UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Comportamento Assintótico de Equações e
Sistemas Hiperbólicos: Soluções
Periódicas Forçadas e
Convergência para Equilíbrio**

Suely do Carmos Siqueira Ceron

São Carlos - SP

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE EQUAÇÕES E
SISTEMAS HIPERBÓLICOS: SOLUÇÕES
PERIÓDICAS FORÇADAS E
CONVERGÊNCIA PARA EQUILÍBRIO

SUELY DO CARMO SIQUEIRA CERON

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Doutor em Ciências (Matemáticas).

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

SÃO CARLOS - SP.

1984

Aos meus pais_
Ao Ceron e as
minhas filhas
Daniela, Lucia_
na e Lia.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Orlando Francisco Lopes gostaria de ser ca paz de expressar a minha gratidão pela orientação, amizade, receptividade, acolhimento, estímulo e confiança.

Ao professor Dr. Hermano de Souza Ribeiro, pela ajuda e pela prontidão com que sempre nos atendeu.

Ao professor Dr. Djairo Guedes de Figueiredo pelo primeiro estímulo para que todo esse trabalho fosse realizado.

Aos professores e colegas do ICM - USP, IMECC - UNICAMP e DACG - SJRP - UNESP, pelo incentivo e apoio recebido.

ABSTRACT

In this work we study the existence of periodic solutions of periodically forced hyperbolic equations and systems as well as convergence to equilibrium in the autonomous case.

For proving the existence of periodic solutions we use an asymptotic fixed point theorem for α -contractions and the analysis of the convergence to equilibrium is made via the invariance principle and some criteria for precompactness of bounded orbits.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 0 - PRELIMINARES	1
0.1 - Alguns resultados sobre a teoria de semi-grupos fortemente contínuos definidos num espaço de Banach	1
0.2 - Alguns resultados sobre equações de evolução em espaço de Banach	2
0.3 - Teorema de Mazur	9
CAPÍTULO I - EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS FORÇADAS. .	10
I.1 - Introdução	10
I.2 - Um problema em linha de transmissões com perdas	14
I.3 - Estabilidade da oscilação forçada	38
I.4 - Equações hiperbólicas abstratas	40
CAPÍTULO II - CONVERGÊNCIA PARA O EQUILÍBRIO	53
II.1 - Introdução	53
II.2 - Dois resultados de pré-compacidade de órbitas limitadas	53
II.3 - Um novo espaço de fase	56
II.4 - Princípio da invariância	67
II.5 - Aplicação	69
II.6 - Uso da topologia fraca	76
BIBLIOGRAFIA	83

INTRODUÇÃO

No estudo do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais ordinárias desfrutamos do seguinte fato importante: todo conjunto limitado no $\mathbb{R}^n$ tem fecho compacto; isso nos permite falar em conjunto limite de soluções limitadas. Além disso, dispomos também do teorema do ponto fixo de Brouwer (e suas reformulações) que diz que todo conjunto convexo compacto do $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo. Esses dois fatos tem sido bastante usados para o estudo da convergência para um equilíbrio (no caso autônomo) e existência de soluções periódicas (no caso de equações periódicas).

Neste trabalho estudamos esses dois problemas para as equações e sistemas hiperbólicos e as dificuldades essenciais são que, num espaço de dimensão infinita, a bola unitária fechada não é compacta nem tem a propriedade do ponto fixo. No caso de sistemas parabólicos isso não causa maiores dificuldades porque o operador solução é compacto para t positivo, propriedade essa que não vale para equações hiperbólicas pois para estas o operador solução é um homeomorfismo (e, portanto, não compacto) e, portanto novos métodos são necessários.

No Capítulo 0 apresentamos um breve resumo das noções e dos resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo I enunciamos um teorema de ponto fixo assintótico para α -contrações e introduzimos uma classe de α -contrações que é ligeiramente maior que a habitual; essa pequena modificação é crucial para se estudar a equação de onda com atrito não linear. Em seguida demonstramos um resultado abstrato sobre

existência de soluções periódicas e fazemos algumas aplicações. O problema da linha de transmissão foi estudado em [8] para o caso sem perdas ($R = 0 = G$) transformando-o numa equação diferencial funcional do tipo neutro; no caso de haver perdas essa redução é impossível. O teorema de existência de solução periódica para a equação de onda melhora substancialmente um teorema de Nakao [11]; no caso da equação da viga desconhecemos qualquer resultado de existência de solução periódica.

No Capítulo II atacamos o problema de convergência para um equilíbrio no caso de equações autônomas. O caso da linha de transmissão (equação II.5.1) foi tratado por Brayton e Miranker [4] e nossa contribuição para esse problema se resume nos seguintes itens: (i) especificamos claramente o espaço de fase e mostramos que o problema de valores iniciais é bem posto; (ii) mostramos que a pré-compacidade de órbitas limitadas é um fato geral e que não depende da existência de funcionais de Liapunov; (iii) permitimos que haja uma curva de equilíbrio. A convergência para o equilíbrio no caso da equação de onda foi tratada por Ball [2] no caso de atrito linear na velocidade; neste trabalho nós removemos essa hipótese.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

0.1. ALGUNS RESULTADOS SOBRE A TEORIA DE SEMIGRUPOS FORTEMENTE CONTÍNUOS DEFINIDOS NUM ESPAÇO DE BANACH.

DEFINIÇÃO 0.1.1. Seja $(X, \| \cdot \|)$ um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos de X em X é chamada um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos sobre X se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $T(0) = I$
- (ii) $T(t + s) = T(t) T(s)$, $\forall t, s \geq 0$
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)u = u$, $\forall u \in X$.

DEFINIÇÃO 0.1.2. O gerador infinitesimal A de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos num espaço de Banach $(X, \| \cdot \|)$ é definido por

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t}$$

quando o limite existe. O domínio de definição de A denotado por $D(A)$, é o conjunto de todos os elementos $u \in X$ para os quais o limite existe.

É claro que A é um operador linear definido em $D(A)$ com valores em X e que $D(A)$ é um subespaço vetorial de X .

TEOREMA 0.1.3. [13]. Seja $\{T(t), t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos definidos num espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ com gerador infinitesimal A . Então

(i) existem constantes reais $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)u\| \leq Me^{wt}\|u\|$, $\forall u \in X$, $t \geq 0$;

(ii) para todo $u \in X$, $T(t)u$ é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^+$ em X ;

(iii) $D(A)$ é denso em X ;

(iv) A é um operador linear fechado;

(v) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)$ é denso em X , onde $D(A^n)$ é o domínio de A^n ;

(vi) se $u \in D(A)$, então $T(t)u \in D(A)$ e $\frac{d}{dt} T(t)u = AT(t)u = T(t)A(u)$.

0.2. ALGUNS RESULTADOS SOBRE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO EM ESPAÇO DE BANACH.

Equação linear não homogênea.

Consideremos o problema de valor inicial não homogêneo em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$

$$0.2.1. \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(t) & , \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre X e f uma função contínua de $[0, +\infty)$ em X .

DEFINIÇÃO 0.2.2. Uma função u definida para todo $t \geq 0$ com valores em X , é solução forte de 0.2.1 se $u(t)$ é continuamente diferenciável para $t \geq 0$, $u(t) \in D(A)$, $t \geq 0$ e 0.2.1 é satisfeita.

