Geometria Genérica de Subvariedades em Codimensão Maior que Um em $\mathbb{R}^N$

Dirce Kiyomi Hayashida Mochida

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Univer-
sidade de São Paulo, para obtenção do
título de Doutor em Ciências - Área: Ma-
temática-Geometria e Topologia.

Orientadora: Profa Dra Maria del Carmen Romero Fuster

Co-orientadora: Profa Dra Maria Aparecida Soares Ruas

São Carlos

1993

A minhas pequenas,
Débora e Lígia,
com amor e carinho.

Índice

Introdução	1
Cap.I.a: Preliminares sobre Topologia Diferencial	5
1. Notação e alguns resultados básicos	5
2. Estratificações	13
3. Desdobramento de germes de funções	15
4. Mergulhos genéricos para família de funções altura	18
5. Mergulhos genéricos para família de projeções sobre hiperplanos	21
Cap.I.b. Preliminares sobre Geometria Diferencial	21
1. A aplicação de Gauss	22
2. A Aplicação de Weingarten	22
3. Curvatura de hipersuperfícies; direções assintóticas	25
Cap.II. Funções altura sobre m -subvariedades em $m + k$ -espaços euclidianos	28
1. Família de funções altura para mergulhos genéricos com codimensão k	29
2. Direções degeneradas de M	30
3. Subvariedades de codimensão 2	32
4. A <u>2ª</u> forma fundamental de M	34

5. A hipersuperfície canal de M em $\mathbb{R}^{m+k}$	35
6. A expressão local de $\mathcal{K}_c$, quando $k = 2$	41
7. Feixe de formas quadráticas e o cone das formas quadráticas degeneradas	42
8. Curvas genéricas em $\mathbb{R}^{1+k}$	44
Cap.III. Superfícies em $\mathbb{R}^4$	52
1. Os invariantes de 2ª ordem de M	54
2. Direções degeneradas de M	57
3. O feixe (q_1, q_2) e o cone das formas quadráticas degeneradas de $H^2(2, 1)$	60
4. A 3-variedade canal de uma superfície em $\mathbb{R}^4$	64
5. Caracterização geométrica das singularidades de f. a. sobre M	67
6. Uma descrição de um ponto de inflexão degenerado de M	74
7. Aplicações	77
Cap.IV.a. Subvariedades em $\mathbb{R}^5$	83
1. Superfícies em $\mathbb{R}^5$	85
2. Direções degeneradas de M	86
3. A 2ª forma fundamental de M	91
4. A 4-variedade canal de uma superfície em $\mathbb{R}^5$	96
5. Caracterização geométrica das singularidades de f.a. sobre M	100
Cap.IV.b. 3-Variedades em $\mathbb{R}^5$	104

1. Direções degeneradas de M	104
2. A 4-variedade canal de M em $\mathbb{R}^5$	107
3. Caracterização geométrica das singularidades de f.a. sobre M	110
Cap.V m-Subvariedade com codimensão k	116
Cap.V.a. Subvariedades de codimensão 2	119
Cap.V.b. Subvariedades com codimensão maior que 2	123
V.b.2. Superfícies com codimensão k	127
Cap.VI. Dualidade	129
1. A estratificação de Gauss da esfera	130
2. Hipersuperfícies e projeções sobre hiperplanos	133
3. Hipersuperfícies e dualidade	139
4. Dualidade para subvariedades genéricas de codimensão 2	141
5. Dualidade para subvariedades genéricas de codimensão k ($k > 2$)	144
Bibliografia	147

Agradecimentos

Às Professoras Dra Maria del Carmen Romero Fuster pela orientação e Dra Maria Aparecida Soares Ruas pela co-orientação desta tese, privilegiada em função do apoio irrestrito e sobretudo do exemplo de entusiasmo, seriedade e dedicação ao trabalho.

Ao Prof. Dr. Brasil Terra Leme, a quem devo a formação matemática que me possibilitou desenvolver esse programa de doutorado na área de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis.

Aos professores Dr. Ronaldo Alves Garcia e Dr. Antonio Carlos Asperti pelas discussões e valiosas sugestões que culminaram num parágrafo sobre aplicações, no capítulo III desta tese.

Aos professores Dr. Natalino Adelmo de Molfeta e Artur Darezzo Filho que enquanto membros do Conselho Departamental não pouparam esforços no sentido de garantir condições para possibilitar minha qualificação docente.

Ao professor José Geraldo Teixeira, chefe do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, bem como aos demais professores e funcionários, pela acolhida sempre tão gentil e carinhosa.

A todos os meus familiares pelo incentivo e confiança constantes e em particular a meu companheiro Mário, pela manifestação de amor externada na compreensão e paciência, sustentáculos do desenvolvimento deste trabalho.

E finalmente a Deus, por se fazer presente sempre, sobretudo nos momentos mais difíceis, conferindo-me a dádiva de experimentar o mais verdadeiro sentido da palavra amigo nas pessoas de Ilda Rizzaldi Luz, Brasil Terra Leme e Wilson Nunes dos Santos.

Abstract

We study the geometry of m -submanifolds embedded in $\mathbb{R}^{m+k}$, $k \geq 2$, through their generic contacts with hyperplanes.

Our approach to this problem is to relate the geometric properties of the submanifold to the ones of the canal hypersurface associate to it. We consider the Gauss mapping defined on the canal hypersurface and the relationship between its generic singularities and the corresponding singularities of the families of height functions defined on the manifold. We give definitions of osculating hyperplanes and binormal directions of an m -submanifold of $\mathbb{R}^{m+k}$, and as a consequence of the setting we analyse the existence of binormal directions in terms of the generic geometry of the submanifold.

We also show that for a generic embedding, the restriction to the parabolic set of the natural projection of the hypersurface to the submanifolds is a stable mapping. We use this mapping to define asymptotic directions on the submanifolds and to obtain a duality relationship between binormal directions and asymptotic directions of the submanifold. This result extend the local aspects of a result due to Bruce and Romero Fuster in [11]. The generic embeddings of surfaces in $\mathbb{R}^4$ are studied in great detail the inflection points of then are shown to be the umbilic points of their families of height functions.

As a consequence of the generic behavior of the umbilic points of locally convex embeddings of surfaces in $\mathbb{R}^4$, we prove that for such embeddings, $2 \mid \chi(M) \leq$ the number of inflection points of M . In particular locally convex embedded surfaces with non-zero Euler characteristic have at least 4 inflection points (this is an extension to 4-space of a result of Feldman in [21]).

Introdução

A geometria das subvariedades em $\mathbb{R}^N$ pode ser estudada através da análise das singularidades de diferentes famílias de aplicações sobre as mesmas. Tais singularidades medem o contato da subvariedade com subespaços do espaço ambiente, o que está intimamente relacionado com características geométricas da própria subvariedade. Neste sentido, são relevantes o estudo de seu contato com subespaços lineares e esferas. Assim como o primeiro vem associado às singularidades de projeções, o segundo está associado às funções quadrado da distância.

Porteous em [45] foi o primeiro a abordar o estudo das singularidades de certas famílias de funções distância ao quadrado. Posteriormente, J.A. Montaldi [42], generalizou esse trabalho, analisando o contato de uma subvariedade X com $n - p$ -esferas.

Nesse trabalho consideramos contatos genéricos de m -subvariedades M com hiperplanos de $\mathbb{R}^{m+k}$ ($k \geq 2$) através da análise das singularidades genéricas das funções altura sobre ela. Interpretamos geometricamente essas singularidades, com o objetivo de obter mais informações geométricas da subvariedade em questão. Observamos que o caso de codimensão 1 foi estudado por Romero Fuster em [49].

A idéia fundamental deste nosso estudo é a utilização da hipersuperfície canal CM associada a essas subvariedades. Nela consideramos a aplicação normal de Gauss Γ e as relações entre as singularidades genéricas da mesma e as das funções altura f_v sobre as subvariedades que pretendemos estudar.

Uma vez que as singularidades das funções altura medem o contato da subvariedade com os hiperplanos de $\mathbb{R}^N$, este estudo conduz à definição dos hiperplanos osculadores

a uma subvariedade M (aqueles com contato “maior” com M) e as correspondentes direções binormais. Nesse sentido, quando M é uma m -subvariedade com codimensão 2, provamos que, se sua dimensão m é ímpar, então existe pelo menos um e no máximo m hiperplanos osculadores em cada ponto de M (generalizando o caso das curvas em $\mathbb{R}^N$). Agora, se m é par, existe sempre uma região aberta em M na qual todo ponto admite pelo menos um e no máximo m hiperplanos osculadores. Vimos também que, associada a cada direção binormal em um ponto existe uma direção (tangente) assintótica e provamos que estas direções determinam retas tangentes com contato “maior” com M , isto é, a projeção de M sobre o hiperplano ortogonal às mesmas tem uma singularidade não estável no ponto dado. A partir disso, generalizamos, quanto ao aspecto local, o resultado sobre dualidade obtido por J.W. Bruce e M.C. Romero Fuster em [11] (para curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$), para hipersuperfícies e subvariedades com codimensão 2 em $\mathbb{R}^N$.

Abordamos, mais detalhadamente, curvas em $\mathbb{R}^N$ e subvariedades em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$.

Para um mergulho genérico de uma superfície em $\mathbb{R}^4$ sem pontos de inflexão, relacionamos o número de componentes conexas do conjunto parabólico da hipersuperfície canal com o do conjunto aberto de pontos hiperbólicos de M . Obtemos, ainda, o número de componentes conexas da curva parabólica de M em termos do gênero do conjunto parabólico da 3-variedade canal. Caracterizamos as singularidades de tipo Σ^1 das funções altura através da geometria das secções normais à subvariedade nas direções assintóticas em cada ponto. Temos assim, os seguintes resultados: Seja $p \in M$

1. Se p é do tipo hiperbólico, então p é um ponto de dobra de $f_v \Leftrightarrow$ a torção da secção normal assintótica γ_θ é não nula em p .

Agora, se γ_θ tem torção normal nula em p então $p \in \bar{\xi}(\Sigma^{1,1})$ e:

p é uma singularidade de cúspide $\Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1})$

p é uma sing. rabo de andorinha $\Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1})$ com contato de 1ª ordem em p .

2. Se p é do tipo parabólico e não é de inflexão então:

p é um ponto de dobra de $f_v \Leftrightarrow$ a direção assintótica $[\theta]$ é transversal a $\Delta^{-1}(0)$.

p é uma sing. de cúspide de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$ com contato de ordem 1.

p é uma sing. rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$ com contato de ordem 2.

Por outro lado, as singularidades de tipo Σ^2 para estas funções são caracterizadas, no caso das superfícies em $\mathbb{R}^4$, como pontos de inflexão no sentido de Little [31] e, para superfícies em $\mathbb{R}^5$, como pontos de inflexão no sentido de Feldman [20].

Para superfícies em $\mathbb{R}^4$, provamos então que: p é umbílico de $f_v \Leftrightarrow p$ é ponto de inflexão de M . Além disso,

p é um ponto de cruzamento normal de $\Delta^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão de tipo real.

p é um ponto isolado de $\Delta^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão do tipo imaginário.

Para o caso de superfícies e 3-variedades em $\mathbb{R}^5$, damos uma caracterização geométrica análoga.

Estudamos também, nesse contexto, as singularidades da projeção $\bar{\xi} : \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \overline{\Sigma^2(\Gamma)} \rightarrow M$, onde $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ denota o subconjunto parabólico da hipersuperfície canal de M . O conjunto de valores críticos dessa aplicação coincide, no caso de uma superfície M em $\mathbb{R}^4$, com a curva dos chamados “pontos parabólicos” de M ([42] e [43]). Provamos, em geral, que quando o par $(m, m+k)$ está nas boas dimensões de Mather [36], $\bar{\xi}$ é uma aplicação estável definida sobre uma variedade de dimensão m .

Este estudo local permite também, a obtenção de alguns resultados globais. Em especial, destacamos os resultados sobre o número de pontos de inflexão para mergulhos genéricos de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Mais precisamente, para mergulhos genéricos

localmente convexos, o número de pontos umbílicos é maior ou igual a duas vezes o módulo da característica de Euler de M . Como corolário segue que:

“Genericamente, todo mergulho convexo de uma superfície compacta M , orientável com $\chi(M) \neq 0$ tem pelo menos 4 pontos umbílicos”.

Ressaltamos, ainda, que em virtude das diferenças significativas em cada uma de nossas análises, apresentamos uma introdução no início de cada capítulo.

Capítulo I

I.a. Preliminares sobre Topologia Diferencial

I.a.1: Notação e alguns resultados básicos

A menos que se especifique o contrário, todas as variedades e aplicações que vamos considerar serão C^∞ .

Como referência para esta secção ver [50], [25], [27], [29] e [59].

Dadas variedades X e Y , vamos denotar por:

- (i) $C^\infty(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações de X em Y com a topologia de Whitney. Se $Y = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente, $C^\infty(X)$.
- (ii) $\text{Dif}(X)$ o subconjunto de $C^\infty(X, X)$ consistindo de todos os difeomorfismos de X . Quando $X = \mathbb{R}^n$, denotamos $\text{Dif}(n)$ e se os difeomorfismos preservam a origem: $\text{Dif}_0(n)$.
- (iii) $\text{Emb}(X, \mathbb{R}^P)$ o conjunto dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^P$.
- (iv) $\text{Im}(X, \mathbb{R}^P)$ o conjunto das imersões de X em $\mathbb{R}^P$.

Definição I.a.1.1: Dadas uma variedade E , subvariedades S, R de E e um subconjunto K de E tal que $K \subset S \cap R$, dizemos que R e S definem o mesmo germe de subvariedade em K se existe uma vizinhança aberta U de K tal que $S \cap U = R \cap U$. Para K fixado esta é uma relação de equivalência no conjunto das subvariedades de E que contém K . Denotamos a classe de S por (S, K) e quando $K = \{x\}$, por (S, x) .

Definição I.a.1.2: Sejam X e Y variedades e K um subconjunto de X . Dadas aplicações $f : V \rightarrow Y$ e $g : W \rightarrow Y$, de vizinhanças abertas V e W de K em X , dizemos que f e g definem o mesmo *germe de aplicação* em K se existe uma vizinhança aberta U de K em $V \cap W$ tal que $f|_U = g|_U$.

Para K fixado esta é uma relação de equivalência sobre o conjunto das aplicações definidas sobre uma vizinhança aberta de K em Y . Denotamos a classe de f por $f : (X, K) \rightarrow (Y, P)$ se $f(K) \subset P \subset Y$. Quando $Y = \mathbb{R}$ chamamos de germes de funções. Em geral, K é um ponto ou um conjunto finito de pontos.

Definição I.a.1.3: Dois germes de aplicações $f : (X, K) \rightarrow Y$ e $g : (X', K') \rightarrow Y'$ são ditos equivalentes se existirem difeomorfismos $h : (X, K) \rightarrow (X', K')$ e $\ell : (Y, f(K)) \rightarrow (Y', f(K'))$ tais que $h(K) = K'$ e $goh = \ell of$. Os pares de difeomorfismos (h, ℓ) constituem o grupo $\mathcal{A}$. Quando $\ell = \text{identidade}$, o subgrupo obtido é indicado por $\mathcal{R}$.

Vamos denotar por:

- (iv) $\mathcal{E}_k(X, Y)$ o espaço dos germes em K de aplicações em $C^\infty(X, Y)$, $K \subset X$. Quando $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^p$ escrevemos $\mathcal{E}_K(n, p)$. No caso em que $P = \mathbb{R}$, escrevemos $\mathcal{E}_K(X)$ ou $\mathcal{E}_K(n)$ para o anel dos germes em K de funções diferenciáveis. $\mathcal{E}_K(n)$ é um anel local e seu ideal maximal é $m_K(n)$, formado pelos germes de funções que se anulam em K .
- (v) $m_K^r(X)$ ou $m_K^r(n)$ a r -ésima potência de $m_K(X)$ ou $m_K^r(n)$, respectivamente. Quando $K = \{0\}$, escrevemos: $\mathcal{E}(n)$, $m(n)$, $m^r(n)$, etc...
- (vi) $L_x(X)$ o grupo dos germes de difeomorfismos que preservam x e $L(n)$ o grupo de

germes de aplicações dos elementos de $Dif_0(n)$.

Todo germe de aplicação $g : (X, K) \rightarrow (Y, P)$ induz um homomorfismo de anéis $g^* : \mathcal{E}_P(Y) \rightarrow \mathcal{E}_K(X)$, de maneira óbvia. Note que $g^*(m_P^k(Y)) \subset m_K^k(X)$, $(\forall k \geq 1)$.

Definição I.a.1.4: Se $f \in m^2(X)$, definimos o ideal jacobiano, $\Delta(f)$, de f como o ideal de $\mathcal{E}_x(X)$ gerado pelas derivadas parciais de f (com relação a um dado sistema de coordenadas local $\{x_1, \dots, x_n\}$ para X em x . Este é bem definido e independe da escolha de cartas locais.

Dado um número natural k , $J_{x,y}^k(X, Y)$ denota o espaço de k -jatos de aplicações em $C^\infty(X, Y)$, com fonte $x \in X$ e meta $y \in Y$. Então, escrevemos:

(m) $J^k(X, Y) = \cup_{(x,y) \in X \times Y} J_{x,y}^k(X, Y)$ (união disjunta). Novamente, quando:

(m.1) $Y = \mathbb{R} : J_{x,y}^k(X), J^k(X)$ ao invés de $J_{x,y}^k(X, \mathbb{R}), J^k(X, \mathbb{R})$

(m.2) $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p : J_{x,y}^k(n, p), J^k(n, p)$ ao invés de $J_{x,y}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

(m.3) se $p = 1 : J_{x,y}^k(n), J^k(n)$. Notemos que $J_0^k(n) \stackrel{def}{=} \cup_{y \in \mathbb{R}} J_{0,y}^k(n)$ pode ser identificado com o espaço vetorial real dos polinômios em n variáveis. Agora, $I_0^k(n)$ corresponde ao subespaço de $J_0^k(n)$ consistindo dos k -jatos de germes em $m(n)$. (De fato, podemos identificar $J_0^k(n) = \frac{\mathcal{E}(n)}{m^{k+1}(n)}$ e $I_0^k(n) = \frac{m(n)}{m^{k+1}(n)}$).

(n) $L_x^k(X)$: o grupo de Lie dos k -jatos de elementos de $L_x(X)$.

(n.1) $L^k(n)$: o grupo de Lie dos k -jatos de difeomorfismos em $Dif_0(n)$.

Observamos que as definições I.a.1.5 a I.a.1.7 se referem a funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição I.a.1.5: Dizemos que $f \in \mathcal{E}_x(X)$ é determinado pelo seu k -jato se toda $f' \in \mathcal{E}_x(X)$ com $j^k f'(x) = j^k f(x)$ é equivalente a f . (Ver def.I.a.1.3).

Definição I.a.1.6: O grau de determinação de $f \in \mathcal{E}_x(X)$, $\det f$, é o menor k tal que f é k -determinado. Um germe é dito finitamente determinado se $\det f < \infty$.

Por uma função singular (ou simplesmente uma singularidade, entendemos uma classe de equivalência de germes tal que algum (e, portanto, todo) representante pertence a $m_x^2(X)$. Neste trabalho, usaremos o termo singularidade tanto para nos referirmos a uma função singular como para um ponto crítico da função, indistintamente.

Definição I.a.1.7: O ideal local de f é definido como o quociente $m_x(\tilde{X})/(\Delta(f)+f^*(\mathcal{E}(1)))$, considerado como um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

Definição I.a.1.8: A codimensão, $\text{cod}f$, $f \in m_x^2(X)$ é definida como a dimensão do ideal local de f .

Observação I.a.1.9: Os números $\det f$ e $\text{cod}f$ estão relacionados pela desigualdade: $\text{cod}f \geq \det f - 2$ (ver [59]).

Definição I.a.1.10: $W_x^k(X)$ é o subconjunto de $J^k(X)$ formado pelos k -jatos com fonte x tais que algum representante não é k -determinado. Quando $X = \mathbb{R}^n$, denotamos por $W_x^k(n)$ e simplesmente por $W^k(n)$, se $x = 0$. Também colocamos $W^k(X) = \cup_{x \in X} W_x^k(X)$ (união disjunta).

As duas seguintes aplicações são submersões, com a topologia usual de $J^k(X, Y)$ (ver [27]).

$$\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X : \text{aplicação fonte}$$

$$\beta : J^k(X, Y) \rightarrow Y : \text{aplicação meta.}$$

Além disso,

$$\begin{array}{ccc} \pi^k : J^k(X, Y) & \rightarrow & X \times Y = J^0(X, Y) \\ \xi & \mapsto & (\alpha(\xi), \beta(\xi)) \end{array}$$

é uma aplicação fibrada, cuja fibra sobre $(x, y) \in X \times Y$ pode ser identificada com $J_{0,0}^k(n, p)$.

Existem também projeções $\pi_k^{k+m} : J^{k+m}(n, p) \rightarrow J^k(n, p)$, definidas de maneira óbvia, por redução à ordem k .

Toda $f \in C^\infty(X, Y)$ define uma secção da aplicação fonte, a saber:

$$\begin{aligned} j^k f : X &\rightarrow J^k(X, Y) \\ x &\mapsto j^k f(x) \in J_{x, f(x)}^k(X \times Y) \end{aligned}$$

Chamamos $j^k f(x)$ o k -jato de f em x . Assim, obtemos uma aplicação contínua $j^k : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, J^k(X, Y))$.

Definição I.a.1.11: O espaço de multi-jatos ${}_r J^k(X, Y)$ pode ser definido como segue:

Seja $\tilde{X}^{(r)} = \{(x_1, \dots, x_r) \in X^r / x_i = x_j \Leftrightarrow i = j\}$ e consideremos a aplicação $\alpha^r : (J^k(X, Y))^r \rightarrow X^r$ definida da maneira natural. Então, ${}_r J^k(X, Y) = (\alpha^r)^{-1}(X^{(r)})$.

Notemos que:

- (1) ${}_r J^k(X, Y) \rightarrow X^{(r)}$ é uma aplicação fibrada.
- (2) toda $f \in C^\infty(X, Y)$ induz uma secção multi-jato:

$$\begin{aligned} {}_r j^k f : X^{(r)} &\rightarrow {}_r J^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_r)). \end{aligned}$$

Definição I.a.1.12: Sejam U uma variedade arbitrária e $F \in C^\infty(X \times U, Y)$. Definimos a *extensão multi-jato* de F como:

$$\begin{aligned} {}_r j_1^k F : X^{(r)} \times U &\rightarrow J^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_r, u) &\mapsto j^k F_u(x_1, \dots, x_r) = (j^k F_u(x_1), \dots, j^k F_u(x_r)), \end{aligned}$$

onde $F_u \in C^\infty(X, Y)$ é induzida por $F|_{X \times \{u\}}$.

Para $r = 1$ temos a *extensão jato* de F :

$$\begin{aligned} j_1^k F : X \times U &\rightarrow J^k(X, Y) \\ (x, u) &\mapsto j^k F_u(x) \end{aligned}$$

Seja $\xi \in J^1(X, Y)$; então ξ define uma única aplicação linear $\lambda : T_x X \rightarrow T_y Y$, onde $x = \alpha(\xi)$ e $y = \beta(\xi)$. Suponhamos que $\xi = j^1 f(x)$, $f \in C^\infty(X, Y)$; então, $Df(x) = \lambda$.

Definição I.a.1.13: Dizemos que $\text{rank}\xi = \text{rank}Df(x)$ e $\text{corank}\xi = q - \text{rank}\xi$, onde $q = \min(\dim X, \dim Y)$.

Os subconjuntos $\Sigma^r = \{\xi \in J^1(X, Y) / \text{corank}\xi = r\}$ são subvariedades de $J^1(X, Y)$ com codimensão $(n - q + r)(p - q + r)$, $n = \dim X$, $p = \dim Y$ (ver [27], pag. 142).

Dada uma aplicação $f \in C^\infty(X, Y)$, dizemos que f tem uma singularidade tipo Σ^r em $x \in X$ (ou x é um Σ^r -ponto de f) se $j^1f(x) \in \Sigma^r$. Denotamos por $\Sigma^r(f)$ as singularidades de tipo Σ^r , isto é, $\Sigma^r(f) = (j^1f)^{-1}(\Sigma^r)$.

Embora Σ^r sejam subvariedades, $\Sigma^r(f) \subset X$ não o são, necessariamente. Mas, podemos colocar condições sobre f afim de garantir que $\Sigma^r(f)$ seja uma subvariedade. Por exemplo, que $j^1f \pitchfork \Sigma^r$ ($\forall r$); nesse caso, f é chamada *1-genérica*. O conjunto das aplicações 1-genéricas é residual em $C^\infty(X, Y)$.

Suponhamos que $\Sigma^r(f)$ seja uma subvariedade de X . Então, denotamos por $\Sigma^{r,s}(f)$ o conjunto de pontos de $\Sigma^r(f)$ para os quais $f : \Sigma^r(f) \rightarrow Y$ perde rank s . (Por exemplo, para aplicações entre superfícies, os pontos $\Sigma^{1,0}(f)$ são dobras e os pontos $\Sigma^{1,1}(f)$ são cúspides).

Subvariedades $\Sigma^{r,s}$ de $J^2(X, Y)$ podem ser construídas de tal maneira que $x \in \Sigma^{r,s}(f) \Leftrightarrow j^2f(x) \in \Sigma^{r,s}$. E novamente, uma condição suficiente para que $\Sigma^{r,s}(f)$ seja subvariedade de $\Sigma^r(f)$ para todo s , é que $j^2f \pitchfork \Sigma^{r,s}$, para todo r, s . (Esta condição é residual e aplicações 1-genéricas que a satisfazem, são chamadas 2-genéricas). Analogamente, podemos definir subvariedades $\Sigma^{r_1, \dots, r_s}$ ($r_1 \geq \dots \geq r_s \geq 0$) de $J^k(X, Y)$ e o seguinte resultado (devido a J.M. Boardman [06] e [27]) vale:

Para toda sequência de inteiros $r_1 \geq \dots \geq r_s \geq 0$ podemos definir um subfibrado $\Sigma^{r_1, \dots, r_s}$ de $J^s(X, Y)$ (relativa à fibração $J^s(X, Y) \rightarrow X \times Y$) tal que se $j^k f$ é transversal a todas variedades $\Sigma^{r_1, \dots, r_\ell}$, $\ell < s$, então $\Sigma^{r_1, \dots, r_s}(f)$ é bem definida e $j^s f(x) \in \Sigma^{r_1, \dots, r_s} \Leftrightarrow x \in \Sigma^{r_1, \dots, r_s}(f)$.

Definição I.a.1.14: Dizemos que $f \in C^\infty(X, Y)$ é uma *aplicação de Boardman* se seu

k -jato $j^k f : X \rightarrow J^k(X, Y)$ é, para todo k , transversal a cada $\sum^{r_1, \dots, r_k}$.

Definição I.a.1.18: Dada uma G -ação sobre uma variedade M , cujas órbitas são subvariedades de M , definimos a codimensão de $x \in M$, $\text{cod}(x)$, como a codimensão da órbita $G.x$ em M .

Exemplos:

1. O grupo de Lie $L^k(n, p) = L^k(n) \times L^k(p)$ atua sobre $J_{0,0}^k(n, p)$ como segue:

$$\begin{aligned} L^k(n, p) \times J_{0,0}^k(n, p) &\rightarrow J_{0,0}^k(n, p) \\ ((h, h'), f) &\mapsto j^k(h' o f o h^{-1}) \end{aligned}$$

De fato, $L^k(n, p)$ pode ser considerado como grupo estrutural do fibrado $\pi^k : J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$.

2. O grupo de Lie $L^k(n)$ atua sobre $J_0^k(n)$ como segue:

$$\begin{aligned} L^k(n) \times J_0^k(n) &\rightarrow J_0^k(n) \\ (h, f) &\mapsto j^k(f o h) \end{aligned}$$

3. Também temos a $L^k(n, p)$ -ação sobre ${}_r J^k(X, Y)$ dada por

$$\begin{aligned} \text{Diff}^k(\mathbb{R}^n \times \text{Diff}^k(\mathbb{R}^p)) \times {}_r J^k(X, Y) &\rightarrow {}_r J^k(X, Y) \\ ((j^k h, j^k h'), (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_r))) &\rightarrow (j^k(h' o f o h^{-1})(h(x_1)), \dots, j^k(h' o f o h^{-1})(h(x_r))). \end{aligned}$$

Teorema I.a.1.15: Suponhamos X e Y variedades ($\dim X = \dim Y = n$) e $f \in C^\infty(X, Y)$.

Se $j^k f \in \sum^{\overbrace{1, \dots, 1}^k}$ e $x_0 \in \sum^{\overbrace{1, \dots, 1}^k}(f)$ então existem sistemas de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$, centrada em x_0 e $\{y_1, \dots, y_n\}$, centrada em $f(x_0)$, de modo que f tenha a forma normal:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^n, 0 \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1 x_2 + \dots + x_1^{k-1} x_k + x_1^{k+1}) \end{aligned}$$

Esse resultado é devido a B.Morin (ver [45]). Notemos que quando $n = 2$ ele fornece as 2 formas canônicas de Whitney.

Definição I.a.1.16: Sejam X uma n -variedade, Y uma $2n-1$ -variedade e $f \in C^\infty(X, Y)$. Um ponto $x_0 \in \Sigma^1(f)$ é chamado um *cross-cap* se $j^1 f \pitchfork \Sigma^1$ em x_0 .

Teorema I.a.1.17: Se $f : X \rightarrow Y$ é um *cross-cap* em x_0 , existem sistemas de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$, centradas em x_0 e $\{y_1, \dots, y_{2n-1}\}$, centradas em $f(x_0)$ tal que f tem a forma normal:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}, 0 \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_{2n-1}) = (x_1^2, x_2, \dots, x_n, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n) \end{aligned}$$

Prova: Ver [27], pag. 179.

Definição I.a.1.18: Dada uma G -ação sobre uma variedade M , cujas órbitas são subvariedades de M , definimos a codimensão de $x \in M$, $\text{cod}(x)$, como a codimensão da órbita $G.x$ em M .

Exemplos:

1. O grupo de Lie $L^k(n, p) = L^k(n) \times L^k(p)$ atua sobre $J_{0,0}^k(n, p)$ como segue:

$$\begin{aligned} L^k(n, p) \times J_{0,0}^k(n, p) &\rightarrow J_{0,0}^k(n, p) \\ ((h, h'), f) &\mapsto j^k(h' o f o h^{-1}) \end{aligned}$$

De fato, $L^k(n, p)$ pode ser considerado como grupo estrutural do fibrado $\pi^k : J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$.

2. O grupo de Lie $L^k(n)$ atua sobre $J_0^k(n)$ como segue:

$$\begin{aligned} L^k(n) \times J_0^k(n) &\rightarrow J_0^k(n) \\ (h, f) &\mapsto j^k(f o h) \end{aligned}$$

3. Também temos a $L^k(n, p)$ -ação sobre ${}_r J^k(X, Y)$ dada por

$$\begin{aligned} \text{Diff}^k(\mathbb{R}^n \times \text{Diff}^k(\mathbb{R}^p)) \times {}_r J^k(X, Y) &\rightarrow {}_r J^k(X, Y) \\ ((j^k h, j^k h'), (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_r))) &\rightarrow (j^k(h' o f o h^{-1})(h(x_1)), \dots, j^k(h' o f o h^{-1})(h(x_r))). \end{aligned}$$

A ação de um grupo de Lie G (ou G -ação) sobre uma variedade M define uma relação de equivalência em M (aquelas dadas pelas G -órbitas). A G -órbita do elemento $x \in M$ é $G.x = \{g.x/\forall g \in G\}$. Existem certas condições sob as quais a órbita de todo elemento de M sob a ação de G é uma subvariedade. Por exemplo, se a G -ação for semi-algébrica (ver [25] para definição e detalhes).

I.a.2: Estratificações

Referências gerais para esta secção: ([25], [33], [34], [59], [60])

Definição I.a.2.1: Uma estratificação de um subconjunto S de uma variedade M é uma partição localmente finita $\mathcal{S}$ de S em subvariedades de M (chamadas estratos). Dizemos que o par $(S, \mathcal{S})$ é um espaço estratificado. Notemos que cada estrato U é localmente fechado, no sentido que para todo $u \in U$, existe uma vizinhança N de u em M tal que $U \cap N$ é fechado em N .

Definição I.a.2.2: Seja $\mathcal{S}$ uma estratificação de um subconjunto S de uma variedade M e $f : N \rightarrow M$ uma aplicação transversal a $\mathcal{S}$ (isto é, f é transversal a todos o estratos de $\mathcal{S}$). Então a estratificação $f^{-1}(\mathcal{S})$ de $f^{-1}(S)$, obtida tomando como estrato os conjuntos de $f^{-1}(X)$, ($\forall X \in \mathcal{S}$), é chamada estratificação *pull-back* de $\mathcal{S}$ pela f .

I.a.2.3: Exemplos

1. Consideremos o espaço $J_0^7(n)$. Como vimos em I.a.1, o grupo de Lie $L^7(n)$ atua sobre a variedade de dimensão finita $J_0^7(n)$. As órbitas dessa ação são semi-algébricas. De fato, consideremos os conjuntos:

$$\Gamma_c = \{\eta \in m^2(n)/cod\eta = c\}; \Omega_c = \{\eta \in m^2(n)/cod\eta \leq c\},$$

$$\Sigma_c = \{\eta \in m^2(n)/cod\eta \geq c\}; \Gamma_c^7 = \Gamma_c/m^8(n); \Omega_c^7 = \Omega_c/m^8(n) \text{ e } \Sigma_c^7 = \Sigma_c/m^8(n).$$

(**Nota:** $Cod\eta$ é a $\mathcal{A}$ -codimensão, mas para $c \leq 5$ ela coincide com a $\mathcal{R}$ -codimensão. Então, para $0 \leq c \leq 5$ temos $I^7(n) = \Omega_c^7 \cup \Sigma_{c+1}^7$ (união disjunta). O conjunto Ω_c^7 é uma

subvariedade e $\sum_{c+1}^7$ é uma variedade algébrica real fechada (ver [58]). Assim, temos uma estratificação de $J_0^7(n)$ dada pela estrutura das órbitas. A descrição explícita dessa estratificação pode ser dada como segue (ver [1] ou [58]):

- (i) Os subespaços abertos $J_0^7/I^7(n)$.
- (ii) As $n+1$ órbitas dos jatos de germes estáveis em $m^2(n)$ de codimensão 0 em $I^7(n)$ (ou codimensão n em $J_0^7(n)$).
- (iii) As órbitas dos jatos de germes em $m^2(n)$ de cod. 1, 2, 3, 4 e 5 em $I^7(n)$ (ou cod $n+1, n+2, n+3, n+4$ e $n+5$, resp. em $J_0^7(n)$).
- (iv) O estrato da variedade algébrica dos jatos de germes em $m^2(n)$ de codimensão ≥ 6 em $I^7(n)$.

(Os germes em (ii) correspondem a singularidades de Morse; (iii) inclui os seguintes tipos: dobra ($A_2^\pm$) de cod 2, rabo de andorinha ($A_4^\pm$), umbílicos elípticos e hiperbólicos (D_4^-, D_4^+) de cod. 3, borboleta ($A_5^\pm$) e borboleta dual (A_5^-) e umbílico parabólico ($D_5^\pm$) de cod. 4, e as singularidades de cod. 5, segundo umbílicos elípticos e hiperbólicos (D_6^-, D_6^+) e umbílico simbólico ($E_6^\pm$)).

Observações: 1. Se considerarmos a $L^7(n, 1)$ -ação ao invés da $L^7(n)$ -ação sobre $J_{0,0}^7(n)$ obtemos a mesma estrutura, com a diferença que algumas $L^7(n)$ -órbitas de mesma codimensão estão amalgamadas (algumas delas correspondendo a singularidades de Morse de índices distintos; cúspide e cúspide dual; borboleta e borboleta dual). Denotaremos essa estratificação por $\mathcal{S}^7(n)$.

2. Dada uma n -variedade X , temos uma estratificação de Whitney sobre $J^7(X)$, cuja restrição à fibra $J_{0,0}^7(n)$ do fibrado $J^7(X) \xrightarrow{\pi^7} X \times \mathbb{R}$, resulta em $\mathcal{S}^7(n)$. (Notemos que o grupo estrutural do fibrado, $L_{0,0}^7(n)$ preserva a estrutura de órbitas de $J_{0,0}^7(n)$ descrita acima, e assim induz uma estratificação $\mathcal{S}^7(X)$, de $J^7(X)$. Notemos também que as codimensões dos estratos são preservadas. Vamos denotar por $\sum^7(X)$ a união dos estratos de codimensão ≥ 6).

3. Dado um espaço estratificado $(S, \mathcal{S})$ em $J^k(X)$, tal que $\mathcal{S}$ é invariante sob a ação de $L^k(1)$ (isto é, $(\forall A \in \mathcal{S}), (\forall h \in L^k(1)), h(A) \subset A$), então podemos definir um espaço estratificado $({}_rS, {}_r\mathcal{S}_r)$ em ${}_rJ^k(X)$ como segue. A $L^k(1)$ -invariância implica que a restrição da aplicação meta ao estrato $A \in \mathcal{S}$, $\beta|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação fibrada. Portanto, $\beta^r : ({}_rS, {}_r\mathcal{S}_r) \rightarrow \mathbb{R}^r$ aplica cada estrato submersivamente sobre $\mathbb{R}^r$. Portanto, $({}_rS, {}_r\mathcal{S}_r)$ e $(\beta^r)^{-1}(\Delta(\mathbb{R}^r))$ estão em posição geral em ${}_rJ^k(X)$, (onde $\Delta(\mathbb{R}^r)$ é a estratificação canônica de $\mathbb{R}^r$ definida por suas diagonais. Então $({}_rS, {}_r\mathcal{S}_r)$ é dada pela intersecção de ambas as estratificações restritas a ${}_rJ^k(X)$ (ver ([32])). Agora, aplicando este ao caso particular da estratificação $\mathcal{S}^7(X)$ descrita no ex.2 acima, obtemos uma estratificação ${}_r\mathcal{S}^7(X)$ de ${}_rJ^7(X)$.

I.a.3: Desdobramentos de Germes de Funções

Referências para esta secção são: [[1], [47], [59] e [61].

Sejam X^n variedade, $K \subset X$ um subconjunto compacto (em geral, um número finito de pontos de X) e $f \in \mathcal{E}_K(X)$.

Definição I.a.3.1: A categoria dos desdobramentos de f , U_f é definida como segue:

(a) Os objetos de U_f são germes $F \in \mathcal{E}_{K \times u}(X \times U)$, onde (U, u) é o germe da variedade parâmetro (“espaço controle”), tal que $F|_{X \times \{u\}}$ é canonicamente identificado com f .

Se $\dim U = r$, então F é chamado um desdobramento a r -parâmetros de f (ou r -desdobramento). Escrevemos simplesmente *desdobramento* de f quando $\dim U$ for irrelevante.

A todo desdobramento F existe associada uma *deformação*, $D(F)$, dada pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
(X \times U, K \times u) & \xrightarrow{D(F) = (F, \pi')} & (\mathbb{R} \times U, f(K) \times u) \\
\searrow \pi' & & \nearrow \pi \\
& (U, u) &
\end{array}$$

onde π e π' denota as projeções óbvias.

Dados 2 objetos de U_f : $F \in \mathcal{E}_{K \times u}(X \times U)$ e $F' \in \mathcal{E}_{K \times u}(X \times U')$, um U_f -morfismo de F' em F consiste de uma terna de germes de aplicações (h, h', h'') , tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
& (X \times U', K \times u') & \xrightarrow{D(F')} & (\mathbb{R} \times U', f(K) \times u') & \xrightarrow{\pi} (U', u') \\
(X, K) \nearrow h' & \downarrow & \nearrow h' & \downarrow & \downarrow h'' \\
& (X \times U, K \times u) & \xrightarrow{D(F)} & (\mathbb{R} \times U, f(K) \times u) & \xrightarrow{\pi} (U, u)
\end{array}$$

Obs: As flechas inclinadas representam as inclusões naturais.

