φ - Equivalência

Solange Mancini

ORIENTADORA : Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS - SP

1989

À Cidinha,
com admiração

Agradeço

Ao Prof. Dr. Luiz Antonio Favaro, que assumiu inicialmente a orientação deste trabalho, contribuindo com seu incentivo, participação na escolha do tema e no desenvolvimento do mesmo.

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, cujo desprendimento, dedicação e companheirismo foram decisivos para que este trabalho pudesse ser realizado.

Aos meus familiares, pela compreensão e apoio em todas as horas.

Aos meus amigos do IGCE-UNESP-Rio Claro e do ICMSC-USP, pelo incentivo e solidariedade constantes.

As funcionárias do ICMSC-USP, Sonia Regina Derigi Borges e Maria Helena Derigi, pelo apoio, gentileza e carinho com que sempre me distinguiram.

À UNESP pela concessão de afastamento para estágio junto ao ICMSC-USP.

À CAPES-PICD pelas facilidades proporcionadas através de concessão de bolsa de estudo durante o meu programa de Doutorado.

Ao Luiz Fernando Ferreira e ao Luciano Cesário, pela paciência e pelo excelente trabalho de edição do texto.

Abstract

We study φ - equivalence, and the corresponding concepts of finite determinacy and transversal unfoldings. This equivalence was introduced by L. Favaro and C. Mendes who studied φ - stability. We obtain necessary and sufficient conditions for finite φ - determinacy of map-germs that apply to a special class of infinitesimally stable germs φ . Building upon results of Egúsquiza for π - stable paths of mappings, we prove genericity theorems for an auxiliary equivalence relation, namely $\tilde{\mathcal{A}}$ - equivalence, and for φ - equivalence. The main result shows that the evolution of the singularities from a manifold N into the plane can be realized by preserving a foliation defined by a fixed Morse function $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$. Moreover, the generic bifurcations are classified.

Índice

Introdução e notações básicas.....	1
------------------------------------	---

Capítulo I

φ - equivalência e $\mathcal{A}$ -equivalência

§1. Definições.....	1
§2. Espaços tangentes.....	4

Capítulo II

φ - Determinação finita

§1. Introdução.....	21
§2. Preliminares algébricos.....	22
§3. Critério infinitesimal.....	24

Capítulo III

Desdobramentos e formas normais de singularidades

de codimensão ≤ 1 .

§1. Teoria de desdobramento para a φ - equivalência e $\mathcal{A}$ -equivalência.....	61
§2. Estudo da φ^e - codimensão.....	77
§3. Multigerms de codimensão ≤ 1	94

Capítulo IV

Teoremas de Genericidade

§1. Estabilidade de caminhos.....	127
§2. Caminhos $\tilde{\mathcal{A}}$ -adequados.....	132
§3. Caminhos φ - adequados.....	162

Bibliografia.....	169
-------------------	-----

Introdução e notações básicas

Introdução

Sejam N, P, Q variedades diferenciáveis e $\varphi : N \longrightarrow Q$ uma aplicação diferenciável fixada.

Duas aplicações diferenciáveis $f, g : N \longrightarrow P$ são φ - *equivalentes* se existem difeomorfismos h, k e ℓ comutando o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{(f, \varphi)} & P \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q \\ h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\ N & \xrightarrow{(g, \varphi)} & P \times Q & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array},$$

onde π é a projeção sobre o segundo fator.

A estabilidade de aplicações diferenciáveis $f : N \longrightarrow P$ com respeito a esta equivalência (φ - estabilidade) tem sido estudada por L.A. Favaro e C.M. Mendes ([7] e [18]).

A φ - equivalência é utilizada no estudo de problemas onde se procura respeitar uma certa estrutura prefixada. É o caso, por exemplo, do problema da tomografia qualitativa considerado por Bonnecaze e Dufour em [1], que consiste na reconstituição da estrutura interna de um objeto N através do seu comportamento em

relação a uma família de seções. A estrutura interna é dada pelas superfícies de nível de uma função $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$, e a família de seções é definida por uma função $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada função micró-tomo. Segundo Dufour, o problema da tomografia qualitativa é determinar a $\mathcal{A}$ -classe de uma função f a partir do conhecimento de sua φ -classe.

Motivados pelo problema da tomografia e por outras aplicações, nosso interesse está voltado principalmente para o caso em que $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse. No entanto, alguns resultados se estendem para φ mais gerais.

Assim como em Mendes [18], introduzimos a seguinte noção auxiliar de equivalência :

Duas aplicações (f, φ) e (g, ψ) são $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalentes se existem difeomorfismos $h : N \longrightarrow N$, $k : P \times Q \longrightarrow P \times Q$ e $\ell : Q \longrightarrow Q$, com $k(p, q) = (k_1(p, q), \ell(q))$, tais que $(g, \psi) = k \circ (f, \varphi) \circ h^{-1}$.

Alguns resultados para a φ -equivalência são obtidos como consequência dos análogos para a $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalência.

Ressaltamos que diversos trabalhos recentes tratam do problema de estabilidade, determinação finita e versalidade de desdobramentos dentro de um amplo contexto. Entre estes, encontram-se o trabalho de Damon [2], sobre subgrupos geométricos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$, e o trabalho de Nakai [20], sobre diagramas de aplicações.

A φ -equivalência não se enquadra diretamente nos casos acima citados.

Pretendemos, neste trabalho, obter resultados utilizando métodos que se adaptem à situação especial de se privilegiar uma dada aplicação.

No Capítulo I, apresentamos os grupos dos germes de difeomorfismos que dão origem à φ - equivalência e à $\mathcal{A}$ -equivalência. Os espaços tangentes às órbitas com respeito às ações desses grupos, são determinados.

O Capítulo II é dedicado ao estudo da φ - determinação finita. O resultado central deste capítulo, estabelece um critério infinitesimal que estende o Teorema (5.1), Capítulo II, de Egúsquiza [6] sobre a π -determinação finita, para uma classe mais ampla de germes. Em especial, o resultado se aplica para germes de Morse.

No Capítulo III, estudamos as propriedades dos desdobramentos φ - versais e $\mathcal{A}$ -versais. Aqui, o estudo dos desdobramentos $\mathcal{A}$ -transversais tem um papel importante para a obtenção de resultados para a φ - equivalência. Um resultado útil estabelece uma correspondência entre desdobramentos $\mathcal{A}$ -transversais de um par (f, φ) e desdobramentos φ - transversais de f , quando φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável. Como consequência resulta que a φ - codimensão estendida de f ($\text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f)$) e a $\mathcal{A}$ -codimensão estendida de (f, φ) ($\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi))$) coincidem. A equivalência entre versalidade e transversalidade é também considerada.

Ainda neste capítulo, classificamos os germes e multigerms

tais que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \leq 1$, no caso de :

$$(\mathbb{R}^n, S) \begin{array}{l} \nearrow f \quad (\mathbb{R}, 0) \\ \searrow \varphi \quad (\mathbb{R}, 0) \end{array}$$

onde $n \geq 2$ e φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável. Esta classificação, essencial para os teoremas de genericidade do Capítulo IV, refina a classificação dos germes e multigerms de $\mathcal{A}^e$ -codimensão ≤ 1 obtida em [6]. O processo de refinamento exhibe uma diferença fundamental entre a $\mathcal{A}$ -classificação e a φ -classificação. Mais precisamente, a $\mathcal{A}$ -órbita de codimensão 1 correspondente à interseção de três linhas de dobras apresenta modalidade para a φ -equivalência. A Proposição (3.3.4) mostra que esta singularidade tem apenas codimensão topológica igual a 1.

O objetivo principal do Capítulo IV é mostrar que a evolução das singularidades de uma aplicação de uma variedade N no plano, pode ser realizada preservando uma folheação prefixada em N , definida por uma função de Morse $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$. Este é o conteúdo do Teorema (4.3.2) sobre caminhos genéricos para a φ -equivalência, denominados caminhos φ -adequados.

O resultado acima é consequência do Teorema (4.2.11), que estabelece a existência de um subconjunto aberto e denso $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\sim}$ de $C^\infty(N \times [0,1], \mathbb{R}^2)$, constituído de caminhos genéricos com relação à $\mathcal{A}^{\sim}$ -equivalência. O subconjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\sim}$ dos caminhos $\mathcal{A}^{\sim}$ -adequados é obtido por um refinamento conveniente dos caminhos π -estáveis de [6].

Nas aplicações, como por exemplo no problema da tomografia qualitativa ou em problemas de simplificação de aplicações, é útil poder assumir que a função de Morse fixada é a mais simples possível. O Teorema (4.3.3) nos garante esta possibilidade.

Notações básicas

Ao longo deste trabalho, salvo menção explícita, todas as aplicações consideradas serão de classe C^∞ .

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. A notação

$$f : (\mathbb{R}^n, S) \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

designará um germe de aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$, em S .

O conjunto dos germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ será denotado por $\mathcal{E}(n, p)$. Quando $p = 1$, escreveremos simplesmente $\mathcal{E}_n$ para $\mathcal{E}(n, 1)$. $\mathcal{E}_0(n, p)$ denotará o conjunto dos germes $f \in \mathcal{E}(n, p)$ tais que $f(0) = 0$.

$\mathcal{E}_n$ herda de $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de $\mathbb{R}$ -álgebra. O anel $\mathcal{E}_n$ tem um único ideal maximal $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(0) = 0\}$.

Para qualquer p , $\mathcal{E}(n, p)$ pode ser identificado com o $\mathcal{E}_n$ -módulo livre de rank p , $(\mathcal{E}_n)^p$.

Um germe $f \in \mathcal{E}_0(n, p)$ induz um homomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras

$$f^* : \mathcal{E}_p \longrightarrow \mathcal{E}_n, \text{ por } f^*(\phi) = \phi \circ f.$$

Diremos que A é um $f^*(\mathcal{E}_p)$ -módulo se A for um $\mathcal{E}_p$ -módulo com a ação de $\mathcal{E}_p$ definida por :

$$(\forall \phi \in \mathcal{E}_p) \quad (\forall a \in A) \quad \phi.a = f^*(\phi).a = (\phi \circ f).a.$$

Então, $f^*(\mathcal{M}_p)A$ é o mesmo que $\mathcal{M}_p A$.

Observemos que todo $\mathcal{E}_n$ -módulo A admite uma estrutura de $f^*(\mathcal{E}_p)$ -módulo, por restrição dos escalares ao sub-anel $f^*(\mathcal{E}_p)$.

Os espaços tangentes aos vários espaços de germes são dados como módulos de campos de vetores. Para um germe $f \in \mathcal{E}_0(n, p)$, denotaremos por θ_f o $\mathcal{E}_n$ -módulo dos campos de vetores ao longo de f . Para o germe identidade $I_{(\mathbb{R}^n, 0)}$, denotaremos $\theta_{I_{(\mathbb{R}^n, 0)}}$ por θ_n .

Associados a estes módulos, temos os homomorfismos tf e ωf , definidos como segue :

$$tf : \theta_n \longrightarrow \theta_f, \quad tf(\xi) = df(\xi)$$

(onde df é a diferencial de f), e

$$\omega f : \theta_p \longrightarrow \theta_f, \quad \omega f(\eta) = \eta \circ f.$$

tf é um homomorfismo de $\mathcal{E}_n$ -módulos e ωf é um morfismo sobre f^* .

Vários grupos agem em $\mathcal{E}_0(n,p)$. Quando dois elementos f, g de $\mathcal{E}_0(n,p)$ estão numa mesma órbita segundo a ação de um grupo $\mathcal{G}$, escreveremos $f \sim_{\mathcal{G}} g$. A órbita de f será indicada por $\mathcal{G}(f)$.

Os grupos "clássicos" da Teoria das Singularidades que mais freqüentemente aparecem no trabalho, são os seguintes :

$\mathcal{R}(n)$ = grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n, 0)$.

$\mathcal{R}(n)$ é o grupo das mudanças de coordenadas na fonte. Ou seja, $h.f = f \circ h^{-1}$.

$\mathcal{L}(p)$ = grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^p, 0)$.

$\mathcal{L}(p)$ é o grupo das mudanças de coordenadas na meta : $k.f = k \circ f$.

$\mathcal{A}(n,p) = \mathcal{R}(n) \times \mathcal{L}(p)$, grupo das mudanças de coordenadas na fonte e na meta : $(h,k).f = k \circ f \circ h^{-1}$.

O espaço tangente à órbita $\mathcal{A}(f)$ em f , e o correspondente espaço tangente estendido, são definidos, respectivamente, por :

$$\begin{aligned} T_f \mathcal{A} &= tf(\mathcal{M}_n \theta_n) + \omega f(\mathcal{M}_p \theta_p) \\ \text{e} \quad T_f \mathcal{A}^e &= tf(\theta_n) + \omega f(\theta_p) . \end{aligned}$$

A $\mathcal{A}^e$ -codimensão de f , denotada por $\text{cod}(\mathcal{A}^e, f)$, é a dimensão real de $\theta_f / T_f \mathcal{A}^e$.

As notações que usaremos para os espaços de jatos e de multijatos são as usuais :

$J^k(n,p)$ é o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial dos k -jatos, $j^k f$, dos germes $f \in \mathcal{E}(n,p)$. Indicaremos por $J_0^k(n,p)$ o subespaço constituído dos k -jatos dos germes $f \in \mathcal{E}_0(n,p)$.

Para um grupo $\mathcal{G}$ de germes de difeomorfismos, agindo em $\mathcal{E}_0(n,p)$, $\mathcal{G}^k$ indica o grupo dos k -jatos de elementos de $\mathcal{G}$. A ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{E}_0(n,p)$ induz uma ação de $\mathcal{G}^k$ em $J_0^k(n,p)$ definida por $j^k g \cdot j^k f = j^k(g.f)$, para todo $g \in \mathcal{G}$ e todo $f \in \mathcal{E}_0(n,p)$.

Sejam N e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ . $J^k(N,P)$ é o fibrado dos k -jatos de aplicações diferenciáveis de N em P , e $J_r^k(N,P)$ é o fibrado dos r -multijatos de ordem k .

Finalmente, uma notação algébrica :

Seja R um anel, M um R -módulo, e seja S um sub-anel de R . (assim, M é também um S -módulo). Se $a_1, \dots, a_k \in M$, denotaremos por $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_S$ ou $S\{a_1, \dots, a_k\}$ o S -submódulo de M gerado por $a_1, \dots, a_k$.

Capítulo I

φ - equivalência e $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalência

§1. Definições

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ um germe de aplicação fixado.

Uma relação de equivalência no espaço $\mathcal{E}_0(n, p)$ é dada pela seguinte

(1.1.1) Definição

Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são φ - *equivalentes* se existem germes de difeomorfismos h de $(\mathbb{R}^n, 0)$, k de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ e ℓ de $(\mathbb{R}^q, 0)$ que tornem comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(f, \varphi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^q, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(g, \varphi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^q, 0) \end{array} ,$$

onde $\pi_q : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ é a projeção sobre o segundo fator.

Como usual, isto será indicado por $f \underset{\varphi}{\sim} g$.

(1.1.2) Definição

O grupo $\mathcal{S}_\varphi = \mathcal{S}_\varphi(p)$ é o subgrupo de $\mathcal{A}(n, p+q) = \mathcal{R}(n) \times \mathcal{L}(p+q)$ formado pelos pares (h, k) tais que exista um germe de difeomorfismo ℓ de $(\mathbb{R}^q, 0)$ de modo que o diagrama (*) comute.

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^q, 0) & \xleftarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow \ell & & \downarrow k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^q, 0) & \xleftarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \end{array}$$

Uma ação de $\mathcal{S}_\varphi(p)$ sobre $\mathcal{E}_0(n, p)$ fica definida se, para $(h, k) \in \mathcal{S}_\varphi(p)$ e $f \in \mathcal{E}_0(n, p)$, colocarmos

$$(h, k).f = \pi_p \circ (k \circ (f, \varphi) \circ h^{-1}),$$

onde $\pi_p : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é a projeção sobre o primeiro fator.

A órbita $\mathcal{S}_\varphi(f)$ de $f \in \mathcal{E}_0(n, p)$ por esta ação, coincide com a φ -classe de f .

Observação

Equivalentemente, podemos considerar $\mathcal{S}_\varphi(p)$ como sendo o

subgrupo de $\text{Dif}_0(n) \times \text{Dif}_0(p+q) \times \text{Dif}_0(q)$ formado pelas ternas (h,k,ℓ) tais que o diagrama (*) comute. $(\text{Dif}_0(m))$ denota o grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^m, 0)$.

Permitindo a variação do germe φ no diagrama da Definição (1.1.1), obtemos a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{E}_0(n, p+q)$:

(1.1.3) Definição

Dois germes $(f, \varphi), (g, \psi) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ são $\mathcal{A}^\sim$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismos h de $(\mathbb{R}^n, 0)$, k de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ e ℓ de $(\mathbb{R}^q, 0)$ que tornem comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(f, \varphi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^q, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(g, \psi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^q, 0) \end{array} .$$

(1.1.4) Definição

Seja $\mathcal{L}(p+q, q)$ o subgrupo dos $k \in \mathcal{L}(p+q)$ tais que exista um germe de difeomorfismo ℓ de $(\mathbb{R}^q, 0)$ satisfazendo $\pi_q \circ k = \ell \circ \pi_q$.

O grupo $\mathcal{A}^\sim = \mathcal{A}^\sim(n, p+q)$ é o subgrupo de $\mathcal{A}(n, p+q)$ dado por

$$\mathcal{A}^\sim(n, p+q) = \mathcal{R}(n) \times \mathcal{L}(p+q, q).$$

A ação de $\mathcal{A}^{\sim}(n, p+q)$ sobre $\mathcal{E}_0(n, p+q)$ obtida por restrição da ação de $\mathcal{A}(n, p+q)$, é tal que a órbita $\mathcal{A}^{\sim}(f, \varphi)$ de $(f, \varphi) \in \mathcal{E}_0(n, p+q)$ coincide com a $\mathcal{A}^{\sim}$ -classe de (f, φ) .

Observemos que, para cada $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ fixado, a $\mathcal{A}^{\sim}$ -equivalência em $\mathcal{E}_0(n, p+q)$ induz a φ - equivalência em $\mathcal{E}_0(n, p)$, quando consideramos $\mathcal{E}_0(n, p)$ como um subespaço afim de $\mathcal{E}_0(n, p+q)$ através do mergulho $f \longmapsto (f, \varphi)$. Mais precisamente: dados $f, g \in \mathcal{E}_0(n, p)$, f, g são φ - equivalentes se, e somente se, $(f, \varphi), (g, \varphi)$ são $\mathcal{A}^{\sim}$ -equivalentes.

§2. Espaços Tangentes

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ um germe fixado.

Consideremos um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

No nosso contexto, os resultados dependem essencialmente do conhecimento do espaço tangente à órbita $\mathcal{G}_{\varphi}(f)$ no ponto f . Este espaço é formado pelos vetores tangentes a caminhos por f contidos na órbita, que são os caminhos φ - triviais.

(1.2.1) Definição

Um caminho diferenciável por f ,

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times J) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times J)$$

(onde J é um intervalo de $\mathbb{R}$ contendo 0),

$$F(x, t) = (f_t(x), t), \quad f_0 = f,$$

é φ - trivial se existem germes de difeomorfismos H de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times J)$, K de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times J)$ e L de $(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times J)$ preservando $\mathbb{R}$ -níveis :

$$\begin{aligned} H(x, t) &= (h_t(x), t), & h_0 &= I_{(\mathbb{R}^n, 0)} \\ K(y, z, t) &= (k_t(y, z), t), & k_0 &= I_{(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)} \\ L(z, t) &= (\ell_t(z), t), & \ell_0 &= I_{(\mathbb{R}^q, 0)} \end{aligned}$$

tais que o seguinte diagrama comute :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times J) & \xrightarrow{\gamma_0} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times J) & \xrightarrow{\pi_{q+1}} & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times J) \\ \downarrow H & & \downarrow K & & \downarrow L \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times J) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times J) & \xrightarrow{\pi_{q+1}} & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times J) \end{array}$$

onde γ_0 , γ são os caminhos definidos por :

$$\gamma_0(x, t) = (f(x), \varphi(x), t) \text{ (caminho constante)}$$

$$\gamma(x, t) = (f_t(x), \varphi(x), t).$$

Nosso objetivo agora é obter uma versão do Teorema de Thom - Levine para o caso da φ - equivalência.

Vejamos primeiro algumas definições e notações.

Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_{xa}) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0_{xa})$ um germe que preserva $\mathbb{R}$ -níveis.

Um campo de vetores ao longo de F que preserva $\mathbb{R}$ -níveis, é um campo de vetores ao longo de F com $\mathbb{R}$ -componente nula em $TR^p \otimes \mathbb{R} \equiv T(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R})$. O conjunto de tais campos é um $\mathcal{E}_{n+1, 0_{xa}}$ -módulo livre de rank p e será indicado por Ψ_F .

Por simplicidade, escreveremos Ψ_{n+1} para $\Psi_{I(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_{xa})}$, esperando que fique claro no contexto que ponto-base está sendo considerado.

As restrições de tF e ωF dão, respectivamente, um $\mathcal{E}_{n+1, 0_{xa}}$ -homomorfismo $tF : \Psi_{n+1} \longrightarrow \Psi_F$ e um morfismo sobre F^* , $\omega F : \Psi_{p+1} \longrightarrow \Psi_F$.

(1.2.2) Definição

Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_{xa}) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0_{xa})$ um germe que preserva $\mathbb{R}$ -níveis, $F(x, t) = (f_t(x), t)$.

1) Definimos $\partial F \in \Psi_F$ por : $(\partial F, 1) = tF(0, \frac{\partial}{\partial t})$.

(∂F dá sentido claro ao símbolo $\frac{d}{dt}f_t$).

2) Se F é um caminho diferenciável por f (assim $a = 0$, $f_0 = f$), definimos $\partial_0 F \in \theta_f$ por $\partial_0 F(x) = \partial F(x, 0)$ (para $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$). ($\partial_0 F$ corresponde a $\left. \frac{d}{dt} f_t \right|_{t=0}$).

(1.2.3) Proposição

Um caminho diferenciável por f ,

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) , F(x, t) = (f_t(x), t),$$

$f_0 = f$, é φ -trivial se, e somente se, para cada $a \in [0, 1]$, existem campos de vetores $\tilde{\xi}^a \in \mathcal{M}_{n, n+1}^\Psi$, $\tilde{\mu}^a \in \mathcal{M}_{q, q+1}^\Psi$ e $\tilde{\eta}^a \in \mathcal{M}_{p+q, p+1}^{\Psi_a}$

($\pi_{p+1}^a : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times a) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times a)$, projeção canônica) tais que

$$(*) \quad \begin{cases} \partial F^a = dF^a(\tilde{\xi}^a) + \tilde{\eta}^a \circ \gamma^a \\ 0 = d(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\xi}^a) + \tilde{\mu}^a \circ (\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a, \end{cases}$$

onde F^a , $(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a$ e γ^a são os germes - restrições de F , $\varphi \times I_{\mathbb{R}}$ e γ a $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times a)$, sendo

$$\gamma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$$

o caminho definido por $\gamma(x, t) = (f_t(x), \varphi(x), t)$.

Prova

Suponhamos que F seja φ - trivial. Então, existem germes de difeomorfismos H de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$, K de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$ e L de $(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$ satisfazendo a Definição (1.2.1), ou seja, H , K e L são, respectivamente, caminhos pelos germes identidades $I_{(\mathbb{R}^n, 0)}$, $I_{(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)}$ e $I_{(\mathbb{R}^q, 0)}$, e tornam comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) & \xrightarrow{\gamma_0} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) & \xrightarrow{\pi_{q+1}} & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \\
 \downarrow H & & \downarrow K & & \downarrow L \\
 (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) & \xrightarrow{\pi_{q+1}} & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]),
 \end{array}$$

onde $\gamma_0(x, t) = (f(x), \varphi(x), t)$, $\gamma(x, t) = (f_t(x), \varphi(x), t)$.