TEOREMA 0.2.3. [13]. Sejam A e f como na definição anterior. Então

(i) a solução de 0.2.1 quando existe, é única e é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \\ &= T(t)u_0 + \int_0^t T(s)f(t-s)ds, \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

(ii) o problema 0.2.1 possui uma solução forte $u(t)$, para todo $u_0 \in D(A)$ se e somente se a função definida para $t \geq 0$ e com valores em X

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t)f(t-s)ds$$

é diferenciável em $[0, +\infty)$;

(iii) se $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ é de classe C^1 e $u_0 \in D(A)$, então $u(t) \in D(A)$, $u(t)$ é de classe C^1 e

$$\dot{u}(t) = T(t)Au_0 + T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s) \frac{df(s)}{ds} ds$$

e

$$Au(t) = \dot{u}(t) - f(t)$$

DEFINIÇÃO 0.2.4. Consideremos A e f como na definição 0.2.2 e $u_0 \in X$; a função

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$$

é chamada solução "mild" de 0.2.1. Essa função é solução da equação original no seguinte sentido: se $\alpha \in D(A^*)$, então $\langle \alpha, u(t) \rangle$ é derivável e

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha, u(t) \rangle = \langle A^* \alpha, u(t) \rangle + \langle \alpha, f(t) \rangle.$$

Equação não linear

Consideremos o problema de valor inicial em um espaço de Banach $(X, \| \cdot \|)$

$$0.2.5 \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u) & , \quad t \geq 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos sobre X e f uma função de $[0, +\infty) \times X$ em X .

DEFINIÇÃO 0.2.6. Uma função $u(t)$ definida em $[t_0, t_0 + b)$ com valores em X é uma solução forte de 0.2.5 se $u(t)$ é continuamente diferenciável para $t \in [t_0, t_0 + b)$, $u(t) \in D(A)$ e 0.2.5 é satisfeita.

DEFINIÇÃO 0.2.7. Uma solução da equação integral

$$0.2.8. \quad u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, u(s))ds$$

é chamada uma solução "mild" do problema (0.2.5) onde A e f são como na definição 0.2.6.

TEOREMA 0.2.9. [9] e [13]. Seja $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ função contínua em (t, x) e lipschitziana com respeito a x em conjuntos limitados de $[0, +\infty) \times X$ e A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos em X ; então para todo $(t_0, u_0) \in [0, +\infty) \times X$ existe $b > 0$ e uma única solução da equação integral 0.2.8 definida em $[t_0, t_0 + b)$ com $u(t_0) = u_0$. Se f é Gataux derivável em relação a u , $f_u(t, u)v$ é linear em v e $\forall v$ fixo $f_u(t, u)v$ é contínua e $u_0 \in D(A)$ então a solução $u(t)$ é forte.

DEFINIÇÃO 0.2.10. Uma solução $\hat{u} : [0, \hat{b}) \rightarrow X$ é uma continuação da solução $u : [0, b) \rightarrow X$ se $\hat{b} > b$ e $\hat{x}(t) = x(t)$ para $t \in [0, b)$.

Uma solução que não tem continuação é chamada maximal e seu intervalo de definição é chamado intervalo maximal.

TEOREMA 0.2.11. Nas hipóteses do teorema 0.2.9, para todo $(t_0, u_0) \in [0, +\infty) \times X$ existe $a(t_0, u_0)$ (finito ou não) e uma única solução maximal de 0.2.8 definida em $[t_0, a(t_0, u_0))$; se $u(t; t_0, u_0)$ denota a solução que satisfaz $u(t_0, t_0, u_0) = u_0$ definida no conjunto $E = \{(t, t_0, u_0) : t_0 \leq t < a(t_0, u_0)\}$, então E é um conjunto aberto e $u(t, t_0, u_0)$ é uma função contínua de seus argumentos. Além disso, se $u(t, t_0, u_0)$ é uma solução maximal com $a(t_0, u_0) < \infty$, então $\lim_{t \rightarrow a(t_0, u_0)} |u(t; t_0, u_0)| = +\infty$.

Em particular, se $u(t, t_0, u_0)$ é solução maximal limitada então $a(t_0, u_0) = +\infty$.

OBSERVAÇÃO: Note-se que estamos supondo f lipschitziana em conjuntos limitados e isso implica que f leva conjuntos limitados de $[0, +\infty) \times X$ em conjuntos limitados de X .

DEFINIÇÃO 0.2.12. [17]. Suponhamos A e f como no teorema 0.2.9. Se $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ dizemos que a solução nula de

$$0.2.13 \quad \dot{u}(t) = Au + f(t, u) \quad , \quad t \geq 0$$

é

- (i) *uniformemente estável* (US) se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|u_0\| < \delta(\varepsilon)$, temos $\|u(t; t_0, u_0)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

- (ii) *uniformemente assintoticamente estável* (U.A.S) se ela é uniformemente estável e existe um número $\delta_0 > 0$ e uma função $T(\epsilon) > 0$, $\epsilon > 0$ tal que se $\|u_0\| < \delta_0$ então $\|u(t; t_0, u_0)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0 + T(\epsilon)$.
- (iii) *globalmente uniformemente assintoticamente estável* (G.U.A.S) se ela é uniformemente estável e existe uma função $T(\epsilon, R)$ tal que $\|u(t; t_0, u_0)\| < \epsilon$ se $\|u_0\| < R$ e $t \geq t_0 + T(\epsilon, R)$.
- (iv) *exponencialmente globalmente uniformemente assintoticamente estável* (exp. G.U.A.S) se existe $\lambda > 0$ tal que $\|u(t; t_0, u_0)\| < K e^{-\lambda(t-t_0)} \|u_0\|$, $\forall u_0$, $\forall t \geq t_0$.

DEFINIÇÃO 0.2.14. Dizemos que a equação 0.2.13 é uniformemente finalmente limitada (U.U.B) (uniformly ultimately bounded) se existem uma constante R_0 e funções $a(R)$ e $T(R)$ tais que $\|u_0\| \leq R$ implica $\|u(t; t_0, u_0)\| \leq a(R)$ para $t \geq t_0$ e $\|u(t; t_0, u_0)\| \leq R_0$ para $t \geq T(R) + t_0$.

Equação autônoma

Consideremos a equação autônoma

$$0.2.15. \quad \dot{u}(t) = Au + f(u)$$

Nesse caso tomaremos $t_0 = 0$, $u(t, u_0)$ é solução e $u(0, u_0) = u_0$.

DEFINIÇÃO 0.2.16. Se $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, definimos

$\dot{V}(u_0) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(u(h, u_0)) - V(u_0)}{h}$. Dizemos ainda que V é uma

função de Liapunov de 0.2.15 se $\dot{V}(u_0) \leq 0$ para todo $u_0 \in X$.

DEFINIÇÃO 0.2.17. Um conjunto $M \subset X$ se diz invariante em relação a 0.2.15 se para todo $u_0 \in M$ existe solução "mild" $u(t)$ de 0.2.15 definida em $(-\infty, +\infty)$ com $u(0) = u_0$ e $u(t) \in M$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 0.2.18.

- (i) trajetória da solução, denotada $\tau^+(u_0)$ passando por $u_0 \in X$ é o conjunto em $\mathbb{R} \times X$ definido por

$$\tau^+(u_0) = \{(t, u(t; u_0)), t \in \mathbb{R}^+\}.$$

- (ii) órbita da solução, denotada $\gamma^+(u_0)$ passando por $u_0 \in X$ é a projeção em X definida por

$$\gamma^+(u_0) = \{u(t; u_0), t \in \mathbb{R}^+\}.$$

- (iii) um ponto $c \in X$ chama-se ponto crítico ou ponto de equilíbrio de 0.2.15 se $\gamma^+(c) = \{c\}$ isto é $u(t, c) = c \quad \forall t$.

- (iv) conjunto ω -limite de uma órbita da solução $u(t)$, com $u(0) = u_0$ denotado por $\omega(u_0)$, é o conjunto dos pontos $y \in X$ tais que existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ tal que $u(t_n) \rightarrow y$ quando $n \rightarrow +\infty$ ou equivalentemente

$$\omega(u_0) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\{u(t; u_0) \mid t \geq n\}}$$

TEOREMA 0.2.19. Se $\gamma^+(u_0)$ tem fecho compacto, então o conjunto $\omega(u_0)$ é não vazio, compacto, conexo, invariante e $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(u(t), \omega(u_0)) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: É feita como no caso de equações diferenciais ordinárias, ver [9].