Definição I.a.3.2: Um objeto F de U_f é chamado um *desdobramento versal* de f se para todo outro objeto F' de U_f , existe um U_f -morfismo de F' em F . É chamado um *desdobramento universal* se ele é um desdobramento versal definido sobre um germe de variedade parâmetro (U, u) , de dimensão mínima. De fato, se $\det f < \infty$ ou equivalentemente $\text{cod}f < \infty$, sempre existe um desdobramento universal padrão de f , e pode ser dado pela expressão: $F(x, u) = f(x) + \sum_{j=1}^{\text{cod}f} u_j b_j(x)$, onde $\{b_j(x)\}_{j=1}^{\text{cod}f}$ são monômios em $m_x(X)$, mapeados sobre uma $\mathbb{R}$ -base do anel local de f pela projeção canônica. (ver [59]). Os seguintes resultados podem ser encontrados em [33]:

Proposição I.a.3.3: Seja $f \in \mathcal{E}_x(X)$ k -determinado e suponhamos $F \in \mathcal{E}_{(x,u)}(X \times U)$ um desdobramento tal que: $j_1^k F : X \times U \rightarrow J^k(X)$ é transversal à $L_x^k(n, 1)$ -órbita de

$j^k f(x)$. Então F é um desdobramento versal de f . (Certamente, se $\dim U = \text{cod} f$, F é um desdobramento universal de f). Como uma espécie de recíproca existe o seguinte:

Proposição I.a.3.4: Seja $f \in \mathcal{E}(n)$ k -determinado e suponhamos que $F \in \mathcal{E}(n+s)$ é um desdobramento versal de f . Então $j_1^k F$ é transversal à $L^k(n,1)$ -órbita de $j^k f(0)$.

Consideremos um germe singular $f \in m_x^2(X)$ e um desdobramento versal $F \in \mathcal{E}_{(x,u)}(X \times U)$ de f . Tomemos um representante $\tilde{F} : (X \times U, (x, u)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Definição I.a.3.5: A F -variedade catástrofe $CM(f)$ de f é definida como o germe do subconjunto de $X \times U$ em (x, u) dado pelas equações $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$, onde $x_1, \dots, x_n$ são coordenadas locais para X em x . O fato de F ser versal implica que $CM(f)$ é um germe de variedade que denotaremos por $(CM(f), (x, u))$.

Seja $\tilde{\chi}(f)$ a composição

$$(CM(f), (x, u)) \xrightarrow{\text{inclusão}} (X \times U, (x, u)) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (U, u)$$

Definição I.a.3.6: O germe em (x, u) de $\tilde{\chi}(f)$ é chamado o *germe catástrofe* de f . Denotamos por $\tilde{\chi}(f)$ ou simplesmente χ , quando não der origem a confusão com respeito a f . Todo representante, $\tilde{\chi}(f)$, será chamado uma *aplicação catástrofe*. Os seguintes resultados são bem conhecidos na teoria das catástrofes.

Teorema I.a.3.7: Se f é finitamente determinado, então a classe de equivalência de $\chi(f)$ depende exatamente da classe de equivalência de f . Além disso, ele é univocamente determinado pelas coordenadas “essenciais” de f (isto é, para uma conveniente escolha de coordenadas, f pode ser escrito como $g + q$, onde $q = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_p^2$ e $g \in m_x^3$ ($n - p$) (Splitting Lemma)). As variáveis $x_{p+1}, \dots, x_n$ são chamadas *essenciais* e temos, ainda, $\chi(f)$ equivalente a $\chi(g)$.

Teorema I.a.3.8: Se $\text{cod}f \leq 5$, então $\chi(f)$ é equivalente a um elemento da lista composta pelas 11 catástrofes elementares.

I.a.4. Mergulhos genéricos para famílias de funções altura

Sejam M uma m -variedade compacta, orientada e $f \in \text{Emb}(M, m+k)$.

Consideremos:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^{m+k} \times \mathbb{R}^{m+k} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \lambda(u, v) = \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

$$S^{m+k-1} = \{v \in \mathbb{R}^{m+k} / \|v\| = 1\} \text{ e}$$

$$\begin{array}{ccccc} M \times S^{m+k-1} & \rightarrow & \mathbb{R}^{m+k} \times S^{m+k-1} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (p, v) & \mapsto & (f(p), v) & \mapsto & \lambda(f(p), v) = \langle f(p), v \rangle \end{array}$$

$$\lambda(f)$$

Então, para cada $v \in S^{m+k-1}$ temos definida sobre M a função altura

$$\begin{aligned} f_v : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto f_v(p) = \langle f(p), v \rangle \end{aligned}$$

e, também, uma família de funções altura sobre M , parametrizada por S^{m+k-1} :

$$\begin{aligned} \Lambda(f) : S^{m+k-1} &\rightarrow C^\infty(M) \\ v &\mapsto \Lambda(f)(v) = f_v \end{aligned}$$

Agora, definimos um subconjunto de $\text{Emb}(M, m+k)$ como

$T^\ell(k) = \{f \in \text{Emb}(M, m+k) / \Lambda(f) \text{ é uma família } Z^\ell\text{-genérica de funções reais sobre } M\}$.

Com família Z^ℓ -genérica queremos dizer que a extensão multijato de $\lambda(f)$:

$${}_r J_1^\ell \lambda(f) : M^{(r)} \times S^{m+k-1} \rightarrow {}_r J^\ell(M)$$

é transversal à estratificação ${}_r Z^\ell(M)$ de ${}_r J^\ell(M)$ (r suficientemente grande). Esta estratificação é aquela construída em I.a.3.

Uma prova do seguinte resultado pode ser encontrado em [33] ou [60].

Teorema I.a.4.1: Para toda variedade W de ${}_r J^\ell(M)$, o conjunto $\{f \in \text{Emb}(M, m+k) / {}_r j_1^\ell \lambda(f) \cap W\}$ é residual.

Podemos concluir, portanto, que dada uma estratificação enumerável Z^ℓ de $J^\ell(M)$, invariante sob a ação de $L^\ell(1)$, o conjunto $T^\ell(k)$ é um subconjunto residual de $\text{Emb}(M, m+k)$.

Como caso particular, consideremos o espaço de jatos $J^7(M)$ e a estratificação $S^7(M)$ descrita em I.a.3, (2). Do argumento acima segue que

$S^7(k) = \{f \in \text{Emb}(M, m+k) / \Lambda(f) \text{ é uma família } S^7(M)\text{-genérica de funções sobre } M\}$ é um subconjunto residual em $\text{Emb}(M, m+k)$.

Nota: A prova de que o conjunto $S^7(k)$ é residual em $\text{Emb}(M, m+k)$ pode ser feita utilizando resultados mais recentes, obtido por Montaldi em [44] sobre genericidade de composição de aplicações. A seguir damos uma breve descrição dos resultados contidos em [44] (Uma outra referência é [53]).

Sejam U^ℓ, X^m, Y^n e Z^P variedades (sem bordo) e G um dos grupos padrões $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^+, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{K})$ que atuam sobre $C^\infty(Y, Z)$.

Definição I.a.4.2: Dizemos que a família de aplicações

$$\begin{aligned} F : Y \times U &\rightarrow Z \\ (y, u) &\mapsto f_u(y) \end{aligned}$$

é localmente G -versal se para todo $(y, u) \in Y \times U$, o germe de F em (y, u) é um desdobramento G -versal do germe de f_u em y . Além disso, dizemos que F é G -versal se

para todo $u \in U$ e todo subconjunto finito $K \subset Y$ o multigerme de F em $K \times \{u\}$ é um desdobramento G versal do multigerme de f_u em K . G -versalidade local pode ser dada em termos da transversalidade da aplicação extensão jato ${}_r J_1 F : Y \times U \rightarrow J^r(Y, Z)$ às G -órbitas (para r suficientemente grande). G versalidade pode ser colocada, de modo semelhante, em termos de transversalidade em espaços de multi-jatos (desde que s seja suficientemente grande). A G -versalidade local para aplicações $f \in \mathcal{E}_K(X, Y)$ é definida como em I.a.2, fazendo as modificações necessárias.

Seja F uma família de aplicações como acima e $g \in Im(X, Y)$. Definimos:

$$\begin{aligned} \Phi : X \times U &\rightarrow Z \\ (x, u) &\mapsto f_u \circ g(x) \end{aligned}$$

Teorema I.a.4.3: Suponhamos $F : Y \times U \rightarrow Z$ localmente G -versal. Seja $W \subset J^r(X, Z)$ uma subvariedade G -invariante e seja $R_w = \{g \in Im(X, Y) / j_1^r \lrcorner W\}$. Então, R_w é residual em $Im(X, Y)$.

Teorema I.a.4.4: Suponhamos $F : Y \times U \rightarrow Z$ G -versal e $s \geq 1$. Sejam $W \subset {}_s J^r(X, Z)$ uma subvariedade G -invariante e $R_w = \{g \in Emb(X, Y) / {}_s j_1^r \phi_g \lrcorner W\}$. Então, R_w é residual em $Emb(X, Y)$. Além disso, nos dois teoremas acima, se U é compacto e W fechado, o conjunto R_w é aberto.

Corolário I.a.4.5: Seja F localmente G -versal, com U compacto e seja $\mathcal{S}$ uma estratificação regular G -invariante de $J^r(X, Z)$. Então, $\{g \in Im(X, Y) ; j_1^r \phi_g \lrcorner \mathcal{S}\}$ é aberto e denso em $Im(X, Y)$. A afirmação análoga para multi-jatos também vale.

Corolário I.a.4.6: Seja $f : Y \rightarrow Z$ uma aplicação estável. Se (m, p) está nas boas dimensões de Mather (ver [35]), então $S = \{g \in Emb(X, Y) / fog \text{ é estável} \}$ é aberto e denso em $Emb(X, Y)$.

Corolário I.a.4.7: Seja $F : Y \times U \rightarrow Z$ uma família localmente G -versal e suponhamos que o par $(m + \ell, p)$ esteja nas boas dimensões de Mather. Então,

$S = \{g \in Emb(X, Y) / Fo(g \times id) \text{ é localmente } G\text{-versal} \}$ é aberto e denso em $Emb(X, Y)$.

I.a.5. Mergulhos genéricos para famílias de projeções sobre hiperplanos.

Sejam M uma m -variedade compacta, orientada e $f \in \text{Emb}(M, m+k)$.

Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times S^{m+k-1} & \xrightarrow{(f, \text{id})} & \mathbb{R}^{m+k} \times S^{m+k-1} & \xrightarrow{h} & TS^{m+k-1} \\
 (p, \alpha) & \mapsto & (f(p), \alpha) & \mapsto & h(f(p), \alpha) = (\alpha, f(p) - \langle f(p), \alpha \rangle \alpha)
 \end{array}$$

onde TS^{m+k-1} é o fibrado tangente a S^{m+k-1} , que pode ser pensado como uma família de aplicações $M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k-1}$, parametrizada por pontos de S^{m+k-1} .

Aplicando o corolário I.a.4.7 nesse caso especial, podemos enunciar:

Teorema I.a.5.1. Para um conjunto residual de mergulhos $f \in \text{Emb}(M, m+k)$, a família $h(f)$ é $\mathcal{A}$ -localmente versal.

Em particular, temos também o seguinte corolário:

Corolário I.a.5.2: Para quase todo $\alpha \in S^{m+k-1}$, $h_\alpha(f)$ é $\mathcal{A}$ -localmente estável.

I.b. Preliminares sobre Geometria Diferencial

Para este sub-capítulo, tomamos como referência básica [58], [14].

I.b.1. A Aplicação de Gauss

Seja S uma hipersuperfície orientada e N um campo vetorial normal unitário C^∞ sobre S .

A aplicação $\gamma : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, associada ao campo vetorial N ($\gamma(p) = (p, N(p))$, $p \in S$), aplica S na esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, pois $\|N(p)\| = 1$ para todo $p \in S$. Então, dada uma hipersuperfície orientada S existe uma aplicação C^∞ $\gamma : S \rightarrow S^n$, chamada *aplicação normal de Gauss*; γ pode ser pensada como uma aplicação que a cada $p \in S$ associa o ponto em $\mathbb{R}^{n+1}$ obtido transladando o vetor normal unitário $N(p)$ para a origem.

A imagem da aplicação de Gauss:

$\gamma(S) = \{q \in S^n : q = N(p) \text{ para algum } p \in S\}$ é chamada imagem esférica de uma hipersuperfície orientada. A imagem esférica de uma hipersuperfície orientada S fornece o conjunto de direções que ocorrem como direções normais a S .

Teorema I.b.1.1: Seja S uma hipersuperfície compacta orientada em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada como conjunto de nível $f^{-1}(c)$ de uma função C^∞ $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\nabla f(p) \neq 0$, para todo $p \in S$. Então a aplicação de Gauss γ é sobre S^n .

Prova: ([58], pag. 32).

I.b.2. A Aplicação de Weingarten

Definição I.b.2.1: Dada uma hipersuperfície S e uma função C^∞ $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, sua *derivada* com respeito a um vetor v tangente a S ($v \in T_p S$) é definido por:

$$\nabla_v f = (f \circ \alpha)'(t_0), \text{ onde } \alpha : I \rightarrow S \text{ é uma curva parametrizada em } S \text{ com } \dot{\alpha}(t_0) = v.$$

Notemos que o valor de $\nabla_v f$ é independente da curva α em S passando por p com

velocidade v , pois

$$\nabla_v = (\tilde{f} \circ \alpha)'(t_0) = \nabla \tilde{f}(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) = \nabla \tilde{f}(p) \cdot v ,$$

onde $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ definida sobre um conjunto aberto U contendo S , cuja restrição a S é f . Segue também dessa última fórmula que a função que aplica cada v em $\nabla_v f$ é uma aplicação linear de $T_p S$ em $\mathbb{R}$.

Definição I.b.2.2: A derivada de um campo vetorial X sobre uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{m+1}$ com respeito a um vetor $v \in T_p S$ é definida por $\nabla_v X = (X \circ \alpha)'(t_0)$ onde α é uma curva parametrizada em S com $\alpha(t_0) = p$, $\dot{\alpha}(t_0) = v$.

Observemos que $\nabla_v X \in \mathbb{R}_p^{m+1}$ e $\nabla_v X = (\alpha(t_0), (X_1 \circ \alpha)'(t_0), \dots, (X_{m+1} \circ \alpha)'(t_0))$ onde X_i são as componentes de x . Em particular, $\nabla_v X$ não depende da escolha de α .

Propriedades:

- (i) $\nabla_v(X + Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y$
- (ii) $\nabla_v(fX) = (\nabla_v f)X(p) + f(p)(\nabla_v X)$
- (iii) $\nabla_v(X.Y) = (\nabla_v X).Y(p) + X(p).(\nabla_v Y)$

para campos vetoriais $C^\infty X$ e Y sobre S e funções $C^\infty f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, para cada campo vetorial $C^\infty X$ sobre S , $\nabla_v X$ é uma aplicação linear de $T_p S$ em $\mathbb{R}_p^{m+1}$.

Observação: Em geral a derivada $\nabla_v X$ de um campo vetorial tangente sobre uma hipersuperfície S com respeito a $v \in T_p S$ não está no tangente a S .

Definição I.b.2.3: A derivada covariante de um campo vetorial tangente com respeito a $v \in T_p S$ é definido por:

$$D_v X = \nabla_v X - \langle \nabla_v X, N(p) \rangle N(p)$$

onde N é uma orientação sobre S .

($D_v X$ é a componente tangencial de $\nabla_v X$)

A derivação covariante tem as mesmas propriedades (i) - (iii) acima, com ∇ substituída por D . Além disso, para cada campo vetorial tangente C^∞ sobre S , a aplicação que associa a cada v , $D_v X$ é uma aplicação linear de $T_p S$ em $T_p S$.

Notemos que se S é uma hipersuperfície orientada e N um campo vetorial normal unitário sobre S , para cada $p \in S$ e $v \in T_p S$, a derivada $\nabla_v N$ é tangente a S (isto é, $\nabla_v \perp N(p)$) pois: $0 = \nabla_v(1) = \nabla_v(\langle N, N \rangle) = 2 \langle \nabla_v N, N(p) \rangle$.

Além disso, $D\gamma(p).v = (N\alpha)'(t_0) = \nabla_v N$, onde α é uma curva parametrizada em S tal que $\alpha(t_0) = p$, $\dot{\alpha}(t_0) = v$ e $D\gamma(p)$ é a derivada da aplicação normal de Gauss γ , em p .

Definição I.b.2.4: A aplicação linear

$$\begin{aligned} L_p : T_p S &\rightarrow T_p S \\ v &\mapsto L_p(v) = -\nabla_v N \end{aligned}$$

é chamada *aplicação de Weingarten* de S em p .

$L_p(v)$ mede (a menos do sinal), a razão de mudança de N , restrita a uma curva $\alpha(t)$ em $t = 0$, em virtude da fórmula $\nabla_v N = (N\alpha)'(t_0)$, onde $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva parametrizada em S com $\dot{\alpha}(t_0) = v$.

Algumas vezes, L_p é chamado operador de formas de S em p . Para fins de cálculo é importante notar que $L_p(v)$ pode ser obtido pela fórmula:

$$L_p(v) = -\nabla_v N = -(p, \langle \nabla \tilde{N}_1(p), v \rangle, \dots, \langle \nabla \tilde{N}_{m+1}(p), v \rangle)$$

onde $\tilde{N}$ é um campo vetorial C^∞ definido sobre um conjunto aberto U contendo S e tal que $\tilde{N}|_S = N$. ($\tilde{N} = (\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_{m+1})$).

Teorema I.b.2.5: A aplicação de Weingarten L_p é auto-adjunta, isto é, $\langle L_p(v), w \rangle = \langle v, L_p(w) \rangle$ para todo $v, w \in T_p S$.

Prova: ([58], pag. 58).

I.b.3. Curvatura de Hipersuperfícies; Direções Assintóticas

Sejam S uma hipersuperfície orientada por um campo vetorial normal N e $p \in S$. Para todo $v \in T_p M$, $\langle L_p(v), v \rangle$ é igual à componente normal da aceleração em p de toda curva parametrizada α em S passando por p com velocidade v .

Definição I.b.3.1: Quando $\|v\| = 1$, $k(v) = \langle L_p(v), v \rangle$ é chamada curvatura normal de S em p na direção $[v]$.

Notemos que se $k(v) > 0$ então S se curva para N na direção $[v]$ e, se $k(v) < 0$ ela se curva no sentido contrário ao de N na direção $[v]$.

Definição I.b.3.2: Dada uma hipersuperfície S em $\mathbb{R}^{m+1}$ orientada por um campo vetorial normal unitário N , a *secção normal* determinada pelo vetor unitário $v = (p, v) \in T_p S$, $p \in S$ é definida por: $S \cap \mathcal{N}(v)$, onde $\mathcal{N}(v) = \{q \in \mathbb{R}^{m+1} : q = p + xv + yN(p) \text{ para algum } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\mathcal{N}(v)$ é uma cópia de $\mathbb{R}^2$, com p correspondendo a origem, $p + v$ a $(1, 0)$ e $p + N(p)$ a $(0, 1)$. Assim podemos identificar $\mathcal{N}(v)$ com $\mathbb{R}^2$ e ver $S \cap \mathcal{N}(v)$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Teorema I.b.3.3: Sejam S uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{m+1}$ e $v \in T_p S$, $p \in S$. Então existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^{m+1}$ contendo p tal que $S \cap \mathcal{N}(v) \cap V$ é uma curva plana. Além disso, a curvatura em p desta curva (convenientemente orientada) é igual à curvatura normal $k(v)$.

Prova: ([58], pag. 84).

Observemos que para um ponto p em S , $k(v)$ é definida para cada vetor unitário $v \in T_p S$. Então, a curvatura normal em p é uma função real com domínio na esfera

unitária de $T_p S$. Como k é contínua e a esfera é compacta, esta função atinge um máximo e um mínimo. Do seguinte Lema segue que esses extremos são auto-valores da aplicação de Weingarten L_p :

Lema I.b.3.4: Sejam V espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $L : V \rightarrow V$ uma transformação linear auto-adjunta sobre V . Consideremos $S = \{v \in V : \langle v, v \rangle = 1\}$ e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(v) = \langle L(v), v \rangle$. Então, f é estacionário em $v_0 \in S$ (isto é $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$ para toda curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ com $\alpha(t_0) = v_0$) $\Leftrightarrow L(v_0) = f(v_0)v_0$ (isto é, v_0 é um auto-vetor de L com auto-valor $f(v_0)$).

Se S é uma hipersuperfície orientada em $\mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in S$, como a aplicação L_p é auto-adjunta, existe uma base ortonormal de auto-vetores de L_p em $T_p S$.

Definição I.b.3.5: Aos auto-valores $k_1(p), \dots, k_m(p)$ de L_p chamamos de *curvaturas principais* de S em p e aos auto-vetores unitários de L_p de *direções de curvatura principal*. O determinante $k(p) = \det L_p$ é chamado a curvatura de Gauss-Kronecker de S em p .

Teorema I.b.3.6: Sejam S uma hipersuperfície orientada em $\mathbb{R}^{m+1}$, $p \in S$ e $\{k_1(p), \dots, k_m(p)\}$ as curvaturas principais de S em p com direções de curvatura principal $\{v_1, \dots, v_n\}$. Então, a curvatura normal $k(v)$ na direção $v \in S_p (\|v\| = 1)$ é dada por:

$$k(v) = \sum_{i=1}^m k_i(p) \langle v, v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^m k_i(p) \cos^2 \theta_i$$

onde θ_i é o ângulo entre v e v_i .

Prova: ([58], pag. 87).

Definição I.b.3.7: A forma quadrática associada a aplicação L_p em um ponto $p \in S$ é chamada segunda forma fundamental de S em p e denotada por

$$\pi_p : \begin{cases} \pi_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \pi_p(v) = \langle L_p(v), v \rangle. \end{cases}$$

Notemos que quando $\|v\| = 1$, $\pi_p(v)$ é igual à curvatura normal de S em p na

direção v .

Definição I.b.3.8: Seja p um ponto em S . Uma direção assintótica de S em p é uma direção $[v]$ de $T_p S$ segundo a qual a curvatura normal é nula.

Capítulo II

Funções Altura sobre m -Subvariedades em $m + k$ -Espaços Euclidianos

Com o objetivo de estender o estudo de curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$ realizado por diversos autores (p. ex. [7], [38], [52], ...), consideramos uma família de funções altura sobre uma m -variedade genericamente mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$ e caracterizamos aquelas direções que dão origem a funções alturas com singularidades mais degeneradas que Morse (direções degeneradas de M). Isso nos permite, na seção II.2, classificar os pontos de M , de acordo com o tipo do conjunto de direções degeneradas que apresentam. Analisamos com mais detalhes, em II.3, o caso de subvariedades mergulhadas com codimensão 2.

Na seção II.4 apresentamos alguns resultados relacionados com a hipersuperfície canal de M , não comuns na literatura, mas fundamentais para estabelecer uma técnica que exploramos nesse e nos capítulos posteriores.

Desenvolvemos, nos parágrafos II.6 e II.7, ainda, para o caso de codimensão 2 ($k = 2$), uma análise relacionando a hipersuperfície canal, o pencil de formas quadráticas associado à 2ª forma fundamental da imersão e a equação algébrica $h_p = 0$, que caracteriza as direções degeneradas para funções altura, resultando no teorema II.7.2. Esse resultado, que relaciona a ordem de um zero de h_p com o contato do feixe (q_1, q_2)

e o cone das formas quadráticas degeneradas, permite simplificar consideravelmente algumas provas de resultados que aparecerão nos capítulos que seguem (por exemplo nos teoremas que mostram que a projeção $\xi : CM \rightarrow M$, quando restrita a uma certa subvariedade de CM é difeomorfismo local).

Finalmente, na seção II.8, estudamos o caso $m = 1$ e $k \geq 3$ (curvas em $\mathbb{R}^{1+k}$), uma vez que este não apresenta diferenças significativas que justifiquem um estudo particular para cada valor de k .

II.1. Família de Funções Altura para Mergulhos Genéricos com codimensão k ($k \geq 2$).

Sejam M uma m -variedade fechada, conexa, orientada e $f \in Emb(M, m+k)$. Consideremos sobre M a família de funções altura:

$$\begin{aligned} \lambda(f) : M \times S^{m+k-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\longmapsto \lambda(f)(p, v) = \langle f(p), v \rangle = f_v(p). \end{aligned}$$

e o subconjunto $S^7(k)$ de $Emb(M, m+k)$, definido em I.a.4 $S^7(k)$ é um subconjunto residual (portanto denso) de $Emb(M, m+k)$ e $(\forall f \in S^7(k))$, a família de funções $\Lambda(f) : S^{m+k-1} \rightarrow C^\infty(M)$ é $S^7(k)$ -genérica. Portanto, a extensão jato:

$$j_1^7 \lambda(f) : M \times S^{m+k-1} \longrightarrow J^7(M),$$

não encontra estratos de codimensão superior a $2m+k-1$ e a restrição $(m+k) \leq 5$ implica que $J_1^7 \lambda(f)$ não encontrará estratos de codimensão maior que $(m+4)$. Agora, todos os elementos de $J^7(M)$ com codimensão menor que $(m+4)$ são 7-determinados (ver I.a.1.8 e def. I.a.1.15). $S^7(k)$ -genericidade também implica que $j_1^7 \lambda(f)$ encontra transversalmente os estratos de codimensão menor que $(m+4)$. Como esses estratos são compostos, cada um, de uma única $L^7(m+k, 1)$ órbita, aplicando a Prop.I.a.3.3, podemos concluir:

Teorema II.1.1: Dada $f \in \mathcal{S}^7(k)$, se $m + k < 6$, o germe $(\lambda(f), (p, v))$ de $\lambda(f)$ em todo ponto $(p, v) \in M \times S^{m+k-1}$ é um desdobramento versal do germe (f_v, p) de f_v em p .

Obs. II.1.2. Daquí por diante, chamaremos de genérico todo mergulho $f \in \text{Emb}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ tal que o germe $(\lambda(f), (p, v))$ de $\lambda(f)$, em todo ponto $(p, v) \in M \times S^{m+k-1}$ é um desdobramento versal do germe (f_v, p) de f_v em p .

II.2. Direções degeneradas de M

Lema II.2.1: Sejam $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão e $p \in M$. Então, existe sistema de coordenadas ortogonal em p , relativamente ao qual f pode ser colocado na forma de Monge:

$$(\mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^{m+k} \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \quad ,$$

$$x \longmapsto (x, f_1(x), \dots, f_k(x))$$

com $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) = 0$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, m$.

Prova: Seja $(\alpha, \hat{\mathcal{U}})$ um sistema de coordenadas em p .

Pela Forma Local das Imersões, $f(M)$ pode ser visto como gráfico de função numa vizinhança de $f(p)$, bastando para isso, escolher $T_{f(m)}f(M)$ e $N_{f(m)}f(M)$ tais que $\mathbb{R}^{m+k} = T_{f(m)}f(M) \oplus N_{f(m)}f(M)$. Tomemos (β, V) um sistema de coordenadas em $f(p)$, onde β é uma composição de rotações e translações. Assim, nessas coordenadas, f toma a forma:

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}, 0) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow (V, (0)) \subset \mathbb{R}^{m+k} \\ y &\longmapsto (y, h_1(y), \dots, h_k(y)) \end{aligned}$$

Finalmente, escolhemos uma base ortogonal $\{e_1, \dots, e_{m+k}\}$ em $\mathbb{R}^{m+k}$ de maneira que $\{e_1, \dots, e_m\}$ tenha a mesma orientação de $T_{f(m)}f(M)$, $e_{m+1}, \dots, e_{m+k}$ estejam em $N_{f(m)}f(M)$ e, ainda, $\{e_1, \dots, e_{m+k}\}$ tenha uma orientação que coincida com a ori-

entação de $\mathbb{R}^{m+k}$. Denotemos por A a matriz mudança de base do sistema de coordenadas V para a base acima. Então, a mudança de coordenadas em $\mathcal{U}$, dada por $\gamma = \pi_1 \circ A \circ \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção canônica, coloca f na forma desejada.

Lema II.2.2: A função altura f_v tem uma singularidade em $p \in M \leftrightarrow v$ é um vetor normal a $T_{f(p)}f(M)$.

Prova: Escolhendo um sistema de coordenadas em p como no Lema II.2.1, a função altura f_v tem a expressão local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, o & \longrightarrow \mathbb{R}, o \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto f_v(x) = \sum_{i=1}^m v_i x_i + \sum_{j=1}^k v_{k+j} \cdot f_j \end{aligned} \quad (1)$$

para cada $v = (v_1, \dots, v_{m+k}) \in \mathbb{R}^{m+k}$.

Assim, 0 é um ponto crítico de $f_v \leftrightarrow \frac{\partial f_v}{\partial x_i}(0) = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, m) \leftrightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_m = 0$, ou seja, $v = (0, \dots, 0, v_{m+1}, \dots, v_{m+k}) \in \mathbb{R}^{m+k}$. $\square$

Consideremos, ainda, f com a representação local dada em (1) e suponhamos que a parte quadrática dos 2-jatos das componentes de f sejam dadas por:

$$= q_i(x_1, \dots, x_m) = j^2 f_i(0) = \sum_{s=1}^m a_{s,s}^i x_s^2 + 2 \sum_{s < t} a_{s,t}^i x_s x_t, \quad \begin{cases} s, t = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, k \\ a_{st} = a_{ts}. \end{cases}$$

Nesse caso,

$$\mathcal{H}(f_v)(0) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k a_{11}^j v_{m+j} & \sum_{j=1}^k a_{12}^j v_{m+j} & \dots & \sum_{j=1}^k a_{1k}^j v_{m+j} \\ \sum_{j=1}^k a_{12}^j v_{m+j} & \sum_{j=1}^k a_{22}^j v_{m+j} & \dots & \sum_{j=1}^k a_{2k}^j v_{m+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^k a_{1k}^j v_{m+j} & \sum_{j=1}^k a_{2k}^j v_{m+j} & \dots & \sum_{j=1}^k a_{kk}^j v_{m+j} \end{bmatrix}$$

e $\det \mathcal{H}(f_v)(0) = 2^k \cdot h_p(v_{m+1}, \dots, v_{m+k})$, onde h_p é um polinômio de grau m em k -variáveis, cujos coeficientes dependem da parte quadrática do 2-jato de f em p . Portanto,

Proposição II.2.3:

p é um ponto crítico degenerado de $f_v \leftrightarrow v \in N_{f(p)}f(M)$ e a k -upla, formada pelas coordenadas de v em $N_{f(p)}f(M)$, é uma solução de

$$h_p(v_{m+1}, \dots, v_{m+k}) = 0 \quad (2).$$

Obs. II.2.4: Por comodidade, vamos chamar uma direção em $N_{f(p)}f(M)$, cuja função altura correspondente tem singularidade mais degenerada que Morse em p , de *direção degenerada em p* .

Dessa forma, as direções degeneradas no ponto p , ficam caracterizadas pelo conjunto solução de (2). Uma análise da correspondente equação (2), para cada ponto p , permite classificar os pontos de M de acordo com o tipo do conjunto de direções degeneradas que apresentam. A título de ilustração, consideremos

II.3. Subvariedades de Codimensão 2

Nesse caso, h_p é um polinômio homogêneo de grau m em duas variáveis, com coeficientes reais e sua complexificação decompõe-se em m -fatores lineares: $h_p(v_{m+1}, v_{m+2}) = (\alpha_1 v_{m+1} + \beta_1 v_{m+2})(\alpha_2 v_{m+1} + \beta_2 v_{m+2}) \dots (\alpha_m v_{m+1} + \beta_m v_{m+2}) = 0$ (3)

Assim, uma análise das possíveis soluções reais de (3) para cada $p \in M$, produz uma subdivisão de M em regiões do tipo:

a) um aberto em M formado pelos pontos cuja equação (3) correspondente admite somente raízes simples. Tal aberto é constituído de várias componentes conexas, cada uma delas distinguida pelo número de raízes reais simples:

$$M^j \overbrace{(1, \dots, 1)}^j = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite } j \text{ raízes reais simples} \}.$$

$$= \{p \in M / \text{existem } j \text{ direções degeneradas em } p\}, \quad (j = 0, \dots, m).$$

Assim, quando m é par, M_0 é um aberto de M , dado por:

$$M_0 = \{p \in M / f_v \text{ é de Morse em } p, \forall v \in N_{f(p)}f(M)\}. \text{ Agora, se } m \text{ é ímpar, } M_0 = \emptyset.$$

b) Subconjuntos de M caracterizados pelo número de raízes reais e por suas respectivas multiplicidades:

$$M_{j-r}(i_1, \dots, i_{j-r}) = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite } (j-r) \text{ raízes reais, cada uma com multiplicidade } i_\ell, i_1 + \dots + i_{j-r} = j\}.$$

$$= \{p \in M / \text{ existem } (j-r) \text{ direções degeneradas em } p\}, (r = 1, \dots, m).$$

Por exemplo:

$$M_1(2) = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite uma única raiz real com multiplicidade } 2\}.$$

$$= \{p \in M / \text{ existe uma única direção degenerada em } p\} \text{ (subconjunto localmente definido como subvariedade algébrica de codimensão } 1).$$

$$M_3(1, 2, 2) = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite três raízes reais, dentre as quais, duas com multiplicidade } 2\}$$

$$= \{p \in M / \text{ existem três direções degeneradas em } p\} \text{ (subconjuntos localmente definidos como subvariedade algébrica de codimensão } 2).$$

$$M_1(3) = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite uma única raiz real com multiplicidade } 3\}$$

$$= \{p \in M / \text{ existe uma única direção degenerada em } p\} \text{ (subconjunto localmente definido como subvariedade algébrica de codimensão } 3), \text{ e assim por diante.}$$

Teorema II.3.1. Seja M uma m -variedade genericamente mergulhada em $\mathbb{R}^{m+2}$. Então, M admite uma estratificação dada pelo número de direções degeneradas que apresenta em cada ponto. Mais precisamente, $M = \cup_{r=0}^m M_{j-r}(i_1, \dots, i_{j-r})$.

Os subconjuntos $M_j(\overbrace{1, \dots, 1}^j)$ são abertos e $M_{j-r}(i_1, \dots, i_{j-r})$ são reuniões de subcon-

juntos localmente definidos como subvariedades algébricas de codimensão r .

II.4. A 2ª Forma Fundamental de M

Dado $p \in M$, vamos denotar por $T_{f(p)}f(M)^\perp$ ao conjunto $\{v \in T_{f(p)}\mathbb{R}^{m+k} / v \perp T_{f(p)}f(M)\}$, ou seja, $T_{f(p)}f(M)^\perp$ é a fibra sobre $f(p)$ do fibrado normal de $f(M)$ em $\mathbb{R}^{m+k}$. Então, dado $v \in T_{f(p)}f(M)^\perp$, definimos a aplicação linear:

$$J_v : T_{f(p)}f(M) \longrightarrow T_{f(p)}f(M)$$

$$w \longmapsto -(\nabla_w V)^T,$$

onde ∇ denota a derivada covariante de $\mathbb{R}^{m+k}$, V é a extensão local de v , normal a $f(M)$, e $(\)^T$ significa a componente tangencial (isto é, a projeção sobre $T_{f(p)}f(M)$ do vetor dentro do parênteses). A aplicação linear J_v tem uma aplicação bilinear associada:

$$H_v : T_{f(p)}f(M) \times T_{f(p)}f(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w, u) \longmapsto \langle \bar{J}_v(w), u \rangle,$$

que por sua vez define uma forma quadrática II_v sobre $T_{f(p)}f(M)$, fazendo $II_v(w) = H_v(w, w)$.

A forma quadrática II_v sobre $T_{f(p)}f(M)$, definida acima, é chamada a segunda forma fundamental de f em p , na direção v .

Proposição II.2.6.1. Em um ponto singular p de f_v , a segunda forma fundamental de f na direção v é equivalente à matriz Hessiana de f_v , $D^2 f_v$, no sentido que, num apropriado sistema de coordenadas em p , temos

$$H_v\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) = \frac{\partial^2 f_v}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

Prova: Escolhemos um sistema de coordenadas locais de M em p como no Lema II.2.1, de tal modo que $f_v = f_k$.

Se ∇ denota a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{R}^{m+k}$, então $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left(\sum_{r=1}^m \frac{\partial}{\partial y_r} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_s} \right) = \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_s}.$$

Agora, calculando no ponto p temos: $\sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_j}(p) \cdot e_{m+s}$. Assim, a segunda forma fundamental H_v de f em $p \in M$ na direção v é dada por:

$$H_v \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) = \left\langle e_{m+k}, \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_j}(\tilde{p}) \cdot \tilde{e}_{m+s} \right\rangle = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\tilde{p})$$

II.5. A Hipersuperfície Canal de M em $\mathbb{R}^{m+k}$

Quando $k > 1$ não temos definida, de modo natural, a aplicação normal de Gauss sobre M . Entretanto, utilizamos o conceito de hipersuperfície canal de M, CM , e a definição de aplicação normal de Gauss associada a f , dados em [56] ou [49], para desenvolver uma técnica que permite obter informações geométricas sobre M a partir de CM .

Definição II.5.1: Ao fibrado normal unitário de $f(M)$ em $\mathbb{R}^{m+k}$,

$$CM = \left\{ (p, v) \in M \times S^{m+k-1} / v \text{ é ortogonal a } T_{f(p)}f(M) \right\},$$

chamamos de hipersuperfície canal de M .

Obs.II.5.2: O conjunto CM tem uma estrutura standard de variedade (ver [29]) e pode ser identificada com o bordo de uma vizinhança tubular de $f(M)$ em $\mathbb{R}^{m+k}$.

Obs.II.5.3: Podemos considerar sobre CM as seguintes projeções:

- (i) $\xi : CM \rightarrow M$, que define um fibrado de $(k-1)$ -esferas, cuja fibra sobre cada ponto p de M é uma $(k-1)$ -esfera de vetores unitários que são ortogonais a $T_{f(p)}f(M)$.
- (ii) $\Gamma : CM \rightarrow S^{m+k-1}$
 $(p, v) \mapsto v$

Definição II.5.4: A projeção $\Gamma : CM \rightarrow S^{m+k-1}$ é chamada *aplicação normal de Gauss associada a f (ou sobre M) generalizada*.

Denotemos por $\tilde{f}$ o mergulho natural de CM em $\mathbb{R}^{m+k}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f} : CM &\rightarrow \mathbb{R}^{m+k} \\ (p, v) &\mapsto \tilde{f}(p, v) = f(p) + \varepsilon v,\end{aligned}$$

onde ε é um número real positivo suficientemente pequeno e consideremos sobre CM a família de funções altura:

$$\begin{aligned}CM \times S^{m+k-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+k} \times S^{m+k-1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((p, u), v) &\longmapsto (\tilde{f}(p, u), v) \longmapsto \lambda(\tilde{f}(p, u), v) = \langle \tilde{f}(p, u), v \rangle\end{aligned}$$

Então, para cada $v \in S^{m+k-1}$ temos definida sobre a hipersuperfície canal CM , a função altura:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_v : CM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, u) &\longmapsto \tilde{f}_v(p, u) = \langle \tilde{f}(p, u), v \rangle\end{aligned}$$

e, também, uma família de funções sobre CM , parametrizada por S^{m+k-1} :

$$\begin{aligned}\Lambda(\tilde{f}) : S^{m+k-1} &\longrightarrow C^\infty(CM) \\ v &\longmapsto \Delta(\tilde{f})(v) = \tilde{f}_v.\end{aligned}$$

Proposição II.5.5: Seja $(p, v) \in CM$ um ponto crítico para a função altura $\tilde{f}_v$:

(a) p é um ponto crítico não degenerado de $f_v \Leftrightarrow (p, v)$ é um ponto regular de Γ .

