m^t h(\gamma_n x) = \gamma_m^t [T(\gamma_n x) f_0(\gamma_n x) + (D_x f_0)(\gamma_n x) X(\gamma_n x)] \\ &= \gamma_m^t [T(\gamma_n x) \gamma_m f_0(x) + \gamma_m (D_x f_0)(x) \gamma_n^t X(\gamma_n x)] \\ &= [\gamma_m^t T(\gamma_n x) \gamma_m] f_0(x) + (D_x f_0)(x) [\gamma_n^t X(\gamma_n x)] \in \mathcal{T}_e^\Sigma(f_0) \end{aligned}$$

pois

(i) $X \in \vec{\Theta}_x^\Sigma$ e refazendo os cálculos como na prova do Lema 3.1.1 mostramos que $\gamma_n^t (X \circ \gamma_n) \in \vec{\Theta}_x^\Sigma$,

(ii) Seja, $T'(x) = \gamma_m^t T(\gamma_n x) \gamma_m$. Como $T \in \mathbf{M}_x^\Sigma$ e Σ é um subgrupo normal de Γ , isto é, para todo γ em Γ e para todo σ em Σ , existe σ' em Σ tal que $\gamma \sigma = \sigma' \gamma$, segue que

$$\begin{aligned} T'(\sigma_n x) &= \gamma_m^t T(\gamma_n(\sigma_n x)) \gamma_m = \gamma_m^t T(\sigma'_n(\gamma_n x)) \gamma_m \\ &= \gamma_m^t \sigma'_m T(\gamma_n x) \sigma_m^t \gamma_m = \sigma_m \gamma_m^t T(\gamma_n x) \gamma_m \sigma_m^t \\ &= \sigma_m T'(x) \sigma_m^t, \quad \text{ou seja, } T' \in \mathbf{M}_x^\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(\gamma, h) \in \mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)$. □

Seja $\bar{\varphi}$ a ação of Γ em $\frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)}$ definida por

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \Gamma \times \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} &\rightarrow \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} \\ (\gamma, [g]) &\mapsto [\varphi(\gamma, g)]. \end{aligned}$$

$\bar{\varphi}$ é bem definida pois $\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)$ é um φ -submódulo invariante de $\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$ pela Proposição 3.1.2.

Também, para todo $1 \leq i \leq r$ e $\gamma \in \Gamma$ existem números reais bem definidos $(\gamma_r)_{ij}$,

$1 \leq j \leq r$, tais que

$$[\gamma_m^t h_i \circ \gamma_n] = \sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} [h_j].$$

Pela Proposição 1.3 ([16], pág. 31), isto define uma representação

$$\begin{aligned} \rho_r : \Gamma &\rightarrow GL(r) \\ \gamma &\mapsto \gamma_r^t \end{aligned}$$

com $(\gamma_r^t)_{ij} = (\gamma_r)_{ji}$, $1 \leq i, j \leq r$. Como anteriormente, identificamos a ação com sua imagem.

A partir de agora, fazemos uma escolha particular da base $\{h_i\}$ of $\mathcal{N}_e^\Sigma(f_0)$ para a qual a equivariância anterior é “exata” e $\gamma_r \subset O(r)$, isto é, queremos que as relações

$$\gamma_m^t h_i(\gamma_n x) = \sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} h_j(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall 1 \leq i \leq r,$$

sejam verdadeiras para os germes e, não somente, para as classes e que ρ_r seja uma representação ortogonal. Quando tal base existe, denominamos boa base.

Lema 3.1.3. Existe uma boa base.

Prova. Supondo (H0), ou seja, $\text{cod}^\Sigma(f_0) = r$, existe um número inteiro positivo k tal que

$$\mathcal{M}_x^k \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma \subset \mathcal{T}_e^\Sigma(f_0).$$

Denotando por P_{k-1}^Σ o espaço vetorial dos polinômios Σ -equivariantes de grau menor ou igual a $k-1$, segue que $\frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{M}_x^k \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma} = P_{k-1}^\Sigma$ é um subespaço φ -invariante de $\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma$ e

$$\frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} \subset P_{k-1}^\Sigma.$$

Podemos escolher a base $\{h_i\}_{i=1}^r$ para $\frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)}$ em P_{k-1}^Σ e dessa forma,

$$\bar{\varphi}(\gamma, h_i) = \gamma_m^t h_i \circ \gamma_n = \sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} h_j.$$

□

Nós poderíamos novamente fazer uma mudança de coordenadas de forma a tornar ρ_r uma representação ortogonal.

Para uma boa base $\{h_i\}_{i=1}^r$, seja $[g] = \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i$ e $\bar{\varphi}$ é explicitamente dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\gamma, [g]) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (\gamma_m^t h_i \circ \gamma_n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} h_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r (\gamma_r)_{ij} \alpha_i \right) h_j = \sum_{i=1}^r (\gamma_r^t \alpha)_i h_i \end{aligned}$$

com $(\gamma_r^t)_{ij} = (\gamma_r)_{ji}$, $1 \leq i, j \leq r$.

Considerando o isomorfismo $\theta : \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} \rightarrow \mathbb{R}^r$, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \frac{\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0)} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathbb{R}^r & \xrightarrow{\gamma_r^t} & \mathbb{R}^r \end{array}$$

e assim, via θ , para $\alpha \in \mathbb{R}^r$, $\rho_r(\gamma)(\alpha) = \gamma_r^t \alpha$.

Dizemos que

$$\begin{aligned} \alpha : (\mathbb{R}^t, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^r, 0) \\ \lambda &\mapsto \alpha(\lambda) = (\alpha_1(\lambda) \dots \alpha_r(\lambda)) \end{aligned}$$

é um caminho no espaço r -dimensional dos parâmetros do desdobramento miniversal de f_0 .

O pull-back $(\bar{\alpha}^* F_0) : (\mathbb{R}^{n+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dado por

$$(\bar{\alpha}^* F_0)(x, \lambda) = F_0(x, \bar{\alpha}(\lambda)).$$

Seja $\mathcal{P}_{\ell, r} = \{\alpha : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)\}$ o conjunto de caminhos no espaço dos parâmetros de desdobramento.

Definimos uma ação φ_p em $\mathcal{P}_{\ell, r}$ por

$$\begin{aligned} \varphi_p : \Gamma \times \mathcal{P}_{\ell, r} &\rightarrow \mathcal{P}_{\ell, r} \\ (\gamma, \alpha) &\mapsto \gamma_r^t (\alpha \circ \gamma_\ell) \end{aligned}$$

O espaço de caminhos fundamental para o nosso trabalho é o subespaço $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_{\ell, r}$ definido por

$$\mathcal{P} = \text{Fix } \varphi_p = \{\alpha \in \mathcal{P}_{\ell, r} \mid \alpha \text{ é } \Gamma\text{-equivariante}\},$$

ou seja, $\alpha \in \mathcal{P}$ se e somente se $\alpha(\gamma_\ell \lambda) = \gamma_r \alpha(\lambda), \forall \gamma \in \Gamma$.

Proposição 3.1.4. Para $\alpha \in \mathcal{P}$,

$$(\alpha^* F_0)(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\lambda) h_i(x) \text{ é } \Gamma\text{-equivariante}.$$

Prova. Os cálculos a seguir são imediatos.

$$\begin{aligned} (\alpha^* F_0)(\gamma_n x, \gamma_\ell \lambda) &= F_0(\gamma_n x, \alpha(\gamma_\ell \lambda)) \\ &= f_0(\gamma_n x) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\gamma_\ell \lambda) h_i(\gamma_n x) \\ &= \gamma_m f_0(x) + \sum_{i=1}^r (\sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} \alpha_j(\lambda)) h_i(\gamma_n x) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{i=1}^r (\gamma_r)_{ij} \alpha_j(\lambda) \gamma_m^t h_i(\gamma_n x)) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(\lambda) (\sum_{i=1}^r (\gamma_r)_{ij} \sum_{k=1}^r (\gamma_r)_{ik} h_k(\gamma_n x))) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(\lambda) (\sum_{k=1}^r (\sum_{i=1}^r (\gamma_r)_{ij} (\gamma_r)_{ik} h_k(x)))) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(\lambda) (\sum_{k=1}^r (\sum_{i=1}^r (\gamma_r^t)_{ji} (\gamma_r)_{ik} h_k(x)))) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(\lambda) (\sum_{k=1}^r \delta_{jk} h_k(x))) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(\lambda) h_j(x)) = \gamma_m F_0(x, \alpha(\lambda)) \\ &= \gamma_m (\alpha^* F_0)(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha^* F_0$ é Γ -equivariante. □

3.2 Espaços tangentes a um caminho

Supondo que (H0) seja verdadeira e que $\mathcal{N}_e^\Sigma(f_0)$ seja gerado por uma boa base $\{h_1 \dots h_r\}$, seja

$$\begin{aligned} \rho_r : \Gamma &\rightarrow O(r) \\ \gamma &\mapsto \gamma_r^t \end{aligned}$$

a representação ortogonal definida na secção 3.1.

Considere Γ agindo em $\alpha \in \mathbb{R}^r$ por $(\gamma, \alpha) \mapsto \gamma_r \alpha$. O Σ -desdobramento miniversal de f_0 , denotado, como anteriormente, por F_0 , é Γ -equivariante.

Precisamente,

$$\begin{aligned} F_0(\gamma_n x, \gamma_r \alpha) &= f_0(\gamma_n x) + \sum_{i=1}^r (\sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} \alpha_j) h_i(\gamma_n x) \\ &= \gamma_m (f_0(x) + \sum_{j=1}^r \alpha_j h_j(x)) \\ &= \gamma_m F_0(x, \alpha), \end{aligned}$$

como na prova da Proposição 3.1.4.

Portanto, $F_0(\gamma_n x, \gamma_r \alpha) = \gamma_m F_0(x, \alpha)$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

No que segue escreveremos os resultados preliminares e necessários para definir o espaço tangente e o espaço tangente unipotente a um caminho Γ -equivariante. Devido à simetria existente nos parâmetros de bifurcação, temos que ampliar o espaço de caminhos $\mathcal{P}$.

Definição 3.2.1. Seja $\hat{\mathcal{P}} = \{\tilde{\beta} : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \mid \tilde{\beta}(\gamma_\ell \lambda) = (\gamma_r \times \gamma_\ell) \tilde{\beta}(\lambda)\}$ o conjunto dos caminhos Γ -equivariantes definidos por $\tilde{\beta}(\lambda) = (\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda)$ para $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$.

Seja $\pi_r : \mathbb{R}^{r+\ell} \rightarrow \mathbb{R}^r$ a projeção canônica.

Definição 3.2.2. Para $\beta = (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^{r+\ell}$, seja $\hat{F}_o : (\mathbb{R}^{n+r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$\hat{F}_o(x, \beta) = F_o(x, \pi_r(\beta)) = (\mathbf{I}_n \times \pi_r)^* F_o(x, \beta).$$

Definição 3.2.3. Sejam

$$\mathcal{E}_{(x, \beta)}^\Gamma = \{\hat{f} : (\mathbb{R}^{n+r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \hat{f}(\gamma_n x, (\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) = \gamma_m \hat{f}(x, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

$$\mathbf{M}_{(x, \beta)}^\Gamma = \{\hat{S} : (\mathbb{R}^{n+r+\ell}, 0) \rightarrow M_m(\mathbb{R}) \mid \hat{S}(\gamma_n x, (\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) \gamma_m = \gamma_m \hat{S}(x, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

$$\vec{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma = \{\hat{\xi} : (\mathbb{R}^{n+r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \hat{\xi}(\gamma_n x, (\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) = \gamma_n \hat{\xi}(x, \beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

$$\vec{\mathcal{E}}_\beta^\Gamma = \{\hat{\mu} : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{r+\ell} \mid \hat{\mu}((\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) = (\gamma_r \times \gamma_\ell) \hat{\mu}(\beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

$$\mathcal{E}_\beta^\Gamma = \{\mu : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid \hat{\eta}((\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) = \hat{\eta}(\beta), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

$$\vec{\Theta}_{(x,\beta)}^{\Gamma, o} = \{\hat{\xi} \in \vec{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma \mid \hat{\xi}^o = 0\}.$$

Segue que

(i) $\hat{F}_o \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}^\Gamma$ pois

$$\begin{aligned} \hat{F}_o(\gamma_n x, (\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) &= F_o(\gamma_n x, \pi_r(\gamma_{r+l} \beta)) = F_o(\gamma_n x, \gamma_r \pi_r(\beta)) \\ &= F_o(\gamma_n x, \gamma_r \alpha) = \gamma_m F_o(x, \alpha) = \gamma_m F_o(x, \pi_r(\beta)) \\ &= \gamma_m \hat{F}_o(x, \beta), \forall \gamma \in \Gamma. \end{aligned}$$

(ii) $\tilde{\beta}^* \hat{F}_o = \tilde{\alpha}^* F_o$ e, portanto, $\tilde{\beta}^* \hat{F}_o \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$.

De fato,

$$(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)(\lambda) = \hat{F}_o(x, \tilde{\beta}(\lambda)) = F_o(x, \pi_r(\tilde{\beta}(\lambda))) = F_o(x, \tilde{\alpha}(\lambda)) = (\tilde{\alpha}^* F_o)(\lambda)$$

e nós já mostramos que $(\tilde{\alpha}^* F_o) \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ se $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$ (cf. Proposição 3.1.4).

O espaço tangente à $\hat{f} \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}^\Gamma$ é definido por

$$\mathbf{T}^\Gamma(\hat{f}) = \{\hat{S} \hat{f} + (D_x \hat{f}) \hat{\xi} \mid \hat{S} \in \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma \text{ e } \hat{\xi} \in \vec{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma\}$$

e o espaço tangente unipotente à $\hat{f} \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}^\Gamma$ é

$$\mathbf{TU}^\Gamma(\hat{f}) = \{\hat{S} \hat{f} + (D_x \hat{f}) \hat{\xi} \mid \hat{S} \in \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma, \hat{\xi} \in \vec{\Theta}_{(x,\beta)}^{\Gamma, o} \text{ satisfazendo } \hat{S}^o = 0 \text{ e } (D_x \hat{\xi})^o = 0\}.$$

Considere a seguinte intersecção de $\mathcal{E}_\beta^\Gamma$ -módulos:

$$\mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o) \cap (\mathcal{E}_\beta < h_1 \dots h_r >)^\Gamma.$$

1. Suponha que exista um número finito de geradores $h'_1 \dots h'_s$ tais que

$$\mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o) \cap (\mathcal{E}_\beta < h_1 \dots h_r >)^\Gamma = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < h'_1 \dots h'_s >. \quad (\text{H1})$$

Se (H1) for satisfeita então para cada, $1 \leq j \leq s$, h'_j poderá ser decomposta como

$$h'_j(x, \beta) = \sum_{i=1}^r (\eta_j)_i(\beta) h_i(x)$$

onde $\eta_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $\eta_j = (\eta_{j1} \dots \eta_{jr})$ é Γ -equivariante, ou seja,

$$\eta_j((\gamma_r \times \gamma_\ell)\beta) = \gamma_r \eta_j(\beta), \forall \gamma \in \Gamma.$$

Definimos

$$N = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \eta_1 \dots \eta_s > \quad (3.1)$$

e para $1 \leq j \leq s$,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^{r+\ell} \\ \beta &\mapsto (\eta_j(\beta), \lambda). \end{aligned}$$

Note que $\hat{\eta}_j \in \vec{\mathcal{E}}_\beta^\Gamma$, $1 \leq j \leq s$, pois $\hat{\eta}_j((\gamma_r \times \gamma_\ell)\beta) = (\eta_j((\gamma_r \times \gamma_\ell)\beta), \gamma_\ell \lambda) = (\gamma_r \eta_j(\beta), \gamma_\ell \lambda) = (\gamma_r \times \gamma_\ell)(\eta_j(\beta), \lambda) = (\gamma_r \times \gamma_\ell) \hat{\eta}_j(\beta)$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Seja

$$\hat{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \hat{\eta}_1 \dots \hat{\eta}_s >. \quad (3.2)$$

2. Analogamente, *supomos* que exista um número finito de geradores $h_1'' \dots h_t''$ tais que

$$\mathbf{TU}^\Gamma(\hat{F}_0) \cap (\mathcal{E}_\beta < h_1 \dots h_r >)^\Gamma = \mathcal{E}_\beta < h_1'' \dots h_t'' >. \quad (\text{H2})$$

Note que $\mathcal{E}_\beta^\Gamma < h_1'' \dots h_t'' > \subset \mathcal{E}_\beta < h_1' \dots h_s' > .$

Se (H2) for satisfeita, para cada, $1 \leq j \leq t$, h_j'' poderá ser decomposta como

$$h_j''(x, \beta) = \sum_{i=1}^r (\tilde{\eta}_j)_i(\beta) h_i(x)$$

onde $\tilde{\eta}_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $\tilde{\eta}_j = (\tilde{\eta}_{j1} \dots \tilde{\eta}_{jr})$ é Γ -equivariante.

Definimos

$$\tilde{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_t > \quad (3.3)$$

e para, $1 \leq j \leq t$,

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\eta}}_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^{r+\ell} \\ \beta &\mapsto (\tilde{\eta}_j(\beta), \lambda). \end{aligned}$$

Note que, $\hat{\tilde{\eta}}(\beta) \in \vec{\mathcal{E}}_\beta^\Gamma$, $1 \leq j \leq t$.

Seja

$$\hat{\tilde{N}} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \hat{\tilde{\eta}}_1 \dots \hat{\tilde{\eta}}_t >. \quad (3.4)$$

Definição 3.2.4. Seja $\omega_\beta : \vec{\mathcal{E}}_\beta^\Gamma \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}^\Gamma$ definida por

$$\omega_\beta(\hat{\mu}) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} (\mathbf{I}_\beta + \tau \hat{\mu})^* \hat{F}_o = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} (\pi_r \circ (\mathbf{I}_\beta + \tau \hat{\mu}))^* F_o = \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \hat{\mu})_i h_i.$$

É imediato que $\omega_\beta(\hat{\mu}) \in \vec{\mathcal{E}}_{(x,\beta)}^\Gamma$ pois

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\hat{\mu})(\gamma_n x, (\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) &= \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \hat{\mu})_i ((\gamma_r \times \gamma_\ell) \beta) h_i(\gamma_n x) \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r (\gamma_r)_{ij} (\pi_r \circ \hat{\mu})_j(\beta) \right) h_i(\gamma_n x) \\ &= \gamma_m \omega_\beta(\hat{\mu})(x, \beta). \end{aligned}$$

A última igualdade se verifica através de cálculos semelhantes aos da pág. 77.

Proposição 3.2.5.

1. $\omega_\beta^{-1}(\mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o)) = \hat{N}$, $\hat{N}$ definido em (3.2).
2. $\omega_\beta^{-1}(\mathbf{TU}^\Gamma(\hat{F}_o)) = \hat{\hat{N}}$, $\hat{\hat{N}}$ definido em (3.4).

Prova. Mostramos 1. em duas etapas.

(i) $\hat{N} \subset \omega_\beta^{-1}(\mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o))$.

Seja $\hat{\eta} \in \hat{N}$, ou seja, $\hat{\eta} = \sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j$.

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\hat{\eta}) &= \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \hat{\eta})_i h_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s \mu_j (\pi_r \circ \hat{\eta}_j) \right)_i h_i \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s \mu_j (\pi_r \circ \hat{\eta}_j)_i \right) h_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s \mu_j (\eta_j)_i \right) h_i \\ &= \sum_{j=1}^s \mu_j \left(\sum_{i=1}^r (\eta_j)_i h_i \right) = \sum_{j=1}^s \mu_j h'_j. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\omega_\beta(\hat{\eta}) \in \mathcal{E}_\beta < h'_1 \dots h'_s > \subset \mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o)$, por (H1).

(ii) $\omega_\beta^{-1}(\mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o)) \subset \hat{N}$.

Seja $\hat{\mu} \in \vec{\mathcal{E}}_\beta^\Gamma$ tal que $\omega_\beta(\hat{\mu}) \in \mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o)$. Devemos mostrar que $\hat{\mu} \in \hat{N}$.

$\omega_\beta(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \hat{\mu})_i h_i \in \mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o)$ implica, por (H1), que $\omega_\beta(\hat{\mu}) \in \mathcal{E}_\beta^\Gamma < h'_1 \dots h'_s >$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\hat{\mu}) &= \sum_{j=1}^r \mu_j h'_j = \sum_{j=1}^s \mu_j \left(\sum_{i=1}^r (\eta_j)_i h_i \right) = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s \mu_j (\eta_j)_i \right) h_i \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s \mu_j (\pi_r \circ \hat{\eta}_j)_i \right) h_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s (\mu_j (\pi_r \circ \hat{\eta}_j))_i \right) h_i \\ &= \omega_\beta \left(\sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j \right). \end{aligned}$$

Por unicidade, $\hat{\mu} = \sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j$ e, portanto, $\hat{\mu} \in \hat{N}$.

A proposição segue de (i) e (ii).

Analogamente, mostramos que 2. é verdadeira. □

Definição 3.2.6. Para $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$, seja $\omega_{\tilde{\alpha}} : \mathcal{P}_{\ell,r} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^{\Sigma}$ dada por

$$\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} (\tilde{\alpha} + \tau \xi)^* F_o = \sum_{i=1}^r \xi_i h_i.$$

Proposição 3.2.7. $\omega_{\tilde{\alpha}}$ é um $\mathbb{R}$ -isomorfismo entre $\mathcal{P}$ e $(\mathcal{E}_{\lambda} < h_1 \dots h_r >)^{\Gamma}$.

Prova. (i) É imediato que $\omega_{\tilde{\alpha}}$ é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear.

(ii) $\omega_{\tilde{\alpha}}$ é injetora pois $\{h_i\}_{i=1}^r$ é uma base de $\mathcal{N}_e^{\Sigma}(f_0)$.

(iii) $\omega_{\tilde{\alpha}}(\mathcal{P}) = (\mathcal{E}_{\lambda} < h_1 \dots h_r >)^{\Gamma}$.

De fato, nós já mostramos que para $\xi \in \mathcal{P}$, $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi)$ é Γ -equivariante e, portanto,

$$\omega_{\tilde{\alpha}}(\mathcal{P}) \subset (\mathcal{E}_{\lambda} < h_1 \dots h_r >)^{\Gamma}.$$

Resta verificar que $(\mathcal{E}_{\lambda} < h_1 \dots h_r >)^{\Gamma} \subset \omega_{\tilde{\alpha}}(\mathcal{P})$. Para isso, seja $\zeta \in (\mathcal{E}_{\lambda} < h_1 \dots h_r >)^{\Gamma}$, isto é, $\zeta(x, \lambda) = \sum_{i=1}^r \nu_i(\lambda) h_i(x)$.

Seja $\nu(\lambda) = (\nu_1(\lambda) \dots \nu_r(\lambda))$. Afirmamos que $\nu \in \mathcal{P}$.

Definindo $\xi = \int_{\Gamma} \gamma_r^t \nu \circ \gamma_{\ell}$ onde $\int_{\Gamma}$ é a integral de Haar e escrevendo $h(x) = (h_1(x) \dots h_r(x))$, temos que $\xi \in \mathcal{P}$ e

$$\begin{aligned} (\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi))(x, \lambda) &= \langle \xi(\lambda), h(x) \rangle = \langle (\int_{\Gamma} \gamma_r^t \nu \circ \gamma_{\ell})(\lambda), h(x) \rangle \\ &= \int_{\Gamma} \langle \nu(\gamma_{\ell} \lambda), \gamma_r^t h(x) \rangle = \int_{\Gamma} \langle \nu(\gamma_{\ell} \lambda), (\mathbf{I}_r \otimes \gamma_m^{-1}) h(\gamma_n x) \rangle \\ &= \int_{\Gamma} \gamma_m^{-1} \langle \nu(\gamma_{\ell} \lambda), h(\gamma_n x) \rangle = \int_{\Gamma} \gamma_m^{-1} \zeta(\gamma_{\ell} \lambda, \gamma_n x) \\ &= \int_{\Gamma} \gamma_m^{-1} \gamma_m \zeta(x, \lambda) = \zeta(x, \lambda) = (\omega_{\tilde{\alpha}}(\nu))(x, \lambda). \end{aligned}$$

Segue, por injetividade, que $\nu = \xi$ e, portanto, $\nu \in \mathcal{P}$. □

Definição 3.2.8. Para $\tilde{\beta} \in \hat{\mathcal{P}}$, definimos $\omega_{\tilde{\beta}} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^{\Gamma}$ por $\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) = \omega_{\tilde{\alpha}}(\pi_r \circ \tilde{\xi})$.

Pela Definição 3.2.6., segue que

$$\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^r \xi_i h_i \text{ com } \xi = \pi_r \circ \tilde{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_r)$$

e $\omega_{\tilde{\beta}}$ é um $\mathbb{R}$ -isomorfismo entre $\hat{\mathcal{P}}$ e $(\mathcal{E}_\lambda < h_1 \dots h_r >)^\Gamma$.

Recorde que

- Para $\tilde{\beta} \in \hat{\mathcal{P}}$, $(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma$,
 $\hat{T}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) = \{T(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) + D_x(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) X \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \text{ e } X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma\}$.
 $\hat{T}\mathcal{U}^\Gamma(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) = \{T(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) + D_x(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) X \mid T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma, X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o} \text{ satisfazendo } T^o = 0 \text{ e } (D_x X)^o = 0\}$.

- Seguem de (3.1) e (3.3),

$N = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \eta_1 \dots \eta_s >$, $\eta_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ é Γ -equivariante, $1 \leq j \leq s$,

$\tilde{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_t >$, $\tilde{\eta}_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ é Γ -equivariante, $1 \leq j \leq t$.

Sejam $(\tilde{\beta}^* \eta_j) : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ dada por $(\tilde{\beta}^* \eta_j)(\lambda) = \eta_j(\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda)$, $1 \leq j \leq s$, e

$(\tilde{\beta}^* \tilde{\eta}_j) : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ dada por $(\tilde{\beta}^* \tilde{\eta}_j)(\lambda) = \tilde{\eta}_j(\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda)$, $1 \leq j \leq t$.

Vemos que $\tilde{\beta}^* \eta_j$ e $\tilde{\beta}^* \tilde{\eta}_j$ pertencem à $\mathcal{P}$ e podemos escrever $\tilde{\beta}^* \eta_j = \tilde{\alpha}^* \eta_j$,
 $1 \leq j \leq s$, e $\tilde{\beta}^* \tilde{\eta}_j = \tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_j$, $1 \leq j \leq t$. Definimos

$$\tilde{\alpha}^* N = \mathcal{E}_\lambda^\Gamma < \tilde{\alpha}^* \eta_1 \dots \tilde{\alpha}^* \eta_s > \quad (3.5)$$

e

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{N} = \mathcal{E}_\lambda^\Gamma < \tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_t >. \quad (3.6)$$

- Seguem de (3.2) e (3.4),

$\hat{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \hat{\eta}_1 \dots \hat{\eta}_s >$, $\hat{\eta}_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ é Γ -equivariante, $1 \leq j \leq s$,

$\hat{\tilde{N}} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \hat{\tilde{\eta}}_1 \dots \hat{\tilde{\eta}}_t >$, $\hat{\tilde{\eta}}_j : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ é Γ -equivariante, $1 \leq j \leq t$.