0.3. TEOREMA DE MAZUR. [6]

DEFINIÇÃO 0.3.1. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $A \subset X$, o conjunto $\overline{\text{co}}(A)$ (closed convex hull) é a intersecção de todos os conjuntos convexos fechados que contêm A .

TEOREMA 0.3.2. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $A \subset X$, um conjunto compacto. Então $\overline{\text{co}}(A)$ é compacto.

CAPÍTULO I

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS FORÇADAS

I.1. INTRODUÇÃO

Consideremos a equação de evolução num espaço de Banach X

$$I.1.1. \quad \dot{u} = Au + f(t, u)$$

A e f como anteriormente; se $f(t + p, u) = f(t, u)$ para todo $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ e algum $p > 0$, é fácil ver que se $u(t)$ é solução "mild" de I.1.1 então $v(t) = u(t + p)$ também é; portanto, se valer unicidade para o problema de valor inicial (que é o caso nas hipóteses do teorema 0.2.9) e $u(p) = u(0)$, então $u(t + p) = u(t)$ e $u(t)$ é solução periódica de I.1.1.

Se $S : X \rightarrow X$ denotar a transformação contínua $S(u_0) = u(p, 0; u_0)$ (supondo todas as soluções definidas em $[0, p]$) vemos então que a existência de solução periódica de I.1.1 é equivalente à existência de ponto fixo de S .

Neste capítulo definimos α -contração, apresentamos uma nova classe de α -contrações, enunciamos um teorema de ponto fixo para α -contração e fazemos diversas aplicações à existência de soluções periódicas.

DEFINIÇÃO I.1.2. Se A é um subconjunto limitado de um espaço de Banach, define-se

$$\alpha(A) = \inf\{d > 0 \text{ tais que } A = \bigcup_{i=1}^n F_i \text{ com } \text{diâm } F_i < d\}.$$

DEFINIÇÃO I.1.3. Uma pseudo-métrica ρ em X é pré-compacta se toda sequência de X limitada em norma tem uma subsequência que é de Cauchy em relação a ρ .

LEMA I.1.4. Se ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta e $B \subset X$ é limitado na norma de X , então para todo $\varepsilon > 0$ existem $c_1, \dots, c_m$ tais que $B = \bigcup_{i=1}^m C_i$ e $\rho(x, y) < \varepsilon$ se $x, y \in C_i$.

DEMONSTRAÇÃO. É a mesma de que um conjunto com fecho compacto é totalmente limitado.

TEOREMA I.1.5. Seja $S : X \rightarrow X$ uma transformação satisfazendo: $\|S(x) - S(y)\| \leq q\|x - y\| + \rho(x, y)$, para todo x, y em X , onde ρ é uma pseudo-métrica pré-compacta. Então $\alpha(S(A)) \leq q\alpha(A)$ para todo $A \subset X$ limitado.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\alpha(A) = c$. Dado $\varepsilon > 0$ existem conjuntos $F_1, \dots, F_n$ tais que $A = \bigcup_{i=1}^n F_i$ e $\text{diam } F_i < c + \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$. Além disso, pelo lema anterior, $A = \bigcup_{i=1}^m C_i$ com $\rho(x, y) < \varepsilon$ se x, y pertencem a C_i . Então $A = \bigcup (F_i \cap C_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ e $S(A) = \bigcup S(F_i \cap C_j)$. Se $x, y \in F_i \cap C_j$ temos $\|S(x) - S(y)\| \leq q\|x - y\| + \rho(x, y) \leq q(c + \varepsilon) + \varepsilon$, donde concluímos que $\text{diam } S(F_i \cap C_j) \leq q(c + \varepsilon) + \varepsilon$, e portanto, $\alpha(S(A)) \leq q(c + \varepsilon) + \varepsilon$ o que prova o teorema.

OBSERVAÇÃO. Da demonstração fica claro que o teorema continua válido se a pseudo-métrica estiver definida somente numa bola de raio conveniente.

DEFINIÇÃO I.1.6. Uma transformação $S : X \rightarrow X$ é uma α -contração se existe $0 \leq q < 1$ tal que $\alpha(S(A)) \leq q\alpha(A)$, para todo subconjunto limitado A de X .

Uma classe bastante conhecida de α -contrações é a das transformações da forma $Q + U$ onde Q é uma contração e U é compacta (incidentalmente, esta classe está contida na dada pelo teorema I.1.5 acima pois se U é compacta a pseudo-métrica $\rho(x,y) = \|U(x) - U(y)\|$ é pré-compacta). Portanto o teorema exige uma classe bastante parecida com essa. Entretanto, essa pequena modificação será crucial numa das aplicações que faremos.

DEFINIÇÃO I.1.7. O raio espectral essencial $r_e(Q)$ de um operador linear limitado num espaço de Banach X é definido por: $r_e(Q) = \inf\{r > 0 \text{ tais que } \sigma(Q) \cap \{|\lambda| > r\} \text{ consiste de um número finito de autovalores cada um com multiplicidade finita}\}$.

TEOREMA I.1.8. [5], [7] e [12]. Se $S = Q + U$ onde U é compacta e Q é linear limitada com $r_e(Q) < 1$, então, a menos de uma mudança de norma para outra equivalente, S é uma α -contração.

DEFINIÇÃO I.1.9. Uma transformação $S : X \rightarrow X$ é U.U.B. se existem um número R_0 e funções $a(R)$ e $n_0(R)$ tais que $\|x\| < R$ acarreta $\|S^n(x)\| \leq a(R)$ para todo $n \geq 1$ e $\|S^n(x)\| \leq R_0$ se $n \geq n_0(R)$.

TEOREMA 1.1.10. [7]. Se $S : X \rightarrow X$ é contínua, U.U.B e α -contração, então S tem um ponto fixo (obviamente na bola de raio R_0).

Em [5] Darbo provou um teorema do ponto fixo para α -contração assumindo a existência de um conjunto convexo limitado fechado, o qual é levado nele mesmo por S ; nas aplicações o teorema I.1.11 é mais conveniente pois ele admite uma classe maior de funcionais de Liapunov e não apenas de funcionais convexos (como exigido para aplicar o teorema de Darbo).

TEOREMA I.1.11. Consideremos a equação I.1.1 e suponhamos satisfeitas as seguintes condições (além daquelas do teorema de existência e unicidade 0.2.9).

- (i) $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é compacta e p -periódica em t , $p > 0$;
- (ii) $r_e(T(p)) < 1$, onde $T(t)$ é o semigrupo gerado por A ;
- (iii) I.1.1 é U.U.B. (ver definição 0.2.14).

Então $S(u_0) = u(p, 0; u_0)$ é U.U.B. e α -contração a menos de mudança de norma. Em particular, existe ponto fixo de S (e portanto solução periódica de I.1.1).

DEMONSTRAÇÃO. Que S é U.U.B. é óbvio. Além disso, como $u(t) =$

$$= T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds \text{ temos que } Su_0 = T(p)u_0 +$$

$$+ \int_0^p T(p-s)f(s, u(s, 0; u_0))ds. \text{ Do fato de I.1.1. ser U.U.B.}$$

segue-se que se $\|u_0\| \leq R$ então $\|u(s, 0; u_0)\| \leq a(R)$ se $0 \leq s \leq p$ e, portanto, $\{f(s, u(s, 0; u_0)), 0 \leq s \leq p, \|u_0\| \leq R\}$ tem

fecho compacto o mesmo acontecendo com $\{T(p-s) f(s, u(s, 0; u_0)), 0 \leq s \leq p, \|u_0\| \leq R\}$ pois $(t, u) \rightarrow T(t)u$ é contínua. Como

$$\frac{1}{p} \int_0^p T(p-s) f(s, u(s, 0; u_0)) ds \in \overline{\text{co}}\{T(p-s) f(s, u(s, 0; u_0))\},$$

a conclusão segue do teorema de Mazur 0.3.2 e do teorema I.1.8.