Assim,

$$K^{-1} \circ \gamma \circ H = \gamma_0$$

$$\text{e } L^{-1} \circ (\varphi \times I_{(\mathbb{R}, [0, 1])}) \circ H = \varphi \times I_{(\mathbb{R}, [0, 1])}.$$

Logo, para qualquer $a \in [0, 1]$,

$$\partial(K^{-1} \circ \gamma \circ H)^a = 0$$

$$\text{e } \partial(L^{-1} \circ (\varphi \times I_{\mathbb{R}}) \circ H)^a = 0.$$

Cálculos diretos (ver Mather [15]) mostram que estas últimas igualdades implicam, respectivamente :

$$(1) \partial \gamma^a = t \gamma^a (-\partial H^a \circ (H^a)^{-1}) + \omega \gamma^a (\partial K^a \circ (K^a)^{-1}) ,$$

$$(2) 0 = t(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a (-\partial H^a \circ (H^a)^{-1}) + \omega(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a (\partial L^a \circ (L^a)^{-1}).$$

Como $F^a = (\pi_{p+1} \circ \gamma)^a$, segue de (1) que

$$(3) \partial F^a = t F^a (-\partial H^a \circ (H^a)^{-1}) + t \pi_{p+1}^a (\partial K^a \circ (K^a)^{-1}) \circ \gamma^a.$$

Observemos que $\tilde{\xi}^a = -\partial H^a \circ (H^a)^{-1}$ se anula em $Ox(\mathbb{R}, a)$ ($0 \in \mathbb{R}^n$),
 $\tilde{\eta}^a = t \pi_{p+1}^a (\partial K^a \circ (K^a)^{-1})$ se anula em $Ox(\mathbb{R}, a)$ ($0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$) e
 $\tilde{\mu}^a = \partial L^a \circ (L^a)^{-1}$ se anula em $Ox(\mathbb{R}, a)$ ($0 \in \mathbb{R}^q$); ou seja,

$$\tilde{\xi}^a \in \mathcal{M}_{n, n+1}^{\Psi}, \quad \tilde{\eta}^a \in \mathcal{M}_{p+q, p+1}^{\Psi_a} \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}^a \in \mathcal{M}_{q, q+1}^{\Psi}.$$

Além disso, fazendo substituições em (3) e (2), obtemos :

$$(*) \quad \begin{cases} \partial F^a = dF^a(\tilde{\xi}^a) + \tilde{\eta}^a \circ \gamma^a \\ 0 = d(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\xi}^a) + \tilde{\mu}^a \circ (\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a \end{cases}.$$

Reciprocamente, suponhamos que, para cada $a \in [0, 1]$, existam campos $\tilde{\xi}^a \in \mathcal{M}_{n, n+1}^{\Psi}$, $\tilde{\mu}^a \in \mathcal{M}_{q, q+1}^{\Psi}$ e $\tilde{\eta}^a \in \mathcal{M}_{p+q, p+1}^{\Psi_a}$ satisfazendo (*).

Tomando representantes de $\tilde{\xi}^a$, $\tilde{\mu}^a$ e $\tilde{\eta}^a$ e usando a partição da unidade, podemos obter campos de vetores $\bar{\xi}$, $\bar{\mu}$ e $\bar{\eta}$ que preservam $\mathbb{R}$ -níveis,

$\bar{\xi}$ sobre $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$, $\bar{\xi}(0, a) = 0 \quad \forall a \in [0, 1]$,

$\bar{\mu}$ sobre $(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$, $\bar{\mu}(0, a) = 0 \quad \forall a \in [0, 1]$,

e $\bar{\eta}$ ao longo de $\pi_{p+1}: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$,
 $\bar{\eta}(0, a) = 0 \quad \forall a \in [0, 1]$,

tais que $\bar{\xi}^a$, $\bar{\mu}^a$ e $\bar{\eta}^a$ satisfaçam (*) para qualquer $a \in [0, 1]$.

As integrais dos campos $(-\bar{\xi}, \frac{\partial}{\partial t})$, $(\bar{\eta}, \bar{\mu}, \frac{\partial}{\partial t})$ e $(\bar{\mu}, \frac{\partial}{\partial t})$ determinam, respectivamente, germes de difeomorfismos H de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$, K de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$ e L de $(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$ com as propriedades exigidas na Definição (1.2.1).

Fazendo $t = 0$ em (*) da proposição anterior, obtemos :

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{dt} f_t \right|_{t=0} = df(\xi) + \eta \circ (f, \varphi) \\ 0 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi \end{cases},$$

onde $\xi \in \mathcal{M}_{n \ n}^{\theta}$, $\mu \in \mathcal{M}_{q \ q}^{\theta}$ e $\eta \in \mathcal{M}_{p+q \ p}^{\theta} \pi_p$ ($\pi_p: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é a projeção sobre o primeiro fator).

Isto motiva a seguinte definição :

(1.2.4) Definição

1) O espaço tangente à órbita $\mathcal{G}_\varphi(f)$ no ponto f , $T_f \mathcal{G}_\varphi$, é o conjunto de todos os $\sigma \in \mathcal{M}_{n \ f}^{\theta}$ tais que existam $\xi \in \mathcal{M}_{n \ n}^{\theta}$, $\mu \in \mathcal{M}_{q \ q}^{\theta}$ e $\eta \in \mathcal{M}_{p+q \ p}^{\theta} \pi_p$ satisfazendo :

$$\begin{cases} \sigma = df(\xi) + \eta \circ (f, \varphi) \\ 0 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi \end{cases} .$$

Quando os germes de difeomorfismos de $\mathcal{S}_\varphi$ não fixam necessariamente a origem, usaremos a notação $T_f \mathcal{S}_\varphi^e$ para indicar o *espaço tangente estendido*, isto é,

2) $T_f \mathcal{S}_\varphi^e$ é o conjunto de todos os $\sigma \in \theta_f$ tais que existam $\xi \in \theta_n$, $\mu \in \theta_q$ e $\eta \in \theta_{\pi_p}$ satisfazendo :

$$\begin{cases} \sigma = df(\xi) + \eta \circ (f, \varphi) \\ 0 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi \end{cases} .$$

Queremos expressar $T_f \mathcal{S}_\varphi$ e $T_f \mathcal{S}_\varphi^e$ de uma forma mais concisa. Para isto, introduziremos a

(1.2.5) Definição

$$1) \theta_\Delta = \{ \xi \in \mathcal{M}_{n_n} \theta_n ; \exists \mu \in \mathcal{M}_{q_q} \theta_q \text{ tal que } d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi = 0 \}$$

$$= t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\mathcal{M}_{q_q} \theta_q)) \cap \mathcal{M}_{n_n} \theta_n .$$

$$\theta_\Delta^e = \{ \xi \in \theta_n ; \exists \mu \in \theta_q \text{ tal que } d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi = 0 \}$$

$$= t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\theta_q)) .$$

θ_Δ e θ_Δ^e são $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ - módulos.

2) $\omega(f, \varphi) : \theta_{\pi_p} \longrightarrow \theta_f$ é definida por $\omega(f, \varphi)(\eta) = \eta \circ (f, \varphi)$.

$\omega(f, \varphi)$ é um morfismo sobre $(f, \varphi)^*$.

Então, da definição (1.2.4), temos :

$$(1.2.6) \quad T_f \mathcal{E}_\varphi = tf(\theta_\Delta) + \omega'(f, \varphi)(M_{p+q} \theta_{\pi_p})$$

$$\text{e} \quad T_f \mathcal{E}_\varphi^e = tf(\theta_\Delta^e) + \omega(f, \varphi)(\theta_{\pi_p}).$$

Com relação à $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalência, por um procedimento análogo ao adotado no caso da φ - equivalência, temos a

(1.2.7) Definição

1) O espaço tangente à órbita $\tilde{\mathcal{A}}(f, \varphi)$ no ponto (f, φ) , $T_{(f, \varphi)} \tilde{\mathcal{A}}$, é o conjunto de todos os $\sigma \in M_n \theta_{(f, \varphi)}$ tais que existam $\xi \in M_n \theta_n$, $\zeta \in M_{p+q} \theta_{p+q}$, $\mu \in M_q \theta_q$ satisfazendo :

$$\begin{cases} \sigma = d(f, \varphi)(\xi) + \zeta \circ (f, \varphi) \\ 0 = d\pi_q(\zeta) + \mu \circ \pi_q \end{cases} ,$$

onde $\pi_q : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ é a projeção sobre o segundo fator.

2) O espaço tangente estendido $T_{(f,\varphi)}^{\sim e}$ é o conjunto de todos os $\sigma \in \theta_{(f,\varphi)}$ tais que existam $\xi \in \theta_n$, $\zeta \in \theta_{p+q}$, $\mu \in \theta_q$ satisfazendo :

$$\begin{cases} \sigma = d(f,\varphi)(\xi) + \zeta \circ (f,\varphi) \\ 0 = d\pi_q(\zeta) + \mu \circ \pi_q \end{cases},$$

onde π_q é como em 1).

A seguir, examinaremos mais detalhadamente os espaços $T_f^{\mathcal{G}}\varphi$ e $T_f^{\mathcal{G}^e}\varphi$ nos casos especiais em que φ é a projeção canônica ou uma forma canônica de um germe de Morse.

(1.2.8) φ projeção canônica

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ a projeção $\varphi(x,y) = y$.

Consideremos um germe $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Associados a f , temos os seguintes homomorfismos :

1) $tf : \theta_{\pi_n} \longrightarrow \theta_f$ é definido por $tf(\xi) = df \circ i_n \circ \xi$, on-

de $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é a projeção canônica e

$i_n : \theta_{\pi_n} \longrightarrow \theta_{n+q} \equiv \theta_{\pi_n} \oplus \theta_\varphi$ é a inclusão $i_n(\xi) = (\xi, 0)$.

tf é um $\mathcal{E}_{n+q}$ -homomorfismo.

2) $tf : \theta_q \longrightarrow \theta_f$ é definido por $tf(\mu) = df \circ i_q \circ \mu \circ \varphi$, onde

$i_q : \theta_\varphi \longrightarrow \theta_{n+q} \equiv \theta_{\pi_n} \oplus \theta_\varphi$ é a inclusão $i_q(\nu) = (0, \nu)$.

tf é um $\mathcal{E}_q$ -homomorfismo.

Pode-se ver facilmente que :

$$T_f \mathcal{E}_\varphi = tf(\mathcal{M}_{n+q} \theta_{\pi_n}) + tf(\mathcal{M}_q \theta_q) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_{\pi_p})$$

e

$$T_f \mathcal{E}_\varphi^e = tf(\theta_{\pi_n}) + tf(\theta_q) + \omega(f, \varphi)(\theta_{\pi_p}).$$

Observe que θ_{π_n} pode ser identificado com o $\mathcal{E}_{n+q}$ -submódulo de θ_{n+q} constituído pelos campos "horizontais", isto é, campos tangentes à folheação determinada por φ , e que θ_q pode ser identificado com o $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ -submódulo constituído pelos campos "verticais" constantes ao longo das folhas.

(1.2.9) φ forma canônica de um germe de Morse

Consideremos $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dado por $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Associaremos ao germe φ os seguintes módulos :

1) θ_t é o $\mathcal{E}_n$ -módulo dos campos $\xi \in \theta_n$ tangentes à folheação de $(\mathbb{R}^n, 0)$ determinada por φ ; ou seja,

$$\begin{aligned}\theta_t &= \{\xi \in \theta_n; d\varphi(\xi) = 0\} \\ &= t\varphi^{-1}(0)\end{aligned}$$

2) θ_n é o $\varphi^*(\mathcal{E}_1)$ -módulo gerado pelo campo radial

$$\xi_r = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

θ_n é denotado por $\langle \xi_r \rangle_{\varphi^*(\mathcal{E}_1)}$.

Com relação a θ_t , temos ainda :

$$\theta_t = \left\langle \xi_{ij} = -\varepsilon_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_{ji} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} : 1 \leq i < j \leq n \right\rangle_{\mathcal{E}_n}.$$

Isto segue do seguinte resultado de Leme [10]:

Lema

Seja A o $\mathcal{E}_n$ -módulo livre $(\mathcal{E}_n)^r = \mathcal{E}_n \times \dots \times \mathcal{E}_n$: r fatores, $1 \leq r \leq n$, e seja $B : A^2 \rightarrow \mathcal{E}_n$ definida por $B(a, b) = \sum_{i=1}^r a_i b_i$. Consideremos $\{g_1, \dots, g_r\}$ parte de uma $\mathcal{E}_n$ -base de $\mathcal{M}_n$ e $g = (g_1, \dots, g_r)$. Então, $g^\perp = \{a \in A; B(a, g) = 0\}$ é o $\mathcal{E}_n$ -módulo gerado pelos elementos $g_{ij} = (a_j)$ com $1 \leq i < j \leq r$, $a_i = -g_j$,

$$a_j = g_i \quad \text{e} \quad a_\ell = 0 \quad \text{se} \quad \ell \notin \{i, j\}.$$

Dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, mostraremos que :

$$(i) \quad T_f \xi_\varphi = tf(\theta_t) + tf(\theta_n) + \omega(f, \varphi)(M_{p+1} \theta_{\pi_p}),$$

$$(ii) \quad T_f \xi_\varphi^e = tf(\theta_t) + tf(\theta_n) + \omega(f, \varphi)(\theta_{\pi_p}).$$

Não é difícil verificar que $t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\theta_1)) = t\varphi^{-1}(\omega\varphi(M_1\theta_1)) \subset M_n\theta_n$.

Então, tendo em vista (1.2.6) e a linearidade de tf , as igualdades (i) e (ii) ficam provadas se mostrarmos a seguinte igualdade:

$$t\varphi^{-1}(\omega\varphi(M_1\theta_1)) = \theta_t + \theta_n.$$

Para isto, denotemos por z um ponto de $\mathbb{R}$.

Observemos que $d\varphi(\xi_r/2) = \varphi \frac{\partial}{\partial z} \circ \varphi$.

Como $\omega\varphi(M_1\theta_1)$ é o $\varphi^*(\xi_1)$ -módulo gerado por $\varphi \frac{\partial}{\partial z} \circ \varphi = d\varphi(\xi_r/2)$, pela linearidade de $t\varphi$, segue então que $t\varphi(\theta_n) = \omega\varphi(M_1\theta_1)$.

Logo, $t\varphi^{-1}(\omega\varphi(M_1\theta_1)) = \theta_t + \theta_n$, pois $\theta_t = \ker t\varphi$.

Portanto, as igualdades (i) e (ii) são verdadeiras.

A análise feita em (1.2.8) e (1.2.9) evidencia a geometria dos campos envolvidos. Mas, os argumentos usados se generalizam para germes de submersão ou Morse quaisquer, como veremos a seguir.

(1.2.10) φ germe de submersão

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ um germe de submersão.

Associados a φ , temos os seguintes módulos:

- 1) θ_t^e é o $\mathcal{E}_n$ -módulo dos campos $\xi \in \theta_n$ tangentes à folheação de $(\mathbb{R}^n, 0)$ determinada por φ :

$$\begin{aligned}\theta_t^e &= \{\xi \in \theta_n ; d\varphi(\xi) = 0\} \\ &= t\varphi^{-1}(0).\end{aligned}$$

θ_t^e é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre de rank $n-q$.

- 2) θ_c^e é definido como segue :

Seja $\mathcal{B} = \{\rho_1, \dots, \rho_q\}$ uma base do $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $\theta_q / \mathcal{M}_q \theta_q$ dos campos constantes de θ_q .

Para cada i , $1 \leq i \leq q$, tomemos um campo $\xi_i \in \theta_n / \theta_t^e$ tal que $d\varphi(\xi_i) = \rho_i \circ \varphi$.

Então, definimos θ_c^e como sendo o $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ -módulo gerado por $\xi_1, \dots, \xi_q$.

θ_c^e independe da base $\mathcal{B}$ escolhida.

Temos que $\omega\varphi(\theta_q)$ é o $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ -módulo gerado por $\rho_1 \circ \varphi, \dots, \rho_q \circ \varphi$. Logo, $t\varphi(\theta_c^e) = \omega\varphi(\theta_q)$ e, portanto,

$$\theta_{\Delta}^e \stackrel{\text{def}}{=} t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\theta_q^e)) = \theta_t^e + \theta_c^e.$$

Assim, por (1.2.6), dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$,

$$T_{f\varphi}^e = tf(\theta_t^e) + tf(\theta_c^e) + \omega(f, \varphi)(\theta_{\pi_p}).$$

Para o espaço $T_{f\varphi}^e$, consideremos ainda os módulos θ_t , $\theta_c \subset \mathcal{M}_{n\ n}^e$:

3) θ_t é o $\mathcal{E}_n^e$ -módulo dos campos $\xi \in \theta_t^e$, nulos na origem :

$$\begin{aligned}\theta_t &= t\varphi^{-1}(0) \cap \mathcal{M}_{n\ n}^e \\ &= \mathcal{M}_{n\ t}^e.\end{aligned}$$

4) θ_c é o $\varphi^*(\mathcal{E}_q^e)$ -módulo dos campos $\nu \in \theta_c^e$, nulos na origem :

$$\theta_c = \varphi^*(\mathcal{M}_q^e)\theta_c^e.$$

Claramente, $t\varphi(\theta_c^e) = \omega\varphi(\mathcal{M}_q^e\theta_q^e)$. Então,

$$\theta_{\Delta}^e \stackrel{\text{def}}{=} t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\mathcal{M}_q^e\theta_q^e)) \cap \mathcal{M}_{n\ n}^e = \theta_t + \theta_c.$$

Portanto, de (1.2.6), vem :

$$T_{f\varphi}^e = tf(\theta_t) + tf(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q\ p}^e\theta_{\pi_p}).$$

(1.2.11) φ germe de Morse

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de Morse.

Analogamente a (1.2.9), associamos a φ os módulos θ_t , θ_c :

1) θ_t é o $\mathcal{E}_n$ -módulo definido por :

$$\begin{aligned}\theta_t &= \{\xi \in \theta_n; d\varphi(\xi) = 0\} \\ &= t\varphi^{-1}(0).\end{aligned}$$

2) θ_c é definido da seguinte maneira :

Seja ρ um campo de vetores não-nulo na meta de φ ,
 $\rho \in \mathcal{M}_1\theta_1/\mathcal{M}_1^2\theta_1$.

Tomemos um campo $\xi \in \theta_n/\theta_t$ tal que $d\varphi(\xi) = \rho \circ \varphi$ (a existência de um tal campo é garantida pelo fato de que, como φ é de Morse, $t\varphi(\theta_n) = \mathcal{M}_n\theta_\varphi$ (ver Gibson [8])).

Então, definimos θ_c como sendo o $\varphi^*(\mathcal{E}_1)$ -módulo gerado por ξ .

θ_c independe do campo ρ considerado.

Evidentemente tem-se, por argumentos análogos aos anteriores, que :

$$t\varphi(\theta_c) = \omega\varphi(\mathcal{M}_1\theta_1).$$

Por ser φ um germe de Morse, tem-se ainda $\theta_t \in \mathcal{M}_n \theta_n$ e $t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\theta_1)) = t\varphi^{-1}(\omega\varphi(\mathcal{M}_1\theta_1)) \in \mathcal{M}_n \theta_n$.

Portanto, para φ ,

$$\theta_\Delta^e = \theta_\Delta = \theta_t + \theta_c.$$

Logo, por (1.2.6), dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$,

$$\begin{aligned} T_f \xi_\varphi &= tf(\theta_t) + tf(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+1} \theta_{\pi_p}) \\ e \quad T_f \xi_\varphi^e &= tf(\theta_t) + tf(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\theta_{\pi_p}). \end{aligned}$$

Capítulo II

φ - Determinação Finita

§1. Introdução

Na literatura, encontram-se trabalhos que tratam da determinação finita para uma ampla classe de subgrupos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$. Entre estes, o trabalho mais abrangente é Damon [2], que estuda o problema de desdobramento e determinação finita para os subgrupos "geométricos" de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$. Recentemente, Nakai em [20] apresentou um estudo detalhado sobre estabilidade, determinação finita e versalidade no caso específico de diagramas de aplicações.

No entanto, nosso objetivo é obter métodos que possibilitem dar informações mais completas sobre a φ - equivalência. O Teorema (2.3.9), resultado central deste Capítulo, nos dá um critério infinitesimal para a φ - determinação finita, generalizando o Teorema (5.1), Capítulo II, de Egúsquiza [6], para germes φ mais gerais do que germe de submersão. Um problema interessante é caracterizar os germes φ para os quais o resultado se aplica.

A definição de φ - determinação finita é a usual dentro da teoria.

(2.1.1) Definição

Consideremos um germe $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$.

Um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - φ - *determinado* se todo germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com o mesmo r -jato que f é φ - equivalente a f .

Diremos que f é φ - *finitamente determinado* se f for r - φ - determinado para algum $r < \infty$.

§2. Preliminares Algébricos

Neste parágrafo, reunimos alguns resultados básicos para futuras referências. As provas dos resultados listados aqui, podem ser vistas em Mather [15].

(2.2.1) Lema de Nakayama

Seja $\mathcal{R}$ um anel comutativo com identidade e seja $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ um ideal tal que $1 + m$ é inversível para todo $m \in \mathcal{M}$. Sejam A e B submódulos de um $\mathcal{R}$ -módulo C , com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + \mathcal{M}.A$ então $A \subseteq B$.

(2.2.2) Corolário

Seja A um $\mathcal{E}_n$ -módulo finitamente gerado e seja B um submódulo de A satisfazendo $\dim_{\mathbb{R}} A/(\mathcal{M}_n^{r+1}A + B) \leq r$. Então, $\mathcal{M}_n^r A \subset B$.

(2.2.3) Corolário

Sob as hipóteses do Corolário (2.2.2), existe um conjunto de geradores de B como $\mathcal{E}_n$ -módulo, tendo no máximo $a \binom{n+r}{r}$ elementos, onde a é o número de elementos de um conjunto minimal de geradores de A .

(2.2.4) Teorema de Malgrange

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação, e seja A um $\mathcal{E}_n$ -módulo finitamente gerado. Então, A é finitamente gerado como um $f^*(\mathcal{E}_p)$ -módulo se, e somente se, $\dim_{\mathbb{R}} A/f^*(\mathcal{M}_p)A$ é finita.

(2.2.5) Proposição

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação. Sejam C um $\mathcal{E}_n$ -módulo finitamente gerado, B um $\mathcal{E}_n$ -submódulo de C e A um $f^*(\mathcal{E}_p)$ -submódulo finitamente gerado de C . Se

$$C = A + B + (f^*(M_p) + M_n^{r+1})C$$

para algum $r \geq \dim_{\mathbb{R}} A/f^*(M_p)A$, então

$$C = A + B$$

§3. Critério Infinitesimal

Fixemos um germe $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$.

Associados a φ , existem dois módulos θ_t , $\theta_c \subset M_n \theta_n$ de importância fundamental para o estudo que faremos neste parágrafo.

(2.3.1) Definição

1) θ_t é o $\mathcal{E}_n$ -módulo definido por :

$$\begin{aligned}\theta_t &= \{\xi \in M_n \theta_n ; d\varphi(\xi) = 0\} \\ &= t\varphi^{-1}(0) \cap M_n \theta_n .\end{aligned}$$

2) θ_c é definido da seguinte maneira :

Consideremos o $\mathbb{R}$ - espaço vetorial $\mathcal{P}_{q+1} = M_q \theta_q / M_q^{q+2} \theta_q$ dos campos polinomiais p de $M_q \theta_q$ de grau $\leq q+1$.

Seja $\mathcal{P}_{q+1}^\varphi$ o subespaço de $\mathcal{P}_{q+1}$ formado pelos campos $p \in \mathcal{P}_{q+1}$ para os quais existe um campo $\xi \in M_n \theta_n$ satisfazendo $d\varphi(\xi) = p \circ \varphi$.

Se $\mathcal{P}_{q+1}^\varphi$ for o subespaço nulo, definimos $\theta_c = \{0\}$, $0 \in \theta_n$.

Se $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{q+1}^{\varphi} \geq 1$, tomamos uma base $\mathcal{B} = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ de $\mathcal{P}_{q+1}^{\varphi}$ e, para cada i , $1 \leq i \leq r$, escolhemos um campo $\xi_i \in \mathcal{M}_n \theta_n / \theta_t$ de modo que $d\varphi(\xi_i) = \rho_i \circ \varphi$. Então, definimos θ_c como sendo o $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ -módulo gerado por $\xi_1, \dots, \xi_r$. É fácil ver que θ_c independe da base $\mathcal{B}$ tomada.

(2.3.2) Evidentemente,

$$\theta_t + \theta_c \subset \theta_{\Delta} = \{\xi \in \mathcal{M}_n \theta_n; \exists \mu \in \mathcal{M}_q \theta_q \text{ tal que } d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi = 0\}.$$

Em geral, esta inclusão é própria. Quando φ é germe de submersão ou de Morse, segue facilmente de (1.2.10) e (1.2.11), § 2, do capítulo anterior, que $\theta_{\Delta} = \theta_t + \theta_c$.

Consideremos agora um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Lembremos que

$$T_f \mathcal{E}_{\varphi} = \text{tf}(\theta_{\Delta}) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_{\pi_p}).$$

Então, de acordo com (2.3.2), temos :

$$\text{tf}(\theta_t) + \text{tf}(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_{\pi_p}) \subset T_f \mathcal{E}_{\varphi},$$

sendo a inclusão em geral própria.

As estruturas das parcelas do lado esquerdo desta inclusão, nos permitem adaptar a prova da condição suficiente do Teorema (5.1), Capítulo II, de Egúsqiza [6], para obtermos uma condição suficiente para a φ - determinação finita (Proposição (2.3.5)).

Quando φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável e $\theta_{\Delta} = \theta_t + \theta_c$ (donde $\text{Tr}_{f,\varphi} = \text{tf}(\theta_t) + \text{tf}(\theta_c) + \omega(f,\varphi)(M_{p+q} \theta_{\pi_p})$), temos também uma condição necessária (Proposição (2.3.8)).