Por definição, $(\tilde{\beta}^* \hat{\eta}_j)(\lambda) = \hat{\eta}_j(\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda) = (\eta_j(\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda), \lambda)$, $1 \leq j \leq s$, e $(\tilde{\beta}^* \hat{\tilde{\eta}}_j)(\lambda) = \hat{\tilde{\eta}}_j(\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda) = (\tilde{\eta}_j(\tilde{\alpha}(\lambda), \lambda), \lambda)$, $1 \leq j \leq t$.

Consequentemente, $\tilde{\beta}^* \hat{\eta}_j$ e $\tilde{\beta}^* \hat{\tilde{\eta}}_j$ pertencem à $\hat{\mathcal{P}}$, $1 \leq j \leq s$, $1 \leq j \leq t$, respectivamente.

Definimos

$$\tilde{\beta}^* \hat{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \tilde{\beta}^* \hat{\eta}_1 \dots \tilde{\beta}^* \hat{\eta}_s > \quad (3.7)$$

e

$$\tilde{\beta}^* \hat{\tilde{N}} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \tilde{\beta}^* \hat{\tilde{\eta}}_1 \dots \tilde{\beta}^* \hat{\tilde{\eta}}_t >. \quad (3.8)$$

Proposição 3.2.9.

1. $\omega_{\tilde{\beta}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^*\hat{F}_o)) = \tilde{\beta}^*\hat{N}.$
2. $\omega_{\tilde{\beta}}^{-1}(\hat{\mathcal{U}}^\Gamma(\tilde{\beta}^*\hat{F}_o)) = \tilde{\beta}^*\hat{N}.$

onde $\omega_{\tilde{\beta}}$ é dada pela definição 3.2.8. e $\tilde{\beta}^*\hat{N}$, $\tilde{\beta}^*\hat{\tilde{N}}$ estão definidos em (3.7) e (3.8).

Prova. Para provar 1., primeiro mostramos que

(i) $\omega_{\tilde{\beta}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^*\hat{F}_o)) \subset \tilde{\beta}^*\hat{N}$ em duas etapas.

Etapa 1. Pela definição 3.2.1, $\tilde{\beta}$ é uma imersão e, portanto existe $\Psi : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, 0)$ tal que $\Psi \circ \tilde{\beta} = \mathbf{I}_\ell$. Dessa forma, é possível exibir uma aplicação Γ -equivariante $\tilde{\Psi}$, isto é, $\tilde{\Psi} \circ (\gamma_r \times \gamma_\ell) = \gamma_\ell \tilde{\Psi}$, tal que $\tilde{\Psi} \circ \tilde{\beta} = \mathbf{I}_\ell$.

Definimos $\tilde{\Psi} = \int_\Gamma \gamma_\ell^t \Psi \circ (\gamma_r \times \gamma_\ell)$ onde $\int_\Gamma$ é a integral de Haar.

Usando as propriedades da integral de Haar, temos que

$$\tilde{\Psi} : (\mathbb{R}^{r+\ell}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, 0) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} \circ (\gamma_r' \times \gamma_\ell') &= \int_\Gamma \gamma_\ell^t \Psi \circ (\gamma_r \times \gamma_\ell) \circ (\gamma_r' \times \gamma_\ell') \\ &= \int_\Gamma \gamma_\ell' \gamma_\ell'^t \gamma_\ell^t \circ \Psi \circ (\gamma_r \times \gamma_\ell) \circ (\gamma_r' \times \gamma_\ell') \\ &= \int_\Gamma \gamma_\ell' \nu^t \Psi \circ (\nu \times \nu), \text{ com } \nu = \gamma \gamma', \\ &= \gamma_\ell' \circ \tilde{\Psi}. \end{aligned}$$

$$\text{Além disso, } \tilde{\Psi} \circ \tilde{\beta} = \int_\Gamma \gamma_\ell^t \Psi \circ (\gamma_r \times \gamma_\ell) \circ \tilde{\beta} = \int_\Gamma \gamma_\ell^t \Psi \circ \tilde{\beta} \circ \gamma_\ell = \int_\Gamma \gamma_\ell^t \gamma_\ell = \mathbf{I}_\ell.$$

Via $\tilde{\Psi}$,

- $\mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \tilde{\beta}^* \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma$ pois $\tilde{\beta}^* \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma \subset \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e para $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, definimos $\hat{S}(x, \beta) = (\tilde{\Psi}^* T)(x, \beta) = T(x, \tilde{\Psi}(\beta))$; Claramente, $\hat{S} \in \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma$, e $(\tilde{\beta}^* \hat{S})(x, \lambda) = \hat{S}(x, \tilde{\beta}(\lambda)) = T(x, \tilde{\Psi} \circ \tilde{\beta}(\lambda)) = T(x, \lambda).$
- $\tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma = \tilde{\beta}^* \tilde{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma$ pois para $X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, definimos $\hat{\xi}(x, \beta) = (\tilde{\Psi}^* X)(x, \beta) = X(x, \tilde{\Psi}(\beta))$; Obviamente, $\hat{\xi} \in \tilde{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma$, e $\tilde{\beta}^* \hat{\xi}(x, \lambda) = \hat{\xi}(x, \tilde{\beta}(\lambda)) = X(x, \tilde{\Psi} \circ \tilde{\beta}(\lambda)) = X(x, \lambda).$

Etapa 2. Seja $\tilde{\xi} \in \hat{\mathcal{P}}$ tal que $\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) \in \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)$. Devemos mostrar que $\tilde{\xi} \in \tilde{\beta}^* \hat{N}$.

Note que $\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) = \omega_{\tilde{\alpha}}(\pi_r \circ \tilde{\xi}) = \omega_{\tilde{\alpha}}(\xi) = \sum_{i=1}^r \xi_i h_i \in \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)$ implica que para alguma $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e algum $X \in \tilde{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma$,

$$\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi})(x, \lambda) = T(x, \lambda) (\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)(x, \lambda) + (D_x(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o))(x, \lambda) X(x, \lambda).$$

Pela etapa 1,

$$\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) = \tilde{\beta}^*(\hat{S} \hat{F}_o + (D_x \hat{F}_o) \hat{\xi}) \in \tilde{\beta}^*(\hat{\mathbf{T}}^\Gamma \hat{F}_o) \text{ com } \hat{S} \in \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma \text{ e } \hat{\xi} \in \tilde{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma.$$

Pela proposição 3.2.5.1, $\omega_{\tilde{\beta}}^{-1}(\hat{\mathbf{T}}^\Gamma \hat{F}_o) = \hat{N}$ e podemos escrever $\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) \in \tilde{\beta}^* \omega_{\beta}(\hat{N})$, isto é, existe $\hat{\xi} \in \hat{N}$, $\hat{\xi} = \sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j$, tal que

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) &= \tilde{\beta}^* \omega_{\beta}(\hat{\xi}) = \tilde{\beta}^* (\sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \hat{\xi})_i h_i) \\ &= \tilde{\beta}^* (\sum_{i=1}^r (\sum_{j=1}^s \mu_j (\pi_r \circ \hat{\eta}_j))_i h_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \tilde{\beta}^* (\sum_{j=1}^s \mu_j (\pi_r \circ \hat{\eta}_j))_i h_i \\ &= \sum_{i=1}^r \tilde{\beta}^* (\pi_r \circ \sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j)_i h_i \\ &= \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ (\tilde{\beta}^* \sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j))_i h_i \\ &= \omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\beta}^* \hat{\xi}). \end{aligned}$$

Por unicidade, $\tilde{\xi} = \tilde{\beta}^* \hat{\xi}$ com $\hat{\xi} \in \hat{N}$ e assim $\tilde{\xi} \in \tilde{\beta}^* \hat{N}$.

Portanto, $\omega_{\tilde{\beta}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)) \subset \tilde{\beta}^* \hat{N}$.

(ii) $\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\beta}^* \hat{N}) \subset \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)$.

Seja $\hat{\xi} \in \hat{N}$, isto é, $\hat{\xi} = \sum_{j=1}^s \mu_j \hat{\eta}_j$. Pela proposição 3.2.5.1, $\omega_{\beta}(\hat{\xi}) \in \mathbf{T}^\Gamma(\hat{F}_o)$ e, assim, podemos escrever $\omega_{\beta}(\hat{\xi}) = \hat{S} \hat{F}_o + (D_x \hat{F}_o) \hat{\xi}'$ para alguma $\hat{S} \in \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma$ e para algum $\hat{\xi}' \in \tilde{\Theta}_{(x,\beta)}^\Gamma$. Segue que,

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\beta}^* \hat{\xi}) &= \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \tilde{\beta}^* \hat{\xi})_i h_i = \sum_{i=1}^r \tilde{\beta}^* (\pi_r \circ \hat{\xi})_i h_i \\ &= \tilde{\beta}^* \sum_{i=1}^r (\pi_r \circ \hat{\xi})_i h_i = \tilde{\beta}^* \omega_{\beta}(\hat{\xi}) = \tilde{\beta}^* (\hat{S} \hat{F}_o + (D_x \hat{F}_o) \hat{\xi}') \\ &= (\tilde{\beta}^* \hat{S}) (\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) + (D_x (\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)) (\tilde{\beta}^* \hat{\xi}') \\ &= \mathbf{T}(\tilde{\beta}^* \hat{F}_o) + (D_x (\tilde{\beta}^* \hat{F}_o)) X \end{aligned}$$

para alguma $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma$ e para algum $X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^\Gamma$, pela etapa 1.

Consequentemente, $\omega_{\hat{\beta}}(\hat{\beta}^*\hat{\xi}) \in \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\hat{\beta}^*\hat{F}_o)$ e, portanto, $\omega_{\hat{\beta}}(\hat{\beta}^*\hat{N}) \subset \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\hat{\beta}^*\hat{F}_o)$.

De (i) e (ii), $\omega_{\hat{\beta}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\hat{\beta}^*\hat{F}_o)) = \hat{\beta}^*\hat{N}$.

Resta mostrar 2. . Como a demonstração é análoga à de 1., omitiremos os cálculos.

Para mostrar que $\omega_{\hat{\beta}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}\mathcal{U}^\Gamma(\hat{\beta}^*\hat{F}_o)) = \hat{\beta}^*\hat{N}$, usamos Proposição 3.2.5.2., a definição de $\hat{\mathcal{T}}\mathcal{U}^\Gamma(\hat{F}_o)$ e escrevemos, via $\tilde{\Psi}$,

$$(\tilde{\beta}^*\hat{S})(x, \lambda) = T(x, \lambda) \text{ com } \hat{S} \in \mathbf{M}_{(x,\beta)}^\Gamma \text{ e } T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda)}^\Gamma \quad e$$

$$(\tilde{\beta}^*\hat{\xi})(x, \lambda) = X(x, \lambda) \text{ com } \hat{\xi} \in \vec{\Theta}_{(x,\beta)}^{\Gamma,o} \text{ e } X \in \vec{\Theta}_{(x,\lambda)}^{\Gamma,o}.$$

Note que

$$(\tilde{\beta}^*\hat{S})^o = 0 \Leftrightarrow T^o = 0$$

$$(D_x \tilde{\beta}^*\hat{\xi})^o = 0 \Leftrightarrow (D_x X)^o = 0.$$

Portanto, a proposição se verifica. □

Definição 3.2.10. Para $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$, definimos o *espaço tangente ao caminho $\tilde{\alpha}$* por

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^*N + (D_\lambda \tilde{\alpha}) \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma$$

e o *espaço tangente unipotente à $\tilde{\alpha}$* por

$$\mathcal{T}\mathcal{U}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^*\tilde{N} + (D_\lambda \tilde{\alpha}) \mathcal{M}_\lambda^2 \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma,$$

onde N e $\tilde{N}$ foram definidos em (3.1) e (3.3), respectivamente.

Proposição 3.2.11. Seja $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$ e $\omega_{\tilde{\alpha}}$ como na Definição 3.2.6. Então,

$$1. \omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\alpha}^*F_o)) = \tilde{\alpha}^*N.$$

$$2. \omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\hat{\mathcal{T}}\mathcal{U}^\Gamma(\tilde{\alpha}^*F_o)) = \tilde{\alpha}^*\tilde{N}.$$

Prova. Segue da Proposição 3.2.9. pois

(i) $\tilde{\alpha}^*F_o = \tilde{\beta}^*\hat{F}_o$ (veja pág. 79).

(ii) $\omega_{\tilde{\beta}}(\tilde{\xi}) = \omega_{\tilde{\alpha}}(\pi_r \circ \tilde{\xi})$, pela definição 3.2.8.

(iii) $\hat{\alpha} * N = \hat{\beta}^*(\pi_r \circ \hat{N})$ e $\hat{\alpha} * \hat{N} = \hat{\beta}^*(\pi_r \circ \hat{N})$ com $\hat{N}, \hat{N}$ dados por (3.2), (3.4), respectivamente, e $\pi_r \circ \hat{N}, \pi_r \circ \hat{N}$ denotam os seguintes $\mathcal{E}_\beta^\Gamma$ -módulos:

$$\pi_r \circ \hat{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \pi_r \circ \hat{\eta}_1 \dots \pi_r \circ \hat{\eta}_s >,$$

$$\pi_r \circ \hat{N} = \mathcal{E}_\beta^\Gamma < \pi_r \circ \hat{\eta}_1 \dots \pi_r \circ \hat{\eta}_s > .$$

□

Proposição 3.2.12.

1. $\omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)) = \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$.
2. $\omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{TU}^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)) = \mathcal{TU}(\tilde{\alpha})$.

Prova. Mostramos 1. em duas etapas:

(i) $\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) \subset \omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o))$.

Podemos decompor $\tilde{\xi} \in \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$ como $\tilde{\xi} = \xi_1 + \xi_2$ com $\xi_1 \in \hat{\alpha} * \hat{N}$ e $\xi_2 \in (D_\lambda \tilde{\alpha}) \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma$. Usando a Proposição 3.2.11.1, $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi_1) \in \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$.

Seja $\xi_2 = (L_1 \dots L_r)$ onde $L_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial \tilde{\alpha}_i}{\partial \lambda_j} \Lambda_j$. Então,

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{\alpha}}(\xi_2)(x, \lambda) &= \sum_{i=1}^r L_i(\lambda) h_i(x) = D_\alpha F_o(x, \tilde{\alpha}(\lambda)) D_\lambda \tilde{\alpha}(\lambda) \Lambda(\lambda) \\ &= D_\lambda (\tilde{\alpha} * F_o)(x, \lambda) \Lambda(\lambda). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi_2) = (D_\lambda (\tilde{\alpha} * F_o)) \circ \Lambda$ para algum $\Lambda \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma$. Segue da linearidade de $\omega_{\tilde{\alpha}}$ que $\omega_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\xi}) \in \mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$. Portanto, (i) se verifica.

(ii) Seja $\tilde{\xi} \in \mathcal{P}$ e suponhamos que $\omega_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\xi}) = \zeta \in \mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$. Temos que mostrar que $\tilde{\xi} \in \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$. Podemos decompor $\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o) = \hat{\mathcal{T}}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o) + \{(D_\lambda (\tilde{\alpha} * F_o)) \circ \Lambda \mid \Lambda \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma\}$ e $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$. Afirmamos que existe $\xi_2 \in (D_\lambda \tilde{\alpha}) \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma$ tal que $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi_2) = \zeta_2$. De fato,

$$\zeta_2 = (D_\lambda (\tilde{\alpha} * F_o)) \circ \Lambda \text{ para algum } \Lambda \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^\Gamma \text{ e, portanto,}$$

$$\zeta_2 = (D_\lambda (\tilde{\alpha} * F_o)) \circ \Lambda = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial \tilde{\alpha}_i}{\partial \lambda_j} \Lambda_j \right) h_i = \omega_{\tilde{\alpha}}((D_\lambda \tilde{\alpha}) \circ \Lambda) .$$

Logo, existe ξ_2 satisfazendo a afirmação.

Da linearidade de $\omega_{\tilde{\alpha}}$, $\zeta_1 = \omega_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\xi} - \xi_2)$ e pela Proposição 3.2.11, $\tilde{\xi} - \xi_2 \in \tilde{\alpha} * N$ e, como consequência, $\omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)) \subset \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$.

De (i) e (ii), $\omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)) = \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$.

A prova de 2. é análoga à de 1. e basta usar a Proposição 3.2.11.2. e as definições dos espaços tangentes unipotentes à $\tilde{\alpha} * F_o$ e $\tilde{\alpha}$. $\square$

Denotamos por $\mathbf{P}(\tilde{\alpha})$, os termos de ordem alta de $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$ e definimos

Definição 3.2.13. $\xi \in \mathbf{P}(\tilde{\alpha})$ se e somente se $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi) \in \mathbf{P}(\tilde{\alpha} * F_o)$.

Corolário 3.2.14. Seja $\xi \in \mathcal{TU}(\tilde{\alpha})$. Se $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi) \in \text{Intr } \mathcal{TU}^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$ então $\xi \in \mathbf{P}(\tilde{\alpha})$.

Prova. Como $\xi \in \mathcal{TU}(\tilde{\alpha})$, $\omega_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{TU}^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$ pela Proposição 3.2.12.2. Por hipótese, $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi) \in \text{Intr } \mathcal{TU}^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$ e, portanto, $\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi) \in \mathbf{P}(\tilde{\alpha} * F_o)$ pela Proposição 1.10.3.1. Da Definição 3.2.13., $\xi \in \mathbf{P}(\tilde{\alpha})$. $\square$

Definição 3.2.15. Definimos o espaço normal estendido à $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$ por

$$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{T}(\tilde{\alpha})}.$$

Teorema 3.2.16. $\omega_{\tilde{\alpha}}$ induz um isomorfismo de espaço vetorial real entre $\mathcal{N}(\tilde{\alpha})$ e $\mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$.

Além disso, se $\{\phi_i\} \subset \mathcal{P}$ se projetar sobre uma base de $\mathcal{N}(\tilde{\alpha})$ então $\{\omega_{\tilde{\alpha}}\{\phi_i\}\}$ se projetará sobre uma base de $\mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$.

Prova. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\omega_{\tilde{\alpha}}} & \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ \pi_{\tilde{\alpha}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\tilde{\alpha}} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\Omega_{\tilde{\alpha}}} & \vec{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma \\ \mathcal{T}(\tilde{\alpha}) & & \mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o) \end{array}$$

Definimos $\Omega_{\tilde{\alpha}} : \mathcal{N}(\tilde{\alpha}) \rightarrow \mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$ por $\Omega_{\tilde{\alpha}}([v]) = [\omega_{\tilde{\alpha}}(v)]$.

(i) $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ é bem definida, ou seja, $[v_1] = [v_2]$ implica $\Omega_{\tilde{\alpha}}([v_1]) = \Omega_{\tilde{\alpha}}([v_2])$.

Note que se $[v_1] = [v_2]$ então $v_1 - v_2 \in \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$ e, portanto, $\omega_{\tilde{\alpha}}(v_1 - v_2) \in \mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$ pela Proposição 3.2.12.1. Logo, $[\omega_{\tilde{\alpha}}(v_1)] = [\omega_{\tilde{\alpha}}(v_2)]$.

(ii) $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ é linear pois $\omega_{\tilde{\alpha}}$ e as projeções são lineares.

(iii) $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ é injetora pois se $\Omega_{\tilde{\alpha}}([v_1]) = \Omega_{\tilde{\alpha}}([v_2])$ então $\omega_{\tilde{\alpha}}(v_1) - \omega_{\tilde{\alpha}}(v_2) \in \mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$. Pela Proposição 3.2.12.1, $(v_1 - v_2) \in \omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)) = \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$ e, portanto, $[v_1] = [v_2]$.

(iv) $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ é sobrejetora.

$$I_m \Omega_{\tilde{\alpha}} = \{[f] \in \mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o) \mid [f] = \Omega_{\tilde{\alpha}}([v]) \text{ para alguma } [v] \in \mathcal{N}(\tilde{\alpha})\}.$$

Como $I_m \Omega_{\tilde{\alpha}} \subset \mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$, resta mostrar que $\mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o) \subset I_m \Omega_{\tilde{\alpha}}$.

Seja $[f] \in \mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$. Usando a definição de $\Omega_{\tilde{\alpha}}$, $[f] = \pi_{\tilde{\alpha}}(\omega_{\tilde{\alpha}}(\xi)) = (\Omega_{\tilde{\alpha}} \circ \pi_{\tilde{\alpha}})(\xi) = \Omega_{\tilde{\alpha}}([\xi])$ para algum $\xi \in \mathcal{P}$, ou seja, $[f] \in I_m \Omega_{\tilde{\alpha}}$.

Portanto, $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{N}_e(\tilde{\alpha})$ e $\mathcal{N}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$. A outra afirmação do teorema segue da Proposição 3.2.12.1. pois $\omega_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathcal{T}_e^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)) = \mathcal{T}(\tilde{\alpha})$. $\square$

Definição 3.2.17. Para $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$, $\text{cod}^\Gamma(\tilde{\alpha}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{T}(\tilde{\alpha})}$.

Corolário 3.2.18. $\text{cod}^\Gamma(\tilde{\alpha} * F_o)$ é finita se e somente se $\text{cod}^\Gamma(\tilde{\alpha})$ é finita.

Prova. É uma consequência imediata do Teorema 3.2.16. $\square$

Observação 3.2.19. Note que se $\text{cod}^\Gamma(f)$ e $\text{cod}^\Sigma(f_0)$ forem finitas então $\text{cod}^\Gamma(f_0)$ será finita.

De fato, seja $W = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda)}^\Gamma}{\mathcal{T}_e^\Gamma(f_0)}$. Como $\text{cod}^\Gamma(f)$ é finita, W é um espaço vetorial real finitamente gerado e

$$\frac{W}{\mathcal{M}_\lambda^\Gamma \cdot W} = \mathcal{N}_e^\Gamma(f_0) \subset \mathcal{N}_e^\Sigma(f_0).$$

Portanto, $\text{cod}^\Gamma(f_0)$ é finita pois $\text{cod}^\Gamma(f_0) \leq \text{cod}^\Sigma(f_0) < \infty$.

Observação 3.2.20. Como mencionado na pág. 73, a Σ -teoria para a formulação de caminhos de problemas de bifurcação multiparamétricos com simetria nas variáveis -padrão e também nos parâmetros é válida se a hipótese (H0) : $\text{cod}^\Sigma(f_0) < \infty$ for verdadeira.

O exemplo a seguir mostra que

$$\text{cod}^\Gamma(f) < \infty \text{ não implica que } \text{cod}^\Sigma(f_0) < \infty.$$

Exemplo. Seja $O(2)$ agindo em $\mathbb{C}^2$ por

$$\theta \cdot (z, \lambda) = (e^{i\theta} z, e^{i\theta} \lambda)$$

$$\kappa \cdot (z, \lambda) = (\bar{z}, \bar{\lambda}).$$

• $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{O(2)} = \{g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid g(\theta \cdot (z, \lambda)) = g(z, \lambda) \text{ e } g(\kappa \cdot (z, \lambda)) = g(z, \lambda)\}$ é o anel dos germes $O(2)$ -invariantes. Para cada $g \in \mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{O(2)}$ existe $p : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(z, \lambda) = p(u, v, \omega)$ onde $u = z\bar{z}$, $v = \lambda\bar{\lambda}$ e $\omega = z\bar{\lambda} + \bar{z}\lambda$. (cf. [16], pág. 339).

• $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{O(2)} = \{f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\theta \cdot (z, \lambda)) = \theta \cdot f(z, \lambda) \text{ e } f(\kappa \cdot (z, \lambda)) = \kappa \cdot f(z, \lambda)\}$ é o $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{O(2)}$ -módulo dos germes de aplicação $O(2)$ -equivariantes.

De ([16], Ex. 5.1, pág. 53). toda $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $f(e^{i\theta} z, e^{i\theta} \lambda) = e^{i\theta} f(z, \lambda)$ pode ser escrita como

$$f(z, \lambda) = p_1(u, v, \omega) z + p_2(u, v, \omega) iz + p_3(u, v, \omega) \lambda + p_4(u, v, \omega) i\lambda.$$

Usando que $f(\bar{z}, \bar{\lambda}) = \kappa \cdot f(z, \lambda)$, obtemos $p_2 \equiv p_4 \equiv 0$. Consequentemente, $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{O(2)}$ é o $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{O(2)}$ -módulo gerado por z e λ , isto é,

$$f(z, \lambda) = p(u, v, \omega)z + q(u, v, \omega)\lambda.$$

Denotamos, também, $f = [p, q]$.

• Considerando a ação de $O(2)$ em $\lambda \in \mathbb{C}$ somente,

$$\vec{\mathcal{E}}_\lambda^{O(2)} = \{\Lambda : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C} \mid \Lambda(e^{i\theta} \lambda) = e^{i\theta} \Lambda(\lambda), \Lambda(\kappa \lambda) = \kappa \Lambda(\lambda)\}.$$

Toda aplicação $O(2)$ -equivariante $\Lambda \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^{O(2)}$ é da forma

$$\Lambda(\lambda) = \xi(\lambda\bar{\lambda})\lambda = \xi(v)\lambda,$$

para algum $\xi \in \mathcal{E}_v$.

Para a prova veja ([16], pág. 52).

- $\mathbf{M}_{(z,\lambda)}^{O(2)} = \{S : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow GL(2) \mid S(\theta \cdot (z, \lambda)) \cdot \theta = \theta \cdot S(z, \lambda) \text{ e } S(\kappa \cdot (z, \lambda)) \cdot \kappa = \kappa \cdot S(z, \lambda)\}$

é o $\mathcal{E}_{(z,\lambda)}^{O(2)}$ -módulo gerado pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$S_1(z, \lambda) w = w, \quad S_4(z, \lambda) w = z \lambda \bar{w},$$

$$S_2(z, \lambda) w = \omega_1 w, \quad S_5(z, \lambda) w = \lambda^2 \bar{w}.$$

$$S_3(z, \lambda) w = z^2 \bar{w},$$

onde $\omega_1 = z \bar{\lambda} - \bar{z} \lambda$.