Ou equivalentemente,

(a') p é um ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow (p, v)$ é um ponto singular de Γ .

Prova: Como CM é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{m+k}$, temos $D\Gamma(p, v) = D^2\tilde{f}_v(p, v)$.

$$D\Gamma(p, v) = \begin{bmatrix} & \\ D^2 f_v(p) & \\ - & - \\ & I_d \end{bmatrix}$$

Para isso, escolhemos primeiramente um sistema de coordenadas ortogonal em p , como no Lema II.2.1 e efetuamos uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, do tipo $(I_d \times r)$, onde r é uma rotação em $\mathbb{R}^k$, que faz e_{m+k} coincidir com v . Nessas condições, temos:

- Agora, consideramos um sistema de coordenadas em $v = (0, \dots, 0, 1) \in S^{m+k-1}$ identificando uma vizinhança aberta W de v em S^{m+k-1} com a imagem de W através da projeção estereográfica:

Dessa forma, $U \times W$ é uma vizinhança de (p, v) em CM . Notemos, ainda, que se $(q, u) \in U \times W$, então $\langle u, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(q) \rangle = 0$ ($\forall i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, m$). Nessas condições, Γ pode ser representada localmente por:

37

$$\left(-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) v_{m+i} - \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x), \dots, -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(x) v_{m+i} - \frac{\partial f_k}{\partial x_{r_1}}(x), v_{m+1}, \dots, v_{m+k-1} \right)$$

e, portanto,

$$D\Gamma(0,0) = \begin{bmatrix} & & & * \\ & & & \vdots \\ (-1) \cdot D^2 f_k(0) & & & \\ \hline & 0 & 0 & \vdots \\ & & & I_{(k-1) \times (k-1)} \end{bmatrix}.$$

Figura 1: Projeção estereográfica

Obs: Maiores detalhes para a escolha do sistema de coordenadas em $(p, v) \in CM$, ver [56] ou [49].

Proposição II.5.6: Se $\lambda(f)$ é um desdobramento versal de f_v em p , então $\lambda(\tilde{f})$ é um desdobramento versal de $\tilde{f}_v$, $\forall (p, v) \in CM$.

Prova: Segue do fato que, em um sistema de coord. apropriado, $D^2 \tilde{f}_v = D^2 f_v \oplus I_d$.

Obs. II.5.7: A variedade catástrofe de $(\lambda(f), (p, v))$ numa vizinhança do ponto (p, v) é dada por:

$$\begin{aligned}\Sigma(\lambda(f)) &= \{(p, v) \in M \times S^{m+k-1}/p \text{ é um ponto singular de } f_v\} \\ &= \{(p, v) \in M \times S^{m+k-1}/v \perp \mathbb{T}_{f(p)}f(M)\} = CM.\end{aligned}$$

Teorema II.5.8: Dado $f \in \mathcal{S}^7(k) \subset \text{Emb}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ com $m+k < 6$, as únicas singularidades da aplicação de Gauss $\Gamma : CM \rightarrow S^{m+k-1}$, associada a f , são as catástrofes elementares.

Prova: Se $f \in \mathcal{S}^7(k) \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{S}^7(1)$. Segue agora, do Teorema I.a.3.8.

II.5.9: Comportamento local do conjunto singular de Γ (= parabólico de CM).

Denotemos por $\mathcal{K}_c$ a função curvatura de Gauss-Kronecker de CM :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_c : CM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\longmapsto \mathcal{K}_c(p, v) = \det D\Gamma(p, v)\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{K}_c^{-1}(0) = \{(p, v) \in CM / \det D\Gamma(p, v) = 0\} =$
 $= \{(p, v) \in CM / \det D^2 f_v(p) = 0\}$ é o conjunto parabólico de CM .

Seja $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$ e $U \times W$ uma vizinhança de (p, v) , como na Prop. II.5.5. A matriz de $D\Gamma(p, v)$ é simétrica de ordem $(m+k-1)$ em cada ponto (p, v) de $U \times W$ e, portanto, diagonalizável. Os auto-valores correspondem às curvaturas principais, seus auto-vetores às direções principais de curvatura e seu determinante em cada ponto sua curvatura de Gauss-Kronecker. Então, podemos escrever:

$$D\Gamma(p, v) = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \lambda_m & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & I_{k-1 \times k-1} \end{array} \right] (p, v)$$

para $\lambda_j \in C^\infty(U \times W)$ ($j= 1, 2, \dots, m$). Dessa forma, $\lambda_j(p, v)$ são os auto-valores e denotamos os auto-vetores por $e_j(p, v)$, $e_j \in C^\infty(U \times W, \mathbb{T}\tilde{f}(U \times W))$. Então, temos:

a) $(p, v) \in \Sigma^1(\Gamma) \Leftrightarrow \text{corank } D\Gamma(p, v) = 1$. Podemos supor $\lambda_1(p, v) = 0$ e $\lambda_j(p, v) \neq 0$ para todo $j \neq 1$. Além disso, diminuindo U , se necessário, podemos assumir que λ_j não se anula em $U \times W$, para todo $j \neq 1$. Portanto, podemos definir $\Sigma^1(\Gamma)$, localmente, pela equação $\lambda_1 = 0$ e as restrições $\lambda_j(p, u) \neq 0$.

Em todos os casos genéricos, $\Sigma^1(\Gamma)$ define uma subvariedade de $U \times W$ de dimensão $\leq m + k - 2$.

Se $(q, u) \in \Sigma^1(\Gamma)$, (q, u) estará em $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ ou $\Sigma^{1,0}(\Gamma)$ conforme a direção principal de curvatura $e_1(q, u)$ estiver em $T_{(q,u)}\Sigma^1(\Gamma)$ ou não. Isto define, outra vez, uma subvariedade $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ de $\Sigma^1(\Gamma)$, de codimensão $\leq m + k - 3$. Podemos definir indutivamente $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}, 0}(\Gamma)$ e $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^i}(\Gamma)$ como segue: um ponto $(q, u) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}, 0}(\Gamma)$ está em $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}, 0}(\Gamma)$ se $e_1(q, u)$ não é tangente a $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}}(\Gamma)$ e está em $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^i}(\Gamma)$, caso contrário.

Figura 2 - Direções de curvatura e subvariedades de pontos críticos da aplicação de Gauss: a) $m = 2$, b) $m = 3$

b) Um ponto $(p, v) \in U \times W$ está em $\Sigma^2(\Gamma) \Leftrightarrow D\Gamma(p, v)$ tem corank 2 (pontos umbílicos). Como no caso a), podemos assumir que $\Sigma^2(\Gamma)$ é, localmente, dado por $\lambda_1(p, v) = \lambda_2(p, v) = 0$ e $\lambda_j(p, v) \neq 0$ se $j \neq 1, 2$. Novamente, se certa condição de

transversalidade é satisfeita, estes são subvariedades de dimensão $\leq m + k - 4$. (Observemos que pontos umbílicos elípticos ou hiperbólicos podem aparecer, genericamente, para $m + k - 1 \geq 3$). O ponto (p, v) estará $\Sigma^{2,0}(\Gamma)$, $\Sigma^{2,1}(\Gamma)$ ou $\Sigma^{2,2}(\Gamma)$ dependendo das posições das direções principais $e_1(p, v)$, $e_2(p, v)$ com respeito a $T_{(p,v)} \Sigma^2(\Gamma)$, isto é, nenhum deles está em $T_{(p,v)} \Sigma^2(\Gamma)$, somente um deles está, ou ambos estão, respectivamente.

Em geral, podemos dizer que em pontos críticos de Γ do tipo $\Sigma^{p,q}$, p curvaturas principais se anulam. E, se $\Sigma^p(\Gamma)$ é uma subvariedade, temos que as correspondentes direções principais de curvatura são transversais a esta subvariedade em pontos do tipo $\Sigma^{p,0}$ e alguns deles são tangentes em pontos do tipo $\Sigma^{p,q}$, $q \neq 0$. (ver [27] ou [50]).

II.6 Expressão Local de $\mathcal{K}_c$, quando $k = 2$.

Para $(p, v) \in CM$, escolhemos um sistema de coordenadas como na Prop. II.5.5, para obtermos: $D\Gamma(x, v_{m+1})$ como dada abaixo:

$$\begin{bmatrix} f_{1x_1x_1}v_{m+1} + f_{2x_1x_1} & f_{1x_1x_2}v_{m+1} + f_{2x_1x_2} & \cdots & f_{1x_1x_m}v_{m+1} + f_{2x_1x_m} & f_{1x_1} \\ f_{1x_1x_2}v_{m+1} + f_{2x_1x_2} & f_{1x_2x_2}v_{m+1} + f_{2x_2x_2} & \cdots & f_{1x_2x_m}v_{m+1} + f_{2x_2x_m} & f_{1x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1x_1x_m}v_{m+1} + f_{2x_1x_m} & f_{1x_2x_m}v_{m+1} + f_{2x_2x_m} & \cdots & f_{1x_mx_m}v_{m+1} + f_{2x_mx_m} & f_{1x_m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\mathcal{K}_c(x, v_{m+1}) = A_0(x)v_{m+1}^m + A_1(x)v_{m+1}^{m-1} + \dots + A_m(x)$, onde

$$A_0(x) = \det M(q_1(x))$$

$$A_i(x) = \sum \det M_i(q_1(x)) \cdot \det M_{m-i}(q_2(x)) \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

$A_m(x) = \det M(q_2(x))$, onde $M(q_i)$ é a matriz da forma quadrática q_i ($i = 1, 2$) e $M_i(q_1)$ é uma sub-matriz de $M(q_1(x))$, de ordem i ; $M_{m-i}(q_2)$ é a sub-matriz de $M(q_2(x))$, de ordem $m - i$, obtida, eliminando as i -linhas e i -colunas que compõe a

sub-matriz $M_i(q_1)$. $\sum$ denota a somatória sobre todas as possíveis submatrizes M_i e M_{m-i} , assim obtidas.

Notemos, ainda, que nesse caso ($k = 2$), a matriz $\mathcal{H}(f_v(0))$ é dada por:

$$2^2 \begin{bmatrix} a_{11}v_{m+1} + b_{11}v_{m+2} & a_{12}v_{m+1} + b_{12}v_{m+2} & \dots & a_{1m}v_{m+1} + b_{1m}v_{m+2} \\ a_{12}v_{m+1} + b_{12}v_{m+2} & a_{22}v_{m+1} + b_{22}v_{m+2} & \dots & a_{2m}v_{m+1} + b_{2m}v_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}v_{m+1} + b_{1m}v_{m+2} & a_{2m}v_{m+1} + b_{2m}v_{m+2} & \dots & a_{mm}v_{m+1} + b_{mm}v_{m+2} \end{bmatrix}$$

onde, por simplicidade de notação, substituímos a_{ij}^1 por a_{ij} e a_{ij}^2 por b_{ij} na expressão de $\mathcal{H}(f_v(0))$ em II.2. Assim,

$$\det \mathcal{H}(f_v)(0) = 2^2 \left[A_0(0)v_{m+1}^m + A_1(0)v_{m+1}^{m-1}.v_{m+2} + \dots + A_i(0)v_{m+1}^{m-i}.v_{m+2}^i + \dots + A_m(0).v_{m+2}^m \right] = 2^2.h_p(v_{m+1}, v_{m+2}) \text{ (conforme notação adotada em II.2).}$$

Proposição II.6.1: Seja $v = (0, \dots, 0, v_{m+1}, 1)$; então:

p é ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow v_{m+1} = 0$ é uma raiz de $h_p(v_{m+1}, 1) = 0$.

Além disso, $v_{m+1} = 0$ é

- (a) uma raiz simples $\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}}(p, 0) \neq 0$
- (b) uma raiz com multiplicidade $k \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}}(p, 0) = \dots = \frac{\partial^{k-1} \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^{k-1}}(p, 0) = 0$ e $\frac{\partial^k \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^k}(p, 0) \neq 0$.

Prova: Escolhemos sistemas de coordenadas em $(p, v) \in CM$ como na Prop. II.5.5, de maneira que $p = 0$ e $f_v = f_2$. Portanto $v_{m+1} = 0$ e assim, 0 é ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow v_{m+1} = 0$ é raiz de $h_p(v_{m+1}, 1) = 0$. Mas, como de II.6, $h_p(v_{m+1}, 1) = \mathcal{K}_c(p, v_{m+1})$ Então $\mathcal{K}_c(0, 0) = 0$. Agora, o resultado segue, analisando a ordem desse zero de $\mathcal{K}_c(p, v_{m+1})$.

II.7. Feixe de Formas Quadráticas e o Cone das Formas Quadráticas Degeneradas

Denotemos por $H^2(m, 1)$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau 2 em m variáveis.

Para cada $q \in H^2(m, 1)$, podemos associar uma matriz simétrica $M(q) = (a_{ij})$, que também pode ser identificado com o elemento $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mm}) \in \mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$:

$$\begin{array}{ccccc} H^2(m, 1) & \longleftrightarrow & SM\left(\frac{m(m+1)}{2}\right) & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}} \\ q & \longleftrightarrow & M(q) & \longleftrightarrow & a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mm}) \\ & & \downarrow \det & & \\ & & \mathbb{R} & & \end{array}$$

Seja $D = \{q \in H^2(m, 1) / \det M(q) = 0\}$; então, D é uma subvariedade algébrica fechada de codimensão 1 em $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, que chamaremos de cone das formas quadráticas degeneradas. Consideremos os subconjuntos: $D_i = \{q \in D / \text{rank } M(q) = \frac{m(m+1)}{2} - i\}$; nesse caso, $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{\frac{m(m+1)}{2}}$.

Um feixe de formas quadráticas é um par (q_1, q_2) de formas quadráticas em m variáveis que pode ser identificado com o subespaço de $H^2(m, 1)$ gerado por essas formas.

Notemos que, na Prop. II.6.1, se p é ponto crítico degenerado de f_v , então $q_2 = j^2 f_2(p) \in D$. Temos, ainda, nesse caso, associado ao mergulho f , o pencil de formas quadráticas (q_1, q_2) , dado pela parte quadrática de seu 2-jato. Consideremos o 2-plano (q_1, q_2) .

Lema II.7.1: O 2-plano (q_1, q_2) intercepta D em q_2 :

a) transversalmente $\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}}(0, 0) \neq 0$

b) com tangência de ordem $k-1 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}}(0, 0) = \frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^2}(\hat{0}, \hat{0}) = \dots = \frac{\partial^{k-1} \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^{k-1}}(\hat{0}, \hat{0}) = 0$

$$e \frac{\partial^k \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^k}(0,0) \neq 0. \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Prova: Basta notar que o contato entre (q_1, q_2) e D , no ponto q_2 é medido pela função:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow H^2(m, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ v_{m+1} &\longmapsto q = v_{m+1}q_1 + q_2 \longmapsto \det M(q) \quad , \quad \text{em } v_{m+1} = 0 \\ &g(v_{m+1}) \end{aligned}$$

Além disso, de II.6, segue que $g(v_{m+1}) = \mathcal{K}_c(0, v_{m+1})$ e $g(0) = \mathcal{K}_c(0, 0) = 0$ (p identificado com a origem do sistema de coordenadas). $\square$

Da Prop. II.6.1 e do Lema II.7.1, segue o seguinte:

Teorema II.7.2:

- (i) $v_{m+1} = 0$ é uma raiz simples $\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}}(0,0) \neq 0 \Leftrightarrow (q_1, q_2)$ intercepta D transversalmente em q_2 .
- (ii) $v_{m+1} = 0$ é uma raiz com multiplicidade $k \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}}(0,0) = \dots = \frac{\partial^{k-1} \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^{k-1}}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial^k \mathcal{K}_c}{\partial v_{m+1}^k}(0,0) \neq 0 \Leftrightarrow (q_1, q_2)$ encontra D em q_2 , com contato de ordem $k - 1$.

II.8. Curvas Genéricas em $\mathbb{R}^{1+k}$ ($m = 1$ e $k \geq 3$)

Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ uma curva ($I \subset \mathbb{R}$: intervalo)

Definição II.8.1:

- (i) Um $k + 1$ -referencial móvel ao longo de c é uma coleção de $k + 1$ -aplicações diferenciáveis $e_i : I \rightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ ($1 \leq i \leq k + 1$) tal que $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$, para todo

$t \in I$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Cada $e_i(t)$ é um campo vetorial ao longo de c e $e_i(t)$ considerado como um vetor em $T_{c(t)}\mathbb{R}^{1+k}$.

- (ii) Um $k+1$ -referencial móvel é chamado um $k+1$ -referencial de Frenet, ou simplesmente, referencial de Frenet da curva $c(t)$ se para todo $1 \leq r \leq 1+k$, a r -ésima derivada $c^{(r)}(t)$ de $c(t)$ está no espaço gerado pelos vetores $e_1(t), \dots, e_r(t)$.

Proposição II.8.2: Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ uma curva tal que para todo $t \in I$, os vetores $c'(t), c''(t), \dots, c^{(k)}(t)$ são linearmente independentes. Então, existe um único referencial de Frenet com as seguintes propriedades:

- i) Para $1 \leq r \leq k$, $c'(t), \dots, c^{(r)}(t)$ e $e_1(t), \dots, e_r(t)$ tem a mesma orientação.
- ii) $e_1(t), \dots, e_{k+1}(t)$ tem orientação positiva.

Prova: (Ver [30], pag. 11)

Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ uma curva satisfazendo as condições da Prop. II.8.2 e $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ seu referencial de Frenet.

Definição II.8.3: A i -ésima curvatura de c , $i = 1, \dots, k$, é a função $\theta_i(t) = \frac{\langle e'_i, e_{i+1} \rangle}{|c'|}$. (Notemos que $\theta_i(t) \neq 0 \forall t \in I$ e $\forall i = 1, \dots, k$).

Na forma matricial, podemos escrever:

$$(II.8.4) \quad \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ \vdots \\ e'_{k+1} \end{bmatrix} = |c'| \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\theta_1 & 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ 0 & -\theta_2 & 0 & \theta_3 & \dots & 0 \\ \cdot & & -\theta_3 & 0 & \dots & \\ \cdot & & & 0 & \theta_k & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\theta_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{k+1} \end{bmatrix}$$

Assim, temos: $e_1 = \frac{c'}{|c'|}$ e portanto, $c' = |c'| e_1$. Logo,

$$(II.8.5) \begin{cases} e'_1 = -\theta_1 e_2 \mid c' \mid \\ e'_2 = (-\theta_1 e_1 + \theta_2 e_3) \mid c' \mid \\ e'_3 = (-\theta_2 e_2 + \theta_3 e_4) \mid c' \mid \\ \vdots \\ e'_{k+1} = - \mid c' \mid \theta_k e_k \quad e \end{cases}$$

$$\begin{cases} c' = \mid c' \mid e_1 \\ c'' = \mid c' \mid' e_1 - \mid c' \mid^2 \theta_1 e_2 \\ c''' = (\mid c' \mid'' + \mid c' \mid^3 \theta_1^2) e_1 - (3 \mid c' \mid \mid c' \mid' \theta_1 + \mid c' \mid^2 \theta_1') e_2 - \mid c' \mid^3 \theta_1 \theta_2 e_3. \\ c^{(4)} = [(\mid c' \mid'' + \mid c' \mid^3 \theta_1^2)' + (3 \mid c' \mid^2 \mid c' \mid' \theta_1^2 + \mid c' \mid^3 \theta_1' \theta_1)] e_1 \\ \quad + [(\mid c' \mid'' + \mid c' \mid^3 \theta_1^2)(-\mid c' \mid \theta_1) + \mid c' \mid^4 \theta_1 \theta_2'] e_2 \\ \quad + [(3 \mid c' \mid \mid c' \mid' \theta_1 + \mid c' \mid^2 \theta_1') \theta_2 + (\mid c' \mid^3 \theta_1 \theta_2)'] e_3 - \mid c' \mid^3 \theta_1 \theta_2 \theta_3 e_4. \\ \vdots \\ c^{(k+1)} = [\mid c' \mid^{(k-1)} + \dots] e_1 + \dots + (\mid c' \mid^k \theta_1 \theta_2 \dots \theta_k) e_{k+1}. \end{cases}$$

A equação paramétrica da curva pode ser escrita na forma:

$$c(s) = c'(0)s + \frac{1}{2}c''(0)s^2 + \frac{1}{6}c'''(0)s^3 + \dots + \frac{1}{(k+1)!}c^{(k+1)}(0)s^{k+1} + 0(s^{k+1}).$$

Utilizando as relações (II.8.5), obtemos:

$$c(s) = (\mid c'(0) \mid s + \frac{1}{2} \mid c'(0) \mid' s^2 + \frac{1}{6} \mid c'(0) \mid'' s^3 + \dots) e_1 +$$

$$[\frac{1}{2} \mid c'(0) \mid^2 \theta_1(0)s^2 + \frac{1}{6}(3 \mid c'(0) \mid \mid c'(0) \mid' \theta_1(0) + \mid c'(0) \mid^2 \theta_1'(0))s^3 + \dots] e_2$$

$$+ (\frac{1}{6} \mid c' \mid^3 \theta_1 \theta_2 s^3 + \dots) e_3 + \dots + (\frac{1}{(k+1)!} \mid c' \mid^{k+1} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_k s^{k+1}) e_{k+1}.$$

Agora, escolhendo um novo sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^{1+k}$ de modo que o ponto em consideração seja a origem e $e_1, \dots, e_{k+1}$, vetores unitários na direção dos eixos coordenados, a curva pode ser representada pelas $k+1$ -equações:

$$(II.8.6) \begin{cases} x_1 = s + 0(s) \\ x_2 = \frac{1}{2} \theta_1(0) s^2 + 0(s^2) \\ \vdots \\ x_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \theta_1(0) \theta_2(0) \dots \theta_k(0) s^{k+1} + 0(s^{k+1}) \end{cases}$$

Seja $c: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ um mergulho e consideremos a família de funções altura sobre S^1 :

$$\begin{aligned} \lambda(c): S^1 \times S^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, v) &\longmapsto \lambda(c)(s, v) = e_v(s) = \langle c(s), v \rangle \end{aligned}$$

Para $s_0 \in S^1$ e $v \in S^k$ temos a seguinte caracterização:

Lema II.8.7:

c_v tem uma singularidade em $s_0 \Leftrightarrow v$ pertence ao subespaço $[e_2(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)]$.

Essa singularidade é de tipo

$$\begin{aligned} \text{Morse} &\Leftrightarrow v \in [e_2(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)] \text{ e } v \notin [e_3(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)]. \\ \text{dobra} &\Leftrightarrow v \in [e_3(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)] \text{ e } v \notin [e_4(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)] \\ \text{cúspide} &\Leftrightarrow v \in [e_4(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)] \text{ e } v \notin [e_5(s_0), \dots, e_{k+1}(s_0)]. \\ &\vdots \\ A_k &\Leftrightarrow v = \pm e_{k+1}(s_0) \text{ e } \theta_k(s_0) \neq 0 \\ A_{k+1} &\Leftrightarrow v = \pm e_{k+1}(s_0); \theta_k(s_0) = 0 \text{ e } \theta'_k(s_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Prova: Escolhendo um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^{1+k}$ como em (II.8.6), localmente, podemos escrever:

$$c(s) = (s + 0(s), \frac{1}{2}\theta_1(0)s^2 + 0(s^2), \dots, \frac{1}{(k+1)!}\theta_1(0)\theta_2(0)\dots\theta_k(0)s^{k+1} + 0(s^{k+1})).$$

Agora, se $v = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$, temos:

$$c_v(s) = v_1(s + 0(s)) + v_2(\frac{1}{2}\theta_1(0)s^2 + 0(s^2)) + \dots + v_{k+1}(\frac{1}{(k+1)!}\theta_1(0)\dots\theta_k(0)s^{k+1} + 0(s^{k+1})),$$

para $s \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

$$\text{Assim, } c'_v(0) = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0 \Leftrightarrow v \in [e_2, \dots, e_{k+1}].$$

$$c''_v(s) = \theta_1(s)v_2 + \dots + [\frac{1}{(k-1)!}\theta_1(0)(s)\dots\theta_k(s)s^{k-1} + \dots]v_{k+1} \Rightarrow c''_v(0) = 0 \Leftrightarrow v_2 = 0. \text{ Ainda, } c'''_v(0) = \theta_1(0)\theta_2(0)v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = 0. \text{ Portanto, a singularidade é:}$$

1. não degenerada $\Leftrightarrow v \in [e_2, \dots, e_{k+1}]$ e $v \notin [e_3, \dots, e_{k+1}]$.
2. dobra $\Leftrightarrow v_2 = 0$ e $v_3 \neq 0$, isto é, $v \in [e_3, \dots, e_{k+1}]$ e $v \notin [e_4, \dots, e_{k+1}]$.

E, assim, sucessivamente,

$$c^{(k)}_v(0) = 0 \Leftrightarrow v_2 = v_3 = \dots = v_k = 0 \Leftrightarrow v = \pm e_{k+1}$$

$$c_v^{(k+1)}(0) = \theta_1(0) \dots \theta_k(0) = 0 \Leftrightarrow \theta_k(0) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\vdots$$

$$A_k \Leftrightarrow v = \pm e_{k+1} \text{ e } \theta_k(0) \neq 0$$

$$A_{k+1} \Leftrightarrow v = \pm e_{k+1}, \theta_k(0) = 0 \text{ e } \theta'_k(0) \neq 0, \text{ pois se } \theta_k(0) = 0, \text{ então}$$

$$c_v^{(k+2)}(0) = \theta_1(0) \dots \theta_{k-1}(0) \cdot \theta'_k(0). \quad \square$$

Def. II.8.9: Seja $c : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{1+k}$.

$s \in S^1$ é um ponto não singular de ordem k se, e somente se, os vetores $(c\circ\gamma)'(s), (c\circ\gamma)''(s), \dots, (c\circ\gamma)^{(k)}(s)$, são linearmente independentes, onde $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ é uma carta de S^1 em s .

Dizemos que $c : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ é não singular de ordem k se ela o for para todo ponto $s \in S^1$. (ver [16]).

Assim, se $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ é uma curva não singular de ordem k , da Prop.II.8.2, segue que em cada ponto da curva existe um único referencial de Frenet satisfazendo (i) e (ii).

Teorema II.8.10: O conjunto das aplicações não singulares de ordem $k : c : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ é aberto e denso em $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{1+k})$.

Prova: (Ver ([19], [20])).

Obs. II.8.11: Denotemos por $S(k)$ o conjunto dos megalhos $c : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{1+k}$ não singulares de ordem k . Chamaremos de genérica, a toda curva $c \in S(k)$ tal que o germe $(\lambda(c), (s, v))$ de $\lambda(c)$, em todo ponto $(s, v) \in S^1 \times S^k$ é um desdobramento versal do germe (c_v, s) de c_v em s .

Obs. II.8.12: No caso $k = 2$ (curvas em $\mathbb{R}^3$), os pontos $s_o \in S^1$ que são singularidades de tipo A_3 para c_v (portanto v é o vetor binormal $e_3(s_o)$) correspondem a pontos de

torção nula da curva. Tais pontos são chamados de vértices, por alguns autores, devido ao fato que a projeção estereográfica transforma pontos de torção nula de uma curva esférica em vértices de sua imagem plana. Então, como consequência do teorema dos 4-vértices, segue que toda curva esférica simples e regular tem pelo menos 4 pontos de torção nula.

Por outro lado, sob o ponto de vista da Prop. II.2.3, s_o é uma singularidade degenerada $\Leftrightarrow v \in [e_2, \dots, e_{k+1}]$ e a k -upla $(v_2, \dots, v_{k+1})$, coordenadas de v relativamente à base $\{e_2, \dots, e_{k+1}\}$, é solução de $h_{s_o}(v_2, \dots, v_{k+1}) = 0$. Notemos que h_{s_o} é um polinômio linear homogêneo em k -variáveis e, portanto, $h_{s_o}^{-1}(0)$ é um hiperplano em $N_{c, s_o} c(S^1)$. Assim, em cada ponto $s \in S^1$ existe um hiperplano H_s^{k-1} de direções degeneradas, sendo a singularidade em cada uma dessas direções de tipo A_k , $k \geq 2$. (Lema II.8.7).

Analogamente, para todo $s \in S^1$, existe um $(k-2)$ -espaço de H_s , H_s^{k-2} , de direções degeneradas com singularidade de tipo A_k , $k \geq 3$. Por sua vez, H_s^{k-2} contém um $(k-3)$ -espaço de direções degeneradas com singularidades de tipo A_k , $k \geq 4$. E, assim sucessivamente, existe em H_s^2 uma única direção degenerada ($H_s^1 = [e_{k+1}(s)]$), produzindo uma singularidade A_k . Em pontos isolados da curva a singularidade nessas direções poderá ser de tipo A_{k+1} .

Podemos concluir, da Obs. II.8.11 e da Proposição II.8.2 que, se c é uma curva genérica, em cada um de seus pontos existe uma única direção degenerada $[e_{k+1}(s)]$ com singularidades do tipo A_j ($j \geq k$), sendo na maioria deles de tipo A_k .

Def. II.8.13: A essa única direção degenerada $[e_{k+1}(s)]$, correspondendo a uma singularidade $A_{j(j \geq k)}$, chamamos de binormal e o hiperplano ortogonal a $e_{k+1}(s)$ de hiperplano osculador de c em s .

II.8.14: Consideremos a hipersuperfície canal CS^1 , de S^1 , e a aplicação de Gauss generalizada, $\Gamma : CS^1 \rightarrow S^k$. Segue do Teorema II.5.10 e da Prop. II.5.5 que Γ apresenta somente singularidades de tipo Σ^1 e, portanto,

$\mathcal{K}_c^{-1}(0) = \Sigma^{1,0}(\Gamma) \cup \Sigma^{1,1,0}(\Gamma) \cup \dots \cup \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{k+1}, 0}$, onde $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0}(\Gamma)$ é uma $(k-r-1)$ -subvariedade de CS^1 ($r = 1, \dots, k-1$).

Denotemos $\bar{\xi} = \xi|_{\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0}(\Gamma)}$ ($r = 1, \dots, k-2$).

Teorema II.8.15: a) $\bar{\xi}_r : \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0} \rightarrow S^1$ é uma submersão, para todo $1 \leq r < k-2$.

b) $\bar{\xi}_{k-1} : \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-2}, 0} \rightarrow S^1$ é um difeomorfismo local. (Na realidade, $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-2}, 0}(\Gamma)$ é uma cópia de c em CS^1).

Prova: Seja $(s_o, v_o) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0}$ e consideremos um sistema de coordenadas de maneira que a curva c , localmente, seja parametrizada como em (II.8.6). Dessa forma, numa vizinhança $U \times W$ de (s_o, v_o) , $D\Gamma(s, v)$ é dada por:

$$D\Gamma(s, v) = \begin{bmatrix} -(\sum_{i=2}^{k+1} \frac{dx_i^2}{ds^2}(s) \cdot v_i) & -\frac{dx_2}{ds}(s) & -\frac{dx_3}{ds}(s) & \dots & -\frac{dx_{k+1}}{ds}(s) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\mathcal{K}_c(s, v_2, \dots, v_k) = -(\sum_{i=2}^{k+1} \frac{d^2 x_i}{ds^2}(s) \cdot v_i)$.

Denotemos por $e_1(s_o, v_o)$ o auto-vetor correspondente ao auto-valor nulo de $D\Gamma(s_o, v_o)$. Do Lema II.8.7, segue que, $(s, v) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0}(\Gamma) \Leftrightarrow v \in [e_{r+2}(s), \dots, e_{k+1}(s)] \cap S^k$ (S^k uma k -esfera em $N_{c(s)}c(S^1)$). Assim, se $(s, v) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0}(\Gamma)$, a fibra em s é $H^{k-r} \cap S^k$ ($r = 1, \dots, k-1$). De II.5.11, temos que $e_1(s_o, v_o)$ é transversal a $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0}(\Gamma)$ e, assim, transversal à fibra $H^{k-r} \cap S^k$. Logo, $\bar{\xi}$ é uma submersão em (s_o, v_o) se $r = 1, \dots, k-2$ e um difeomorfismo local se $r = k-1$. $\square$

Observemos que, no caso $r = k-1$, $e_1(s_o, v_o)$ (auto-vetor correspondente ao auto-

valor nulo de $D\Gamma(s_o, v_o)$ é tangente a $\overbrace{\sum^1, \dots, 1}^{k-1}(\Gamma)$, para cada $(s, v) \in U \times W$. E, como $\bar{\xi}_{k-1}$ é difeomorfismo local, nessas coordenadas, temos $D\bar{\xi}_{k-1}(s_o, v_o) \cdot e_1(s_o) \in T_{c(s)}c(S^1)$; ou seja, a direção de curvatura nula com contato de ordem k com CS^1 é tangente à curva c em s_o .

Teorema II.8.16: Seja $s_0 \in S^1$ e $e_1(s_0) \in T_{c(s_0)}c(S^1)$. Então, a projeção

$$p_\alpha : \begin{array}{ll} S^1 & \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ s & \longmapsto p_\alpha(s) - \langle \alpha, c(s) \rangle \alpha \end{array}$$

de c sobre o hiperplano ortogonal a $\alpha = e_1(s_0)$, tem uma singularidade de codim. ≥ 1 .

Prova: Escolhendo um sistema de coordenadas em s_0 , como em II.8.6, segue que:

$$\begin{array}{ll} c : \mathbb{R}, 0 & \longrightarrow \mathbb{R}^{1+k}, 0 \\ s & \longmapsto c(s) = (s + 0(s), \frac{1}{2}\theta_1(0)s^2 + O(s^2), \dots, \frac{1}{(k+1)!}\theta_1(0)\dots\theta_k(0)s^{k+1} + O(s^{k+1})) \end{array}$$

$$\text{e } e_1(s_0) = e_1(0) = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } p_\alpha(s) &= c(s) - \langle e_1, c(s) \rangle e_1 \\ &= (0, \frac{1}{2}\theta_1(0)s^2 + O(s^2), \dots, \frac{1}{(k+1)!}\theta_1(0)\dots\theta_k(0)s^{k+1} + O(s^{k+1})) \end{aligned}$$

tem uma singularidade de codim. ≥ 1 em s_0 .

Capítulo III

Superfícies em $\mathbb{R}^4$

Dedicamos este capítulo a análise da geometria de subvariedades em $\mathbb{R}^4$, como uma aplicação da teoria desenvolvida no capítulo anterior. Observamos que $n = 1; k = 3$ (curvas) é um caso particular do que foi desenvolvido em II.5 e $m = 3; k = 1$ (hipersuperfície) está contido no trabalho de Romero Fuster em [50]. Assim, abordamos especificamente, o caso de superfícies em $\mathbb{R}^4$ ($m = 2; k = 2$).

Utilizamos o teorema de genericidade de Looijenga para família de funções altura e uma análise das projeções da 3-variedade canal CM sobre a superfície M , a fim de obtermos uma caracterização geométrica das singularidades que aparecem nessa família. Mostramos que os pontos de inflexão de M são umbílicos para funções altura. Para um mergulho sem pontos de inflexão, relacionamos o número de componentes conexas do conjunto parabólico de CM com o do conjunto aberto de pontos hiperbólicos de M . Obtemos, ainda, o número de componentes conexas da curva parabólica de M em termos do gênero do conjunto parabólico da 3-variedade canal.

Provamos, também, que se f é um mergulho genérico de M tal que $f(M)$ é localmente convexa então $\Delta^{-1}(0)$ consiste de pontos isolados e coincide com o conjunto dos pontos de inflexão de M . Como consequência desse fato, provamos no parágrafo sobre aplicações que, genericamente, toda 2-esfera convexamente mergulhada em $\mathbb{R}^4$ tem pelo menos um ponto umbílico.

Do ponto de vista de contato e por analogia com curvas em $\mathbb{R}^3$, chamamos de

direção binormal de $p \in M$, a toda direção degenerada em p . Ao hiperplano ortogonal a essa direção denominamos hiperplano osculador. Mostramos que a cada direção binormal está associada uma direção assintótica de M em m (direção $[\theta] \subset T_{f(m)}(M)$ com contato mais degenerado com a superfície, no referido ponto, [42]). Sob este aspecto, mostramos que, se f é um mergulho genérico, a condição, $f(M)$ localmente convexa, é suficiente para garantir que todo ponto de M possui pelo menos um hiperplano osculador.

No parágrafo III.6 caracterizamos a curva $\Delta = 0$ na vizinhança de um ponto de inflexão do tipo flat (degenerado), embora tal ponto não ocorra para um mergulho genérico.

Finalizamos este capítulo apresentando um estudo sobre o comportamento genérico das linhas assintóticas para superfícies em $\mathbb{R}^4$, obtido em discussões com o Prof. Ronaldo Alves Garcia da Universidade Federal de Goiás, a quem agradecemos. Como aplicação desse estudo obtivemos para superfícies genéricas compactas e localmente convexas em $\mathbb{R}^4$ um resultado análogo ao Corolário 4.8 de Asperti em [2], que relaciona o número de umbílicos de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com sua característica de Euler. Agradecemos ao Prof. Antonio Carlos Asperti ter nos sugerido a possibilidade dessa extensão. Como consequência desse estudo concluímos que genericamente, todo mergulho convexo de uma superfície compacta M , orientável com $\chi(M) \neq 0$ em $\mathbb{R}^4$ tem pelo menos quatro pontos umbílicos, generalizando o nosso resultado anterior.

Os resultados das seções III.1 a III.5 fazem parte do artigo Geometric Characterization of the Singularities of Height Functions on Surfaces in 4-Spaces [40] submetido para publicação.

III.1. Os Invariantes de Segunda Ordem de M .

Sejam M uma superfície fechada, conexa, orientável e $f \in \text{Emb}(M, \mathbb{R}^4)$.

III.1.1. Tomamos [31] como referência básica para esta secção. Dado $p \in M$, consideremos o círculo unitário em $T_{f(p)}(M)$ parametrizado pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Denotemos por γ_θ a curva obtida interceptando $f(M)$ com o hiperplano em $f(p)$ composto pela soma direta do plano normal $N_{f(p)}f(M)$ e a reta na direção tangente representada por $[\theta]$. O *vetor curvatura* $\eta(\theta)$ de γ_θ em $f(p)$ está em $N_{f(p)}f(M)$. A torção τ_θ de γ_θ em $f(p)$ é chamada *torção normal* de $f(M)$ em $f(p)$, na direção $[\theta]$.

A segunda forma fundamental de $f(M)$ é caracterizada por duas formas quadráticas cujos coeficientes funcionais vamos denotar por (a, b, c) e (e, f, g) , respectivamente. Nesse caso, se considerarmos a secção normal γ_θ , com θ variando de 0 a 2π , o correspondente vetor curvatura $\eta(\theta)$ descreverá uma elipse em $N_{f(p)}f(M)$, chamada a *elipse de curvatura* de $f(M)$ em $f(p)$ e dada por:

$$\begin{aligned} S_1 &\longrightarrow N_{f(p)}f(M) \\ \theta &\longmapsto \eta(\theta) = (a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta)e_3 + (e \cos^2 \theta + 2f \cos \theta \sin \theta + g \sin^2 \theta)e_4 \end{aligned}$$

Esta elipse pode degenerar-se em um segmento de reta radial, caso em que $f(p)$ é conhecido como um *ponto de inflexão* da superfície. O ponto de inflexão é do tipo imaginário quando $f(p)$ não pertence à elipse de curvatura e do tipo real quando pertence. Em ambos os casos dizemos também, que o ponto de inflexão é não degenerado. Um ponto de inflexão é “flat” ou degenerado quando $f(p)$ é um ponto final da elipse de curvatura.

Uma direção $[\theta] \subset T_{f(p)}f(M)$ para a qual $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\theta)$ e $\eta(\theta)$ são paralelos é chamada uma *direção assintótica*.