Para a condição suficiente, consideramos levantamentos de θ_t e θ_c .

(2.3.3) Definição

1) $\tilde{\theta}_t^a$ é o $\mathcal{E}_{n+1,0x_a}$ -módulo definido por :

$$\tilde{\theta}_t^a = \{ \tilde{\xi}^a \in M_n \Psi_{n+1}; d(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\xi}^a) = 0 \}$$

2) $\tilde{\theta}_c^a$ é o $((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{E}_{q+1,0x_a})$ -módulo gerado por θ_c .

Para fazer sentido a inclusão $\tilde{\theta}_c^a \subset M_n \Psi_{n+1}$, identificamos $\theta_n = \mathcal{E}_n \{ \frac{\partial}{\partial x_1} \circ I_{(\mathbb{R}^n, 0)} \}$ com $\mathcal{E}_n \{ \frac{\partial}{\partial x_1} \circ (I_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}^a)^a \}$, onde $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas locais para $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Como θ_c é um $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ -módulo finitamente gerado, temos que

$\tilde{\theta}_c^a$ é também finitamente gerado.

Observemos ainda que, para qualquer $\tilde{\nu}^a \in \tilde{\theta}_c^a$,

$$d(\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\nu}^a) = \tilde{\mu}^a \circ (\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a,$$

com $\tilde{\mu}^a \in \mathcal{M}_{q, q+1}^{\Psi}$.

Como usual, a prova da condição suficiente depende do seguinte lema de aproximação :

(2.3.4) Lema

Sejam $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_{xa}) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0_{xa})$ germes de aplicações que preservam $\mathbb{R}$ -níveis tais que f_t e g_t têm o mesmo s-jato para cada $t \in (\mathbb{R}, a)$. Sejam $\gamma, \lambda : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0_{xa}) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0_{xa})$ definidos por $\gamma(x, t) = (f_t(x), \varphi(x), t)$, $\lambda(x, t) = (g_t(x), \varphi(x), t)$.

Então :

$$1) \quad tG(\xi) - tF(\xi) \in \mathcal{M}_{n, F}^{s, \Psi}, \quad \forall \xi \in \Psi_{n+1}.$$

$$2) \quad \omega\lambda(\eta) - \omega\gamma(\eta) \in \mathcal{M}_{n, F}^{s+1, \Psi}, \quad \forall \eta \in \Psi_{n, p+1}.$$

(Aqui, Ψ_F e Ψ_G estão identificados).

Prova

Ver Du Plessis [5].

(2.3.5) Proposição

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tal que :

$$\mathcal{M}_{n_f}^r \subset \text{tf}(\theta_t) + \text{tf}(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_{\pi_p}) + \mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f ,$$

com $s = s(r) = r + c + d + a'$, onde

$$c = p \left[\binom{n+r-1}{r-1} - 1 \right], \quad d = \dim_{\mathbb{R}} \theta_c / \varphi^* (\mathcal{M}_q) \theta_c, \quad a' = p \left[\binom{p+q+d'+1}{d'+1} - 1 \right],$$

$$d' = d \binom{q+c}{c}.$$

Então, f é s - φ - determinado.

Prova

O objetivo da prova é mostrar que qualquer caminho $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$ tal que cada f_t tem o mesmo s -jato que f , é φ - trivial.

O resultado seguirá disto, pois se g é qualquer germe com o mesmo s -jato que f , um caminho F deste tipo pode ser construído definindo

$$f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x), \quad t \in (\mathbb{R}, [0,1]),$$

e então colocando $F(x,t) = (f_t(x), t)$; se este caminho F é φ - trivial, então certamente $f = f_0$ é φ - equivalente a $g = f_1$.

Na realidade, mostraremos que, para qualquer caminho F tal que cada f_t tem o mesmo s-jato que f ,

$$(0) \quad M_n^r \Psi_F^a \subset tF^a(\tilde{\theta}_t^a) + tF^a(\tilde{\theta}_c^a) + \omega \gamma^a(M_{p+q} \Psi_{\pi_{p+1}}^a), \quad \forall a \in [0,1],$$

onde

$$\gamma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0,1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0,1])$$

é o caminho definido por $\gamma(x,t) = (f_t(x), \varphi(x), t)$.

Para um tal F , $\partial F^a \in M_n^{s+1} \Psi_F^a \subset M_n^r \Psi_F^a$; assim, por (0) e pela Proposição (1.2.3), F será φ - trivial.

Seja a um ponto qualquer de $[0,1]$.

Começemos observando que a hipótese implica

$$(1) \quad M_n^r \Psi_{(f \times I_{\mathbb{R}})}^a \subset t(f \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\theta}_t^a) + t(f \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\theta}_c^a) + \omega \gamma_0^a(M_{p+q} \Psi_{\pi_{p+1}}^a) \\ + M_{n+1, 0 \times a}^{s-r+1} \cdot M_n^r \Psi_{(f \times I_{\mathbb{R}})}^a,$$

onde

$$\gamma_0 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0,1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}, 0 \times [0,1])$$

é o caminho definido por $\gamma_0(x,t) = (f(x), \varphi(x), t)$.

Para ver isto, primeiro observemos que pelo Teorema de

Taylor temos :

$$\varepsilon_{n+1,0xa} = \varepsilon_{1,a} + M_n \cdot \varepsilon_{n+1,0xa}.$$

Usando a igualdade acima recursivamente, obtemos :

$$\begin{aligned} M_n^r \cdot \varepsilon_{n+1,0xa} &= M_n^r \cdot \varepsilon_{1,a} + M_n^{r+1} \cdot \varepsilon_{n+1,0xa} \\ &= M_n^r \cdot \varepsilon_{1,a} + M_n^{r+1} \cdot \varepsilon_{1,a} + M_n^{r+2} \cdot \varepsilon_{n+1,0xa} \\ &= M_n^r \cdot \varepsilon_{1,a} + M_n^{r+2} \cdot \varepsilon_{n+1,0xa} \\ &\vdots \\ &= M_n^r \cdot \varepsilon_{1,a} + M_n^{r+(s-r+1)} \cdot \varepsilon_{n+1,0xa}. \end{aligned}$$

Assim,

$$M_n^r \cdot \varepsilon_{n+1,0xa} \in \langle 1, t, \dots, t^{s-r} \rangle \cdot M_n^r + M_{n+1,0xa}^{s-r+1} \cdot M_n^r.$$

Como $\Psi_{(f \times I_{\mathbb{R}})^a}$ é um $\varepsilon_{n+1,0xa}$ -módulo livre, segue então que

$$(2) \quad M_n^r \Psi_{(f \times I_{\mathbb{R}})^a} \in \langle 1, t, \dots, t^{s-r} \rangle M_n^r \theta_f + M_{n+1,0xa}^{s-r+1} \cdot M_n^r \Psi_{(f \times I_{\mathbb{R}})^a},$$

onde $\theta_f = \varepsilon_n \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f \right\}$ está identificado de maneira óbvia com $\varepsilon_n \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ (f \times I_{\mathbb{R}})^a \right\}$, sendo $(y_1, \dots, y_p)$ um sistema de coordenadas locais para $(\mathbb{R}^p, 0)$. Esta identificação também nos dá

$$t f(\theta_t) \in t(f \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\theta}_t^a).$$

$$tf(\theta_c) \subset t(f \times I_{\mathbb{R}})^a(\tilde{\theta}_c^a) ,$$

$$\mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f \subset \mathcal{M}_n^{s+1} \Psi_{(f \times I_{\mathbb{R}})^a} .$$

Considerando ainda $\varepsilon_{p+q} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ \pi_p \right\}$ identificado com $\varepsilon_{p+q} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ \pi_{p+1}^a \right\}$,

temos também

$$\omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_{\pi_p}) \subset \omega \gamma^a(\mathcal{M}_{p+q} \Psi_{\pi_{p+1}^a}) .$$

A hipótese e as quatro últimas inclusões implicam que $\mathcal{M}_n^r \theta_f$ está contido no lado direito de (1). Como este lado é fechado para a multiplicação por t , de (2) segue então (1).

Agora, pelo Lema de aproximação (2.3.4), podemos concluir que a inclusão (1) se mantém quando substituímos $f \times I_{\mathbb{R}}$ por qualquer caminho $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1]) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times [0, 1])$ tal que cada f_t tem o mesmo s -jato que f :

$$(3) \mathcal{M}_n^r \Psi_F^a \subset tF^a(\tilde{\theta}_t^a) + tF^a(\tilde{\theta}_c^a) + \omega \gamma^a(\mathcal{M}_{p+q} \Psi_{\pi_{p+1}^a}) + \mathcal{M}_{n+1, 0 \times a}^{s-r+1} \cdot \mathcal{M}_n^r \Psi_F^a .$$

O resto do argumento é para mostrar que o termo

$$\mathcal{M}_{n+1, 0 \times a}^{s-r+1} \cdot \mathcal{M}_n^r \Psi_F^a \text{ é redundante.}$$

$$\text{Sejam } C = \mathcal{M}_n \theta_f , \quad C_0 = \mathcal{M}_n^r \theta_f , \quad \hat{C} = \mathcal{M}_n \Psi_F^a , \quad \hat{C}_0 = \mathcal{M}_n^r \Psi_F^a ,$$

$$\hat{B} = tF^a(\tilde{\theta}_t^a) , \quad \hat{D} = tF^a(\tilde{\theta}_c^a) , \quad \hat{A} = \omega \gamma^a(\mathcal{M}_{p+q} \Psi_{\pi_{p+1}^a}) .$$

Assim, (3) se expressa como

$$(4) \quad \hat{C}_0 \subset \hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C}_0.$$

Seja

$$\hat{B}' = \hat{B} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \hat{C},$$

considerado como um $\mathcal{E}_{n+1,0xa}$ -submódulo de $\hat{C}$.

$$\text{De (4), segue que } \hat{C}_0 \subset \hat{B}' + \hat{D} + \hat{A} + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C}_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \hat{C}/(\hat{B}' + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C}) &= \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \hat{C}/(\hat{C}_0 + \mathcal{M}_{1,a} \hat{C}) + \dim_{\mathbb{R}} (\hat{C}_0 + \hat{B}' + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C})/(\hat{B}' + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C}) \leq \\ &\leq \dim_{\mathbb{R}} \hat{C}/\hat{C}_0 + \dim_{\mathbb{R}} (\hat{B}' + \hat{D} + \hat{A} + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C})/(\hat{B}' + \mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C}) \leq \\ &\leq c + \dim_{\mathbb{R}} \hat{A}/((\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}^{d'+1}) \hat{A} + \mathcal{M}_{1,a} \hat{A}) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{R}} \hat{D}/((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) \hat{D} \leq \\ &\leq c + a' + d = s - r. \end{aligned}$$

Logo, pelo Corolário (2.2.2) do Lema de Nakayama,

$$\mathcal{M}_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C} \subset \hat{B}' = \hat{B} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \hat{C}.$$

Multiplicando esta inclusão por M_n^{r-1} , obtemos :

$$M_{n+1,0xa}^{s-r+1} \hat{C}_0 \subset \hat{B} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (M_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (M_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \hat{C}_0.$$

Isto em (4), nos dá

$$(5) \hat{C}_0 \subset \hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (M_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (M_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \hat{C}_0.$$

Seja $ev_a : \hat{C} \rightarrow C$ definida por $ev_a(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}|_{\mathbb{R}^n \times a}$, e sejam $B = ev_a(\hat{B})$, $D = ev_a(\hat{D})$, $A = ev_a(\hat{A})$. Sejam $\hat{C}' = \hat{C}_0 + \hat{B} + \hat{A}$, $D' = D \cap (C_0 + B + A)$, $\hat{D}' = o((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{E}_{q+1,0xa})$ -módulo gerado por D' .

Temos :

$$\dim_{\mathbb{R}} D/D' = \dim_{\mathbb{R}} D/D \cap (C_0 + B + A) = \dim_{\mathbb{R}} (D+C_0+B+A)/(C_0 + B + A) \leq$$

$$\leq \dim_{\mathbb{R}} C/C_0 = c.$$

Portanto, pelo Corolário (2.2.3) do Lema de Nakayama, D' é gerado como um $\varphi^*(\mathcal{E}_q)$ -módulo por ℓ elementos, $\ell \leq d'$. Então, $\hat{D}'$ é gerado por ℓ elementos como um $((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{E}_{q+1,0xa})$ -módulo.

Afirmamos que

$$(6) \hat{C}' = \hat{B} + \hat{D}' + \hat{A} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (M_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (M_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \hat{C}'.$$

De fato :

De (5) segue que

$$\hat{C}' = \hat{B} + \hat{D} \cap \hat{C}' + \hat{A} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \hat{C}'.$$

Então, para mostrar que o lado esquerdo de (6) está contido no lado direito de (6), basta mostrar que $\hat{D} \cap \hat{C}'$ está contido no lado direito. Mas, pelo lema de aproximação, $\hat{D} \cap \hat{C}' \subset \hat{D}' + \mathcal{M}_{1,a} \hat{C}' \subset \hat{D}' + ((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) \hat{C}'$, portanto, $\hat{D} \cap \hat{C}'$ está contido no lado direito de (6).

Agora, para mostrar que o lado direito de (6) está contido no lado esquerdo de (6), basta mostrar que D' está contido no lado esquerdo. Seja então $\delta \in D'$; logo, $\delta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, com $\sigma_1 \in A$, $\sigma_2 \in B$, $\sigma_3 \in C_0$. Pelo lema de aproximação, segue que $\sigma_1 \in \hat{A} + \hat{C}_0$, $\sigma_2 \in \hat{B} + \hat{C}_0$; e $\sigma_3 \in \hat{C}_0$ pois $\hat{C}_0 \simeq C_0 + \mathcal{M}_{1,a} \hat{C}_0$. Assim, $\delta \in \hat{C}'$.

Portanto, (6) está provado.

Seja, agora, $\rho : \hat{C} \longrightarrow \hat{C}/\hat{B}$ a projeção, $\bar{C}' = \rho(\hat{C}')$,

$$\bar{C}_0 = \rho(\hat{C}_0), \bar{D} = \rho(\hat{D}), \bar{D}' = \rho(\hat{D}'), \bar{A} = \rho(\hat{A}).$$

Então, de (6), vem :

$$(7) \bar{C}' = \bar{D}' + \bar{A} + [((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) + (\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}^{d'+1})] \bar{C}'.$$

A seguir, provaremos que $\bar{C}'$ é finitamente gerado como um $(\gamma^a)^* (\mathcal{E}_{p+q+1,0xa})$ -módulo.

Como $\hat{C}_0$ é um $\mathcal{E}_{n+1,0xa}$ -módulo finitamente gerado, $\bar{C}_0$ também o é. Por (5), temos

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \bar{C}_0 / (\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}) \bar{C}_0 &\leq \dim_{\mathbb{R}} \bar{A} / (\gamma^a)^* (\mathcal{M}_{p+q+1,0xa}) \bar{A} + \\ &+ \dim_{\mathbb{R}} \bar{D} / ((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) \bar{D} < \infty . \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Malgrange (2.2.4), $\bar{C}_0$ é finitamente gerado como um $(\gamma^a)^* (\mathcal{E}_{p+q+1,0xa})$ -módulo.

Portanto, $\bar{C}' = \bar{C}'_0 + \bar{A}$ é um $(\gamma^a)^* (\mathcal{E}_{p+q+1,0xa})$ -módulo finitamente gerado.

Podemos então aplicar a Proposição (2.2.5) a (7) para obtermos

$$\bar{C}' = \bar{D}' + \bar{A}$$

ou seja, $\hat{C}' = \hat{B} + \hat{D}' + \hat{A}$.

Por outro lado, como $\hat{D}' \subset \hat{D} \cap \hat{C}' + ((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) \hat{C}'$, temos

$$\hat{C}' = \hat{B} + \hat{D} \cap \hat{C}' + \hat{A} + ((\varphi \times I_{\mathbb{R}})^a)^* (\mathcal{M}_{q+1,0xa}) \hat{C}' .$$

Agora, primeiro considerando o quociente $\hat{C}' / (\hat{B} + \hat{A})$ e depois aplicando o Lema de Nakayama, obtemos $\hat{C}' = \hat{B} + \hat{D} \cap \hat{C}' + \hat{A}$, donde

$$\hat{C}_0 \subset \hat{B} + \hat{D} + \hat{A} ,$$

ou seja :

$$(8) \mathcal{M}_{n_F}^r \Psi_a \subset tF^a(\tilde{\theta}_t^a) + tF^a(\tilde{\theta}_c^a) + \omega^a(\mathcal{M}_{p+q} \Psi_a \pi_{p+1}).$$

Como isto acontece para qualquer $a \in [0,1]$, (0) está verificado; o que, como já foi dito, é suficiente para provar a proposição.

(2.3.6) Corolário

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tal que :

$$\mathcal{M}_{n_f}^r \theta_f \subset tf(\theta_t) + tf(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_p \pi_p) + \mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f,$$

com $s = s(r)$ como na Proposição (2.3.5).

Então,

$$\mathcal{M}_{n_g}^r \theta_g \subset tg(\theta_t) + tg(\theta_c) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_p \pi_p)$$

para qualquer germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com o mesmo s -jato que f .

Prova

Os argumentos da prova da Proposição (2.3.5) se aplicam com

F substituído por $g \times I_{(\mathbb{R}, [0,1])}$; o resultado é exatamente a restrição de (8) (para qualquer $a \in [0,1]$) sobre $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times a$.

Para obter uma condição necessária para a φ -determinação finita, é preciso mais estudo geométrico.

Suponhamos que $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ seja *4-infinitesimalmente estável*.

Denotemos por $\mathcal{G}_\varphi^s(p)$ o grupo dos s -jatos de elementos de $\mathcal{G}_\varphi(p)$. $\mathcal{G}_\varphi^s(p)$ é um grupo de Lie.

Consideremos o espaço $J_0^s(n, p)$ dos s -jatos de elementos de $\mathcal{E}_0(n, p)$.

A ação de $\mathcal{G}_\varphi(p)$ sobre $\mathcal{E}_0(n, p)$ induz uma ação de $\mathcal{G}_\varphi^s(p)$ sobre $J_0^s(n, p)$ definida por $(j^s h, j^s k) \cdot j^s f = j^s((h, k) \cdot f)$, para $(h, k) \in \mathcal{G}_\varphi(p)$ e $f \in \mathcal{E}_0(n, p)$. Além disso, a ação de $\mathcal{G}_\varphi^s(p)$ sobre $J_0^s(n, p)$ é uma ação algébrica e, portanto, todas as $\mathcal{G}_\varphi^s(p)$ -órbitas são subvariedades mergulhadas de $J_0^s(n, p)$ (ver Gibson [8]).

A aplicação $\pi^s : \mathcal{E}_0(n, p) \longrightarrow J_0^s(n, p) : f \longmapsto j^s f$ leva a $\mathcal{G}_\varphi$ -órbita de f sobre a $\mathcal{G}_\varphi^s$ -órbita de $j^s f$.

Considerando agora espaços tangentes, temos o epimorfismo de $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais

$$\pi^s : \mathcal{M}_n \theta_f \longrightarrow T_{j^s f} J_0^s(n, p)$$

definido como segue :

Dado $\xi \in \mathcal{M}_n \theta_f$, tomamos um caminho diferenciável F em $\mathcal{E}_0(n,p)$ por f , $F(x,t) = (f_t(x), t)$, tal que $\frac{d}{dt}f_t \Big|_{t=0} = \xi$. Então, colocamos

$$\pi^s(\xi) = \frac{d}{dt}(j^s f_t) \Big|_{t=0}.$$

É fácil ver que $\pi^s(\xi)$ independe da escolha do caminho F .

Evidentemente, $\ker \pi^s = \mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f$.

Ainda, pelo método usual (ver Mather [15]), pode-se mostrar que

$$T_{j^s f} \mathcal{G}_\varphi^s = \pi^s(T_f \mathcal{G}_\varphi).$$

Assim :

(2.3.7) Lema

Se $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - φ -determinado, então

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f \quad \text{para qualquer } s \geq 0.$$

Prova

Como em Du Plessis [5] :

Se f é r - φ -determinado, então

$\{\text{germes com o mesmo } r\text{-jato que } f\} \subset \{\text{germes } \varphi\text{-equivalentes a } f\}.$

Tomando s -jatos,

$\{s\text{-jatos dos germes com o mesmo } r\text{-jato que } f\}$
 $\subset \{s\text{-jatos dos germes } \varphi - \text{equivalentes a } f\}.$

Passando a espaços tangentes em $j^s f$,

$$\pi^s(\mathcal{M}_n^{r+1}\theta_f) \subset \pi^s(T_f \mathcal{G}_\varphi).$$

Como $\ker \pi^s = \mathcal{M}_n^{s+1}\theta_f$, segue então que

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_n^{s+1}\theta_{f'}.$$

Quando, além de ser $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável, o germe φ é tal que $\theta_\Delta = \theta_t + \theta_c$, uma condição necessária para a r - φ - determinação é a seguinte :

(2.3.8) Proposição

Se $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - φ - determinado, então

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi (=tf(\theta_t) + tf(\theta_c) + \omega(f, \varphi)(\mathcal{M}_{p+q} \theta_{\pi_p})).$$

Prova

Do lema anterior, com $s = s(r + 1)$ tal como na Proposição

(2.3.5), temos :

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f .$$

Então, pelo Corolário (2.3.6) (com $f = g$),

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi .$$

Combinando os resultados deste parágrafo, já podemos enunciar o resultado central deste capítulo.

(2.3.9) Teorema de Caracterização

Suponhamos que φ seja $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável e que $\theta_\Delta = \theta_t + \theta_c$. Então, para um germe f , as seguintes condições são equivalentes :

- 1) f é φ - finitamente determinado .
- 2) Para algum inteiro r , $\mathcal{M}_n^r \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi$.
- 3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n \theta_f / T_f \mathcal{G}_\varphi < \infty$.
- 4) Para algum inteiro r' , $\mathcal{M}_n^{r'} \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi^e$.
- 5) $\dim_{\mathbb{R}} \theta_f / T_f \mathcal{G}_\varphi^e < \infty$.

Prova

As Proposições (2.3.8) e (2.3.5) dão, respectivamente, 1) $\Rightarrow$ 2) e 2) $\Rightarrow$ 1).

2) $\Rightarrow$ 4) trivialmente.

4) $\Rightarrow$ 5) porque $\dim_{\mathbb{R}} \theta_f / \mathcal{M}_n^r \theta_f < \infty$.

5) $\Rightarrow$ 3) porque $\dim_{\mathbb{R}} T_f \mathcal{G}_\varphi^e / T_f \mathcal{G}_\varphi < \infty$.

Resta mostrar 3) $\Rightarrow$ 2).

Seja $d_k = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n \theta_f / (T_f \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_n^k \theta_f)$. Então,

$$0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k \leq \dots \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n \theta_f / T_f \mathcal{G}_\varphi < \infty.$$

Então, existe um inteiro r tal que $d_r = d_s$, para todo $s \geq r$. Em particular, $d_r = d_{s+1}$, com $s = s(r)$ tal como na Proposição (2.3.5). Logo,

$$\mathcal{M}_n^r \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_n^{s+1} \theta_f.$$

Portanto, pelo Corolário (2.3.6) (com $f = g$),

$$\mathcal{M}_n^r \theta_f \subset T_f \mathcal{G}_\varphi.$$

Seria interessante saber se a igualdade $\theta_\Delta = \theta_t + \theta_c$ (e como conseqüência o Teorema acima) se verifica para todo germe φ $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável. A resposta a esta questão depende essencialmente de um melhor entendimento do $\mathcal{A}$ -grupo de isotropia de um tal germe.

Com relação ao grau de φ - determinação, ainda não conseguimos melhorar a estimativa (muito grande) obtida por Egúsquiza. Entretanto, em muitas situações, é possível obter o grau exato, usando o resultado abaixo.

(2.3.10) Proposição

Suponhamos que φ seja $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável e que $\theta_{\Delta} = \theta_t + \theta_c$. Então, um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - φ - determinado se, e somente se,

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta_g \subset T_g \mathcal{G}_{\varphi} + \mathcal{M}_n^{s(r+1)+1} \theta_g$$

para todo germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com o mesmo r -jato que f , sendo $s(r+1)$ tal como na Proposição (2.3.5).

Prova

Para a prova, precisamos do seguinte lema geral :

(2.3.11) Lema de Mather

Seja G um grupo de Lie agindo sobre uma variedade M ; e seja

V uma subvariedade conexa de M . Então, V está contida em uma só órbita se, e somente se,

- a) Para todo $v \in V$, $T_v V \subset T_v(G.v)$,
- b) $\dim T_v(G.v)$ é a mesma para todo $v \in V$, ou
- b)' $V = \pi^{-1}(x')$ para alguma G -submersão $\pi : M \rightarrow M'$, onde $x' \in M'$.