Para provar essa afirmação, escrevemos a aplicação linear $S(z, \lambda)$ na forma

$$S(z, \lambda) w = f_1(z, \lambda) w + f_2(z, \lambda) \bar{w}. \quad (3.9)$$

Usando as condições de equivariância: $S(\theta \cdot (z, \lambda)) \cdot \theta = \theta \cdot S(z, \lambda)$ e $S(\kappa \cdot (z, \lambda)) \cdot \kappa = \kappa \cdot S(z, \lambda)$, obtemos as relações:

$$f_1(\theta \cdot (z, \lambda)) = f_1(z, \lambda),$$

$$f_2(\theta \cdot (z, \lambda)) = 2 \theta \cdot f_2(z, \lambda),$$

$$f_i(\bar{z}, \bar{\lambda}) = \kappa \cdot f_i(z, \lambda), \quad i = 1, 2.$$

f_1 é $\mathbf{S}^1$ -invariante e, portanto, podemos escrever $f_1(z, \lambda) = f_1(u, v, \omega, \omega_1)$.

Como $\omega_1^2 - \omega^2 = 4uv$, decompomos f_1 da seguinte maneira:

$$f_1(u, v, \omega, \omega_1) = f_{11}(u, v, \omega) + \omega_1 f_{12}(u, v, \omega).$$

Em particular, f_{1i} , $i = 1, 2$, são κ -invariantes e, portanto, f_{1i} , $i = 1, 2$, têm valores reais. Logo,

$$f_1(z, \lambda) w = f_{11}(u, v, \omega) w + f_{12}(u, v, \omega) \omega_1 w. \quad (3.10)$$

Resta analisar as condições de equivariância de f_2 , isto é,

$$f_2(\theta \cdot (z, \lambda)) = 2 \theta \cdot f_2(z, \lambda) \quad (3.11)$$

$$f_2(\bar{z}, \bar{\lambda}) = \kappa \cdot f_2(z, \lambda). \quad (3.12)$$

Os invariantes para esta ação são u, v, ω e ω_1 .

É suficiente achar os geradores para o módulo dos polinômios equivariantes, os quais são somas finitas de elementos da forma $a_{ijk\ell} z^i \bar{z}^j \lambda^k \bar{\lambda}^\ell$, $i, j, k, \ell \geq 0$. De (3.11), $a_{ijk\ell}$ é um número real. Usando os geradores dos invariantes e (3.10), obtemos

$$f_2(z, \lambda) w = f_{21}(u, v, \omega) z^2 \bar{w} + f_{22}(u, v, \omega) z \lambda \bar{w} + f_{23}(u, v, \omega) \lambda^2 \bar{w}. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.10) e (3.13) em (3.9), segue o resultado.

- O espaço tangente estendido à $f = [p, q] \in \vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{O(2)}$ é dado por

$$\mathcal{T}_e^{O(2)}(f) = \{Sf + (D_x f)X + (D_\lambda f)\Lambda \mid S \in \mathbf{M}_{(z, \lambda)}^{O(2)}, X \in \vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{O(2)}, \Lambda \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^{O(2)}\}.$$

Calculando a expressão acima,

$$\mathcal{T}_e^{O(2)}(f) = \mathcal{E}_{(z, \lambda)}^{O(2)} \langle g_1 \dots g_7 \rangle + \mathcal{E}_\lambda^{O(2)} \langle g_8 \rangle \quad (3.14)$$

onde

$$\begin{aligned} g_1 &= [p, q], & g_5 &= [-vp, \omega p + vq], \\ g_2 &= [\omega p + 2vq, -2up - \omega q], & g_6 &= [p + 2up_u + \omega p_\omega, 2uq_u + \omega q_\omega], \\ g_3 &= [up + \omega q, -uq], & g_7 &= [\omega p_u + 2vp_\omega, p + \omega q_u + 2vq_\omega], \\ g_4 &= [vq, up], & g_8 &= [2vp_v + \omega p_\omega, q + 2vq_v + \omega q_\omega]. \end{aligned}$$

O exemplo é dado pelo diagrama de bifurcação genérico

$$f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z, \lambda) = \epsilon uz - \delta \lambda,$$

onde $\epsilon^2 = \delta^2 = 1$. Usando (3.14),

$$\mathcal{T}_e^{O(2)}(f) = [\mathcal{M}, \mathcal{E}].$$

Portanto,

$$\text{cod}^{O(2)}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{(z, \lambda)}^{O(2)}}{\mathcal{T}_e^{O(2)}(f)} = 1.$$

O centro organizador de f é dado por $f_0(z) = uz$. O subgrupo de isotropia de λ é $\Sigma = \mathbf{1}$, ou seja, Σ é o grupo trivial. Logo, o Σ -espaço tangente estendido de f_0 é igual ao espaço tangente de contato de f_0 , isto é, $\text{cod}^\Sigma(f_0) = \text{cod}^\kappa(f_0)$.

Pela Proposição 2.4 ([3], pág. 494), nas dimensões consideradas, todo germe $\mathcal{K}$ -finito é $\mathcal{C}$ -finito e usando o critério geométrico para que um germe seja $\mathcal{C}$ -finito, temos que f_0 tem Σ -codimensão infinita pois $f_0^{-1}(0) = \{x = \pm yi\}$ para $z = x + yi$.

O fato de f ser a forma genérica segue da teoria geral do capítulo 1. Um cálculo direto mostra que $\mathcal{M}$ e $\langle v, w \rangle$ são ideais intrínsecos e que $[I, J]$ é um submódulo intrínseco se e somente se I e J forem ideais intrínsecos e $\langle v, w \rangle \subset J \subset I \subset J$. Para $[\epsilon u, \delta]$, com $\epsilon^2 = \delta^2 = 1$, o conjunto de termos de ordem alta é dado por $[\mathcal{M}^2 + \langle v, w \rangle \mathcal{M}, \mathcal{M}]$. Assim, sendo $p_u^o \neq 0$ e $q^o \neq 0$, um simples reescalonamento mostra que $[p, q]$ é equivalente por contato à f com $\epsilon = sg p_u^o$ e $\delta = sg q^o$.

3.3 Formulação por caminhos e o problema D_4

Seja Γ_1 um grupo de Lie compacto agindo em $\mathbb{R}^{n+r}$ e $\mathbb{R}^m$, via representações ortogonais, onde a ação de Γ_1 em $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+r}$ pode ser separada da seguinte maneira:

$$\gamma^1 \cdot (x, \alpha) = (\gamma_n^1 x, \gamma_r^1 \alpha)$$

$$\nu \cdot (x, \alpha) = (\nu_n x, \nu_r \alpha), \quad \nu^2 = 1.$$

Seja $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \times \mathbb{Z}_2$ agindo em $\mathbb{R}^{n+\ell+1}$ por

$$(\gamma^1, 1) \cdot (x, \alpha, \delta) = (\gamma_n^1 x, \gamma_r^1 \alpha, \delta)$$

$$(\nu, -1) \cdot (x, \alpha, \delta) = (\nu_n x, \nu_r \alpha, -\delta)$$

A ação em $y \in \mathbb{R}^m$ é denotada por $\gamma_m^1 y$ e $\nu_m y$.

Definimos

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x, \alpha)}^{\tilde{\Gamma}} = \{F : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid F(\gamma_n^1 x, \gamma_r^1 \alpha) = \gamma_m^1 F(x, \alpha), \\ F(\nu_n x, \nu_r \alpha) = \nu_m F(x, \alpha)\}.$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x, \alpha, \delta)}^{\tilde{\Gamma}} = \{L : (\mathbb{R}^{n+r+1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid F(\gamma_n^1 x, \gamma_r^1 \alpha, \delta) = \gamma_m^1 F(x, \alpha, \delta), \\ F(\nu_n x, \nu_r \alpha, -\delta) = \nu_m F(x, \alpha, \delta)\}.$$

$\vec{\mathcal{E}}_{(x, \alpha)}^{\tilde{\Gamma}}$ e $\vec{\mathcal{E}}_{(x, \alpha, \delta)}^{\tilde{\Gamma}}$ são módulos sobre os correspondentes anéis de invariantes.

Pelo Lema 5.11 ([1]), as seguintes igualdades são equivalentes

$$\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma = \mathbf{M}_x^\Sigma f_0 + (D_x f_0) \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}(x, 0) \dots \frac{\partial L}{\partial \alpha_r}(x, 0)\right\}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x, \beta)}^\Sigma = \mathbf{M}_{(x, \beta)}^\Sigma L + (D_x L) \vec{\mathcal{E}}_{(x, \beta)}^\Sigma + \mathcal{E}_\beta\left\{\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial L}{\partial \alpha_r}\right\}.$$

Como

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -\frac{\partial K}{\partial \lambda_2} = -\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \beta)}^\Sigma,$$

existem $X \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \beta)}^\Sigma$, $S \in \mathbf{M}_{(x, \beta)}^\Sigma$ e $\xi \in \vec{\mathcal{E}}_{\beta, \alpha}$ such that

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, \beta) = \sum_{j=1}^2 X_j(x, \beta) \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \beta) + \sum_{i=1}^r \xi_i(\beta) \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}(x, \beta) + S(x, \beta) L(x, \beta).$$

Consequentemente,

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, \beta) = L_x(x, \beta) X(x, \beta) + L_\alpha(x, \beta) \xi(\beta) + S(x, \beta) L(x, \beta) \quad (3.20)$$

onde $X = (X_1, X_2)$ e $\xi = (\xi_1 \dots \xi_r)$.

Além disso,

- (i) $f_{\lambda_2}(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) = \kappa f_{\lambda_2}(x, \alpha, \lambda_2),$
 $f_{\lambda_2}(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) = \mu f_{\lambda_2}(x, \alpha, \lambda_2).$
- (ii) $L_x(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) = \kappa L_x(x, \alpha, \lambda_2) \kappa,$
 $L_x(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) = \mu L_x(x, \alpha, \lambda_2) \mu,$
- (iii) $L_\alpha(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) = \kappa L_\alpha(x, \alpha, \lambda_2) (\gamma_r^\kappa)^t,$
 $L_\alpha(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) = \mu L_\alpha(x, \alpha, \lambda_2) (\gamma_r^\mu)^t.$

Calculando a média de (3.20) sobre D_4 , temos

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_{D_4} -\kappa \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) &= \int_{D_4} \kappa L_x(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) X(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) \\ &+ \int_{D_4} \kappa L_\alpha(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) \xi(\gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) + \int_{D_4} \kappa S(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) L(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2), \end{aligned}$$

e assim

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, \beta) = L_x(x, \beta) \int_{D_4} \kappa X(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) + L_\alpha(x, \beta) \int_{D_4} (\gamma_r^\kappa)^t \xi(\gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2)$$

$$+ \int_{D_4} \kappa S(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) \kappa L(x, \beta),$$

$$\begin{aligned}
b) \quad & \int_{D_4} -\mu \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) = \int_{D_4} \mu L_x(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) X(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) \\
& + \int_{D_4} -\mu L_\alpha(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) \xi(\gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) + \int_{D_4} \mu S(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) L(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, \beta) &= L_x(x, \beta) \int_{D_4} -\mu X(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) \\
&+ L_\alpha(x, \beta) \int_{D_4} -(\gamma_r^\kappa)^t \xi(\gamma_r^\kappa \alpha, -\lambda_2) + \int_{D_4} -\mu S(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) \mu L(x, \beta).
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, \beta) = \sum_{j=1}^2 \hat{X}_j(x, \beta) \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \beta) + \sum_{i=1}^r \tilde{\xi}_i(\beta) \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}(x, \beta) + \tilde{S}(x, \beta) L(x, \beta)$$

onde

- $\tilde{X} = \int_{D_4} \gamma^t X \circ \gamma$, $\tilde{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ satisfaz

$$\tilde{X}(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) = \kappa \hat{X}(x, \alpha, \lambda_2) \quad \text{e} \quad \tilde{X}(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) = -\mu \hat{X}(x, \alpha, \lambda_2),$$

- $\tilde{\xi} = \int_{D_4} (\gamma_r)^t \xi \circ \gamma_r$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1 \dots \tilde{\xi}_r)$ satisfaz

$$\hat{\xi}(\gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) = \gamma_r^\kappa \hat{\xi}(\alpha, \lambda_2) \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}(\gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) = -(\gamma_r^\mu) \tilde{\xi}(\alpha, \lambda_2),$$

- $\tilde{S} = \int_{D_4} \gamma^t S \circ \gamma$ satisfaz

$$\kappa \tilde{S}(\kappa x, \gamma_r^\kappa \alpha, \lambda_2) \kappa = \tilde{S}(x, \alpha, \lambda_2) \quad \text{e} \quad \mu \tilde{S}(\mu x, \gamma_r^\mu \alpha, -\lambda_2) \mu = -\tilde{S}(x, \alpha, \lambda_2).$$

Portanto, existeum campo de vetores da forma

$$Y(x, \alpha, \lambda_2) = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \sum_{j=1}^2 \tilde{X}_j(x, \alpha, \lambda_2) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^r \tilde{\xi}_i(x, \lambda_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$$

com $\tilde{X}$ e $\tilde{\xi}$ satisfazendo as condições de equivariância do Lema 3.3.1.

Existe, também, $\tilde{S} : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$-DL \cdot Y = \tilde{S} L$$

com $\tilde{S}$ satisfazendo as condições de equivariância requeridas. Pelo Lema 3.3.1., existe uma submersão D_4 -equivariante $B : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ satisfazendo (3.18, 3.19). É suficiente, agora, encontrar uma submersão D_4 -equivariante

$$C : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0),$$

ou seja,

$$C(\gamma_r^\kappa \alpha, \lambda) = (\gamma_r^\kappa \times \mathbf{1}) \cdot C \text{ e } C(\gamma_r^\mu \alpha, \kappa \lambda) = (\gamma_r^\mu \times \kappa) \cdot C$$

tal que K se fatora através de C^*L . Com isso, existem $S_C \in \mathbf{M}_{(x, \alpha, \lambda)}^{D_4}$, $X_C \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \alpha, \lambda)}^{D_4}$ satisfazendo

$$K(x, \alpha, \lambda) = S_C(x, \alpha, \lambda) L(X_C(x, \alpha, \lambda), C(\alpha, \lambda)), \quad S_C(x, 0) = \mathbf{I}_2, \quad X_C(x, 0) = x.$$

No que segue, mostramos que isso conclui a prova da proposição. Sejam

- $S(x, \alpha, \lambda) = S_C(x, \alpha, \lambda) S_B(x, \alpha, \lambda),$
- $X(x, \alpha, \lambda) = X_B(X_C(x, \alpha, \lambda), C(\alpha, \lambda)),$
- $A = B \circ C.$

Por definição, para $\forall \gamma \in \Gamma,$

$$S(x, 0) = \mathbf{I}_2, \quad S(\gamma_2 x, \gamma_r \alpha, \gamma_\ell \lambda) \gamma_2 = \gamma_2 S(x, \alpha, \lambda),$$

$$X(x, 0) = x, \quad X(\gamma_2 x, \gamma_r \alpha, \gamma_\ell \lambda) = \gamma_2 X(x, \alpha, \lambda),$$

$$A^o = 0, \quad A(\gamma_r \alpha, \gamma_\ell \lambda) = \gamma_r A(\alpha, \lambda) \quad e$$

$$K(x, \alpha, \lambda) = S(x, \alpha, \lambda) F_0(X(x, \alpha, \lambda), A(\alpha, \lambda)).$$

Pela etapa 1, f é $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente à $\tilde{\alpha}^* F_0$.

Resta provar a existência de C . Primeiro, na etapa 3, mostramos que existe uma submersão $C' : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0)$ tal que K se fatora através de C'^*L Σ -equivariantemente. Finalmente, na etapa 4, achamos C calculando a média sobre D_4 .

Etapa 3. Seja $\delta = (\alpha, \lambda_2, \lambda_1)$. $K \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \delta)}^\Sigma$ é um Σ -desdobramento de f_0 com $(r + 2)$ parâmetros. Pelo Lema 5.12 ([1]), as seguintes condições são equivalentes

$$\vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma = \mathbf{M}_x^\Sigma f_0 + (D_x f_0) \vec{\mathcal{E}}_x^\Sigma + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial K}{\partial \alpha_1}(x, 0) \dots \frac{\partial K}{\partial \alpha_r}(x, 0) \right\}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{(x, \delta)}^\Sigma = \mathbf{M}_{(x, \delta)}^\Sigma K + (D_x K) \vec{\mathcal{E}}_{(x, \delta)}^\Sigma + \mathcal{E}_\delta \left\{ \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial K}{\partial \alpha_r} \right\}.$$

Note que

$\frac{\partial K}{\partial \delta_{r+2}} = \frac{\partial K}{\partial \lambda_1} \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\delta)}^\Sigma$ e assim existem $X \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\delta)}^\Sigma$, $S \in \mathbf{M}_{(x,\delta)}^\Sigma$ e $\xi \in \tilde{\mathcal{E}}_{\delta,\alpha}^\Sigma$ tais que

$$-\frac{\partial K}{\partial \delta_{r+2}} = \sum_{j=1}^2 X_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^r \xi_i \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} + S K.$$

Supondo que $\xi_{r+1}(0) = 0$, podemos escrever

$$-\frac{\partial K}{\partial \delta_{r+2}} = \sum_{j=1}^2 X_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} + S K$$

Portanto,

$$Y = \frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} + \sum_{j=1}^2 X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \frac{\partial}{\partial \delta_i} \quad (3.21)$$

e $-DK \cdot Y = S K$.

Podemos reescrever as hipóteses do Lema da Redução (Lema 3.3.2) da seguinte forma: sejam K e L como anteriormente e $\delta = (\alpha, \lambda_2, \lambda_1)$. Existe um germe de campo de vetores $C^\infty Y$ na origem do $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2$ dado por (3.21) e satisfazendo

- (i) $X \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\delta)}^\Sigma$, $X = (X_1, X_2)$,
- (ii) existe $S \in \mathbf{M}_{(x,\delta)}^\Sigma$ tal que $-DK \cdot Y = S K$.

Analogamente à prova desse Lema, encontramos uma submersão

$$C' : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0)$$

tal que K se fatora através de C'^*L .

Etapa 4. Reescrevemos o Lema da Redução no contexto D_4 -equivariante.

Sejam K e L como antes e $\delta = (\alpha, \lambda_2, \lambda_1)$. Se existir um germe $\mathcal{X}$ de campo de vetores C^∞ na origem do $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2$ da forma

$$\mathcal{X}(x, \delta) = \frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} + \sum_{j=1}^2 \tilde{X}_j(x, \delta) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r+1} \tilde{\xi}_i(\delta) \frac{\partial}{\partial \delta_i}$$

e satisfazendo

- (i) $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\delta)}^{D_4}$, $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$; $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{E}}_\delta^{D_4}$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1 \dots \tilde{\xi}_{r+1})$,
- (ii) existe $\tilde{S} \in \mathbf{M}_{(x,\delta)}^{D_4}$ tal que $-DK \cdot \mathcal{X} = \tilde{S} K$

então existirá uma submersão D_4 -equivariante $C : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0)$ tal que K se fatora através de C^*L .

Da etapa 3,

$$-\frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} K = \sum_{j=1}^2 X_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} + S K. \quad (3.22)$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} K = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} K = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} f \text{ e como } D_4 \text{ age trivialmente em } \lambda_1, \text{ segue que}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} K \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\delta)}^{D_4}.$$

Portanto, calculando a média de (3.22) sobre D_4 ,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} K &= \sum_{j=1}^2 \left(\int_{D_4} \gamma_2^t X_j(\gamma_2 x, \delta) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} K + \sum_{i=1}^{r+1} \left(\int_{D_4} \gamma_r^t \xi_i(\gamma_r \delta) \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_i} K \\ &\quad + \left(\int_{D_4} \gamma_2^t S \circ \gamma_2 \right) K. \end{aligned}$$

Seja

$$\mathcal{X}(x, \delta) = \frac{\partial}{\partial \delta_{r+2}} + \sum_{j=1}^2 \left(\int_{D_4} \gamma_2^t X_j(\gamma_2 x, \lambda) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r+1} \left(\int_{D_4} \gamma_r^t \xi_i(\gamma_r \delta) \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_i}.$$

Então, $DK \cdot \mathcal{X} = \left(\int_{D_4} \gamma_2^t S \circ \gamma_2 \right) K$ e as hipóteses do Lema estão satisfeitas.

Portanto, podemos reescrever a prova do Lema 3.3.2 e encontrar C como desejado. Aqui também é preciso usar o argumento de unicidade das soluções das EDOs para mostrar que C é D_4 -equivariante. $\square$

Corolário 3.3.3. Se $\text{cod}^{D_4}(\tilde{\alpha})$ for finita então $\text{cod}^{D_4}(f)$ será finita.

Prova. Pelo Corolário 3.2.18, se $\text{cod}^{D_4}(\tilde{\alpha})$ for finita então $\text{cod}^{D_4}(\tilde{\alpha}^* F_0)$ será finita. Pela Proposição 3.3.2, $\text{cod}^{D_4}(f)$ é finita. $\square$

Definição 3.3.4.

Recorde que $\mathcal{P} = \{\tilde{\alpha} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0) \mid \tilde{\alpha}(\gamma_\ell \lambda) = \gamma_r \tilde{\alpha}(\lambda)\}$ e consideremos $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$.

Um *desdobramento* de $\tilde{\alpha}$ com q parâmetros é um germe de aplicação

$$\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^{2+q}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$$

tal que $\hat{\phi}(\lambda, 0) = \hat{\alpha}(\lambda)$.

Seja $\mathcal{P}_{un}(q) = \{\hat{\phi} : (\mathbb{R}^{2+q}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r \mid \hat{\phi}(\cdot, 0) \in \mathcal{P}\}$ o conjunto de desdobramentos com q parâmetros de um caminho em $\mathcal{P}$.

Proposição 3.3.5. Se $F \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4}$ for um desdobramento de $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{(z,\lambda)}^{D_4}$ com k parâmetros $\beta = (\beta_1 \dots \beta_k)$ então existirá $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}_{un}(k)$ tal que F será $\mathcal{K}_{\lambda,un}^{D_4}(k)$ -equivalente à $\tilde{\phi}^* F_0$.

Prova. Sejam

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4} &= \{G : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid G(\gamma_2 x, \gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) \\ &= \gamma_2 G(x, \lambda, \alpha, \beta), \forall \gamma \in D_4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4} &= \{T : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \mid T(\gamma_2 x, \gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) \gamma_2 \\ &= \gamma_2 T(x, \lambda, \alpha, \beta), \forall \gamma \in D_4\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Theta}_{(\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4} = \{\Lambda : (\mathbb{R}^{2+r+k}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \Lambda(\gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) = \gamma_\ell \Lambda(\lambda, \alpha, \beta), \forall \gamma \in D_4\}.$$

Considere a soma $K : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$K(x, \lambda, \alpha, \beta) = F(x, \lambda, \beta) + F_0(x, \alpha) - f_0(x).$$

$K \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4}$ e é um desdobramento de f_0 com $(2 + r + k)$ -parâmetros. Também, $K \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^\Sigma$ com Σ agindo trivialmente em (λ, α, β) .

Afirmamos que existe uma submersão D_4 -equivariante $A : (\mathbb{R}^{2+r+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$, isto é,

$$A(\gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) = \gamma_r A(\lambda, \alpha, \beta)$$

tal que K se fatora através de $A^* F_0$.

Etapa 1. Mostraremos que essa afirmação mostra o teorema. Se ela for verdadeira então existirão $T \in \mathbf{M}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4}$, $X \in \tilde{\mathcal{E}}_{(x,\lambda,\alpha,\beta)}^{D_4}$ tais que

$$K(x, \lambda, \alpha, \beta) = T(x, \lambda, \alpha, \beta) F_0(X(x, \lambda, \alpha, \beta), A(\lambda, \alpha, \beta))$$

com $T(x, 0, 0, 0) = \mathbf{I}_2$ e $X(x, 0, 0, 0) = x$.

Fazendo $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} F(x, \lambda, \beta) &= K(x, \lambda, 0, \beta) \\ &= T(x, \lambda, 0, \beta) F_0(X(x, \lambda, 0, \beta), A(\lambda, 0, \beta)). \end{aligned}$$

Sejam $S(x, \lambda, \beta) = T(x, \lambda, 0, \beta)$, $\xi(x, \lambda, \beta) = X(x, \lambda, 0, \beta)$, $\Lambda(\lambda, \beta) = \lambda$ e $\tilde{\phi}(\lambda, \beta) = A(\lambda, 0, \beta)$.

Como consequência, existem $S \in \mathbf{M}_{(x, \lambda, \beta)}^{D_4}$, $\xi \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, \beta)}^{D_4}$ e $\Lambda \in \vec{\Theta}_{\lambda, \beta}^{D_4}$ tais que

$$\begin{aligned} F(x, \lambda, \beta) &= S(x, \lambda, \beta) F_0(\xi(x, \lambda, \beta), \tilde{\phi}(\lambda, \beta)) \\ &= S(x, \lambda, \beta)(\tilde{\phi}^* F_0)(\xi(x, \lambda, \beta), \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta)(\tilde{\phi}^* F_0)(\xi(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), \beta) \end{aligned}$$

onde (S, ξ, Λ) é um desdobramento de um elemento de $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ e $\tilde{\phi}$ é um desdobramento de um caminho $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$.

Em outras palavras, sejam

$$S'(x, \lambda) = S(x, \lambda, 0), S' \in \mathbf{M}_{(x, \lambda)}^{D_4}, S'^o = \mathbf{I}_2,$$

$$\xi'(x, \lambda) = \xi(x, \lambda, 0), \xi' \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda)}^{D_4}, \xi'(x, 0) = x,$$

$$\Lambda'(\lambda) = \Lambda(\lambda, 0) = \lambda, \Lambda' \in \vec{\mathcal{E}}_\lambda^{D_4}, (D_\lambda \Lambda)^\circ \in \mathring{\mathcal{L}}_{D_4}(\ell),$$

$\tilde{\alpha}(\lambda) = A(\lambda, 0, 0)$, $\tilde{\phi}(\lambda, 0) = \tilde{\alpha}(\lambda)$. Portanto, existe $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_{un}(k)$ tal que F é $\mathcal{K}_{\lambda, un}^{D_4}(\beta)$ -equivalente à $\hat{\phi}^* F_0$.

Etapa 2. Mostramos a existência de A por indução em $(r + k)$.

O caso $r + k = 0$ se verifica pela Proposição 3.3.2.

Seja $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$L(x, \lambda, \alpha, \beta_1 \dots \beta_{k-1}) = K(x, \lambda, \alpha, \beta_1 \dots \beta_{k-1}, 0).$$

Então pela hipótese de indução, existe uma submersão D_4 -equivariante $B : (\mathbb{R}^{r+k+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$, isto é,

$$B((\gamma_\ell \times \gamma_r) \cdot (\lambda, \alpha, \beta_1 \dots \beta_{k-1})) = B(\gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta_1 \dots \beta_{k-1}) = \gamma_r B(\lambda, \alpha, \beta_1 \dots \beta_{k-1})$$

tal que L se fatora através de $B^* F_0$.