OBSERVAÇÃO. Se f não depende de t (caso autônomo) usando argumentos de [7], nas hipóteses do teorema acima, pode-se mostrar existência de um ponto de equilíbrio (solução estacionária).

I.2. UM PROBLEMA EM UMA LINHA DE TRANSMISSÃO COM PERDAS.

I.2.1. INTRODUÇÃO AO PROBLEMA.

Consideremos uma linha de transmissão com perdas que apresenta um dispositivo não linear na sua terminação

Na figura:

$i(x,t)$ indica a corrente elétrica na linha de transmissão à distância x do início da linha no instante t ;

$v(x,t)$ indica a tensão da linha de transmissão à distância x do início da linha no instante t ;

R_0 e $E(t)$ indicam, respectivamente, a resistência interna e a força eletromotriz variável com o tempo t da fonte da linha de transmissão;

C_1 indica a capacitância do capacitor colocado no final da linha em paralelo com um dispositivo gerador de uma corrente elétrica $H(t)$ variável com o tempo e com um outro dispositivo no qual a corrente elétrica, que o atravessa, é uma função g , em geral, não linear da tensão $v(x,t)$ e l indica o comprimento da linha de transmissão.

As equações diferenciais parciais de primeira ordem para a corrente elétrica $i(x,t)$ e tensão $v(x,t)$ são: [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} i(x,t) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) - \frac{R}{L} i(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} i(x,t) - \frac{G}{C} v(x,t) \end{array} \right. \quad 0 < x < l, t \in \mathbb{R}$$

onde C , G , L e R são, respectivamente, a capacitância específica, a condutância específica, a indutância específica e a resistência específica da linha de transmissão.

As condições de fronteira são:

$$E(t) = v(0,t) + R_0 i(0,t) , \quad \text{em } x = 0$$

$$i(\ell,t) = c_1 \frac{d}{dt} v(\ell,t) + g(v(\ell,t)) + H(t) , \quad \text{em } x = \ell.$$

Com a hipótese de que $E(t)$ é uma função diferenciável, definamos

$$I(x,t) = i(x,t)$$

$$V(x,t) = v(x,t) - E(t).$$

Obtemos para $I(x,t)$ e $V(x,t)$:

$$1.2.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} I(x,t) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) - \frac{R}{L} I(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t} V(x,t) = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) - \frac{G}{C} V(x,t) - \frac{G}{C} E(t) - \frac{d}{dt} E(t) \end{array} \right.$$

com condições de fronteira

$$V(0,t) + R_0 I(0,t) = 0 , \quad \text{em } x = 0$$

$$I(\ell,t) = C_1 \frac{d}{dt} V(\ell,t) + g(V(\ell,t) + E(t)) + H(t) + C_1 \frac{d}{dt} E(t) ,$$

$$\text{em } x = \ell.$$

O problema 1.2.2 pode ser escrito como

$$I.2.3. \quad \dot{u}(t) = Au(t) + f(t,u) \quad , \quad t \geq 0$$

no espaço de Hilbert $(H, \| \cdot \|)$ onde $H = L_2[0, \ell] \times L_2[0, \ell] \times \mathbb{R}$,

$$\| (f, g, d) \| = \left[\int_0^\ell |f(x)|^2 dx + \int_0^\ell |g(x)|^2 dx + d^2 \right]^{1/2}, \quad \forall (f, g, d) \in H,$$

$A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é o operador linear fechado com domínio denso em H definido por:

$$A(\phi, \psi, b) = \left(-\frac{1}{L} \psi' - \frac{R}{L} \phi, -\frac{1}{C} \phi' - \frac{G}{C} \psi, \frac{1}{C_1} \phi(\ell) \right)$$

com C, C_1, G, L, R e R_0 números reais, $C > 0, C_1 > 0, L > 0, G \geq 0, R \geq 0, R_0 \geq 0$,

$$D(A) = \{ (\phi, \psi, b) \in H : \phi, \psi \in AC[0, \ell], \phi', \psi' \in L_2[0, \ell],$$

$\psi(0) + R_0 \phi(0) = 0, b = \psi(\ell) \}$ e a função $f(t, u)$ dada por

$$f(t, u) = \left(0, -\frac{G}{C} E(t) - \frac{d}{dt} E(t), -\frac{1}{C_1} g(b + E(t)) - \frac{1}{C_1} H(t) - \frac{d}{dt} E(t) \right)$$

Conforme pode ser visto em [15] o operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos no espaço de Hilbert H .

Supondo que a função $g(v)$ é localmente lipschitziana em v , $H(t)$ contínua e $E(t)$ continuamente diferenciável, podemos garantir que a função $f(t, u)$ acima satisfaz as hipóteses do teorema 0.2.9 de existência e unicidade de solução.

I.2.4. DETERMINAÇÃO DE PONTOS DE EQUILÍBRIO (SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA).

Considerando o caso autônomo:

$$I.2.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} I(x,t) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) - \frac{R}{L} I(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t} V(x,t) = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) - \frac{G}{C} V(x,t) - \frac{G}{C} E \end{array} \right.$$

com as condições de fronteira

$$V(0,t) + R_0 I(0,t) = 0, \quad \text{em } x = 0$$

$$\frac{d}{dt} V(l,t) = \frac{1}{C_1} I(l,t) - \frac{1}{C_1} g(V(l,t) + E) - \frac{H}{C_1}, \quad \text{em } x = l$$

onde E e H são constantes, vamos determinar os pontos de equilíbrio.

Para isso precisamos achar $I(x)$ e $V(x)$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} I(x) + GV(x) - GE = 0 \\ \frac{d}{dx} V(x) + RI(x) = 0 \end{array} \right. \quad 0 < x < l$$

com as condições

$$V(0) + R_0 I(0) = 0$$

$$I(l) - g(V(l) + E) - H = 0$$

o que é equivalente a determinar a solução do problema de valor inicial

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -G \\ -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -GE \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.6

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(0) \\ -RI(0) \end{bmatrix}$$

para cada $I(0)$ dado, que satisfaça a condição

$$I(l) = g(V(l) + E) + H.$$

A solução do problema de valor inicial

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -G \\ -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(0) \\ -RI(0) \end{bmatrix}$$

para cada $I(0)$ é:

$$\begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{R}} I(0) \\ -\frac{1}{2} I(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\sqrt{\frac{R}{G}} + R_0\right) e^{\sqrt{GR} x} + \left(\sqrt{\frac{R}{G}} - R_0\right) e^{-\sqrt{GR} x} \\ \left(\sqrt{\frac{R}{G}} + R_0\right) e^{\sqrt{GR} x} - \left(\sqrt{\frac{R}{G}} - R_0\right) e^{-\sqrt{GR} x} \end{bmatrix}$$