III.1.2. Consideremos as seguintes funções associadas à segunda forma fundamental

de $f(M)$:

$$\Delta(p) = \frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} a & 2b & c & 0 \\ e & 2f & g & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ 0 & e & 2f & g \end{bmatrix} (p),$$

$k(p) = [(ac - b^2) + (eg - f^2)](p)$ (a curvatura de Gauss de M).

e a matriz:

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} (p).$$

Identificando $f(p)$ com a origem de $N_{f(p)}f(M)$, foi mostrado em [4] que:

Teorema III.1.3:

- a) $\Delta(p) < 0 \Rightarrow f(p)$ está fora da elipse de curvatura (tal ponto é chamado um ponto hiperbólico de M [42]).
- b) $\Delta(p) > 0 \Rightarrow f(p)$ está dentro da elipse de curvatura (ponto elíptico).
- c) $\Delta(p) = 0 \Rightarrow f(p)$ está sobre a elipse de curvatura (ponto parabólico).

Pode-se provar que em um ponto hiperbólico existem exatamente duas direções assintóticas, em um ponto parabólico uma única (a menos que o ponto seja de inflexão, caso em que todas as direções são assintóticas) e, em um ponto elíptico não existe direção assintótica.

Um estudo mais detalhado permite distinguir as seguintes possibilidades:

Proposição III.1.4:

- a) $\Delta(p) = 0, k(p) > 0 \Rightarrow f(p)$ é um ponto de inflexão do tipo imaginário.
- b) $\Delta(p) = 0, k(p) < 0$ e $\begin{cases} \text{rank } \alpha(p) = 2 \Rightarrow & \text{a elipse de curvatura é não degenerada} \\ \text{rank } \alpha(p) = 1 \Rightarrow & \text{é um ponto de inflexão do tipo real.} \end{cases}$

c) $\Delta(p) = 0$ e $k(p) = 0 \Leftrightarrow f(p)$ é um ponto de inflexão do tipo flat.

Figura 3. Elipse de curvatura

Obs: As figuras do lado direito estão representadas em $N_{f(p)}f(M)$.

Prova: A condição $\Delta(p) = 0$ implica que as duas equações quadráticas:

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \\ ex^2 + 2fxy + gy^2 = 0, \end{cases} \quad \text{possuem uma raiz comum.}$$

a) $k > 0$ significa que pelo menos uma raiz é imaginária. Como raízes imaginárias ocorrem aos pares conjugados, uma equação deve ser múltipla da outra e, portanto, a elipse é um segmento de reta radial.

Notemos que se a raiz comum é real, isto é, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $(\cos \theta, \sin \theta)$ satisfaz ambas as equações, a elipse de curvatura passa pelo ponto $f(p)$. Desde que as raízes de uma equação quadrática são ambas reais ou ambas imaginárias, elas possuem uma raiz real comum se, e somente se, as quatro raízes são reais. A condição para que isso ocorra é que $ac - b^2 \leq 0$ e $eg - f^2 \leq 0$; ou seja, $k \leq 0$.

Assim,

b) Se $k < 0$ temos:

rank $\alpha = 2 \Rightarrow$ elipse é não degenerada e passa pelo ponto $f(p)$.

rank $\alpha = 1 \Rightarrow$ elipse degenera num segmento de reta radial, passando pelo ponto.

c) Se $k = 0 \Rightarrow \text{rank } \alpha(p) \leq 1$. (Teorema 1.2, pag. 270, [32]).

Nesse caso, $\eta(\theta) = (a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta)e_3 + (e \cos^2 \theta + 2f \cos \theta \sin \theta + g \sin^2 \theta)e_4 = (e_3 + \lambda e_4)(a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) = (\sqrt{|a|} \cos \theta + \sqrt{|c|} \sin \theta)^2 (e_3 + \lambda e_4)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Como $(\sqrt{|a|} \cos \theta + \sqrt{|c|} \sin \theta)^2 \geq 0$ ($\forall \theta \in [0, 2\pi]$) a elipse de curvatura degenera num segmento de reta tendo $f(p)$ como ponto extremo.

Reciprocamente, se p é um ponto de inflexão, segue de [32], Teor. 1.2, que $\Delta = 0$ e **rank** $\alpha \leq 1$. Agora, se $k \neq 0$, de (a) ou (b), p seria um ponto de inflexão não degenerado. Portanto, devemos ter $k = 0$.

III.2. Direções Degeneradas de M

Proposição III.2.1. Seja $p \in M$:

- a) Se $\Delta(p) > 0$, então p é um ponto crítico não degenerado de f_v , $\forall v \in N_{f(p)}f(M)$.
- b) Se $\Delta(p) < 0$, então existem exatamente dois vetores $b_1, b_2 \in N_{f(p)}f(M)$, tais que p é ponto crítico degenerado de f_{b_i} ($i = 1, 2$).
- c) Se $\Delta(p) = 0$, então existe um único vetor $b \in N_{f(p)}f(M)$ tal que p é ponto crítico degenerado de f_b .

Prova: Seja:

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{aligned}$$

a expressão local do mergulho na forma de Monge.

Do Lema II.2.2, $(0,0)$ é um ponto crítico de $f_v \Leftrightarrow v = (0, 0, v_3, v_4)$. Suponhamos que a parte quadrática do 2-jato de f seja dada por: $(0, 0, ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$. Então,

$$\mathcal{H}(f_v)(0, 0) = 2 \begin{bmatrix} av_3 + ev_4 & bv_3 + fv_4 \\ bv_3 + fv_4 & cv_3 + gv_4 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\det \mathcal{H}(f_v)(0, 0) = 2^2[(ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3v_4 + (eg - f^2)v_4^2] = 2^2 \cdot h_p(v_3, v_4).$$

Agora, uma análise das possíveis raízes reais de $h_p(v_3, v_4) = 0$, permite concluir que:

a) se $(ac - b^2)(eg - f^2) - \frac{1}{4}(ag + ce - 2bf)^2 = \Delta(p) > 0$ então

$h_p(v_3, v_4) \neq 0 \quad (\forall v \in N_{f(p)}f(M))$, ou seja, $(0,0)$ é ponto crítico não degenerado de f_v , $\forall v \in N_{f(p)}f(M)$.

b) se $\Delta(p) < 0$, a equação $h_p(v_3, v_4) = 0$ admite 2 raízes reais e distintas, o que equivale a dizer que existem 2 vetores $b_1, b_2 \in N_{f(p)}f(M)$ tal que f_{b_i} tem singularidade mais degenerada que Morse em $p \quad (i = 1, 2)$.

c) se $\Delta(p) = 0$, a equação $h_p(v_3, v_4) = 0$ possui uma única raiz real com multiplicidade 2, que corresponde a um único vetor $b \in N_{f(p)}f(M)$ dando origem a uma função altura com singularidade degenerada em p .

III.2.2: Quando p é um ponto crítico degenerado de f_b , o hiperplano H_b , ortogonal a b tem contato de ordem superior com $f(M)$ em $f(p)$. Assim, por analogia com curvas em $\mathbb{R}^3$, diremos que b é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$ e H_b um hiperplano osculador. Como já vimos, uma função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma singularidade degenerada em p se, e somente se, v é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$.

Um estudo da equação $h_p(v_3, v_4) = 0$, para cada $p \in M$, decompõe M nas regiões:

$$M_0 = \{p \in M / h_p = 0 \text{ não admite raiz real } \}.$$

$$= \{p \in M / p \text{ é ponto crítico não degenerado de } f_v, \forall v \in N_{f(p)}f(M)\}.$$

$$M_1(2) = M_1 = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite uma única raiz real com multiplicidade } 2 \}.$$

$$= \{p \in M / \text{ existe uma única direção degenerada em } p\} = \Delta^{-1}(0).$$

$$M_2(1, 1) = M_2 = \{p \in M / h_p = 0 \text{ admite 2 raízes reais e distintas } \}.$$

$$= \{p \in M / \text{ existem 2 direções degeneradas em } p\}.$$

Podemos, ainda, dizer que em pontos de M_0 , $f(M)$ não possui vetor binormal. Em cada ponto de M_1 , possui um único e, em M_2 , exatamente dois vetores binormais.

Proposição III.2.3: Seja $p \in M$ tal que $\Delta(p) = k(p) = 0$. Então, f_v tem singularidade degenerada em p , para todo $v \in N_{f(p)}f(M)$.

Prova: Da Prop. III.1.4 segue que p é um ponto de inflexão degenerado e, portanto, $\text{rank } \alpha(p) = 1$. Assim, podemos escolher um sistema de coordenadas em p , de modo que f esteja na forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 & \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4, (0, 0) \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) = (x, y, ax^2 + 2bxy + cy^2 + \varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_i \in m^3(2)$ ($i = 1, 2$). Além disso, como $k = (ac - b^2) + (eg - f^2) = 0$, temos $ac - b^2 = 0$ (pois, $e=f=g=0$). Logo, qualquer que seja $v \in N_{f(p)}f(M)$, $v = (0, 0, v_3, v_4)$, temos:

$$\mathcal{H}(f_v)(0, 0) = \begin{bmatrix} 2av_3 & bv_3 \\ bv_3 & 2av_3 \end{bmatrix} e,$$

$$\det \mathcal{H}(f_v)(0, 0) = 4v_3^2(ac - b^2) = 0.$$

Corolário III.2.4: Se f é um mergulho genérico de M em $\mathbb{R}^4$, então $\Delta^{-1}(0) \cap k^{-1}(0) = \emptyset$.

III.3. O Feixe (q_1, q_2) e o Cone das Formas Quadráticas Degeneradas de $H^2(2, 1)$.

III.3.1. As formas quadráticas em 2 variáveis x, y podem ser escritas na forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$, como também, identificadas com o ponto (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.

Sob a ação do grupo $GL(2) \times GL(1)$, obtemos as seguintes 4 órbitas de $H^2(2, 1)$:

(i) O cone D compreende as formas de rank 1 (tipo parabólico).

(ii) A origem representa a forma nula de rank 0 (tipo simbólico).

O restante do espaço compreende as formas quadráticas de rank 2:

(iii) As definidas positivas que estão situadas dentro do cone (tipo elíptico).

(iv) As de semi-índice 1, que estão situadas fora do cone (tipo hiperbólico). (ver [25]).

Figura 4

Proposição III.3.2: Consideremos $p \in M$ e seja (q_1, q_2) a 2a forma fundamental de M em p .

- (a) Se $p \in M_2$, (q_1, q_2) é um plano que intercepta o cone D em duas retas.
- (b) Se $p \in M_0$, (q_1, q_2) é um plano que não intercepta o cone D .
- (c) Se $p \in M_1$ e $\text{rank } \alpha(p) = 2$, o plano (q_1, q_2) é tangente ao cone.
- (d) Se $\text{rank } \alpha(p) = 1$ e:
 - (d.1) $k(p) > 0$ então (q_1, q_2) é uma reta dentro do cone.
 - (d.2) $k(p) < 0$ então (q_1, q_2) é uma reta fora do cone.
 - (d.3) $k(p) = 0$ então (q_1, q_2) é uma reta sobre o cone.

Prova: Em $\mathbb{R}^3$, o cone D é dado pela equação:

$$y^2 = xz \quad (2)$$

Por outro lado, se $\text{rank } \alpha(p) = 2$, (q_1, q_2) é um plano passando pela origem, com equação:

$$(bg - cf)x - (ag - ce)y + (af - be)z = 0 \quad (3)$$

Assim, a intersecção de (1) e (2) resulta em:

$$(bg - cf)^2 x^2 + [2(bg - cf)(af - be) - (ag - ce)^2]xz + (af - be)^2 z^2 = 0, \quad (4)$$

que, por sua vez, representa 2 retas, uma reta ou nenhuma, caso $\tilde{\Delta} = -4(ag - ce)^2[(ac - b^2)(eg - f^2) - \frac{1}{4}(ag + ce - 2bf)^2] = -4(ag - ce)^2 \Delta$ seja maior, igual ou menor que zero, respectivamente. Ou, ainda de maneira equivalente, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$, isto é, $p \in M_2$, $p \in M_1$ ou $p \in M_0$.

Além disso, no caso $p \in M_1$, $h_p(v_3, v_4) = 0$ tem uma única raiz com multiplicidade 2 e, portanto, do Lema II.7.1 segue que o pencil é tangente a D com contato de 1ª ordem.

Agora, se $\text{rank } \alpha(p) = 1$, q_1 e q_2 são linearmente dependentes, com uma das formas não nula (digamos q_1). Assim, $ac - b^2 > 0 \Rightarrow eg - f^2 > 0$ e consequentemente $k(p) > 0$.

Ainda, $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$, λq_1 é uma forma quadrática definida positiva e, portanto está dentro do cone.

Analogamente, se $ac - b^2 < 0$ teremos $k(p) < 0$. Logo, λq_1 é uma forma quadrática semi-definida, $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$, ou seja, (q_1, q_2) está fora do cone. Se $ac - b^2 = 0$, teremos $k(p) = 0$ e λq_1 é uma forma quadrática degenerada $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$. Desse modo, $(q_1, q_2) \subset D$.

Proposição III.3.3: Sejam $f \in \text{Emb}(M, \mathbb{R}^4)$, $p \in M$ e $\pi \circ f$ a projeção de M em uma vizinhança de p em $N_p M$. Então, o 2-jato de $\pi \circ f$ em p , $j^2 \pi \circ f(p)$, é $\mathcal{K}$ -equivalente a:

- (a) (x^2, y^2) se $\Delta(p) < 0$ (ou $p \in M_2$)
- (b) $(xy, x^2 - y^2)$ se $\Delta(p) > 0$ (ou $p \in M_0$)
- (c) (xy, x^2) se $\Delta(p) = 0$ e $\text{rank } \alpha(p) = 2$ (ou $p \in M_1$)
- (d) $(x^2 + y^2, 0)$ se $\Delta(p) = 0$; $\text{rank } \alpha(p) = 1$ e $k(p) > 0$
- (e) $(xy, 0)$ se $\Delta(p) = 0$ e $k(p) < 0$
- (f) $(x^2, 0)$ se $\Delta(p) = 0$ e $k(p) = 0$

Prova: (ver [25]).

Definição III.3.4: Dizemos que L é um hiperplano suporte local de $f(M)$ em $f(p)$ se existe uma vizinhança U de p tal que $f(U)$ fica de um mesmo lado de L .

Se para todo $p \in M$, $f(M)$ possui um hiperplano suporte local em $f(p)$, dizemos que M é localmente convexa.

Corolário III.3.5: Seja $p \in M$

- (a) Se p é um ponto hiperbólico então $f(M)$ possui um hiperplano suporte local em $f(p)$ (portanto, M_2 é localmente convexa).

- (b) Se p é um ponto elíptico não existe hiperplano suporte local em $f(p)$.
- (c) Se p é um ponto parabólico, pode existir ou não um hiperplano suporte local em $f(p)$. Agora, se p é um ponto de inflexão do tipo imaginário sempre existe um hiperplano suporte local em $f(p)$. Se p é um ponto de inflexão do tipo real, não existe hiperplano suporte local em $f(p)$.

Prova: Da Proposição III.3.2 segue que:

- (a) Se p é hiperbólico então $\Delta(p) < 0$ e, portanto, o feixe (q_1, q_2) intercepta D em duas retas, transversalmente. Isto implica que existem números reais α e β tais que $q = \alpha q_1 + \beta q_2$ está dentro do cone e, portanto, q é uma forma quadrática definida positiva (ou negativa). Assim a função altura f_v onde $v = (0, 0, \alpha, \beta)$ tem um máximo (ou mínimo) local em p e, conseqüentemente, o hiperplano ortogonal a v é um hiperplano suporte local.
- (b) Se p é elíptico então $\Delta(p) > 0$ e, assim, o plano (q_1, q_2) , tem em comum com D apenas a origem. Portanto, não existe $q \in (q_1, q_2)$, com q definida positiva (ou negativa).
- (c) Se p é um ponto de inflexão do tipo imaginário, então $\text{rank} \alpha(p) = 1$ e $k(p) > 0$ o que implica que $v = (0, 0, 0, 1)$ é tal que f_v tem um máximo (ou mínimo) local em p . Se p é ponto de inflexão de tipo real, então $\text{rank} \alpha(p) = 1$ e $k(p) \leq 0$. Assim, pela forma normal do mergulho f (Prop.III.3.3) segue que não existe hiperplano suporte em $f(p)$.

Obs: Em [62], J. Weiner também obteve os resultados (a) e (b) acima, como conseqüência de uma análise da aplicação: $M \xrightarrow{\varphi} G(2, 2)$, que a cada ponto p de M associa o 2-plano $\tau_p M$, onde $G(2, 2)$ é a variedade de Grassmann dos 2-planos orientados em 4-espacos.

III.4. A 3-Variedade Canal de uma Superfície em $\mathbb{R}^4$.

Consideremos, como em II.5.1, a 3-variedade canal de M :

$$CM = \{(p, v) \in M \times S^3 / v \perp T_{f(p)}f(M)\},$$

o mergulho $\tilde{f} : CM \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ e as duas famílias de funções alturas $\lambda(f)$ e $\lambda(\tilde{f})$ definidas sobre M e CM , respectivamente. Nesse caso, se f é um mergulho genérico, as singularidades que podem aparecer nessas famílias, são dos tipos: Morse (A_1), dobra (A_2), cúspide (A_3), rabo de andorinha (A_4) e umbílicos elípticos e ou hiperbólicos ($D_4^\pm$). Além disso, da Prop. II.5.5, as singularidades da aplicação normal de Gauss $\Gamma : CM \rightarrow S^3$, podem ser descritas em termos destas.

Seja $\mathcal{K}_c : CM \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura de Gauss-Kronecker sobre CM . O conjunto parabólico, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$, de CM é o conjunto singular de Γ . De [27] segue que $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é uma superfície regular, exceto em um número finito de pontos (p, v) que são singularidades de tipo $\Sigma^{2,0}$ de Γ , ou equivalentemente, pontos umbílicos ($D_4^\pm$) de $\tilde{f}_v$.

Notemos, ainda, que:

- (a) Se $\Delta(p) > 0$, para todo $v \in N_{f(p)}f(M)$, $(p, v) \notin \mathcal{K}_c^{-1}(0)$
- (b) Se $\Delta(p) < 0$, existem 2 vetores $b_1, b_2 \in N_{f(p)}f(M)$ tais que $(p, b_i) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$ ($i = 1, 2$)
- (c) Se $\Delta(p) = 0$, existe um único $b \in N_{f(p)}f(M) : (p, b) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$.

Figura 5. Conjunto parabólico de CM

Seja $\xi : CM \rightarrow M$ a projeção natural de CM sobre M , isto é, $\xi(p, v) = p$ e denotemos por $\bar{\xi}$ sua restrição à superfície $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$. Em cada ponto de $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$ existe uma única direção principal de curvatura nula para CM . Esta direção é tangente à superfície $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$ sobre uma curva feita de pontos de tipo $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$. Esta curva é, por sua vez, tangente à direção principal de curvatura nula em pontos isolados, que são pontos de tipo $\Sigma^{1,1,0}$ de Γ .

Lema III.4.1: A imagem das direções principais de curvatura nula no conjunto $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$ sob $\bar{\xi}$ são direções assintóticas sobre M (onde usamos a identificação $M = f(M)$).

Prova: A seguinte expressão para o vetor curvatura $\eta(\theta)$ é dado em [32, pag. 265]: $\eta(\theta) = (\frac{1}{2}(a - c) \cos 2\theta + b \sin 2\theta)e_3 + (\frac{1}{2}(e - g) \cos 2\theta + f \sin 2\theta)e_4 + \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(a + c)e_3 + \frac{1}{2}(e + g)e_4$. Agora, escolhemos coordenadas para M tal que $\alpha(p) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esta escolha implica que $e_1 = (1, 0, 0, 0) \in T_{(p,v)}CM$ é a direção de curvatura nula e

$D\bar{\xi}(p, v).e_1 = e_1 \in \mathbb{T}_p M$. Então, segue facilmente que $\eta(0)e^{\frac{\partial \eta}{\partial \theta}}(0)$ são paralelos.

Seja $B = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) : p \in M_2\}$, onde $M_2 = \{p \in M / \Delta(p) < 0\}$ (definido em III.2.2).

Teorema III.4.2:

- (i) $\bar{\xi}|_B : B \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo local, mais precisamente, é um recobrimento duplo.
- (ii) $\Delta(p) = 0$ e p não é um ponto de inflexão $\Leftrightarrow$ existe $v \in S^3$ tal que (p, v) é um ponto singular tipo dobra de $\bar{\xi}$.

Prova:

- (i) $\bar{\xi}|_B$ é difeomorfismo local $\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(p, v) \neq 0$, para todo $(p, v) \in B$ (Esta é precisamente a condição para que o espaço tangente a $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ em (p, v) não seja vertical).

Recordemos que, se $(p, v) \in B$, então $p \in M_2$ e v é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$. Por outro lado, se $p \in M_2$, a equação $h_p(v_3, v_4) = 0$ possui duas raízes reais e distintas, o que equivale a existência de duas direções binormais $[b_i]$ ($i = 1, 2$) de $f(M)$ em $f(p)$; isto implica que $(p, b_i) \in B$ ($i = 1, 2$).

Assim, podemos escrever,

$$B = \{(p, b_i(p)) \mid (i = 1, 2) / p \in M_2 \text{ e } b_i(p) \text{ é um vetor binormal de } M \text{ em } p\}.$$

Segue, agora, do Teor. II.7.2 que $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(p, b_i(p)) \neq 0$, para cada $(p, b_i(p)) \in B$.

- (ii) $\Delta(p) = 0 \Leftrightarrow h_p(v_3, v_4) = 0$ possui uma única raiz real com multiplicidade 2 $\Leftrightarrow$ existe uma única direção binormal $[b]$ de $f(M)$ em $f(p)$. Como p não é ponto de inflexão, $(p, b) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$. Segue, do Teor. II.7.2, que $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(p, b) = 0$ e $\frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_3^2}(p, b) \neq 0 \Leftrightarrow (p, b)$ é ponto de dobra de $\bar{\xi}$. $\square$

Obs.III.4.3: Se denotarmos por $B_0 = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) / \Delta(p) = 0 \text{ e } p \text{ não é ponto de inflexão de } M\}$, do teorema acima, segue que B_0 é precisamente o conjunto singular de $\xi|_{\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)}$.

III.5. Caracterização Geométrica das Singularidades de Funções Altura sobre M .

Denotemos por γ_θ a secção normal de M obtida quando $[\theta]$ é uma direcção assintótica associada ao vetor binormal v , de $f(M)$ em $f(p)$, isto é, a direcção obtida pela projecção sob $D\xi$, da direcção principal de curvatura nula de CM em (p, v) . Nesse caso, chamamos γ_θ de *secção normal assintótica*.

Vimos que a função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma singularidade degenerada em $p \Leftrightarrow v$ é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$. Caracterizamos os tipos de singularidades degeneradas que, genericamente, podem aparecer em:

Teorema III.5.1: Para cada $p \in M$ tal que $\Delta(p) < 0$: p é um ponto de dobra de $f_v \Leftrightarrow \gamma$ tem torção normal não nula em p . Agora, se γ tem torção normal nula em p , temos $p \in \bar{\xi}(\Sigma^{1,1})$ e:

- (i) p é uma singularidade de cúspide de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1}(\Gamma))$.
- (ii) p é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1,0}(\Gamma))$ com contato de primeira ordem em p .

Prova: Notemos que p é ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$. Se além disso $\Delta(p) < 0$, então $(p, v) \in B$. Mais ainda, existem sistemas de coordenadas ortogonais relativamente aos quais f pode ser colocado na forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^4, 0 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots, y^2 + P_1x^3 + 3P_2x^2y + 3P_3xy^2 + P_4y^3 \\ &\quad + Q_1x^4 + 4Q_2x^3y + 8Q_3x^2y^2 + 4Q_4xy^3 + Q_5y^4 + R_1x^5 + \dots) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0 &\xrightarrow{\tilde{\kappa}_c} \mathbb{R}, 0 \\ (x, y, v_3) &\longmapsto \tilde{\kappa}_c(x, y, v_3) = A_0(x, y)v_3^2 + A_1(x, y)v_3 + A_2(x, y) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} A_0(x, y) &= \det M(q_1) = f_{1xx}(x, y) \cdot f_{1yy}(x, y) - f_{1xy}^2(x, y) \\ A_1(x, y) &= f_{1xx}(x, y) \cdot f_{2yy}(x, y) + f_{1yy}(x, y) \cdot f_{2xx}(x, y) - 2f_{1xy}(x, y) \cdot f_{2xy}(x, y) \\ A_2(x, y) &= \det M(q_2) = f_{2xx}(x, y) \cdot f_{2yy}(x, y) - f_{2xy}^2(x, y) \end{aligned}$$

Dessa maneira, $f_v = f_2$ e, a direção principal de curvatura nula de CM em (p, v) , é a direção do eixo x (e_1). Portanto, $D\bar{\xi}(p, v) \cdot e_1 = e_1 = \theta$ (Lema III.4.1).

Assim, a secção normal assintótica γ_θ pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma_\theta : \mathbb{R}, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^4, 0 \\ s &\mapsto \gamma(s) = (s, 0, as^2 + \dots, P_1s^3 + \dots) \end{aligned}$$

e tem torção não nula $\Leftrightarrow P_1 \neq 0 \Leftrightarrow p$ é ponto de dobra de f_v .

Agora, se $P_1 = 0$ temos $(p, v) \in \Sigma^{1,1}(\Gamma)$ e:

- (i) p é ponto de cúspide de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma) \Leftrightarrow$ a direção principal de curvatura nula é tangente a $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ e transversal à curva $\Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$ (conforme II.5.9).
- (ii) p é ponto rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma) \Leftrightarrow$ a direção principal de curvatura nula é tangente a $\Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$, com contato de 1a ordem (conforme II.5.9).

Como $\bar{\xi}|_{\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)} : B \rightarrow M_2$ é difeo local, θ é transversal a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1,0}(\Gamma))$ em (i) e tangente a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1,0}(\Gamma))$ com contato de 1a ordem em (ii). $\square$

A caracterização das singularidades das funções altura sobre a curva $\Delta^{-1}(0)$ é dada pelo seguinte:

Teorema III.5.2: Seja $p \in M$; $\Delta(p) = 0$ e p não é ponto de inflexão $\Leftrightarrow$ a curvatura de γ em p é nula. Além disso, se $\Delta(p) = 0$ e p não é ponto de inflexão, então:

- (a) p é uma singularidade tipo dobra de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal à curva $\Delta^{-1}(0)$ (M_1) de pontos parabólicos de M .
- (b) p é uma singularidade tipo cúspide de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$ em p com contato de ordem 1.
- (c) p é uma singularidade tipo rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$ em p , com contato de ordem 2.

Prova: Se $\Delta(p) = 0$, existe uma única direção degenerada $[v]$ de M em p .

Vamos escolher um sistema de coordenadas em p , como no Teorema III.5.1, de modo que, localmente, tenhamos:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^4, 0 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 2bxy + cy^2 + M_1x^3 + 3M_2x^2y + \dots, (a = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0; \quad b \neq 0) \\ f_2(x, y) = y^2 + P_1x^3 + 3P_2x^2y + 3P_3xy^2 + P_4y^3 + Q_1x^4 + \dots + Q_5y^4 + \\ + R_1x^5 + \dots, \quad f_2 = f_v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e \quad \mathcal{K}_c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (0, 0) &\longrightarrow \mathbb{R}, 0 \\ (x, y, v_3) &\longmapsto \mathcal{K}_c(x, y, v_3) = A_0(x, y)v_3^2 + A_1(x, y)v_3 + A_2(x, y), \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned} A_0(x, y) &= -4b^2 + 12[(cM_1 - 2bM_2)x + (cM_2 - 2bM_3)y] + \dots \\ A_1(x, y) &= 12[(M_1 + cP_1 - 2bP_2)x + (M_2 + cP_2 - 2bP_3)y] + \dots \\ A_2(x, y) &= 12(P_1x + P_2y) + [24Q_1 + 36(P_1P_3 - P_2^2)]x^2 + \\ &+ [48Q_2 + 36(P_1P_4 - P_2P_3)]xy + [24Q_3 + 36(P_2P_4 - P_3^2)]y^2 + [40R_1 + \\ &72(P_1Q_3 + P_3Q_1 - 2P_2Q_2)]x^3 + \dots \quad e, \end{aligned}$$

a direção principal de curvatura nula de CM em (p, v) é a direção do eixo x .

Assim, é fácil ver que a secção normal assintótica γ_θ tem curvatura nula $\Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Ainda, nessas coordenadas, a função $\Delta : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem a seguinte representação local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}, 0 \\ (x, y) &\longmapsto \Delta(x, y) = \frac{1}{16} \left[A_0(x, y) \cdot A_2(x, y) - \frac{1}{4} A_1^2(x, y) \right]. \end{aligned}$$

Agora, o contorno aparente de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$, é dado por:

$$(III.5.2.1) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_c(x, y, v_3) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(x, y, v_3) = 0 \end{cases} \quad e$$

Como $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(x, y, v_3) = 2A_0(x, y)v_3 + A_1(x, y) = 0 \Rightarrow v_3 = \frac{-A_1(x, y)}{2A_0(x, y)}$ (A_0 é inversível).

$$\text{Assim, } A_0(x, y) \left[\frac{-A_1(x, y)}{2A_0(x, y)} \right]^2 + A_1(x, y) \left[\frac{-A_1(x, y)}{2A_0(x, y)} \right] + A_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{-A_1^2(x, y) + 4A_0(x, y)A_2(x, y)}{4A_0(x, y)} = 0 \Leftrightarrow$$

$A_0(x, y)A_2(x, y) - \frac{1}{4}A_1^2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Delta(x, y) = 0$, isto é, a curva $\Delta = 0$ (M_1) é o contorno aparente de $\tilde{\mathcal{K}}_c^{-1} = \Sigma^2(\Gamma)$.

Portanto, podemos concluir que, se $\Delta(p) = 0$:

- (a) p é ponto de dobra de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma) \cap B_0 \Leftrightarrow P_1 \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_x(0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow \theta$ é transversal a $\Delta^{-1}(0)$ em p . Analogamente,
- (b) p é ponto de cúspide de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma) \cap B_0 \Leftrightarrow P_1 = 0; P_2 \neq 0$ e $Q_1 - \frac{3}{2}P_2^2 \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_x(0, 0) = 0; \Delta_y(0, 0) \neq 0$ e $\Delta_{xx}(0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$ em p , com contato de ordem 1.

- (c) p é ponto rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma) \cap B_0 \Leftrightarrow P_1 = 0; P_2 \neq 0; Q_1 - \frac{3}{2}P_2^2 = 0$ e $5R_1 + 9P_3Q_1 - 18P_2Q_2 \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_x(0,0) = 0; \Delta_y(0,0) \neq 0$ e $\Delta_{xx}(0,0) = 0$ e $\Delta_{xxx}(0,0) \neq 0 \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$, em p , com contato de ordem 2. $\square$

Teorema III.5.3: Seja $p \in \Delta^{-1}(0)$

p é um umbílico de $f_v \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão de M . Além disso,

- (a) p é um ponto de cruzamento normal de $\Delta^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão do tipo real.
- (b) p é um ponto isolado de $\Delta^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão do tipo imaginário.

Prova: Como $\Delta(p) = 0$, vamos escolher um sistema de coordenadas em p , como no Teorema III.5.2, com

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots \\ f_2(x, y) &= ex^2 + 2fxy + gy^2 + P_1x^3 + 3P_2x^2y + 3P_3xy^2 + P_4y^3 + \dots \quad e \quad f_2 = f_v. \end{aligned}$$

Agora, p é ponto de inflexão $\Leftrightarrow \text{rank } \alpha = 1$; nesse caso, q_1 e q_2 são linearmente dependentes e, portanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha q_1 + q_2$ seja a forma quadrática nula. Logo, compondo com uma transformação em $\mathbb{R}^4$ que seja a identidade em $\mathbb{T}_{f(p)}f(M)$ e uma rotação em $N_{f(p)}f(M)$, se necessário, podemos supor $e = f = g = 0$. Isto implica que p é um ponto umbílico de f_v . Reciprocamente, se p é um ponto umbílico de f_v , $j^2f_v(0)$ é nulo e, portanto, $\text{rank } \alpha = 1$.

Assim, genericamente, se $\Delta(p) = 0$ e p é ponto de inflexão não degenerado, podemos considerar $e = f = g = 0$ e $ac - b^2 \neq 0$. Ainda, podemos escolher uma nova carta em p , de tal sorte que $f_v(x, y) = x^3 + P_3xy^3$ ($P_3 \neq 0$). Dessa maneira, a função Δ fica com a seguinte expressão local:

$$\Delta(x, y) = 9\{(ac - b^2)(P_3x^2 - P_3^2y^2 + \dots) - \frac{1}{4}[(aP_3 + c)^2x^2 - 4bP_3(aP_3 + c)xy + 4b^2P_3^2y^2 + \dots]\}$$

Então, $\det \mathcal{H}(\Delta)(0,0) = 36[(ac - b^2)P_3^2(aP_3 - c)^2] \neq 0$. Do Lema de Morse, segue que:

- (i) $k = ac - b^2 > 0 \Leftrightarrow \det \mathcal{H}(\Delta)(0,0) > 0 \Leftrightarrow \Delta^{-1}(0)$ se reduz a um ponto.
- (ii) $k < 0 \Leftrightarrow \det \mathcal{H}(\Delta)(0,0) < 0 \Leftrightarrow \Delta^{-1}(0)$ é uma curva com auto-intersecção transversal em p .

Notemos que, de III.5.2.1 podemos concluir no caso (i) que, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é difeomorfo ao cone $v_3^2 - x^2 - y^2 = 0$ e, no caso (ii), difeomorfo ao cone $v_3^2 + x^2 - y^2 = 0$ (ver figura [6]).

Figura 6

(a) e (c) mostram um umbílico hiperbólico, (b) e (d) mostram um umbílico elíptico. As linhas tracejadas representam a curva de cúspides para função altura.

Corolário III.5.4: Genericamente, cada uma das componentes de $\Delta^{-1}(0)$ podem ser de um dos seguintes tipos:

- (i) curva mergulhada
- (ii) curva imersa com um número finito de auto-intersecções transversais, e
- (iii) ponto isolado.

Corolário III.5.5: Dado um mergulho genérico f de M em $\mathbb{R}^4$ sem pontos de inflexão, o conjunto dos pontos parabólicos, $\Delta^{-1}(0)$, é uma união disjunta de círculos.

Corolário III.5.6: Dado um mergulho genérico f de M em $\mathbb{R}^4$ sem pontos de inflexão, então:

- (i) $H_0(M_2) = H_0(\mathcal{K}_c^{-1}(0))$
- (ii) $H_0(\Delta^{-1}(0)) = H_0(\mathcal{K}_c^{-1}) + g(\mathcal{K}_c^{-1}(0))$, onde g denota o genus e H_j o j -ésimo grupo de homologia com coeficientes inteiros.

Prova: Nesse caso, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é uma superfície fechada e cada uma de suas componentes conexas se projeta sobre uma componente conexa de M_2 . Além disso, cada componente com genus g de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ dá origem a $g + 1$ componentes de $\Delta^{-1}(0)$.

Corolário III.5.7: Se f é um mergulho genérico de M em $\mathbb{R}^4$ de tal maneira que $f(M)$ é localmente convexa, então $\Delta \leq 0$ e $\Delta^{-1}(0)$ consiste de pontos de inflexão isolados de M .

Prova: Se $f(M)$ é localmente convexa, do Corolário III.3.5 podemos concluir que $\Delta(p) \leq 0$, $\forall p \in M$. Além disso, se $\Delta(p) = 0$ uma análise dos modelos locais discutidos no Teorema III.5.3, permite concluir que p é um ponto de inflexão de M , do tipo imaginário.

Corolário III.5.8: Se f é um mergulho genérico de M em $\mathbb{R}^4$ de tal maneira que $f(M)$ é localmente convexa então existe pelo menos um hiperplano osculador em cada ponto de M .

Obs. III.5.9: Em [42], D. Mond estudou contatos genéricos de superfícies com retas em 4-espacos. Algumas de suas conclusões estão relacionadas com as nossas. Por exemplo, podemos identificar a sua curva de direções assintóticas sem torção, com a curva de singularidades de cúspides para funções altura. Como ele, obtemos que a

curva parabólica de M tem auto-intersecções transversais em pontos de inflexão de M (Teorema III.5.3), porém, seu estudo exclui os pontos de inflexão isolados que podem aparecer fora dessa curva.

Segue ainda, do trabalho de D. Mond que a projeção

$$\begin{aligned} h_\alpha : M &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto h_\alpha(x) = f(x) - \langle f(x), \alpha \rangle \alpha, \end{aligned}$$

de M sobre o hiperplano ortogonal a α é tal que:

- a) Se $\Delta(p) < 0$ e
 - a.1) α é uma direção tangente, mas não assintótica em p , então h_α é um cross-cap em p , isto é, h_α é $\mathcal{A}$ -equivalente a (y, x^2, xy)
 - a.2) α é uma direção assintótica em p , então h_α tem uma singularidade tipo S_k em p . (h_α é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(y, x^2, y^3 + x^{k+1}y)$)
- b) Se $\Delta(p) = 0$; $\text{rank}\alpha(p) = 2$ e a única direção assintótica não é tangente à curva $\Delta^{-1}(0)$ em p , então h_α tem uma singularidade H_k para algum $k \geq 2$, h_α é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(y, xy + x^{3k-1}, x^3)$

III.6: Uma Descrição de um Ponto de Inflexão Degenerado de M .

Embora, genericamente, não ocorra ponto de inflexão degenerado, vamos analisar a vizinhança de um tal ponto, para um mergulho não genérico de M em $\mathbb{R}^4$. Esta análise será utilizada no estudo de 3-variedades no $\mathbb{R}^5$ (IV.b.3.4). Recordemos que p é um ponto de inflexão degenerado $\Leftrightarrow \Delta(p) = k(p) = 0$.

Teorema III.6.1: Seja $p \in M$ um ponto de inflexão degenerado dando origem a um umbílico parabólico para a correspondente função altura. Então, numa vizinhança de p , a curva $\Delta^{-1}(0)$ é difeomorfa a uma das seguintes curvas:

(i) $y^2 \pm x^k = 0$

(ii) $x^3 + xy^2 = 0$

(iii) $x^3 - xy^2 = 0$

(iv) $x^4 + xy^2 = 0$

Prova: Temos p um ponto de inflexão degenerado $\Leftrightarrow$ existe $v \in N_{f(p)}f(M)$ tal que p é um ponto umbílico parabólico de f_v . Para esse vetor v , procedemos como na prova do Teorema III.5.3 para escolher um sistema de coordenadas com:

$$f_1(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + M_1x^3 + 3M_2x^2y + 3M_3xy^2 + M_4y^3 + \dots \quad (ac - b^2 = 0)$$

$$\text{e } f_2(x, y) = x^4 + P_3xy^2 \quad (P_3 \neq 0)$$

Nesse caso,

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{16} \left\{ (12[(cM_1 - 2bM_2)x + (cM_2 - 2bM_3)y] + \dots)(4P_3[6x^3 - P_3y^2]) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} [12(aP_3x - 2bP_3y) + (36P_3M_1 + 24aQ_3 + 24cQ_1 - 48bQ_2)x^2 + \dots]^2 \right\}$$

Isto implica que $\det \mathcal{H}(\Delta)(0, 0) = 0$. Então, temos 2 casos a analisar:

(a) $\text{rank } \mathcal{H}(\Delta)(0, 0) = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Suponhamos $b \neq 0$; então, pelo Splitting-Lema segue que, $\Delta(x, y)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $y^2 + \gamma(x)$, $\gamma \in m^3(1)$. E, desde que $\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(0) \neq 0$, $\Delta(x, y) \sim y^2 \pm x^k$ ($k \geq 3$).