Logo, existem $T_B \in \mathbf{M}_{(x, \lambda, \alpha, \beta')}^{D_4}$, $X_B \in \vec{\mathcal{E}}_{(x, \lambda, \alpha, \beta')}^{D_4}$ com $\beta' = (\beta_1 \dots \beta_{k-1})$ satisfazendo $L(x, \lambda, \alpha, \beta') = T_B(x, \lambda, \alpha, \beta') F_0(X_B(x, \lambda, \alpha, \beta'), B(x, \lambda, \beta'))$, $T_B(x, 0, 0, 0) = \mathbf{I}_2$ e $X_B(x, 0, 0, 0) = x$.

É suficiente encontrar

(i) Uma submersão $C : (\mathbb{R}^{2+r+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{r+k+1}, 0)$ tal que $C(\gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) = (\gamma_\ell \times \gamma_r) \cdot C(\lambda, \alpha, \beta)$,

(ii) $T_C \in \mathbf{M}_{(x, \lambda, \alpha, \beta)}^{D_4}$, $X_C \in \mathcal{E}_{(x, \lambda, \alpha, \beta)}^{D_4}$ satisfazendo

$$K(x, \lambda, \alpha, \beta) = T_C(x, \lambda, \alpha, \beta) L(X_C(x, \lambda, \alpha, \beta), C(\lambda, \alpha, \beta)), T_C(x, 0, 0, 0) = \mathbf{I}_2 \text{ e } X_C(x, 0, 0, 0) = x.$$

De fato,

$$\begin{aligned} K(x, \lambda, \alpha, \beta) &= T_C(x, \lambda, \alpha, \beta) L(X_C(x, \lambda, \alpha, \beta), C(\lambda, \alpha, \beta)) \\ &= T_C(x, \lambda, \alpha, \beta) T_B(x, \lambda, \alpha, \beta') F_0(X_B(X_C(x, \lambda, \alpha, \beta), B(C(\lambda, \alpha, \beta))))). \end{aligned}$$

Sejam

- $T(x, \lambda, \alpha, \beta) = T_C(x, \lambda, \alpha, \beta) T_B(x, \lambda, \alpha, \beta')$. $T(x, 0, 0, 0) = \mathbf{I}_2$,
 $T(\gamma_2 x, \gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) = \gamma_2 T(x, \lambda, \alpha, \beta)$.
- $X(x, \lambda, \alpha, \beta) = X_B(X_C(x, \lambda, \alpha, \beta), C(x, \lambda, \alpha, \beta))$, $X(x, 0, 0, 0) = x$,
 $X(\gamma_2 x, \gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) = \gamma_2 X(x, \lambda, \alpha, \beta)$.
- $A = B \circ C$. $A^\circ = 0$, $A(\gamma_\ell \lambda, \gamma_r \alpha, \beta) = \gamma_r(\lambda, \alpha, \beta)$.

Portanto, existem, T, X, A satisfazendo as condições de equivariância requeridas e tais que

$$K(x, \lambda, \alpha, \beta) = T(x, \lambda, \alpha, \beta) F_0(X(x, \lambda, \alpha, \beta), A(\lambda, \alpha, \beta)), \text{ isto é,}$$

K se fatora através de $A^* F_0$.

Resta provar a existência de C . A idéia é mostrar que existe uma submersão

$$C' : (\mathbb{R}^{2+r+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{r+k+1}, 0)$$

tal que K se fatora, Σ -equivariantemente, através de $C'^* L$ pois K e L são germes de aplicação Σ -equivariantes. Para encerrar, achamos C calculando a média sobre D_4 .

Omitiremos a prova dessa parte por ser similar às etapas 3 e 4 da Proposição 3.3.2. $\square$

Capítulo 4

Classificação dos problemas D_4 usando a formulação por caminhos

Neste capítulo mostramos como classificar os problemas de bifurcação D_4 usando a formulação por caminhos descrita no capítulo 3.

Recorde que $\Sigma = Z_2 \oplus Z_2$ para o problema D_4 e que $N = z\bar{z}$, $\delta = -\frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)$, $u_4 = \lambda_2^2$.

Para cada $g \in \mathcal{E}_z^\Sigma$, existe $p : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(z) = p(N, \delta)$. $\vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma$ é o $\mathcal{E}_z^\Sigma$ -módulo gerado por z e $\bar{z}$, ou seja, $h \in \vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma$ pode ser escrita como

$$h(z) = p(N, \delta)z + q(N, \delta)\bar{z}$$

e identificamos h com $[p, q]$.

O conjunto $\mathbf{M}_z^\Sigma$ das matrizes que comutam com a ação de Σ é o $\mathcal{E}_z^\Sigma$ -módulo gerado pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} S_1(z)w &= w, & S_3(z)w &= \frac{i}{2}\omega(w + \bar{w}), \\ S_2(z)w &= \bar{w}, & S_4(z)w &= \frac{i}{2}\omega(\bar{w} - w), \end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{i}{4}(\bar{z}^2 - z^2)$.

O espaço tangente estendido é

$$\mathcal{T}_\epsilon^\Sigma(h) = \{S h + (D_z h) X \mid S \in \mathbf{M}_z^\Sigma, X \in \tilde{\mathcal{E}}_z^\Sigma\}$$

e calculando-se os geradores desse espaço temos que $\mathcal{T}_\epsilon^\Sigma(h) = \mathcal{E}_z^\Sigma < h_1 \dots h_6 >$ onde

$$\begin{aligned} h_1 &= [p, q], \\ h_2 &= [q, p], \\ h_3 &= \frac{1}{4}(p+q)[N-\delta, \delta-N], \\ h_4 &= \frac{1}{4}(p-q)[N+\delta, N+\delta], \\ h_5 &= [Np_N + \delta p_\delta, Nq_N + \delta q_\delta], \\ h_6 &= [\delta p_N + Np_\delta, \delta q_N + Nq_\delta]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A forma normal para um problema de bifurcação D_4 é

$$f(z, \lambda) = p(u)z + q(u)\delta\bar{z} + r(u)\lambda_2\bar{z} + s(u)\delta\lambda_2z$$

onde $p, q, r, s \in \mathcal{E}_u$, $u = (N, \Delta, \lambda_1, u_4)$ e $p^\circ = 0$ (cf. Capítulo 2).

O centro organizador de f é

$$f_0(z) = f(z, 0) = p(N, \Delta)z + q(N, \Delta)\delta\bar{z}.$$

Com base no Teorema 2.8.1., temos os seguintes centros organizadores para o problema D_4 :

$$\text{I. } f_0^1(z) = mNz + \epsilon_5\delta\bar{z} \quad \text{com} \quad m = \frac{p_N^0}{|q^\circ|} \quad \text{e} \quad \epsilon_5 = sg q^\circ.$$

As condições de não degenericidade são $m \neq \pm 1, 0$ e $q^\circ \neq 0$. f_0^1 é o centro organizador genérico.

$$\text{II. Condição de definição: } m = 0 \text{ ou equivalentemente } p_N^0 = 0.$$

$$\text{Forma normal: } f_0^2(z) = \epsilon_2 N^2 z + \epsilon_5 \delta \bar{z} \quad \text{com} \quad \epsilon_2 = sg p_{NN}^0.$$

III. Condição de definição: $m = -1$ ou equivalentemente $p_N^\circ = -q^\circ$.

Forma normal: $f_0^3(z) = -\epsilon_5 N z + \epsilon_5 \delta \bar{z}$.

IV. Condição de definição: $m = 1$ ou equivalentemente $p_N^\circ = q^\circ$.

Forma normal: $f_0^4(z) = \epsilon_1 N z + \epsilon_2 N^2 z + \epsilon_1 \delta \bar{z}$ com $\epsilon_1 = sg p_N^\circ$
e $\epsilon_2 = sg(p_{NN}^\circ + 2p_\Delta^\circ - 2q_N^\circ)$.

V. Condição de definição: $q^\circ = 0$.

Forma normal: $f_0^5(z) = \epsilon_1 N z + \epsilon_6 \Delta \delta \bar{z}$ com $\epsilon_6 = \epsilon_1 sg \Delta_{N,\Delta}(p, q)$.

4.1 Classificação dos problemas D_4 com centro organizador I.

Para o caso I, $f_0^1(z) = mN z + \epsilon_5 \delta \bar{z}$, $m \neq \pm 1, 0$. Usando a notação $Z_2 \oplus Z_2$, escrevemos

$$f_0^1 = [mN, \epsilon_5 \delta].$$

Usando (4.1), um cálculo mostra que

$$\mathcal{T}_\epsilon^\Sigma(f_0^1) = \mathcal{E}_{N,\delta}^\Sigma < [0, N], [\delta, 0], [0, \delta^2], [N^2, 0], [mN, \epsilon_5 \delta] >.$$

O Σ -espaço normal $\mathcal{N}_\epsilon^\Sigma(f_0^1)$ é gerado por $[1, 0]$, $[N, 0]$ e $[0, 1]$ como um espaço vetorial real.

O Σ -desdobramento de f_0^1 é dado por

$$F_0^1 : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F_0^1(z, \alpha) = (m + \alpha_2)N z + \alpha_1 z + (\epsilon_5 \delta + \alpha_3) \bar{z}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Substituindo $(m + \alpha_2)$ por $\hat{m}$, obtemos

$$F_0^1(z, \alpha) = \hat{m}N z + \alpha_1 z + (\epsilon_5 \delta + \alpha_3) \bar{z}.$$

No que se segue, baseamo-nos na teoria descrita no Capítulo 3 (secção 3.1).

Recorde que D_4 age em (z, λ) por

$$\begin{aligned}\hat{\kappa} \cdot (z, \lambda) &= (\kappa \cdot z, \lambda) \text{ onde } \kappa \cdot z = \bar{z}, \\ \hat{\mu} \cdot (z, \lambda) &= (\mu \cdot z, \kappa \cdot \lambda) \text{ onde } \mu \cdot z = i\bar{z}.\end{aligned}$$

Considere o isomorfismo

$$\begin{aligned}\theta : \frac{\vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0^1)} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\beta_1 z + \beta_2 N z + \beta_3 \bar{z}) &\mapsto (\beta_1, \beta_2, \beta_3).\end{aligned}$$

A ação $\varphi : D_4 \times \vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma$ é dada por

$$\varphi(\hat{\kappa}, g) = \kappa \cdot g \circ \kappa,$$

$$\varphi(\hat{\mu}, g) = \mu \cdot g \circ \mu$$

e a ação $\bar{\varphi} : D_4 \times \frac{\vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0^1)} \rightarrow \frac{\vec{\mathcal{E}}_z^\Sigma}{\mathcal{T}_e^\Sigma(f_0^1)}$ por

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\hat{\kappa}, (\beta_1 z + \beta_2 N z + \beta_3 \bar{z})) &= \beta_1 z + \beta_2 N z + \beta_3 \bar{z}, \\ \bar{\varphi}(\hat{\mu}, (\beta_1 z + \beta_2 N z + \beta_3 \bar{z})) &= \beta_1 z + \beta_2 N z - \beta_3 \bar{z}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Lembrando que D_4 age em z como $\bar{z}$ e $i\bar{z}$, $\{[1, 0], [N, 0], [0, 1]\}$ é uma boa base. As relações (4.2) definem uma representação ortogonal

$$\rho_3 : D_4 \rightarrow O(3)$$

$$\hat{\kappa} \mapsto I_3$$

$$\hat{\mu} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e, via θ , definimos uma ação em $\beta \in \mathbb{R}^3$ denotada por $\gamma_3 \cdot \beta$.

Seja $\mathcal{P}_{2,3} = \{\tilde{\alpha} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)\}$ o conjunto de caminhos definidos do espaço dos parâmetros de bifurcação no espaço dos parâmetros de desdobramento.

Como antes, denotamos a ação de D_4 em $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ por $\gamma_\ell \lambda$ e em $z \in \mathbb{C}$ por $\gamma_2 z$.

A ação ψ de D_4 em $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}_{2,3}$ é dada por $\gamma \cdot \tilde{\alpha} = \gamma_3^t \cdot (\tilde{\alpha} \circ \gamma_\ell)$, $\forall \gamma \in D_4$.

$\mathcal{P}$ denota o conjunto dos caminhos D_4 -equivariantes, isto é,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{2,3} \Big|_{\text{Fix} \psi} = \{\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}_{2,3} \mid \tilde{\alpha}(\gamma_\ell \lambda) = \gamma_3 \tilde{\alpha}(\lambda)\}.$$

Um simples cálculo mostra que

$$\tilde{\alpha} \in \mathcal{P} \text{ se e somente } \tilde{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1(\lambda_1, u_4), \alpha_2(\lambda_1, u_4), \lambda_2 \alpha_3(\lambda_1, u_4)). \quad (4.3)$$

Pela Proposição 3.3.2, f é $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalente à $\tilde{\alpha}^* F_0^1$ onde

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}^* F_0^1)(z, \lambda) &= F_0^1(z, \tilde{\alpha}(\lambda)) \\ &= [(m + \alpha_2(\lambda_1, u_4)) N + \alpha_1(\lambda_1, u_4), \epsilon_5, \alpha_3(\lambda_1, u_4), 0]. \end{aligned}$$

Para encontrar o espaço tangente a um caminho $\tilde{\alpha}$, da forma (4.3), seguimos o Capítulo 3 (secção 3.2) e identificamos $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$. Começamos calculando o espaço tangente ao germe $\hat{f} \in \vec{\mathcal{E}}_{(z, \beta)}^{D_4}$.

Denotamos (α, λ) por β e definimos

$$\vec{\mathcal{E}}_{(z, \beta)}^{D_4} = \{\hat{f} : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C} \mid \hat{f}(\gamma_2 z, (\gamma_3 \times \gamma_\ell) \beta) = \gamma_2 \hat{f}(z, \beta), \forall \gamma \in D_4\}.$$

$$\vec{\Theta}_{(z, \beta)}^{D_4, o} = \{\hat{\xi} \in \vec{\Theta}_{(z, \beta)}^{D_4} \mid \hat{\xi}^o = 0\}.$$

$$\mathbf{M}_{(z, \beta)}^{D_4} = \{\hat{S} : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow GL(2) \mid \hat{S}(\gamma_2 z, (\gamma_3 \times \gamma_\ell) \beta) \gamma_2 = \gamma_2 \hat{S}(z, \beta), \forall \gamma \in D_4\}.$$

A ação de D_4 em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ é explicitamente dada por

$$\tilde{\kappa} \cdot (z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1', \lambda_2) = (\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$\tilde{\mu} \cdot (z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (i\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2).$$

Os D_4 -invariantes para essa ação são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_1 &= N = z\bar{z}, & \hat{u}_6 &= \alpha_2, \\
 \hat{u}_2 &= \Delta = \delta^2 = \frac{1}{4}(z^2 + \bar{z}^2)^2, & \hat{u}_7 &= \alpha_3^2, \\
 \hat{u}_3 &= \lambda_1, & \hat{u}_8 &= \delta\alpha_3, \\
 \hat{u}_4 &= \lambda_2^2 = u_4, & \hat{u}_9 &= \delta\lambda_2, \\
 \hat{u}_5 &= \alpha_1, & \hat{u}_{10} &= \alpha_3\lambda_2.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Eles satisfazem as seguintes relações: $\hat{u}_8^2 = \hat{u}_2\hat{u}_7$, $\hat{u}_9^2 = \hat{u}_2\hat{u}_4$, $\hat{u}_{10}^2 = \hat{u}_7\hat{u}_4$.

As provas das proposições 4.1.1. a 4.1.5. estão no Apêndice.

Proposição 4.1.1. $\mathcal{E}_{(z,\beta)}^{D_4} = \hat{u}^* \mathcal{E}_{\bar{u}}$ onde $\hat{u} = (\hat{u}_1 \dots \hat{u}_{10})$.

Proposição 4.1.2. $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{D_4}$ é gerado por z , $\delta\bar{z}$, $\lambda_2\bar{z}$ e $\alpha_3\bar{z}$ como um $\mathcal{E}_{(z,\beta)}^{D_4}$ -módulo.

Seja $\bar{u} = (\hat{u}_1 \dots \hat{u}_7)$ com $\hat{u}_i$, $1 \leq i \leq 7$, dados em (4.4).

Proposição 4.1.3. $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{D_4}$ é gerado livremente por z , $\delta\bar{z}$, $\lambda_2\bar{z}$, $\alpha_3\bar{z}$, $\delta\lambda_2z$, $\delta\alpha_3z$, $\alpha_3\lambda_2z$ e $\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z}$ como um $\mathcal{E}_{\bar{u}}$ -módulo.

Proposição 4.1.4. $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^{D_4}$ é o $\mathcal{E}_{(z,\beta)}^{D_4}$ -módulo gerado pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
 S_1(z, \beta) w &= w, & S_5(z, \beta) w &= i\omega \bar{w}, \\
 S_2(z, \beta) w &= \lambda_2 \bar{w}, & S_6(z, \beta) w &= -i\lambda_2 \omega w, \\
 S_3(z, \beta) w &= \delta \bar{w}, & S_7(z, \beta) w &= -i\delta \omega w, \\
 S_4(z, \beta) w &= \alpha_3 \bar{w}, & S_8(z, \beta) w &= -i\alpha_3 \omega w.
 \end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{i}{4}(\bar{z}^2 - z^2)$.

Proposição 4.1.5. $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ é o $\mathcal{E}_{\bar{u}}$ -módulo gerado livremente pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_1(z, \beta) w &= w, & \hat{S}_9(z, \beta) w &= i\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_2(z, \beta) w &= \lambda_2\bar{w}, & \hat{S}_{10}(z, \beta) w &= -i\lambda_2\omega w, \\
\hat{S}_3(z, \beta) w &= \delta\bar{w}, & \hat{S}_{11}(z, \beta) w &= -i\delta\omega w, \\
\hat{S}_4(z, \beta) w &= \alpha_3\bar{w}, & \hat{S}_{12}(z, \beta) w &= -i\alpha_3\omega w, \\
\hat{S}_5(z, \beta) w &= \delta\lambda_2 w, & \hat{S}_{13}(z, \beta) w &= i\delta\lambda_2\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_6(z, \beta) w &= \delta\alpha_3 w, & \hat{S}_{14}(z, \beta) w &= i\delta\alpha_3\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_7(z, \beta) w &= \alpha_3\lambda_2 w, & \hat{S}_{15}(z, \beta) w &= i\alpha_3\lambda_2\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_8(z, \beta) w &= \delta\alpha_3\lambda_2\bar{w}, & \hat{S}_{16}(z, \beta) w &= i\delta\alpha_3\lambda_2\omega w.
\end{aligned}$$

Da Proposição 4.1.3., toda $\hat{f} \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\hat{f}(z, \alpha, \lambda) &= p_1(\bar{u}) z + p_2(\bar{u}) \delta\bar{z} + p_3(\bar{u}) \lambda_2\bar{z} + p_4(\bar{u}) \alpha_3\bar{z} + p_5(\bar{u}) \delta\lambda_2 z \\
&\quad + p_6(\bar{u}) \delta\alpha_3 z + p_7(\bar{u}) \alpha_3\lambda_2 z + p_8(\bar{u}) \delta\alpha_3\lambda_2\bar{z}
\end{aligned}$$

e identificamos $\hat{f}$ com $[p_1 \dots p_8]$.

O espaço tangente à $\hat{f} \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ é dado por

$$\mathbf{T}^{\mathbf{D}_4}(\hat{f}) = \left\{ \hat{S} \hat{f} + (D_z \hat{f}) \hat{X} \mid \hat{S} \in \mathbf{M}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}, \hat{X} \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4} \right\}.$$

Proposição 4.1.6. $\mathbf{T}^{\mathbf{D}_4}(\hat{f}) = \mathcal{E}_{\bar{u}} < g_1 \dots g_{24} >$ onde

$$\begin{aligned}
g_1 &= [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8], \\
g_2 &= [u_4 p_3, u_4 p_5, p_1, u_4 p_7, p_2, u_4 p_8, p_4, p_6], \\
g_3 &= [\Delta p_2, p_1, \Delta p_5, \Delta p_6, p_3, p_4, \Delta p_8, p_7], \\
g_4 &= [\alpha_3^2 p_4, \alpha_3^2 p_6, \alpha_3^2 p_7, p_1, \alpha_3^2 p_8, p_2, p_3, p_5], \\
g_5 &= [\Delta u_4 p_5, u_4 p_3, \Delta p_2, \Delta u_4 p_8, p_1, u_4 p_7, \Delta p_6, p_4], \\
g_6 &= [\Delta \alpha_3^2 p_6, \alpha_3^2 p_4, \Delta \alpha_3^2 p_8, \Delta p_2, \alpha_3^2 p_7, p_1, \Delta p_5, p_3], \\
g_7 &= [\alpha_3^2 u_4 p_7, \alpha_3^2 u_4 p_8, \alpha_3^2 p_4, u_4 p_3, \alpha_3^2 p_6, u_4 p_5, p_1, p_2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_8 &= [\Delta\alpha_3^2 u_4 p_8, \alpha_3^2 u_4 p_7, \Delta\alpha_3^2 p_6, \Delta u_4 p_5, \alpha_3^2 p_4, u_4 p_3, \Delta p_2, p_1], \\
g_9 &= [Np_1 - \Delta p_2, p_1 - Np_2, \Delta p_5 - Np_3, \Delta p_6 - Np_4, Np_5 - p_3, Np_6 - p_4, \\
&\quad Np_7 - \Delta p_8, p_7 - Np_8], \\
g_{10} &= [\Delta u_4 p_5 - Nu_4 p_3, Nu_4 p_5 - u_4 p_3, Np_1 - \Delta p_2, Nu_4 p_7 - \Delta u_4 p_8, \\
&\quad p_1 - Np_2, u_4 p_7 - Nu_4 p_8, \Delta p_6 - Np_4, Np_6 - p_4], \\
g_{11} &= [\Delta p_1 - N\Delta p_2, Np_1 - \Delta p_2, N\Delta p_5 - \Delta p_3, N\Delta p_6 - \Delta p_4, \Delta p_5 - Np_3, \\
&\quad \Delta p_6 - Np_4, \Delta p_7 - N\Delta p_8, Np_7 - \Delta p_8], \\
g_{12} &= [\Delta\alpha_3^2 p_6 - N\alpha_3^2 p_4, N\alpha_3^2 p_6 - \alpha_3^2 p_4, N\alpha_3^2 p_7 - \Delta\alpha_3^2 p_8, Np_1 - \Delta p_2, \alpha_3^2 p_7 - N\alpha_3^2 p_8, \\
&\quad p_1 - Np_2, \Delta p_5 - Np_3, Np_5 - p_3], \\
g_{13} &= [N\Delta u_4 p_5 - \Delta u_4 p_3, \Delta u_4 p_5 - Nu_4 p_3, \Delta p_1 - N\Delta p_2, \Delta u_4 p_7 - N\Delta u_4 p_8, \\
&\quad Np_1 - \Delta p_2, Nu_4 p_7 - \Delta u_4 p_8, N\Delta p_6 - \Delta p_4, \Delta p_6 - Np_4], \\
g_{14} &= [N\Delta\alpha_3^2 p_6 - \Delta\alpha_3^2 p_4, \Delta\alpha_3^2 p_6 - N\alpha_3^2 p_4, \Delta\alpha_3^2 p_7 - N\Delta\alpha_3^2 p_8, \Delta p_1 - N\Delta p_2, \\
&\quad N\alpha_3^2 p_7 - \Delta\alpha_3^2 p_8, Np_1 - \Delta p_2, N\Delta p_5 - \Delta p_3, \Delta p_5 - Np_3], \\
g_{15} &= [Nu_4\alpha_3^2 p_7 - u_4\alpha_3^2 \Delta p_8, u_4\alpha_3^2 p_7 - Nu_4\alpha_3^2 p_8, \Delta\alpha_3^2 p_6 - N\alpha_3^2 p_4, \Delta u_4 p_5 - Nu_4 p_3, \\
&\quad N\alpha_3^2 p_6 - \alpha_3^2 p_4, Nu_4 p_5 - u_4 p_3, Np_1 - \Delta p_2, p_1 - Np_2], \\
g_{16} &= [\Delta\alpha_3^2 u_4 p_7 - N\Delta\alpha_3^2 u_4 p_8, N\alpha_3^2 u_4 p_7 - \Delta\alpha_3^2 u_4 p_8, N\Delta\alpha_3^2 p_6 - \Delta\alpha_3^2 p_4, N\Delta u_4 p_5 - \Delta u_4 p_3, \\
&\quad \alpha_3^2 \Delta p_6 - N\alpha_3^2 p_4, \Delta u_4 p_5 - Nu_4 p_3, \Delta p_1 - N\Delta p_2, Np_1 - \Delta p_2], \\
g_{17} &= [2Np_{1N} + 4\Delta p_{1\Delta} + p_1, 2Np_{2N} + 4\Delta p_{2\Delta} + 3p_2, 2Np_{3N} + 4\Delta p_{3\Delta} + p_3, \\
&\quad 2Np_{4N} + 4\Delta p_{4\Delta} + p_4, 2Np_{5N} + 4\Delta p_{5\Delta} + 3p_5, 2Np_{6N} + 4\Delta p_{6\Delta} + 3p_6, \\
&\quad 2Np_{7N} + 4\Delta p_{7\Delta} + p_7, 2Np_{8N} + 4\Delta p_{8\Delta} + 3p_8], \\
g_{18} &= [-2\Delta p_{1N} - 4N\Delta p_{1\Delta} + \Delta p_2, -2\Delta p_{2N} - 4N\Delta p_{2\Delta} - 2Np_2 + p_1, \\
&\quad -2\Delta p_{3N} - 4N\Delta p_{3\Delta} + \Delta p_5, -2\Delta p_{4N} - 4N\Delta p_{4\Delta} + \Delta p_6, \\
&\quad -2\Delta p_{5N} - 4N\Delta p_{5\Delta} - 2Np_5 + p_3, -2\Delta p_{6N} - 4N\Delta p_{6\Delta} - 2Np_6 + p_4, \\
&\quad -2\Delta p_{7N} - 4N\Delta p_{7\Delta} + \Delta p_8, -2\Delta p_{8N} - 4N\Delta p_{8\Delta} - 2Np_8 + p_7], \\
g_{19} &= [-2\Delta u_4 p_{5N} - 4N\Delta u_4 p_{5\Delta} - 2Nu_4 p_5 + u_4 p_3, -2u_4 p_{3N} - 4Nu_4 p_{3\Delta} + u_4 p_5, \\
&\quad -2\Delta p_{2N} - 4N\Delta p_{2\Delta} - 2Np_2 + p_1, -2\Delta u_4 p_{8N} - 4N\Delta u_4 p_{8\Delta} - 2Nu_4 p_8 + u_4 p_7, \\
&\quad -2p_{1N} - 4Np_{1\Delta} + p_2, -2u_4 p_{7N} - 4Nu_4 p_{7\Delta} + u_4 p_8, \\
&\quad -2\Delta p_{6N} - 4N\Delta p_{6\Delta} - 2Np_6 + p_4, -2p_{4N} - 4Np_{4\Delta} + p_6],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{20} = & [\alpha_3^2 p_4 - 2N\alpha_3^2 p_6 - 2\Delta\alpha_3^2 p_{6N} - 4N\Delta\alpha_3^2 p_{6\Delta}, \alpha_3^2 p_6 - 2\alpha_3^2 p_{4N} - 4N\alpha_3^2 p_{4\Delta}, \\
& \alpha_3^2 p_7 - 2\Delta\alpha_3^2 p_{8N} - 4N\Delta\alpha_3^2 p_{8\Delta} - 2N\alpha_3^2 p_8, p_1 - 2\Delta p_{2N} - 4N\Delta p_{2\Delta} - 2Np_2, \\
& -2\alpha_3^2 p_{7N} - 4\alpha_3^2 N p_{7\Delta} + \alpha_3^2 p_8, -2p_{1N} - 4Np_{1\Delta} + p_2, p_3 - 2\Delta p_{5N} - 4N\Delta p_{5\Delta} - 2Np_5, \\
& p_5 - 2p_{3N} - 4Np_{3\Delta}], \\
g_{21} = & [2N\Delta u_4 p_{5N} + 4\Delta^2 u_4 p_{5\Delta} + 3\Delta u_4 p_5, 2Nu_4 p_{3N} + 4\Delta u_4 p_{3\Delta} + u_4 p_3, \\
& 2N\Delta p_{2N} + 4\Delta^2 p_{2\Delta} + 3\Delta p_2, 2N\Delta u_4 p_{8N} + 4\Delta^2 u_4 p_{8\Delta} + 3\Delta u_4 p_8, \\
& 2Np_{1N} + 4\Delta p_{1\Delta} + p_1, 2Nu_4 p_{7N} + 4\Delta u_4 p_{7\Delta} + u_4 p_7, \\
& 2N\Delta p_{6N} + 4\Delta^2 p_{6\Delta} + 3\Delta p_6, 2Np_{4N} + 4\Delta p_{4\Delta} + p_4], \\
g_{22} = & [2N\Delta\alpha_3^2 p_{6N} + 4\Delta^2\alpha_3^2 p_{6\Delta} + 3\Delta\alpha_3^2 p_6, 2N\alpha_3^2 p_{4N} + 4\Delta\alpha_3^2 p_{4\Delta} + \alpha_3^2 p_4, \\
& 2N\Delta\alpha_3^2 p_{8N} + 4\Delta^2\alpha_3^2 p_{8\Delta} + 3\Delta\alpha_3^2 p_8, 2N\Delta p_{2N} + 4\Delta^2 p_{2\Delta} + 3\Delta p_2, \\
& 2N\alpha_3^2 p_{7N} + 4\Delta\alpha_3^2 p_{7\Delta} + \alpha_3^2 p_7, 2Np_{1N} + 4\Delta p_{1\Delta} + p_1, 2N\Delta p_{5N} + 4\Delta^2 p_{5\Delta} + 3\Delta p_5, \\
& 2Np_{3N} + 4\Delta p_{3\Delta} + p_3], \\
g_{23} = & [2Nu_4\alpha_3^2 p_{7N} + 4\Delta\alpha_3^2 u_4 p_{7\Delta} + u_4\alpha_3^2 p_7, 2Nu_4\alpha_3^2 p_{8N} + 4\Delta u_4\alpha_3^2 p_{8\Delta} + 3\alpha_3^2 u_4 p_8, \\
& 2N\alpha_3^2 p_{4N} + 4\Delta\alpha_3^2 p_{4\Delta} + \alpha_3^2 p_4, 2Nu_4 p_{3N} + 4\Delta u_4 p_{3\Delta} + u_4 p_3, \\
& 2N\alpha_3^2 p_{6N} + 4\Delta\alpha_3^2 p_{6\Delta} + 3\alpha_3^2 p_6, 2Nu_4 p_{5N} + 4\Delta u_4 p_{5\Delta} + 3u_4 p_5, \\
& 2Np_{1N} + 4\Delta p_{1\Delta} + p_1, 2Np_{2N} + 4\Delta p_{2\Delta} + 3p_2], \\
g_{24} = & [-2\Delta\alpha_3^2 u_4 p_{7N} - 4N\Delta\alpha_3^2 u_4 p_{7\Delta} + \Delta\alpha_3^2 u_4 p_8, \\
& -2\Delta\alpha_3^2 u_4 p_{8N} - 4N\Delta\alpha_3^2 u_4 p_{8\Delta} - 2Nu_4\alpha_3^2 p_8 + u_4\alpha_3^2 p_7, \\
& -2\Delta\alpha_3^2 p_{4N} - 4N\Delta\alpha_3^2 p_{4\Delta} + \Delta\alpha_3^2 p_6, -2\Delta u_4 p_{3N} - 4N\Delta u_4 p_{3\Delta} + u_4\Delta p_5, \\
& -2\Delta\alpha_3^2 p_{6N} - 4N\Delta\alpha_3^2 p_{6\Delta} - 2N\alpha_3^2 p_6 + \alpha_3^2 p_4, \\
& -2\Delta u_4 p_{5N} - 4N\Delta u_4 p_{5\Delta} - 2Nu_4 p_5 + u_4 p_3, \\
& -2\Delta p_{1N} - 4N\Delta p_{1\Delta} + \Delta p_2, -2\Delta p_{2N} - 4N\Delta p_{2\Delta} - 2Np_2 + p_1].
\end{aligned}$$