Prova

Ver Mather [16].

Voltemos à prova da Proposição (2.3.10).

Seja $V = (\pi^{s(r+1),r})^{-1}(j^r f)$, onde $\pi^{s(r+1),r} : J_0^{s(r+1)} \rightarrow J_0^r$ é a projeção canônica. V é claramente uma subvariedade conexa de $J_0^{s(r+1)}$.

Tendo em vista a Proposição (2.3.5), não é difícil verificar que f é r - φ -determinado se, e somente se, $V \subset \mathcal{G}_\varphi^{s(r+1)}(j^{s(r+1)} f)$.

É claro que $\pi^{s(r+1),r}$ é uma $\mathcal{G}_\varphi^{s(r+1)}$ -submersão (onde $\mathcal{G}_\varphi^{s(r+1)}$ age sobre J_0^r via projeção a $\mathcal{G}_\varphi^r$). Então, de acordo com o Lema de Mather (2.3.11), $V \subset \mathcal{G}_\varphi^{s(r+1)}(j^{s(r+1)} f)$ se, e somente se,

$$T_{j^{s(r+1)} g} V \subset T_{j^{s(r+1)} g} (\mathcal{G}_\varphi^{s(r+1)}(j^{s(r+1)} g)),$$

para todo $j^{s(r+1)} g \in V$.

Mas, esta última inclusão é equivalente a

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta_g \subset T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_n^{s(r+1)+1} \theta_g,$$

para todo g com o mesmo r -jato que f .

Portanto, a prova está terminada.

A seguir, faremos alguns cálculos de grau de φ - determinação. Nestes cálculos, como nos outros que serão efetuados ao longo deste trabalho, usaremos as convenções :

- 1) Sendo $(x_1, \dots, x_k)$ o indicado sistema de coordenadas em $(\mathbb{R}^k, 0)$, $\mathcal{E}_k$ será escrito $\mathcal{E}_{(x_1, \dots, x_k)}$ e analogamente para $\mathcal{M}_k$.
- 2) θ_f será identificado com $(\mathcal{E}_n)^P$ via sua base livre $\{\frac{\partial}{\partial y_1} \circ f\}$ para o indicado sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_p)$ em $(\mathbb{R}^p, 0)$.

(2.3.12) Exemplo

Consideremos os germes $(\mathbb{R}^2, 0)$ $\begin{matrix} \nearrow f \\ \searrow \varphi \end{matrix}$ $\begin{matrix} (\mathbb{R}, 0) \\ (\mathbb{R}, 0) \end{matrix}$ dados

por

$$\begin{cases} u = f(x, y) = x^3 + \varepsilon xy^2 \\ v = \varphi(x, y) = y \end{cases}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

f é 3- φ - determinado.

De fato :

Seja $g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que $j^3 g = j^3 f$; então $g = f + h$, com $h \in \mathcal{M}_{(x,y)}^4$.

De (1.2.8), temos :

$$\begin{aligned} T_{g, \varphi}^{\mathcal{G}} &= tg(\mathcal{M}_{(x,y)} \theta_{\pi_x}) + \tau g(\mathcal{M}_y \theta_y) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)} \theta_{\pi_u}) \\ &= \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}} + \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle_{\mathcal{M}_y} + (g, \varphi)^*(\mathcal{M}_{(u,v)}). \end{aligned}$$

Assim, $T_{g, \varphi}^{\mathcal{G}}$ é formado pelos $\sigma \in \mathcal{M}_{(x,y)}$ tais que :

$$\begin{aligned} (*) \quad \sigma(x, y) &= (3x^2 + \varepsilon y^2 + \frac{\partial h}{\partial x}(x, y))\xi(x, y) + (2\varepsilon xy + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y))v(y) \\ &\quad + \eta(x^3 + \varepsilon xy^2 + h(x, y), y), \end{aligned}$$

onde $\xi \in \mathcal{M}_{(x,y)}$, $v \in \mathcal{M}_y$, $\eta \in \mathcal{M}_{(u,v)}$.

Tomando no lado direito de (*),

$$a) \xi(x, y) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{\varepsilon}{9}y^2, \quad v = 0, \quad \eta(u, v) = -\frac{1}{9}v^4,$$

$$b) \xi(x, y) = \frac{1}{3}xy, \quad v(y) = -\frac{1}{6}y^2, \quad \eta = 0,$$

$$c) \xi(x, y) = \frac{1}{3}y^2, \quad v = 0, \quad \eta(u, v) = -\frac{\varepsilon}{4}v^4,$$

$$d) \xi = 0, \quad v(y) = -\frac{1}{2\varepsilon}y^2, \quad \eta = 0,$$

$$e) \xi = 0, \quad v = 0, \quad \eta(u, v) = v^4,$$

obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \in & \operatorname{tg}(\mathcal{M}_{(x,y)}^2 \theta_{\pi_x}) + \operatorname{tg}(\mathcal{M}_y^2 \theta_y) + \\ & + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^4 \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^5 \theta_g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (1) \mathcal{M}_{(x,y)}^4 \theta_g \subset & \operatorname{tg}(\mathcal{M}_{(x,y)}^2 \theta_{\pi_x}) + \operatorname{tg}(\mathcal{M}_y^2 \theta_y) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^4 \theta_{\pi_u}) + \\ & + \mathcal{M}_{(x,y)}^5 \theta_g. \end{aligned}$$

Indutivamente,

$$\begin{aligned} (2) \mathcal{M}_{(x,y)}^r \theta_g \subset & \operatorname{tg}(\mathcal{M}_{(x,y)}^{r-2} \theta_{\pi_x}) + \operatorname{tg}(\mathcal{M}_y^{r-2} \theta_y) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^r \theta_{\pi_u}) + \\ & + \mathcal{M}_{(x,y)}^{r+1} \theta_g, \quad \forall r \geq 5. \end{aligned}$$

Substituindo sucessivamente (2_r) em (1), vem :

$$\begin{aligned} M_{(x,y)}^4 \theta_g &\subset \text{tg}(M_{(x,y)}^2 \theta_{\pi_x}) + \text{tg}(M_y^2 \theta_y) + \omega(g, \varphi)(M_{(u,v)}^4 \theta_{\pi_u}) + \\ &+ M_{(x,y)}^l \theta_g, \quad \forall l \geq 5. \end{aligned}$$

Pela Proposição (2.3.10), segue então que f é 3- φ - determinado, coincidindo com o grau exato da $\mathcal{A}$ -determinação de (f, φ) (ver Du Plessis [5]).

É fácil completar os cálculos acima para mostrar que

$$\mathcal{E}_{(x,y)} = T_f \mathcal{E}_\varphi^e \oplus \langle x \rangle_{\mathbb{R}}.$$

(2.3.13) Exemplo

Consideremos os germes $(\mathbb{R}^2, 0)$ $\begin{matrix} \nearrow f & (\mathbb{R}, 0) \\ \searrow \varphi & (\mathbb{R}, 0) \end{matrix}$ dados

por
$$\begin{cases} u = f(x, y) = x^4 + xy + x^2y \\ v = \varphi(x, y) = y \end{cases}$$

f é 5- φ - determinado.

De fato :

Seja $g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que $j^5 g = j^5 f$; então $g = f + h$, com $h \in \mathcal{M}_{(x,y)}^6$.

De (1.2.8), temos :

$$T_g \mathcal{G}_\varphi = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}} + \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle_{\mathcal{M}_y} + (g, \varphi)^* (\mathcal{M}_{(u,v)}).$$

Assim, $T_g \mathcal{G}_\varphi$ é formado pelos $\sigma \in \mathcal{M}_{(x,y)}$ tais que :

$$\begin{aligned} (*) \quad \sigma(x,y) &= (4x^3 + y + 2xy + \frac{\partial h}{\partial x}(x,y))\xi(x,y) \\ &+ (x + x^2 + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y))\nu(y) \\ &+ \eta(x^4 + xy + x^2y + h(x,y), y), \end{aligned}$$

onde $\xi \in \mathcal{M}_{(x,y)}$, $\nu \in \mathcal{M}_y$, $\eta \in \mathcal{M}_{(u,v)}$.

Tomando no lado direito de (*),

$$a) \quad \xi(x,y) = x , \quad \nu = 0 , \quad \eta = 0 ,$$

$$b) \quad \xi = 0 , \quad \nu(y) = y , \quad \eta = 0 ,$$

$$c) \quad \xi = 0 , \quad \nu = 0 , \quad \eta(u,v) = u ,$$

obtemos, respectivamente :

$$4x^4 + xy + 2x^2y, xy + x^2y, x^4 + xy + x^2y \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^6 \theta_g.$$

Temos :

xy	x^2y	x^4
1	2	4
1	1	0
1	1	1

$$= -1 \neq 0.$$

Portanto,

$$xy, x^2y, x^4 \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^6 \theta_g,$$

donde

$$(1) \quad xy^{k+1}, x^2y^{k+1}, x^4y^k \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^{6+k} \theta_g, \text{ para } k \geq 0.$$

Tomando $\xi(x,y) = x^k (k \geq 1)$, $\nu = 0$, $\eta = 0$ em (*), obtemos :

$$4x^{k+3} + x^k y + 2x^{k+1} y \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^{5+k} \theta_g, \text{ para } k \geq 1.$$

Considerando isto para k , $k+1$ e $k+2$, concluimos que

$$(2) \quad x^k y \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^{3+k} \theta_g, \text{ para } k \geq 1.$$

Logo,

$$(3) \quad x^k y^s \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^{2+k+s} \theta_g, \text{ para } k \geq 1, s \geq 1.$$

Portanto, para mostrar que

$$\mathcal{M}_{(x,y)}^r \theta_g \subset T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^{r+1} \theta_g, \text{ para } r \geq 6,$$

basta verificar que

$$x^r \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^{r+1} \theta_g, \text{ para } r \geq 6.$$

Tomando em (*),

$$a) \quad \xi(x,y) = x^3, \quad \nu = 0, \quad \eta = 0,$$

$$b) \quad \xi(x,y) = y, \quad \nu = 0, \quad \eta(u,v) = -v^2$$

obtemos, respectivamente :

$$(4) \quad 4x^6 + x^3y + 2x^4y \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^8 \theta_g,$$

$$(5) \quad 4x^3y + 2xy^2 + \text{termos mistos de grau 6} + \text{termo em } y^6 \in T_g \mathcal{G}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)}^7 \theta_g.$$

Usando (*), (1) e (3) em (5), obtemos :

$$(6) \ x^3 y \in T_g^9 \varphi + M_{(x,y)}^7 \theta_g .$$

Agora, de (4), (3) e (6), vem :

$$x^6 \in T_g^9 \varphi + M_{(x,y)}^7 \theta_g .$$

Assim,

$$(7) \ M_{(x,y)}^6 \theta_g \subset T_g^9 \varphi + M_{(x,y)}^7 \theta_g .$$

Continuemos para mostrar que $x^7 \in T_g^9 \varphi + M_{(x,y)}^8 \theta_g$.

Tomando em (*),

$$a) \ \xi(x,y) = x^4, \ \nu = 0, \ \eta = 0,$$

$$b) \ \xi = 0, \ \nu(y) = -y^2, \ \eta(u,v) = u.v$$

obtemos, respectivamente :

$$(8) \ 4x^7 + x^4 y + 2x^5 y \in T_g^9 \varphi + M_{(x,y)}^8 \theta_g ,$$

$$(9) \ x^4 y + \text{termos mistos de grau 7} + \text{termo em } y^7 \in T_g^9 \varphi + M_{(x,y)}^8 \theta_g .$$

De (9), (*) e (3), vem :

$$(10) \ x^4 y \in T_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}} \varphi + M_{(x,y)}^8 \theta_{\mathfrak{g}} .$$

Logo, de (8), (3) e (10), obtemos :

$$x^7 \in T_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}} \varphi + M_{(x,y)}^8 \theta_{\mathfrak{g}} .$$

Então,

$$M_{(x,y)}^7 \theta_{\mathfrak{g}} \subset T_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}} \varphi + M_{(x,y)}^8 \theta_{\mathfrak{g}} .$$

Agora, tomando em (*),

$$a) \ \xi(x,y) = x^5, \ \nu = 0, \ \eta = 0,$$

$$b) \ \xi = 0, \ \nu = 0, \ \eta(u,v) = u^2,$$

$$c) \ \xi(x,y) = x^3 y, \ \nu = 0, \ \eta = 0,$$

$$d) \ \xi(x,y) = x^2 y, \ \nu = 0, \ \eta = 0,$$

obtemos, respectivamente :

$$4x^8 + x^5 y + 2x^6 y \in T_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}} \varphi + M_{(x,y)}^{10} \theta_{\mathfrak{g}},$$

$$x^8 + 2x^5 y + 2x^6 y + x^2 y^2 + 2x^3 y^2 + x^4 y^2 + \text{termos mistos de grau } 8 \in T_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}} \varphi + M_{(x,y)}^9 \theta_{\mathfrak{g}},$$

$$4x^6y + x^3y^2 + 2x^4y^2 \in T_g^8 + M_{(x,y)}^9 \theta_g ,$$

$$4x^5y + x^2y^2 + 2x^3y^2 + \text{termos mistos de grau } 8 \in T_g^8 + M_{(x,y)}^9 \theta_g .$$

Usando (3) para x^6y , (10) para x^4y^2 , obtemos então :

$$4x^8 + x^5y, x^8 + 2x^5y + x^2y^2, 4x^5y + x^2y^2 \in T_g^8 + M_{(x,y)}^9 \theta_g .$$

Como

x^8	x^5y	x^2y^2
4	1	0
1	2	1
0	4	1

$$= -9 \neq 0 ,$$

segue que

$$x^8, x^5y, x^2y^2 \in T_g^8 + M_{(x,y)}^9 \theta_g .$$

$$\text{Portanto, } M_{(x,y)}^8 \theta_g \subset T_g^8 + M_{(x,y)}^9 \theta_g .$$

Dando continuidade aos cálculos, pode-se mostrar, com bastante trabalho, que :

$$M_{(x,y)}^9 \theta_g \subset T_g^9 + M_{(x,y)}^{10} \theta_g ,$$

e assim por diante.

Logo, substituindo sucessivamente

$$(5_r) \quad M_{(x,y)_g}^r \theta_g \subset T_g \mathcal{E}_\varphi + M_{(x,y)_g}^{r+1} \theta_g \quad (r \geq 7)$$

em (7), vem :

$$M_{(x,y)_g}^6 \theta_g \subset T_g \mathcal{E}_\varphi + M_{(x,y)_g}^l \theta_g, \quad \forall l \geq 7.$$

Portanto, pela Proposição (2.3.10), f é 5- φ - determinado.

Além disto, com mais alguns poucos cálculos, verifica-se que

$$\mathcal{E}_{(x,y)} = T_f \mathcal{E}_\varphi^e \oplus \langle x^2 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Observemos que f não é 4- φ - determinado. Com efeito, continuando os cálculos, podemos novamente aplicar o Lema de Mather à

$$x^4 + xy + x^2y + a_0x^5 + a_1x^4y + a_2x^3y^2 + a_3x^2y^3 + a_4xy^4 + a_5y^5,$$

para mostrar que a ação de $\mathcal{E}_\varphi^5$ sobre J_0^5 tem duas órbitas :

$$x^4 + xy + x^2y, \text{ correspondendo a } a_0 \neq 4,$$

$$e \quad x^4 + xy, \text{ correspondendo a } a_0 = 4.$$

(2.3.14) Exemplo

Consideremos os germes $(\mathbb{R}^2, 0)$ $\begin{matrix} \nearrow f \\ \searrow \varphi \end{matrix}$ $(\mathbb{R}, 0)$ dados

por
$$\begin{cases} u = f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 + y^3 \\ v = \varphi(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

f é 3- φ - determinado.

De fato :

Seja $g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que $j^3 g = j^3 f$; então $g = f + h$, com $h \in \mathcal{M}_{(x,y)}^4$.

De (1.2.9), temos :

$$T_g \mathcal{G}_\varphi = \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{E}_{(x,y)}}) + \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi^* (\mathcal{E}_v)}) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)} \theta_{\pi_u}) ,$$

onde $\xi_t = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ e $\xi_r = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

Assim, $T_g \mathcal{G}_\varphi$ é formado pelos $\sigma \in \mathcal{M}_{(x,y)}$ tais que :

$$\begin{aligned}
(*) \quad \sigma(x,y) = [(-4-3x+3y)xy - y \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + x \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)] \phi(x,y) \\
+ [2(x^2-y^2) + 3(x^3+y^3) + x \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)] \rho(x^2+y^2) \\
+ \eta(x^2-y^2 + x^3+y^3 + h(x,y), x^2+y^2),
\end{aligned}$$

com $\phi \in \mathcal{E}_{(x,y)}$, $\rho \in \mathcal{E}_v$, $\eta \in \mathcal{M}_{(u,v)}$.

Como $(-4 - 3x + 3y)$ é inversível, vê-se facilmente que

$$(1) \quad x^{k+1}y^{s+1} \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{k+s}}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{4+k+s} \theta_g, \quad k, s \geq 0.$$

Seja $\ell \geq 4$. Consideremos dois casos :

a) ℓ par, $\ell = 2q$ ($q \geq 2$).

Tomando $\phi = 0$, $\rho = 0$ e $\eta(u,v) = v^q$ em (*), obtemos :

$$(x^2 + y^2)^q \in \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}).$$

Mas, $(x^2 + y^2)^q = x^\ell + y^\ell + \text{termos mistos de grau } \ell$.

Logo, por (1),

$$(2) \quad x^\ell + y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-2}}) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+2} \theta_g.$$

Agora, tomando $\phi = 0$, $\rho = 0$ e $\eta(u, v) = uv^{q-1}$, obtemos :

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{q-1} \in \omega(g, \varphi)(M_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + M_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

Como $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{q-1} = x^\ell - y^\ell + \text{termos mistos de grau } \ell$, por (1) segue então que

$$(3) \quad x^\ell - y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{M_{(x,y)}^{\ell-2}}) + \omega(g, \varphi)(M_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + M_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

De (2) e (3), vem :

$$x^\ell, y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{M_{(x,y)}^{\ell-2}}) + \omega(g, \varphi)(M_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + M_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

b) ℓ ímpar, $\ell = 2q + 1$ ($q \geq 2$).

Neste caso, tomando $\phi = 0$, $\rho(v) = v^{q-1}$ e $\eta(u, v) = -2uv^{q-1}$ em (*), obtemos :

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3)(x^2 + y^2)^{q-1} &\in \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi(M_v^{q-1})}) + \omega(g, \varphi)(M_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \\ &+ M_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g. \end{aligned}$$

Por argumentos análogos aos usados anteriormente, temos que :

$$(4) \quad x^\ell + y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-2}}) + \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi^*}^*(\mathcal{M}_v^{q-1})) + \\ + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

A seguir, consideraremos as duas possibilidades :

$b_1)$ q par .

Tomando $\phi = 0$, $\rho = 0$ e $\eta(u, v) = u^q - v^q$ em (*), obtemos :

$$(x^2 - y^2)^q + \binom{q}{1}(x^2 - y^2)^{q-1}(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)^q \in \\ \in \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

Como q é par, $(x^2 - y^2)^q + \binom{q}{1}(x^2 - y^2)^{q-1}(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)^q =$
 $= \binom{q}{1}(x^\ell - y^\ell) + \text{termos mistos de grau } \ell - 1 \text{ e } \ell.$

Por (1), segue então que :

$$(5) \quad x^\ell - y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-3}}) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

Portanto, de (4) e (5),

$$(6) \quad x^\ell, y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-3}}) + \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi^*}^*(\mathcal{M}_v^{q-1})) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \\ + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g.$$

para $\ell = 2q + 1$, com q par.

b_2) q ímpar ($q \geq 3$).

De (6), para $\ell - 2 = 2q - 1 = 2(q - 1) + 1$, temos :

$$\begin{aligned} x^{\ell-2}, y^{\ell-2} \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-5}}) + \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi^* (\mathcal{M}_v^{q-2})}) + \\ + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^{q-1} \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-1} \theta_g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^{\ell-2}(x^2 + y^2), y^{\ell-2}(x^2 + y^2) \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-2}}) + \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi^* (\mathcal{M}_v^{q-1})}) + \\ + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g. \end{aligned}$$

Usando (1), resulta então que :

$$\begin{aligned} (7) \quad x^\ell, y^\ell \in \text{tg}(\langle \xi_t \rangle_{\mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell-2}}) + \text{tg}(\langle \xi_r \rangle_{\varphi^* (\mathcal{M}_v^{q-1})}) + \omega(g, \varphi)(\mathcal{M}_{(u,v)}^q \theta_{\pi_u}) + \\ + \mathcal{M}_{(x,y)}^{\ell+1} \theta_g. \end{aligned}$$

Dos cálculos acima, concluimos que :

$$(1) \mathcal{M}_{(x,y)g}^4 \theta_g \subset T_g \mathcal{E}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)g}^5 \theta_g,$$

e

$$(2)_\ell \mathcal{M}_{(x,y)g}^\ell \theta_g \subset T_g \mathcal{E}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)g}^{\ell+1} \theta_g, \quad \forall \ell \geq 5.$$

Substituindo sucessivamente $(2)_\ell$ em (1), vem :

$$\mathcal{M}_{(x,y)g}^4 \theta_g \subset T_g \mathcal{E}_\varphi + \mathcal{M}_{(x,y)g}^r \theta_g, \quad \forall r \geq 5.$$

Assim, pela Proposição (2.3.10), f é 3- φ - determinado.

Capítulo III

Desdobramentos e formas normais de singularidades de codimensão ≤ 1 .

§1. Teoria de desdobramento para a φ - equivalência e $\mathcal{A}$ -equivalência.

Neste parágrafo, estudamos as propriedades dos desdobramentos φ - transversais, $\mathcal{A}$ -transversais e o relacionamento entre estes dois conceitos. Um resultado útil estabelece uma correspondência que associa a cada desdobramento $\mathcal{A}$ -transversal de (f, φ) um desdobramento φ - transversal de f , quando φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável.

(3.1.1) Definição

Consideremos um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Um *desdobramento a r parâmetros* de f é um germe $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0)$ da forma $F(x, u) = (\bar{f}(x, u), u)$ com $\bar{f}(x, 0) = f(x)$.

Para indicar que o germe F é um desdobramento a r parâmetros, escreveremos (F, r) .

Ainda, escrevendo $u_1, \dots, u_r$ para as coordenadas canônicas

sobre $\mathbb{R}^r$, definimos $\partial_i F \in \theta_f$ por $\partial_i F = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i} \right|_{u=0}$, para $i = 1, \dots, r$.

O subespaço vetorial real de θ_f gerado por $\partial_1 F, \dots, \partial_r F$ será denotado por $\langle \partial_1 F, \dots, \partial_r F \rangle_{\mathbb{R}}$.

Por outro lado, o seguinte resultado é bem conhecido.

(3.1.2) Lema

Dados $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \theta_f$, existe um desdobramento (F, r) de f tal que $\partial_i F = \sigma_i$ ($i = 1, \dots, r$).

Prova

Para cada i , $1 \leq i \leq r$, σ_i pode ser considerado como um germe de aplicação $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$. Definimos um desdobramento (F, r) de f por

$$\bar{f}(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i(x).$$

Então, claramente $\partial_i F = \sigma_i$ ($i = 1, \dots, r$), como desejado.

(3.1.3) Definição

Consideremos $(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0)$. Um desdobramento (F, r) de f é φ -transversal se

$$T_f \mathcal{G}_\varphi^e + \langle \partial_1 F, \dots, \partial_r F \rangle_{\mathbb{R}} = \theta_f.$$

Em outras palavras, (F, r) é φ - transversal se, dado $\sigma \in \theta_f$, existem $\xi \in \theta_n$, $\mu \in \theta_q$, $\eta \in \theta_{\pi_p}$ ($\pi_p: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ projeção sobre o primeiro fator) e números reais $a_1, \dots, a_r$, tais que :

$$\begin{cases} \sigma = df(\xi) + \eta \circ (f, \varphi) + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i F \\ 0 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi \end{cases}$$

(3.1.4) Definição

Consideremos $(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0)$. A φ -codimensão de f , denotada por $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f)$, é a dimensão real de $\theta_f / T_f \mathcal{G}_\varphi^e$.

(3.1.5) Observemos que se f admite um desdobramento (F, r) φ - transversal, então $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \leq r$. Logo, a dimensão mínima do espaço dos parâmetros de um desdobramento φ - transversal de f é $s = \text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f)$. Na realidade, se $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in \theta_f$ se projetam sobre uma base do $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $\theta_f / T_f \mathcal{G}_\varphi^e$, e se (G, s) é um desdobramento de f tal que $\partial_i G = \sigma_i$ ($i = 1, \dots, s$), então (G, s) é um desdobramento φ - transversal de f com dimensão mínima do espaço dos parâmetros.

(3.1.6) Proposição

Consideremos $(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0)$, com φ germe de submersão ou de Morse. Então, f admite um desdobramento φ - transversal se, e somente se, f é φ - finitamente determinado.