(b) $\text{rank } \mathcal{H}(\Delta)(0, 0) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Nesse caso, $\Delta(x, y)$ é equivalente a:

$(b_1) \quad x^3 + xy^2, (b_2) \quad x^3 - xy^2$ ou $(b_3) \quad x^4 + xy^2$, dependendo do 3-jato de Δ . (ver figura 7). $\square$

Figura 7

Obs. III.6.2: Observemos que a função $\Delta(x, y)$ é o discriminante da equação quadrática em v_3 :

$$\mathcal{K}_c(x, y, v_3) = A_0(x, y)v_3^2 + A_1(x, y)v_3 + A_2(x, y) = 0.$$

Dessa maneira, numa vizinhança U da origem, se $(x, y) \in U$ e $\Delta(x, y) > 0$, não existe v_3 tal que $(x, y, v_3) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$.

Sobre a curva $\Delta^{-1}(0)$, a cada (x, y) corresponde um único ponto $(x, y, v_3) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$ e $\Delta(x, y) < 0$ correspondem 2 pontos (x, y, v_3') e (x, y, v_3'') em $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$. Isto implica no caso (i), por exemplo, que numa vizinhança de um ponto tipo $\Sigma^{2,1,0}(\Gamma)$, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é

difeomorfa a uma superfície obtida pela rotação da cúspide em torno do eixo x . (fig. 8)

Figura 8. Ponto de inflexão degenerado

III.7. Aplicações

III.7.1. Little provou em [32] que mergulhos compactos de superfícies com $\chi(M) \neq 0$ em $\mathbb{R}^4$ tem pontos de inflexão ou pontos onde a curvatura média se anula. Se M está contida em S^3 , ele observa que a curvatura média nunca se anula e, portanto, o mergulho tem necessariamente pontos de inflexão. No teorema abaixo, usando os resultados obtidos neste capítulo, generalizamos esta última afirmação para mergulhos genéricos convexos da esfera S^2 .

Teorema III.7.1.1: Seja $f : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho genérico convexo. Então, S^2 tem pelo menos um ponto de inflexão.

Prova: Suponhamos que não exista ponto de inflexão em S^2 . Então, aplicando o Corolário III.5.6 temos que $H_0(S^2) = H_0(\mathcal{K}_c^{-1}(0))(*)$. Como f é um mergulho genérico e convexo, utilizando o Cor. III.5.7 e a hipótese de ausência de pontos de inflexão, concluimos que $\Delta^{-1}(0) = \emptyset$. Logo, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é difeomorfa a duas cópias disjuntas de S^2 , contrariando (*).

III.7.2. Linhas Assintóticas de Superfícies em $\mathbb{R}^4$

Os resultados que apresentamos a seguir surgiram de discussões com o Prof. Ronaldo Alves Garcia, da Universidade Federal de Goiás.

Iniciamos calculando a expressão local para as equações diferenciais das linhas assintóticas para superfícies em $\mathbb{R}^4$ que, em geral, não são encontradas nos textos de Geometria Diferencial.

Seja $p \in M$ e suponhamos o mergulho f localmente na forma de Monge:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 & \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4, 0 \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) , \end{aligned}$$

com a 2ª forma fundamental de $f(M)$ caracterizada pelas duas formas quadráticas: $q_1(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ e $q_2(x, y) = ex^2 + 2fxy + cy^2$.

$$\begin{aligned} \text{Consideremos } \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2, 0 \\ s & \mapsto \alpha(s) = (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva assintótica de M na vizinhança coordenada de p .

Assim, temos:

$$\begin{cases} \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\gamma=f \circ \alpha} \mathbb{R}^4, 0 \\ s & \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s), f_1(x(s), y(s)), f_2(x(s), y(s))). \end{cases}$$

Então, pela definição de direção assintótica, $\eta(\theta(s)) = \lambda \frac{d\eta}{d\theta}(\theta(s))$, $\forall s \in (\mathbb{R}, 0)$, onde como antes, $\eta(\theta(s))$ é o vetor curvatura normal no ponto $\alpha(s)$ na direção $\theta(s)$.

Vamos calcular $\eta(\theta(s))$ para cada $s \in (\mathbb{R}, 0)$. Observemos que em cada $(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0)$,

$$T_{f(x,y)}f(M) = [(1, 0, f_{1x}(x, y), f_{2x}(x, y)); (0, 1, f_{1y}(x, y), f_{2y}(x, y))]$$

$$N_{f(x,y)}f(M) = [g_3; -g_4] \text{ onde } g_3(x, y) = (-f_{1x}(x, y), -f_{1y}(x, y), 1, 0) \text{ e}$$

$$g_4(x, y) = (f_{2x} + f_{1y}[f_{2x}f_{1y} - f_{1x}f_{2y}], f_{2y} + f_{1x}[f_{1x}f_{2y} - f_{1y}f_{2x}], f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y},$$

$-(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2))$, onde no 2º membro da equação acima e daqui por diante, por simplicidade, suprimimos a referência ao ponto (x, y) .

Denotemos por $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base de $\mathbb{R}_{f(x,y)}^4$ dada por $e_i = \frac{g_i}{\|g_i\|}$ ($i = 1, \dots, 3$) e $e_4 = \frac{-g_4}{\|g_4\|}$.

Como $\dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s), f_{1x}(\alpha(s))\dot{x}(s) + f_{1y}(\alpha(s))\dot{y}(s), f_{2x}(\alpha(s))\dot{x}(s) + f_{2y}(\alpha(s))\dot{y}(s))$, e

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(s) = & (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s), f_{1xx}(\alpha(s))\dot{x}(s))^2 + 2f_{1xy}(\alpha(s))\dot{x}(s)\dot{y}(s) + f_{1x}(\alpha(s))\ddot{x}(s) \\ & + f_{1yy}(\alpha(s))\ddot{y}(s), f_{2xx}(\alpha(s))\dot{x}(s))^2 + 2f_{2xy}(\alpha(s))\dot{x}(s)\dot{y}(s) + f_{2y}(\alpha(s))\dot{y}(s))^2 + \\ & + f_{2x}(\alpha(s))\ddot{x}(s) + f_{2y}(\alpha(s))\ddot{y}(s)), \end{aligned}$$

a projeção de $\ddot{\gamma}(s)$ em $N_{\gamma(s)}f(M)$ é dado por:

$$\eta(\theta(s)) = \langle \ddot{\gamma}(s), e_3(s) \rangle e_3(s) + \langle \ddot{\gamma}(s), e_4(s) \rangle e_4(s).$$

$$= \frac{1}{\|f_3\|} (f_{1xx}(\dot{x}(s))^2 + 2f_{1xy}(\dot{x}(s))(\dot{y}(s)) + f_{1yy}(\dot{y}(s))^2) \mathbf{e}_3(s) - \frac{1}{\|f_4\|} [A(\dot{x}(s))^2 + 2B(\dot{x}(s))(\dot{y}(s)) + C(\dot{y}(s))^2] \mathbf{e}_4(s), \text{ onde}$$

$$A = f_{1xx}(f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y}) - f_{2xx}(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2)$$

$$B = f_{1xy}(f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y}) - f_{2xy}(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2)$$

$$C = f_{1yy}(f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y}) - f_{2yy}(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2)$$

$$\text{Portanto, } \frac{d\eta}{d\theta}(\theta(s)) = \frac{1}{\|f_3\|} [(f_{1yy} - f_{1xx})\dot{x}(s)\dot{y}(s) + f_{1xy}[(\dot{x}(s))^2 - (\dot{y}(s))^2]] \mathbf{e}_3(s) - \frac{2}{\|f_4\|} [(C - A)\dot{x}(s)\dot{y}(s) + B[(\dot{x}(s))^2 - (\dot{y}(s))^2]] \mathbf{e}_4(s).$$

Agora, eliminando λ em $\eta(\theta(s)) = \lambda \frac{d\eta}{d\theta}(\theta(s))$, obtemos a equação:

$$\begin{aligned} & (f_{1xy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2xy})(\dot{x})^4 + (f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy})(\dot{x})^3(\dot{y}) + [(f_{2xx} - f_{2yy})f_{1xy} - \\ & (f_{1xx} - f_{1yy})f_{2xy}](\dot{x})^2(\dot{y})^2 + (f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy})(\dot{x})(\dot{y})^3 + (f_{1yy}f_{2xy} - f_{1xy}f_{2yy})(\dot{y})^4 = 0 \end{aligned}$$

Lembrando que $\dot{x}(s) = \cos \theta(s)$ e $\dot{y}(s) = \sin \theta(s)$ e utilizando, ainda, as substi-

tuições: $\cos^3 \theta \sin \theta = (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \sin \theta$, $\cos^4 \theta = (1 - \sin^2 \theta) \cos^2 \theta$ e $\sin^4 \theta = (1 - \cos^2 \theta)$, temos:

III.7.2.1: $(f_{1xy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2xy}) \cos^2 \theta + (f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy}) \cos \theta \sin \theta + (f_{1yy}f_{2xy} - f_{1xy}f_{2yy}) \sin^2 \theta$, que é a equação procurada.

O estudo do comportamento genérico das linhas assintóticas de superfícies em $\mathbb{R}^4$ é uma questão interessante. Para superfícies em $\mathbb{R}^3$ alguns resultados aparecem em [17] e [23] e, um tratamento mais completo deverá aparecer em [24]. Neste trabalho, vamos apenas considerar o comportamento de linhas assintóticas de superfícies em $\mathbb{R}^4$, numa vizinhança de pontos umbílicos isolados. A Análise é análoga a do ponto umbílico para superfície em $\mathbb{R}^3$.

Como vimos em III.5.3, um ponto de inflexão genérico do tipo imaginário tem uma das seguintes formas normais:

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y) &\mapsto (x, y, ax^2 + 2bxy + cy^2 + M_1x^3 + 3M_2x^2y + 3M_3xy^2 + M_4y^3 + \dots, x^3 + \varepsilon xy^2) \end{aligned}$$

com $\varepsilon = \pm 1$.

Assim, a equação III.7.1.1 acima, para estas formas normais fica:

$$[3bx - a\varepsilon y + 9M_2x^2 + 3(3M_3 - \varepsilon M_1)xy - 3M_2\varepsilon y^2 + \dots](\dot{x})^2 + [(3c - a\varepsilon)x + 3(3M_3 - \varepsilon M_1)x^2 + 3(3M_4 - \varepsilon)xy + \dots]\dot{x}\dot{y} + [\varepsilon(-bx + cy - 3M_2x^2 + 3M_4y^2 + \dots)](\dot{y})^2 = 0. \quad (III.7.2.2)$$

O comportamento das linhas assintóticas na vizinhança desse ponto é descrito na figura 9.

Figura 9: (a) hiperbólico

(b) elíptico

Lema III.7.2.3: O índice da singularidade de (III.7.2.2) é $-\frac{1}{2}$ para o umbílico hiperbólico e $+\frac{1}{2}$ para o umbílico elíptico.

Prova: Basta usar a fórmula de Poincaré [57]: índice do ponto singular = $1 + \frac{e-i}{2}$, onde

e = número de setores elípticos.

h = número de setores hiperbólicos.

Nos exemplos acima, todos os setores são hiperbólicos.

Como aplicação deste estudo é possível obter para superfícies localmente convexas em $\mathbb{R}^4$, um resultado análogo ao de Feldman em [21], para superfícies em $\mathbb{R}^3$, posteriormente generealizado para superfícies em 3-variedades por Asperti em [2], que relaciona o número de pontos umbílicos com a característica de Euler de M .

Observemos que, no caso de superfície em $\mathbb{R}^4$ a hipótese de convexidade local é necessária para garantir que os pontos de inflexão são isolados. Recordamos, ainda, que p é ponto de inflexão de $M \Leftrightarrow p$ é umbílico de f_v , onde v é a direção binormal em p .

Teorema III.7.2.4: Seja $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho genérico e localmente convexo

de uma superfície compacta e orientável. Então, $2 \mid \chi(M) \leq \# \text{ pontos umbílicos}$.

Prova: Seja V um campo de linhas assintóticas em M . Como f é um mergulho genérico localmente convexo, do Cor. III.5.7 segue que M possui somente pontos de inflexão do tipo imaginário, $p_1, \dots, p_n$. Mas, as únicas singularidades de V são os pontos de inflexão de M . Logo, do Teorema de Poincaré - Hopf temos que $\chi(M) = \sum_{i=1}^n \text{índice } V(p_i)$. Como $\chi(M)$ é um número inteiro, do Lema III.7.2.3 segue que

$$|\chi(M)| \leq \sum_{i=1}^n |\text{índice } V(p_i)| = \frac{\# \text{ umbílicos}}{2}.$$

Corolário III.7.2.5: Todo mergulho genérico de uma M superfície compacta, orientável, localmente convexa com $\chi(M) \neq 0$ tem pelo menos 4 pontos umbílicos.

Capítulo IV

Subvariedades em $\mathbb{R}^5$

Na linha de estudos desenvolvida no capítulo III, consideramos aqui, contatos genéricos de superfícies e 3-variedades mergulhadas em $\mathbb{R}^5$ com hiperplanos. Como antes, isso é feito analisando as singularidades genéricas de famílias de funções altura sobre as mesmas.

a) Para uma superfície M em $\mathbb{R}^5$, mostramos que ela decompõe-se em:

(i) duas regiões abertas:

$$M_0 = \{p \in M / \nexists \text{ direção degenerada em } p\} \text{ e}$$

$$M_c = \{p \in M / \exists \text{ um cone } c_p, \text{ em } N_{f(p)}f(M), \text{ de direções degeneradas em } p\}.$$

(ii) subconjuntos, localmente definidos como curvas algébricas:

$$C_1 = \{p \in M / \exists! \text{ direção degenerada em } p\}$$

$$C_2 = \{p \in M / \text{ existem duas circunferências máximas na esfera unitária de } N_{f(p)}f(M), \text{ de direções degeneradas em } p\}$$

(iii) pontos isolados

$$C_{1s} = \{p \in M / \exists! \text{ circunferência máxima na esfera unitária de } N_{f(p)}f(M), \text{ de direções degeneradas em } p\}.$$

Além disso, identificamos os pontos sobre $\mathcal{C}_{2s}, \mathcal{C}_{1s}$ e $\mathcal{C}_1$ com os pontos 2-singulares ou pontos de inflexão de M , no sentido de Feldman [20]. Provamos, ainda, que em todo ponto de $\mathcal{C}_{2s}, \mathcal{C}_{1s}$ ou $\mathcal{C}_1$ existe uma única direção degenerada $[v]$ tal que p é uma singularidade tipo umbílico de f_v e que, portanto, são imagens sob ξ , da curva de pontos Σ^2 de Γ .

Sob a hipótese $\Sigma^{1,1}(\Gamma) \neq \emptyset$, mostramos que existe um aberto $(M_c)_2$ de M_c tal que cada um de seus pontos possui exatamente duas direções dando origem a funções altura com singularidade mais degenerada que dobra. Em termos de contato, isso significa que o hiperplano ortogonal a uma dessas direções tem contato maior com $f(M)$ nesse ponto. Por analogia com curvas em $\mathbb{R}^3$, chamamos tais direções de binormais e o correspondente hiperplano de osculador.

Provamos, também, no Teorema IV.a.2 que as aplicações: $\bar{\xi}|_{B_c}$ é submersão; $\bar{\xi}|_{(B_c)_2}$ é difeomorfismo local e que $\Delta_c^{-1}(0)$ é precisamente o contorno aparente de $(B_c)_2$. Isso nos permite chamar de direção assintótica de $f(M)$ em $f(p)$ à direção $[\theta] \subset T_{f(p)}f(M)$, imagem por $D\bar{\xi}$ da única direção principal de curvatura nula. Concluimos, do Teorema IV.a.2.3 que, se $[\theta]$ é uma direção assintótica em p , então a projeção de M sobre o hiperplano ortogonal a θ tem uma singularidade de codimensão maior ou igual a 2, em p .

Concluimos esse estudo caracterizando geometricamente as singularidades mais degeneradas que dobra que podem aparecer genericamente. Mostramos, por exemplo que se v é uma direção binormal, p é um ponto de cúspide de f_v se, e somente se, a 3ª curvatura da seção normal assintótica é não nula. Caso contrário, a singularidade é mais degenerada. Podemos ver, também, que se $\Delta_c^{-1}(0) \cap \mathcal{C}_{2s} = \{p\}$ (ou $\Delta_c^{-1}(0) \cap \mathcal{C}_{1s} = \{p\}$), p é um ponto de inflexão do tipo real $\Leftrightarrow p$ é um ponto de auto-intersecção de $\Delta_c^{-1}(0)$. p é um ponto de inflexão do tipo imaginário $\Leftrightarrow p$ é um ponto isolado de $\Delta_c^{-1}(0)$. p é um ponto de inflexão degenerado $\Leftrightarrow p$ é um ponto singular (cúspide) de $\Delta_c^{-1}(0)$.

b) 3-variedade M em $\mathbb{R}^5$.

Classificamos os pontos de M de acordo com o número de direções em que o germe da correspondente função altura é mais degenerada que Morse. Observamos que, nesse caso, o conjunto de tais direções é discreto e finito, uma vez que a codimensão de M é igual a 2. A uma tal direção $[b]$ chamamos de binormal e o hiperplano ortogonal a b e passando pelo ponto, de hiperplano osculador da 3-variedade, nesse ponto. Provamos, então que existe pelo menos uma e no máximo 3 binormais em cada ponto de M .

Distinguimos, também, os diferentes pontos de M segundo o tipo de degenerecência das funções alturas nas direções binormais. Por exemplo, mostramos que a função altura numa direção binormal tem uma singularidade tipo dobra se, e somente se, a torção da secção normal assintótica da 3-variedade não se anula no dado ponto. Caso contrário, a singularidade é mais degenerada. Caracterizamos, ainda, geometricamente os umbílicos das funções altura.

Por meio da projeção $\xi : CM \rightarrow M$ associamos a cada direção binormal no ponto, uma direção tangente que chamamos de direção assintótica. Como David Mond fez para superfícies em $\mathbb{R}^4$ [42], mostramos que o contato dessas direções tangentes com a 3-variedade M são de ordem superior, o que mostra que as projeções de M sobre o hiperplano osculador é mais degenerado que as correspondentes projeções em outras direções tangentes.

O estudo desenvolvido em IV.b faz parte do artigo “Geometry and singularities of orthogonal projections of 3-manifolds in $\mathbb{R}^5$ [41], submetido para publicação.

a. Superfícies em $\mathbb{R}^5$

Consideremos M uma superfície fechada, conexa, orientável e $f \in \text{Emb}(M, \mathbb{R}^5)$.

IV.a.1. Direções Degeneradas de M

Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, 0 \quad \text{dada por:} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \end{aligned}$$

a representação local de f , na forma de Monge. Nessas coordenadas, a função altura na direção $v \in \mathbb{R}^5$, tem a forma local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}, 0 \\ (x, y) &\longmapsto f_v(x, y) = v_1x + v_2y + v_3f_1(x, y) + v_4f_2(x, y) + v_5f_3(x, y). \end{aligned}$$

Se denotarmos a parte quadrática do 2-jato de f por:

$$\begin{aligned} q_1(x, y) &= a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ q_2(x, y) &= b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 \\ q_3(x, y) &= c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2 \end{aligned}$$

a matriz Hessiana de f_v em $(0, 0)$, $\mathcal{H}(f_v)(0, 0)$, é dada por:

$$\mathcal{H}(f_v)(0, 0) = 2 \begin{bmatrix} a_{20}v_3 + b_{20}v_4 + c_{20}v_5 & a_{11}v_3 + b_{11}v_4 + c_{11}v_5 \\ a_{11}v_3 + b_{11}v_4 + c_{11}v_5 & a_{02}v_3 + b_{02}v_4 + c_{02}v_5 \end{bmatrix}$$

e $\det \mathcal{H}(f_v)(0, 0) = 4[(a_{20}a_{02} - a_{11}^2)v_3^2 + (a_{20}b_{02} + b_{20}a_{02} - 2a_{11}b_{11})v_3v_4 + (b_{20}b_{02} - b_{11}^2)v_4^2 + (a_{20}c_{02} + c_{20}a_{02} - 2a_{11}c_{11})v_3v_5 + (b_{20}c_{02} + b_{02}c_{20} - 2b_{11}c_{11})v_4v_5 + (c_{20}c_{02} - c_{11}^2)v_5^2] = h_p(v_3, v_4, v_5)$ (forma quadrática em 3 variáveis).

Portanto, segue, imediatamente, o seguinte

Lema IV.a.1.1: p é um ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow v \in N_{f(p)}f(M)$ e a terna (v_3, v_4, v_5) das coordenadas de v em $N_{f(p)}f(M)$ é uma solução de $h_p = 0$.

Como na Obs.II.2.4, se p é um ponto crítico degenerado de f_v , $[v]$ é chamada uma direção degenerada em p .

Seja $Q = (q_{ij})$ a matriz associada à forma quadrática $h_p(v_3, v_4, v_5)$, dada abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{20}a_{02} - a_{11}^2 & \frac{1}{2}(a_{10}b_{02} + b_{20}a_{02} - 2a_{11}b_{11}) & \frac{1}{2}(a_{20}c_{02} + c_{20}a_{02} - 2a_{11}c_{11}) \\ \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + b_{20}a_{02} - 2a_{11}b_{11}) & b_{20}b_{02} - b_{11}^2 & \frac{1}{2}(b_{20}c_{02} + b_{02}c_{20} - 2b_{11}c_{11}) \\ \frac{1}{2}(a_{20}c_{02} + c_{20}a_{02} - 2a_{11}c_{11}) & \frac{1}{2}(b_{20}c_{02} + b_{02}c_{20} - 2b_{11}c_{11}) & c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \end{bmatrix}$$

e denotemos por:

$$IV.a.1.2. \begin{cases} Q_1 = \text{traço } Q \\ Q_2 = \sum_{i=1}^3 |Q_{ii}|, \text{ onde } |Q_{ii}| \text{ é o menor cofator do elemento } q_{ii} \in Q. \\ Q_3 = \det Q \end{cases}$$

Lema IV.a.1.3: Seja p um ponto crítico de f_v . Então,

- (a) Se $Q_2(p) > 0$ e $Q_1(p).Q_3(p) > 0$, não existe direção degenerada em p .
- (b) Se $Q_2(p)$ e $Q_1(p).Q_3(p)$ não são ambos positivos, existe um cone c_p em $N_{f(p)}f(M)$, de direções degeneradas em p .
- (c) Se $Q_3(p) = 0$, $\text{rank } Q(p) = 2$ e
 - (c.1) $Q_2(p) < 0$, existem 2 planos não paralelos em $N_{f(p)}f(M)$ passando por $f(p)$, de direções degeneradas em p .
 - (c.2) $Q_2(p) > 0$, existe uma única direção degenerada em p .
- (d) Se $Q_3(p) = 0$ e $\text{rank } Q(p) = 1$, existe um plano por $f(p)$ em $N_{f(p)}f(M)$, de direções degeneradas em p .

Prova: As condições impostas sobre os invariantes $Q_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$), são suficientes para determinar o tipo da forma quadrática $h_p(v_3, v_4, v_5)$ (Classificação de formas quadráticas em 3 variáveis). Consequentemente, com uma análise de $h_p^{-1}(0)$, em cada caso, e levando-se em consideração o Lema IV.a.1, obtemos o resultado desejado.

Assim, M decompõe-se em:

(i) duas regiões abertas ($Q_3 \neq 0$):

$$M_0 = \{p \in M / \nexists \text{ direção degenerada em } p\} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} M_c &= \{p \in M / \text{ existe um cone } c_p \text{ em } N_{f(p)}f(M), \text{ de direções degeneradas em } p\} \\ &= \{p \in M / \text{ existem 2 circunferências antípodas na esfera unitária de } N_{f(p)}f(M) \\ &\text{ de direções degeneradas em } p\}. \end{aligned}$$

(ii) subconjuntos, localmente definidos como curvas algébricas ($\text{rank } Q = 2$):

$$C_1 = \{p \in M / \text{ existe uma única direção degenerada [b] em } p\} \quad \text{e}$$

$$C_{2s} = \{p \in M / \text{ existem duas circunferências máximas na esfera unitária de } N_{f(p)}f(M), \text{ de direções degeneradas em } p\}$$

(iii) pontos isolados ($\text{rank } Q=1$)

$$C_{1s} = \{p \in M / \text{ existe uma única circunferência máxima na esfera unitária de } N_{f(p)}f(M), \text{ de direções degeneradas em } p\}.$$

Obs: Se considerarmos direções não orientadas, o espaço de parâmetros será $\mathbb{RP}^4$ e assim a descrição das direções degeneradas em cada ponto de M_c, C_1, C_{2s} e C_{1s} , passa a ser, respectivamente: uma circunferência de direções degeneradas, um único ponto, duas retas projetivas (concorrentes) e uma única reta projetiva.

Notemos também que: $\overline{M_c} = M_c \cup C_{2s} \cup C_{1s} \cup C_1$ e $\overline{M_0} = M_0 \cup C_1$ (Ver figura 10).

Figura 10

Teorema IV.a.1.4: Suponhamos $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ não vazio. Então o aberto M_c de M , decompõe-se em dois abertos $(M_c)_0$, $(M_c)_2$ e uma curva $(M_c)_1$, dados por:

$$(M_c)_0 = \{p \in M_c / f_v \text{ tem singularidade } A_2 \text{ em } p, \forall v \in c_p\}$$

$(M_c)_2 = \{p \in M_c / \text{ existem exatamente duas direções } [b_1] \text{ e } [b_2] \text{ em } c_p, \text{ com } f_{b_i} \text{ tendo singularidade } A_k, k \geq 3, \text{ em } p \text{ (} i = 1, 2) \}.$

$(M_c)_1 = \{p \in M_c / \text{ existe exatamente uma direção } [b] \text{ em } c_p, \text{ com } f_b \text{ tendo singularidade } A_k, k \geq 3 \text{ em } p\} = (\Delta_c)^{-1}(0)$

Prova: Seja $p \in M_c$ e fixemos $v \in c_p, v = (0, 0, v_3, v_4, v_5)$. Podemos, ainda, supor f na forma de Monge, com e_5 uma direção em c_p , tendo singularidade de dobra em p . Mas, $v \in c_p \Leftrightarrow \det \mathcal{H}(f_v(0, 0)) = h_p(v_3, v_4, v_5) = 0$.

Agora, se p é uma singularidade $A_k, k \geq 3$ de f_v então $l_p(v_3, v_4, v_5) = a_{30}v_3 + b_{30}v_4 + c_{30}v_5 = 0 \Rightarrow v_5 = -\frac{a_{30}}{c_{30}}v_3 - \frac{b_{30}}{c_{30}}v_4$. Assim, p é uma singularidade $A_k (k \geq 3)$ de $f_v \Leftrightarrow \tilde{h}_p(v_3, v_4, -\frac{a_{30}}{c_{30}}v_3 - \frac{b_{30}}{c_{30}}v_4) = [(a_{20}a_{02} - a_{11}^2) - \frac{2a_{20}a_{30}}{c_{30}}]v_3^2 + [(a_{20}b_{02} + b_{20}a_{02} - 2a_{11}b_{11}) - \frac{1}{c_{30}}(a_{20} + b_{20})]v_3v_4 + [(b_{20}b_{02} - b_{11}^2) - \frac{b_{20}b_{30}}{c_{30}}]v_4^2 = 0$.

Seja Δ_c o discriminante da forma quadrática acima:

$$\Delta_c = [a_{20}(a_{02} - \frac{a_{20}a_{30}}{c_{30}}) - a_{11}^2][b_{20}(b_{02} - \frac{b_{20}b_{30}}{c_{30}}) - b_{11}^2] - \frac{1}{4}[a_{20}(b_{02} - \frac{b_{20}b_{30}}{c_{30}}) + b_{20}(a_{02} - \frac{a_{20}a_{30}}{c_{30}}) - 2a_{11}b_{11}]^2 \text{ então,}$$

- a) Se $\Delta_c < 0$ existem duas direções em c_p dando origem a funções altura com singularidade mais degenerada que dobra.
- b) Se $\Delta_c = 0$ existe uma única direção correspondendo a uma função altura com singularidade mais degenerada que dobra em p .
- c) Se $\Delta_c > 0$ toda direção de c_p dá origem a uma função altura com singularidade de dobra em p .

Portanto,

$$(M_c)_0 = \{p \in M_c / \Delta_c(p) > 0\} ,$$

$$(M_c)_2 = \{p \in M_c / \Delta_c(p) < 0\} \quad \text{que são abertos de } M \text{ e,}$$

$$(M_c)_1 = \{p \in M_c / \Delta_c(p) = 0\} = \Delta_c^{-1}(0).$$

Obs: Notemos que a equação $l_p = 0$ define um plano α_p em $N_{f(p)}f(M)$, passando por $f(p)$. Assim, se:

(a') $\Delta_c < 0$, $h_p^{-1}(0) \cap \ell_p^{-1}(0) = \{u, v\}$, $u \neq v$, ou equivalentemente, o plano α_p intercepta o cone c_p transversalmente.

(b') $\Delta_c = 0$, $h_p^{-1}(0) \cap \ell_p^{-1}(0) = \{u\}$, ou então α_p tangencia c_p .

(c') $\Delta_c > 0$, $h_p^{-1}(0) \cap \ell_p^{-1}(0) = \emptyset$, ou seja, $\alpha_p \cap c_p = \{f(p)\}$.

Obs. IV.a.1.5: Sob as condições do Teorema IV.a.1.4, se $p \in c_p$ é tal que f_b tem singularidade A_k , com $k \geq 3$ em p , o hiperplano ortogonal a b tem um contato de ordem maior ou igual a 3 com $f(M)$ em $f(p)$. Assim, vamos chamar $[b]$ de direção

binormal de M em p e o hiperplano ortogonal a b , $b^\perp$, de hiperplano osculador.

Provaremos no cap. V, Teorema V.a.1, que genericamente, quando m é par, $M_0 \not\subset M$. Uma questão que permanece em aberto é:

“Se M é uma superfície genericamente mergulhada em $\mathbb{R}^5$, então $(M_c)_0 \subsetneq M_c$?”
Em outras palavras, existe um aberto de M tal que todo ponto admite exatamente duas direções binormais?

IV.a.2 - A 2ª Forma Fundamental de M

Suponhamos o mergulho f dado, localmente, como em IV.a.1. Nesse caso, a 2ª forma fundamental de M em p é caracterizada pelas 3 formas quadráticas, q_1, q_2 e q_3 que compõe o 2-jato de f no ponto p .

Vamos associar a essas formas quadráticas os seguintes:

(i) feixes de formas quadráticas, como em III.3:

$$q_{ij} = (q_i, q_j) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j \quad ,$$

(ii) funções, como em III.1: $\Delta_{ij}(p) = \Delta(q_i, q_j)(p)$, $\alpha_{ij}(p) = \alpha(q_i, q_j)(p)$ e $k_{ij}(p) = k(q_i, q_j)(p)$, onde $i < j$, $(i, j) = (1, 2, 3)$, e

$$(iii) \quad \alpha(p) = \begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \\ c_{20} & c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}$$

Lema IV.a.2.1: Se $p \in M_0$, então $\text{rank } \alpha(p) = 3$ e $\Delta_{ij}(p) > 0$, para todo $i < j$ ($i, j = 1, 2, 3$))(*) . Além disso, (*) equivale a dizer que os feixes q_{ij} ($i < j, i = 1, 2, 3$) não encontram o cone D , exceto na origem.

Prova: (a) Se $\text{rank } \alpha(p) < 3$ então duas das formas quadráticas são linearmente

dependentes. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $q_1 = \lambda q_2$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, $v = (0, 0, 1, -\lambda, 0)$ é uma direção degenerada em p , contrariando o fato de que $p \in M_0$.

(b) Suponhamos algum $\Delta_{ij}(p) < 0$. Dessa forma, o feixe (q_i, q_j) intercepta o cone D em duas retas (Prop. III.3.2), que vão corresponder a duas direções degeneradas em p , contrariando a hipótese de $p \in M_0$. Portanto, $\Delta_{ij}(p) > 0$ para todo $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$. Mas, da Prop. III.3.2, isso é equivalente a q_{ij} não encontrar o cone D .

Obs. IV.a.2.2: A condição (*) implica que q_1, q_2 e q_3 são formas quadráticas do tipo hiperbólico. Porém, a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, como mostra o seguinte contra-exemplo:

$$(x, y) \xrightarrow{f} (x, y, -2x^2 + y^2 + \dots, xy + \dots, x^2 - y^2 + \dots)$$

Nesse caso, $Q_3 = -2 + \frac{9}{4} = \frac{-8+9}{4} = \frac{1}{4} > 0$; $Q_1 = -4$; $Q_2 > 0$; $Q_1 Q_3 < 0$. Logo, $p \in M_c$.

Lema IV.a.2.3: Seja $p \in M - M_0$.

m) $p \in M_c \Leftrightarrow \text{rank} \alpha(p) = 3 \Leftrightarrow Q_3 \neq 0$

n) $Q_3 = 0 \Leftrightarrow \det \alpha(p) = 0$. Além disso,

(n.1) $(\text{rank} \alpha(p) = 2 \text{ e } Q_2 < 0) \Leftrightarrow p \in C_2$,

(n.2) $(\text{rank} \alpha(p) = 2 \text{ e } Q_2 = 0) \Leftrightarrow p \in C_1$,

(n.3) $p \in C_1 \Leftrightarrow \text{rank} \alpha(p) = 2$, com uma das formas quadráticas nula e duas do tipo hiperbólico.

Prova: Como $p \in M - M_0$, existe $[v] \subset N_{f(p)}f(M)$, uma direção degenerada em p . Então, podemos escolher um sistema de coordenadas em p , de tal maneira que f esteja na forma de Monge e $f_v = f_3$ ($v = e_5$). Assim, q_3 é uma forma quadrática degenerada

que podemos, ainda, supor igual a y^2 . Temos, portanto, 2 casos a analisar:

1o quando ambas não são definidas positivas. 2o quando pelo menos uma das formas quadráticas é definida positiva.

1o nenhuma das formas quadráticas é definida positiva, isto é, $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0$ e $b_{20}b_{02} - b_{11}^2 \leq 0$. Assim,

$$Q = \begin{bmatrix} a_{20}a_{02} - a_{11}^2 & \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20} - 2a_{11}b_{11}) & \frac{1}{2}a_{20} \\ \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20} - 2a_{11}b_{11}) & b_{20}b_{02} - b_{11}^2 & \frac{1}{2}b_{20} \\ \frac{1}{2}a_{20} & \frac{1}{2}b_{20} & 0 \end{bmatrix} e$$

$$Q_1 = (a_{20}a_{02} - a_{11}^2) + (b_{20}b_{02} - b_{11}^2) < 0$$

$$Q_2 = -\frac{1}{4}[(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})^2 + a_{02}^2 + b_{20}^2] - (a_{02}b_{11} - a_{11}b_{02})(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})$$

$$Q_3 = \frac{1}{4}(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})^2 \geq 0$$

$$\text{Mas, } Q_3 \neq 0 \Leftrightarrow a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3. \text{ Ainda,}$$

(n) $Q_3 = 0 \Leftrightarrow \det \alpha(p) = 0 \Leftrightarrow a_{20}b_{11} = a_{11}b_{20}$. Temos, ainda,

$$(n.1) \text{ rank } \alpha(p) = 2 \Leftrightarrow a_{20}b_{11} = a_{11}b_{20} \text{ e } a_{20}a_{11}b_{20}b_{11} \neq 0.$$

Como $Q_2 < 0$, por hipótese, então $p \in \mathcal{C}_{2s}$. Reciprocamente, se $p \in \mathcal{C}_{2s}$, $Q_3 = 0$ e $Q_2 < 0$; Logo $a_{20} \neq 0$ ou $b_{20} \neq 0$. Portanto, $\text{rank} \alpha(p) = 2$.

(n.2) $\text{rank } \alpha(p) = 2$ e $Q_2 = 0 \Leftrightarrow a_{20} = b_{20} = 0$. Como $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0$, nesse caso, devemos ter $a_{11} \neq 0$. Mas, isto implica que $\text{rank } Q(p) = 1$, com $Q_1 \neq 0$. Logo, $p \in \mathcal{C}_{1s}$. Reciprocamente, se $p \in \mathcal{C}_{1s} \Rightarrow Q_3 = Q_2 = 0 \Rightarrow \text{rank } \alpha(p) = 2$.

$$(n.3) \text{ Suponhamos } a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0, \quad b_{20}b_{02} - b_{11}^2 < 0 \text{ e } c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$$

$$\text{Nessas condições, } Q = \begin{bmatrix} a_{20}a_{02} - a_{11}^2 & \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20} - 2a_{11}b_{11}) & 0 \\ \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20} - 2a_{11}b_{11}) & b_{20}b_{02} - b_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e$$

$Q_3 = 0$; $Q_2 = \Delta_{12} > 0$. Da Prop. III.3.2 segue que $p \in \mathcal{C}_1$.

Recíprocamente, se $p \in \mathcal{C}_1$, temos $Q_3 = 0$ e $Q_2 > 0$. Então, podemos supor q_3 uma forma quadrática nula, pois caso contrário, da análise anterior p estaria em $\mathcal{C}_{2s}$ ou $\mathcal{C}_{1s}$. Agora, sendo $q_3 \equiv 0$, a única possibilidade para que tenhamos $Q_2 > 0$ é que q_1 e q_2 sejam formas quadráticas do tipo hiperbólico.

No 2º caso, vamos supor q_1 definida positiva. Então, é possível escolher coordenadas em p , de tal sorte que f tenha a forma local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, 0 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \dots, b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots, y^2 + \dots) \end{aligned}$$

com $a_{20} > 0$; $a_{02} > 0$ e q_2 uma forma quadrática qualquer. Nesse caso,

$$Q = \begin{bmatrix} a_{20}a_{02} & \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20}) & \frac{1}{2}a_{20} \\ \frac{1}{2}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20}) & b_{20}b_{02} - b_{11}^2 & \frac{1}{2}b_{20} \\ \frac{1}{2}a_{20} & \frac{1}{2}b_{20} & 0 \end{bmatrix} e$$

$$Q_1 = a_{20}a_{02} + (b_{20}b_{02} - b_{11}^2)$$

$Q_2 = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{23} = (a_{20}a_{02})(b_{20}b_{02} - b_{11}^2) - \frac{1}{4}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20})^2 - \frac{1}{4}a_{20}^2 - \frac{1}{4}b_{20}^2 < 0$, pois $\Delta_{12} \leq 0$ (Prop. III.3.2) e $a_{20} \neq 0$.

$$Q_3 = \frac{1}{4}a_{20}b_{20}(a_{20}b_{02} + a_{02}b_{20}) - \frac{1}{4}a_{20}^2(b_{20}b_{02} - b_{11}^2) - \frac{1}{4}b_{20}^2a_{20}a_{02} = \frac{1}{4}a_{20}^2b_{11}^2 \geq 0. \text{ Portanto,}$$

$$(m) \quad Q_3 \neq 0 \Leftrightarrow b_{11} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a_{20} & 0 & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Além disso, se $Q_3 \neq 0$ temos $Q_1Q_3 \neq 0$, $Q_2 \neq 0$ e ambos não positivos $\Leftrightarrow p \in M_c$.

Por outro lado, como $a_{20} \neq 0$ temos:

$$(m.1) \quad Q_3 = 0 \Leftrightarrow \text{rank } \alpha(p) = 2 \Leftrightarrow p \in \mathcal{C}_{2s}. \quad (a_{20} \neq 0 \Rightarrow Q_2 < 0)$$

Teorema IV.a.2.4: Para todo $p \in \mathcal{C}_{2s}$, $\mathcal{C}_{1s}$ ou $\mathcal{C}_1$, existe uma única direção degenerada

$[v]$ tal que p é uma singularidade tipo D_k (umbílico) de f_v . Em $\mathcal{C}_{2s}$, essa direção é precisamente a intersecção das duas circunferências máximas de direções degeneradas.

Prova: Do Lema IV.a.2.3 segue que:

(n.1) Se $p \in \mathcal{C}_{2s}$; no 2o caso (q_1 definida positiva), $h_p(v_3, v_4, v_5) = (a_{11}v_3 + b_{11}v_4)(a_{22}v_3 + b_{22}v_4 + v_5) = 0$ e, assim, $h_p^{-1}(0)$ é formado por dois planos em $N_{f(p)}f(M)$, de direções degeneradas.