Prova. Os geradores $g_1 \dots g_{16}$ são obtidos por

$$g_i = S_i [p_1, p_2 \dots p_8], \quad 1 \leq i \leq 16,$$

onde os S_i 's são os geradores livres de $\mathbf{M}_{(z,\theta)}^{D_4}$ da Proposição 4.1.5. e os geradores $g_{17} \dots g_{24}$ obtidos por

$$D_z(\hat{f}) \hat{f}_j, \quad 1 \leq j \leq 8,$$

onde os $\hat{f}_j$'s são os geradores livres de $\tilde{\mathcal{E}}_{(z,\theta)}^{D_4}$ da Proposição 4.1.3. □

Proposição 4.1.7. O espaço tangente unipotente à $\hat{f} \in \tilde{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{D_4}$ é

$$\mathbf{TU}^{D_4}(\hat{f}) = \mathcal{E}_{\bar{u}} < Ng_1, \Delta g_1, \alpha_1 g_1, \alpha_2 g_1, \alpha_3^2 g_1, \lambda_1 g_1, u_4 g_1, g_2 \dots g_{16}, Ng_{17}, \\ \Delta g_{17}, \alpha_1 g_{17}, \alpha_2 g_{17}, \alpha_3^2 g_{17}, \lambda_1 g_{17}, u_4 g_{17}, g_{18} \dots g_{24} >$$

onde $g_1 \dots g_{24}$ são dados pela Proposição 4.1.6.

Prova. $\mathbf{TU}^{D_4}(\hat{f}) = \{\hat{S}\hat{f} + (D_z\hat{f})\hat{X} \mid \hat{S} \in \mathbf{M}_{(z,\beta)}^{D_4}, \hat{X} \in \tilde{\mathcal{M}}_{(z,\beta)}^{D_4} \text{ e } \hat{S}^o = 0, (D_z\hat{X})^o = 0\}.$

Um simples cálculo mostra que

$\mathbf{TU}^{D_4}(\hat{f}) = \{\mathcal{M}_{(z,\beta)}^{D_4} g_1, g_2 \dots g_{16}, \mathcal{M}_{(z,\beta)}^{D_4} g_{17}, g_{18} \dots g_{24} >$ com $g_i, 1 \leq i \leq 24$, dados pela Proposição 4.1.6. $\square$

Recorde de (4.3) que um caminho $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$ é dado por

$$\tilde{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1(\lambda_1, u_4), \alpha_2(\lambda_1, u_4), \lambda_2 \alpha_3(\lambda_1, u_4)).$$

Calculamos o espaço tangente à $\tilde{\alpha}$ em duas etapas:

Etapa 1. $\hat{F}_0^1 : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\hat{F}_0^1(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = F_0^1(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\hat{m}N + \alpha_1)z + \epsilon_5 \delta \bar{z} + \alpha_3 \bar{z}$$

onde $\hat{m} = m + \alpha_2$.

Usando a Proposição 4.1.6, um longo cálculo mostra que $\mathbf{T}^{D_4}(\hat{F}_0^1) = \mathcal{E}_{\bar{u}} < g_1 \dots g_{15} >$ onde

$$g_1 = \epsilon_5 \delta \bar{z} + \hat{m}Nz,$$

$$g_2 = (\hat{m}^2 - 1)N\lambda_2 \bar{z} + \hat{m}\alpha_1 \lambda_2 \bar{z} + \hat{m}\alpha_3 \lambda_2 z,$$

$$g_3 = \hat{m}\Delta z + \alpha_1 Nz,$$

$$g_4 = (\hat{m}^2 - 1)\Delta \lambda_2 \bar{z} - \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z - \alpha_1^2 \lambda_2 \bar{z},$$

$$g_5 = \epsilon_5(1 - \hat{m}^2)\delta \lambda_2 z + \alpha_1 \lambda_2 \bar{z} + \alpha_3 \lambda_2 z,$$

$$g_6 = \epsilon_5(\hat{m}^2 - 1)\delta \alpha_3 \lambda_2 \bar{z} + \alpha_1^2 \lambda_2 \bar{z} + \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z,$$

$$g_7 = \hat{m}^2 N \delta \alpha_3 z + \epsilon_5 \alpha_1^2 Nz,$$

$$g_8 = (1 - \hat{m}^2)N^2\lambda_2\bar{z} + \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \alpha_1^2\lambda_2\bar{z},$$

$$g_9 = \hat{m}N^2z + \alpha_1Nz,$$

$$g_{10} = \alpha_1z + \alpha_3\bar{z},$$

$$g_{11} = \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \alpha_3^2\lambda_2\bar{z},$$

$$g_{12} = \hat{m}\alpha_3^2z + (1 - \hat{m}^2)\alpha_1Nz + \hat{m}\alpha_1\alpha_3\bar{z},$$

$$g_{13} = \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \hat{m}(1 - \hat{m}^2)N\alpha_3\lambda_2z + \alpha_1^2\lambda_2\bar{z},$$

$$g_{14} = \alpha_1\alpha_3^2z + \hat{m}(1 - \hat{m}^2)\alpha_3^2Nz + \alpha_1^2\alpha_3\bar{z},$$

$$g_{15} = \hat{m}\alpha_3^2\alpha_3\lambda_2z + (1 - \hat{m}^2)\alpha_1N\alpha_3\lambda_2z + \hat{m}\alpha_1\alpha_3^2\lambda_2\bar{z}.$$

Segue que

$$\mathbf{T}^{\mathbf{D}_4}(\hat{F}_0^1) \cap (\mathcal{E}_\beta < z, Nz, \bar{z} >)^{\mathbf{D}_4} = \mathcal{E}_\beta^{\mathbf{D}_4} < h'_1, h'_2, h'_3, h'_4, h'_5, h'_6 > \quad \text{onde}$$

$$h'_1 = \hat{m}\alpha_3^2z + (1 - \hat{m}^2)\alpha_1Nz + \hat{m}\alpha_1\alpha_3\bar{z},$$

$$h'_2 = \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \hat{m}(1 - \hat{m}^2)N\alpha_3\lambda_2z + \alpha_1^2\lambda_2\bar{z},$$

$$h'_3 = \alpha_1\alpha_3^2z + \hat{m}(1 - \hat{m}^2)\alpha_3^2Nz + \alpha_1^2\alpha_3\bar{z},$$

$$h'_4 = \hat{m}\alpha_3^2\alpha_3\lambda_2z + (1 - \hat{m}^2)\alpha_1N\alpha_3\lambda_2z + \hat{m}\alpha_1\alpha_3^2\lambda_2\bar{z},$$

$$h'_5 = \alpha_1z + \alpha_3\bar{z},$$

$$h'_6 = \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \alpha_3^2\lambda_2\bar{z}.$$

Sejam $\eta_j : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq j \leq 6$, dadas por

$$\eta_1(\alpha, \lambda) = (\hat{m}\alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2)\alpha_1, \hat{m}\alpha_1\alpha_3),$$

$$\eta_2(\alpha, \lambda) = (\alpha_1\alpha_3\lambda_2, \hat{m}(1 - \hat{m}^2)\alpha_3\lambda_2, \alpha_1^2\lambda_2),$$

$$\eta_3(\alpha, \lambda) = (\alpha_1\alpha_3^2, \hat{m}(1 - \hat{m}^2)\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_3),$$

$$\eta_4(\alpha, \lambda) = (\hat{m}\alpha_3^3\lambda_2, (1 - \hat{m}^2)\alpha_1\alpha_3\lambda_2, \hat{m}\alpha_1\alpha_3^2\lambda_2),$$

$$\eta_5(\alpha, \lambda) = (\alpha_1, 0, \alpha_3),$$

$$\eta_6(\alpha, \lambda) = (\alpha_1\alpha_3\lambda_2, 0, \alpha_3^2\lambda_2).$$

As aplicações η'_j s são D_4 -equivariantes pois

$$\eta_j(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) = \gamma_3 \cdot \eta_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2)$$

onde

$$\gamma_3 \cdot \eta_j = (\eta_{j_1}, \eta_{j_2}, -\eta_{j_3}), \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Seja $N = \mathcal{E}_\beta^{D_4} < \eta_1 \dots \eta_6 >$.

Para $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$, definimos

$$\tilde{\alpha}^* N = \mathcal{E}_\lambda^{D_4} < \tilde{\alpha}^* \eta_1 \dots \tilde{\alpha}^* \eta_6 >$$

onde

$$\tilde{\alpha}^* \eta_1 = (\hat{m} u_4 \alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1, \hat{m} \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \eta_2 = (u_4 \alpha_1 \alpha_3, \hat{m} (1 - \hat{m}^2) u_4 \alpha_3, \alpha_1^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \eta_3 = (u_4 \alpha_1 \alpha_3^2, \hat{m} (1 - \hat{m}^2) u_4 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \eta_4 = (\hat{m} \alpha_3^3 u_4^2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1 \alpha_3 u_4, \hat{m} \alpha_1 u_4 \alpha_3^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \eta_5 = (\alpha_1, 0, \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \eta_6 = (\alpha_1 u_4 \alpha_3, 0, u_4 \alpha_3^2 \lambda_2).$$

Como $\alpha_i \in \mathcal{E}_\lambda^{D_4}$, temos que $\tilde{\alpha}^* N = \mathcal{E}_\lambda^{D_4} < \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3 >$ com

$$\tilde{h}_1 = (\hat{m} u_4 \alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1, \hat{m} \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{h}_2 = (u_4 \alpha_1 \alpha_3, \hat{m} (1 - \hat{m}^2) u_4 \alpha_3, \alpha_1^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{h}_3 = (\alpha_1, 0, \alpha_3 \lambda_2).$$

Etapas 2.

$$(D_\lambda \tilde{\alpha}) = \begin{pmatrix} (\alpha_1)_{\lambda_1} & 2\lambda_2(\alpha_1)_{u_4} \\ (\alpha_2)_{\lambda_1} & 2\lambda_2(\alpha_2)_{u_4} \\ \lambda_2(\alpha_3)_{\lambda_1} & \alpha_3 + 2u_4(\alpha_3)_{u_4} \end{pmatrix}$$

Pela Proposição 2.1.4., $\vec{\mathcal{E}}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ é gerado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ como um $\mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -módulo. Sejam

$$\hat{h}_4 = (D_\lambda \tilde{\alpha}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ((\alpha_1)_{\lambda_1}, (\alpha_2)_{\lambda_1}, (\alpha_3)_{\lambda_1} \lambda_2),$$

$$\hat{h}_5 = (D_\lambda \tilde{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = (2u_4 (\alpha_1)_{u_4}, 2u_4 (\alpha_2)_{u_4}, \alpha_3 \lambda_2 + 2(\alpha_3)_{u_4} u_4 \lambda_2).$$

Pela Definição 3.2.10., o espaço tangente à $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}$ é

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^* N + (D_\lambda \tilde{\alpha}) \vec{\mathcal{E}}_\lambda^{\mathbf{D}_4}, \text{ ou seja, } \mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4} < \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_5 > \text{ onde}$$

$$\tilde{h}_1 = (\hat{m}u_4\alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2)\alpha_1, \hat{m}\alpha_1\alpha_3\lambda_2),$$

$$\tilde{h}_2 = (u_4\alpha_1\alpha_3, \hat{m}(1 - \hat{m}^2)u_4\alpha_3, \alpha_1^2\lambda_2),$$

$$\tilde{h}_3 = (\alpha_1, 0, \alpha_3\lambda_2), \tag{4.6}$$

$$\tilde{h}_4 = ((\alpha_1)_{\lambda_1}, (\alpha_2)_{\lambda_1}, (\alpha_3)_{\lambda_1} \lambda_2),$$

$$\tilde{h}_5 = (2u_4(\alpha_1)_{u_4}, 2u_4(\alpha_2)_{u_4}, \alpha_3\lambda_2 + 2(\alpha_3)_{u_4} u_4 \lambda_2).$$

Usamos a Proposição 4.1.7., para achar o espaço tangente unipotente à $\tilde{\alpha}$. Um longo cálculo mostra que $\mathbf{TU}^{\mathbf{D}_4}(\hat{F}_0^1) = \mathcal{E}_{\tilde{u}} < h_1 \dots h_{27} >$ onde

$$h_1 = \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \alpha_3^2\lambda_2\bar{z},$$

$$h_2 = \alpha_1^2z + \alpha_1\alpha_3\bar{z},$$

$$h_3 = \alpha_1\alpha_2z + \alpha_2\alpha_3\bar{z},$$

$$h_4 = \alpha_1\lambda_1z + \lambda_1\alpha_3\bar{z},$$

$$h_5 = \alpha_1\alpha_3^2z + \alpha_3^2\alpha_3\bar{z},$$

$$h_6 = \alpha_1u_4z + u_4\alpha_3\bar{z},$$

$$h_7 = \hat{m}\alpha_3^2z + (1 - \hat{m}^2)\alpha_1Nz + \hat{m}\alpha_1\alpha_3\bar{z},$$

$$h_8 = \alpha_1\alpha_3\lambda_2z + \hat{m}(1 - \hat{m}^2)N\alpha_3\lambda_2z + \alpha_1^2\lambda_2\bar{z},$$

$$h_9 = \alpha_1 \alpha_3^2 z + \hat{m}(1 - \hat{m}^2) \alpha_3^2 N z + \alpha_1^2 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h_{10} = \hat{m} \alpha_3^2 \alpha_3 \lambda_2 z + (1 - \hat{m}^2) \alpha_1 N \alpha_3 \lambda_2 z + \hat{m} \alpha_1 \alpha_3^2 \lambda_2 \bar{z},$$

$$h_{11} = \alpha_1 N z + \alpha_3 N \bar{z},$$

$$h_{12} = \hat{m} \Delta \alpha_3 \bar{z} - \alpha_1^2 N z,$$

$$h_{13} = (\hat{m}^2 - 1) N \lambda_2 \bar{z} + \hat{m} \alpha_1 \lambda_2 \bar{z} + \hat{m} \alpha_3 \lambda_2 z,$$

$$h_{14} = \hat{m} \Delta z + \alpha_1 N z,$$

$$h_{15} = (\hat{m}^2 - 1) \Delta \lambda_2 \bar{z} - \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z - \alpha_1^2 \lambda_2 \bar{z},$$

$$h_{16} = \epsilon_5 (1 - \hat{m}^2) \delta \lambda_2 z + \alpha_1 \lambda_2 \bar{z} + \alpha_3 \lambda_2 z,$$

$$h_{17} = \epsilon_5 (\hat{m}^2 - 1) \delta \alpha_3 \lambda_2 \bar{z} + \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z + \alpha_1^2 \lambda_2 \bar{z},$$

$$h_{18} = \hat{m} \alpha_1 N z + \epsilon_5 \alpha_1 \delta \bar{z},$$

$$h_{19} = \hat{m} \alpha_2 N z + \epsilon_5 \alpha_2 \delta \bar{z},$$

$$h_{20} = \hat{m} \lambda_1 N z + \epsilon_5 \lambda_1 \delta \bar{z},$$

$$h_{21} = \hat{m} \alpha_3^2 N z + \epsilon_5 \alpha_3^2 \delta \bar{z},$$

$$h_{22} = \hat{m} u_4 N z + \epsilon_5 u_4 \delta \bar{z},$$

$$h_{23} = \hat{m} N^2 z + \alpha_1 N z,$$

$$h_{24} = \epsilon_5 \hat{m} (\hat{m}^2 - 1) N \delta \lambda_2 z + \alpha_1^2 \lambda_2 \bar{z} + \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z,$$

$$h_{25} = \hat{m}^2 N \delta \alpha_3 z + \epsilon_5 \alpha_1^2 N z,$$

$$h_{26} = \epsilon_5 N \delta \bar{z} - \alpha_1 N z,$$

$$h_{27} = \epsilon_5 \hat{m} \Delta \delta \bar{z} - \alpha_1^2 N z.$$

Segue que

$\mathbf{TU}^{\mathbb{D}_4}(\hat{F}_0^1) \cap (\mathcal{E}_\beta < z, Nz, \bar{z} >)^{\mathbb{D}_4} = \mathcal{E}_{\bar{u}} < h'_1 \dots h'_{10} >$ onde

$$h'_1 = \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z + \alpha_3^2 \lambda_2 \bar{z},$$

$$h'_2 = \alpha_1^2 z + \alpha_1 \alpha_3 z,$$

$$h'_3 = \alpha_1 \alpha_2 z + \alpha_2 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h'_4 = \alpha_1 \lambda_1 z + \lambda_1 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h'_5 = \alpha_1 \alpha_3^2 z + \alpha_3^2 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h'_6 = \alpha_1 u_4 z + u_4 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h'_7 = \hat{m} \alpha_3^2 z + (1 - \hat{m}^2) \alpha_1 N z + \hat{m} \alpha_1 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h'_8 = \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2 z + \hat{m} (1 - \hat{m}^2) N \alpha_3 \lambda_2 z + \alpha_1^2 \lambda_2 \bar{z},$$

$$h'_9 = \alpha_1 \alpha_3^2 z + \hat{m} (1 - \hat{m}^2) \alpha_3^2 N z + \alpha_1^2 \alpha_3 \bar{z},$$

$$h'_{10} = \hat{m} \alpha_3^2 \alpha_3 \lambda_2 z + (1 - \hat{m}^2) \alpha_1 N \alpha_3 \lambda_2 z + \hat{m} \alpha_1 \alpha_3^2 \lambda_2 \bar{z}.$$

Sejam $\tilde{\eta}_j : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq j \leq 10$ dadas por

$$\tilde{\eta}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 \alpha_3 \lambda_2, 0, \alpha_3^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{\eta}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1^2, 0, \alpha_1 \alpha_3),$$

$$\tilde{\eta}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 \alpha_2, 0, \alpha_2 \alpha_3),$$

$$\tilde{\eta}_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 \lambda_1, 0, \lambda_1 \alpha_3),$$

$$\tilde{\eta}_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 \alpha_3^2, 0, \alpha_3^2),$$

$$\tilde{\eta}_6(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 u_4, 0, u_4 \alpha_3),$$

$$\tilde{\eta}_7(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\hat{m} \alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1, \hat{m} \alpha_1 \alpha_3),$$

$$\tilde{\eta}_8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 \alpha_3 \lambda_2, \hat{m} (1 - \hat{m}^2) \alpha_3 \lambda_2, \alpha_1^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{\eta}_9(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1 \alpha_3^2, \hat{m} (1 - \hat{m}^2) \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3),$$

$$\tilde{\eta}_{10}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\hat{m} \alpha_3^3 \lambda_2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2, \hat{m} \alpha_1 \alpha_3^2 \lambda_2).$$

É imediato ver que as $\tilde{\eta}_j$'s, $1 \leq j \leq 10$, são D_4 -equivariantes. Recorde que $\tilde{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2) = (\alpha_1(\lambda_1, u_4), \alpha_2(\lambda_1, u_4), \lambda_2 \alpha_3(\lambda_1, u_4))$.

Seja $\tilde{N} = \mathcal{E}_\beta^{D_4} < \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{10} >$. Vimos que $\tilde{\alpha}^* \tilde{N} = \mathcal{E}_\lambda^{D_4} < \tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_{10} >$ onde

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_1 = (\alpha_1 u_4 \alpha_3, 0, u_4 \alpha_3^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_2 = (\alpha_1^2, 0, \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_3 = (\alpha_1 \alpha_2, 0, \alpha_2 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_4 = (\alpha_1 \lambda_1, 0, \lambda_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_5 = (\alpha_1 u_4 \alpha_3^2, 0, u_4 \alpha_3^3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_6 = (\alpha_1 u_4, 0, u_4 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_7 = (\hat{m} u_4 \alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1, \hat{m} \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_8 = (\alpha_1 \alpha_3 u_4, \hat{m}(1 - \hat{m}^2) u_4 \alpha_3, \alpha_1^2 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_9 = (\alpha_1 u_4 \alpha_3^2, \hat{m}(1 - \hat{m}^2) u_4 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\tilde{\alpha}^* \tilde{\eta}_{10} = (\hat{m} u_4^2 \alpha_3^3, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1 \alpha_3 u_4, \hat{m} \alpha_1 u_4 \alpha_3^2 \lambda_2).$$

Como $\alpha_i, 1 \leq i \leq 3$, e u_4 pertencem a $\mathcal{E}_\lambda^{D_4}$, temos que

$$\hat{\alpha}^* \tilde{N} = \mathcal{E}_\lambda^{D_4} < \hat{h}_1 \dots \hat{h}_5 > \text{ onde}$$

$$\hat{h}_1 = (\alpha_1^2, 0, \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\hat{h}_2 = (\alpha_1 \alpha_2, 0, \alpha_2 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\hat{h}_3 = (\alpha_1 \lambda_1, 0, \lambda_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\hat{h}_4 = (\alpha_1 u_4, 0, u_4 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\hat{h}_5 = (\hat{m} u_4 \alpha_3^2, (1 - \hat{m}^2) \alpha_1, \hat{m} \alpha_1 \alpha_3 \lambda_2),$$

$$\hat{h}_6 = (\alpha_1 \alpha_3 u_4, \hat{m}(1 - \hat{m}^2) u_4 \alpha_3, \alpha_1^2 \lambda_2).$$

(4.7)

Os geradores em (4.7), quando comparados com os apresentados em (4.5), satisfazem as relações a seguir. Essas relações são, na realidade, consequência da definição do

espaço tangente unipotente.

$$\begin{aligned}\hat{h}_1 &= \alpha_1 \tilde{h}_3, & \hat{h}_4 &= u_4 \tilde{h}_3, \\ \hat{h}_2 &= \alpha_2 \tilde{h}_3, & \hat{h}_5 &= \tilde{h}_1, \\ \hat{h}_3 &= \lambda_1 \tilde{h}_3, & \hat{h}_6 &= \tilde{h}_2.\end{aligned}$$

Segue que $\tilde{\alpha}^* \tilde{N} = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4} < \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \alpha_1 \tilde{h}_3, \alpha_2 \tilde{h}_3, \lambda_1 \tilde{h}_3, u_4 \tilde{h}_3 > .$

Usando a Definição 3.2.10,

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^* \tilde{N} + (D_\lambda \tilde{\alpha}) \mathcal{M}_\lambda^2 \vec{\mathcal{E}}_\lambda^{\mathbf{D}_4}.$$

Portanto,

$$\mathbf{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{D}_4} < \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \alpha_1 \tilde{h}_3, \lambda_1 \tilde{h}_3, u_4 \tilde{h}_3, \lambda_1^2 \tilde{h}_4, u_4 \tilde{h}_4, \lambda_1 \tilde{h}_5, u_4 \tilde{h}_5 > \quad (4.8)$$

com $\tilde{h}_i$'s, $1 \leq i \leq 5$, dados em (4.6).