Prova

Isto segue facilmente do Teorema (2.3.9) e do Lema (3.1.2).

(3.1.7) Proposição

Consideremos $(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0)$, onde φ é a projeção $\varphi(x, y) = y$. Suponhamos que o germe $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ desdobre o germe $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Então, $\text{cod}(\mathcal{A}^e, f_0) \leq \text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) + q$.

Prova

Seja $i^* : \theta_f \rightarrow \theta_{f_0}$ a aplicação $\mathbb{R}$ -linear sobrejetiva definida por $i^*(\sigma) = \sigma \circ i$, onde $i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0)$ é a inclusão canônica. Então, $\ker i^* = \mathcal{M}_q \theta_f$.

Pelas definições de $T_f \mathcal{G}_\varphi^e$ e $T_{f_0} \mathcal{A}^e$, temos que i^* induz um

$\mathbb{R}$ -isomorfismo linear

$$\tilde{i}^* : \frac{\theta_f}{T_f \mathcal{G}_\varphi^e + \mathcal{M}_q \theta_f} \approx \frac{\theta_{f_0}}{T_{f_0} \mathcal{A}^e + \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{y=0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_q} \Big|_{y=0} \right\rangle_{\mathbb{R}}}$$

Portanto, o resultado segue.

(3.1.8) Proposição

Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior, (f, φ) é um desdobramento $\mathcal{A}$ -transversal de f_0 se, e somente se, $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = 0$.

Prova

Isto é uma consequência do Teorema de Malgrange (2.2.4), e é, em outras palavras, o "lema algébrico da teoria do desdobramento" em Martinet [13].

(3.1.9) Definição

Consideremos $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$. Um desdobramento (G, r) de (f, φ) é $\tilde{\mathcal{A}}$ -transversal se

$$T_{(f,\varphi)} \mathcal{A}^e + \langle \partial_1 G, \dots, \partial_r G \rangle_{\mathbb{R}} = \theta_{(f,\varphi)}.$$

A igualdade acima é o mesmo que: dado $\sigma \in \theta_{(f,\varphi)}$, existem $\xi \in \theta_n$, $\zeta \in \theta_{p+q}$, $\mu \in \theta_q$ e números reais $a_1, \dots, a_r$, tais que :

$$\begin{cases} \sigma = d(f,\varphi)(\xi) + \zeta \circ (f,\varphi) + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i G \\ 0 = d\pi_q(\zeta) + \mu \circ \pi_q \end{cases}$$

onde $\pi_q : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ é a projeção sobre o segundo fator.

(3.1.10) Um desdobramento (G,r) de (f,φ) é da forma $G(x,u) = (\bar{f}(x,u), \bar{\varphi}(x,u), u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$) com $\bar{f}(x,0) = f(x)$ e $\bar{\varphi}(x,0) = \varphi(x)$. Assim, (G,r) dá origem a um desdobramento (F,r) de f e a um desdobramento (Φ,r) de φ , definidos por $F(x,u) = (\bar{f}(x,u), u)$ e $\Phi(x,u) = (\bar{\varphi}(x,u), u)$.

Então, considerando as identificações $\theta_{p+q} \equiv \theta_{\pi_p} \oplus \theta_{\pi_q}$ e $\theta_{(f,\varphi)} \equiv \theta_f \oplus \theta_\varphi$, dizer que (G,r) é $\mathcal{A}^e$ -transversal significa que, dados $\sigma_1 \in \theta_f$ e $\sigma_2 \in \theta_\varphi$, existem $\xi \in \theta_n$, $\mu \in \theta_q$, $\eta \in \theta_{\pi_p}$ e números reais $a_1, \dots, a_r$, tais que :

$$\begin{cases} \sigma_1 = df(\xi) + \eta \circ (f,\varphi) + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i F \\ \sigma_2 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i \Phi \end{cases}.$$

(3.1.11) Definição

Consideremos $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$. A $\mathcal{A}^e$ -codimensão de (f, φ) , denotada por $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi))$, é a dimensão real de $\theta_{(f, \varphi)} / T_{(f, \varphi)} \mathcal{A}^e$.

Relativamente aos dois últimos conceitos, a observação (3.1.5) se aplica palavra por palavra à $\mathcal{A}$ -equivalência.

Observemos também que $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) \leq \text{cod}(\mathcal{A}^{\sim e}, (f, \varphi))$.

(3.1.12) Proposição (Invariança da $\mathcal{A}^{\sim e}$ -codimensão)

Se dois germes $(f, \varphi), (g, \psi) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ são $\mathcal{A}^{\sim}$ -equivalentes, então eles têm a mesma $\mathcal{A}^{\sim e}$ -codimensão.

Prova

Sendo (f, φ) e (g, ψ) germes $\mathcal{A}^{\sim}$ -equivalentes, temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(f, \varphi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^q, 0) \\
 \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(g, \psi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_q} & (\mathbb{R}^q, 0),
 \end{array}$$

com h , k e ℓ germes de difeomorfismos.

Seja $\Omega : \theta_{(f,\varphi)} \rightarrow \theta_{(g,\psi)}$ o $\mathbb{R}$ -isomorfismo linear definido por $\Omega(\sigma) = dk \circ \sigma \circ h^{-1}$.

Afirmamos que a aplicação Ω induz um $\mathbb{R}$ -isomorfismo linear

$$\Omega^* : \frac{\theta_{(f,\varphi)}}{T_{(f,\varphi)} \mathcal{A}^{\sim e}} \longrightarrow \frac{\theta_{(g,\psi)}}{T_{(g,\psi)} \mathcal{A}^{\sim e}}.$$

Para provar isto, basta mostrar que Ω^* está bem definida.

Seja então $\sigma \in T_{(f,\varphi)} \mathcal{A}^{\sim e}$ dado por

$$\begin{cases} \sigma = d(f,\varphi)(\xi) + \zeta \circ (f,\varphi) \\ 0 = d\pi_q(\zeta) + \mu \circ \pi_q \end{cases}, \quad \xi \in \theta_n, \zeta \in \theta_{p+q}, \mu \in \theta_q.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Omega(\sigma) &= dk \circ [d(f,\varphi)(\xi) + \zeta \circ (f,\varphi)] \circ h^{-1} \\ &= dk \circ d(f,\varphi) \circ (\xi \circ h^{-1}) + dk \circ \zeta \circ (f,\varphi) \circ h^{-1} \\ &= d[k \circ (f,\varphi)] \circ (\xi \circ h^{-1}) + dk \circ \zeta \circ (f,\varphi) \circ h^{-1} \\ &= d[(g,\psi) \circ h] \circ (\xi \circ h^{-1}) + (dk \circ \zeta \circ k^{-1}) \circ (g,\psi) \\ &= d(g,\psi)(dh \circ \xi \circ h^{-1}) + (dk \circ \zeta \circ k^{-1}) \circ (g,\psi). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
d\pi_q(dk \circ \zeta \circ k^{-1}) &= d(\pi_q \circ k) \circ (\zeta \circ k^{-1}) \\
&= d(\ell \circ \pi_q) \circ (\zeta \circ k^{-1}) \\
&= d\ell \circ (d\pi_q(\zeta)) \circ k^{-1} \\
&= d\ell \circ (-\mu \circ \pi_q) \circ k^{-1} \\
&= -(d\ell \circ \mu \circ \ell^{-1}) \circ \pi_q
\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} \Omega(\sigma) = d(g, \psi)(\bar{\xi}) + \bar{\zeta} \circ (g, \psi) \\ \\ 0 = d\pi_q(\bar{\zeta}) + \bar{\mu} \circ \pi_q \end{cases} ,$$

com $\bar{\xi} = dh \circ \xi \circ h^{-1} \in \theta_n$, $\bar{\zeta} = dk \circ \zeta \circ k^{-1} \in \theta_{p+q}$, $\bar{\mu} = d\ell \circ \mu \circ \ell^{-1} \in \theta_q$, o

que mostra que $\Omega(\sigma) \in T_{(g, \psi)} \mathcal{A}^e$.

Portanto, $\Omega(T_{(f, \varphi)} \mathcal{A}^e) \subset T_{(g, \psi)} \mathcal{A}^e$.

Assim, Ω^* está bem definida.

Então, Ω^* é um $\mathbb{R}$ -isomorfismo linear, e daí, (f, φ) e (g, ψ) têm a mesma $\mathcal{A}^e$ -codimensão.

(3.1.13) Corolário (Invariança da φ^e -codimensão)

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ um germe fixado. Se dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são φ -equivalentes, então eles têm a mesma φ^e -codimensão.

Prova

Este resultado é obtido da prova da proposição anterior, por restrição ao espaço $\mathcal{E}_0(n,p)$ dos germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, considerado como um subespaço afim de $\mathcal{E}_0(n, p+q)$ através do mergulho $f \mapsto (f, \varphi)$.

A seguir, estabeleceremos um relacionamento entre o conjunto dos desdobramentos (G, r) $\mathcal{A}$ -transversais de (f, φ) , e o conjunto dos desdobramentos (F, r) φ -transversais de f , para,

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\mathbb{R}^p, 0) \\
 (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & \\
 & \searrow \varphi & \\
 & & (\mathbb{R}^q, 0)
 \end{array}
 , \text{ com } \varphi \text{ } \mathcal{A} \text{-infinitesimalmente estável.}$$

Mais precisamente, mostraremos que a partir de um desdobramento (G, r) $\mathcal{A}$ -transversal de (f, φ) , podemos obter um desdobramento $(\tilde{F}, r)$ φ -transversal de f , e vice-versa. É importante observar que, em geral, $(\tilde{F}, r)$ não é obtido por simples projeção canônica de $G(x, u) = (\bar{f}(x, u), \bar{\varphi}(x, u), u)$ em $F(x, u) = (\bar{f}(x, u), u)$ (ver exemplo (3.1.17) a seguir).

O relacionamento que temos em mente, é dado por uma combinação natural das Proposições (3.1.14) e (3.1.15) abaixo.

Dado um desdobramento (F, r) de f , $F(x, u) = (\bar{F}(x, u), u)$, denotaremos por (F_φ, r) o desdobramento de (f, φ) definido por

$$F_{\varphi}(x, u) = (\bar{f}(x, u), \varphi(x), u).$$

(3.1.14) Proposição

Nas condições acima, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) (F, r) é φ - transversal.

(b) (F_{φ}, r) é $\mathcal{A}^{\sim}$ - transversal.

Prova

(b) $\Rightarrow$ (a) : É imediata.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Sejam dados $\sigma_1 \in \theta_f$, $\sigma_2 \in \theta_{\varphi}$. Como φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável, existem $\bar{\xi} \in \theta_n$, $\bar{\mu} \in \theta_q$ tais que

$$\sigma_2 = d\varphi(\bar{\xi}) + \bar{\mu} \circ \varphi.$$

Usando agora a hipótese, temos :

$$\begin{cases} \sigma_1 - df(\bar{\xi}) = df(\xi) + \eta \circ (f, \varphi) + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i F \\ 0 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi \end{cases}$$

com $\xi \in \theta_n$, $\mu \in \theta_q$, $\eta \in \theta_{\pi_p}$; $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$\begin{cases} \sigma_1 = df(\xi + \bar{\xi}) + \eta \circ (f, \varphi) + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i F \\ \sigma_2 = d\varphi(\xi + \bar{\xi}) + (\mu + \bar{\mu}) \circ \varphi \end{cases} .$$

Consideremos agora um desdobramento (G, r) de (f, φ) , e sejam (F, r) e (Φ, r) os desdobramentos de f e φ obtidos de G tais como em (3.1.10).

Como φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável, segue que Φ é $\mathcal{A}$ -trivial, ou seja, existem desdobramentos (H, r) e (L, r) dos germes identidades $I_{(\mathbb{R}^n, 0)}$ e $I_{(\mathbb{R}^q, 0)}$, respectivamente, tais que

$$L^{-1} \circ \Phi \circ H = \varphi \times I_{(\mathbb{R}^r, 0)} .$$

Seja $(\tilde{F}, r)$ o desdobramento de f dado por $\tilde{F} = F \circ H$, e consideremos o desdobramento $(\tilde{F}_\varphi, r)$ de (f, φ) .

Nestas condições, temos a seguinte

(3.1.15) Proposição

(G, r) é $\tilde{\mathcal{A}}$ -transversal se, e somente se, $(\tilde{F}_\varphi, r)$ é $\tilde{\mathcal{A}}$ -transversal.

Prova

Um cálculo direto, usando a regra da cadeia, mostra que

$$L^{-1} \circ \Phi \circ H = \varphi \times I_{(\mathbb{R}^r, 0)} \text{ implica}$$

$$\partial_i \Phi = d\varphi(-\partial_i H) + \partial_i L \circ \varphi \quad (i = 1, \dots, r)$$

Sejam $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$. Então,

$$\sum_{i=1}^r a_i \partial_i \Phi = d\varphi(\bar{\xi}) + \bar{\mu} \circ \varphi,$$

$$\text{com } \bar{\xi} = \sum_{i=1}^r a_i (-\partial_i H), \quad \bar{\mu} = \sum_{i=1}^r a_i \partial_i L.$$

Logo, para $\sigma_1 \in \theta_f$, $\sigma_2 \in \theta_\varphi$, $\xi \in \theta_n$, $\eta \in \theta_{\pi_p}$ e $\mu \in \theta_q$,

temos a seguinte equivalência:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = df(\xi) + \eta \circ (f, \varphi) + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i F \\ \sigma_2 = d\varphi(\xi) + \mu \circ \varphi + \sum_{i=1}^r a_i \partial_i \Phi \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = df(\xi + \bar{\xi}) + \eta \circ (f, \varphi) + \sum_{i=1}^r a_i (\partial_i F + df(\partial_i H)) \\ \sigma_2 = d\varphi(\xi + \bar{\xi}) + (\mu + \bar{\mu}) \circ \varphi \end{array} \right.$$

Como $\partial_1 \tilde{F} = \partial_1 F + df(\partial_1 H)$, o resultado segue de (3.1.10) e da equivalência acima.

Do relacionamento obtido, temos o seguinte resultado:

(3.1.16) Corolário

Seja $(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0)$ com φ $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável. Então, $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = \text{cod}(\tilde{\mathcal{A}}^e, (f, \varphi))$.

(3.1.17) Exemplo

Seja $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ a cúspide $\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = x \\ \varphi(x, y) = y^3 + xy. \end{array} \right.$

Consideremos o desdobramento $(G, 1)$ de (f, φ) definido por $G(x, y, u) = (x, y^3 + xy - uy^2, u)$.

Afirmamos que G é $\tilde{\mathcal{A}}$ -transversal.

De fato:

Seja $(F, 1)$ o desdobramento constante de f , $F(x, y, u) = (x, u)$, e seja $(\Phi, 1)$ o desdobramento de φ dado por $\Phi(x, y, u) = (y^3 + xy - uy^2, u)$.

O desdobramento $(H,1)$ do germe identidade $I_{(\mathbb{R}^2,0)}$, $H(x,y,u) = (x + uy, y, u)$, é tal que $\Phi \circ H = \varphi \times I_{(\mathbb{R},0)}$. Assim, pelas Proposições (3.1.15) e (3.1.14), para ver que G é $\mathcal{A}$ -transversal, basta verificar que o desdobramento $(\tilde{F} = F \circ H, 1)$ de f , $\tilde{F}(x,u) = (x + uy, u)$, é φ -transversal. Mas, a φ -transversalidade de $\tilde{F}$ é uma consequência da prova da Proposição (3.2.3) do próximo parágrafo.

Observemos também que a Proposição (3.2.3) ainda nos garante que o desdobramento constante $(F,1)$ de f não é φ -transversal.

Para completar a discussão sobre desdobramentos, definiremos abaixo desdobramento φ -versal e desdobramento $\mathcal{A}$ -versal.

(3.1.18) Definição

Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0)$, $F(x,u) = (\bar{f}(x,u), u)$, um desdobramento a r parâmetros de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Seja $h : (\mathbb{R}^s, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$, $h = h(v)$, um germe de aplicação. A imagem recíproca de F por h , h^*F , é o desdobramento a s parâmetros de f definido por $h^*F(x,v) = (\bar{f}(x, h(v)), v)$.

Consideremos $(\mathbb{R}^q, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^p, 0)$.

(3.1.19) Definição

Um desdobramento (F, r) de f é φ -versal se, para todo desdobramento (G, s) de f , existem um germe $h : (\mathbb{R}^s, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$, e desdobramentos (H, s) , (K, s) , (L, s) dos germes identidades $I_{(\mathbb{R}^n, 0)}$, $I_{(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)}$, $I_{(\mathbb{R}^q, 0)}$, respectivamente, tais que :

$$\begin{aligned} K \circ (h \circ F_{\varphi}^*) \circ H^{-1} &= G_{\varphi} \\ \text{e} \quad L \circ (\pi_q \times I_{(\mathbb{R}^s, 0)}) \circ K^{-1} &= \pi_q \times I_{(\mathbb{R}^s, 0)} \end{aligned}$$

onde $\pi_q : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ é a projeção sobre o segundo fator.

(3.1.20) Definição

Um desdobramento (F, r) de (f, φ) é $\tilde{\mathcal{A}}$ -versal se, para todo desdobramento (G, s) de (f, φ) , existem um germe $h : (\mathbb{R}^s, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$, e desdobramentos (H, s) , (K, s) , (L, s) dos germes identidades $I_{(\mathbb{R}^n, 0)}$, $I_{(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)}$, $I_{(\mathbb{R}^q, 0)}$, respectivamente, tais que :

$$\begin{aligned} K \circ (h \circ F) \circ H^{-1} &= G \\ \text{e} \quad L \circ (\pi_q \times I_{(\mathbb{R}^s, 0)}) \circ K^{-1} &= \pi_q \times I_{(\mathbb{R}^s, 0)}. \end{aligned}$$

(3.1.21) Teorema

(a) Um desdobramento F de f é φ - versal se, e somente se, é φ - transversal.

(b) Um desdobramento F de (f, φ) é $\mathcal{A}$ -versal se, e somente se, é $\mathcal{A}$ -transversal.

Prova

A prova é obtida pelo procedimento usual da Teoria de Desdobramento (ver, por exemplo, Wall [25]).

§2. Estudo da φ^e - codimensão

Neste parágrafo, estudaremos a φ^e - codimensão de germes f no caso

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{R}, 0) \\ & \nearrow f & \\ (\mathbb{R}^n, 0) & & \\ & \searrow \varphi & \\ & & (\mathbb{R}, 0) \end{array}$$

onde $n \geq 2$ e φ é $\mathcal{A}$ - infinitesimalmente estável. Os resultados que aqui obteremos serão essenciais para os teoremas de genericidade do próximo capítulo.

Antes, introduziremos a seguinte definição para futuras referências.

(3.2.1) Definição

Suponhamos que (f, φ) seja uma dobra (respectivamente uma cúspide). Diremos que (f, φ) é uma *dobra transversa* (respectivamente uma *cúspide transversa*) se φ for regular; caso contrário, diremos que (f, φ) é uma *dobra tangente* (respectivamente uma *cúspide tangente*).

As formas normais destes tipos, com relação à $\mathcal{A}$ -equivalência, são:

dobra transversa :

$$(x_1, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y \right)$$

dobra tangente :

$$(x, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(x, x^2 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right)$$

cúspide transversa :

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(x^3 + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y \right)$$

cúspide tangente :

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x, y^3 + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2),$$

com $\lambda'(0) = 0$

(ver Mendes [18]).

Para nosso estudo, consideraremos dois casos:

I) $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) = 0$

Como φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável, temos que $\text{cod}(\mathcal{G}_{\varphi}^e, f) = 0$ implica $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) = 0$.

Mendes em [18] obteve a classificação dos germes f tais que $\text{cod}(\mathcal{G}_{\varphi}^e, f) = 0$, a saber :

(3.2.2) Teorema

As seguintes condições são equivalentes :

- (a) $\text{cod}(\mathcal{G}_{\varphi}^e, f) = 0$,
- (b) (f, φ) é de um dos tipos : germe de submersão, dobra transversa, dobra tangente, cúspide transversa.

Para completar a análise deste caso, resta considerar (f, φ) uma cúspide tangente.

(3.2.3) Proposição

Se (f, φ) é uma cúspide tangente, então $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = 1$.

Prova

É suficiente fazer a prova para a forma normal

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \xrightarrow{(f, \varphi)} (x, y^3 + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2), \quad \lambda'(0) = 0.$$

Para este germe, o espaço tangente estendido $T_{f, \varphi}^e$ é dado pelos campos $\sigma \in \theta_f$ que satisfazem ao sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(x, y, x_3, \dots, x_n) = \xi_1(x, y, \dots, x_n) + \eta(x, y^3 + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2) \\ 0 = (y + \lambda'(x))\xi_1(x, y, \dots, x_n) + (3y^2 + x)\xi_2(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \xi_i(x, y, \dots, x_n) + \mu(y^3 + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2) \end{array} \right.$$

com $\xi_i \in \mathcal{E}_n$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\eta \in \mathcal{E}_2$, $\mu \in \mathcal{E}_1$.

Por Mendes [18], a resolução deste sistema é equivalente à resolução da equação :

$$\begin{aligned} (*) \quad -(y + \lambda'(-3y^2))\delta(y) &= -(y + \lambda'(-3y^2))\eta(-3y^2, -2y^3 + \lambda(-3y^2)) \\ &\quad + \mu(-2y^3 + \lambda(-3y^2)). \end{aligned}$$

Sabemos que todo germe $\delta = \delta(y)$ se decompõe em

$$\delta(y) = y\alpha(y^2) + \beta(y^2).$$

Colocando $\alpha(z) = a + z\rho(z)$ ($a \in \mathbb{R}$), temos

$$\alpha(y^2) = a + y^2\rho(y^2).$$

Logo,

$$\delta(y) = ay + y^3\rho(y^2) + \beta(y^2).$$

Tomando $\eta(u, v) = -\frac{1}{2}(v - \lambda(u))\rho(-\frac{u}{3}) + \beta(-\frac{u}{3})$, obtemos :

$$\eta(-3y^2, -2y^3 + \lambda(-3y^2)) = y^3\rho(y^2) + \beta(y^2).$$

Assim,

$$\delta(y) \text{ satisfaz } (*) \iff \gamma(y) = ay \text{ satisfaz } (*).$$

Como $\lambda'(0) = 0$, segue que:

$$\gamma(y) = ay \text{ satisfaz } (*) \iff a = 0.$$

Portanto,

$\delta(y)$ satisfaz (*) $\Leftrightarrow a = 0$.

Disto resulta que $\theta_f = T_f \mathcal{G}_\varphi^e \otimes \langle y \rangle_{\mathbb{R}}$ e, portanto, $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = 1$.

II) $\text{cod}(\mathcal{M}^e, (f, \varphi)) > 0$.

Temos as seguintes possibilidades :

II₁) φ é regular.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$.

$$\text{Seja } j^2 f = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j.$$

Então, $\sum_{i=2}^n a_i^2 = 0$ pois, caso contrário, (f, φ) seria um germe de submersão.

Observemos que a φ - equivalência permite remover termos que só dependem de x_1 . Assim, podemos considerar

$$j^2 f = \sum_{i=2}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j.$$

Denotemos por M a matriz Hessiana de f_0 em 0 , sendo $f_0(x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{n-1}^2$ definido por $f_0(x_2, \dots, x_n) = f(0, x_2, \dots, x_n)$.

Logo, $\det M = 0$ pois, caso contrário, (f, φ) seria uma dobra transversa. Portanto, $\text{rank } M \leq n - 2$.

(3.2.4) Lema

Seja $\text{rank } M = (n - 1) - k$. Então, f é φ -equivalente a um germe da forma

$$\sum_{j=2}^{k+1} c_j x_1 x_j \pm x_{k+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2 + \rho(x_1, \dots, x_{k+1}),$$

com $c_j \in \mathbb{R}$ ($j = 2, \dots, k+1$) e $\rho \in \mathcal{M}_{k+1}^3$. Além disso, sen-

do $g(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_1 x_j + \rho(x_1, \dots, x_{k+1})$, tem-se que

$\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = \text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, g)$. E mais, $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = 1$ implica $k = 1$.

Prova

Sendo $\text{rank } M = (n - 1) - k$, por uma mudança linear de coordenadas no espaço- $(x_2, \dots, x_n)$, podemos supor que

$$f = \sum_{j=2}^n c_j x_1 x_j \pm x_{k+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2 + \mathcal{O}(3).$$

É fácil ver que f ainda se reduz por φ -equivalência a

$$f = \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_1 x_j \pm x_{k+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2 + \mathcal{O}(3).$$

Finalmente, aplicando o Splitting Lemma (ver Martine[13]), podemos considerar

$$f = \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_1 x_j \pm x_{k+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2 + \rho(x_1, \dots, x_{k+1}),$$

com $\rho \in M_{k+1}^3$.

$$\text{Seja } g(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_1 x_j + \rho(x_1, \dots, x_{k+1}).$$

O espaço tangente estendido $T_f \mathcal{G}_\varphi^e$ é dado pelos campos $\sigma \in \theta_f$ que satisfazem à equação :

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial g}{\partial x_1} \xi_1(x_1) + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{\partial g}{\partial x_j} \xi_j(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + \sum_{l=k+2}^n \pm 2x_l \xi_l(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + \eta(g(x_1, \dots, x_{k+1}) \pm x_{k+2}^2 \pm \dots \pm x_n^2, x_1), \end{aligned}$$

com $\xi_1 \in \mathcal{E}_1$, $\xi_\ell \in \mathcal{E}_n$ ($\ell = 2, \dots, n$), $\eta \in \mathcal{E}_2$.