Se $v = (0, 0, \frac{-b_{20}}{a_{20}}v_4, v_4, v_5)$ (v_4, v_5 : quaisquer), então $f_v(x, y) = [\frac{a_{20}b_{02}-b_{20}a_{02}}{a_{20}}v_4 + v_5]y^2 + t.o.s.$, tem uma singularidade A_k , desde que $v_5 \neq \frac{b_{20}a_{02}-a_{20}b_{02}}{a_{20}}v_4$. Agora, se $v = (0, 0, \frac{-b_{20}}{a_{20}}, 1, \frac{b_{20}a_{02}-a_{20}b_{02}}{a_{20}})v_4$, que é precisamente a direção de intersecção dos dois planos em $N_{f(p)}f(M)$, a singularidade é de tipo D_k .

No 1o caso (q_1 e q_2 não são positivas definidas), a equação

$$h_p(v_3, v_4, v_5) = (a_{20}v_3 + b_{20}v_4) \left[(a_{02} - \frac{a_{11}^2}{a_{20}})v_3 + (b_{20} - \frac{b_{20}a_{11}^2}{a_{20}^2})v_4 + v_5 \right] = 0$$

também define dois planos.

Analogamente, a única direção com singularidade D_k será:

$v = (0, 0, \frac{-b_{20}}{a_{20}}, 1, \frac{a_{02}b_{20}}{a_{20}} - b_{02})$ (direção de intersecção dos 2-planos). Nas demais direções a singularidade será de tipo A_k .

(n.2) Se $p \in \mathcal{C}_{1s}$, $h_p(v_3, v_4, v_5) = -(a_{11}v_3 + b_{11}v_4)^2 = 0$. Portanto, $v_3 = \frac{-b_{11}}{a_{11}}v_4, \forall v_5$, é o plano de direções degeneradas. Se $v = (0, 0, \frac{-b_{11}}{a_{11}}v_4, v_4, v_5)$, $f_v(x, y) = v_5y^2 + t.o.s$ tem uma singularidade tipo A_k , desde que $v_5 \neq 0$. Então, $v = (0, 0, \frac{-b_{11}}{a_{11}}, 1, 0)$ é a única direção tal que f_v tem uma singularidade do tipo umbílico em p .

(n.3) Se $p \in \mathcal{C}_1$, na única direção degenerada, a forma quadrática é nula (Lema IV.a.2.3.).

Obs. IV.a.2.5: Um ponto $p \in M$ é 2-regular no sentido de Feldman se o espaço gerado pelos funcionais: $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}$ tem dimensão 5. Caso contrário, p é

dito um ponto 2-singular [16]. Segue, portanto, do Teorema IV.a.2.4, que os pontos sobre $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$, e $\mathcal{C}_1$ são precisamente os pontos 2-singulares de M .

Como Feldman [19], [20], chamaremos tais pontos de pontos de inflexão de M . Portanto, podemos concluir que:

p é ponto de inflexão de $M \Leftrightarrow p$ é ponto umbílico para alguma função altura sobre M .

Ainda, na linha de estudos desenvolvida por Feldman, sabemos que se uma aplicação $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ é não singular de ordem 2, então $k \geq 5 = \nu(2, 2)$, onde $\nu(2, 2)$ é a dimensão do fibrado vetorial $\mathbb{T}_2 M = \cup_{p \in M} \mathbb{T}_2 M_p$ ($\mathbb{T}_2 M_p$: espaço tangente de ordem 2 a M em p , gerado pelos funcionais $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}$). Do Teorema de Whitney [16, pag. 10 - Teor. 1.5.2] segue que, para $k = \nu(2, 2) + 2 = 7$, existe tal aplicação.

Um problema colocado por Sueli I.R. Costa em [16] foi:

“Quais variedades compactas de dimensão 2 admitem f , não singular de ordem 2, $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ (k mínimo)?”

Para a esfera a resposta é afirmativa, no entanto, até o momento, para o caso do toro ($f : \mathbb{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$), se tem conhecimento de uma resposta satisfatória.

IV.a.3. A 4-Variedade Canal de uma Superfície em $\mathbb{R}^5$.

A 4-variedade canal de M em $\mathbb{R}^5$ é dada por:

$$CM = \left\{ (p, v) \in M \times S^4 / v \perp \mathbb{T}_{f(p)} f(M) \right\}.$$

Consideremos, como em II.5, o mergulho $\tilde{f} : CM \rightarrow \mathbb{R}^5$ e as duas famílias de funções alturas $\lambda(f)$ e $\lambda(\tilde{f})$ definidas sobre C e CM , respectivamente. De acordo com

o Teorema II.1.1 e Prop. II.5.6, se $f \in \mathcal{S}^7(3)$, as singularidades que podem aparecer nessas famílias, são dos tipos: Morse (A_1), dobra (A_2), cúspide (A_3), rabo de andorinha (A_4), borboleta (A_5), umbílicos elípticos ou hiperbólicos ($D_4^\pm$) e umbílico parabólico (D_5). Além disso, utilizando a Prop. II.5.5, podemos descrever as singularidades da aplicação normal de Gauss $\Gamma : CM \rightarrow S^4$, em termos destas.

Seja $\mathcal{K}_c : CM \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura de Gauss-Kronecker sobre CM . De [27] segue que o conjunto singular de $\Gamma, \mathcal{K}_c^{-1}(0)$, é uma 3-variedade, exceto ao longo de uma curva consistindo de pontos em $\Sigma^2(\Gamma)$, ou equivalentemente, pontos umbílicos ($D_4^\pm$) ou (D_5) de $\tilde{f}_v$.

Para cada ponto em $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$ existe uma única direção principal de curvatura nula de CM . Esse campo de direções é tangente a $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ ao longo de uma superfície constituída de pontos de tipo $\Sigma^{1,1,0}$, que por sua vez é tangente a este campo ao longo de uma curva de pontos de tipo $\Sigma^{1,1,1,0}$, de Γ . Além disso, em pontos isolados de tipo $\Sigma^{1,1,1,0}$ de Γ , esta direção principal é, de fato, tangente a essa curva.

Seja $\xi : CM \rightarrow M$ a projeção natural de CM sobre M e denotemos por $\bar{\xi}$ sua restrição à 3-variedade $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$.

Suponhamos $\Sigma^{1,1}(\Gamma) \neq \emptyset$ e consideremos:

$$B_c = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) : p \in M_c\} \text{ e } (B_c)_2 = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) : p \in (M_c)_2\}.$$

Teorema IV.a.3.1:

- (i) $\bar{\xi}|_{B_c} : B_c \longrightarrow M_c$ é uma submersão.
- (ii) $\bar{\xi}|_{(B_c)_2} : (B_c)_2 \longrightarrow (M_c)_2$ é difeomorfismo local
- (iii) $\Delta_c(p) = 0$ e p não é ponto de inflexão $\Leftrightarrow$ existe $v \in S^4$ tal que (p, v) é ponto singular tipo dobra de $\bar{\xi}$.

Prova: Escolhemos coordenadas em $(p, v) \in B_c$ como na Prop. II.5.5, de modo que

$\mathcal{K}_c$ tenha a seguinte representação local:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_c : \mathbb{R}^4, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}, 0 \\ (x, y, v_3, v_4) &\longmapsto \mathcal{K}_c(x, y, v_3, v_4) = A_{20}(x, y)v_3^2 + A_{11}(x, y)v_3v_4 + A_{02}(x, y)v_4^2 + \\ &+ A_2(x, y)v_4 + A_1(x, y)v_3 + A_0(x, y), \text{ com} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0(x, y) &= f_{3xx}f_{3yy} - f_{3xy}^2 \\ A_1(x, y) &= f_{1xx}f_{3yy} + f_{1yy}f_{3xx} - 2f_{1xy}f_{3xy} \\ A_2(x, y) &= f_{2xx}f_{3yy} + f_{2yy}f_{3xx} - 2f_{2xy}f_{3xy} \\ A_{20}(x, y) &= f_{1xx}f_{1yy} - f_{1xy}^2 \\ A_{11}(x, y) &= f_{1xx}f_{2yy} + f_{1yy}f_{2xx} - 2f_{1xy}f_{2xy} \\ A_{02}(x, y) &= f_{2xx}f_{2yy} - f_{2xy}^2 \end{aligned}$$

(i) Se $(p, v) \in B_c$, então $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$. Além disso, podemos supor $f_3(x, y) = y^2 + x^3$. Assim, $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = 12$; $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial y}(0, 0, 0, 0) = 0$; $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(0, 0, 0, 0) = 4a_{11}$; $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(0, 0, 0, 0) = 0 = 4b_{11}$. Como a_{11} e b_{11} não se anulam simultaneamente (Lema IV.a.2.3), vamos supor $a_{11} \neq 0$. Logo, numa vizinhança da origem, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ pode ser visto como gráfico de uma função $v_3 = g(x, y, v_4)$, com plano tangente, nesse ponto, dado por: $3x - a_{20}v_3 + b_{20}v_4 = 0$. Logo, os vetores $(0, 1, 0, 0, 0)$ e $(-a_{20}, 0, 3, 0, 0)$ estão em $T_{(p, v)}B_c$ e são transversais ao kernel de $D\bar{\xi}(p, v)$. Portanto, $\bar{\xi}$ é submersão em (p, v) .

(ii) $(p, v) \in (B_c)_2 \Leftrightarrow p$ é ponto de cúspide de f_v . Então, podemos supor $f_3(x, y) = y^2 + 3c_{21}x^2y + x^4$, com $c_{21} \neq 0$. Além disso, nessas coordenadas, $h_p(v_3, v_4, 1) = \mathcal{K}_c(p, v_3, v_4)$ e como $p \in (M_c)_2$, o sistema $\begin{cases} h_p(v_3, v_4, 1) = 0 \\ a_{30}v_3 + b_{30}v_4 = 0 \end{cases}$ admite:

- (a) duas soluções reais e distintas $\Leftrightarrow \Delta_c(p) < 0 \Leftrightarrow v_3 = 0$ é uma raiz simples de $h_p(v_3, \frac{-a_{30}}{b_{30}}v_3, 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow \bar{\xi}|_{(B_c)_2}$ é difeomorfismo local.
- (b) uma única solução real $\Leftrightarrow \Delta_c(p) = 0 \Leftrightarrow v_3 = 0$ é uma raiz com multiplicidade 2 de $h_p(v_3, \frac{-a_{30}}{b_{30}}v_3, 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_3^2}(0, 0) \neq 0$. Agora, se p não é ponto de inflexão, então $(p, v) \in (B_c)_2$. Logo, (p, v) é ponto de dobra de $\bar{\xi}|_{(B_c)_2}$. Reciprocamente, se (p, v) é ponto de dobra de $\bar{\xi}|_{(B_c)_2}$, então $(p, v) \notin \Sigma^2(\Gamma)$ e $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_3}(0, 0) = 0$; $\frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_3^2}(0, 0) \neq 0$. Portanto, $\Delta_c(p) = 0$ e p não é ponto de inflexão.

Se $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$, CM possui uma única direção principal de curvatura

nula em (p, v) . Assim, se $(p, v) \in B_c \cap \Sigma^{1,1}(\Gamma)$,

Definição IV.a.3.2: Chamamos de direção assintótica de M em p à direção $[\theta] \subset \mathbb{T}_{f(p)}f(M)$, imagem por $D\bar{\xi}$ da única direção principal de curvatura nula com contato de ordem maior ou igual a 2 com CM em (p, v) .

Dessa maneira, podemos concluir que em pontos de $(M_c)_2$ existem exatamente duas, em $(M_c)_1$ uma e em $(M_c)_0$ nenhuma direção assintótica.

Seja

$$p \in \bar{M} \text{ e } h_\alpha : \begin{array}{l} M \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ p \longmapsto h_\alpha(p) = f(p) - \langle \alpha, f(p) \rangle \alpha, \end{array}$$

$\alpha \in S^4$, a restrição a M da projeção sobre o hiperplano ortogonal a α .

Teorema IV.a.3.3: Seja $p \in (M_c)_2$.

Se $[\theta]$ é uma direção assintótica em p , então p é uma singularidade de h_θ de $\mathcal{A}$ -codimensão maior ou igual a 2.

Prova: Suponhamos f , localmente em p , dado por:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2, 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^5, 0 \\ (x, y) \longmapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \text{ de} \end{array}$$

tal maneira que e_5 seja uma direção em c_p dando origem a uma sing. tipo A_2 .

Mas, como $p \in (M_c)_2$, escolhemos $[e_4]$ como uma direção binormal em p e efetuando uma mudança de coordenadas na fonte, se necessário, podemos supor $f_2(x, y) = y^2 + 3b_{21}x^2y + x^4$, com $b_{21} \neq 0$. Logo, $\theta = e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ é a direção assintótica associada ao vetor binormal e_4 . Agora, da Obs. III.5.9-a, podemos concluir que h_θ é $\mathcal{A}$ -equivalente a uma singularidade S_k , ($k \geq 2$).

IV.a.4. Caracterização Geométrica das Singularidades de Funções Altura sobre M .

Para cada vetor unitário $\alpha \in T_{f(p)}f(M)$, seja γ_α a curva obtida pela intersecção de $f(M)$ com o 4-espaço contendo $N_{f(p)}f(M)$ e α . Tal curva é chamada secção normal de $f(M)$ na direção $[\alpha]$. Quando $[\alpha]$ for uma direção assintótica, chamaremos γ de *secção normal assintótica*.

Vimos em IV.a.1 que:

1. Se $p \in M_0$, $\forall v \in N_{f(p)}f(M)$, p é uma singularidade tipo Morse de f_v .
2. Se $p \in M_c$, para quase toda direção $[v] \subset c_p$, f_v tem singularidade tipo dobra em p . Além disso, f_v tem singularidade mais degenerada que dobra (tipo A_k , $k \geq 3$) em $p \Leftrightarrow v$ é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$.

Seja $[\theta]$ a direção assintótica em $f(p)$, associada ao vetor binormal v . Então, podemos caracterizar as singularidades mais degeneradas que dobra, que um mergulho genérico satisfazendo $\sum^{1,1}(\Gamma) \neq \phi$ pode apresentar, em:

Teorema IV.a.4.1. Para cada $p \in M_c$ tal que $\Delta_c(p) < 0$, $p \in \bar{\xi}(\sum^{1,1,0}(\Gamma)) \Leftrightarrow \gamma_\theta$ tem a 3a curvatura (Def. II.8.3) não nula em p . Agora, se γ_θ tem a 3a curvatura nula em p , então $p \in \bar{\xi}(\sum^{1,1,1}(\Gamma))$ e:

- (i) p é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a $\bar{\xi}(\sum^{1,1,1}(\Gamma))$.
- (ii) p é uma singularidade borboleta de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\bar{\xi}(\sum^{1,1,1,0}(\Gamma))$, com contato de 1a ordem.

Prova: Sejam $p \in M_c$ tal que $\Delta_c(p) < 0$ e v um vetor binormal em p . Escolhemos coordenadas em p , como na Prop. II.5.5, de modo que $f_v(x, y) = f_3(x, y)$. Como

$(p, v) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$, ainda, podemos supor $f_3(x, y) = y^2 + 3c_{21}x^2y + x^4$, com $c_{21} \neq 0$. Isto implica que $\theta = (1, 0, 0, 0, 0)$ e $l_p(v_3, v_4, v_5) = a_{30}v_3 + b_{30}v_4$, com $b_{30} \neq 0$. Assim, $h_p(v_3, v_4, 1) = h_p(v_3, \frac{-a_{30}}{b_{30}}v_3, 1)$. Além disso, a secção normal assintótica γ_θ tem a seguinte parametrização local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\gamma_\theta} \mathbb{R}^4, 0 \\ s & \longmapsto \gamma_\theta(s) = (s, f_1(s, 0), f_2(s, 0), f_3(s, 0)) = \end{aligned}$$

$= (s, a_{20}s^2 + \dots, b_{20}s^2 + b_{30}s^3 + \dots, s^4)$ e, portanto, sua 3ª curvatura é não nula.

Recíprocamente, se γ_θ tem a 3ª curvatura não nula, podemos parametrizá-la em seu referencial de Frenét, como:

$$\gamma_\theta(s) = (s, \frac{k_1}{2}s^2 + 0(s^2), \frac{k_2}{2}s^3 + 0(s^3), \frac{k_3}{2}s^4 + 0(s^4)),$$

Agora, estendemos esse referencial para um sistema de coordenadas em p , de modo que f possa ser descrito como: $f(x, y) = (x, y, x^2 + xg_1(y), x^3 + xg_2(y), x^4 + xg_3(y))$, onde $g_i \in m^{i+1}(y)$. Assim, é fácil ver que $[e_5]$ é uma direção binormal de M em p .

Agora, (i) e (ii) seguem exatamente como no Teorema III.5.1, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_c(x, y, v_3, \frac{-a_{30}}{b_{30}}v_3) &= \left[A_{20}(x, y) - \frac{a_{30}}{b_{30}}A_2(x, y) + \left(\frac{a_{30}}{b_{30}} \right) A_{02}(x, y) \right] v_3^2 + \\ &\left(A_1(x, y) - \frac{a_{30}}{b_{30}}A_2(x, y) \right) v_3 + A_0(x, y) = h_p \left(v_3, \frac{-a_{30}}{b_{30}}v_3, 1 \right). \end{aligned}$$

Recordemos que, para obter um ponto de $(M_c)_2$ ou $\Delta_c^{-1}(0)$, em cada ponto p , consideramos uma secção do fibrado normal $N_{f(p)}f(M)$ por um 2-plano. Isso corresponde a dizer que as singularidades mais degeneradas que dobra aparecem quando olhamos para a projeção de M_c sobre um conveniente 4-espaco. Assim, vamos classificar os pontos de inflexão de M de acordo com os tipos descritos na Proposição III.1.4.

Como vimos na obs. IV.a.2.5, p é um ponto de inflexão de $M \Leftrightarrow p$ é ponto umbílico para alguma função altura sobre M . Nos dois teoremas que seguem, caracterizamos geometricamente as singularidades que podem aparecer sobre a curva $\Delta_c^{-1}(0)$.

Teorema IV.a.4.2: Para cada $p \in M$ tal que $\Delta_c(p) = 0$ e p não é ponto de inflexão de M , temos:

- (a) p é uma singularidade de cúspide de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a $\Delta_c^{-1}(0)$.
- (b) p é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta_c^{-1}(0)$, com contato de 1a ordem.
- (c) p é uma singularidade borboleta de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\Delta_c^{-1}(0)$, com contato de 2a ordem.

Prova: Se $\Delta_c(p) = 0$, existe uma única direção binormal $[v]$ em p . Seja $[\theta]$ a direção associada a $[v]$. Agora, a prova segue como no Teorema III.5.2, substituindo aquela expressão local de $\mathcal{K}_c$, pela expressão dada na prova do Teorema IV.a.3.5. Observamos que, do Teorema IV.a.2.1 segue que $\frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_3^2}(p, v) \neq 0$ e, nesse caso, o contorno aparente de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é a curva $\Delta_c(x, y) = \left[A_{20}(x, y) - \frac{a_{30}}{b_{30}} A_2(x, y) + \left(\frac{a_{30}}{b_{30}} \right) A_{02}(x, y) \right] \cdot A_0(x, y) - \frac{1}{4} \left(A_1(x, y) - \frac{a_{30}}{b_{30}} A_2(x, y) \right)^2 = 0$. $\square$

Teorema IV.a.4.3: Seja $p \in \Delta_c^{-1}(0)$ um ponto de inflexão. Então $p \in \mathcal{C}_{2s}$ ou $\mathcal{C}_{1s}$, e:

- (a) p é um ponto de cruzamento normal de $\Delta_c^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão do tipo real.
- (b) p é um ponto isolado de $\Delta_c^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão do tipo imaginário.
- (c) p é um ponto singular (cúspide) da curva $\Delta_c^{-1}(0) \Leftrightarrow p$ é um ponto umbílico parabólico.

Prova: Como $p \in \Delta_c^{-1}(0)$, existe uma única direção binormal $[v]$ em p . Vamos escolher coordenadas, nesse ponto, de forma que o mergulho f esteja na forma de Monge e $v = e_4$. Por outro lado, para toda direção degenerada em p , distinta de v , a correspondente

função altura tem singularidade de dobra em p . Assim, podemos supor $f_3(x, y) = y^2 + c_{30}x^3 + 3c_{21}x^2y + 3c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \dots$, com $c_{30} \neq 0$.

Portanto, como no Teorema IV.a.3.1, $\mathcal{K}_c$ toma a forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_c : \mathbb{R}^3, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}, 0 \\ (x, y, v_3) &\longmapsto \tilde{\mathcal{K}}_c(x, y, v_3) = \mathcal{K}_c(x, y, v_3, 1) \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_c(x, y, v_3, 1) = & [f_{1xx}(x, y)(f_{1yy}(x, y) - \frac{1}{c_{30}}f_{1xxx}(x, y)) - f_{1xy}^2(x, y)]v_3^2 \\ & + [f_{1xx}(x, y)(f_{2yy}(x, y) - \frac{1}{c_{30}}f_{2xy}) + f_{2xx}(x, y)(f_{1yy}(x, y) - \frac{1}{c_{30}}f_{1xxx}(x, y)) \\ & - 2f_{1xy}(x, y) \cdot f_{2xy}(x, y)]v_3 + [f_{2xx}(x, y)(f_{2yy}(x, y) - \frac{1}{c_{30}}f_{2xxx}(x, y)) - f_{2xy}^2]. \end{aligned}$$

Notemos que $\tilde{\mathcal{K}}_c$ é a função curvatura de Gauss-Kronecker de um fibrado de 1-esferas sobre M_c , que é precisamente a 3-variedade canal da projeção de M_c , sobre um 4-espaço. Nas coordenadas escolhidas inicialmente, sua representação local é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^4, 0 \subset \mathbb{R}^5, 0 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f_{1c}(x, y), f_{2c}(x, y)) \quad , \text{com} \end{aligned}$$

$$f_{1c}(x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + (a_{02} - \frac{a_{30}}{c_{30}})y^2 + \dots$$

$$f_{2c}(x, y) = b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + (b_{02} - \frac{b_{30}}{c_{30}})y^2 + \dots \quad \text{e} \quad f_v = f_{2c}.$$

Dessa maneira, como p é ponto de inflexão de M , do Teorema IV.a.2.4 segue que $p \in \mathcal{C}_{2s}$ ou $\mathcal{C}_{1s}$, e podemos supor:

- (i) $f_{2c}(x, y) = x^3 + c_{12}xy^2$ (se p é ponto umbílico elíptico ou hiperbólico, como no Teorema III.5.3) ou
- (ii) $f_{2c}(x, y) = x^4 + c_{12}xy^2$ (se p é umbílico parabólico, como no Teorema III.6.1). Em ambos os casos, $c_{12} \neq 0$.

Com essas escolhas, (a) e (b) seguem exatamente como no Teorema III.5.3, onde $k_c(p) = a_{20}(a_{02} - \frac{a_{30}}{c_{30}}) - a_{11}^2$, e a parte (c) segue do Teorema III.6.1 (i), onde $k = 3$, por se tratar de um caso genérico em $\mathbb{R}^5$. Ver figuras 6 e 8.

IV.b. 3-Variedades em $\mathbb{R}^5$

Consideremos M uma 3-variedade fechada, conexa, orientável e $f \in \text{Emb}(M, \mathbb{R}^5)$.

IV.b.1. Direções degeneradas de M .

Seja

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3, 0 &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^5, 0 \quad \text{dada por:} \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \end{aligned}$$

a expressão local do mergulho da 3-variedade M na forma de Monge. Com respeito a essas coordenadas, a segunda forma fundamental de $f(M)$ é caracterizada por duas formas quadráticas:

$$\begin{aligned} q_1(x, y, z) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ q_2(x, y, z) &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}yz + b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 \end{aligned}$$

A função altura f_v , na direção $v \in \mathbb{R}^5$, tem a forma local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}, o \\ (x, y, z) &\longmapsto f_v(x, y, z) = v_1x + v_2y + v_3z + v_4f_1(x, y, z) + v_5f_2(x, y, z), \end{aligned}$$

e sua matriz Hessiana $\mathcal{H}(f_v)(0)$ é dada por:

$$\mathcal{H}(f_v)(0) = \begin{bmatrix} a_{11}v_4 + b_{11}v_5 & a_{12}v_4 + b_{12}v_5 & a_{13}v_4 + b_{13}v_5 \\ a_{12}v_4 + b_{12}v_5 & a_{22}v_4 + b_{22}v_5 & a_{23}v_4 + b_{23}v_5 \\ a_{13}v_4 + b_{13}v_5 & a_{23}v_4 + b_{23}v_5 & a_{33}v_4 + b_{33}v_5 \end{bmatrix}$$

Assim, $\det \mathcal{H}(f_v)(0) = 2^3 \cdot h_p(v_4, v_5)$, onde $h_p(v_4, v_5) = A_1v_4^3 + 3A_2v_4^2v_5 + 3A_3v_4v_5^2 + A_4v_5^3$, com:

$$A_1 = \det M(q_1)$$

$A_2 = \frac{1}{3}[\sum_{i,j=1}^3 b_{ij} \det(\alpha_{ij})]$, onde α_{ij} é o menor 2×2 da matriz $M(q_1)$, obtida eliminando a i -ésima linha e a j -ésima coluna.

$A_3 = \frac{1}{3}[\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \det(\beta_{ij})]$, onde β_{ij} é definido como acima, substituindo $M(q_1)$, por $M(q_2)$.

$A_4 = \det M(q_2)$, onde $M(q_i)$ indica a matriz da forma quadrática q_i ($i = 1, 2$).

Denotemos por A a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} A_1A_3 - A_2^2 & \frac{1}{2}(A_1A_4 - A_2A_3) \\ \frac{1}{2}(A_1A_4 - A_2A_3) & A_2A_4 - A_3^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Lema IV.b.1.1: p é um ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow v \in N_{f(p)}f(M)$ e o par (v_4, v_5) das coordenadas de v em $N_{f(p)}f(M)$ é uma solução de $h_p = 0$.

Se p é um ponto crítico degenerado de f_v , $[v]$ é uma direção degenerada em p .

Seja $\Delta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:
 $p \longmapsto \Delta(p) = \det A(p)$, onde A é dada como em (1).

Lema IV.b.1.2: Seja p um ponto crítico de f_v . Então,

(a) Se $\Delta(p) > 0$, existe uma única direção degenerada $[b]$ em p .

- (b) Se $\Delta(p) < 0$, existem exatamente 3 direções degeneradas $[b_i](i = 1, 2, 3)$ em p .
- (c) Se $\Delta(p) = 0$, e $\text{rank}A(p) = 1$, existem 2 direções degeneradas $[b_i](i = 1, 2)$ em p .
- (d) Se $\text{rank}A(p) = 0$, existe uma única direção degenerada em p .

Prova: Utilizando a classificação real das formas cúbicas em duas variáveis (ver [27] ou [43]), as condições impostas sobre a matriz $A(p)$ são suficientes para determinar o tipo do conjunto $h_p^{-1}(0)$. Agora, o Lema IV.b.1.1 aplicado em cada caso, fornece o resultado desejado.

Obs. IV.b.1.3: Como em III.2.2, chamaremos uma direção degenerada $[b]$ em p , de direção binormal e o hiperplano ortogonal ao vetor b , $b^\perp$, de hiperplano osculador nesse ponto.

Portanto, para um mergulho genérico f , M pode ser decomposto em:

(i) duas regiões abertas:

$$M_1(1) = \{p \in M / \text{existe uma única direção binormal em } p\} \text{ e}$$

$$M_3(1, 1, 1) = \{p \in M / \text{existem 3 direções binormais em } p\}.$$

(ii) um subconjunto localmente definido como um subconjunto algébrico de codimensão 1:

$$M_2 = M_2(1, 2) = \{p \in M / \text{existem 2 direções binormais em } p\}.$$

(iii) um subconjunto, localmente definido como um subconjunto algébrico de cod. 2:

$$M_1(3) = \{p \in M / \text{existe uma única direção degenerada em } p\}$$

IV.b.2. A 4-Variedade Canal de M em $\mathbb{R}^5$.

Como em II.5.1, a 4-variedade canal de M em $\mathbb{R}^5$ é dada por:

$$CM = \{(p, v) \in M \times S^4 / v \text{ é ortogonal a } \top_{f(p)} f(M)\}$$

Se denotarmos por $\tilde{f} : CM \rightarrow \mathbb{R}^5$, o mergulho natural de CM em $\mathbb{R}^5$, teremos, como em IV.a.3, as duas famílias de funções altura $\lambda(f)$ e $\lambda(\tilde{f})$ definidas sobre M e CM , respectivamente. Teremos, também, exatamente a mesma descrição das singularidades que podem aparecer genericamente nessas famílias. Essa descrição é obtida através da aplicação normal de Gauss $\Gamma : CM \rightarrow S^4$.

$$\text{Sejam } B_i = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) : p \in M_i, \overbrace{(1, \dots, 1)}^i\} \quad (i = 1, 3),$$

$$B_2 = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma_2(\Gamma) / p \in M_2(1, 2)\}$$

$$B_1(3) = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma_2(\Gamma) / p \in M_1(3)\}, \quad \xi : CM \rightarrow M$$

a projeção natural e $\bar{\xi}$ a restrição de ξ à subvariedade $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma)$.

Teorema IV.b.2.1:

(i) $\xi|_{B_i} : B_i \rightarrow M_i$ ($i = 1$ ou 3) é um difeomorfismo local (mais precisamente, é um difeomorfismo quando $i = 1$ e um recobrimento triplo se $i = 3$).

(ii) $\Delta(p) = 0$, $\text{rank} A(p) = 1$ e p não é umbílico $\Leftrightarrow$ existe $v \in S^4 / (p, v)$ é ponto de dobra de $\bar{\xi}$.

(iii) $\text{rank} A(p) = 0$ e p não é umbílico $\Leftrightarrow v$ existe $\in S^4 / (p, v)$ é ponto de cúspide de $\bar{\xi}$.

Prova: Escolhemos coordenadas em (p, v) como na Prop. II.5.5, de tal sorte que $p = (0, 0, 0)$ e $v = (0, 0, 0, 0, 1)$. Mas, se $v = (0, 0, 0, 0, 1)$ é uma direção degenerada, $h_p(v_4, 1) = A_1 v_4^3 + 3A_2 v_4^2 + 3A_3 v_4 = \mathcal{K}_c(0, v_4) = 0$ (pois $A_4 = \det M(q_2) = 0$, desde que $f_2 = f_v$ é degenerada em p). Agora, do Teorema II.7.2, segue que

- (i) $v_4 = 0$ é uma raiz simples de $\mathcal{K}_c(0, v_4) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow \bar{\xi}$ é um difeomorfismo local.
- (ii) $\Delta(p) = 0$, $\text{rank } A(p) = 1$ e p não é ponto umbílico $\Leftrightarrow v_4 = 0$ é uma raiz dupla de $\mathcal{K}_c(0, v_4) = 0$ e $(p, v) \notin \Sigma^2(\Gamma) \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_4^2}(0, 0) \neq 0$ e $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma) \Leftrightarrow (p, v)$ é ponto de dobra de $\bar{\xi}$.
- (iii) $\text{rank } A(p) = 0$ e p não é umbílico $\Leftrightarrow v_4 = 0$ é uma raiz tripla de $\mathcal{K}_c(0, v_4) = 0$ e $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma) \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(0, 0) = \frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_4^2}(\hat{u}, \hat{u}) = 0$; $\frac{\partial^3 \mathcal{K}_c}{\partial v_4^3}(0, 0) \neq 0$ e $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \Sigma^2(\Gamma) \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$ a direção do eixo v_4 não é tangente à curva $B_1(3) \Rightarrow (p, v)$ é ponto de cúspide de $\bar{\xi}$. A recíproca segue facilmente.

Em (*), a implicação $(\Rightarrow)$ segue considerando uma parametrização de $B_1(3)$, numa vizinhança da origem: $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), v_4)$, $s \sim 0$ e verificando que o núcleo da projeção não pode ser tangente a ela, pois caso contrário, teríamos $A_1 = 0$, contrariando nossa hipótese.

Obs: Dessa forma $\bar{\xi}$ é uma aplicação estável. Na realidade, ela é localmente, uma suspensão de uma aplicação estável de uma dimensão a menos.

Se $(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1} - \Sigma^2(\Gamma)$, CM possui uma única direção principal de curvatura nula em (p, v) .

Definição IV.b.2.2: Chamamos direção assintótica de M em p à uma direção $[\theta] \subset \mathbb{T}_{f(p)}f(M)$, imagem por $D\bar{\xi}$, da única direção principal de curvatura nula de CM em (p, v) .

Teorema IV.b.2.3: Sejam $p \in M$ e

$$\begin{aligned} h_\alpha : M &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\longmapsto h_\alpha(p) = f(p) - \langle \alpha, f(p) \rangle \alpha, \end{aligned}$$

$\alpha \in S^4$, a restrição a M da projeção sobre o hiperplano ortogonal a α .

Se $[\theta]$ é uma direção assintótica em p , então h_θ tem uma singularidade em p mais degenerada que um cross-cap.

Prova: Seja $p \in M$ e suponhamos f , localmente, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, 0 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)), \end{aligned}$$

de tal maneira que $f_v = f_2$, onde $[v]$ é a direção binormal associada a $[\theta]$. Então, $(p, v) \in \Sigma^1(\Gamma)$ e, utilizando uma mudança de coordenadas na fonte, se necessário, podemos tomar $f_2(x, y, z)$ na forma:

(i) $x^3 + \bar{f}_2(y, z)$ se $(p, v) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma)$ ou

(ii) $x^k \pm xy^2 + \bar{f}_2(y, z)$ se $(p, v) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-2}, 0}(\Gamma)$.

Isto implicará que a direção assintótica $[\theta]$ é dada pelo vetor $(1, 0, \dots, 0)$ e, portanto:

$$h_\theta(x, y, z) = (y, z, f_1(x, y, z), x^3 + \bar{f}_2(y, z)), \text{ no caso (i)}$$

ou

$$h_\theta(x, y, z) = (y, z, f_1(x, y, z), x^k \pm x^2y + \bar{f}_2(y, z)), \text{ no caso (ii).}$$

Agora, utilizando difeomorfismos $(\mathbb{R}^4, 0) \leftarrow$, que sejam a identidade nas duas primeiras coordenadas, podemos eliminar os termos em y e z nas duas últimas coordenadas e supor h_θ equivalente a:

$$(y, z, a_{11}x^2 + 2x(a_{12}y + a_{13}z) + \dots, x^3) \text{ no 1o caso}$$

$$\text{ou } (y, z, a_{11}x^2 + 2x(a_{12}y + a_{13}z) + \dots, x^k \pm x^2y), \text{ no 2o caso.}$$

Observemos que se $a_{11} = 0$, a_{12} e a_{13} não se anulam simultaneamente pois, caso contrário, teríamos toda direção $[v] \subset N_{f(p)}f(M)$ sendo degenerada em p . Assim, se $a_{12} \neq 0$, utilizando um difeomorfismo da forma:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = a_{12}y + a_{13}z \\ Z = z \end{cases}$$

temos $h_\theta \sim (\frac{1}{a_{12}}Y - \frac{a_{13}}{a_{12}}Z, Z, a_{11}X^2 + XY + \dots, (*))$, onde $(*)$ é X^3 no caso (i) ou $X^k + X^2Y$, no caso (ii). Mudanças de coordenadas óbvias permitem escrever:

$$h_\theta(x, y, z) \sim (Y', Z', a_{11}X'^2 + X'Y' + \dots, (*)).$$

Logo,

$$(a) \text{ se } a_{11} = 0 \text{ teremos } h_\theta(x, y, z) \sim (y, z, xy, (*)).$$

$$(b) \text{ se } a_{11} \neq 0 \text{ teremos } h_\theta(x, y, z) \sim (y, z, a_{11}(x + \frac{1}{2a_{11}}y)^2 - \frac{1}{4a_{11}}y^2, (*)) \sim (y, z, xy, (*)).$$

Basta, agora, notar que (y, z, xy, x^3) ou $(y, z, xy, x^k + x^2y)$ são mais degenerados que cross-cap.

IV.b.3. Caracterização Geométrica das Singularidades de Funções Altura sobre M .

Para cada vetor unitário $\theta \in T_{f(p)}f(M)$, seja γ_θ a curva obtida como a intersecção de $f(M)$ e o 3-espaco contendo $N_{f(p)}f(M)$ e θ . Tal curva é chamada secção normal de $f(M)$ na direção $[\theta]$.

Como já vimos, uma função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma singularidade em p se, e somente se, v é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$. Seja $[\theta]$ a direção assintótica em $f(p)$ associada ao vetor binormal v . Então, podemos caracterizar os tipos de singularidades degeneradas que podem aparecer genericamente, em:

Teorema IV.b.3.1: Para cada $p \in M$ tal que $\Delta(p) \neq 0$:

$p \in \bar{\xi}(\Sigma^{1,0}(\Gamma)) \Leftrightarrow \gamma_\theta$ tem torção normal não nula em p . Agora, se γ_θ tem torção normal nula em p , então $p \in \bar{\xi}(\Sigma^{1,1}(\Gamma))$ e temos que:

(i) p é uma singularidade de cúspide de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1,0}(\Gamma))$.

(ii) p é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\bar{\xi}(\sum^{1,1,0}(\Gamma))$ e transversal a $\bar{\xi}(\sum^{1,1,1,0}(\Gamma))$.

(iii) p é uma singularidade borboleta de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $\bar{\xi}(\sum^{1,1,1,0}(\Gamma))$, com contato de primeira ordem.

Prova: p é ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow (p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$. Se além disso, $\Delta(p) \neq 0$ então $p \in M_1(1)$ se $\Delta(p) > 0$ ou $p \in M_3(1, 1, 1)$ se $\Delta(p) < 0$.

Vamos escolher sistema de coordenadas ortogonais, relativamente aos quais tenhamos:

1o) f na forma local

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, 0 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)), \end{aligned}$$

$$f_1(x, y, z) = q_1(x, y, z) + \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1 \in m^3(x, y, z))$$

$f_2(x, y, z) = f_2(x, y) + z^2$ com $\bar{f}_2(x, y) = f_2(x, y)$ onde f_2 é dada na prova do Teorema III.5.1.

2o) $\mathcal{K}_c$, localmente, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, 0 \\ (x, y, z, v_4) &\longmapsto \mathcal{K}_c(x, y, z, v_4) = A_1(x, y, z)v_4^3 + 3A_2(x, y, z)v_4^2 + \\ &+ 3A_3(x, y, z)v_4 + A_4(x, y, z), \text{ onde:} \end{aligned}$$

$$A_1(x, y, z) = \det M(q_1(x, y, z))$$

$$\begin{aligned} A_2(x, y, z) = \frac{1}{3}[(f_{1xx}f_{1yy}f_{2zz} + f_{1xx}f_{1zz}f_{2yy} + f_{1yy}f_{1zz}f_{2xx}) + 2(f_{1xx}f_{1xy}f_{2xy} + \\ f_{1xy}f_{1xz}f_{2yz} + (f_{1xy}f_{1yz}f_{2zz}) - (f_{1xx}f_{1yy}f_{2zz} + f_{1xx}f_{2yy}^2 + f_{1xx}f_{1yy}f_{2zz}) - \\ (2f_{1xx}f_{1yz}f_{2yz} + f_{1yz}^2f_{2zz}) - (2f_{1xx}f_{1zz}f_{2yy} + f_{1xx}^2f_{2zz})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3(x, y, z) = \frac{1}{3}[(f_{1xx}f_{2yy}f_{2zz} + f_{1yy}f_{2xx}f_{2zz} + f_{1xx}f_{2xx}f_{2yy}) + 2(f_{1xx}f_{2xy}f_{2yz} + f_{2xx}f_{1yz}f_{2xy} + \\ (f_{1xy}f_{2zz}f_{2yz}) - (f_{1xx}f_{2xx}f_{2yy} + f_{1yy}f_{2xx}^2 + f_{1xx}f_{2yy}f_{2zz}) - (2f_{1yz}f_{2xx}f_{2yz} + f_{1xx}f_{2yz}^2) - \\ -(f_{2xy}^2f_{1xx} + 2f_{1xy}f_{2xy}f_{2zz})] \end{aligned}$$

$$A_4(x, y, z) = \det M(q_2(x, y, z)).$$

Dessa maneira, $f_v = f_2$ e a direção principal de curvatura nula de CM em (p, v) é a direção do eixo x ($e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$). Portanto, $D\bar{\xi}(p, v).e_1 = e_1 = \theta$ e assim, a secção normal γ_θ tem a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} \gamma_\theta : \mathbb{R}, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, 0 \\ s &\longmapsto \gamma_\theta(s) = (s, o, o, a_{11}s^2 + \dots, P_1s^3 + \dots). \end{aligned}$$

Logo, γ_θ tem torção não nula $\Leftrightarrow P_1 \neq 0 \Leftrightarrow p$ é ponto de dobra de f_v .