O Teorema seguinte apresenta a classificação de problemas $\mathbf{D}_4$ de codimensão topológica 2 e com centro organizador dado por

$$f_0^1(z) = mN z + \epsilon_5 \delta \bar{z}, \quad m \neq \pm 1, 0.$$

TEOREMA 4.1.8. (Teorema do Reconhecimento para f_0^1)

Seja $f = [p, q, r, s]$ um problema de bifurcação $\mathbf{D}_4$ com centro organizador f_0^1 . Então f será $\mathcal{K}_\lambda^{\mathbf{D}_4}$ -equivalente às formas normais abaixo se e somente se f satisfizer as correspondentes condições de definição e não degenericidade. Em todos os casos $p^o = 0$.

O desdobramento miniversal é obtido adicionando-se à forma normal os correspondentes termos do desdobramento dados em cada caso.

I: $[mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0]$ (Forma genérica normal).

$$\text{Coeficientes: } m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \quad \epsilon_o = sg p_{\lambda_1}^o, \quad \epsilon_5 = sg q^o.$$

$$\text{Condições de não-degenericidade: } p_N^o \neq 0, p_N^o \neq \pm q^o, p_{\lambda_1}^o \neq 0, r^o \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: $0 / 1$.

$$I_1: [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_5, 1, 0].$$

Condição de definição: $p_{\lambda_1}^o = 0$.

Coeficientes: $\epsilon_4 = sg p_{\lambda_1 \lambda_1}^o$, $\epsilon_5 = sg q^o$,

$$\epsilon_3 = \epsilon_5 sg (p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o),$$

$$m = \frac{p_N^o}{|q^o|}.$$

Condições de não-degenericidade: $p_N^o \neq 0$, $p_N^o \neq \pm q^o$,

$$p_{\lambda_1 \lambda_1}^o \neq 0, r^o \neq 0,$$

$$p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0] + \alpha [1, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: $1 / 2$.

$$I_2: [mN + \epsilon_7 N \lambda_1^2 + \epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_5, 1, 0].$$

Condições de definição: $p_{\lambda_1}^o = 0$, $p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o = 0$.

Coeficientes: $\epsilon_4 = sg p_{\lambda_1 \lambda_1}^o$, $m = \frac{p_N^o}{|q^o|}$, $\epsilon_5 = sg q^o$,

$$\epsilon_7 = \epsilon_1 \epsilon_5 sg \xi_7 \text{ com } \epsilon_1 = sg p_N^o \text{ e}$$

$$\xi_7 = p_{\lambda_1 \lambda_1}^o p_{u_4}^o q^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}) + p_N^{o^2} r^o (p_{N \lambda_1 \lambda_1}^o q^o - p_N^o q_{\lambda_1 \lambda_1}^o) +$$

$$p_{\lambda_1 \lambda_1}^o q^o r^o (s^o q^o - p_N^o r_N^o) + \frac{1}{2} p_{\lambda_1 \lambda_1}^o r^{o^2} (2p_N^o q_N^o - 2p_{\Delta}^o q^o - p_{NN}^o q^o).$$

Condições de não-degenericidade: $r^o \neq 0$, $p_{\lambda_1 \lambda_1}^o \neq 0$, $\xi_7 \neq 0$, $p_N^o \neq 0$, $p_N^o \neq \pm q^o$.

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0] + \alpha [1, 0, 0, 0] + \beta [N \lambda_1, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: $2 / 3$.

$$I_3 : [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_{11} \lambda_1^3, \epsilon_5, 1, 0].$$

Condições de definição: $p_{\lambda_1}^o = 0, p_{\lambda_1 \lambda_1}^o = 0$.

Coefficientes: $\epsilon_3 = \epsilon_5 \operatorname{sg} (p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o),$

$$\epsilon_{11} = \operatorname{sg} p_{\lambda_1 \lambda_1 \lambda_1}^o, m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \epsilon_5 = \operatorname{sg} q^o.$$

Condições de não-degenericidade: $r^o \neq 0, p_{\lambda_1 \lambda_1 \lambda_1}^o \neq 0, p_N^o \neq 0, p_N^o \neq \pm q^o,$

$$p_{N \lambda_1}^o q^o - q_{\lambda_1}^o p_N^o \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0] + \alpha [1, 0, 0, 0] + \beta [\lambda_1, 0, 0, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: $2 / 3$.

$$I_4 : [mN + \epsilon_o \lambda_1 + n N u_4, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_8 u_4, 0].$$

Condição de definição: $r^o = 0$.

Coefficientes: $m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \epsilon_o = \operatorname{sg} p_{\lambda_1}^o, \epsilon_5 = \operatorname{sg} q^o,$

$$\epsilon_8 = \epsilon_o \operatorname{sg} \frac{1}{\xi_4} (p_N^{o^2} - q^{o^2}) \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r) \quad \text{onde}$$

$$\xi_4 = p_{\lambda_1}^o (q^o s^o - r_N^o p_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}),$$

$$n = \epsilon_5 p_{\lambda_1}^o (q^{o^2} - p_N^{o^2}) \frac{\xi_3}{q^{o^2} \xi_4^2} \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = [p_N^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}) \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, q) + q^o (p_N^{o^2} - q^{o^2}) (p_{N \lambda_1}^o p_{u_4}^o - p_{N u_4}^o p_{\lambda_1}^o) \\ + p_{\lambda_1}^o q^o p_N^o (r_N^{o^2} + s^{o^2}) - r_N^o p_{\lambda_1}^o s^o (p_N^{o^2} + q^{o^2})]. \end{aligned}$$

Condições de não-degenericidade: $p_N^o \neq 0, p_N^o \neq \pm q^o,$

$$p_{\lambda_1}^o \neq 0, \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r) \neq 0, \xi_3 \neq 0, \xi_4 \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0] + n [N u_4, 0, 0, 0] + \alpha [0, 0, 1, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: 1 / 3.

$$I_5 : [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2 + n_1 u_4, \epsilon_5, \lambda_1, 0].$$

Condições de definição: $r^\circ = 0, p_{\lambda_1}^\circ = 0$.

$$\text{Coeficientes: } m = \frac{p_N^\circ}{|q^\circ|}, \epsilon_5 = sg \, q^\circ, \epsilon_3 = \epsilon_5 sg (p_{N\lambda_1}^\circ q^\circ - q_{\lambda_1}^\circ p_N^\circ),$$

$$\epsilon_4 = sg \, p_{\lambda_1 \lambda_1}^\circ, n_1 = \frac{p_{u_4}^\circ |p_{\lambda_1 \lambda_1}^\circ|}{2 r_{\lambda_1}^{\circ 2}}.$$

Condições de não-degenericidade: $p_N^\circ \neq 0, q^\circ \neq 0, p_N^\circ \neq \pm q^\circ$,

$$\xi_8 = p_{u_4}^\circ r_{\lambda_1}^\circ p_{\lambda_1 \lambda_1}^\circ (p_{N\lambda_1}^\circ q^\circ - q_{\lambda_1}^\circ p_N^\circ) \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0] + n_1 [u_4, 0, 0, 0] + \alpha [1, 0, 0, 0] + \beta [0, 0, 1, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: 2 / 4.

$$I_6 : [mN + \epsilon_o \lambda_1 + \epsilon_9 N u_4, \epsilon_5, u_4, 0].$$

Condições de definição: $r^\circ = 0, \xi_4 = 0$.

$$\text{Coeficientes: } \epsilon_o = sg \, p_{\lambda_1}^\circ, m = \frac{p_N^\circ}{|q^\circ|}, \epsilon_5 = sg \, q^\circ,$$

$$\epsilon_9 = \epsilon_o \epsilon_5 sg (p_N^{\circ 2} - q^{\circ 2}) \xi_3.$$

Condições de não-degenericidade: $p_{\lambda_1}^\circ \neq 0, \xi_3 \neq 0, p_N^\circ \neq 0, p_N^\circ \neq \pm q^\circ$,

$$\xi_5 = p_{u_4}^\circ (s^\circ q^\circ - p_N^\circ r_N^\circ) + r_{u_4}^\circ (p_N^{\circ 2} - q^{\circ 2}) \neq 0.$$

Termos do desdobramento: $m [N, 0, 0, 0] + \alpha [0, 0, \lambda_1, 0] + \beta [0, 0, 1, 0]$.

Codim topológica / D_4 -codim: 2 / 3.

$$I_7 : [mN + \epsilon_0 \lambda_1, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_8 u_4, 0].$$

$$\begin{aligned} \text{Condições de definição: } r^o = 0 \text{ e } \xi_3 &= p_N^o \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, q) (p_N^{o2} - q^{o2}) \\ &+ q^o (p_{N\lambda_1}^o p_{u_4}^o - p_{Nu_4}^o p_{\lambda_1}^o) (p_N^{o2} - q^{o2}) \\ &+ p_{\lambda_1}^o q^o p_N^o (r_N^{o2} + s^{o2}) - r_N^o p_{\lambda_1}^o s^o (p_N^{o2} + q^{o2}) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coeficientes: } \epsilon_o &= sg p_{\lambda_1}^o, m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \epsilon_5 = sg q^o, \\ \epsilon_8 &= \epsilon_o sg \left[\frac{(p_N^{o2} - q^{o2}) \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r)}{p_{\lambda_1}^o (q^o s^o - r_N^o p_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o2} - q^{o2})} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Condições de não-degenericidade: } p_{\lambda_1}^o &\neq 0, \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r) \neq 0, p_N^o \neq 0, p_N^o \neq \pm q^o, \\ \xi_4 &= p_{\lambda_1}^o (q^o s^o - r_N^o p_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o2} - q^{o2}) \neq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Termos do desdobramento: } m [N, 0, 0, 0] + \alpha [1, 0, 0, 0] + \beta [Nu_4, 0, 0, 0].$$

$$\text{Codim topológica / D}_4\text{-codim: } 2 / 3.$$

$$I_8 : [mN + \epsilon_o \lambda_1 + nNu_4, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_{10} u_4^2, 0].$$

$$\text{Condições de definição: } r^o = 0 \text{ e } \Delta_{\lambda_1, u_4}(p, r) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Coeficientes: } \epsilon_o &= sg p_{\lambda_1}^o, m = \frac{p_N^o}{|q^o|}, \epsilon_5 = sg q^o, \\ n &= \frac{\epsilon_5 p_{\lambda_1}^o (q_o^2 - p_N^{o2}) \xi_3}{q_o^2 [p_{\lambda_1}^o (s^o q^o - p_N^o r_N^o) + r_{\lambda_1}^o (p_N^{o2} - q^{o2})]^2} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{10} = sg \frac{\xi_6}{\xi_4} (p_{\lambda_1}^o (p_N^{o2} - q^{o2})) \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} \xi_6 &= r_{\lambda_1}^o p_{u_4}^o (p_{u_4 \lambda_1}^o p_{\lambda_1}^o - p_{\lambda_1 \lambda_1}^o p_{u_4}^o) + \\ & p_{\lambda_1}^o p_{u_4}^o (r_{\lambda_1 \lambda_1}^o p_{u_4}^o - r_{u_4 \lambda_1}^o p_{\lambda_1}^o) - p_{\lambda_1}^o \Delta_{u_4 u_4, \lambda_1}(p, r). \end{aligned}$$

$$\text{Condições de não-degenericidade: } p_{\lambda_1}^o \neq 0, \xi_3 \neq 0, \xi_4 \neq 0, \xi_6 \neq 0, p_N^o \neq 0,$$

$$p_N^o \neq \pm q^o.$$

$$\text{Termos do desdobramento: } m [N, 0, 0, 0] + n [Nu_4, 0, 0, 0] + \alpha [u_4, 0, 0, 0] + \beta [0, 0, 1, 0].$$

$$\text{Codim topológica / D}_4\text{-codim: } 2 / 4.$$

Tabela 4.1: Fluxograma para o centro organizador f_o^1

Prova do Teorema 4.1.8.

Denotamos por g a forma normal em cada caso. Usamos (4.6) e (4.8) para calcular, respectivamente, o espaço tangente e espaço tangente unipotente ao caminho associado a g .

A primeira parte do Teorema segue da Proposição 3.2.12. e Corolário 3.2.14. Para obtermos a forma normal e as condições de não-degenericidade, fazemos a mudança de coordenadas módulo um submódulo intrínscio contido na parte intrínscica de $\mathcal{TU}^{\mathcal{D}_4}(g)$, o qual está contido em $\mathcal{P}(g)$ pela Proposição 1.10.3.1.

O desdobramento miniversal segue do Teorema 3.2.15. e Corolário 1.7.4.

Para concluir a prova, escrevemos os dados básicos para cada caso.

CASO I. $g = [mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, 1, 0]$.

Foi provado usando a método clássico no Teorema 2.6.1.

Caminho associado: $\tilde{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_o \lambda_1, 0, \lambda_2)$.

$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathcal{D}_4} < (1, 0, 0), (0, \lambda_1, 0), (0, u_4, 0), (0, 0, \lambda_2) > .$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (0, 1, 0) >; m$ é um parâmetro modal.

$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathcal{D}_4} < (\lambda_1^2, 0, 0), (u_4, 0, 0), (0, \lambda_1, 0), (0, u_4, 0), (0, 0, \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4 \lambda_2) > .$

CASO I₁. $g = [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_5, 1, 0]$ (cf. Teorema 2.8.1).

Caminho associado: $\tilde{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_3 \lambda_1, \lambda_2)$.

$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathcal{D}_4} < (u_4, 0, 0), (0, \lambda_1, 0), (0, u_4, 0), (2\epsilon_4 \lambda_1, \epsilon_3, 0), (0, 0, \lambda_2) > .$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (1, 0, 0), (0, 1, 0) >; m$ é um parâmetro modal.

$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathcal{D}_4} < (u_4, 0, 0), (\lambda_1^3, 0, 0), (0, \lambda_1^2, 0), (0, u_4, 0), (0, 0, \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4 \lambda_2) > .$

CASO I₂. $g = [mN + \epsilon_7 N \lambda_1^2 + \epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_5, 1, 0]$.

Caminho associado: $\hat{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_4 \lambda_1^2, \epsilon_7 \lambda_1^2, \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (u_4, 0, 0), (\lambda_1^2, 0, 0), (\epsilon_4 \lambda_1, \epsilon_7 \lambda_1, 0), (0, u_4, 0), (0, 0, \lambda_2) > .$$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, \lambda_1, 0) >; m$ é um parâmetro modal.

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (m u_4, \epsilon_4(1 - m^2) \lambda_1^2, 0), (0, u_4, 0), (\lambda_1^3, 0, 0), (0, \lambda_1^3, 0), \\ (0, 0, \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4 \lambda_2) > .$$

CASO I₃. $g = [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_{11} \lambda_1^3, \epsilon_5, 1, 0]$.

Caminho associado: $\hat{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_{11} \lambda_1^3, \epsilon_3 \lambda_1, \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (m u_4 + \epsilon_3 u_4 \lambda_1, 0, 0), (0, u_4, 0), (\lambda_1^3, 0, 0), (3 \epsilon_{11} \lambda_1^2, \epsilon_3, 0), (0, 0, \lambda_2) > .$$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (0, 1, 0), (1, 0, 0), (\lambda_1, 0, 0) >; m$ é um parâmetro modal.

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (u_4, 0, 0), (\lambda_1^4, 0, 0), (0, u_4, 0), (0, \lambda_1^2, 0), (0, 0, \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4 \lambda_2) > .$$

CASO I₄. $g = [mN + \epsilon_o \lambda_1 + n N u_4, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_8 u_4, 0]$. (cf. Teorema 2.8.1.).

Caminho associado: $\tilde{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_o \lambda_1, n u_4, (\lambda_1 + \epsilon_8 u_4) \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (-2m \lambda_1^2, \epsilon_o(1 - m^2) \lambda_1, 0), (u_4, 0, 0), (\epsilon_o, 0, \lambda_2), \\ (-\epsilon_o \lambda_1, 2n u_4, 0), (\epsilon_o m(1 - m^2) \lambda_1^2, 0, 2n \lambda_1^2 \lambda_2) > .$$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (0, 1, 0), (0, u_4, 0), (0, 0, \lambda_2) >; m$ e n são parâmetros modais.

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (\lambda_1^2, 0, 0), (u_4^2, 0, 0), (0, \lambda_1, 0), (0, u_4^2, 0), (0, 0, u_4 \lambda_1 \lambda_2), \\ (\epsilon_o u_4, 0, u_4 \lambda_2), (0, 0, \lambda_1^2 \lambda_2) > .$$

CASO I₅. $g = [mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2 + n_1 u_4, \epsilon_5, \lambda_1, 0]$.

Caminho associado: $\tilde{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_4 \lambda_1^2 + n_1 u_4, \epsilon_3 \lambda_1, \lambda_1 \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (m u_4 \lambda_1^2, (1 - m^2) n_1 u_4, m \lambda_1 \lambda_2), (4 n_1 u_4 \lambda_1^3, 0, \epsilon_4 \lambda_1^2 \lambda_2), \\ (2 n_1 u_4, 0, \lambda_1 \lambda_2), (2 \epsilon_4 \lambda_1, \epsilon_3, \lambda_2), (0, \lambda_1, 0) > .$$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (1, 0, 0), (u_4, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) >; m$ e n_1 são parâmetros modais.

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\text{D}_4} < (\epsilon_4 m \lambda_1^4, (1 - m^2) n_1^2 u_4, 2 \epsilon_4 n_1 m \lambda_1^4 \lambda_2), (u_4 \lambda_1^3, 0, 0), (0, \lambda_1^2, 0),$$

$$(0, u_4 \lambda_1, 0), (2n_1 u_4 \lambda_1, 0, \lambda_1^2 \lambda_2), (2\epsilon_4 u_4 \lambda_1, \epsilon_3 u_4, u_4 \lambda_2), \\ (n_1 u_4 \lambda_1 - \epsilon_4 \lambda_1^3, 0, 0), (n_1 u_4^2 - \epsilon_4 u_4 \lambda_1^2, 0, 0) > .$$

CASO I₆. $g = [mN + \epsilon_o \lambda_1 + \epsilon_9 N u_4, \epsilon_5, u_4, 0]$.

Caminho associado: $\hat{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_o \lambda_1, \epsilon_9 u_4, u_4 \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\hat{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbb{D}_4} < (1, 0, 0), (0, \lambda_1, 0), (0, u_4, 0), (0, 0, \lambda_1^2 \lambda_2), (0, 0, u_4 \lambda_2) > .$$

$\mathcal{N}(\hat{\alpha}) = < (0, 1, 0), (0, 0, \lambda_2), (0, 0, \lambda_1 \lambda_2) >; m$ é um parâmetro modal.

$$\mathcal{TU}(\hat{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbb{D}_4} < (u_4, 0, 0), (\lambda_1^2, 0, 0), (0, \lambda_1, 0), (0, u_4^2, 0), (0, 0, \lambda_1^2 \lambda_2), \\ (0, 0, u_4 \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4^2 \lambda_2) > .$$

CASO I₇. $g = [mN + \epsilon_o \lambda_1, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_8 u_4, 0]$.

Caminho associado: $\tilde{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_o \lambda_1, 0, (\lambda_1 + \epsilon_8 u_4) \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbb{D}_4} < (0, \lambda_1, 0), (0, u_4^2, 0), (0, 0, u_4 \lambda_2), (\epsilon_o, 0, \lambda_2), (\lambda_1, 0, 0) > .$$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, u_4, 0) >; m$ é um parâmetro modal.

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbb{D}_4} < (0, \lambda_1, 0), (0, u_4^2, 0), (0, 0, u_4 \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4^2 \lambda_2), (\lambda_1^2, 0, 0), \\ (\epsilon_o u_4, 0, u_4 \lambda_2), (0, 0, \lambda_1^2 \lambda_2) > .$$

CASO I₈. $g = [mN + \epsilon_o \lambda_1 + nN u_4, \epsilon_5, \lambda_1 + \epsilon_{10} u_4^2, 0]$.

Caminho associado: $\tilde{\alpha}(\lambda) = (\epsilon_o \lambda_1, n u_4, (\lambda_1 + \epsilon_{10} u_4^2) \lambda_2)$.

$$\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbb{D}_4} < (\epsilon_o, 0, \lambda_2), (\epsilon_o \lambda_1, 0, u_4^2 \lambda_2), (0, 2n u_4, \lambda_1 \lambda_2), (0, \lambda_1, 0) > .$$

$\mathcal{N}(\tilde{\alpha}) = < (u_4, 0, 0), (0, u_4, 0), (0, 1, 0), (0, 0, \lambda_2) >; m$ e n são parâmetros modais.

$$\mathcal{TU}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda^{\mathbb{D}_4} < (\lambda_1^2, 0, 0), (\epsilon_o u_4, 0, u_4 \lambda_2), (0, \lambda_1, 0), (0, 2n u_4^2, u_4 \lambda_1 \lambda_2), (0, 0, u_4^2 \lambda_1 \lambda_2), \\ (0, 0, u_4^3 \lambda_2), (0, 0, \lambda_1^2 \lambda_2) > . \quad \square$$

Capítulo 5

Diagramas de bifurcação

A descrição geométrica das formas normais obtidas é feita através dos diagramas de bifurcação. Dado um problema de bifurcação g , o *diagrama de bifurcação* associado é dado pelo conjunto de zeros de g . A construção de tais diagramas para os problemas D_4 -equivariantes em estudo e também para os seus correspondentes desdobramentos é feita através da análise das regiões do plano dos parâmetros (λ_1, λ_2) onde as soluções do problema aparecem. Os diagramas são construídos através do que chamamos de representação radial pois consideramos a parametrização

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= R \cos(s) \\ \lambda_2 &= R \sin(s)\end{aligned}$$

com $R > 0$. Em alguns casos, os diagramas apresentam comportamentos diferentes quando R varia.

Paralelamente, fazemos o estudo da estabilidade assintótica das soluções.

5.1 Soluções do problema D_4

Recorde que a forma geral de um problema de bifurcação D_4 -equivariante é dada por

$$\begin{aligned}g : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, \lambda_1, \lambda_2) &\mapsto p(N, \Delta, \lambda_1, u_4)z + q(N, \Delta, \lambda_1, u_4)\delta\bar{z} + r(N, \Delta, \lambda_1, u_4)\lambda_2\bar{z} \\ &\quad + s(N, \Delta, \lambda_1, u_4)\delta\lambda_2z.\end{aligned}$$

Identificando $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e z com (x_1, x_2) , a expressão de g , em coordenadas reais x_1, x_2 , é dada por

$$g(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (g_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2), g_2(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2))$$

com

$$g_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = px_1 + qx_1x_2^2 - qx_1^3 + \lambda_2(rx_1 + sx_1x_2^2 - sx_1^3),$$

$$g_2(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = px_2 + qx_1^2x_2 - qx_2^3 + \lambda_2(-rx_2 - sx_1^2x_2 + sx_2^3)$$

e p, q, r, s funções de $(N, \Delta, \lambda_1, u_4)$ sendo $N = x_1^2 + x_2^2$, $\Delta = (x_2^2 - x_1^2)^2$ e $u_4 = \lambda_2^2$.

O diagrama de bifurcação de g é dado pelos zeros de g e corresponde a achar os pontos $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ que satisfazem as equações

$$g_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad \text{e} \quad g_2(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0. \quad (5.1)$$

Note que achar os zeros da equação $g(x, \lambda) = 0$ corresponde a obter pontos estacionários em função dos parâmetros para a família de sistemas de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d}{dt}x_1 + g_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}x_2 + g_2(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

Recordamos que o *subgrupo de isotropia* do grupo D_4 de um ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o subgrupo

$$\Sigma_x = \{\sigma \in D_4 \mid \sigma \cdot x = x\}$$

e o *subespaço de pontos fixos* de um subgrupo Σ de D_4 é o subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \cdot x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

A *órbita* de um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto

$$D_4 \cdot x = \{\gamma \cdot x, \forall \gamma \in D_4\}.$$

O conjunto solução da equação $g(x, \lambda) = 0$ é preservado pela simetria D_4 , ou seja, se x é solução então $\gamma \cdot x$ é solução para todo γ em D_4 . Existe uma relação natural entre os subgrupos de isotropia de pontos numa mesma órbita dada por:

$$\Sigma_{\gamma \cdot x} = \gamma \cdot \Sigma_x \cdot \gamma^{-1}, \forall \gamma \in D_4.$$

Neste caso, dizemos que Σ_x e $\Sigma_{\gamma \cdot x}$ são subgrupos de isotropias *conjugados* e vamos daqui para frente denotar $\Sigma_{\gamma \cdot x}$ por Σ_x^c .

SUBGRUPOS DE ISOTROPIA	SUBESPAÇOS DE PONTOS FIXOS
D_4	$x_1 = x_2 = 0$
$Z_2(\kappa) = \langle \kappa \rangle$	$x_2 = 0$
$Z_2^c(\kappa)$	$x_1 = 0$
$Z_2(\xi\kappa) = \langle \xi\kappa \rangle, \xi = e^{\frac{i\pi}{2}}$	$x_1 = x_2$
$Z_2^c(\xi\kappa)$	$x_1 = -x_2$
1	$\forall(x_1, x_2)$

TABELA 5.1

Para o grupo D_4 , os subgrupos de isotropia com seus respectivos conjugados e subespaços de pontos fixos são dados na tabela acima.

A justificativa da tabela 5.1 pode ser encontrada em ([16], pág. 97). Note que a solução nula é sempre solução de (5.1) por se tratar de um problema de bifurcação. Para cada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, temos que $(0, 0, \lambda_1, \lambda_2)$ é, também, sempre solução de (5.1) e chamada *solução trivial*. O subgrupo de isotropia da solução trivial é o próprio D_4 . Outras soluções diferentes da trivial podem ocorrer para o problema de bifurcação g porém, com simetria Σ_x , onde Σ_x denota os subgrupos de isotropia da tabela 5.1. Esse fenômeno é conhecido como *quebra de simetria espontânea*.