Pelo Lema de Hadamard (ver Gibson [8]), a resolução desta equação é equivalente à resolução da equação

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \dots, x_{k+1}) &= \frac{\partial g}{\partial x_1} \xi_1(x_1) + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{\partial g}{\partial x_j} \xi_j(x_1, \dots, x_{k+1}) \\ &\quad + \eta(g(x_1, \dots, x_{k+1}), x_1) \end{aligned}$$

Esta última equação determina o espaço $T_{g, \varphi} \mathcal{E}^e$. Portanto, $\text{cod}(\mathcal{E}_{\varphi}^e, f) = \text{cod}(\mathcal{E}_{\varphi}^e, g)$.

Para a última afirmação do lema, consideremos o germe $g_0(x_2, \dots, x_{k+1}) \in \mathcal{M}_k^3$ dado por $g_0(x_2, \dots, x_{k+1}) = g(0, x_2, \dots, x_{k+1})$.

Podemos pensar (g, φ) como um desdobramento a 1 - parâmetro de g_0 . Assim, pela Proposição (3.1.7), $\text{cod}(\mathcal{A}^e, g_0) \leq \text{cod}(\mathcal{E}_{\varphi}^e, g) + 1$.

Como $g_0 \in \mathcal{M}_k^3$, temos $\text{cod}(\mathcal{A}^e, g_0) \geq (k^2 + k)/2$. Tendo em vista a observação acima, podemos concluir que $\text{cod}(\mathcal{E}_{\varphi}^e, g) = 1$ implica $k = 1$.

O nosso objetivo agora é a classificação dos germes f tais que $\text{cod}(\mathcal{E}_{\varphi}^e, f) = 1$.

Como consequência do lema anterior, podemos reduzir a análise a um germe $f(x, y) \in \mathcal{M}_2^2$, com f φ - finitamente determinado.

Pela Proposição (4.8) em Du Plessis [5], podemos escrever (f, φ) na forma:

$$(f, \varphi)(x, y) = (y^r + Q_1(x)y + \dots + Q_{r-2}(x)y^{r-2}, x),$$

onde $Q_i(x)$ ($i = 1, \dots, r-2$) é um polinômio em x sem termo constante.

Pensando (f, φ) como um desdobramento a 1-parâmetro de $f_0(y) = y^r$, temos que se $\text{cod}(\mathcal{E}_{\varphi}^e, f) = 1$ então $\text{cod}(\mathcal{A}^e, f_0) \leq 2$.

Portanto, para o nosso propósito, basta considerar $r = 3, 4$.

Temos duas possibilidades :

(i) $j^2 f \neq 0$.

Neste caso, devemos ter $r = 4$ pois, caso contrário, (f, φ) seria uma cúspide transversa.

Então, (f, φ) pode ser colocado na forma :

$$(f, \varphi)(x, y) = (y^4 + axy + bxy^2 + x^2 \bar{Q}_1(x)y + x^2 \bar{Q}_2(x)y^2, x) ,$$

com $a \neq 0$.

Com as mudanças de coordenadas na fonte e na meta :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X/a \\ y = Y \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} U = u \\ V = av \end{array} \right. , \text{ obtemos :}$$

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^4 + xy + cxy^2 + x^2 \tilde{Q}_1(x)y + x^2 \tilde{Q}_2(x)y^2 ,$$

com $c = b/a$.

Tomando agora a mudança de coordenadas na meta :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = u - uv\tilde{Q}_1(v) \\ V = v \end{array} \right. , \text{ obtemos :}$$

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^4 + xy + cxy^2 + x^3P_1(x)y + x^2P_2(x)y^2 + xP_4(x)y^4.$$

Repetindo mudanças do tipo anterior, podemos eliminar $x^k y$, $k \geq 2$, módulo termos de ordem suficientemente alta, para obtermos

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^4 + xy + cxy^2 + x^2R_2(x)y^2 + xR_4(x)y^4.$$

Tomando a mudança de coordenadas na fonte :

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y - XR_2(X)Y^2 - R_4(X)Y^4 \end{cases}, \text{ obtemos :}$$

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^4 + xy + cxy^2 + x^2L_3(x)y^3 + O(6).$$

Repetindo mudança deste tipo, obtemos :

$$f \underset{\varphi}{\sim} g = y^4 + xy + cxy^2 + O(6).$$

Um cálculo direto mostra que $\dim_{\mathbb{R}} \theta_g / (T_g \mathcal{E}_{\varphi}^e + M_{2g}^6 \theta_g) \geq 1$ e que $\dim_{\mathbb{R}} \theta_g / (T_g \mathcal{E}_{\varphi}^e + M_{2g}^6 \theta_g) = 1$ se, e somente se, $c \neq 0$.

Consideremos $c \neq 0$. Neste caso, temos :

$$g \underset{\varphi}{\sim} y^4 + xy + xy^2 + O(6).$$

Pelo Exemplo (2.3.13), $y^4 + xy + xy^2$ é 5- φ - determinado,

portanto,

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^4 + xy + xy^2.$$

Do mesmo exemplo, segue que $\text{cod}(\mathcal{G}_{\varphi}^e, f) = 1$.

$$(ii) \ j^2 f = 0.$$

Neste caso, se $r = 4$ temos que $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) \geq 2$ (ver Rieger [21]); assim, $\text{cod}(\mathcal{G}_{\varphi}^e, f) \geq 2$.

Seja agora $r = 3$. Então, (f, φ) pode ser colocado na forma :

$$(f, \varphi)(x, y) = (y^3 + ax^2y + \mathcal{O}(4), x).$$

Um cálculo direto mostra que $\dim_{\mathbb{R}} \theta_f / (T_f \mathcal{G}_{\varphi}^e + \mathcal{M}_2^3 \theta_f) \geq 1$ e que $\dim_{\mathbb{R}} \theta_f / (T_f \mathcal{G}_{\varphi}^e + \mathcal{M}_2^3 \theta_f) = 1$ se, e somente se, $a \neq 0$.

Consideremos $a \neq 0$. Neste caso, temos :

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^3 \pm x^2y + \mathcal{O}(4).$$

Pelo Exemplo (2.3.12), $y^3 \pm x^2y$ é 3- φ - determinado, portanto,

$$f \underset{\varphi}{\sim} y^3 \pm x^2y.$$

Do mesmo exemplo, segue que $\text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f) = 1$.

Resumindo o estudo feito acima, podemos enunciar:

(3.2.5) Proposição

Seja $(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{\varphi} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, 0)$ ($n \geq 2$), onde φ é a projeção $\varphi(x, y, x_3, \dots, x_n) = x$ e $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) > 0$. Então, $\text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f) = 1$ se, e somente se, f é φ -equivalente a um dos seguintes germes :

$$(y^3 \pm x^2y) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

$$(y^4 + xy + xy^2) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

II₂) f é regular e φ é uma singularidade de Morse.

(3.2.6) Proposição

Se f é regular, φ é uma singularidade de Morse e $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) > 0$, então $\text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f) \geq 2$.

Prova

Podemos supor que $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$.

Denotemos por $\bar{M}$ a matriz Hessiana de φ_0 em 0, sendo $\varphi_0(x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{n-1}^2$ definido por $\varphi_0(x_2, \dots, x_n) = \varphi(0, x_2, \dots, x_n)$.

Temos $\det \bar{M} = 0$ pois, caso contrário, (f, φ) seria uma dobra tangente. Como φ é um germe de Morse, segue que $\text{rank } \bar{M} = n - 2$.

Então, por uma mudança linear de coordenadas no espaço $-(x_2, \dots, x_n)$, temos que (f, φ) é $\mathcal{R}$ -equivalente a um germe da forma :

$$(f, \psi) = \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i x_1 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \mathcal{O}(3) \right),$$

com $\varepsilon_j = \pm 1$ ($j = 3, \dots, n$), e $c_2 \neq 0$ (φ é de Morse).

Com a mudança de coordenadas :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = \frac{X_2}{c_2} + \frac{1}{c_2}(-c_1 + \frac{1}{4} \sum_{j=3}^n \varepsilon_j c_j^2) X_1 \\ x_j = X_j - \frac{\varepsilon_j}{2c_j} X_1 \quad (j = 3, \dots, n) \end{cases},$$

obtemos:

$$(f, \psi) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \mathcal{O}(3)).$$

Agora, pelo Splitting Lemma,

$$(f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + O(3)) \tilde{\mathcal{R}} (f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \alpha(x_1, x_2)),$$

com $\alpha \in \mathcal{M}_2^3$.

O termo $x_1 x_2$ permite remover os termos envolvendo x_1 em $j^3 \alpha$, fornecendo

$$(f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \alpha(x_1, x_2)) \tilde{\mathcal{R}} (f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \delta_3 x_2^3 + \beta(x_1, x_2)), \text{ com } \delta_3 x_2^3 = j^3 \alpha(0, x_2), \beta \in \mathcal{M}_2^4.$$

O mesmo argumento se aplica a $j^4 \beta$, para se obter :

$$(f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \delta_3 x_2^3 + \beta(x_1, x_2)) \tilde{\mathcal{R}} (f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \delta_3 x_2^3 + \delta_4 x_2^4 + \lambda(x_1, x_2)), \text{ com } \delta_4 x_2^4 = j^4 \beta(0, x_2), \lambda \in \mathcal{M}_2^5. \text{ Mais ainda, se } \delta_3 = 0 \text{ então } \delta_4 x_2^4 = j^4 \alpha(0, x_2).$$

Continuando com este procedimento, obtemos :

$$(f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \alpha(x_1, x_2)) \tilde{\mathcal{R}} (f, x_1 x_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_j x_j^2 + \delta_k x_2^k + \rho(x_1, x_2)), \text{ onde } k = \text{ordem de } g(x_2) = \alpha(0, x_2) \text{ (isto}$$

é, o menor $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $j^r g$ é não nulo), $\delta_k x_2^k = j^k g$ e $\rho \in \mathcal{M}_2^{k+1}$.

Temos $k \geq 4$ pois, caso contrário, (f, φ) seria uma cúspide

tangente. Por outro lado, se $k \geq 5$, $\text{cod}(\mathcal{M}^e, (f, \varphi)) \geq 2$ (ver Rieger [21]). Para $k = 4$, procedendo de maneira análoga ao caso da cúspide tangente (Proposição (3.2.3)), vê-se que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \geq 2$.

II₃) f e φ são singularidades, com φ de Morse.

(3.2.7) Proposição

Nestas hipóteses, $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \geq n + 2$, para $n \geq 3$.

Prova

Podemos supor que $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

O espaço tangente estendido $T_f \mathcal{G}_\varphi^e$ é dado pelos campos $\sigma \in \theta_f$ que satisfazem à equação :

$$(*) \quad \sigma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-\varepsilon_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varepsilon_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}) \xi_{ij}(x_1, \dots, x_n) \\ + (x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}) \mu(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2) + \eta(f, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2)$$

com $\xi_{ij} \in \mathcal{E}_n$ ($1 \leq i < j \leq n$), $\mu \in \mathcal{E}_1$, $\eta \in \mathcal{E}_2$.

Se σ satisfaz (*), temos que $\sigma \in \mathbb{R} \oplus \mathcal{M}_n^2$. Assim, $\dim_{\mathbb{R}} \theta_f / (T_f \mathcal{G}_\varphi^e + \mathcal{M}_n^2 \theta_f) = n$, o que implica que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \geq n$.

Vamos prosseguir a análise, com o objetivo de melhorar esta estimativa.

Seja A o subespaço vetorial real de $J_0^2(n,1)$ gerado por

$$j^2(-\epsilon_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_1} + \epsilon_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_j}) \quad (1 \leq j \leq n), \quad j^2(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}),$$

$$j^2 f \text{ e } j^2 \varphi.$$

$$\text{Pela relação de Euler, } j^2 f = \frac{1}{2} j^2 (x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

$$\text{Logo, } \dim_{\mathbb{R}} A \leq \frac{n^2 - n}{2} + 2 \text{ e, portanto, } \text{cod}(J_0^2(n,1), A) \geq 2n - 2.$$

$$\text{Assim, } \dim_{\mathbb{R}} \theta_f / (T_f \mathcal{E}_\varphi^e + \mathcal{M}_{n,f}^3 \theta_f) \geq 2n - 2, \text{ e daí, } \text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f) \geq 2n - 2.$$

$$\text{Temos então } \text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f) \geq n + 2, \text{ para } n \geq 4.$$

Consideremos agora $n = 3$.

Seja B o subespaço vetorial real de $J_0^3(3,1)$ gerado por

$$j^3(-\epsilon_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_1} + \epsilon_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_j}) \quad (1 \leq i < j \leq 3),$$

$$j^3[(-\epsilon_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_1} + \epsilon_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_j}) x_k] \quad (1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq k \leq 3, k \neq i),$$

$$j^3(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}), \quad j^3 f \text{ e } j^3 \varphi.$$

$$\text{Temos } \dim_{\mathbb{R}} B \leq 14, \text{ portanto, } \text{cod}(J_0^3(3,1), B) \geq 5. \text{ Logo,}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \theta_f / (T_f \mathcal{E}_\varphi^e + \mathcal{M}_{3,f}^4 \theta_f) \geq 5 \text{ e, assim, } \text{cod}(\mathcal{E}_\varphi^e, f) \geq 5.$$

§3. Multigermes de codimensão ≤ 1

Neste parágrafo, consideraremos multigermes da forma

$$f : (\mathbb{R}^n, S) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, y) ,$$

onde $S = \{x_1, \dots, x_s\}$ é um conjunto finito de pontos. Observe que o multigerme f forma um diagrama convergente de germes de aplicações $f_i = f|(\mathbb{R}^n, x_i) : (\mathbb{R}^n, x_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ ($i = 1, \dots, s$) :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, x_1) & \searrow f_1 & \\ (\mathbb{R}^n, x_2) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{R}^p, y) \\ \vdots & & \nearrow f_s \\ (\mathbb{R}^n, x_s) & \nearrow f_s & \end{array}$$

Assim, f também será denotado por $[f_1, \dots, f_s]$. Ainda, θ_f pode ser

identificado com $\bigoplus_{i=1}^s \theta_{f_i}$, que é um $\bigoplus_{i=1}^s \mathcal{E}_{n, x_i}$ -módulo.

(3.3.1) Definição

Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, S) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, z)$ um multigerme no mesmo conjunto S . O espaço tangente estendido $T_f^{\mathcal{E}} \varphi$ do multigerme f com relação à φ -equivalência, é o conjunto de todos os $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \theta_f$

tais que existam $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s) \in \theta_{I(\mathbb{R}^n, S)}$, $\mu \in \theta_{I(\mathbb{R}^q, z)}$,
 $\eta \in \theta_{\pi_p}$ ($\pi_p : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, yxz) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ é a projeção sobre o primeiro fator) satisfazendo

$$\begin{cases} \sigma_i = df_i(\xi_i) + \eta \circ (f_i, \varphi_i) \\ 0 = d\varphi_i(\xi_i) + \mu \circ \varphi_i \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, s$.

Considerando multigerms $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^n, S) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, yxz)$,
 introduziremos a seguinte

(3.3.2) Definição

O espaço tangente estendido $T_{(f, \varphi)} \tilde{\mathcal{A}}^e$ do multigerme (f, φ)
 com relação à $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalência, é o conjunto de todos os
 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \theta_{(f, \varphi)}$ tais que existam $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s) \in$
 $\theta_{I(\mathbb{R}^n, S)}$, $\zeta \in \theta_{I(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, yxz)}$, $\mu \in \theta_{I(\mathbb{R}^q, z)}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \sigma_i = d(f_i, \varphi_i)(\xi_i) + \zeta \circ (f_i, \varphi_i) \\ 0 = d\pi_q(\zeta) + \mu \circ \pi_q \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, s$, onde $\pi_q : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, yxz) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, z)$ é a

projeção sobre o segundo fator.

(3.3.3) Definição

Definimos

$$\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = \dim_{\mathbb{R}} \theta_f / T_f \mathcal{G}_\varphi^e ,$$

$$\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) = \dim_{\mathbb{R}} \theta_{(f, \varphi)} / T_{(f, \varphi)} \mathcal{A}^e ,$$

e, chamamos, respectivamente, φ^e - codimensão de f e $\mathcal{A}^e$ -codimensão de (f, φ) .

Evidentemente, $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) \geq \text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, (f, \varphi))$.

Quando φ é um multigerme $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável, os mesmos argumentos usados para monogermes no parágrafo 1 deste Capítulo, mostram que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) = \text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi))$ para todo multigerme $f : (\mathbb{R}^n, S) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, y)$.

Aqui, estamos particularmente interessados na classificação dos multigerms f tais que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \leq 1$, no caso

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{R}, 0) \\ & \nearrow f & \\ (\mathbb{R}^n, S) & & \\ & \searrow \varphi & \\ & & (\mathbb{R}, 0) \end{array}$$

onde $n \geq 2$, φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável e (f, φ) é um multi-germe singular (isto é, $x \in \Sigma(f, \varphi)$ para todo $x \in S$).

Lembremos que, da $\mathcal{A}$ -estabilidade infinitesimal de φ , temos $\text{card}(\Sigma\varphi) \leq 1$.

Temos também que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^e, f) \leq 1$ implica $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) \leq 1$.

Para a classificação desejada, consideraremos então dois casos :

I) $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) = 0$

Neste caso, $\text{card}(S) \leq 2$. Quando $\text{card}(S) = 2$, sabemos que S é constituído de dois pontos de dobras de (f, φ) que se interceptam transversalmente; logo, temos duas possibilidades :

I_1) duas dobras transversas que se interceptam transversalmente ,

I_2) uma dobra transversa e uma dobra tangente .

II) $\text{cod}(\mathcal{A}^e, (f, \varphi)) = 1$

Neste caso, $\text{card}(S) \leq 3$. Para $\text{card}(S) = 2, 3$, a classificação é feita por Egúsquiza em [6]; ou seja :

Se $\text{card}(S) = 3$ então os pontos de S são pontos de dobras de (f, φ) , duas a duas transversais , se $\text{card}(S) = 2$ temos dois casos : (i) dois pontos de dobras com interseção não transversal , (ii) um ponto de dobra e um ponto de cúspide que se interceptam transversalmente .

Como $\text{card}(\Sigma\varphi) \leq 1$, isto nos dá seis possibilidades :

II_1) três dobras transversas, duas a duas transversais ,

II_2) duas dobras transversas e uma dobra tangente, duas a duas transversais ,

II_3) duas dobras transversas com interseção não transversal ,

II_4) uma dobra transversa e uma cúspide transversa que se interceptam transversalmente ,

II_5) uma dobra transversa e uma cúspide tangente ,

II_6) uma dobra tangente e uma cúspide transversa .

Por Mendes [18], para (f, φ) do tipo I_1 , f é de φ^e - codimensão nula. O tipo I_1 tem a seguinte forma normal com relação à $\mathcal{A}$ -equivalência :

$$\begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (y + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y). \end{cases}$$

Para (f, φ) de um dos tipos : II_2 e II_6 , f é de φ^e - codimensão > 1 , pois pontos de dobras tangentes, na φ - equivalência, são pontos isolados. Para (f, φ) do tipo II_5 , f também é de φ^e - codimensão > 1 , pois, pela Proposição (3.2.3), a cúspide tangente já tem φ^e - codimensão igual a 1.

Resta então analisar os tipos I_2 , II_1 , II_3 e II_4 .

I_2) *Interseção de uma dobra transversa e uma dobra tangente.*

Por Wan [26], com mudanças de coordenadas somente na fonte, temos o modelo :

$$\begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x, \lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2), \end{cases}$$

onde $\lambda'(0) = 0$ e $\lambda''(0) \neq 0$ (pois φ é $\mathcal{A}$ -infinitesimalmente estável).

Para os bigermes $f = [\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, x]$ e

$\varphi = [\bar{y}, \lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2]$, o espaço tangente estendido $T_f \mathcal{G}^e_\varphi$ é dado

pelos campos $(\bar{\sigma}, \sigma) \in \theta_f$ que satisfazem ao sistema :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) &= \bar{\lambda}'(\bar{y}) \bar{\xi}_2(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) \\
 &+ \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) \\
 &+ \eta(\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\
 0 &= \bar{\xi}_2(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) + \mu(\bar{y}) \\
 \sigma(x, x_2, x_3, \dots, x_n) &= \xi_1(x, x_2, \dots, x_n) + \eta(x, \lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2) \\
 0 &= \lambda'(x) \xi_1(x, x_2, \dots, x_n) \\
 &+ \sum_{i=2}^n \pm 2x_i \xi_i(x, x_2, \dots, x_n) + \mu(\lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

onde $\bar{\xi}_i \in \mathcal{E}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n)}$, $\xi_i \in \mathcal{E}_{(x, x_2, \dots, x_n)}$ ($i = 1, \dots, n$) ,

$\eta \in \mathcal{E}_{(u, v)}$, $\mu \in \mathcal{E}_v$, onde (u, v) denota as coordenadas na meta.

A resolução do sistema (*) é equivalente à resolução do sistema :

$$\begin{aligned}
 (**) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) &= -\bar{\lambda}'(\bar{y}) \mu(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) \\
 &+ \eta(\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\
 -\lambda'(x) \sigma(x, x_2, x_3, \dots, x_n) &= -\lambda'(x) \eta(x, \lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2) \\
 &+ \sum_{i=2}^n \pm 2x_i \xi_i(x, x_2, \dots, x_n) \\
 &+ \mu(\lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema de Hadamard, a resolução do sistema (**) é equivalente à resolução do sistema :

$$(***) \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{y}) = -\bar{\lambda}'(\bar{y})\mu(\bar{y}) + \eta(\bar{\lambda}(\bar{y}), \bar{y}) \\ -\lambda'(x)\sigma(x) = -\lambda'(x)\eta(x, \lambda(x)) + \mu(\lambda(x)) \end{array} \right.$$

Por Mendes [18], sabemos que $\text{cod}(\mathfrak{S}_{\varphi}^e, f) \geq 1$.

Para o caso mais degenerado em que $\bar{\lambda} \equiv 0$, o sistema (***)
fica :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{y}) = \eta(0, \bar{y}) \\ -\lambda'(x)\sigma(x) = -\lambda'(x)\eta(x, \lambda(x)) + \mu(\lambda(x)), \end{array} \right.$$

de onde se conclui facilmente que $\text{cod}(\mathfrak{S}_{\varphi}^e, f) = 1$.

II₃) Interseção não transversal de duas dobras transversas.

Com mudanças de coordenadas somente na fonte, temos o modelo:

$$(B_1) \begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \longmapsto (\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \longmapsto (\lambda(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y) \end{cases},$$

onde $\bar{\lambda}, \lambda$ são diferenciáveis.

Tomando a mudança de coordenadas na meta : $U = u - \bar{\lambda}(v)$,

$V = v$, obtemos :

$$(B_1) \underset{\mathcal{A}}{\sim} (B_2) \begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \longmapsto (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \longmapsto (\alpha(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y), \end{cases}$$

onde $\alpha(y) = (\lambda - \bar{\lambda})(y)$.

Como as dobras se interceptam não transversalmente, temos que $\alpha'(0) = 0$.

Para os bigermes $f = [\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \alpha(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2]$ e $\varphi = [\bar{y}, y]$, o espaço tangente $T_f \mathcal{G}_\varphi^e$ é dado pelos campos $(\bar{\sigma}, \sigma) \in \theta_f$ que satisfazem ao sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) + \eta(\sum_{i \neq 2} \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ \sigma(x_1, y, x_3, \dots, x_n) = \alpha'(y)\xi(y) + \sum_{i \neq 2} \pm 2x_i \xi_i(x_1, y, \dots, x_n) \\ \quad + \eta(\alpha(y) + \sum_{i \neq 2} x_i^2, y) \end{array} \right. ,$$

onde $\bar{\xi}_i \in \mathcal{E}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n)}$, $\xi_i \in \mathcal{E}_{(x_1, y, \dots, x_n)}$ ($i \neq 2$), $\xi \in \mathcal{E}_V$,
 $\eta \in \mathcal{E}_{(u, v)}$.