Agora, se $\bar{F}_1 = 0$, temos $(p, v) \in \Sigma^{1,1}(\Gamma)$ e o resultado segue como no Teorema III.5.1, utilizando a descrição das singularidades da aplicação de Gauss Γ , da Proposição II.5.5 e do Teorema IV.b.2.1 (parte (i)).

Teorema IV.b.3.2: Sejam $p \in M_2$, $[v]$ uma direção binormal em p e $[\theta]$ a direção assintótica associada a v . Se p não é umbílico de f_v , então:

- (i) p é uma singularidade de dobra de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a M_2
- (ii) p é uma singularidade tipo A_k ($3 \leq k \leq 5$) de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a M_2 com contato de ordem $(k - 2)$.

Prova: Recordemos que: $(p, v) \in B_2 \Leftrightarrow p \in M_2$, v é binormal em p e p não é umbílico de $f_v \Leftrightarrow (p, v)$ é ponto de dobra de $\bar{\xi}$. Assim em coordenadas locais, podemos escrever: $(x, y, z, v_4) \in \mathcal{W}$ ($\mathcal{W}$ uma vizinhança de (p, v) em B_2 como em II.5.5) $\Leftrightarrow \mathcal{K}_c(x, y, z, v_4) = 0$, $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(x, y, z, v_4) = 0$ e $\frac{\partial^2 \mathcal{K}_c}{\partial v_4^2}(x, y, z, v_4) \neq 0$. Ou seja,

1. $A_1(x, y, z)v_4^3 + 3A_2(x, y, z)v_4^2 + 3A_3(x, y, z)v_4 + A_4(x, y, z) = 0$
2. $A_1(x, y, z)v_4^2 + 2A_2(x, y, z)v_4 + A_3(x, y, z) = 0$
3. $A_1(x, y, z)v_4 + A_2(x, y, z) \neq 0$.

Mas, discriminante de $\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(x, y, z, v_4) = 4[A_2^2(x, y, z) - A_1(x, y, z)A_3(x, y, z)]$ e, em particular, $\text{discr. } (\frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial v_4}(0, 0, 0, 0)) = 4A_2^2(0, 0, 0) > 0$. Portanto, temos $A_2^2 - A_1A_3 > 0$ numa vizinhança da origem e assim, a equação (2) define funções: $v_4 = v_4(x, y, z) = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - A_1A_3}}{A_1}$, que substituídas na equação (1) resultam em:

$$(A_1A_3 - A_2^2)(A_2A_4 - A_3^2) - \frac{1}{4}(A_1A_4 - A_4 - A_2A_3) = 0 = \Delta(x, y, z).$$

Além disso, numa vizinhança da origem, temos $A_2^2 - A_1A_3 \neq 0$, o que implica que $\text{rank}A(x, y, z) = 1$. Logo, (x, y, z) pertence a uma vizinhança de p em M_2 .

Assim, a imagem dos pontos de dobra de $\bar{\xi}$, sob $\bar{\xi}$, é dada localmente por: $(\Delta(x, y, z) = 0 \text{ e } A_2 - A_1A_3 \neq 0)$. Agora, o resultado segue analogamente ao Teor. III.5.2, uma vez que nas coordenadas escolhidas $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ é a direção assintótica em p .

Teorema IV. b.3.3: Sejam $p \in M_1(3)$, $[v]$ a única direção binormal em p e $[\theta]$ a direção assintótica associada a v . Se p não é umbílico de f_v , então:

- (i) p é uma sing. de dobra de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é transversal a $M_1(3)$.
- (ii) p é uma sing. tipo A_k de $f_v \Leftrightarrow [\theta]$ é tangente a $M_1(3)$ com contato de ordem $(k - 2)$, onde $3 \leq k \leq 5$.

Prova: Do Teorema IV.b.2.1 temos que os pontos de $B_1(3)$ são singularidades de cúspide de $\bar{\xi}$. Como no teorema anterior, se W é uma vizinhança de (p, v) em $B_1(3)$

$$(x, y, z, v_4) \in W \Leftrightarrow \begin{cases} (1) A_1(x, y, z)v_4^3 + 3A_2(x, y, z)v_4^2 + 3A_3(x, y, z)v_4 + A_4(x, y, z) = 0 \\ (2) A_1(x, y, z)v_4^2 + 2A_2(x, y, z)v_4 + A_3(x, y, z) = 0 \\ (3) A_1(x, y, z)v_4 + A_2(x, y, z) = 0 \\ (4) A_1(x, y, z) \neq 0 \end{cases}$$

Substituindo (3) em (2) e (1) vemos que $A_2^2(x, y, z) - A_1(x, y, z)A_3(x, y, z) = 0$ e $A_2(x, y, z).A_3(x, y, z) - A_1(x, y, z).A_4(x, y, z) = 0$ ou seja (x, y, z) pertence a uma vizinhança de p em $M_1(3)$.

Agora, considerando $M_1(3)$ definida implicitamente e procedendo analogamente ao

Teor.III.5.2, obtemos o resultado desejado.

No Teorema que segue, discutimos os pontos umbílicos para um mergulho genérico f .

Recordemos que se p é um ponto umbílico de f_v , então $(p, v) \in \Sigma^2(\Gamma)$. Nesse caso, CM tem duas direções principais de curvatura nula em (p, v) e uma única direção principal de curvatura não nula em (p, v) , cuja translação paralela está em $T_{f(p)}f(M)$. Vamos denotar por M_s , a secção de M pelo 4-espaco ortogonal à translação paralela dessa única direção principal de curvatura não nula. Localmente, esta secção é uma superfície 2-dimensional mergulhada em $\mathbb{R}^4$. Para esta superfície, temos o conceito de ponto de inflexão, como dado em III.1.1.

Teorema IV.b.3.4:

- (a) p é um ponto umbílico elíptico ou hiperbólico de $f_v \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão não degenerado de M_s . Além disso, em uma vizinhança de p , $\Delta^{-1}(0)$ é difeomorfa a um produto cartesiano de $\Delta_s^{-1}(0)$ por um intervalo.
- (b) p é umbílico parabólico de $f_v \Leftrightarrow p$ é um ponto de inflexão degenerado de M_s .

Prova: Seja p um ponto umbílico de f_v . Como antes, vamos assumir que f está na forma de Monge, com $f_2 = f_v$. Agora, usamos o Splitting-Lemma para escrever f_2 como:

- (a) $x^3 + xy^2 + z^2$ se p é um umbílico elíptico ou hiperbólico.

ou

- (b) $x^4 + xy^2 + z^2$ se p é um umbílico parabólico.

Então, $z = 0$ produz uma secção M_s de M , com as propriedades desejadas.

Notemos que, nessas coordenadas, o 2-jato da função curvatura de Gauss-Kronecker, $j^2(\mathcal{K}_c)(0)$, é independente de z e, portanto, $\Delta^{-1}(0)$ é difeomorfa a um produto cartesiano de $\Delta_s^{-1}(0)$ por um intervalo.

Reciprocamente, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $z = 0$ é uma secção de M_s . Neste caso, f tem a forma local:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, 0 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z, f_1(x, y, z), z^2 + f_2(x, y)), \end{aligned}$$

com $(0, 0)$ ponto singular de f_2 do tipo $\bar{D}_4^+$, no caso (a), e D_5 , no caso (b). Então, p é um ponto umbílico de $f_2(x, y, z)$.

CAPÍTULO V

m-Subvariedades com Codimensão k

Dado um mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, de uma m -variedade M em $\mathbb{R}^{m+k}$ e considerando sobre M uma família de funções $\lambda(f)$, vimos que f_v tem uma singularidade em $p \in M \Leftrightarrow v \in N_{f(p)}f(M)$. Além disso, se p é um ponto crítico degenerado de f_v , o hiperplano H_v , ortogonal a v e passando por $f(p)$, tem contato de ordem maior ou igual que 1 com $f(M)$ em $f(p)$.

Notemos que, quando $k = 1$ (hipersuperfície) existe uma única direção normal em cada ponto e, portanto, um único hiperplano tangente cujo contato com $f(M)$, em um ponto genérico, não pode ser superior a 1. Por outro lado, o estudo desenvolvido nos capítulos anteriores permite observar que para subvariedades com codimensão superior ($k \geq 2$) é sempre possível obter hiperplanos tangentes com contato de ordem superior, sobre pontos genericamente distribuídos sobre eles. Por exemplo, em II.8, mostramos que cada ponto de uma curva genericamente mergulhada em $\mathbb{R}^{1+k}$ possui um hiperplano tangente com contato de ordem k . Eventualmente, em pontos isolados (não genéricos), esse contato pode ser de ordem superior.

Vimos, em III.2.2, que se M é uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^4$ ($m = 2; k = 2$), seus pontos podem ser classificados em hiperbólicos (M_2), parabólicos ($\Delta^{-1}(0)$) ou elípticos (M_0), conforme existam duas, uma ou nenhuma direção binormal. Em outras

palavras, em pontos de M_0 todos os hiperplanos tangentes tem contato de 1a ordem com a superfície e, em pontos de M_1 ou M_2 podemos distinguir 1 ou 2, respectivamente, hiperplanos tangentes com contato de ordem maior ou igual a 2.

Agora, se M é uma superfície em $\mathbb{R}^5(m = 2; k = 3)$, mostramos que existem abertos, M_0 e M_c de M tais que em pontos de M_0 , todo hiperplano tangente tem contato de 1a ordem com $f(M)$, enquanto que em cada $p \in M_c$ existe um cone de direções no espaço $N_{f(p)}f(M)$ dando origem a hiperplanos tangentes com contato de ordem maior ou igual a 2. Por sua vez, sob a hipótese $\Sigma^{1,1}(\Gamma) \neq \emptyset$, pudemos distinguir em M_c pontos p em que toda direção do cone c_p é ortogonal a um hiperplano cujo contato com $f(M)$ em $f(p)$ é de ordem exatamente 2, e pontos onde identificamos 1 ou 2 hiperplanos tangentes com contato de ordem maior ou igual a 3.

Já para uma 3-variedade em $\mathbb{R}^5(m = 3; k = 2)$, mostramos que cada um de seus pontos possui pelo menos um e no máximo 3 hiperplanos tangentes com contato de ordem maior ou igual a 2.

Em cada caso, por analogia a curvas em $\mathbb{R}^3$, chamamos ao hiperplano tangente com contato de ordem maior ou igual a k com $f(M)$ no ponto $f(p)$, de hiperplano osculador e à sua direção ortogonal de binormal. Assim, as seguintes perguntas surgem naturalmente:

1. No caso $m = 2; k = 2$ (sup. em $\mathbb{R}^4$), pode uma dessas superfícies ser composta somente por pontos elípticos? Em outras palavras, é possível que nenhum ponto de M admita hiperplano osculador?
2. O que acontece em geral para m -subvariedades de $\mathbb{R}^{m+k}$?
3. Quando $k = 2$, sabemos de II.3 que, se m é ímpar, todo ponto de M admite pelo menos um e no máximo m hiperplanos osculadores. Sendo m par, quais seriam as condições suficientes para garantir que todo ponto de M admite pelo menos um hiperplano osculador?

4. Se m é ímpar, quando existe uma única direção degenerada em cada ponto de M ?

Com o propósito de responder a essas questões e generalizar alguns resultados obtidos nos capítulos anteriores, dividimos nosso estudo em 2 etapas:

- (a) Subvariedades de codimensão 2
- (b) Subvariedades de codimensão maior que 2

No primeiro caso mostramos que toda m -subvariedade genérica M de $\mathbb{R}^{m+2}$ contém uma região aberta e não vazia M_b , tal que $\forall p \in M_b$, existe pelo menos uma direção binormal (resp., um hiperplano osculador), para M em p , o que responde a questão (1) e parcialmente a (2).

Mostramos, ainda, no Teor. V.a.3, que a convexidade local é uma condição suficiente para garantir que todo ponto de uma m -subvariedade, com m par, admite pelo menos uma direção binormal (resp., hiperplano osculador), o que fornece uma resposta para (3).

Conjecturamos que a convexidade seja uma condição suficiente para responder a questão (4).

Utilizando a $(m+1)$ -variedade canal CM e a projeção natural $\xi : CM \rightarrow M$, provamos que, associada a cada direção binormal $[b]$ existe uma direção $[\theta] \subset T_{f(p)}f(M)$, cujo contato com M é de ordem maior que 1 (contato esse medido através do tipo de singularidade da projeção de M sobre o hiperplano ortogonal à direção considerada, no ponto dado).

Por analogia com superfícies em $\mathbb{R}^3$, chamamos $[\theta]$ de direção assintótica de M em p e apresentamos, no Teorema V.a.7, uma versão dos teoremas V.a.1' e V.a.3 para direções assintóticas. Analisamos também, no Teorema V.a.4, as singularidades da

aplicação $\bar{\xi} = \bar{\xi}_{|\kappa_c^{-1}(\emptyset) - \overline{\Sigma^2(\Gamma)}}$, provando que genericamente ela é uma aplicação estável entre variedades de dimensão m .

Em (b) sob a hipótese $\overbrace{\Sigma^1, \dots, 1}^{k-1}(\Gamma) \neq \emptyset$ mostramos que também existe um aberto não vazio M_b , tal que cada um de seus pontos possui pelo menos uma e no máximo m direções binormais. Essas direções correspondem a funções altura com singularidade $A_s(\geq k)$, no ponto. Novamente, utilizamos a aplicação $\xi : CM \rightarrow M$ para detectar pelo menos uma e no máximo m direções tangentes cujo contato com M é de ordem maior que 1. Como antes, chamamos essas direções de assintóticas. No parágrafo V.b.6, analisamos o caso particular de uma superfície genérica em $\mathbb{R}^{2+k}(m = 2; k \geq 4)$ e caracterizamos uma singularidade tipo A_j ($j \geq k$) para as funções alturas em termos da k -ésima curvatura (ver II.8.3) da secção normal assintótica.

V.a. Subvariedades de codimensão 2

Dada uma m -variedade fechada conexa, orientada e $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ um mergulho, considerando a família de funções altura sobre M :

$$\begin{aligned} \lambda(f) : M \times S^{m+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+2} \times S^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\longmapsto (f(p), v) \longmapsto \lambda(f)(p, v) = \langle f(p), v \rangle, \end{aligned}$$

mostramos em II.3 que, uma análise da equação $h_p(v_{m+1}, v_{m+2}) = 0$, produz uma subdivisão de M , de acordo com o número de raízes reais e as respectivas multiplicidades que apresenta em cada ponto p .

Teorema V.a.1: Toda m -subvariedade genérica M em $\mathbb{R}^{m+2}$ contém uma região aberta $\mathcal{R}$, não vazia, com a propriedade que $\forall p \in \mathcal{R}$, existe pelo menos uma direção degenerada em p . Além disso, se m é ímpar, $\mathcal{R} = M$.

Prova: De II.3 segue que:

(i) se m é par, existe uma região aberta M_0 (que pode ser vazia) de M , constituída

de pontos em que todas as direções normais dão origem a funções altura não degeneradas.

- (ii) Se m é ímpar, em cada ponto p de M existe pelo menos uma e no máximo m direções degeneradas em p , (Teor. II.3.1).

É suficiente, então, mostrar que no caso (i) não podemos ter $M = M_0$. De fato, caso contrário, se considerarmos a hipersuperfície canal de M , CM , a aplicação normal de Gauss $\Gamma : CM \rightarrow S^{m+1}$ não teria pontos singulares. Mas, os pontos singulares de Γ são precisamente os pares (p, v) tais que $[v]$ é uma direção degenerada em p . Assim, podemos concluir que a curvatura de Gauss-Kronecker de CM não se anula em todo ponto. Como CM é uma superfície conexa, compacta, orientada, podemos concluir que ela é estritamente convexa (ver [58]). Então CM é homeomorfa a S^{m+1} (ver [50]). Mas, isto contradiz o fato que CM é a hipersuperfície canal de M , pois $CM \sim M \times S^1$ e, nesse caso, $\pi_1(CM) \neq \pi_1(S^{m+1}) = \{0\}$.

Reformulando o resultado acima em termos de binormais, podemos enunciar:

Teorema V.a.1': Toda m -subvariedade genérica M de $\mathbb{R}^{m+2}$ contém uma região aberta M_b não vazia, tal que $\forall p \in M_b$ existem pelo menos uma e no máximo m direções binormais para M em p . O número máximo de vetores binormais em todo ponto de M é m . Além disso, se m é ímpar, a região M_b coincide com M .

Corolário V.a.2: Toda m -subvariedade M genericamente mergulhada em $\mathbb{R}^{m+2}$ admite hiperplano osculador sobre uma subvariedade aberta, não vazia.

O teorema abaixo prova que a convexidade local é uma condição suficiente para a existência de binormal em variedades com dimensão par e codimensão $k, k \geq 2$.

Teorema V.a.3: Seja M uma m -subvariedade genérica de $\mathbb{R}^{m+2}$, localmente convexa, com m par. Então, cada ponto $p \in M$ tem pelo menos um vetor binormal.

Prova: Seja M_0 como anteriormente; vamos mostrar que $M_0 = \emptyset$.

Suponhamos que exista algum ponto $p \in M_0$; pela convexidade local de M , existe um hiperplano suporte H para M em p . Escolhemos um sistema de coordenadas em p , como no Lema II.2.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, 0 &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, (0, 0) \\ x &\longmapsto f(x) = (x, f_1(x), \dots, f_k(x)) \end{aligned}$$

de modo que $f_v(x) = f_k(x)$ e projetemos no plano $[f_{k-1}, f_k]$ gerado pelas duas últimas componentes. Então, genericamente, podemos assumir que $j^2 f_{(k)}(0) = x_1^2 + \dots + x_m^2$.

Seja $M(q_i)$ a matriz associada à parte quadrática de f_i ($i = 1, \dots, k$). Assim, dado $\omega \in N_{f(p)}f(M)$, $\omega = (0, \dots, 0, \omega_{m+1}, \omega_{m+2})$, temos:

$$\det \left[M(q_1) + \frac{\omega_{m+2}}{\omega_{m+1}} M(q_2) \right] = 0 \Leftrightarrow h_p(\omega_{m+1}, \omega_{m+2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_{m+2}}{\omega_{m+1}}$$

é auto-valor de $M(q_1)$, o que contradiz a hipótese de $p \in M_0$. $\square$

Conjectura: Se f é um mergulho genérico e convexo de M em $\mathbb{R}^{m+2}$, com m ímpar então $M_1(1) = M$, isto é, em todo ponto de M existe uma única direção binormal.

Consideremos agora a hipersuperfície canal de M , CM , e as projeções:

$$\begin{aligned} \Gamma : CM &\rightarrow S^{m+1} & \xi : CM &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto v & (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

Do Teorema II.5.8 sabemos que, se f é genérica, com $m+k < 6$ as únicas singularidades de Γ são as catástrofes elementares. Além disso, fora dos pontos de $\overline{\Sigma^2(\Gamma)}$, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é uma m -variedade. Consideremos, então:

$\bar{\xi} = \xi|_{\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \overline{\Sigma^2(\Gamma)}}$, $B = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)/p \in M_b\}$, onde M_b é a região aberta dada no Teorema V.a.1' e $B_{j-r} = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) - \overline{\Sigma^2(\Gamma)}/p \in M_{j-r}(i_1, \dots, i_{j-r})$ para algum $j = 0, \dots, m\}$ ($r = 1, \dots, j$).

Quando $(m, m+2)$ pertence às boas dimensões de Mather [15], o seguinte teorema mostra que $\bar{\xi}$ é uma aplicação estável:

Teorema V.a.4:

(i) $\bar{\xi} : B \rightarrow M_b$ é difeomorfismo local.

(ii) $(p, v) \in B_{j-r}$ e $(p, v) \notin \overline{\Sigma^2(\Gamma)} \Leftrightarrow \bar{\xi}|_{B_{j-r}}$ tem uma singularidade tipo $\sum \overbrace{1, \dots, 1}^r$ o em (p, v) .

Prova: (i) Basta notar que $M_b = \cup_{j=0}^m M_j(\overbrace{1, \dots, 1}^j)$ (Teor. II.3.1) e, portanto, se $p \in M_b$ então $p \in M_j(\overbrace{1, \dots, 1}^j)$, para algum j . Logo, a equação $h_p = 0$ possui j raízes reais e distintas. Seja v uma direção degenerada dada por uma dessas raízes. Assim, $(p, v) \in B$ e procedendo como na Prop. II.5.5 para a escolha de coordenadas em (p, v) e utilizando a Prop. II.6.1, podemos concluir que $\frac{\partial \kappa_c}{\partial v_{m+1}}(p, v) \neq 0$, o que equivale a dizer que $\bar{\xi}$ é difeomorfismo numa vizinhança de (p, v) .

(ii) $(p, v) \in B_{j-r} \Leftrightarrow p \in M_{j-r}$, para algum $r = 1, \dots, j$ e as coordenadas normais de v são raízes de $h_p = 0$, com multiplicidade r (*). Mas, pelo Teorema II.7.2, isto é equivalente a $\frac{\partial^\ell \kappa_c}{\partial v_{m+1}^\ell}(p, v) = 0$ ($\forall \ell = 0, \dots, r-1$) e $\frac{\partial^r \kappa_c}{\partial v_{m+1}^r}(p, v) \neq 0$. Logo, $e_{m+1} = (0, \dots, 0, 1, 0)$ (que é o núcleo da projeção $\bar{\xi}$) não está contido em $\mathbb{T}_{(p,v)} B_{j-r}$, pois, caso contrário, teríamos $\frac{\partial^\ell \kappa_c}{\partial v_{m+1}^\ell}(p, v) \cdot e_{m+1} = 0$ ($\forall \ell = 0, \dots, r-1$), contrariando (*). Portanto, (p, v) é uma singularidade tipo $\sum \overbrace{1, \dots, 1}^r$ de $\bar{\xi}|_{B_{j-r}}$. A recíproca, segue imediatamente.

Notemos que a cada ponto (p, v) de $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \overline{\Sigma^2(\Gamma)}$ existe uma única direção de curvatura principal nula para CM .

Definição V.a.5: Chamamos direção assintótica de M em p à direção $[\theta] \subset \mathbb{T}_{f(p)} f(M)$, imagem sob $D\bar{\xi}$, da única direção principal de curvatura de CM em (p, v) .

Dessa forma, podemos enunciar o seguinte

Teorema V.a.6: Toda m -subvariedade genérica M de $\mathbb{R}^{m+2}$ contém uma região aberta M_b , não vazia, tal que $\forall p \in M_b$ existe pelo menos uma direção assintótica para M em p . O número máximo de direções assintóticas em todo ponto de M é m . Além disso se m é ímpar, $M_b = M$.

Sejam $p \in M$ e

$$\begin{aligned} h_\alpha : M &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \\ p &\mapsto h_\alpha(p) = f(p) - \langle \alpha, f(p) \rangle \alpha, \quad \alpha \in S^{m+1}, \end{aligned}$$

a restrição a M da projeção sobre o hiperplano ortogonal a α . Então,

Teorema V.a.7: Se $[\theta]$ é uma direção assintótica em p , então h_θ tem uma singularidade tipo Σ^1 em p .

Prova: É inteiramente análoga a do Teor. IV.b.2.3, com $f_2(x) = f_2(x_1, \dots, x_m)$ sendo considerado na forma

(i) $x_1^3 + \bar{f}_2(x_2, \dots, x_m)$ se $(p, v) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma)$ ou

(ii) $x_1^k + x_1 x_2^2 + \bar{f}_2(x_2, \dots, x_m)$ se $(p, v) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-2}, 0}(\Gamma)$. $\square$

V.b. Subvariedades com Codimensão Maior que 2

Seja f um mergulho de uma m -variedade M fechada, conexa, orientada em $\mathbb{R}^{m+k}$ ($k \geq 3$) e consideremos sobre M a família de funções altura:

$$\begin{aligned} \lambda(f) : M \times S^{m+k-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\longmapsto \lambda(f)(p, v) = \langle f(p), v \rangle \end{aligned}$$

Nesse caso, a equação $h_p = 0$, que caracteriza as direções degeneradas de M em p , é dada por um polinômio homogêneo de grau m em k variáveis. Na ausência de uma classificação de polinômios do tipo acima, quanto aos seus conjuntos de zeros, ficamos impossibilitados de obter uma estratificação da variedade em função do conjunto de direções degeneradas, como anteriormente. Sabemos, no entanto, que o conjunto de zeros de $h_p(v_{m+1}, \dots, v_{m+k})$ é constituído apenas pela origem ou é um cone. Além disso, para pontos situados num aberto de M , esse cone tem codimensão 1 em $N_{f(p)}f(M)$.

Denotemos por

$M_c = \{p \in M / h_p^{-1}(0) \text{ é um cone de codim. } 1 \text{ em } N_{f(p)}f(M)\} = \{p \in M / \text{ existe um cone } c_p \text{ de codim. } 1 \text{ em } N_{f(p)}f(M) \text{ de direções degeneradas em } p\}$ e

$M_0 = \{p \in M / h_p^{-1}(0) = \emptyset\} = \{p \in M / f_v \text{ é de Morse em } p, \forall v \in N_{f(p)}f(M)\}.$

Lema V.b.1. Se f é um mergulho genérico, então $M_0 \stackrel{c}{\neq} M$.

Prova: Supondo $M = M_0$, exatamente o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema V.a.1(i), mostra que $CM \approx S^{m+k-1}$ contrariando o fato de que CM é a hipersuperfície canal de M ($CM \approx M \times S^{k-1}$).

Teorema V.b.2: Toda m -subvariedade genérica M em $\mathbb{R}^{m+k}$, satisfazendo a condição $\sum_{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-1}}(\Gamma) \neq \emptyset$, contém um aberto $\mathcal{R}$, não vazio, com a propriedade que $\forall p \in \mathcal{R}$, existem exatamente m direções degeneradas em p correspondendo a funções altura com singularidade $A_s(s \geq k)$ em p .

Prova: Do Lema V.b.1, podemos supor $M_c \neq \emptyset$.

Seja $p \in M_c$ e $v \in c_p$; assim f_v tem uma singularidade A_s ($s \geq 2$) em p . Escolhemos sistemas de coordenadas de maneira que f esteja, localmente, na forma de Monge (como no Lema II.2.2) e de tal sorte que $f_v = f_{\underline{v}}$. Logo, podemos considerar $f_v(x_1, \dots, x_m) = q(x_2, \dots, x_m) + v_{m+1}\varepsilon_1(x) + \dots + v_{m+k}\varepsilon_k(x)$, onde q é uma forma quadrática não degenerada nas variáveis $x_2, \dots, x_m$ e $\varepsilon_i \in m^3(m)$ ($\forall i = 1, \dots, k$).

Agora, p é um ponto de dobra (A_2) de $f_v \Leftrightarrow (\ell_1)_p = a_{30}^1 v_{m+1} + a_{30}^2 v_{m+2} + \dots + a_{30}^k v_{m+k} \neq 0$, onde a_{30}^i denota o coeficiente do termo cúbico na variável x_1 (x_1^3), da função f_i ($i = 1, \dots, k$). Como, por hipótese $\sum_{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-1}}(\Gamma)$ é não vazio, podemos assumir que em c_p existem direções dando origem a funções altura com singularidade A_s ($s \geq k$).

Mas, dado $v \in N_{f(p)}f(M)$, $v = (0, \dots, 0, v_{m+1}, \dots, v_{m+k})$, a função f_v tem uma singularidade A_s ($s \geq 3$) em p se, e somente se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k a_{21}^i v_{m+i} \neq 0 \\ h_p(v_{m+1}, \dots, v_{m+k}) = 0 \\ (\ell_r)_p(v_{m+1}, \dots, v_{m+k}) = 0 \quad (\forall r = 1, \dots, s-2) \\ (\ell_{s-1})_p(v_{m+1}, \dots, v_{m+k}) \neq 0 \end{cases}$$

onde: a_{21}^i representa o coeficiente de $x_1^2 x_i$, para algum $j = 2, \dots, m$ no polinômio de Taylor de f_i ($i = 1, \dots, k$), $(\ell_r)_p = \sum_{i=1}^k a_{r0}^i v_{m+i}$ (a_{r0}^i é o coeficiente de x_1^r no polinômio de Taylor de f_i). Ou seja, v deve pertencer a $(c_s)_p = h_p^{-1}(0) \cap (\cap_{r=1}^{s-2} (\ell_r)_p^{-1}(0))$. Mas, se a intersecção ocorre transversalmente, então $(c_s)_p = \emptyset$ ou $(c_s)_p$ é uma subvariedade algébrica de codimensão s . Por outro lado, o conjunto dos pontos $p \in M$ para os quais a intersecção ocorre transversalmente é aberto. Assim, existem abertos $\mathcal{D}$ e $\mathcal{R}$ em M_c :

$$\mathcal{D} = \{p \in M_c / (c_s)_p = \emptyset \quad (\forall s = 3, \dots, k)\}$$

$$\mathcal{R} = \{p \in M_c / (c_s)_p \text{ é subvariedade algébrica de cod. } s \quad (\forall s = 3, \dots, k)\}$$

tais que, se $p \in \mathcal{D}$ ($\forall v \in c_p$), f_v tem singularidade tipo A_2 em p e, se $p \in \mathcal{R}$ existem pelo menos uma e no máximo m direções em $N_{f(p)}f(M)$ dando origem a funções altura com singularidade A_s ($s \geq k$) em p .

Obs. V.b.3: Se f_b tem uma sing. A_s ($s \geq k$) em p , então o contato do hiperplano ortogonal a b com $f(M)$, no ponto $f(p)$, é de ordem maior ou igual a k . Assim, chamamos $[b]$ de direção binormal e o hiperplano ortogonal a b , $b^\perp$, de osculador.

Teorema V.b.4: Toda m -subvariedade genérica M em $\mathbb{R}^{m+k}$ ($k \geq 3$) satisfazendo a condição $\sum_{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-1}}(\Gamma) \neq \emptyset$ contém um aberto M_b , não vazio, tal que $\forall p \in M_b$ existem

pelo menos uma e no máximo m direções binormais em p .

Consideremos $\xi : CM \rightarrow M$ a projeção natural, $\bar{\xi} = \xi|_{\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \overline{\sum^2(\Gamma)}}$ e

$$B = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) / p \in M_b \text{ e } v \text{ é binormal de } M \text{ em } p\}.$$

Proposição V.b.5: $\bar{\xi}|_B : B \rightarrow M_b$ é difeomorfismo local.

Prova: Basta notar que, $(p, v) \in B \Leftrightarrow p \in M_b$ e v é binormal em p . Assim, as coordenadas de v devem satisfazer simultaneamente as equações:
$$\begin{cases} \bar{h}_p = 0 \\ (\ell_r)_p = 0 \quad (\forall r = 1, \dots, k-2) \end{cases}$$

Substituindo as relações dadas por $(\ell_r)_p = 0$ que envolvendo as variáveis $v_{m+1}, \dots, v_{m+k-1}$, na primeira equação, obtemos $\bar{h}_p(v_{m+k-1}, 1) = 0$, uma equação de grau m em uma variável ($v_{m+k} = 1$, em virtude do sistema de coordenadas escolhido no Teor. V.b.2.). Como p pertence ao aberto em que $(c_k)_p \neq \emptyset$, então $\bar{h}_p(v_{m+k-1}, 1) = \bar{\mathcal{K}}_c(p, v_{m+k-1}) = 0$ deve admitir pelo menos uma e no máximo m raízes reais simples, isto é, $p \in M_j(\overbrace{1, \dots, 1}^j) \subset M^{m-j}$ ($j = 0, \dots, m$), conforme notação adotada em II.3.

Portanto, $v_{m+k-1} = 0$ é uma raiz simples de $\bar{h}_p = 0$ e do Teor. II.7.2 temos que $\frac{\partial \bar{\mathcal{K}}_c}{\partial v_{m+k-1}}(p, v) \neq 0$. Mas, isto é equivalente a $\bar{\xi}|_B$ ser difeomorfismo numa vizinhança de (p, v) .

Observemos que em cada ponto $(p, v) \in B \cap \overline{\sum^1, \dots, 1}(\Gamma)$ existe uma única direção principal de curvatura nula, cujo contato com CM em (p, v) é de ordem maior ou igual a $k-1$. Vamos chamar de direção assintótica de M em p à imagem dessa direção sob $D\bar{\xi}(p, v)$. Assim, podemos concluir que em todo ponto $p \in M_b$ existem pelo menos uma e no máximo m direções assintóticas.

Para cada $\alpha \in S^{m+k-1}$, consideremos a restrição a M da projeção sobre o hiperplano ortogonal a α :

$$\begin{aligned} h_\alpha : M &\rightarrow \mathbb{R}^{m+k-1} \\ p &\mapsto h_\alpha(p) = f(p) - \langle \alpha, f(p) \rangle \alpha \end{aligned}$$

Conjectura: Se $[\theta]$ é uma direção assintótica em p , então p é uma singularidade de h_θ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão maior ou igual a $k - 1$.

V.b.6. Superfícies com Codimensão k

Analizamos aqui o caso particular de uma superfície M genericamente mergulhada em $\mathbb{R}^{2+k}$ ($m = 2, k \geq 4$). Neste caso, h_p é uma forma quadrática em k -variáveis. Se h_p é uma forma quadrática definida positiva, $h_p^{-1}(0) = \{0\}$. Por outro lado, se h_p é uma forma quadrática não degenerada e semi-definida, então $h_p^{-1}(0)$ é um cone (c_p). Assim,

$$M_0 = \{p \in M / h_p^{-1}(0) = \{0\}\} = \{p \in M / f_v \text{ é de Morse em } p \quad (\forall v \in N_{f(p)}f(M))\} \text{ e}$$

$$M_c = \{p \in M / \text{ existe um cone de direções degeneradas em } p\}.$$

Do Lema V.b.1, sabemos que $M_0 \subsetneq M$ e, portanto, $M_c \neq \emptyset$. Sabemos também, pelo Teor. V.b.2 que, se $\sum_{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-1}}(\Gamma) \neq \emptyset$, existem abertos $(M_c)_0$, $(M_c)_2$ e uma curva $(M_c)_1$ de M_c , dados por:

$$(M_c)_0 = \{p \in M_c / f_v \text{ tem singularidade } A_{k-1} \text{ em } p, \forall v \in c_p \cap (\cap_{r=1}^k(\ell_r)_p)\} \text{ e;}$$

$$(M_c)_2 = \{p \in M_c / \text{ existem exatamente duas direções } [b_1], [b_2] \text{ tais que } f_{b_i} \text{ (} i = 1, 2 \text{) tem sing. } A_j \text{ (} j \geq k \text{) em } p\} \text{ e}$$

$$= \{p \in M_c / \text{ existem exatamente 2 direções binormais em } p\}.$$

$$(M_c)_1 = \{p \in M / \text{ existe uma única direção } [b] \text{ tal que } f_b \text{ tem sing. } A_j \text{ (} j \geq k \text{) em } p\} = \{p \in M / \text{ existe uma única direção binormal em } p\}.$$

Em M , ainda, existirão curvas constituídas de pontos cuja forma quadrática h_p associada é degenerada. Estas serão distinguidas uma das outras pelo tipo da forma quadrática degenerada e pelo seu corank até no máximo $k - 2$ em cada ponto. Ao

longo dessas curvas aparecerão os pontos umbílicos para as funções alturas.

O teorema que segue caracteriza uma singularidade de tipo A_j ($j \geq k$) para as funções altura em termos da k -ésima curvatura da seção normal assintótica (ver II.8.3).

Seja $[\theta]$ uma direção assintótica em p , associada a um vetor binormal v . A secção normal de $f(M)$ na direção $[\theta]$ é uma curva em um $(k+1)$ -espaço, que chamamos de secção normal assintótica.

Teorema V.b.6.1: Seja $p \in (M_c)_2$; $p \in (M_c)_2 \cap \bar{\xi}(\overbrace{\Sigma^1, \dots, 1^0}^{k-1}(\Gamma)) \Leftrightarrow \gamma_\theta$ tem a k -ésima curvatura (Def. II.8.3) não nula em p . Agora, se γ_θ tem a k -ésima curvatura nula em p , então $p \in \bar{\xi}(\overbrace{\Sigma^1, \dots, 1}^k(\Gamma))$, ou equivalentemente, f_v tem uma singularidade A_j ($j \geq k+1$) em p . Além disso,

p é uma singularidade A_{k+1} de $f_v \Leftrightarrow \gamma_\theta$ é transversal a $\bar{\xi}(\overbrace{\Sigma^1, \dots, 1}^k(\Gamma))$.

p é uma sing. A_{k+s} de f_v ($s \geq 2$) $\Leftrightarrow \gamma_\theta$ é tangente a $\bar{\xi}(\overbrace{\Sigma^1, \dots, 1^0}^{k+s}(\Gamma))$ com contato de ordem $(s-1)$.

Prova: É feita passo a passo como no Teor. IV.a.3, fazendo as devidas adaptações uma vez que, localmente f é dada por:

$$f(x, y) = (x, y, f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)).$$

Capítulo VI

Dualidade

A família de funções altura $\lambda(f)$ sobre M , induz uma estratificação da variedade dos parâmetros S^{m+k-1} ($k \geq 1$), chamada “Estratificação de Gauss da Esfera” associada ao mergulho f , $G(f)$ ([51]).

Do mesmo modo, as singularidades apresentadas pela família de projeções de M sobre hiperplanos, $h(f)$, determinam uma outra estratificação de S^{m+k-1} , $\mathcal{P}(f)$.

Pelo corolário I.a.8.2 podemos concluir que para a maioria dos parâmetros v (resp. α) a função f_v (resp. aplicação h_α é estável). O conjunto dos pontos v (resp. α) para os quais f_v (resp. h_α) deixa de ser estável é chamado conjunto bifurcação de $\lambda(f)$ (resp. $h(f)$).

Sob o ponto de vista de contato, os estratos de codimensão maior ou igual a 1 (correspondentes aos conjuntos de bifurcação), em $G(f)$, distinguem direções ortogonais a hiperplanos e, em $\mathcal{P}(f)$, retas tangentes cujo contato com M é maior que um.

Nosso objetivo é analisar a existência de uma relação entre essas “direções privilegiadas” no estilo da dualidade que Bruce e Romero Fuster encontraram para o caso de curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$ [11].

Abordamos, nessa direção, o problema para hipersuperfícies, subvariedades com codimensão 2 e m -subvariedades com codimensão k ($k \geq 2$) em geral. Nos dois primeiros casos, mostramos que os estratos das direções binormais e os das direções assintóticas situadas em estratos de S^{m+k-1} com codimensão igual a 1 são duais entre si. (Teor. VI.3.1 e Teor. VI.4.3). No caso geral ($k > 2$) conjecturamos que um resultado análogo seja verdadeiro.