Usando a fórmula da variação das constantes temos que a solução de I.2.6 é dada por:

$$\begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{R}} I(0) \\ -\frac{1}{2} I(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\sqrt{\frac{R}{G}} + R_0\right) e^{\sqrt{GR} x} + \left(\sqrt{\frac{R}{G}} - R_0\right) e^{-\sqrt{GR} x} \\ \left(\sqrt{\frac{R}{G}} + R_0\right) e^{\sqrt{GR} x} - \left(\sqrt{\frac{R}{G}} - R_0\right) e^{-\sqrt{GR} x} \end{bmatrix} + \frac{E}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{G}{R}} e^{\sqrt{GR} x} (1 - e^{-\sqrt{GR} x}) - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\sqrt{GR} x} (e^{\sqrt{GR} x} - 1) \\ e^{\sqrt{GR} x} (1 - e^{-\sqrt{GR} x}) - e^{-\sqrt{GR} x} (e^{\sqrt{GR} x} - 1) \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cosh \sqrt{GR} x + R_0 \sqrt{\frac{G}{R}} \sinh \sqrt{GR} x) I(0) - E \sqrt{\frac{G}{R}} \sinh \sqrt{GR} x \\ -(R_0 \cosh \sqrt{GR} x + \sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{GR} x) I(0) + E (\cosh \sqrt{GR} x - 1) \end{bmatrix}$$

Esta solução deve satisfazer à condição

$$I(\ell) = g(V(\ell) + E) + H, \quad \text{ou seja}$$

$$g\left(-\left(\sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{GR} \ell + R_0 \cosh \sqrt{GR} \ell\right) I(0) + E \cosh \sqrt{GR} \ell\right) - HC_1 =$$

$$= (\cosh \sqrt{GR} \ell + R_0 \sqrt{\frac{G}{R}} \sinh \sqrt{GR} \ell) I(0) - E \sqrt{\frac{G}{R}} \sinh \sqrt{GR} \ell$$

ou seja

$$I.2.7 \quad g(y) = Ky + \gamma$$

onde $K < 0$ e γ são constantes dadas por

$$K = - \frac{\cosh \sqrt{GR} \ell + R_0 \sqrt{\frac{G}{R}} \sinh \sqrt{GR} \ell}{\sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{GR} \ell + R_0 \cosh \sqrt{GR} \ell},$$

$$\gamma = E \frac{\cosh \sqrt{GR} \ell - \sinh^2 \sqrt{GR} \ell - R_0 \sqrt{\frac{G}{R}} \cosh \sqrt{GR} \ell \sinh \sqrt{GR} \ell}{\sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{GR} \ell + R_0 \cosh \sqrt{GR} \ell} - H$$

$$\text{e } y = -\left(\sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{GR} \ell + R_0 \cosh \sqrt{GR} \ell\right) I(0) + E \cosh \sqrt{GR} \ell$$

Portanto cada solução v_0 da equação I.2.7 dá origem a um ponto de equilíbrio $(I_0(x), V_0(x), V_0(\ell))$ do sistema original.

I.2.5. Supondo que um tal ponto de equilíbrio foi achado, vamos estudar sua estabilidade assintótica. Para facilitar vamos primeiro fazer uma mudança de variável

$$J(x,t) = I(x,t) - I_0(x)$$

$$U(x,t) = V(x,t) - V_0(x)$$

de modo que nas novas variáveis o ponto de equilíbrio seja $I = 0$ e $U = 0$. O novo sistema fica

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} J(x,t) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) - \frac{R}{L} J(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t} U(x,t) = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) - \frac{G}{C} U(x,t) \end{array} \right. \quad 0 < x < \ell$$

I.2.8 com condições de fronteira

$$U(0,t) + R_0 J(0,t) = 0 \quad \text{em } x = 0$$

$$\frac{d}{dt} U(\ell,t) = \frac{1}{C_1} J(\ell,t) - \frac{1}{C_1} h(U(\ell,t)) \quad , \quad \text{em } x = \ell$$

onde $h(U) = g(U + V_0(\ell) + E) - g(V_0(\ell) + E)$ (observe que $h(0) = 0$).

Para analisarmos a estabilidade de um ponto de equilíbrio construiremos um funcional de Liapunov cuja derivada em relação

as soluções de I.2.8 satisfaz uma desigualdade diferencial escalar bem simples.

TEOREMA 1.2.9. (ESTABILIDADE DO PONTO DE EQUILÍBRIO). Se

$$\inf \frac{h(y)}{y} = m$$

e

$$m > -\frac{C}{2R_0} \left[\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} - \left| \frac{R_0^2}{L} - \frac{1}{C} \right| \right] \quad \text{se } R_0 \leq \delta \quad \text{ou } R_0 \geq \gamma$$

ou

$$m > -\frac{C}{2\sqrt{GR}} \left[\frac{G}{C} + \frac{R}{L} - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right] \quad \text{se } \delta \leq R_0 < \gamma$$

onde

$$\delta = \frac{L}{2\sqrt{GR}} \left[\frac{G}{C} + \frac{R}{L} - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right]$$

e

$$\gamma = \frac{L}{2\sqrt{GR}} \left[\frac{G}{C} + \frac{R}{L} - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right]$$

então a solução nula de I.2.8 é exponencialmente G.U.A.S.

OBSERVAÇÃO: Se $\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$ as hipóteses se reduzem à:

$$m > -\frac{C}{L} R_0 \quad \text{se } R_0 < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ou

$$m > -\frac{1}{R_0} \quad \text{se} \quad R_0 > \sqrt{\frac{L}{C}}$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o seguinte funcional

$$W(u(t)) = \frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U^2(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} U^2(x, t) + 2b J(x, t) U(x, t) + \right. \\ \left. + J^2(x, t) \right] dx ,$$

onde $u = (J, U, U(\ell, \cdot))$ e $b > 0$ será escolhido. (veja observação no fim da demonstração).

$\dot{W}$ é dado por:

$$\dot{W}(u(t)) = \frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} 2U(\ell, t) \dot{U}(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} 2U(x, t) \cdot \right.$$

$$\cdot \dot{U}(x, t) + 2b J(x, t) \dot{U}(x, t) + 2b \dot{J}(x, t) U(x, t) +$$

$$\left. + 2J(x, t) \dot{J}(x, t) \right] dx =$$

$$= \frac{2C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U(\ell, t) \left(\frac{1}{C_1} J(\ell, t) - \frac{1}{C_1} h(U(\ell, t)) \right) +$$

$$+ \int_0^\ell \left[\frac{2C}{L} U(x, t) \cdot \left(-\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) - \frac{G}{C} U(x, t) \right) + \right.$$

$$\left. + 2b J(x, t) \left(-\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) - \frac{G}{C} U(x, t) \right) + 2b U(x, t) \cdot \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(-\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) - \frac{R}{L} J(x,t) \right) + 2J(x,t) \left(-\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) + \right. \\
& \quad \left. - \frac{R}{L} J(x,t) \right) dx = \\
& = \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U(\ell, t) J(\ell, t) - \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U^2(\ell, t) \frac{h(U(\ell, t))}{U(\ell, t)} \\
& - \frac{2}{L} \int_0^\ell \left[U(x,t) \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) + J(x,t) \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) \right] dx - 2b \int_0^\ell \left[\frac{1}{L} U(x,t) \cdot \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) + \frac{1}{C} J(x,t) \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) \right] dx - 2 \int_0^\ell \left[\frac{G}{L} U^2(x,t) + \right. \\
& \quad \left. + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) U(x,t) J(x,t) + \frac{R}{L} J^2(x,t) \right] dx .
\end{aligned}$$

Calculando as duas primeiras integrais, substituindo $U(0,t)$ por $-R_0 J(0,t)$ e utilizando a hipótese que $\inf \frac{h(y)}{y} = m$, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{W}(u(t)) & \leq - \left[\left(\frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} m + \frac{b}{L} \right) U^2(\ell, t) - \frac{2}{L} \left(\sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} - 1 \right) \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot U(\ell, t) J(\ell, t) + \frac{b}{C} J^2(\ell, t) \right] + \left[b \left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} \right) - \frac{2R_0}{L} \right] \cdot \\
& \quad \cdot J^2(0, t) - 2 \int_0^\ell \left[\frac{G}{L} U^2(x,t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) U(x,t) J(x,t) + \frac{R}{L} J^2(x,t) \right] dx .
\end{aligned}$$

Utilizando as hipóteses sobre m vamos mostrar que b pode ser escolhido de modo que

$$\text{I.2.10.} \quad \left[\left(\frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} m + \frac{b}{L} \right) U^2(\ell, t) - \frac{2}{L} \left(\sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} - 1 \right) U(\ell, t) \cdot J(\ell, t) + \frac{b}{C} J^2(\ell, t) \right]$$

é uma forma quadrática positiva definida nas variáveis $U(\ell, t)$ e $J(\ell, t)$;

$$\text{I.2.11.} \quad b \left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} \right) - \frac{2R_0}{L} \leq 0$$

e

$$\text{I.2.12.} \quad \frac{G}{L} U^2(x, t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) U(x, t) J(x, t) + \frac{R}{L} J^2(x, t)$$

é uma forma quadrática positiva definida nas variáveis $U(x, t)$ e $J(x, t)$.