Pelo Lema de Hadamard, a resolução deste sistema é equivalente à resolução do sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{y}) = \eta(0, \bar{y}) \\ \sigma(y) = \alpha'(y)\xi(y) + \eta(\alpha(y), y) . \end{array} \right.$$

Como $\alpha'(0) = 0$, disto resulta que $\text{cod}(\mathcal{G}_\varphi^c, f) = 1$ se, e somente se, $\alpha''(0) \neq 0$. E, neste caso, o bigerme (B_1) é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$(B_3) \left\{ \begin{array}{l} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \longmapsto (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \longmapsto (\pm y^2 + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y) \end{array} \right. .$$

II₄) *Interseção transversal de uma dobra transversa e uma cúspide transversa.*

Por Wan [26], com mudanças de coordenadas somente na fonte, temos o modelo :

$$(B_1) \begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x^3 + xy + \lambda(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, \beta(y)), \end{cases}$$

onde $\bar{\lambda}$, λ são diferenciáveis e β é um difeomorfismo.

Com a mudança de coordenadas $\bar{y} = \beta(\bar{Y})$, obtemos :

$$(B_1) \underset{\mathcal{A}}{\sim} (B_2) \begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\bar{\lambda} \circ \beta(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \beta(\bar{y})) \\ (x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x^3 + xy + \lambda(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, \beta(y)) \end{cases}$$

Agora, aplicando a mudança de coordenadas : $U = u - \bar{\lambda}(v)$, $V = \beta^{-1}(v)$, na meta em (B_2) , obtemos :

$$(B_1) \underset{\mathcal{A}}{\sim} (B_3) \begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x^3 + xy + \alpha(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y), \end{cases}$$

onde $\alpha(y) = (\lambda - \bar{\lambda} \circ \beta)(y)$.

Como a dobra e a cúspide se interceptam transversalmente, temos que α é germe de difeomorfismo.

Para os bigermes $f = [\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, x^3 + xy + \alpha(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2]$, $\varphi = [\bar{y}, y]$, o espaço $T_f \mathcal{G}_\varphi^e$ é dado pelos campos $(\bar{\sigma}, \sigma) \in \theta_f$, que satisfazem ao sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) + \eta(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ \sigma(x, y, x_3, \dots, x_n) = (3x^2 + y)\xi_1(x, y, \dots, x_n) + (x + \alpha'(y))\xi_2(y) \\ \quad + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i \xi_i(x, y, \dots, x_n) \\ \quad + \eta(x^3 + xy + \alpha(y) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y) \end{array} \right.$$

onde $\bar{\xi}_i \in \mathcal{E}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n)}$, $\xi_i \in \mathcal{E}_{(x, y, \dots, x_n)}$ ($i \neq 2$), $\xi_2 \in \mathcal{E}_v$, $\eta \in \mathcal{E}_{(u, v)}$.

Pelo Lema de Hadamard, a resolução deste sistema é equivalente à resolução do sistema :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{y}) = \eta(0, \bar{y}) \\ \sigma(x, y) = (3x^2 + y)\xi_1(x, y) + (x + \alpha'(y))\xi_2(y) \\ \quad + \eta(x^3 + xy + \alpha(y), y) \end{array} \right.$$

Seja $\Delta_{y,y}^-$ o sub-anel de $\mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_y$ formado pelos elementos

$$\begin{bmatrix} r(\bar{y}) \\ r(y) \end{bmatrix} \text{ da diagonal.}$$

O conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_{(x,y)}$ constituído dos elementos

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix} \text{ para os quais o sistema (*) é solúvel, é um } \Delta_{y,y}^- \text{-submódulo de } \mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_{(x,y)}.$$

Esta estrutura induz uma estrutura de $\mathcal{E}_y$ -módulo no conjunto

$$\tilde{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y} \text{ constituído dos elementos de } \mathcal{Y} \text{ da forma } \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix}.$$

Como $\alpha = \alpha(y)$ é germe de difeomorfismo, segue que α' é um germe inversível em $\mathcal{E}_y$ e, além disso, podemos escrever $\alpha(y) = y\delta(y)$ com δ também inversível.

É evidente que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3x^3 + xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ xy + \alpha'(y)y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 + xy + \alpha(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 + xy + y\delta(y) \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{Y}}.$$

Consideremos a matriz M sobre o anel $\mathcal{E}_y$, cujas linhas são formadas pelos coeficientes dos termos x^3 , xy e y nas soluções acima :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha'(y) \\ 1 & 1 & \delta(y) \end{bmatrix}$$

O determinante de M é igual a $3\delta(y) - 2\alpha'(y)$, que é um elemento inversível de $\mathcal{E}_y$. Portanto, M é uma matriz inversível.

Assim, a estrutura de $\mathcal{E}_y$ -módulo de $\tilde{\mathcal{Y}}$ nos permite concluir

$$\text{que } \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{Y}}.$$

Temos então que :

$$(1) \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}, \text{ para todo } \bar{\sigma} \in \mathcal{M}_y^-.$$

De fato :

Se $\bar{\sigma} \in \mathcal{M}_y^-$, podemos escrever $\bar{\sigma}(\bar{y}) = \bar{y}r(\bar{y})$ com $r \in \mathcal{E}_y^-$.

Tomando $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ e $\eta(u, v) = \bar{\sigma}(v)$ em (*), obtemos

$$\text{que } \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \bar{\sigma}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}r(\bar{y}) \\ yr(y) \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

Como $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}$, segue que $\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ yr(y) \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}$ e, daí,

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \bar{\sigma}(y) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}(y) \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix} \in \mathcal{J}, \text{ para todo } \sigma \in \mathcal{M}_{(x,y)}^2.$$

De fato :

Se $\sigma \in \mathcal{M}_{(x,y)}^2$, podemos escrever $\sigma(x,y) = x^2\sigma_1(x,y) + xy\sigma_2(x,y) + y^2\sigma_3(x,y)$, com $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{E}_{(x,y)}$. Ou ainda,

$$\sigma(x,y) = x^2\sigma_1(x,y) + xy[\sigma_{21}(y) + x\sigma_{22}(x,y)] + y^2\sigma_3(x,y).$$

$$\text{De (*) temos que } \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ xyp(x,y) \end{bmatrix} \pmod{\mathcal{J}}.$$

Decompondo $\rho(x,y) = \rho_1(y) + x\rho_2(x,y)$, obtemos :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ x^2y\rho(x,y) \end{bmatrix}.$$

$$\text{Assim sucessivamente, } \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ x^k y\rho(x,y) \end{bmatrix}, \forall k.$$

$$\text{Do Corolário (2.3.6), concluímos então que } \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(x,y) \end{bmatrix} \in \mathcal{J}.$$

Dos itens (1) e (2), segue que

$$\begin{aligned} \text{cod}(\mathcal{G}_{\varphi}^e, f) &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_{(x,y)}}{\mathcal{J}} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{(\mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_{(x,y)}) / (\mathcal{M}_y^- \oplus \mathcal{M}_{(x,y)}^2)}{\mathcal{J} / (\mathcal{M}_y^- \oplus \mathcal{M}_{(x,y)}^2)} = 1, \end{aligned}$$

pois $\mathcal{P}/(M_y \oplus M_{(x,y)}^2)$ é gerado como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial pelas pro-

jeções de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ x + \alpha'(y) \end{bmatrix}$.

De fato, é fácil ver que $\mathcal{P}$ independe do difeomorfismo $\alpha = \alpha(y)$. Logo, pelo Lema de Mather, temos uma única órbita :

$$\begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x^3 + xy + y + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2, y) \end{cases}$$

II₁) *Interseção de três dobras transversas que se interceptam duas a duas transversalmente.*

Com mudanças de coordenadas somente na fonte, temos o modelo :

$$(T_1) \begin{cases} (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{x}}_3, \dots, \bar{\bar{x}}_n) \mapsto (\bar{\bar{\lambda}}(\bar{\bar{y}}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{\bar{x}}_i^2, \bar{\bar{y}}) \\ (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (\bar{\lambda}(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (\lambda(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y) \end{cases}$$

Tomando a mudança de coordenadas na meta : $U = u - \bar{\bar{\lambda}}(v)$,
 $V = v$, obtemos :

$$(T_1) \underset{\mathcal{A}}{\sim} (T_2) \left\{ \begin{array}{l} (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto \left(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} \right) \\ (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto \left(\alpha(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} \right) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(\beta(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y \right), \end{array} \right.$$

onde $\alpha(\bar{y}) = (\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}})(\bar{y})$, $\beta(y) = (\lambda - \bar{\bar{\lambda}})(y)$.

Como as dobras se interceptam duas a duas transversalmente, temos que α e β são germes de difeomorfismos com $\alpha'(0) \neq \beta'(0)$.

Tomando as mudanças de coordenadas na fonte e na meta em (T_2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{y}} = \alpha^{-1}(\bar{\bar{Y}}) \\ \bar{y} = \alpha^{-1}(\bar{Y}) \\ y = \alpha^{-1}(Y) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} U = u \\ V = \alpha(v) \end{array} \right. ,$$

obtemos :

$$(T_1) \underset{\mathcal{A}}{\sim} (T_3) \left\{ \begin{array}{l} (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{x}}_3, \dots, \bar{\bar{x}}_n) \mapsto \left(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{\bar{x}}_i^2, \bar{\bar{y}} \right) \\ (\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \mapsto \left(\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} \right) \\ (x_1, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(\gamma(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y \right), \end{array} \right.$$

onde $\gamma(y) = \beta \circ \alpha^{-1}(y)$.

Então, γ é um germe de difeomorfismo com $\gamma'(0) \neq 1$. Assim, escrevendo $\gamma(y) = y\tilde{\gamma}(y)$, temos $\tilde{\gamma}(0) \neq 0, 1$.

Para os trigermes $f = [\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \gamma(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2]$ e $\varphi = [\bar{y}, \bar{y}, y]$, o espaço $T_{f, \varphi}^e$ é dado pelos campos $(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}, \sigma) \in \theta_f$ que satisfazem ao sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) + \eta(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ \bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = \xi(\bar{y}) + \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n) \\ \quad + \eta(\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}) \\ \sigma(x_1, y, x_3, \dots, x_n) = \gamma'(y)\xi(y) + \sum_{i \neq 2} \pm 2x_i \xi_i(x_1, y, \dots, x_n) \\ \quad + \eta(\gamma(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y) \end{array} \right. ,$$

onde $\bar{\xi}_i \in \mathcal{E}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n)}$, $\bar{\xi}_1 \in \mathcal{E}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n)}$, $\xi_i \in \mathcal{E}_{(x_1, y, \dots, x_n)}$
($i \neq 2$), $\xi \in \mathcal{E}_v$, $\eta \in \mathcal{E}_{(u, v)}$.

Pelo Lema de Hadamard, a resolução deste sistema é equivalente à resolução do sistema :

$$(*) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}(\bar{y}) = \eta(0, \bar{y}) \\ \bar{\sigma}(\bar{y}) = \xi(\bar{y}) + \eta(\bar{y}, \bar{y}) \\ \sigma(y) = \gamma'(y)\xi(y) + \eta(\gamma(y), y) \end{cases}$$

Seja $\Delta_{\bar{y}, \bar{y}, y}^{\bar{y}} \subset \mathcal{E}_{\bar{y}}^{\bar{y}} \otimes \mathcal{E}_{\bar{y}}^{\bar{y}} \otimes \mathcal{E}_y$ o sub-anel formado pelos elementos da diagonal.

O conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}_{\bar{y}}^{\bar{y}} \otimes \mathcal{E}_{\bar{y}}^{\bar{y}} \otimes \mathcal{E}_y$ constituído dos elementos

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \sigma(y) \end{bmatrix} \text{ para os quais o sistema } (*) \text{ é solúvel, é um } \Delta_{\bar{y}, \bar{y}, y}^{\bar{y}} \text{-sub-}$$

módulo de $\mathcal{E}_{\bar{y}}^{\bar{y}} \otimes \mathcal{E}_{\bar{y}}^{\bar{y}} \otimes \mathcal{E}_y$.

Afirmamos que $\begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \bar{\sigma}(\bar{y}) \\ \sigma(y) \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}$, para quaisquer $\bar{\sigma} \in \mathcal{M}_{\bar{y}}^2$, $\bar{\sigma} \in \mathcal{M}_{\bar{y}}^2$, $\sigma \in \mathcal{M}_y^2$.

De fato :

Devido à estrutura de $\Delta_{\bar{y}, \bar{y}, y}^{\bar{y}}$ -módulo de $\mathcal{Y}$, observemos que para mostrar isto, é suficiente mostrar que

$$(**) \quad \begin{bmatrix} \bar{y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y},$$

pois todo $h = h(z)$ em M_z^2 pode ser escrito na forma $z^2 \tilde{h}$, com $\tilde{h} \in \mathcal{E}_z$.

Veamos então (**):

$$\text{É claro que } \begin{bmatrix} \bar{y}^2 \\ \bar{y}^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ \gamma'(y)y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

Tomando $\xi = 0$ e $\eta(u,v) = u^2$ em (*), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ \gamma^2(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ \tilde{\gamma}^2(y)y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ \gamma'(y)y^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ \tilde{\gamma}^2(y)y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma'(y) - \tilde{\gamma}^2(y))y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

Como $\gamma'(y) - \tilde{\gamma}^2(y)$ é inversível, pela estrutura de $\mathcal{Y}$, segue que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}.$$

Agora, é fácil concluir que $\begin{bmatrix} \bar{y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}.$

Da afirmação acima, segue que

$$\begin{aligned} \text{cod}(\mathcal{S}_\varphi^e, f) &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_y^+ \oplus \mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_y}{\mathcal{S}} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{(\mathcal{E}_y^+ \oplus \mathcal{E}_y^- \oplus \mathcal{E}_y) / (\mathcal{M}_y^2 \oplus \mathcal{M}_y^2 \oplus \mathcal{M}_y^2)}{\mathcal{S} / (\mathcal{M}_y^2 \oplus \mathcal{M}_y^2 \oplus \mathcal{M}_y^2)} = 2, \end{aligned}$$

pois $\mathcal{S}/(\mathcal{M}_y^2 \oplus \mathcal{M}_y^2 \oplus \mathcal{M}_y^2)$ é gerado como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial pelas pro-

jeções de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y} \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y} \\ \gamma(y) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \gamma'(y) \end{bmatrix}.$

Escrevamos agora $\gamma(y) = ay + by^2\delta(y)$ ($a \neq 0, 1$). Então, a família a 1 - parâmetro de trigramas

$$f_t = \left[\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, ay + (b - t)y^2\delta(y) + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2 \right]$$

é tal que $f_0 = f$.

Pelos cálculos acima e pelo Lema de Mather, temos que a família f_t é φ - trivial. Portanto,

$$f \underset{\varphi}{\sim} f_b = \left[\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, ay + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2 \right]$$

Observemos ainda que a família

$$g_t = \left[\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2 \right], t \neq 0, 1$$

não é φ -trivial em cada um dos intervalos $t < 0$, $0 < t < 1$ e

$t > 1$, pois $\frac{\partial g_t}{\partial t} \Big|_t \notin T_{g_t} \mathcal{S}_{\varphi}$, $\forall t$. Mais ainda, $g_t \not\underset{\varphi}{\sim} g_{t'}$, para

$t \neq t'$. Vejamos esta última afirmação.

Suponhamos $g_t \underset{\varphi}{\sim} g_{t'}$, logo $(g_t, \varphi) \underset{\mathcal{A}}{\sim} (g_{t'}, \varphi)$. Seja $(\bar{h}, \bar{h}, h; k)$ uma $\mathcal{A}$ -equivalência entre (g_t, φ) e $(g_{t'}, \varphi)$. Então, k é da forma $k(u, v) = (k_1(u, v), \ell(v))$ e, assim, preserva a reta $L : v = 0$. Além disso, $(\bar{h}, k)$ e $(\bar{h}, k)$ deixam invariantes, respectivamente, os germes $(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y})$ e $(\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y})$ e, como consequência, k preserva as imagens dos conjuntos singulares que são, respectivamente, as retas $L_0 : u = 0$ e $L_1 : u = v$. Finalmente, (h, k) leva o germe $(ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y)$ em $(t'y + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y)$ e, portanto, k deve levar a reta $L_t : u = tv$ na reta $L_{t'} : u = t'v$.

Como k preserva as três primeiras retas, pela razão hanarmônica, k obrigatoriamente preserva a quarta reta. Logo $t = t'$.

No entanto, como famílias de 4 retas que se interceptam são topologicamente triviais, é razoável conjecturar a φ -trivialidade topológica da família g_t . De fato, isto ocorre :

(3.3.4) Proposição

Seja φ o trigerme $\varphi = [\bar{\bar{y}}, \bar{y}, y]$. Então, a família de trigerms

$$g_t = \left[\sum_{i \neq 2} \pm \bar{\bar{x}}_i^2, \bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2 \right], t \neq 0, 1$$

é topologicamente φ -trivial em cada um dos intervalos $t < 0$, $0 < t < 1$, $t > 1$.

A prova desta proposição será feita como em Looijenga [12], Ruas [22], Saia [23], através da construção de campos de vetores controlados.

Observemos que, para cada intervalo considerado, a família g_t é quase-homogênea de tipo $(1,2,1,\dots,1;2)$, no sentido de que g_t é equivariante com relação às ações do grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+$ sobre $\mathbb{R}^n \times J$ e sobre $\mathbb{R} \times J$, definidas respectivamente por :

$$\lambda.(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t) = (\lambda x_1, \lambda^2 y, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n, t)$$

$$\text{e} \quad \lambda.(u, t) = (\lambda^2 u, t)$$

onde J indica qualquer um dos intervalos de variação de t . Ou seja,

$$g_t(\lambda.(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t)) = \lambda.g_t(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t).$$

Para a prova, comecemos com um resultado auxiliar :

(3.3.5) Lema

Existem germes quase-homogêneos de tipo $(1,2,1,\dots,1;5)$,

$$\bar{\bar{\xi}}_1 \in \mathcal{M}_{(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{x}}_3, \dots, \bar{\bar{x}}_n, t)} \quad , \quad \bar{\xi}_1 \in \mathcal{M}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n, t)} \quad ,$$

$$\xi_i \in \mathcal{M}_{(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t)} \quad (1 \leq i \leq n, i \neq 2),$$

$$\text{e } \eta \in \mathcal{M}_{(u, v, t)} \quad , \quad \text{homogêneo de grau 3, tais que :}$$

$$0 = \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n, t) \\ + \eta(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}, t)$$

$$0 = \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n, t) \\ + \eta(\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}, t)$$

$$\rho(ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y).y = \sum_{i \neq 2} \pm 2x_i \xi_i(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t) \\ + \eta(ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y, t)$$

onde $\rho(u, v) = u^2 + v^2$.

Prova

Seja G o levantamento da família de trigermes g_t , isto é :

$$G(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n, t) = (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, t)$$

$$G(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n, t) = (\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, t)$$

$$G(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t) = (ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, t)$$

O "espaço tangente" $T_{g_t} \mathcal{G}_\varphi$ associado a G , é dado pelos campos $(\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\sigma}, \sigma) \in \Psi_G$, isto é, que preservam $\mathbb{R}$ -níveis, tais que :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 &\bar{\bar{\sigma}}(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{x}}_3, \dots, \bar{\bar{x}}_n, t) = \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{\bar{x}}_i \bar{\bar{\xi}}_i(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \dots, \bar{\bar{x}}_n, t) \\
 &\quad + \eta\left(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{\bar{x}}_i^2, \bar{\bar{y}}, t\right) \\
 &\bar{\sigma}(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n, t) = \xi(\bar{y}, t) + \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n, t) \\
 &\quad + \eta\left(\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}, t\right) \\
 &\sigma(x_1, y, x_3, \dots, x_n, t) = t\xi(y, t) + \sum_{i \neq 2} \pm 2x_i \xi_i(x_1, y, \dots, x_n, t) \\
 &\quad + \eta\left(ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y, t\right)
 \end{aligned} \right\} \quad (***).
 \end{aligned}$$

onde $\bar{\bar{\xi}}_i \in \mathcal{M}_{(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \dots, \bar{\bar{x}}_n, t)}$, $\bar{\xi}_i \in \mathcal{M}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n, t)}$,
 $\xi_i \in \mathcal{M}_{(x_1, y, \dots, x_n, t)}$ ($i \neq 2$), $\xi \in \mathcal{M}_{(v, t)}$, $\eta \in \mathcal{M}_{(u, v, t)}$.

Observemos que qualquer elemento $(\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\sigma}, \sigma) \in \Psi_G$ tal que
 $\bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{M}_{\bar{x}_1} \mathcal{M}_{(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}, \dots, \bar{\bar{x}}_n, t)}$, $\bar{\sigma} \in \mathcal{M}_{\bar{x}_1} \mathcal{M}_{(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n, t)}$,
 $\sigma \in \mathcal{M}_{x_1} \mathcal{M}_{(x_1, y, \dots, x_n, t)}$, $\forall i \neq 2$, pertence a $T_{g_t} \mathcal{G}_\varphi$ (basta escolher convenientes campos $\bar{\bar{\xi}}_i$, $\bar{\xi}_i$, ξ_i , $i \neq 2$).

Tomando $\bar{\bar{\xi}}_i = 0$, $\bar{\xi}_i = 0$, $\xi_i = 0$, ($i \neq 2$), $\xi = 0$ e $\eta(u, v, t) = u^2 v$ em (***), obtemos :

$$\begin{bmatrix} (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2)^2 \bar{y} \\ (\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2)^2 \bar{y} \\ (ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2)^2 y \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{G}_\varphi, \text{ e,}$$

pela observação acima, vem :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^3 \\ t^2 y^3 \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{G}_\varphi.$$

Tomando agora $\bar{\xi}_1 = 0$, $\bar{\xi}_1 = 0$, $\xi_1 = 0$ ($i \neq 2$), $\xi = 0$ e $\eta(u, v, t) = u^3$ em (***), obtemos :

$$\begin{bmatrix} (\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2)^3 \\ (\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2)^3 \\ (ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2)^3 \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{G}_\varphi,$$

o que implica, usando a observação anterior, que

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}^3 \\ t^3 y^3 \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{G}_\varphi.$$

Fazendo (1) - (2), obtemos :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (t^2 - t^3)y^3 \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{S}_\varphi .$$

Como $t^2 - t^3 \neq 0$ para $t \in J$, segue então que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^3 \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{S}_\varphi , \text{ e daí, } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (t^2 + 1)y^3 \end{bmatrix} \in T_{g_t} \mathcal{S}_\varphi .$$

Agora, é fácil ver que :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y) \cdot y \end{bmatrix} = \rho \cdot \frac{\partial g_t}{\partial t} \in T_{g_t} \mathcal{S}_\varphi ,$$

onde $\rho(u, v) = u^2 + v^2$.

Ou seja, existem campos $\bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\xi}_1, \xi_1$ ($i \neq 2$) e η tais que :

$$(3) \quad \rho \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n, t) + \eta(\sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}, t) \\ \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{y}, \dots, \bar{x}_n, t) + \eta(\bar{y} + \sum_{i \neq 2} \pm \bar{x}_i^2, \bar{y}, t) \\ \sum_{i \neq 2} \pm 2x_i \xi_i(x_1, y, \dots, x_n, t) + \eta(ty + \sum_{i \neq 2} \pm x_i^2, y, t) \end{bmatrix}$$

Logo, o resultado segue, observando diretamente dos cálculos que os campos são quase-homogêneos dos tipos requeridos.

Prova da Proposição (3.3.4)

Para cada $t_0 \in J$, seja G o levantamento da família g_t , $t \in I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Para provar a φ -trivialidade topológica de G , o método, como usual, é o de encontrar um trigerme de campo na fonte e um germe de campo na meta do levantamento $\tilde{G}$ da família (g_t, φ) , contínuos e integráveis, realizando a C^0 - φ -trivialização.

Para tanto, consideremos a equação obtida de (3) do lema anterior, dividindo todos os seus campos pelo controle ρ :

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i (\bar{\xi}_i / \rho) + \eta / \rho \\ \sum_{i \neq 2} \pm 2\bar{x}_i (\bar{\xi}_i / \rho) + \eta / \rho \\ \sum_{i \neq 2} \pm 2x_i (\xi_i / \rho) + \eta / \rho \end{bmatrix}$$

Sejam agora o trigerme de campo na fonte :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \bar{\bar{v}} \\ \bar{v} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i \neq 2} (-\bar{\bar{\xi}}_i / \rho) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial}{\partial t}) \\ (\sum_{i \neq 2} (-\bar{\xi}_i / \rho) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial}{\partial t}) \\ (\sum_{i \neq 2} (-\xi_i / \rho) \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial t}) \end{bmatrix} \text{ em } (\tilde{G}^{-1}(0 \times 0 \times I))^c \\ \\ \begin{bmatrix} \bar{\bar{v}} \\ \bar{v} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0, \frac{\partial}{\partial t}) \\ (0, \frac{\partial}{\partial t}) \\ (0, \frac{\partial}{\partial t}) \end{bmatrix} \text{ em } \tilde{G}^{-1}(0 \times 0 \times I) \end{array} \right.$$

e o germe de campo na meta :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta(u, v, t) = ((\eta(u, v, t) / \rho(u, v)) \frac{\partial}{\partial u}, 0, \frac{\partial}{\partial t}) \text{ se } (u, v) \neq (0, 0) \\ \zeta(0, 0, t) = (0, 0, \frac{\partial}{\partial t}) \end{array} \right.$$

Como $\eta(u, v, t)$ é homogêneo de grau 3, e $\rho(u, v) = u^2 + v^2$ é de grau 2, segue que

$$|| \eta(u, v, t) / \rho(u, v) || \leq c. || (u, v) ||$$

e, portanto, ζ é contínuo e integrável ([22]).