VI.1. A Estratificação de Gauss da Esfera

Seja $f : M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ($k = 1$) um mergulho genérico de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^{m+1}$ e denotemos por $\gamma(f) : M \rightarrow S^m$ a aplicação de Gauss associada a f .

Ao considerarmos as singularidades da família de funções altura, $\lambda(f)$, sobre M , obtemos uma estratificação $G(f)$ do espaço de parâmetros S^m , chamada estratificação de Gauss induzida pelo mergulho f (ver [51]). Podemos descrever os estratos de $G(f)$ da seguinte maneira:

Denotemos por $G^j(f)$ as subvariedades de S^m formada pela união de todos os estratos de codimensão j na estratificação $G(f)$. Por comodidade, vamos suprimir a referência ao mergulho f e escrever simplesmente $G^0, G^1, G^2, \dots$

O estrato de codimensão 0 é composto dos pontos $v \in S^m$ tais que a correspondente função altura f_v sobre M é estável (todos os seus pontos críticos são não degenerados, com valores críticos distintos). A união G^0 , de todos esses estratos é um subconjunto aberto e denso de S^m , sendo cada estrato, aberto.

Utilizando uma notação introduzida em [15], dado $v \in S^m$, podemos escrever:

$\nu_1(v) = \nu_1(f_v)$ = soma das codimensões dos pontos críticos de f e

$\nu_2(v) = \nu_2(f_v)$ = soma das codimensões dos valores críticos de f_v , onde a codimensão

de um ponto crítico de uma função é definida como a codimensão de seu germe no referido ponto e a codimensão de um valor crítico, c , de uma função g é o número de pontos críticos no subconjunto $g^{-1}(c)$ menos um. Nesse caso, dizemos que v é do tipo $(\nu_1(v), \nu_2(v))$. Segue de [50, II.4.2], que v deve pertencer ao estrato G de codimensão $\nu_1(v) + \nu_2(v)$ em S^m . Assim, a subvariedade G^1 é composta de dois tipos de pontos: aqueles do tipo $(0,1)$ (isto é, f_v tem somente pontos críticos não degenerados, dois deles na mesma altura [ver fig. 11], e pontos de tipo $(1,0)$ (funções altura tendo um único ponto crítico degenerado no mesmo nível, do tipo dobra: $x_1^3 + q(x_2, \dots, x_m)$, onde q é uma forma quadrática não degenerada nas variáveis $x_2, \dots, x_m$).

A subvariedade G^2 é composta de 3 tipos de pontos $(0,2)$, $(1,1)$ ou $(2,0)$ [ver fig. 11]. E, assim por diante, G^j é composta de subvariedades (estratos) formados de pontos de tipo $(j+1)$, isto é, $(0, j)$, $(1, j-1)$, $(2, j-2)$, ..., ou $(j, 0)$.

A estratificação de Gauss, $G(f)$, de S^m induzida pelo mergulho genérico f é definida como aquela dada pelas componentes dos estratos de $G(f)$.

Figura 11. A estratificação de Gauss da esfera.

A título de exemplo, seja M uma superfície genérica em $\mathbb{R}^3$ ($m = 2$; $k = 1$). Neste

caso, a família de funções altura pode ter somente singularidades A_1 , A_2 ou A_3 . Quanto à multiplicidade dos valores críticos, ela pode apresentar 2 singularidades A_1 no mesmo nível ($2A_1$), 3 singularidades A_1 no mesmo nível ($3A_1$) ou uma singularidade A_1 e uma A_2 no mesmo nível (A_1A_2), que correspondem a planos bitangentes, tritangentes ou um plano bitangente que oscula em um de seus pontos, respectivamente. A figura [12] mostra o conjunto bifurcação desse caso (isto é, os pontos $v \in S^2$ tais que f_v não é estável).

Figura 12. Conjunto de bifurcação para funções alturas

Observação: Os estratos A_2 e $2A_1$ podem se interceptar e auto-interceptar, correspondendo a planos osculadores paralelos, planos bitangentes paralelos e planos bitangentes paralelos a planos osculadores.

VI.2. Hipersuperfícies e Projeções sobre Hiperplanos

Seja f um mergulho de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^{m+1}$ e consideremos a família de projeções de M sobre hiperplanos:

$$\begin{aligned} h(f) : M \times S^m &\rightarrow TS^m \\ (p, v) &\mapsto (v, f(p) - \langle f(p), v \rangle v), \end{aligned}$$

onde TS^m é o fibrado tangente a S^m , que pode ser pensada como uma família de aplicações $M \rightarrow \mathbb{R}^m$, parametrizada por pontos de S^m .

Do Corolário I.a.5.2 segue que existe um conjunto aberto e denso de $\alpha \in S^m$ tais que $h_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é estável. Ao conjunto dos pontos de S^m para os quais h_α deixa de ser estável chamaremos conjunto de bifurcação de $h(f)$.

Segue, ainda, do Teorema I.a.5.1 que existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{M}'$ em $\text{Emb}(M, \mathbb{R}^{m+1})$ tal que para toda $f \in \mathcal{M}'$ a família $h(f)$ é localmente versal. Isto significa que a aplicação extensão multi-jato associada à família $h(f)$ é transversal à estratificação canônica do espaço de multi-jatos.

Observação VI.2.1: Neste e nos dois próximos parágrafos, quando considerarmos um mergulho genérico, estaremos nos referindo a um mergulho tal que, ambas as famílias, $\lambda(f)$ e $h(f)$, são localmente versais.

Lema VI.2.2: p é um ponto singular de $h_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in T_{f(p)}f(M)$.

Prova: Basta supor o mergulho f , localmente, na forma de Monge e observar que p é um ponto regular de $h_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in N_{f(p)}f(M)$.

Por exemplo, se M é uma superfície genérica em $\mathbb{R}^3$, as singularidades locais que h_α pode apresentar são:

a) Singularidades locais:

(a.1) dobra	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^2)$	
(a.2) cúspide	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1^2 + x_2^3)$	<i>cod.0</i>
(a.3) rabo de andorinha	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^4 + x_1x_2)$	
(a.4) lips	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3 + 3x_1^2x_2)$	<i>cod.1</i>
(a.5) beaks	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3 - 3x_1^2x_2)$	
(a.6) borboleta	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^4 + x_1x_2 + x_1x_2^3)$	
(a.7) goose	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3 + x_1^3x_2)$	<i>cod.2</i>
(a.8) gulls	$: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^4 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2)$	

b) Singularidades multi-locais

Cod.0: (b.1) interseção transversal de dobras

Cod.1: (b.2) interseção de 3 dobras 2 a 2 transversais

(b.3) dobra tangente,

(b.4) dobra + cúspide

Cod.2: (b.5) interseção de 4 dobras 2 a 2 transversais,

(b.6) cúspide dupla,

(b.7) dobra + cúspide dupla,

(b.8) dobra tangente + dobra,

(b.9) dobra com ponto de 3-contato,

(b.10) cúspide + dobra tangente,

(b.11) rabo de andorinha + dobra,

(b.12) lips + dobra,

(b.13) beaks + dobra.

Transcrevemos, a seguir, os diagramas de bifurcação para esse caso, e que podem ser encontrados em [30].

		b			$p+p+p$
$/$	p		$p+p$		l		$p+p$
$<$	c			q			$p+c$

G			$p+q$

g		$p++p$			$p+p+p$
$<$	$*$	p		$p+p+c$			$p+p+c$

$p++p$		$p+b$			$p++c$
$/$		$p+l$		$p+p+p+p$			$p+p+p+p$

Figura 13

Recordemos que $[\theta]$ é uma direção assintótica se a curvatura normal de M em p , na direção $[\theta]$ é nula. Além disso, é bem conhecido que p é um ponto regular de $\gamma(f) \Leftrightarrow f_v$ tem uma singularidade de Morse em p , onde $v = \gamma(f)(p)$.

Teorema VI.2.3: Seja f um mergulho genérico.

- (i) Se $[\theta]$ é uma direção assintótica de M em p e p é ponto regular de $\gamma(f)$, então h_θ tem uma singularidade tipo $\underline{\Sigma}^{\overbrace{1, \dots, 1}^r}$ em p ($2 \leq r \leq m+1$) (ver I.a.1.13).
- (ii) Se $[\theta]$ é uma direção assintótica de M em p e $p \in \Sigma^{1,0}(\gamma(f))$ então as singularidades de h_θ em p com cod.1, são do tipo lips ou beaks, ou seja, o germe de h_θ em p é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos germes:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^m, 0 \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_2, \dots, x_m, x_1^3 + q(x_2, \dots, x_m) \pm 3x_1x_2^2) \end{aligned}$$

onde q é uma forma quadrática não degenerada nas variáveis $x_2, \dots, x_m$.

Prova: Suponhamos f localmente, na forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, 0 \\ x &\mapsto f(x) = (x, f_1(x)) \end{aligned}$$

e de maneira que $e_1 = (1, 0, \dots, 0) = \theta$. Assim, a correspondente secção normal assintótica tem a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, 0 \\ x_1 &\mapsto (x_1, 0, \dots, 0, \alpha x_1^3 + 0(x_1^4)) \end{aligned}$$

e, portanto, o mergulho f pode ser descrito, localmente, por

$$f(x_1, \bar{x}) = (x_1, \bar{x}, \sum_{j=2}^m a_{1j} x_1 x_j + q(\bar{x}) + \varepsilon(x_1, \bar{x})),$$

onde q é uma forma quadrática não degenerada nas variáveis $x_2, \dots, x_m$, $\varepsilon \in m^3(m-1)$ e $\bar{x} = (x_2, \dots, x_m)$. Nessas condições, $h_\theta(x_1, \bar{x}) = (\bar{x}, \sum_{j=2}^m a_{1j} x_1 x_j + q(\bar{x}) + \varepsilon(x_1, \bar{x}))$. Agora,

- (i) Se p é ponto regular de $\gamma(f)$, então f_v é de Morse em p , onde $v = \gamma(f)(p)$. Mas, nas coordenadas escolhidas, $f_v = f_1$. Assim, a parte quadrática do 2-jato de f_v é não degenerada, implicando que $a_{1j} \neq 0$ para algum $j = 2, \dots, m$ (digamos que seja a_{12}). Logo, como o mergulho é genérico, o germe de h_θ em p é $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^m, 0 \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_2, \dots, x_m, x_1^{r+1} + x_1 x_2 + \dots + x_1^{r-1} \cdot x_r) \end{aligned}$$

que é de tipo $\sum \overbrace{1, \dots, 1}^r$ em p , (Teorema I.a.1.15).

- (ii) Se $p \in \Sigma^{1,0}(\gamma(f))$ então p é um ponto de dobra de f_v ($v = \gamma(f)(p)$) implicando que $a_{1j} = 0 (\forall j = 2, \dots, m)$. Nesse caso, escolhendo um novo sistema de coordenadas na fonte, se necessário, podemos supor f localmente na forma: $f(x_1, \bar{x}) = (x_1, \bar{x}, q(x_2, \dots, x_m) + \alpha_1 x_1^3 + 3\alpha_{12} x_1^2 x_2 + 3\alpha_{21} x_1 x_2^2 + \alpha_2 x_2^3 + \dots)$ com $\alpha_1 \neq 0$.

Portanto, localmente, $h_\theta(x, \bar{x}) = (\bar{x}, q(x_2, \dots, x_m) + \alpha_1 x_1^5 + 3\alpha_{21} x_1^2 x_2 + 3\alpha_{12} x_1 x_2^2 + \dots)$, que é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_2, \dots, x_m, x_1^3 + q(\bar{x}) + 3x_1 x_2^2)$, pois a codimensão de h_θ é igual a 1.

Em vista do Teorema VI.2.4 é natural esperar que os estratos de $\mathcal{P}(f)$ envolvendo lips e beaks sejam aqueles relacionados com os estratos de $G(f)$ envolvendo singularidades de tipo A_2 , uma vez que ambos correspondem a pontos parabólicos de M (no caso (i) $[\theta]$ é direção assintótica mas não é direção principal de curvatura).

De um modo geral, assim como as singularidades de $\lambda(f)$ induzem uma estratificação $G(f)$ sobre S^m ([51]), ao considerarmos as singularidades da família de projeções $h(f)$, obtemos uma outra estratificação de S^m , que denotaremos por $\mathcal{P}(f)$.

Sob o ponto de vista de contato, os estratos de codimensão maior ou igual a 1 (que correspondem aos conjuntos de bifurcação), em $G(f)$, distinguem direções ortogonais a hiperplanos com contato maior ou igual a 1 ou hiperplanos com 2 ou mais pontos de contato e, em $\mathcal{P}(f)$ direções assintóticas que dão origem a retas com contato de ordem maior ou igual a 1, retas bitangentes ou com mais pontos de contato com M .

Então, uma pergunta surge naturalmente:

“Que relação existe entre as estratificações $G(f)$ e $\mathcal{P}(f)$?

Como já mencionamos, o caso de curvas e superfícies genéricas em $\mathbb{R}^3$ ($m + k = 3$) foi tratado por Bruce $\times$ Romero Fuster em [11], que mostraram a existência de uma certa relação de dualidade entre os conjuntos de bifurcação de $\lambda(f)$ e $h(f)$. Mais precisamente, utilizando o seguinte critério de dualidade:

“Seja Y uma $(m-1)$ subvariedade C^∞ de S^m , exceto possivelmente num conjunto de medida nula. Em cada ponto $q \in Y$ existe uma esfera de raio máximo S^{m-1} , tangente a Y em q . Este equador determina um polo norte e um polo sul (que são os extremos de seu eixo polar) e, quando q varia em Y , esses polos descrevem a subvariedade dual

Y^* de Y . Se Y possui um conjunto de medida nula onde deixa de ser C^∞ , então Y^* é definido como o fecho do dual da parte C^∞ de Y'' , provaram que:

$Bif(\lambda(f))^* = \widetilde{Bif}(h(f))$ e $\widetilde{Bif}(h(f))^* = Bif(\lambda(f))$, onde $\widetilde{Bif}(h(f))$ denota o fecho dos estratos A_2 e $\bar{A}_2$, no caso de curvas e, para superfícies, o fecho da união de estratos dos multi-germes com estratos das direções assintóticas principais. Já $Bif(\lambda(f))$ inclui os pontos correspondendo a funções alturas não estáveis como também pontos dando origem a hiperplanos bitangentes, tritangentes, etc... (trisecantes, ...).

Nos parágrafos que se seguem, abordamos esse problema para hipersuperfícies ($k = 1$), subvariedades com codimensão 2 ($k = 2$) e m-subvariedades com $codim.k (k \geq 2)$. Vamos considerar somente os estratos do conjunto de bifurcação correspondentes a projeções que tem codimensão 1 na esfera. (Os de codimensão superior se encontram no fecho destes).

De fato, já vimos que no caso das funções alturas esses estratos correspondem a direções binormais enquanto que, do Teor. VI.2.3, sabemos que para projeções sobre hiperplanos, no caso de hipersuperfície, os estratos definidos por singularidades não estáveis correspondem a direções assintóticas que são direções principais de curvatura nula da subvariedade. Chamaremos tais direções de *assintóticas principais*.

VI.3. Hipersuperfícies e Dualidade

Seja f um mergulho genérico de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^{m+1}$ e consideremos as duas famílias de projeções ortogonais: $\lambda(f)$ e $h(f)$.

Denotemos por $\mathcal{B}(f)$ e $\mathcal{A}(f)$ os estratos de codimensão 1 em $G(f)$ e $\mathcal{P}(f)$, formados pelas direções binormais (Prop. II.2.3 para $k = 1$) e assintóticas principais (Teor. VI.2.3), respectivamente. Então,

Teorema VI.3.1: $\mathcal{B}(f)^* = \mathcal{A}(f)$ e $\mathcal{A}(f)^* = \mathcal{B}(f)$.

Prova: Seja $v \in \mathcal{B}(f)$; logo existe $p \in M$ tal que p é ponto de dobra de f_v ou, equivalentemente, $p \in \Sigma^{1,0}(\gamma(f))$. Escolhemos uma vizinhança $V = V(v)$, de v em $\mathcal{B}(f)$ e $U = U(p)$ uma vizinhança coordenada ortogonal de p em $\Sigma^{1,0}(\gamma(f))$, de modo que $v = e_{m+1}(p)$, $[e_1(p)]$ é a direção assintótica em p e $\gamma(f)(U) \subset V$. Nesse caso, $p \in \Sigma^{1,0}(\gamma(f)) \Leftrightarrow e_1(p)$ é transversal a $\Sigma^{1,0}(\gamma(f))$. Como $D\gamma(f)(p)$ deixa invariante seus auto-espacos, $T_v\mathcal{B}(f)$ é gerado pelos vetores $e_2(p), \dots, e_{m+1}(p)$. Assim, o eixo polar da hiperesfera obtida pela secção de S^m com o hiperplano $[v] \oplus T_v\mathcal{B}(f)$ tem a direção de $e_1(p)$, ou seja $v^* = e_1(p)$.

Por outro lado, se $\alpha \in \mathcal{A}(f)$, pelo Teor. VI.2.3, existe $p \in M$ tal que p é uma singularidade de codim. 1 de h_α . Além disso, $D\gamma(f)(p)$ tem corank igual a 1, o que equivale a $[\gamma(f)(p)] \subset N_{f(p)}f(M)$ ser uma direção degenerada com singularidade A_1 em p . Logo, existe $v = \gamma(f)(p) \in \mathcal{B}(f)$ com $v^* = \alpha$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{A}(f)^* = \mathcal{B}(f)$. Para isso, consideremos $\alpha \in \mathcal{A}(f)$; então existe $p \in M$ tal que $\gamma(f)$ tem uma singularidade $\Sigma^{1,0}$ em p ou, equivalentemente, $v = \gamma(f)(p)$ é uma direção degenerada em p . Tomemos $W = W(\alpha)$ uma vizinhança de α em $\mathcal{A}(f)$ e $U = U(p) \cap \mathcal{K}_c^{-1}(0)$, uma vizinhança coordenada ortogonal em p , de modo que $e_1(p)$ seja a direção assintótica nesse ponto. Assim, temos definida sobre U uma aplicação:

$U \xrightarrow{A} \mathcal{A}(f)$
 $q \mapsto A(q) =$ vetor unitário na direção da única direção principal de curvatura nula, transladado para a origem do sistema de coordenadas. Podemos, ainda, supor $A(U) \subset W$.

Seja $u \in T_\alpha \mathcal{A}(f)$, qualquer; então existem curvas:

$$\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W \text{ tal que } \beta(0) = \alpha, \quad \beta'(0) = u,$$

$$\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \text{ tal que } \delta(0) = p \text{ e}$$

$$DA(\delta(0)).\delta'(0) = u.$$

Como $A(\delta(t)) \in \mathcal{A}(f) \ (\forall t)$, isto é equivalente a $v(t) = \gamma(f)(\delta(t))$ ser uma direção degenerada em $\delta(t), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Assim, $\langle A(\delta(t)), v(t) \rangle \equiv 0$; também $\langle A(\delta(t)), v'(t) \rangle \equiv 0$, pois $v'(t) = D\gamma(f)(\delta(t)).\delta'(t)$ e $\delta(t)$ é uma singularidade tipo $\Sigma^{1,0}$ de $\gamma(f)$. Dessa maneira, diferenciando a primeira equação e utilizando a segunda, obtemos: $\langle DA(\delta(t)).\delta'(t), v(t) \rangle \equiv 0$. Em particular, para $t = 0$ temos: $\langle DA(p).\delta'(0), v(0) \rangle = \langle u, v \rangle = 0$. Logo, $v \perp T_\alpha \mathcal{A}(f)$ e, portanto, $\alpha^* = v$. Reciprocamente, dado $v \in \mathcal{B}(f)$, existe $p \in M$ tal que $\gamma(f)$ tem uma singularidade tipo $\Sigma^{1,0}$ em p . Nesse caso, existe uma única direção principal de curvatura nula, $[\alpha]$, tal que $\alpha^* = v$.

VI.3.2: Cabe ressaltar que para obtermos uma dualidade completa entre os conjuntos de bifurcação de $\lambda(f)$ e $h(f)$, como em [11], faz-se necessária uma classificação das singularidades apresentada pela família $h(f)$, tanto do ponto de vista local quanto no aspecto multi-local. Em virtude da ausência de um resultado dessa natureza e diante da complexidade em sua obtenção, nos limitamos, no momento, a analisar apenas a dualidade entre os estratos de codimensão 1, formados pelas direções binormais em $G(f)$ e direções assintóticas em $\mathcal{P}(f)$. Com relação aos outros estratos apresentamos as seguintes:

Conjectura 1: Se denotarmos por:

$D(\lambda(f)) = \{v \in S^m/f_v \text{ possui pontos duplos de tipo } A_1 \text{ em cada um deles} \}$ e

$D(h(f)) = \{\alpha \in S^m/h_\alpha \text{ possui pontos duplos com singularidade de codim. } 0 \text{ em cada um deles} \}$, então:

$$D(\lambda(f))^* = \mathcal{D}(h(f)) \text{ e } \mathcal{D}(h(f))^* = \mathcal{D}(\lambda(f)).$$

Conjectura 2: Os estratos de codimensão maior ou igual que 2 em $G(f)$ e $\mathcal{P}(f)$ são duais entre si, como casos limites de codimensão igual a 1.

VI.4. Dualidade para Subvariedades Genéricas de Codimensão 2

No capítulo V mostramos que, dada uma subvariedade genérica M^m de $\mathbb{R}^{m+2}$, existe um aberto M_b de M satisfazendo:

- (a) todo ponto $p \in M_b$ possui pelo menos uma e no máximo m direções binormais.
- (b) todo ponto $p \in M_b$ possui pelo menos uma e no máximo m direções assintóticas

Como anteriormente, vamos mostrar que existe uma relação de dualidade entre os conjuntos bifurcação de $\lambda(f)$ e $h(f)$, mais exatamente, entre aqueles de codimensão 1 formados por direções binormais e assintóticas, respectivamente.

Vamos denotar por:

$h(\tilde{f})$ a família de projeções de CM sobre hiperplanos e $\tilde{h}_\alpha$ a projeção de CM sobre o hiperplano ortogonal a α .

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in S^{m+1}/[\alpha] \text{ é direção assintótica em } p, \text{ para algum } p \in M_b\}$$

$$\mathcal{A}_0 = \{\alpha \in S^{m+1}/h_\alpha \text{ tem singularidade com codim. } 1 \text{ em } p, \text{ para algum } p \in M_b\}$$

$\mathcal{B} = \{v \in S^{m+1}/[v] \text{ é direção binormal em } p, \text{ para algum } p \in M_b\}$ e

$\mathcal{B}_0 = \{v \in S^{m+1}/f_v \text{ tem uma singularidade } A_2 \text{ em } p, \text{ para algum } p \in M_b\}$.

Mostramos no Teor. V.a.8, que associada a cada direção binormal $[v]$ em p , existe uma direção assintótica $[\alpha]$ produzindo uma projeção h_α com singularidade de codimensão maior ou igual a 1 em p . O seguinte lema mostra que dada uma direção assintótica $[\alpha]$ em p , existe uma direção binormal $[v]$ associada dando origem a uma função altura, f_v , com singularidade tipo A_k ($k \geq 2$) em p ou equivalentemente uma singularidade tipo Σ^1 de Γ . Assim, $[\alpha]$ é uma direção assintótica principal de CM em (p, v) (ver VI.2).

Lema VI.4.1: Se $\alpha \in \mathcal{A}$ então existe $p \in M_b$ e $v \in \mathcal{B}$ com $(p, v) \in \Sigma^1(\Gamma)$.

Prova: $\alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists p \in M_b$ tal que $[\alpha]$ é direção assintótica em $p \Rightarrow h_\alpha$ tem singularidade de codimensão maior ou igual a 1 em p . Agora, procedemos como no Teorema VI.2.3 para obter f , localmente, na forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^{m+2}, 0 \\ x &\mapsto f(x) = (x_1, \bar{x}, f_1(x_1, \bar{x}), f_2(x_1, \bar{x})), \end{aligned}$$

onde $\bar{x} = (x_2, \dots, x_m)$ e a secção normal assintótica γ_α como:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^{m+2}, 0 \\ x_1 &\mapsto \gamma_\alpha(x_1) = (x_1, \bar{0}, f_1(x_1, \bar{0}), f_2(x_1, \bar{0})). \end{aligned}$$

Assim, efetuando uma rotação no plano normal $N_{f(p)}f(M)$, se necessário, colocamos γ_α em seu referencial de Frénet:

$\gamma_\alpha(s) = (s, \bar{0}, \frac{k}{2}s^2 + O(s^3), \frac{\tau}{6}s^3 + O(s^4))$. Estendendo esse referencial para um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^{m+2}$, f pode ser descrito localmente como:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^{m+2}, 0 \\ (x_1), \bar{x} &\mapsto (x_1, \bar{x}, \frac{k}{2}x_1^2 + \sum_{j=2}^m a_{1j}x_1x_j + q_1(\bar{x}) + \varepsilon_1, \frac{\tau}{6}x_1^3 + \sum_{j=2}^m b_{1j}x_1x_j + q_2(\bar{x}) + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

onde, $q_i(\bar{x})$ é uma forma quadrática nas variáveis $x_2, \dots, x_m$, que podemos supor não degenerada, $\varepsilon_i \in m^3(m)$ ($i = 1, 2$) e $k \neq 0$ (pois f é genérico).

Mas, h_α tem uma singularidade que não é estável em $p \Leftrightarrow \bar{b}_{1j} = 0 \ (\forall j = 2, \dots, m)$. Isto implica que $[v] = [e_{m+2}]$ é uma direção binormal e, portanto, $v \in \mathcal{B}$. Por outro lado, como f é um mergulho genérico temos:

- (a) Se $\tau \neq 0$, f_v tem uma singularidade A_2 em p (dobra)
- (b) Se $\tau = 0$, necessariamente algum coeficiente dos monômios $x_1^2 y_j$ do polinômio de Taylor de $f_v = f_2$ é não nulo ($j = 2, \dots, m$). Logo, p é uma singularidade tipo A_3 de f_v , implicando que $(p, v) \in \Sigma^1(\Gamma)$.

Da prova do lema acima e do Teorema V.a.8. segue o seguinte:

Lema VI.4.2:

- (i) Se $\alpha \in \mathcal{A}_0$, a direção binormal $[v]$ associada pertence a $\mathcal{B}_0$.
- (ii) Se $v \in \mathcal{B}_0$, a direção assintótica $[\alpha]$ associada pertence a $\mathcal{A}_0$.

Teorema VI.4.3: $\mathcal{B}_0^* = \mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_0^* = \mathcal{B}_0$.

Prova: Dado $v \in \mathcal{B}_0$, existe $p \in M_b$ e $\alpha \in \mathcal{A}_0$ tal que $[\alpha]$ é uma direção assintótica de M em p e, portanto, uma direção assintótica principal de CM em (p, v) . Agora, procedendo como na 1ª parte da prova do Teorema VI.3.1 e lembrando que $\bar{\xi}_{|B}$ é difeo local ($B = \{(p, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) / p \in M_b\}$) - Teor. V.a.4, obtemos que $v^* = \alpha$.

Reciprocamente, dado $\alpha \in \mathcal{A}_0$, existe $p \in M_b$ e $v \in \mathcal{B}_0$ (Lema VI.4.1 e Lema VI.4.2). Portanto, $(p, v) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma)$ e novamente procedemos como no Teorema VI.3.1 (2ª parte) para CM em (p, v) e usamos o fato de que $\bar{\xi}_{|B}$ é difeo local para concluirmos que $\alpha^* = v$.

Em vista do teorema acima, se $p \in M_b$, podemos dizer que uma direção assintótica em p é o dual de uma direção binormal ou vice-versa.

Obs. VI.4.4: Como em VI.3, não estamos aptos a provar uma completa dualidade entre os conjuntos de bifurcação de $\lambda(f)$ e $h(f)$, pois nesse caso, além da classificação das singularidades da família $h(\tilde{f})$ (sobre a hipersuperfície canal CM), necessitamos também de uma classificação local e multilocal das singularidades da família $h(f)$. Mas, acreditamos que, ainda, para essa situação, as conjecturas 1 e 2, do parágrafo anterior sejam verdadeiras.

VI.5. Dualidade para Subvariedades Genéricas de Codimensão k ($k > 2$)

Dado um mergulho genérico f de uma m -variedade fechada, conexa, sem bordo M em $\mathbb{R}^{m+k}$, vimos no Teor. V.b.2, que se $\sum_{\overbrace{1, \dots, 1}^{k-1}} \tilde{1}^0(\Gamma) \neq \emptyset$, então existe um aberto M_b de M tal que:

- (a) para todo $p \in M_b$ existem pelo menos uma e no máximo m direções binormais correspondendo a funções altura com singularidade A_s ($s \geq k$) em p .
- (b) para todo $p \in M_b$ pelo menos uma e no máximo m direções tangentes com contato mais degenerado com M em p , isto é, as projeções h_θ tem singularidade com $\text{cod} \geq k$ em p .

Como nos parágrafos anteriores, vamos denotar por $\lambda(f)$ e $h(f)$ as famílias de funções-altura sobre M e projeções de M sobre hiperplanos, respectivamente. Ainda, $\lambda(\tilde{f})$ e $h(\tilde{f})$ denotarão as respectivas famílias definidas sobre a hipersuperfície canal, CM , e $\tilde{h}_\alpha$ a projeção de CM sobre o hiperplano ortogonal a α .

Recordemos (Teor. VI.2.3) que se $\alpha \in T_{(p,v)}CM$ é uma direção assintótica de CM em (p,v) , então: $\tilde{h}_\alpha$ tem singularidade de codimensão zero em $(p,v) \Leftrightarrow (p,v) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma) \Leftrightarrow f_v$ é de Morse em p .

$\tilde{h}_\alpha$ tem singularidade de cod. 1 em $(p, v) \Rightarrow (p, v) \in \Sigma^1(\Gamma) \Leftrightarrow f_v$ tem sing. $A_s (s \geq 2)$ em p .

Ou seja, uma singularidade mais degenerada de $\tilde{h}_\alpha$ ocorre quando α é uma direção assintótica e ao mesmo tempo, uma direção principal para CM . Mas, como $CM \approx M \times S^{k-1}$, as direções assintóticas $[\alpha] \subset T_v S^{k-1}$ nunca serão direções principais de curvatura nula. (As funções altura são de Morse quando restritas às fibras ou, equivalentemente, $\Gamma|_{\{p\} \times S^{k-1}}$ é regular).

Dessa forma, se $[\alpha] \subset T_{p,v} CM$ tem contato maior que 1 com CM em (p, v) , então a translação paralela de α , que ainda denotamos por $[\alpha]$, está contida em $T_{f(p)} f(M)$. (Usamos a identificação $CM \equiv \tilde{f}(CM)$). Logo, a estratificação em S^{m+k-1} , induzida por $h(\tilde{f})$ coincide com aquela induzida por $h(f)$.

Supondo verdadeira a extensão de dualidade para o caso de hipersuperfície para os estratos de codimensão mais alta, de maneira análoga a anterior, seria possível estabelecer a seguinte correspondência:

<i>f.altura</i>	projeções sobre hiperplanos
A_2 (estrato de cod.1)	$\longleftrightarrow$ <i>sing. com cod.1</i>
A_3 (estrato de cod.2)	$\longleftrightarrow$ <i>sing. com cod.2</i>
$\vdots$	
A_k (estrato de cod. $k-1$)	$\longleftrightarrow$ <i>sing. com cod. (k-1)</i>

Consideremos, agora, os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in S^{m+k-1}/[\alpha] \text{ é direção assintótica em } p, \text{ para algum } p \in M_b\}$$

$$\mathcal{A}_0 = \{\alpha \in \mathcal{A}/h_\alpha \text{ tem uma sing. com codim } (k-1)\}$$

$$\mathcal{B} = \{v \in S^{m+1}/[v] \text{ é direção binormal em } p, \text{ para algum } p \in M_b\}$$

e

$$\mathcal{B}_0 = \{v \in \mathcal{B}/f_v \text{ tem uma sing. } A_k \text{ em } p\}$$

Conjectura: $\mathcal{B}_0^* = \mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_0^* = \mathcal{B}_0$.

Bibliografia

- [1] Arnol'd, V.I., Critical points of smooth functions and their normal forms. Russian Maths. Survey 30:5 (1975). (Trans. from Uspekhi Mat. Nauk. 30:5 (1975).
- [2] Asperti, A.C., Some generic properties of Riemannian immersions. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática. Vol.11 (no 2) 1980 (191-216).
- [3] Banchoff, T., Gaffney, T., and Mc Crory, C., Cusps of Gauss Mappings. Pitman Advanced Publishing Program.
- [4] Barreiro, R.M.S., Propriedades genéricas de superfícies do $\mathbb{R}^4$ dotado de forma bilinear. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP. (1981).
- [5] Bishop, R.L. and Menn, M., Generic surfaces in E^4 . Michigan Math. J., 22, 117-127.
- [6] Boardman, J.M., Singularities of differentiable maps. I.H.E.S. Publ. Mat. 33 (1967).
- [7] Bruce, J.W. and Giblin, P.J., Curves and singularities - A geometrical introduction to singularity theory. Cambridge University Press.
- [8] Bruce, J.W., Wavefronts and parallels in Euclidean space. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 93, 323-333 (1983).
- [9] _____ Canonical stratifications and real simple singularities. Preprint, University of Liverpool.

- [10] _____, Canonical stratifications: the simple singularities. Preprint, University of Liverpool.
- [11] Bruce, J.W. and Romero Fuster, M.C., Duality and orthogonal projections of curves and surfaces in Euclidean 3-space. *Quart J. Math. Oxford*(2), 42(1991), 433-441.
- [12] Callahan, J., Singularities and plane maps II: sketching catastrophes.
- [13] Carmo, M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. IMPA - Rio de Janeiro.
- [14] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro (1979).
- [15] Cerf, J., La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *I.H.E.S. Publ. Math.* 39 (1970).
- [16] Costa, S.I.R., *Aplicações não singulares de ordem p* , tese de doutorado, Universidade de Campinas, 1982.
- [17] Dara, L., Singularities generiques des equations differentielles multiformes. *Bol. Soc. Bras. Mat.* 6, no 2 (1975).
- [18] David, J.M.S., Projection-generic curves. *J. London Math. Soc.* (2) 27 (1983), 552-562.
- [19] Feldman, E.A., Geometry of immersions I. *Trans. Amer. Math. Soc.* 120 (1965), 185-224.
- [20] Feldman, E.A., Geometry of immersions II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125 (1966), 181-315.
- [21] Feldman, E.A., On parabolic and umbilic points of immersed hypersurfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 127 (1967) 1-28.
- [22] Forsyth, A.R., *Geometry of four dimensions*. Cambridge at the University Press.

- [23] Gaffney, T., The structure of $T\mathcal{A}(f)$, classification and an application to Differential Geometry. American Math. Society. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics - vol. 40 - Part. 1 (1983).
- [24] Garcia, R.A. e Sotomayor, J. (em preparação)
- [25] Gibson, C.G., Singular points of smooth mappings. Research Notes in Maths. 25, Pitman, London (1979).
- [26] Gibson, C.G., Wirthmüller, K., du Plessis, A.A. and Looijenga, E.J.N., Topological stability of smooth mappings. Lect. Notes in Maths. 552, Springer, Berlin (1976).
- [27] Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularities. G.T.M. 14, Springer, Berlin (1973).
- [28] Greenberg, M., Lectures on Algebraic Topology. Benjamin, Menlo Park (California) (1966).
- [29] Hirsch, M.W., Differential Topology. G.T.M. 33, Springer, Berlin (1976).
- [30] Kergosien, Y.L., La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités. C.R. Acad. Sc. Paris, t 292, série I (1981), 929-932.
- [31] Klingenberg, W., A Course in Differential Geometry. Springer-Verlag.
- [32] Little, J.A. - On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean space: Annali Mat. Pura et Appl., (ser. 4A) 83, 261-336 (1969).
- [33] Looijenga, E.J.N., Structural stability of smooth families of C^∞ -functions. Doctoral thesis, University of Amsterdam (1974).
- [34] Mather, J., Stratifications and mappings. Dynamical Systems. Ed. M.M. Peixoto, Academic Press, New York (1973).
- [35] Mather, J., How to stratify mappings and jet spaces. Singularities d'Applications Differentiables, Plans, sur-Bex 1975, Springer, Berlin (1976).

- [36] Mather, J., Stability of C^∞ mappings VI: The nice dimensions Proc. Liverpool Sing. Symp., Lectures Notes in Math. 192, Springer 1971.
- [37] Mather, J.N., Generic projections. Annals of Math. 98 (1973), 226-245.
- [38] Mc Crory, C., Generic curves and surfaces in 3-space: contact with lines and planes. Preprint, University of Warwick (1980).
- [39] Milnor, J.W., Topology from the differentiable viewpoint. Princeton University.
- [40] Mochida, D.K.; Romero Fuster, N.C.; Ruas, M.A.S., Geometric Characterization of the Singularities of Height Functions on Surfaces in 4-Spaces - a aparecer.
- [41] Mochida, D.K., Geometry and singularities of orthogonal projections of 3-manifolds in $\mathbb{R}^5$, a aparecer.
- [42] Mond, D. - Ph.D. thesis, University of Liverpool (1982).
- [43] Montaldi, J.A., Contact with applications to submanifolds. Ph.D. Thesis. University of Liverpool (1983).
- [44] Montaldi, J.A., On generic composites of maps. A aparecer.
- [45] Morin, B., Formes canoniques des singularities d'une application différentiable. Comptes Rendus Acad. Ssc., Paris 260, 5662-5665, 6503-6506 (1965).
- [46] Porteous, J.R., The normal singularities of submanifolds, J.Diff. Geom., 5 (1971), 543-564.
- [47] Poston, T. and Stuart, I., Catastrophe theory and its applications. Pitman, London (1978).
- [48] Rieger, J.H. and Ruas, Classification of A-simple germs from k^n to k^2 . Compositio Mathematica 79:99-108, 1991.
- [49] Rodrigues, L. - Geometria das subvariedades. Monografias de Matemática, no 26, IMPA - Rio de Janeiro.

- [50] Romero Fuster, M.C., The convex hull of an immersion. Ph.D. Thesis. University of Southampton (1981).
- [51] Romero Fuster, M.C., Sphere stratifications and the Gauss map. Proc. Royal Soc. Edin. 95A, (1983) (1-13).
- [52] Romero Fuster, M.C., Convexly Generic Curves in $\mathbb{R}^3$. Geometriae Dedicata 28 (1988), 7-29.
- [53] Romero Fuster, M.C.; Mancini, S.; Ruas, M.A.S. - Stability and genericity of composition maps and applications. Notas do ICMSC-USP - São Carlos (no 42).
- [54] Sedykh, V.D., Four vertices of a convex space curve, a aparecer.
- [55] Sergeraert, F., Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. An. scient. Éc Norm. Sup. 4e série, t.5 (1972).
- [56] Smith, M.I.N., Curvatures, singularities and projections and smooth maps, Ph.D. thesis. University of Durham (1971).
- [57] Thom, R. - Jouis Kergasien Yonnick. Géometrie Differentielle - Sobre los Pontos Paraboliques das Surfaces. Compte Rendus. C.R. Acad. Sc. Paris, t 290 (1980).
- [58] Thorpe, J.A., Elementary Topics in Differential Geometry. Springer-Verlag.
- [59] Trotman, D.J. A., and Zeeman, E.C., The classification of elementary catastrophes of codimension ≤ 5 , in Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences, Seattle 1975. Lecture Notes in Math. 525, Springer, Berlin (1976).
- [60] Wall, C.T.C., Geometric properties of generic differentiable manifolds in Geometry and Topology, Rio de Janeiro (1976). Lecture Notes in Math. 597, Springer, Berlin (1977).
- [61] Wasserman, G., Stability of unfoldings. Lecture Notes in Math. 393, Springer, Berlin (1974).

[62] Weiner, J.L., The Gauss map for Surfaces in 4-Space: Math. Ann. 269, 541-560 (1984).