5.2 Estabilidade orbital

Definição 5.2.1. Seja (x_0, λ_0) um ponto de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias $\frac{dx}{dt} + g(x, \lambda) = 0$, ou, equivalentemente um zero da equação $g(x, \lambda) = 0$. Dizemos que (x_0, λ_0) é *orbitalmente linearmente estável* se for estável e se os auto-valores da matriz Jacobiana $(D_x g)$ calculada em (x_0, λ_0) , não forçados pela ação do grupo a serem nulos, tiverem parte real positiva.

Os auto-valores nulos correspondem a auto-vetores que estão no espaço tangente à órbita $D_4 \cdot x_0$ no ponto x_0 .

Teorema 5.2.2. Estabilidade orbital linear implica estabilidade orbital assintótica.

Prova. ([16], Teorema 4.3, pág. 88). □

Assim como os zeros de um problema de bifurcação são preservados por $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência, enunciaremos os resultados que estabelecem quando a estabilidade linear de uma solução de equilíbrio $g(x_o, \lambda_o) = 0$, para o sistema de EDOs

$$\frac{dx}{dt} + g(x, \lambda) = 0,$$

é também preservada por $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência.

Proposição 5.2.3. A estabilidade orbital linear de (x_o, λ_o) de g é preservada por $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência se e somente se for preservada por D_4 -equivalências da forma $S(x, \lambda)g(x, \lambda)$ com S como na definição de $\mathcal{K}_\lambda^\Gamma$ -equivalência no Capítulo 1 (secção 1.3) e com Γ sendo D_4 .

Prova. ([16], Proposição 5.1, pág. 200). □

Observação 5.2.4. O sinal do determinante de $(D_x g)$ é também um invariante por $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência.

Teorema 5.2.5. Seja Σ um subgrupo de isotropia de D_4 e (x_o, λ_o) solução de $g = 0$ com $\Sigma_{x_o} = \Sigma$. Se for possível decompor V como $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, onde cada V_j é uma representação absolutamente irredutível pela ação de Σ então a estabilidade orbital linear de (x_o, λ_o) é preservada por $\mathcal{K}_\lambda^{D_4}$ -equivalência.

Prova. ([16], Teorema 5.3, pág. 201).

Lembramos que a ação de Σ em V_j é dita *absolutamente irredutível* se as únicas

aplicações lineares sobre V_j Σ -equivariantes são múltiplas da identidade.

5.3 Dados para o problema D_4

Vimos que a forma geral de um problema D_4 -equivariante é dada por

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, \lambda_1, \lambda_2) &\mapsto p(N, \Delta, \lambda_1, u_4)z + q(N, \Delta, \lambda_1, u_4)\delta\bar{z} + r(N, \Delta, \lambda_1, u_4)\lambda_2\bar{z} \\ &\quad + s(N, \Delta, \lambda_1, u_4)\delta\lambda_2z. \end{aligned}$$

Identificando z com (x_1, x_2) , escrevemos $g = (g_1, g_2)$ sendo

$$\begin{aligned} g_1 &= px_1 + qx_1x_2^2 - qx_1^3 + \lambda_2(rx_1 + sx_1x_2^2 - sx_1^3), \\ g_2 &= px_2 + qx_1^2x_2 - qx_2^3 + \lambda_2(-rx_2 - sx_1^2x_2 + sx_2^3). \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana (D_xg) tem as seguintes entradas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}g_1 &= (2p_Nx_1^2 + p - 4p_\Delta\delta x_1^2 + qx_2^2 - 3qx_1^2 + 2q_N\delta x_1^2 - 4q_\Delta\Delta x_1^2) \\ &\quad + \lambda_2(r + 2r_Nx_1^2 - 4r_\Delta\delta x_1^2 + sx_2^2 - 3sx_1^2 + 2s_N\delta x_1^2 - 4s_\Delta\Delta x_1^2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}g_1 &= (2p_Nx_1x_2 + 4p_\Delta\delta x_1x_2 + 2qx_1x_2 + 2q_N\delta x_1x_2 + 4q_\Delta\Delta x_1x_2) \\ &\quad + \lambda_2(2r_Nx_1x_2 + 4r_\Delta\delta x_1x_2 + 2sx_1x_2 + 2s_N\delta x_1x_2 + 4s_\Delta\Delta x_1x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_1}g_2 &= (2p_Nx_1x_2 - 4p_\Delta\delta x_1x_2 + 2qx_1x_2 - 2q_N\delta x_1x_2 + 4q_\Delta\Delta x_1x_2) \\ &\quad + \lambda_2(-2r_Nx_1x_2 + 4r_\Delta\delta x_1x_2 - 2sx_1x_2 + 2s_N\delta x_1x_2 - 4s_\Delta\Delta x_1x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}g_2 &= (2p_Nx_2^2 + p + 4p_\Delta\delta x_2^2 + qx_1^2 - 3qx_2^2 - 2q_Nx_2^2\delta - 4q_\Delta\Delta x_2^2) \\ &\quad + \lambda_2(-r - 2r_Nx_2^2 - 4r_\Delta\delta x_2^2 + 3sx_2^2 - sx_1^2 + 2s_N\delta x_2^2 + 4s_\Delta\Delta x_2^2). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}g_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}g_2(x_2, x_1, \lambda_1, -\lambda_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}g_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}g_2(x_2, x_1, \lambda_1, -\lambda_2). \end{aligned}$$

Usaremos a notação $(D_xg)_i$, para indicar a restrição dos elementos da matriz Jacobiana (D_xg) aos respectivos ramos de soluções encontrados. Além disso, $\text{tr}(D_xg)$ denotará o traço da matriz (D_xg) e $\det(D_xg)$ o seu determinante.

As soluções do problema (5.1), correspondentes aos subespaços de pontos fixos dos subgrupos de isotropia do D_4 com seus respectivos conjugados, assim como as expressões que fornecem os sinais dos auto-valores estão na tabela 5.2.

SUBESPAÇOS FIXADOS	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO - VALORES
Fix(D_4)	$(0, 0, \lambda_1, \lambda_2)$	$p + \lambda_2 r$ e $p - \lambda_2 r$
Fix($Z_2(\kappa)$)	$x_2 = 0$ $p = qx_1^2 - \lambda_2 r + \lambda_2 s x_1^2$	$(p_N - q + (2p_\Delta - q_N)x_1^2 - 2q_\Delta x_1^4)$ $+ \lambda_2(r_N - s + (2r_\Delta - s_N)x_1^2 - 2s_\Delta x_1^4)$ e $(qx_1^2 - \lambda_2 r)$
Fix($Z_2^c(\kappa)$)	$x_1 = 0$ $p = qx_2^2 + \lambda_2 r - s\lambda_2 x_2^2$	$(p_N - q + (2p_\Delta - q_N)x_2^2 - 2q_\Delta x_2^4)$ $+ \lambda_2(-r_N + s - (2r_\Delta - s_N)x_2^2 + 2s_\Delta x_2^4)$ e $(qx_2^2 + \lambda_2 r)$
Fix($Z_2(\xi\kappa)$) e Fix($Z_2^c(\xi\kappa)$)	$x_1 = \pm x_2$ $p = 0$ e $\lambda_2 = 0$	p_N e $(-q)$
Fix(1)	$p + \delta\lambda_2 s = 0$ e $\lambda_2 r + \delta q = 0$	$\text{tr}(D_x g)_1 = Np_N + 2\Delta p_\Delta - Nq - \Delta q_N$ $- 2\Delta Nq_\Delta + \delta\lambda_2(-r_N - 2Nr_\Delta + s$ $+ Ns_N + 2\Delta s_\Delta).$ $\det(D_x g)_1 = -4qp_N + 8\Delta(p_\Delta q_N - p_N q_\Delta)$ $+ \delta\lambda_2[8(p_\Delta r_N - p_N r_\Delta) + 4(sq_N - qs_N)$ $+ 8\Delta(s_\Delta q_N - q_\Delta s_N)]$ $+ u_4[4sr_N + 8\Delta(s_\Delta r_N - s_N r_\Delta)]$

TABELA 5.2

A seguir construiremos os diagramas de bifurcação para a forma normal genérica e para a forma normal quando $p_{\lambda_1}^o = 0$ e também os diagramas para os seus respectivos desdobramentos versais.

5.4 Diagramas para a forma normal genérica

Como vimos a forma normal genérica para os problemas D_4 -equivariantes é dada por

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, \lambda_1, \lambda_2) &\mapsto (mN + \epsilon_o \lambda_1)z + \epsilon_5 \delta \bar{z} + \lambda_2 \bar{z} \end{aligned}$$

com $m \neq \pm 1, 0$ e $\epsilon_o^2 = \epsilon_5^2 = 1$.

Os diagramas serão construídos para o caso $\epsilon_o = \epsilon_5 = 1$.

Em coordenadas $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ a expressão de g é

$$g(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)x_1 + (m - 1)x_1^3 + (m + 1)x_1x_2^2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + (m - 1)x_2^3 + (m + 1)x_1^2x_2 \end{pmatrix}$$

e a expressão do seu desdobramento versal é

$$G(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \beta) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)x_1 + (m + \beta - 1)x_1^3 + (m + \beta + 1)x_1x_2^2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + (m + \beta - 1)x_2^3 + (m + \beta + 1)x_1^2x_2 \end{pmatrix}$$

A análise será feita de acordo com a variação dos sinais de m e β .

Caso 1. $m > 1$ e $\beta = 0$

Os dados para a construção do diagrama de g estão na tabela 5.3 e são obtidos substituindo-se os correspondentes dados do problema na tabela 5.2.

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
Fix(D_4)	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
Fix($Z_2(\kappa)$)	$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 + \lambda_2)$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 < 0 \end{cases}$ $+ - \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 > 0 \end{cases}$
Fix($Z_2^\varepsilon(\kappa)$)	$\lambda_2 - \lambda_1 \geq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$++ \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 > 0 \end{cases}$ $+ - \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 < 0 \end{cases}$
Fix($Z_2(\xi\kappa)$) Fix($Z_2^c(\xi\kappa)$)	$\lambda_1 \leq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2m}\lambda_1$	$+-$
Fix(1)	$\lambda_1 \leq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$m x_1^2 + m x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.3: $m > 1$

Para a construção do diagrama, fazemos a análise do número de soluções do problema para cada valor fixado do par (λ_1, λ_2) .

As soluções correspondentes ao $\text{Fix}(Z_2(\kappa))$ tem a componente x_2 nula e a componente x_1 dada por valores simétricos, para cada par fixado (λ_1, λ_2) satisfazendo $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$. Quando $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ temos a solução trivial. O mesmo vale para as soluções correspondentes ao $\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$ para cada par (λ_1, λ_2) fixado na região $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 0$ e trocando-se x_1 por x_2 . Para cada par fixado $(\lambda_1, 0)$ com $\lambda_1 < 0$, a solução correspondente ao $\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ e seu conjugado é dada por quatro pares de pontos (x_1, x_2) com $x_1 = \pm x_2$ e satisfazendo $x_1^2 = -\frac{1}{2m}\lambda_1$. As soluções correspondentes ao $\text{Fix}(1)$ correspondem aos pontos de intersecção de uma circunferência com uma hipérbole para cada par (λ_1, λ_2) fixado na região definida por $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 \leq 0$ ou $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 < 0$ e $\lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 \geq 0$. A representação esquemática dessas observações está na figura 5.1. Observe ainda que

1. Quando $\lambda_2 = -\frac{1}{m}\lambda_1$ as soluções correspondentes ao $\text{Fix}(Z_2(\kappa))$ e $\text{Fix}(1)$ coincidem.
2. Quando $\lambda_2 = \frac{1}{m}\lambda_1$, as soluções correspondentes ao $\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$ e $\text{Fix}(1)$ coincidem.
3. Quando $\lambda_2 = 0$, as soluções correspondentes ao $\text{Fix}(1)$ e $\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa), Z_2^c(\xi\kappa))$ também coincidem.

Finalmente para a construção do diagrama, consideramos a parametrização polar

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= R \cos s \\ \lambda_2 &= R \sin s\end{aligned}$$

com $R > 0$. Os ramos de soluções, obtidos em função dos parâmetros de bifurcação, são desenhados no espaço (x_1, s, x_2) . Neste caso, o comportamento qualitativo dos diagramas não depende do raio R .

Note, também, que quando $\frac{3\pi}{4} \leq s \leq \frac{7\pi}{4}$, temos duas “pitchforks” se encontrando no plano (x_1, s) . O mesmo ocorre no plano (s, x_2) , para valores $\frac{\pi}{4} \leq s \leq \frac{5\pi}{4}$. Na região do plano dos parâmetros (λ_1, λ_2) definida acima por $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 \leq 0$ ou $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 < 0$ e $\lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 \geq 0$, o ramo de solução em (x_1, s, x_2) tem a propriedade de que, para cada s fixado nessa região, aparecem quatro pontos como solução. Os pontos

de contato deste ramo com os “pitchforks” correspondem à coincidência das soluções dos respectivos subespaços fixados, conforme comentado acima.

O diagrama está na figura 5.2 e as letras *s* e *u* correspondem, respectivamente, aos ramos de solução estáveis e instáveis.

FIG. 5.2 : $m > 1$

FIG. 5.2 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $m > 1$

Comentários análogos feitos para as soluções no caso $m > 1$ são válidos em todos os demais casos que se seguem e por isso apresentaremos apenas a tabela com os dados sobre as soluções, a representação esquemática do número de soluções do problema nas regiões do plano (λ_1, λ_2) e o diagrama de bifurcação.

A construção dos diagramas de bifurcação do desdobramento versal G de g quando $m > 1$ é dividido em dois casos: no caso (i) consideramos valores de β positivos e próximos de zero e no caso (ii), valores de β negativos e também próximos de zero. A tabela 5.4 contém os dados relativos a ambos casos. Esses dados variam de acordo com o sinal de β .

Neste caso não há mudanças qualitativas nos diagramas de bifurcação do desdobramento G de g quando comparado com o diagrama de bifurcação de g pois trata-se de um germe topologicamente estável. O mesmo ocorre para os casos seguintes que analisaremos.

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(1 - m - \beta)}$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 < 0 \end{cases}$ $+ - \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_2 - \lambda_1 \geq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1 - m - \beta)}$	$++ \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 > 0 \end{cases}$ $+ - \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 < 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_1 \leq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2(m + \beta)}\lambda_1$	$+-$
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_1 \leq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$(m + \beta)x_1^2 + (m + \beta)x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.4: $m > 1, \beta \neq 0$

FIG. 5.3 : $m > 1$, $\beta > 0$

FIG. 5.4 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $m > 1, \beta > 0$

FIG. 5.5 : $m > 1$, $\beta < 0$

FIG. 5.6 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO : $m > 1$, $\beta < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 + \lambda_2)$	$-+$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$-+$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_1 \leq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2m}\lambda_1$	$+-$
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_1 \leq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$m x_1^2 + m x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.5: $0 < m < 1$
Neste caso todas as soluções não triviais são instáveis.

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(1 - m - \beta)}$	$--$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1 - m - \beta)}$	$--$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_1 \leq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2(m + \beta)}\lambda_1$	$+-$
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_1 \leq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$(m + \beta)x_1^2 + (m + \beta)x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.6: $0 < m < 1, \beta \neq 0$
Todas as soluções não triviais são instáveis.

FIG. 5.9 : $0 < m < 1, \beta > 0$

FIG. 5.10 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $0 < m < 1$, $\beta > 0$

FIG. 5.11 : $0 < m < 1$, $\beta < 0$

FIG. 5.12 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $0 < m < 1$, $\beta < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 + \lambda_2)$	$-+$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$-+$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_1 \geq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2m}\lambda_1$	$+-$
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_1 \geq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$m x_1^2 + m x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.7: $-1 < m < 0$
Neste caso todas as soluções não triviais são instáveis.

FIG. 5.13. $-1 < m < 0$

FIG. 5.14 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $-1 < m < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(1 - m - \beta)}$	$-+$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1 - m - \beta)}$	$-+$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_1 \geq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2(m + \beta)}\lambda_1$	$+-$
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_1 \geq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{(m + \beta)}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$(m + \beta)x_1^2 + (m + \beta)x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.8: $-1 < m < 0, \beta \neq 0$
Todas as soluções não triviais são instáveis.

FIG. 5.15 : $-1 < m < 0$, $\beta > 0$

FIG.5.16 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $-1 < m < 0, \beta > 0$

FIG. 5.17: $-1 < m < 0$, $\beta < 0$

FIG.5.1B - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $-1 < m < 0$, $\beta < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO - VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 + \lambda_2)$	$--$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{1}{(1-m)}(\lambda_1 - \lambda_2)$	$--$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_1 \geq 0$ $\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{1}{2m}\lambda_1$	$+-$
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_1 \geq 0$ $\begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{m}\lambda_1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_2 - \frac{1}{m}\lambda_1 \geq 0 \end{cases}$	$m x_1^2 + m x_2^2 = -\lambda_1$ e $x_1^2 - x_2^2 = \lambda_2$	$+-$

TABELA 5.9: $m < -1$

Neste caso todas as soluções não triviais são instáveis.

Para esse caso $m < -1$, construiremos apenas o diagrama de bifurcação de g devido a semelhança dos diagramas do seu desdobramento com o caso anterior.

FIG. 5.19 : $m < -1$

FIG.5.20 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO : $m < -1$

Observação. Para os diagramas de bifurcação da forma normal genérica que apresentamos, fizemos a escolha $\epsilon_o = \epsilon_5 = 1$. Há, na realidade, 16 diagramas qualitativamente distintos correspondendo às 4 possíveis escolhas para ϵ_o e ϵ_5 e aos 4 intervalos de variação de m pois $m \neq \pm 1, 0$. Entretanto, usando a mudança de coordenadas $g \mapsto -g$ que inverte a estabilidade e a mudança $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1, -\lambda_2)$ que inverte as regiões do plano, vemos que basta analisar os casos $\epsilon_o = \epsilon_5 = 1$ e $\epsilon_o = 1$ e $\epsilon_5 = -1$. Optamos pela construção dos diagramas para $\epsilon_o = \epsilon_5 = 1$.

5.5 Diagramas de bifurcação para a forma normal quando $p_{\lambda_1}^o = 0$

A forma normal quando $p_{\lambda_1}^o = 0$ é o **CASO I₁** do Teorema 2.8.1. e é dada por

$$g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto (mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \epsilon_5 \delta \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

e seu desdobramento, para cada valor isolado de m , é

$$G : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) \mapsto (mN + \epsilon_3 N \lambda_1 + \epsilon_4 \lambda_1^2 + \alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \epsilon_5 \delta \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Analisaremos o caso quando $\epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 1$. Os dados para a construção dos diagramas de bifurcação são obtidos substituindo-se os dados do problema na tabela 5.2. Seguindo o mesmo esquema anterior apresentamos a tabela com os principais dados sobre as soluções em cada caso analisado, as regiões do plano (λ_1, λ_2) onde as soluções existem e o diagrama de bifurcação desenhado no espaço (x_1, s, x_2) devido a parametrização

$$\lambda_1 = R \cos s$$

$$\lambda_2 = R \sin s$$

com $R > 0$.

Para esse problema de bifurcação observamos que, para valores isolados de m , ocorrem variações do diagrama de bifurcação quando R varia.

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$ $+ - \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 \leq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2}{1 - m - \lambda_1}$	$++$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2}{1 - m - \lambda_1}$	$++$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^\xi(\xi\kappa))$		$\emptyset$	
$\text{Fix}(1)$		$\emptyset$	

TABELA 5.10: $m > 1$

FIG. 5.21 : $m > 1$

FIG. 5.22 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO : $m > 1$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases}$ $+- \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 (< 0) \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 (> 0) \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha \leq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	++
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	++
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$		$\emptyset$	
$\text{Fix}(1)$		$\emptyset$	

TABELA 5.11: $m > 1, \alpha > 0$

FIG. 5.23 : $m > 1$, $\alpha > 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO : $m > 1$, $\alpha > 0$

1. $\lambda_1 = R_0 \cos s$ $R_0 = \alpha$

$\lambda_2 = R_0 \sin s$

2. $\lambda_1 = R_1 \cos s$ $R_1 > \alpha$

$\lambda_2 = R_1 \sin s$

FIG. 5.24

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$ \begin{aligned} &++ \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases} \\ &+- \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 (< 0) \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 (> 0) \end{cases} \\ &-- \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha < 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} $
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha \leq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	$ \begin{aligned} &++ \begin{cases} \lambda_2 \leq 0 \text{ ou } \lambda_2 > 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases} \\ &+- \begin{cases} \lambda_2 > 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases} \end{aligned} $
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha \leq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	$ \begin{aligned} &++ \begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \text{ ou } \lambda_2 < 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases} \\ &+- \begin{cases} \lambda_2 < 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases} \end{aligned} $

TABELA 5.12: $m > 1, \alpha < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_2 = 0$ $\lambda_1^2 + \alpha \leq 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{\lambda_1^2 + \alpha}{2(m + \lambda_1)}$	$+-$
$\text{Fix}(\mathbf{1})$	$\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha \leq 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha \leq 0$	$x_1^2 = x_2^2 + \lambda_2$ $x_2^2 = -\frac{(\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$ $x_2^2 = -\lambda_2 + x_1^2$ $x_1^2 = -\frac{(\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$	$+-$

Continuação da TABELA 5.12: $m > 1, \alpha < 0$

Observamos que quando $\lambda_2 = 0$, as soluções correspondentes a $\text{Fix}(1)$, $\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa))$ e $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$ coincidem. A coincidência entre as soluções correspondentes a $\text{Fix}(1)$ com $\text{Fix}(Z_2(\kappa))$ e $\text{Fix}(1)$ com $\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$ ocorrem, respectivamente, quando $\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha = 0$ e $\lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha = 0$ e $\lambda_2 < 0$. Esse comentário se estende a todos os demais casos a seguir, onde ocorrem as intersecções acima mencionadas.

FIG. 5.25 : $m > 1$, $\alpha < 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO : $m > 1, \alpha < 0$

1. $R < |\vec{OP}|$

FIG. 5.26

$$2. R = |\vec{OP}|$$

FIG. 5.26

3. $|\vec{OP}| < R < -\alpha$

FIG. 5.26

4. $R = -\alpha$

FIG. 5.26

5. $-\alpha < R < \sqrt{-\alpha}$

FIG. 5.26

$$6. R = \sqrt{-\alpha}$$

$$7. R > \sqrt{-\alpha}$$

FIG. 5.26

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$ $+ - \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2}{1 - m - \lambda_1}$	$+ -$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 \geq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2}{1 - m - \lambda_1}$	$+ -$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^\xi(\xi\kappa))$		$\emptyset$	
$\text{Fix}(1)$		$\emptyset$	

TABELA 5.13: $0 < m < 1$

FIG. 5.27 : $0 < m < 1$

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO : $0 < m < 1$

FIG. 5.28

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases}$ $-- \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha < 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	$+-$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	$+-$
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$		$\emptyset$	
$\text{Fix}(\mathbf{1})$		$\emptyset$	

TABELA 5.14: $0 < m < 1, \alpha > 0$

FIG. 5.29 : $0 < m < 1$, $\alpha > 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO : $0 < m < 1$, $\alpha > 0$

1. $R < \alpha$

2. $R = \alpha$

3. $R > \alpha$

FIG. 5.30

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
Fix(D_4)	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$ \begin{aligned} &++ \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases} \\ &+- \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 (< 0) \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha < 0 (> 0) \end{cases} \\ &-- \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} $
Fix($Z_2(\kappa)$)	$\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$ \begin{aligned} &x_2 = 0 \\ &x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &+- \{ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \\ &-- \{ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{aligned} $
Fix($Z_2^c(\kappa)$)	$\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$ \begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &+- \{ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \\ &-- \{ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{aligned} $

TABELA 5.15: $0 < m < 1, \alpha < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_2 = 0$ $\lambda_1^2 + \alpha \leq 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{\lambda_1^2 + \alpha}{2(m + \lambda_1)}$	$+-$
$\text{Fix}(\mathbf{1})$	$\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha \leq 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha \leq 0$	$x_1^2 = x_2^2 + \lambda_2$ $x_2^2 = -\frac{(\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$ $x_2^2 = -\lambda_2 + x_1^2$ $x_1^2 = -\frac{(\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$	$+-$

Continuação da TABELA 5.15: $0 < m < 1, \alpha < 0$

FIG. 5.31 : $0 < m < 1$, $\alpha < 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO : $0 < m < 1, \alpha < 0$

1. $R < -\alpha$

2. $R = -\alpha$

3. $-\alpha < R < |\vec{OP}|$

FIG. 5.32

$$4. R = |\vec{OP}|$$

FIG. 5.32

5. $|\vec{OP}| < R < \sqrt{-\alpha}$

FIG. 5.32

6. $R = \sqrt{-\alpha}$

7. $R > \sqrt{-\alpha}$

FIG. 5.32

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$ $+- \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2}{1 - m - \lambda_1}$	$-+ \begin{cases} \lambda_2 \leq 0 \text{ ou } \lambda_2 > 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 > 0 \end{cases}$ $-- \begin{cases} \lambda_2 > 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 < 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 \geq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2}{1 - m - \lambda_1}$	$-+ \begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \text{ ou } \lambda_2 < 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 > 0 \end{cases}$ $-- \begin{cases} \lambda_2 < 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 < 0 \end{cases}$

TABELA 5.16: $-1 < m < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{\lambda_1^2}{2(m + \lambda_1)}$	--
$\text{Fix}(1)$	$\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 \geq 0$	$x_1^2 = x_2^2 + \lambda_2$ $x_2^2 = -\frac{(\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)}{2(m + \lambda_1)}$ $x_2^2 = -\lambda_2 + x_1^2$ $x_1^2 = -\frac{(\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2)}{2(m + \lambda_1)}$	--

Continuação da TABELA 5.16: $-1 < m < 0$

FIG. 5.33 : $-1 < m < 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO: $-1 < m < 0$

FIG. 5.34

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO - VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$++ \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases}$ $+- \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 (< 0) \\ \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 (> 0) \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$x_2 = 0$ $x_1^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	$+- \begin{cases} \lambda_2 \leq 0 \text{ ou } \lambda_2 > 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases}$ $-- \begin{cases} \lambda_2 > 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases}$
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$x_1 = 0$ $x_2^2 = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1}$	$+- \begin{cases} \lambda_2 \geq 0 \text{ ou } \lambda_2 < 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases}$ $-- \begin{cases} \lambda_2 < 0 \text{ e} \\ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases}$

TABELA 5.17: $-1 < m < 0, \alpha > 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_2 = 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{\lambda_1^2 + \alpha}{2(m + \lambda_1)}$	---
$\text{Fix}(\mathbf{1})$	$\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha \geq 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha \geq 0$	$x_1^2 = x_2^2 + \lambda_2$ $x_2^2 = -\frac{(\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$ $x_2^2 = -\lambda_2 + x_1^2$ $x_1^2 = -\frac{(\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$	---

Continuação da TABELA 5.17: $-1 < m < 0, \alpha > 0$

FIG. 5.35 : $-1 < m < 0$, $\alpha > 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO: $-1 < m < 0$, $\alpha > 0$

1. $R < \alpha$

2. $R = \alpha$

FIG. 5.36

3. $\alpha < R < |\vec{OP}|$

FIG. 5.36

4. $R = |\vec{OP}|$

FIG. 5.36

5. $R > |\vec{OP}|$

FIG. 5.36

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(D_4)$	$\forall(\lambda_1, \lambda_2)$	$x_1 = x_2 = 0$	$ \begin{aligned} &++ \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha > 0 \end{cases} \\ &+- \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha > 0 (< 0) \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha < 0 (> 0) \end{cases} \\ &-- \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha < 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} $
$\text{Fix}(Z_2(\kappa))$	$\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$ \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1^2 &= \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &+- \{ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \\ &-- \{ \lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{aligned} $
$\text{Fix}(Z_2^c(\kappa))$	$\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha \geq 0$	$ \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2^2 &= \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2 + \alpha}{1 - m - \lambda_1} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &+- \{ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha > 0 \\ &-- \{ \lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha < 0 \end{aligned} $

TABELA 5.18: $-1 < m < 0, \alpha < 0$

SUBESPAÇOS FIXADOS	REGIÕES DO PLANO (λ_1, λ_2)	SOLUÇÕES	SINAIS DOS AUTO – VALORES
$\text{Fix}(Z_2(\xi\kappa)),$ $\text{Fix}(Z_2^c(\xi\kappa))$	$\lambda_2 = 0$ $\lambda_1^2 + \alpha \geq 0$	$x_1 = \pm x_2$ $x_1^2 = -\frac{\lambda_1^2 + \alpha}{2(m + \lambda_1)}$	---
$\text{Fix}(\mathbf{1})$	$\lambda_2^2 \geq 0$ $\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha \geq 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha \geq 0$	$x_1^2 = x_2^2 + \lambda_2$ $x_2^2 = -\frac{(\lambda_1^2 + m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$ $x_2^2 = -\lambda_2 + x_1^2$ $x_1^2 = -\frac{(\lambda_1^2 - m\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 + \alpha)}{2(m + \lambda_1)}$	---

Continuação da TABELA 5.18: $-1 < m < 0, \alpha < 0$

FIG. 5.37 : $-1 < m < 0$, $\alpha < 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO: $-1 < m < 0$, $\alpha < 0$

1. $R = -\alpha$

2. $-\alpha < R < \sqrt{-\alpha}$

3. $R = \sqrt{-\alpha}$

FIG. 5.38

$$4. R > \sqrt{-\alpha'}$$

FIG. 5.38

A tabela com os dados para o caso $m < -1$ é igual a tabela 5.16 com a ressalva da variação de m nesse caso. Por isso, faremos apenas a representação no plano (λ_1, λ_2) e os diagramas de bifurcação.