Quando as formas quadráticas da expressão do trigerme g_t são definidas positivas ou negativas, o controle $\rho(u, v) = u^2 + v^2$ satisfaz à condição de Lojasiewicz $\rho(u, v) \geq c.(y^2 + x_1^4 + \dots + x_n^4)$

para alguma constante $c > 0$ ([23]). A quase-homogeneidade de $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_1$ e ξ_1 (conforme o Lema (3.3.5)) garante a integrabilidade do campo da fonte (5) acima ([12], [23]).

Como os campos (5) e (6) são integráveis, a φ -trivialidade da família g_t é obtida.

Quando alguma forma quadrática do trigerme g_t tem índice distinto de zero e de $n-1$, é necessário modificar o trigerme de campo na fonte, em uma vizinhança de $\tilde{G}^{-1}(0 \times 0 \times I)$, $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. De modo análogo a [12]:

Temos que $\tilde{G}^{-1}(0 \times 0 \times I) \cap \Sigma\tilde{G} = 0 \times I$. Portanto, $X = \tilde{G}^{-1}(0 \times 0 \times I) - (0 \times I)$ é uma variedade diferenciável, e $\tilde{G}$ é uma submersão em uma vizinhança T_X de X , no complementar de $0 \times I$. Agora, $\tilde{G}$ é quase-homogêneo de tipo $(1, 2, 1, \dots, 1; 2)$. Em particular, X é invariante para a ação de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}^n \times I$, definida pelos pesos acima.

Podemos escolher T_X como sendo uma vizinhança tubular $\mathbb{R}_+$ -invariante de X no complementar de $0 \times I$; e a projeção $\pi_x : T_X \rightarrow X$ equivariante com relação a ação de $\mathbb{R}_+$ considerada.

Diminuindo T_X , se necessário, podemos também supor que a aplicação

$$(\tilde{G}, \pi_x) : T_X \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I) \times X$$

é um mergulho. Logo, existe um único trigerme de campo $(\bar{\nu}_x, \bar{\nu}_x, \nu_x)$

que é levado por $(\tilde{G}, \pi_x)$ ao campo $(\zeta, 0)$. Como $(\zeta, 0)$ é integrável, este campo também é integrável em cada conjunto compacto de T_X .

Usando uma partição da unidade $\{\phi, 1 - \phi\}$, $\mathbb{R}_+$ -invariante, subordinada à cobertura aberta $\{T_X, X^c\}$, definimos a partir dos campos $(\bar{\nu}, \bar{\nu}, \nu)$ e $(\bar{\nu}_x, \bar{\nu}_x, \nu_x)$, o campo :

$$V = \begin{cases} (\bar{\xi}, \bar{\xi}, \xi) = (1 - \phi) \cdot (\bar{\nu}, \bar{\nu}, \nu) + \phi \cdot (\bar{\nu}_x, \bar{\nu}_x, \nu_x), \text{ em } (0 \times I)^c \\ \bar{\xi}(0, t) = \bar{\xi}(0, t) = \xi(0, t) = (0, \frac{\partial}{\partial t}), t \in I. \end{cases}$$

É claro desta construção que

$$d\tilde{G} \circ V = \zeta \circ \tilde{G}.$$

Além disso, V é claramente $\mathbb{R}_+$ -invariante, e portanto, integrável ([12]).

Logo, integrando os campos V e ζ , obtemos homeomorfismos que realizam a C^0 - φ -trivialidade topológica.

Capítulo IV

Teoremas de Genericidade

Neste capítulo, nosso objetivo principal é mostrar que a evolução das singularidades de uma aplicação de uma variedade N no plano, pode ser realizada preservando uma folheação prefixada em N , definida por uma função de Morse $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}$. Este é o conteúdo do Teorema (4.3.2), do §3, sobre caminhos φ - adequados.

Nos parágrafos 1 e 2 são discutidos os pré-requisitos para a prova deste teorema. Mais precisamente, no §1, apresentamos os resultados de [6] e [11] sobre estabilidade de caminhos com relação à $\mathcal{A}$ -equivalência; no §2, consideramos o conceito auxiliar de caminhos $\tilde{\mathcal{A}}$ -adequados, mostrando no Teorema (4.2.11) que o conjunto $\mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{A}}}$ de tais caminhos é um subconjunto aberto e denso de $C^\infty(N \times [0,1], \mathbb{R}^2)$.

§1. Estabilidade de caminhos

Sejam N e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ , e seja $C^\infty(N, P)$ o conjunto de todas as aplicações diferenciáveis de classe C^∞ de N em P . No que segue, estaremos considerando $C^\infty(N, P)$ mu-

nido da topologia C^∞ de Whitney.

(4.1.1) Definição

Duas aplicações $f, g \in C^\infty(N, P)$ são *equivalentes* se existem difeomorfismos $h : N \longrightarrow N$ e $k : P \longrightarrow P$ tais que o seguinte diagrama seja comutativo :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & P \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ N & \xrightarrow{g} & P \end{array} .$$

(4.1.2) Definição

Uma aplicação $f \in C^\infty(N, P)$ é *estável* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f em $C^\infty(N, P)$ tal que qualquer $g \in \mathcal{V}_f$ é equivalente a f .

Um problema importante na Teoria de Estabilidade é o estudo do comportamento de uma deformação de uma aplicação estável f em outra aplicação estável g , ao longo de um caminho C^∞ , $F : N \times \mathbb{R} \longrightarrow P$, tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in N$.

O objetivo é determinar caminhos para os quais a estabili-

dade falha no máximo em um conjunto finito de valores do parâmetro, no intervalo $[0,1]$.

Para um caminho $F \in C^\infty(N \times \mathbb{R}, P)$ em $C^\infty(N, P)$, F_t denotará a aplicação de N em P , definida por $F_t(x) = F(x, t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(4.1.3) Definição

Um *ponto de bifurcação* de F é um número $t \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $t' \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ com $F_{t'}$ não equivalente a F_t .

O conjunto de tais pontos será denotado por $\text{Bif}(F)$.

Obviamente, F_t não é estável quando t é um ponto de bifurcação de F .

Nessa linha de idéias, o que se procura é determinar um subconjunto aberto e denso $\mathcal{G}$ de $C^\infty(N \times \mathbb{R}, P)$ tal que se $F \in \mathcal{G}$, é possível descrever a estrutura das aplicações F_t sempre que t esteja perto de um ponto de bifurcação de F ; mais ainda, que esta estrutura se mantenha quando tomamos $F' \in \mathcal{G}$ suficientemente próximo de F .

Uma noção adequada de "estabilidade de bifurcações" de um caminho, é a noção de π -estabilidade, que definiremos a seguir.

Sejam $\pi : N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_2 : P \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ as projeções sobre o segundo fator.

(4.1.4) Definição

Dois caminhos $F, G \in C^\infty(N \times \mathbb{R}, P)$ são π -equivalentes se existem difeomorfismos $h : N \times \mathbb{R} \longrightarrow N \times \mathbb{R}$, $k : P \times \mathbb{R} \longrightarrow P \times \mathbb{R}$ e $\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que o seguinte diagrama comute :

$$\begin{array}{ccccc} N \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(F, \pi)} & P \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\ N \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(G, \pi)} & P \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R} \end{array} .$$

Evidentemente, se F e G são π -equivalentes então F_t e $G_{\ell(t)}$ são equivalentes, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais ainda, o difeomorfismo ℓ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos de bifurcação de F e os de G .

(4.1.5) Definição

Um caminho $F \in C^\infty(N \times \mathbb{R}, P)$ é π -estável se existe uma vizinhança $\mathcal{V}_F$ de F em $C^\infty(N \times \mathbb{R}, P)$ tal que qualquer $G \in \mathcal{V}_F$ é π -equivalente a F .

(4.1.6) Quando N é uma variedade compacta de dimensão $n \geq 2$, e $P = \mathbb{R}$ ou $P = \mathbb{R}^2$, o conjunto dos caminhos π -estáveis constitui um conjunto aberto e denso $\mathcal{G}$ em $C^\infty(N \times [0,1], P)$. Além disto, as bifurcações que ocorrem são classificadas. Quando $P = \mathbb{R}$, este resultado é dado pelo Teorema 8.12 de Looijenga [11]. Quando $P = \mathbb{R}^2$, isto é uma consequência do Teorema (4.4), Capítulo IV, em Egúsquiza [6], e do Corolário 4.7, Capítulo 4 em Mata-Lorenzo [14]. Em ambos os casos, para $\forall F \in \mathcal{G}$, $\text{Bif}(F)$ é finito, e para $\forall t \in [0,1] - \text{Bif}(F)$, F_t é estável. Mais ainda, quando $t \in \text{Bif}(F)$, as bifurcações a nível de germes e de multigerms são dos seguintes tipos :

(i) $P = \mathbb{R}$

(a) *Germes*

Além das singularidades de Morse, pode ocorrer uma (única) singularidade de codimensão 1, que em termos de coordenadas locais $(x, x_2, \dots, x_n)$ se expressa por $x^3 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2$.

(b) *Multigerms*

Existência de dois pontos críticos de mesma imagem.

(ii) $P = \mathbb{R}^2$

(a) *Germes*

Além das singularidades estáveis de dobra e cúspide, pode ocorrer uma (única) singularidade de codimensão 1 : "lips", "beak to beak" ou "rabo de andorinha".

(b) *Multigerms*

Além da interseção transversal de duas dobras (situação estável) , pode ocorrer uma das seguintes situações : interseção transversal de dobra com cúspide, interseção não transversal de duas dobras, ou interseção de três dobras, duas a duas transversais.

Para as formas normais deste caso, ver [6].

§2. Caminhos $\tilde{\mathcal{A}}$ -adequados

Sejam N, P, Q variedades C^∞ , e seja $\varphi : N \rightarrow Q$ uma aplicação C^∞ fixada.

(4.2.1) Definição

Duas aplicações $f, g \in C^\infty(N, P)$ são φ - *equivalentes* se existem difeomorfismos $h : N \rightarrow N$, $k : P \times Q \rightarrow P \times Q$ e $\ell : Q \rightarrow Q$ tais que o seguinte diagrama seja comutativo :

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{(f, \varphi)} & P \times Q & \xrightarrow{\pi_2} & Q \\
 h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 N & \xrightarrow{(g, \varphi)} & P \times Q & \xrightarrow{\pi_2} & Q
 \end{array}$$

A definição de φ - estabilidade é a usual dentro da teoria :

(4.2.2) Definição

Uma aplicação $f \in C^\infty(N, P)$ é φ - estável se existe uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f em $C^\infty(N, P)$ tal que qualquer $g \in \mathcal{V}_f$ é φ - equivalente a f .

Considerando a variação da aplicação φ no diagrama da Definição (4.2.1), obtemos uma relação de equivalência no espaço $C^\infty(N, P \times Q)$, o qual pode ser identificado com $C^\infty(N, P) \times C^\infty(N, Q)$, via aplicações componentes.

(4.2.3) Definição

Duas aplicações $(f, \varphi), (g, \psi) \in C^\infty(N, P \times Q)$ são $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalentes se existem difeomorfismos $h : N \rightarrow N$, $k : P \times Q \rightarrow P \times Q$ e $\ell : Q \rightarrow Q$ tais que o seguinte diagrama seja comutativo :

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{(f, \varphi)} & P \times Q & \xrightarrow{\pi_2} & Q \\
 h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \ell \\
 N & \xrightarrow{(g, \psi)} & P \times Q & \xrightarrow{\pi_2} & Q
 \end{array}$$

O correspondente conceito de estabilidade é dado pela

(4.2.4) Definição

Uma aplicação $(f, \varphi) \in C^\infty(N, P \times Q)$ é $\mathcal{A}^\sim$ -estável se existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{(f, \varphi)}$ de (f, φ) em $C^\infty(N, P \times Q)$ tal que qualquer $(g, \psi) \in \mathcal{V}_{(f, \varphi)}$ é $\mathcal{A}^\sim$ -equivalente a (f, φ) .

Observemos que se (f, φ) é $\mathcal{A}^\sim$ -estável então φ é estável.

A φ - estabilidade e a $\mathcal{A}^\sim$ -estabilidade são estudadas em Mendes [18]. Neste trabalho, Mendes mostra os dois resultados seguintes:

(4.2.5) Proposição

Seja N uma variedade compacta e $\varphi : N \longrightarrow Q$ uma aplicação estável. Então, $f : N \longrightarrow P$ é φ - estável se, e somente se, o par $(f, \varphi) : N \longrightarrow P \times Q$ é $\mathcal{A}^\sim$ -estável.

No caso mais específico em que N é uma variedade compacta de dimensão $n \geq 2$, e $P = Q = \mathbb{R}$, um dos resultados centrais de [18] caracteriza as aplicações $\mathcal{A}^\sim$ -estáveis :

(4.2.6) Teorema

Seja $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$ estável. $(f, \varphi) : N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é $\mathcal{A}^\sim$ -estável se,

e somente se :

(i) (f, φ) admite como pontos singulares somente dobras transversas ou tangentes e cúspides transversas.

(ii) $(f, \varphi)^{-1}(y_0, z_0) \cap \Sigma(f, \varphi)$ é vazio, um ponto ou duas dobras transversas.

(iii) Imagens de curvas de dobras interceptam-se transversalmente.

Para o objetivo principal deste capítulo, que é a caracterização dos caminhos genéricos com relação à φ - equivalência, vamos primeiro estudar deformações genéricas de aplicações $\mathcal{A}$ -estáveis.

Consideremos a identificação :

$$C^\infty(N \times \mathbb{R}, P \times Q) \cong C^\infty(N \times \mathbb{R}, P) \times C^\infty(N \times \mathbb{R}, Q).$$

Com esta identificação, um caminho $\Lambda \in C^\infty(N \times \mathbb{R}, P \times Q)$ pode ser escrito na forma :

$$\Lambda(x, t) = (F(x, t), \Phi(x, t)) ,$$

sendo F e Φ caminhos em $C^\infty(N, P)$ e $C^\infty(N, Q)$, respectivamente.

Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\Lambda_t = (F_t, \Phi_t)$.

(4.2.7) Definição

Um ponto de $\mathcal{A}$ -bifurcação de $\Lambda = (F, \Phi)$ é um número $t \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $t' \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ com $\Lambda_{t'}$ não $\mathcal{A}$ -equivalente a Λ_t .

O conjunto destes pontos será denotado por $\text{Bif}_{\mathcal{A}}(\Lambda)$.

É importante observar que todo ponto de bifurcação de Φ é ponto de $\mathcal{A}$ -bifurcação de $\Lambda = (F, \Phi)$.

(4.2.8) Definição

Dois caminhos $(F, \Phi), (G, \Psi) \in C^\infty(N \times \mathbb{R}, P \times Q)$ são π - $\mathcal{A}$ -equivalentes se existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 N \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(F, \Phi, \pi)} & P \times Q \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_1} & Q \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R} \\
 h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \ell & & \downarrow s \\
 N \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(G, \Psi, \pi)} & P \times Q \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_1} & Q \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R} ,
 \end{array}$$

onde h, k, ℓ e s são difeomorfismos; π, π_1 e π_2 são as projeções canônicas.

Claramente, se (F, Φ) e (G, Ψ) são $\pi\text{-}\mathcal{A}^\sim$ -equivalentes então Φ e Ψ são π -equivalentes.

A definição de $\pi\text{-}\mathcal{A}^\sim$ -estabilidade, como veremos, não terá para nós papel correspondente ao da π -estabilidade do parágrafo anterior, na caracterização de um conjunto denso de caminhos; porém, vamos enunciá-la para uma discussão mais completa.

(4.2.9) Definição

Um caminho $(F, \Phi) \in C^\infty(N \times \mathbb{R}, P \times Q)$ é $\pi\text{-}\mathcal{A}^\sim$ -estável se existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{(F, \Phi)}$ de (F, Φ) em $C^\infty(N \times \mathbb{R}, P \times Q)$ tal que qualquer $(G, \Psi) \in \mathcal{V}_{(F, \Phi)}$ é $\pi\text{-}\mathcal{A}^\sim$ -equivalente a (F, Φ) .

É claro que se (F, Φ) é $\pi\text{-}\mathcal{A}^\sim$ -estável então Φ é π -estável.

No que segue, estaremos considerando N uma variedade compacta de dimensão $n \geq 2$ e $P = Q = \mathbb{R}$.

Vamos ampliar o conjunto dos caminhos $\pi\text{-}\mathcal{A}^\sim$ -estáveis para obtermos um conjunto aberto e denso de caminhos (F, Φ) em $C^\infty(N \times [0, 1], \mathbb{R}^2)$, que apresentem simultaneamente boas propriedades com relação à projeção $(F, \Phi) \longrightarrow \Phi$ e sejam genéricos com relação à $\mathcal{A}^\sim$ -equivalência. Este conjunto é constituído pelos caminhos

$\mathcal{A}^\sim$ -adequados, definidos abaixo :

(4.2.10) Definição

Um caminho $(F, \Phi) \in C^\infty(N \times [0, 1], \mathbb{R}^2)$ é $\mathcal{A}^\sim$ -adequado se satisfaz às seguintes condições :

A_0) (F_0, Φ_0) e (F_1, Φ_1) são $\mathcal{A}^\sim$ -estáveis.

A_1) Φ é um caminho π -estável.

A_2) O conjunto $B = ((0, 1) - \text{Bif}(\Phi)) \cap \text{Bif}_{\mathcal{A}^\sim}(F, \Phi)$ é finito, fora do qual (F_t, Φ_t) é $\mathcal{A}^\sim$ -estável. Em B, ocorrem $\mathcal{A}^\sim$ -bifurcações a nível de germes e de multigerms, dos tipos :

a) *Germes*

Pode aparecer, além das singularidades de dobras transversas ou tangentes e cúspides transversas, uma (única) singularidade de codimensão 1 : cúspide tangente; "lips", "beak to beak" e "rabo de andorinha" transversas.

b) *Multigerms*

Pode ocorrer, além da interseção transversal de duas dobras transversas, uma (única) das seguintes situações : inter-

seção de uma dobra transversa e uma dobra tangente, interseção de duas dobras transversas com contato quadrático, interseção transversal de uma dobra transversa e uma cúspide transversa, interseção de três dobras transversas duas a duas transversais.

A seguir, descreveremos as formas normais e as correspondentes evoluções destas $\mathcal{A}$ -bifurcações :

(I) $t \in \text{Bif}(\Phi)$

Neste caso, a imagem do conjunto singular do par (F_t, Φ_t) nos casos (a) $(\Phi_t \sim x^3 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2)$ e (b) (dois pontos críticos de Φ_t de mesma imagem) admite, respectivamente, as seguintes configurações locais :

Figura 1

Evolução de (a)

Figura 2

Evolução de (b)

$$(II) \ t \in B = ((0,1) - \text{Bif}(\Phi)) \cap \text{Bif}_{\mathcal{A}}^{\sim}(F, \Phi)$$

a) *Germes*

a_1) *cúspide tangente*

$$(x, y, x_3, \dots, x_n, t) \mapsto (x + ty, y^3 + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2),$$

com $\lambda'(0) = 0$

Figura 3

a_2) *"lips" transversa*

$$(x, y, x_3, \dots, x_n, t) \mapsto (x^3 + xy^2 + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 + tx, y)$$

Figura 4

a_3) "beak to beak" transversa

$$(x, y, x_3, \dots, x_n, t) \mapsto (x^3 - xy^2 + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 + tx, y)$$

Figura 5

a_4) rabo de andorinha transversa

$$(x, y, x_3, \dots, x_n, t) \mapsto (x^4 + xy + x^2y + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 + tx^2, y)$$

Figura 6

$$(1) F_0 = f, \quad F_1 = g, \quad \Phi_0 = \varphi \quad \text{e} \quad \Phi_1 = \psi,$$

(2) Φ é π -estável,

(3) F é φ -adequado.

Prova

Pelo Teorema (4.2.11), existe um caminho (G, Φ) $\mathcal{A}$ -adequado ligando (f, φ) a (g, ψ) .

A projeção deste caminho no 2º fator, nos fornece o Φ desejado.

Por outro lado, a 1ª. projeção G é um caminho tal que $G_0 = f$ e $G_1 = g$. Por hipótese, f e g são φ -estáveis. Logo, pelo Teorema (4.3.2), existe um caminho F próximo de G , φ -adequado unindo f a g .

Para obter o resultado, basta tomar o caminho justaposto $F_\varphi \vee \Phi_g$ onde $F_\varphi = (F, \varphi)$ e $\Phi_g = (g, \Phi)$.

É claro que o caminho $\Phi_f \vee F_\psi$ também satisfaz as condições do teorema.

Bibliografia

- [1] BONNECAZE, C. e DUFOUR, J.P. *Tomography and p-Stability*, (preprint).
- [2] DAMON, J. The Unfolding and Determinacy Theorems for Subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$, *Memoirs A.M.S.* 50, n° 306, (1984).
- [3] DAMON, J. *Topological Triviality and Versality for Subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$* (preprint).
- [4] DUFOUR, J.P. *Déploiements de Cascades D'Applications Différentiables*, These, Université des Sciences et Techniques du Languedoc (1975).
- [5] DU PLESSIS, A. On the Determinacy of Smooth Map - Germs, *Inv. Math.* 58, 107-160 (1980).
- [6] EGÚSQUIZA, E.A.C. *Bifurcações de Aplicações de Whitney*, Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro (1978).
- [7] FAVARO, L.A. e MENDES, C.M. Global Stability for Diagrams of Differentiable Applications, *Ann. Inst. Fourier* 36, 1, 133-153 (1986).
- [8] GIBSON, C.G. *Singular Points of Smooth Mappings*, Research Notes in Mathematics, vol.25, Pitman (1979).
- [9] GOLUBITSKY, M. e GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*, G.T. in *Math.* 14, Springer-Verlag (1973).
- [10] LEME, B.T. *Aplicações Diferenciáveis em Variedades com Estratificações de Tipo Finito*, Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos (1978).

- [11] LOOIJENGA, E. *Structural Stability of Families of $\mathcal{C}^\infty$ -Functions and the Canonical Stratification of $\mathcal{C}^\infty(N)$* , IHES (1974).
- [12] LOOIJENGA, E. *On the Semi-universal Deformation of a Simple-Elliptic Hypersurface Singularity*, *Topology* 16, 257-262 (1977).
- [13] MARTINET, J. *Singularities of Smooth Functions and Maps*, London Math. Soc. Lecture Note Series 58 (1982).
- [14] MATA-LORENZO, L.E. *The Stein Factorization for Stable Maps and π -Stable Arcs of Maps from 3-Manifolds into the Plane*, PhD Thesis, Brandeis University (1986).
- [15] MATHER, J.N. *Stability of C^∞ Mappings, III : Finitely Determined Map-Germs*, *Publ. Math. IHES* 35, 127-156 (1969).
- [16] MATHER, J.N. *Stability of C^∞ Mappings, IV : Classification of Stable Germs by $\mathbb{R}$ -Algebras*, *Publ. Math. IHES* 37, 223-248 (1970).
- [17] MENDES, C.M. et alli. *Alguns Invariantes Diferenciáveis*, *Métrica*, IBILCE-UNESP, 8 (1980).
- [18] MENDES, C.M. *ψ -Estabilidade*, Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos (1981).
- [19] MORIN, B. *Formes Canoniques des Singularités d'une Application Différentiable* *C.R.A.Sc. Paris* 260, 6503-6506 (1965).
- [20] NAKAI, I. *Structural Stability of Diagrams of Smooth Mappings 1 : C^∞ stability and I equivalence relations* (preprint).

- [21] RIEGER, J.H. *Apparent Contours and Their Singularities*, PhD. Thesis, University of London (1988).
- [22] RUAS, M.A.S. On the Degree of C^ℓ -Determinacy, *Math. Scand.* 59, 59-70 (1986).
- [23] SAIA, M.J. C^ℓ -Determinação Finita de Germes Quase-Homogêneos, (em preparação).
- [24] SOTOMAYOR, J. *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, III Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA (1976).
- [25] WALL, C.T.C. Finite Determinacy of Smooth Map-Germs, *Bull. London Math. Soc.*, 13, 481-539 (1981).
- [26] WAN, Y.H. Morse Theory for Two Functions, *Topology* 14, n° 3, 217-228 (1975).
- [27] WASSERMANN, G. Stability of Unfoldings in Space and Time, *Acta Math.* 135, 57-128 (1975).