As afirmações I.2.10, I.2.11 e I.2.12 são equivalentes a encontrarmos $b \geq 0$ e

$$m > - \frac{C}{bL} \left[1 - \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} \right]; \quad b \leq \frac{2R_0}{L \left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} \right)} \quad e$$

$$b \leq \frac{2\sqrt{GR}}{L \left| \frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right|}, \quad \text{respectivamente.}$$

a) Se $R_0 \leq \delta$ ou $R_0 \geq \gamma$, temos que:

$$\frac{2R_0}{L\left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C}\right)} \leq \frac{2\sqrt{GR}}{L\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)}$$

Considerando $b = \frac{2R_0}{L\left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C}\right)}$, I.2.11 e I.2.12 estão sa

tisfeitas e I.2.10 se reduz à

$$m > -\frac{2}{R_0} \left[\left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} \right) - \left| \frac{R_0^2}{L} - \frac{1}{C} \right| \right]$$

que está satisfeita em virtude de nossa hipótese.

Observe que esta escolha de b também fornece $1 - b^2 \frac{L}{C} > 0$ a não ser no caso crítico $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ quando então se verifica a igualdade. Para evitar isso tomamos b ligeiramente menor que o dado pela igualdade acima, o que não prejudica as demais desigualdades.

b) Se $\delta < R_0 < \gamma$, temos

$$\frac{2\sqrt{GR}}{L\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)} \leq \frac{2R_0}{L\left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C}\right)}$$

Considerando $b = \frac{2\sqrt{GR}}{L(\frac{G}{C} + \frac{R}{L})}$, I.2.11 e I.2.12 estão satis-

feitas e I.2.10 se reduz a

$$m > - \frac{C}{2\sqrt{GR}} \left[\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right],$$

que está satisfeita em virtude de nossas hipóteses.

OBSERVAÇÃO. Se $\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$ temos $\delta = \gamma = \frac{1}{C}$ e $\frac{2R_0}{L(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C})} \leq \frac{2\sqrt{GR}}{L(\frac{G}{C} + \frac{R}{L})}$

Considerando $b = \frac{2R_0}{L(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C})}$, I.2.12 se reduz a $m > - \frac{C}{L} R_0$

se $R_0 < \sqrt{\frac{L}{C}}$, e $m > - \frac{1}{R_0}$ se $R_0 > \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Portanto, a expressão

$$\left(\frac{2}{L} \sqrt{1-b^2 \frac{L}{C}} m + \frac{b}{L} \right) \cdot U^2(\ell, t) - \frac{2}{L} \left(\sqrt{1-b^2 \frac{L}{C}} - 1 \right) U(\ell, t) J(\ell, t) + \frac{b}{C} J^2(\ell, t)$$

é uma forma quadrática positiva definida nas variáveis $U(\ell, t)$ e $J(\ell, t)$, o que implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{2}{L} \sqrt{1-b^2 \frac{L}{C}} m + \frac{b}{L} - \varepsilon \right) U^2(\ell, t) - \frac{2}{L} \left(\sqrt{1-b^2 \frac{L}{C}} - 1 \right) U(\ell, t) J(\ell, t) + \frac{b}{C} J^2(\ell, t)$$

é ainda uma forma quadrática positiva definida nas variáveis $U(\ell, t)$ e $J(\ell, t)$.

Então,

$$\begin{aligned} \dot{W}(u(t)) &\leq - \left[\left(\frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} m + \frac{b}{L} - \epsilon \right) \cdot \right. \\ &\cdot U^2(\ell, t) - \frac{2}{L} \left(\sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} - 1 \right) J(\ell, t) V(\ell, t) + \frac{b}{C} J^2(\ell, t) \Big] + \\ &- \left[\epsilon U^2(\ell, t) + 2 \int_0^\ell \left[\frac{G}{C} U^2(x, t) + 2 \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) U(x, t) J(x, t) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{R}{L} J^2(x, t) \right] dx \right] \leq \\ &\leq \left[- \epsilon U^2(\ell, t) + 2 \int_0^\ell \left[\frac{G}{L} U^2(x, t) + 2 \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) U(x, t) J(x, t) + \frac{R}{L} J^2(x, t) \right] dx \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Agora, } W(u(t)) &= \frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U^2(\ell, t) + \\ &+ \int_0^\ell \left[\frac{G}{C} U^2(x, t) + 2b J(x, t) U(x, t) + J^2(x, t) \right] dx, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{C}{L} U^2(x, t) + 2b J(x, t) U(x, t) + J^2(x, t)$$

é uma forma quadrática positiva definida nas variáveis $U(x, t)$ e $J(x, t)$ pois em ambos os casos para R_0 , b pode ser escolhido de

forma que $b^2 \geq \frac{C}{L}$.

Consideremos $\theta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \theta \left[\frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U^2(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} U^2(x, t) + 2b J(x, t) U(x, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{R}{L} J^2(x, t) \right] dx \right] \leq \\ & \leq \varepsilon U^2(\ell, t) + 2 \int_0^\ell \left[\frac{G}{L} U^2(x, t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) U(x, t) J(x, t) + \frac{R}{L} J^2(x, t) \right] dx . \end{aligned}$$

Com esta escolha de θ , temos:

$$\dot{W}(u(t)) \leq -\theta W(u(t)) , \quad \theta > 0$$

donde $W(u(t)) \leq e^{-\theta t} W(u(0))$.

É fácil ver que o funcional $W(u(t))$ é uma norma equivalente à norma de H e portanto podemos escrever que

$$\|u(t)\| \leq KW(u(t)) \leq Ke^{-\theta t} W(u(0)) \leq Me^{-\theta t} \|u(0)\| ,$$

onde M e K são constantes positivas, o que prova o teorema.

OBSERVAÇÃO. O cálculo feito acima para $\dot{W}(u(t))$ pode parecer um tanto formal pelo fato de estarmos lidando com soluções "mild" e que, portanto, não tem derivadas com relação a t .

Além disso, estamos utilizando $U(\ell, t)$, o que não tem sentido se $U(x, t)$ está em L_2 . A justificativa para isso é a seguinte: devemos pensar no funcional $W(u) = W(J, U, d)$ como sendo

$$\frac{c_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} d + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} U^2(x) + 2b J(x) U(x) + J^2(x) \right] dx .$$

Agora se a condição inicial u_0 estiver no domínio do gerador infinitesimal então pelo teorema 0.2.3., $u(t)$ continua nesse domínio para $t \geq 0$ e $u(t)$ é solução forte. Para essas condições iniciais a derivação em relação a t está justificada e portanto a estimativa $W(u(t)) \leq e^{-\theta t} W(u(0))$ vale se $u(0)$ está em $D(A)$. Para uma condição inicial qualquer, basta passar esta desigualdade ao limite pois $D(A)$ é denso em H .