A diferença entre o diagrama de bifurcação desse caso e o diagrama do caso anterior, $-1 < m < 0$, está na posição do “laço”.

FIG. 5.39 : $m < -1$

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO: $m < -1$

FIG. 5.40

Para valores do parâmetro α positivos e próximos do zero, os dados para a construção do diagrama do desdobramento dessa forma são iguais aos da tabela 5.17. Para o caso onde α é negativo, os dados podem ser vistos na tabela 5.18. Por isso, faremos apenas a representação no plano (λ_1, λ_2) e os correspondentes diagramas.

FIG. 5.41 : $m < -1$, $\alpha > 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO : $m < -1, \alpha > 0$

1. $R < |\vec{OP}|$

FIG. 5.42

2. $R = |\vec{OP}|$

FIG. 5.42

3. $|\vec{OP}| < R < \alpha$

FIG. 5.42

4. $R = \alpha$

FIG. 5.42

5. $R > \alpha$

FIG. 5.42

FIG. 5.43 : $m < -1$, $\alpha < 0$

DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO: $m < 1$, $\alpha < 0$

1. $R = -\alpha$

2. $-\alpha < R < \sqrt{-\alpha}$

3. $R = \sqrt{-\alpha}$

FIG. 5.44

4. $R > \sqrt{-\alpha}$

FIG. 5.44

Observação: Para essa forma normal, como $m \neq \pm 1, 0$, temos quatro intervalos reais de variação de m e para cada intervalo, oito possibilidades de variação dos sinais de $\epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$. Usando a mudança de coordenadas $g \mapsto -g$ que inverte a estabilidade e a mudança $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1, -\lambda_2)$ que inverte as regiões do plano (λ_1, λ_2) , vemos que basta analisar os seguintes casos:

	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5
$m > 1$ e $m < -1$	1	1	1
	1	1	-1
	1	-1	1
	1	-1	-1
$0 < m < 1$ e $-1 < m < 0$	1	1	1
	1	1	-1
	1	-1	1
	1	-1	-1

Fizemos a opção $\epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 1$ e analisamos todas as variações de m .

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Motivação física

Este capítulo trata da descrição de problemas onde a teoria apresentada neste trabalho poderá ser aplicada. Alguns dos problemas estão sendo por nós considerados e outros poderão ser estudados futuramente. O uso de técnicas da teoria de singularidades aplicadas à teoria de bifurcação tem sido motivo de estudo de problemas em Física, Química, Mecânica, Teoria de Elasticidade, etc. Como vimos no capítulo 2, o nosso problema foi motivado por um problema em Mecânica.

Em [15], (Capítulo X, Caso 3, pág. 439), Golubitsky and Schaeffer descrevem a envergadura de uma placa elástica não espessa e isotrópica sujeita a uma força compressível, e uniformemente distribuída sobre as extremidades da placa conforme a figura 6.1.

Fig. 6.1: Placa sujeita a uma força compressível

A formulação de um modelo matemático para essa situação é feita através das equações de von Kármán e o problema se reduz a um problema de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante com um parâmetro de bifurcação sem simetria dado por λ . No caso clássico do modelo de von Kármán para uma placa não espessa, temos que, no caso da placa quadrada, o núcleo é 1-dimensional no ponto de bifurcação principal, ou seja, não há “competing modes”. A quebra de simetria é descrita através de um problema com dois parâmetros, porém com simetria Z_2 . Se considerarmos porém que a placa é feita de um material não isotrópico, então teremos um núcleo 2-dimensional no auto-valor principal. Neste caso teremos um problema representando dois “competing modes” para a envergadura. Dependendo do material, é possível obter uma bifurcação secundária com dois “competing modes” ao longo do ramo obtido após a primeira envergadura.

O que pretendemos é descrever a envergadura de uma placa quadrada não espessa e não isotrópica quando um par de forças F_1 e F_2 atua, horizontalmente e verticalmente, sobre a placa, como na figura 6.2.

Fig. 6.2

A idéia é escrever as equações de von Kármán nesse contexto e reduzir o problema a um problema D_4 -equivariante com simetria nos dois parâmetros de bifurcação, e assim aplicar a teoria apresentada nesse trabalho.

res, acoplados com a simetria do quadrado, podem ser estudados através de uma versão simétrica da bifurcação de Hopf padrão. Ele estudou as dinâmicas de todas as possíveis Bifurcações de Hopf com a simetria do quadrado.

Para sistemas de equações de reação-difusão, o modelo a ser estudado seria o Brusselator. O Brusselator é o mais simples modelo para reações químicas que exibem comportamento oscilatório. (cf. [15], capítulo 1, pág. 312). O Brusselator exibe uma grande variedade de fenômenos de bifurcação. Em [20], Ashwin estudou a Redução de Liapunov Schmidt para bifurcação de Hopf de equações do Brusselator no quadrado.

Em Teoria de Elasticidade, poderá ser estudada a deformação de uma placa quadrada formada de material elástico levemente compressível. Se a energia armazenada do material for do tipo Ogden com termos pares, como no caso dos materiais de Mooney-Rivlin, o problema pode ser reduzido ao nosso contexto de simetria. Como referência bibliográfica principal citamos [21].

Apêndice

Provas das Proposições 4.1.1 a 4.1.5 do Capítulo 4

Recorde que $\beta = (\alpha, \lambda)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ e D_4 age em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$\tilde{\kappa} \cdot (z, \alpha, \lambda) = (\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$\tilde{\mu} \cdot (z, \alpha, \lambda) = (i\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2).$$

Invariantes

Definimos $N = z\bar{z}$, $\delta = -\frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)$, $\Delta = \delta^2$, $u_4 = \lambda_2^2$ e

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= N, & \hat{u}_2 &= \Delta, & \hat{u}_5 &= \alpha_1, & \hat{u}_8 &= \delta\alpha_3, \\ \hat{u}_3 &= \lambda_1, & \hat{u}_6 &= \alpha_2, & \hat{u}_9 &= \delta\lambda_2, \\ \hat{u}_4 &= u_4, & \hat{u}_7 &= \alpha_3^2, & \hat{u}_{10} &= \alpha_3\lambda_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Proposição 4.1.1. $\mathcal{E}_{z,\beta}^{D_4} = \hat{u}^* \mathcal{E}_{\hat{u}}$, com $\hat{u} = (\hat{u}_1 \dots \hat{u}_{10})$.

Prova. Por um teorema de Schwarz [7], é suficiente mostrar que todo polinômio D_4 -invariante pode ser escrito como um polinômio em $\hat{u}$.

Seja $\bar{h}$ um polinômio D_4 -invariante em $\mathbb{R}[z, \beta]$. Isso é equivalente às duas condições:

$$\bar{h}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \bar{h}(\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2), \quad (2)$$

$$\bar{h}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \bar{h}(i\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2). \quad (3)$$

Do Capítulo 3, o subgrupo de isotrofia de λ é $\Sigma = Z_2 \oplus Z_2$ e os invariantes para essa ação são N e δ . Logo, podemos escrever

$$\bar{h}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \tilde{h}(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2). \quad (4)$$

Segue de (3) que

$$\tilde{h}(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \tilde{h}(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2)$$

e assim

$$\tilde{h}(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{h}(\hat{u}_1 \dots \hat{u}_{10})$$

com $\hat{u}_i$, $1 \leq i \leq 10$, dados em (1). O resultado segue de (4). $\square$

Equivariantes

Proposição 4.1.2 $\tilde{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{\mathbb{D}_4}$ é gerado por $z, \delta\bar{z}, \lambda_2\bar{z}, \alpha_3\bar{z}$ como um $\mathcal{E}_{(z,\beta)}^{\mathbb{D}_4}$ -módulo.

Prova. Pelo teorema de Poénaru [24], seja $f : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio $\mathbb{D}_4$ -equivariante, ou seja,

$$f(\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \kappa \cdot f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) \quad (5)$$

$$f(i\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) = i\kappa \cdot f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2). \quad (6)$$

Considerando primeiro a ação de $\Sigma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, podemos escrever

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = p(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) z + q(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) \bar{z} \quad (7)$$

Usando (6),

$$p(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) = p(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2)$$

e

$$q(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) = -q(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2),$$

o que é equivalente à

$$p(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = p_1(\hat{u})$$

e

$$q(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = \delta q_1(\hat{u}) + \alpha_3 q_2(\hat{u}) + \lambda_2 q_3(\hat{u}).$$

De (7),

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) = p_1(\hat{u}) z + q_1(\hat{u}) \delta\bar{z} + q_2(\hat{u}) \alpha_3\bar{z} + q_3(\hat{u}) \lambda_2\bar{z}$$

e a proposição está verificada. $\square$

Observação. Seja $\bar{u} = (\hat{u}_1 \dots \hat{u}_7)$ e $p \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$. Então, existem germes $p_i \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$, $1 \leq i \leq 4$, tais que

$$p(\hat{u}) = p_1(\bar{u}) + \delta\lambda_2 p_2(\bar{u}) + \delta\alpha_3 p_3(\bar{u}) + \alpha_3\lambda_2 p_4(\bar{u}). \quad (8)$$

Esta decomposição é facilmente verificada usando-se o Teorema de Taylor com parâmetros ([15], pág. 77).

Proposição 4.1.3. $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{D_4}$ é gerado livremente por $z, \delta\bar{z}, \lambda_2\bar{z}, \alpha_3\bar{z}, \delta\lambda_2z, \delta\alpha_3z, \alpha_3\lambda_2z$ e $\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z}$ como um $\mathcal{E}_{\bar{u}}$ -módulo.

Prova. Pela Proposição 4.1.2, $\hat{f} \in \vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{D_4}$ pode ser escrito como

$$\hat{f}(z, \beta) = p_1(\hat{u})z + p_2(\hat{u})\delta\bar{z} + p_3(\hat{u})\lambda_2\bar{z} + p_4(\hat{u})\alpha_3\bar{z}, \quad (9)$$

com $p \in \mathcal{E}_{\hat{u}}, 1 \leq i \leq 5$.

Usando (8), para cada $1 \leq i \leq 4$, existem germes $p_{ij} \in \mathcal{E}_{\bar{u}}, 1 \leq j \leq 4$, tais que

$$\begin{aligned} p_1(\hat{u})z &= p_{11}(\bar{u})z + p_{12}(\bar{u})\delta\lambda_2z + p_{13}(\bar{u})\delta\alpha_3z + p_{14}(\bar{u})\alpha_3\lambda_2z, \\ p_2(\hat{u})\delta\bar{z} &= p_{21}(\bar{u})\delta\bar{z} + p_{22}(\bar{u})\Delta\lambda_2\bar{z} + p_{23}(\bar{u})\Delta\alpha_3\bar{z} + p_{24}(\bar{u})\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z}, \\ p_3(\hat{u})\lambda_2\bar{z} &= p_{31}(\bar{u})\lambda_2\bar{z} + p_{32}(\bar{u})\delta u_4\bar{z} + p_{33}(\bar{u})\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z} + p_{34}(\bar{u})\alpha_3u_4\bar{z}, \\ p_4(\hat{u})\alpha_3\bar{z} &= p_{41}(\bar{u})\alpha_3\bar{z} + p_{42}(\bar{u})\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z} + p_{43}(\bar{u})\delta\alpha_3^2\bar{z} + p_{44}(\bar{u})\alpha_3^2\lambda_2\bar{z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Substituindo (10) em (9), segue que $z, \delta\bar{z}, \lambda_2\bar{z}, \alpha_3\bar{z}, \delta\lambda_2z, \delta\alpha_3z, \alpha_3\lambda_2z$ e $\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z}$ geram $\vec{\mathcal{E}}_{(z,\beta)}^{D_4}$ como um $\mathcal{E}_{\bar{u}}$ -módulo.

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} p_1(\bar{u})z + p_2(\bar{u})\delta\bar{z} + p_3(\bar{u})\lambda_2\bar{z} + p_4(\bar{u})\alpha_3\bar{z} + p_5(\bar{u})\delta\lambda_2z + \\ p_6(\bar{u})\delta\alpha_3z + p_7(\bar{u})\alpha_3\lambda_2z + p_8(\bar{u})\delta\alpha_3\lambda_2\bar{z} \equiv 0, \end{aligned}$$

obtemos $p_i \equiv 0, 1 \leq i \leq 8$, o que prova o teorema. $\square$

Matrizes Comutantes

Proposição 4.1.4. $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^{D_4}$ é o $\mathcal{E}_{(z,\beta)}^{D_4}$ -módulo gerado pelas seguintes aplicações em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} S_1(z, \beta)w &= w, & S_5(z, \beta)w &= i\omega\bar{w}, \\ S_2(z, \beta)w &= \lambda_2\bar{w}, & S_6(z, \beta)w &= -i\lambda_2\omega w, \\ S_3(z, \beta)w &= \delta\bar{w}, & S_7(z, \beta)w &= -i\delta\omega w, \\ S_4(z, \beta)w &= \alpha_3\bar{w}, & S_8(z, \beta)w &= -i\alpha_3\omega w. \end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{i}{4}(\bar{z}^2 - z^2)$. $\square$

Prova. $\hat{S} \in \mathbf{M}_{(z,\beta)}^{D_4}$ pode ser escrita como $\hat{S}(z, \beta) w = a(z, \beta) w + b(z, \beta) \bar{w}$ satisfazendo

$$\hat{S}(\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) w = \kappa \cdot \hat{S}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) \bar{w}, \quad (11)$$

$$\hat{S}(i\bar{z}, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) w = i\kappa \cdot \hat{S}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) i\bar{w}. \quad (12)$$

Do Capítulo 4, um conjunto equivalente de aplicações lineares que geram $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^\Sigma$, $\Sigma = Z_2 \oplus Z_2$, como um $\mathcal{E}_{(N,\delta,\beta)}$ -módulo é

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(z, \beta) w &= w, & \tilde{S}_3(z, \beta) w &= i\omega \bar{w}, \\ \tilde{S}_2(z, \beta) w &= \bar{w}, & S_4(z, \beta) w &= -i\omega w. \end{aligned}$$

Como $\hat{S} \in \mathbf{M}_{(z,\beta)}^\Sigma$,

$$\hat{S}(z, \beta) w = p_1(N, \delta, \beta) w + p_2(N, \delta, \beta) \bar{w} + p_3(N, \delta, \beta) i\omega \bar{w} - p_4(N, \delta, \beta) i\omega w. \quad (13)$$

Usando a condição de equivariância (12) para $\hat{S}$, as seguintes igualdades devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} p_1(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) &= p_1(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2), \\ p_2(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) &= -p_2(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2), \\ p_3(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) &= p_3(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2), \\ p_4(N, -\delta, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \lambda_1, -\lambda_2) &= -p_4(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} p_1(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) &= q_1(\hat{u}), \\ p_2(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \delta q_2(\hat{u}) + \alpha_3 q_3(\hat{u}) + \lambda_2 q_4(\hat{u}), \\ p_3(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) &= q_5(\hat{u}), \\ p_4(N, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \delta q_6(\hat{u}) + \alpha_3 q_7(\hat{u}) + \lambda_2 q_8(\hat{u}). \end{aligned} \quad (14)$$

A proposição segue da substituição de (14) em (13). $\square$

Proposição 4.1.5. $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ é o $\mathcal{E}_{\bar{u}}$ -módulo livremente gerado pelas seguintes aplicações lineares em $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_1(z, \beta) w &= w, & \hat{S}_9(z, \beta) w &= i\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_2(z, \beta) w &= \lambda_2\bar{w}, & \hat{S}_{10}(z, \beta) w &= -i\lambda_2\omega w, \\
\hat{S}_3(z, \beta) w &= \delta\bar{w}, & \hat{S}_{11}(z, \beta) w &= -i\delta\omega w, \\
\hat{S}_4(z, \beta) w &= \alpha_3\bar{w}, & \hat{S}_{12}(z, \beta) w &= -i\alpha_3\omega w, \\
\hat{S}_5(z, \beta) w &= \delta\lambda_2 w, & \hat{S}_{13}(z, \beta) w &= i\delta\lambda_2\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_6(z, \beta) w &= \delta\alpha_3 w, & \hat{S}_{14}(z, \beta) w &= i\delta\alpha_3\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_7(z, \beta) w &= \alpha_3\lambda_2 w, & \hat{S}_{15}(z, \beta) w &= i\alpha_3\lambda_2\omega\bar{w}, \\
\hat{S}_8(z, \beta) w &= \delta\alpha_3\lambda_2\bar{w}, & \hat{S}_{16}(z, \beta) w &= -i\delta\alpha_3\lambda_2\omega w.
\end{aligned}$$

Prova. Pela proposição 4.1.4., $\hat{S} \in \mathbf{M}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\hat{S}(z, \beta) w &= p_1(\hat{u}) w + p_2(\hat{u}) \lambda_2\bar{w} + p_3(\hat{u}) \delta\bar{w} + p_4(\hat{u}) \alpha_3 \bar{w} + p_5(\hat{u}) i\omega\bar{w} \\
&\quad - p_6(\hat{u}) i\omega\lambda_2 w - p_7(\hat{u}) i\omega\delta w - p_8(\hat{u}) i\omega\alpha_3 w
\end{aligned} \tag{15}$$

Usando (8), para cada $1 \leq i \leq 8$, existem germes $p_{ij} \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$, $i \leq j \leq 4$, tais que

$$\begin{aligned}
p_1(\hat{u}) w &= p_{11}(\bar{u}) w + p_{12}(\bar{u}) \delta\lambda_2 w + p_{13}(\bar{u}) \delta\alpha_3 w + p_{14}(\bar{u}) \alpha_3\lambda_2 w, \\
p_2(\hat{u}) \lambda_2\bar{w} &= p_{21}(\bar{u}) \lambda_2\bar{w} + p_{22}(\bar{u}) \delta u_4\bar{w} + p_{23}(\bar{u}) \delta\alpha_3\lambda_2\bar{w} + p_{24}(\bar{u}) \alpha_3 u_4\bar{w}, \\
p_3(\hat{u}) \delta\bar{w} &= p_{31}(\bar{u}) \delta\bar{w} + p_{32}(\bar{u}) \Delta\lambda_2\bar{w} + p_{33}(\bar{u}) \Delta\alpha_3\bar{w} + p_{34}(\bar{u}) \delta\alpha_3\lambda_2\bar{w}, \\
p_4(\hat{u}) \alpha_3\bar{w} &= p_{41}(\bar{u}) \alpha_3\bar{w} + p_{42}(\bar{u}) \delta\alpha_3\lambda_2\bar{w} + p_{43}(\bar{u}) \alpha_3^2\delta\bar{w} + p_{44}(\bar{u}) \alpha_3^2\lambda_2\bar{w}, \\
p_5(\hat{u}) i\omega\bar{w} &= p_{51}(\bar{u}) i\omega\bar{w} + p_{52}(\bar{u}) i\omega\delta\lambda_2\bar{w} + p_{53}(\bar{u}) i\omega\delta\alpha_3\bar{w} + p_{54}(\bar{u}) i\omega\alpha_3\lambda_2\bar{w}, \\
p_6(\hat{u}) i\omega\lambda_2 w &= p_{61}(\bar{u}) i\omega\lambda_2 w + p_{62}(\bar{u}) u_4 i\omega\delta w + p_{63}(\bar{u}) i\omega\delta\alpha_3\lambda_2 w + p_{64}(\bar{u}) u_4 i\omega\alpha_3 w, \\
p_7(\hat{u}) i\omega\delta w &= p_{71}(\bar{u}) i\omega\delta w + p_{72}(\bar{u}) \Delta i\omega\lambda_2 w + p_{73}(\bar{u}) \Delta i\omega\alpha_3 w + p_{74}(\bar{u}) i\omega\delta\alpha_3\lambda_2 w, \\
p_8(\hat{u}) i\omega\alpha_3 w &= p_{81}(\bar{u}) i\omega\alpha_3 w + p_{82}(\bar{u}) i\omega\delta\alpha_3\lambda_2 w + p_{83}(\bar{u}) i\alpha_3^2\omega\delta w + p_{84}(\bar{u}) i\alpha_3^2\omega\lambda_2 w.
\end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo-se (16) em (15), segue que $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ é gerado por $\hat{S}_i(z, \beta)$, $1 \leq i \leq 16$, como um $\mathcal{E}_{\bar{u}}$ -módulo.

Então, resolvendo o sistema $\sum_{i=1}^{16} q_i(\bar{u})\hat{S}_i(z, \beta) \equiv 0$, obtemos $q_i \equiv 0$, $1 \leq i \leq 16$. Portanto, as aplicações lineares $\hat{S}_i(z, \beta)$, $1 \leq i \leq 16$, geram livremente $\mathbf{M}_{(z,\beta)}^{\mathbf{D}_4}$ sobre $\mathcal{E}_{\bar{u}}$. $\square$

Bibliografia

- [1] A. Lari-Lavassani, *Multiparameter bifurcation with symmetry via singularity theory*. Ph.D. Thesis, Ohio State University, 1990.
- [2] A. Vanderbauwhede, *Local bifurcation and symmetry*. Research Notes in Math. 75. Pitman, Boston, 1982.
- [3] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*. Bull. London Math. Soc. 13, 481-539, 1981.
- [4] D. Mond and J. Montaldi, *Deformations of maps on complete intersections, Damon's $\mathcal{K}_V$ -equivalence and bifurcations*. Preprint, University of Warwick, 1991.
- [5] E. Bierstone, *The structure of orbit spaces and the singularities of equivariant maps*. IMPA, Rio de Janeiro, 1980.
- [6] E.J. Holder and D.G. Schaeffer, *Boundary conditions and mode jumping in the von Kármán equations*. SIAM J. Math. Anal. 15, 446-458, 1984.
- [7] G. Schwarz, *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*. Topology 14, 63-68, 1975.
- [8] I. Melbourne, *The recognition problem for equivariant singularities*. Nonlinearity 1, 215-240, 1987.
- [9] J.C. Alexander and G. Auchmuty, *Global bifurcations of phase-locked oscillators*. Arch. Rational Mech. Anal. 93, 253-270, 1986.
- [10] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$* . Memoirs of the American Mathematical Society 50, no 306, 1984.

- [11] J. Damon, *Deformations of sections of singularities and Gorenstein surface singularities*. Am. J. Math. 109, 695-722, 1987.
- [12] J. Martinet, *Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables*. Singularités d'applications différentiables, Plans-Sur-Bex, Springer Lecture Notes 535, 1-44, 1975.
- [13] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*. London Mathematical Society Lecture Notes Ser. 58. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [14] J.W. Swift, *Hopf bifurcation with the symmetry of the square*. Nonlinearity 1, 333-377, 1988.
- [15] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory*. Vol. I, Applied Math. Sciences 51. Springer Verlag, New York, 1985.
- [16] M. Golubitsky, I. Stewart and D.G. Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory*. Vol II, Applied Math. Sciences 69. Springer Verlag, New York, 1988.
- [17] M. Golubitsky and M. Roberts, *A classification of degenerate Hopf bifurcations with $O(2)$ symmetry*. J. Diff. Eqns. 69, 216-264, 1987.
- [18] M. Peters, *Classification of two-parameter bifurcations*. Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1991.
- [19] J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined germs*. Publ. Math. I.H.E.S. 35, 127-156, 1968.
- [20] P. Ashwin, *Liapunov-Schmidt reduction at Hopf bifurcation of the Brusselator equations on a square*. Preprint, University of Warwick, 1992.
- [21] R.W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber like solids*. Proc. R. Soc. Lond. A. 328, 567-583, 1972.
- [22] T. Gaffney, *Some new results in the classification theory of bifurcation problems*. In: Multiparameter Bifurcation Theory. Contemporary Mathematics 56, A.M.S., Providence, 1986.

- [23] T.J. Bridges and J.E. Furter, *Singularity theory and equivariant symplectic maps*. Springer Lectures Notes 1558, Heidelberg, 1993.
- [24] V. Poénaru, *Singularités C^∞ en présence de symétrie*. Lecture Notes in Mathematics 510, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [25] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, Cambridge, seventh edition, 1990.
- [26] D.R.J. Chillingworth, Bifurcation from an orbit of symmetry. In: *Singularities and dynamical systems*, North Holland, 285-294, 1986.