Essa justificativa se aplica aos futuros casos e não a faremos novamente.

Vamos agora estudar o problema da existência de soluções periódicas forçadas.

TEOREMA I.2.13. Se $g(y)$ e $E(t)$ são de classe C^1 , $H(t)$ contínua e $H(t)$, $E(t)$, $\frac{d}{dt} E(t)$ são limitadas em $[0, +\infty)$ e existe $N > 0$ tal que

$$y g(y + x) \geq m y^2 + N$$

para todo x tal que $\|x\| \leq \sup \|E(t)\|$ onde m é constante e satisfaz

$$m > -\frac{C}{2R_0} \left[\left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} \right) - \left| \frac{R_0^2}{L} - \frac{1}{C} \right| \right] \text{ se } R_0 \leq \delta \text{ ou } R_0 \geq \gamma$$

ou

$$m > - \frac{C}{2\sqrt{GR}} \left[\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right] \quad \text{se} \quad \delta < R_0 < \gamma$$

onde

$$\delta = \frac{L}{2\sqrt{GR}} \left[\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right]$$

e

$$\gamma = - \frac{1}{2\sqrt{GR}} \left[\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) + \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right] .$$

então a equação I.2.3 é U.U.B. Além disso, $r_e(T(p)) < 1$, $\forall p > 0$; em particular, se $E(t)$ e $H(t)$ também são p -periódicas em t , então existe solução periódica do sistema I.2.2.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o seguinte funcional

$$W(u(t)) = \frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} V^2(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} V^2(x, t) + 2b I(x, t) V(x, t) + I^2(x, t) \right] dx,$$

onde $u = (I, V, V(\ell, \cdot))$ e $b > 0$ será escolhido. Então

$$\dot{W}(u(t)) = \frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} 2V(\ell, t) \dot{V}(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} 2 \dot{V}(x, t) V(x, t) + \right]$$

$$+ 2b I(x,t) \dot{V}(x,t) + 2b \dot{I}(x,t) V(x,t) + 2I(x,t) \cdot \dot{I}(x,t) \Big] dx =$$

$$= \frac{2C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} V(\ell, t) \left[\frac{1}{C_1} I(\ell, t) - \frac{1}{C_1} g(V(\ell, t) + E(t)) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{C_1} H(t) - \frac{d}{dt} E(t) \right] + \int_0^\ell \left[\left(\frac{C}{L} 2V(x,t) + 2b I(x,t) \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) - \frac{G}{C} V(x,t) - \frac{G}{C} E(t) - \frac{d}{dt} E(t) \right) +$$

$$+ (2b V(x,t) + 2 I(x,t)) \cdot \left(-\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) - \frac{R}{L} I(x,t) \right) \Big] dx =$$

$$= \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} V(\ell, t) I(\ell, t) - \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} g(V(\ell, t) + E(t)) V(\ell, t) -$$

$$- \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} V(\ell, t) (H(t) + C_1 \frac{d}{dt} E(t)) - \frac{2}{L} \int_0^\ell \left[V(x,t) \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) + I(x,t) \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) \Big] dx - 2b \int_0^\ell \left[\frac{1}{C} I(x,t) \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) + \frac{1}{L} V(x,t) \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) \Big] dx - 2 \int_0^\ell \left[\frac{G}{L} V^2(x,t) + \right.$$

$$+ b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) I(x,t) V(x,t) + \frac{R}{L} I^2(x,t) \Big] dx -$$

$$- 2 \int_0^{\ell} \left[\frac{G}{C} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right] \left[\frac{C}{L} V(x,t) + bI(x,t) \right] dx.$$

Calculando as duas primeiras integrais e substituindo $V(0,t)$ por $-R_0(0,t)$, obtemos:

$$\dot{W}(u,t) = - \frac{2}{L} \sqrt{1-b^2} \frac{L}{C} g(V(\ell,t) + E(t)) V(\ell,t) + \frac{2}{L} \left(\sqrt{1-b^2} \frac{L}{C} - 1 \right) \cdot$$

$$\cdot V(\ell,t) I(\ell,t) - \frac{2}{L} \sqrt{1-b^2} \frac{L}{C} (H(t) + C_1 \frac{d}{dt} E(t)) V(\ell,t)$$

$$- \frac{2}{L} R_0 I^2(0,t) - \frac{b}{C} I^2(\ell,t) - \frac{b}{L} V^2(\ell,t) + b \left(\frac{1}{C} + \frac{R_0}{L} \right) I^2(0,t)$$

$$- 2 \int_0^{\ell} \left[\frac{G}{L} V^2(x,t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) I(x,t) V(x,t) + \frac{R}{L} I^2(x,t) \right] dx$$

$$- \frac{2C}{L} \int_0^{\ell} \left(\frac{G}{C} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right) V(x,t) dx - 2b \int_0^{\ell} \left(\frac{G}{C} E(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt} E(t) \right) I(x,t) dx.$$

Para α_1, α_2 e α_3 números reais estritamente positivos temos:

$$- \alpha_1 \frac{V(\ell,t)}{\alpha_1} \left[H(t) + C_1 \frac{d}{dt} E(t) \right] \leq \frac{1}{2} \left[\frac{V^2(\ell,t)}{\alpha_1^2} + \alpha_1^2 (H(t) + C_1 \frac{d}{dt} E(t))^2 \right]$$

$$- \alpha_2 \frac{V(x,t)}{\alpha_2} \left[\frac{G}{C} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right] \leq \frac{1}{2} \left[\frac{V^2(x,t)}{\alpha_2^2} + \alpha_2^2 \left(\frac{G}{C} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right)^2 \right]$$

$$- \alpha_3 \frac{I(x,t)}{\alpha_3} \left[\frac{G}{C} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right] \leq \frac{1}{2} \left[\frac{I^2(x,t)}{\alpha_3^2} + \alpha_3^2 \left(\frac{G}{C} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right)^2 \right] .$$

Considerando essas desigualdades e que $V(\ell, t) (g(V(\ell, t) + E(t)) \geq m V^2(\ell, t) + N$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{W}(u(t)) \leq & - \left[\left(\frac{2}{L} m - \frac{1}{L\alpha_1^2} \right) \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} + \frac{b}{L} \right] V^2(\ell, t) - \frac{2}{L} \left(\sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} \right. \\ & - 1) V(\ell, t) I(\ell, t) + \frac{b}{C} I^2(\ell, t) \left. \right] + \left[b \left(\frac{R_0}{L} + \frac{1}{C} \right) - \frac{2R_0}{L} \right] I^2(0, t) - \\ & - 2 \int_0^\ell \left[\left(\frac{G}{L} - \frac{C}{2L\alpha_2^2} \right) V^2(x, t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) I(x, t) V(x, t) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{R}{L} - \frac{b}{2\alpha_3^2} \right) I^2(x, t) \right] dx - \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} \left[N + \frac{1}{2} (H(t) \right. \\ & + \left. C_1 \frac{d}{dt} E(t) \right)^2 \left. \right] + \int_0^\ell \left(\frac{G}{C} + E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right)^2 \left(\frac{C}{L} \alpha_2^2 + b \alpha_3^2 \right) dx . \end{aligned}$$

Como por hipótese $E(t)$, $H(t)$, $\frac{d}{dt} E(t)$ são funções limitadas, podemos considerar uma constante M tal que:

$$- \frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} \left[N + \frac{1}{2} (H(t) + C_1 \frac{d}{dt} E(t))^2 \right] +$$

$$+ \int_0^{\ell} \left(\frac{G}{C} + E(t) + \frac{d}{dt} E(t) \right)^2 \cdot \left(\frac{C}{L} \alpha_2^2 + b \alpha_3^2 \right) dx \leq M.$$

Com as hipóteses feitas sobre m , e um cálculo semelhante ao que foi feito na demonstração do teorema I.2.8 temos que

$$\left(\frac{2}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} m + \frac{b}{L} \right) V^2(\ell, t) + \frac{2}{L} \left(1 - \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} \right) I(\ell, t) V(\ell, t) +$$

$$+ \frac{b}{C} I^2(\ell, t) \text{ e } \frac{G}{L} V^2(x, t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) I(x, t) V(x, t) + \frac{R}{L} I^2(x, t)$$

são formas quadráticas positivas definidas nas variáveis $V(\ell, t)$, $I(\ell, t)$ e $V(x, t)$, $I(x, t)$ respectivamente; e além disso

$$b \left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} \right) - \frac{2}{L} R_0 \leq 0.$$

Então existem constantes reais α , α_1 , α_2 e α_3 , estritamente positivas, tais que

$$\left[\left(\frac{2}{L} m - \frac{1}{L \alpha_1^2} \right) \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} + \frac{b}{L} - \alpha \right] V^2(\ell, t) + \frac{2}{L} \left(1 - \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} \right) \cdot$$

$$\cdot I(\ell, t) V(\ell, t) + \frac{b}{C} I^2(\ell, t) \quad e$$

$$\left[\left(\frac{G}{L} - \frac{C}{2\alpha_2^2 L} \right) V^2(x, t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) I(x, t) V(x, t) + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{2\alpha_3^2} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot I^2(x, t) \left. \right] \quad \text{s\~{a}o ainda formas quadr\~{a}ticas positivas definidas.}$$

Portanto:

$$\dot{W}(u(t)) \leq - \left[\alpha V^2(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\left(\frac{G}{L} - \frac{C}{2L\alpha_2^2} \right) V^2(x, t) + b \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) \cdot \right. \right.$$

$$\cdot I(x, t) V(x, t) + \left. \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{2\alpha_3^2} \right) I^2(x, t) \right] dx \left. \right] + M.$$

Consideremos $\theta > 0$ tal que $\dot{W}(u(t)) \leq -\theta W(u(t)) + M$, donde $W(u(t)) \leq e^{-\theta t} W(u(0)) + \frac{M}{\theta}$. Portanto $\|u(t, u_0)\|^2 = \|u\|^2 \leq K^* e^{-\theta t} W(u(0)) + \frac{MK^*}{\theta}$, $K^* > 0$ o que implica que a equa\~{c}~{a}o I.2.3 \~{e} U.U.B.

De acordo com [15] sabemos que $r_e(T(p)) = e^{\sigma_o p}$, onde

$$\sigma_o = - \frac{(RC + GL)}{2LC} + \frac{1}{2\ell\sqrt{LC}} \ln \left(\frac{|z_o - R_o|}{z_o + R_o} \right) \quad \text{se}$$

$$z_o \neq R_o, \text{ e } \sigma_o = -\infty \text{ se } R_o = z_o, \text{ com } z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Portanto $\sigma_o < 0$.

Al\~{e}m disso, a aplica\~{c}~{a}o

$$f(t, \varphi, \psi, b) = (0, -\frac{G}{C} E(t) - \frac{d}{dt} E(t), -\frac{1}{C_1} g(b + E(t))$$

$$- \frac{1}{C_1} H(t) - C_1 \frac{d}{dt} E(t)) \text{ é claramente compacta.}$$

A conclusão final segue do teorema I.1.11.

OBSERVAÇÃO. Se $g'(y) \geq m + \varepsilon$ para y grande, é fácil ver que a hipótese do teorema sobre g está satisfeita.

I.3. ESTABILIDADE DA OSCILAÇÃO FORÇADA.

TEOREMA I.3.1. Se $E(t)$, $H(t)$ são funções contínuas p -periódicas, $E(t)$ continuamente diferenciável e g satisfaz $\inf \frac{g(y) - g(z)}{y - z} = \inf g'(x) = m$ e

$$m > -\frac{C}{2R_0} \left[\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{C} - \left| \frac{R_0^2}{L} - \frac{1}{C} \right| \right] \text{ se } R_0 \leq \delta \text{ ou } R_0 \geq \gamma, \text{ ou}$$

$$m > -\frac{C}{2\sqrt{GR}} \left[\frac{G}{C} + \frac{R}{L} - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right] \text{ se } \delta < R_0 < \gamma,$$

onde

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{GR}} \left[\frac{G}{C} + \frac{R}{L} - \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right]$$

e

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{GR}} \left[\frac{G}{C} + \frac{R}{L} + \left| \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right| \right],$$

então I.2.3 tem uma solução p-periódica que é G.U.A.S.

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a observação cima, vemos que as hipóteses sobre g no teorema I.1.11. estão satisfeitas e portanto existe solução p-periódica.

Seja $(I_0(x,t), V_0(x,t), V_0(l,t))$ uma solução p-periódica de I.2.2.

Consideremos a seguinte mudança de variáveis em I.2.2;

$$J(x,t) = I(x,t) - I_0(x,t)$$

$$U(x,t) = V(x,t) - V_0(x,t).$$

Obtemos para $J(x,t)$ e $U(x,t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} J(x,t) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) - \frac{R}{L} J(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t} U(x,t) = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) - \frac{G}{C} U(x,t) \end{cases}$$

condições de fronteira

$$U(0,t) + R_0 J(0,t) = 0, \quad \text{em } x=0$$

$$\frac{d}{dt} U(l,t) = \frac{1}{C_1} J(l,t) - \frac{1}{C_1} \left[g(U(l,t) + V_0(l,t) + E(t)) - g(V_0(l) + E(t)) \right], \quad \text{em } x=l$$

Considerando o funcional

$$W(v(t)) = \frac{C_1}{L} \sqrt{1 - b^2 \frac{L}{C}} U^2(\ell, t) + \int_0^\ell \left[\frac{C}{L} U^2(x, t) + 2b J(x, t) \right.$$

$U(x, t) + J^2(x, t) \Big] dx$, onde $v(x, t) = (J(x, t), U(x, t), U(\ell, t))$, com $b > 0$ conveniente e utilizando um raciocínio análogo ao desenvolvido na demonstração do teorema I.2.9, obtemos $\|v(t)\| \leq M e^{-\theta t} \|v(0)\|$, onde $v(t) = (J(t), U(t), U(\ell, t))$, o que demonstra o teorema.

I.4. EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS ABSTRATAS.

Nesta seção estudaremos a existência de solução periódica da equação

$$I.4.1. \quad u_{tt} - Cu + h(u_t) + g(u) = e(t)$$

num espaço de Hilbert H real com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \|$, ou, o que dá no mesmo, do sistema

$$u_t = v$$

I.4.2.

$$v_t = Cu - h(v) - g(u) + e(t)$$

onde suporemos que $C : D(C) \subset H \rightarrow H$ é um operador auto-adjunto negativo definido (em particular, $\langle Cu, u \rangle \leq -\lambda_1 |u|^2$ para algum

$\lambda_1 > 0$ e todo $u \in D(C)$).

O sistema I.4.2 pode ainda ser visto como uma equação abstrata:

$$I.4.3. \quad \dot{w} = Aw + f(t, w)$$

no espaço de Hilbert real $X = D(-C)^{1/2} \times H$ com norma $\|w\|^2 = \|(u, v)\|^2 = |(-C)^{1/2}u|^2 + |v|^2$, onde $w = (u, v)$, $Aw = (v, Cu)$, $D(A) = D(C) \times D(-C)^{1/2}$ e $f(t, w) = (0, -h(v) - g(u) + e(t))$.

Sabemos que A gera um C_0 grupo unitário em X (como consequência do teorema de Stone), portanto, se $h : H \rightarrow H$ e $g : D(-C)^{1/2} \rightarrow H$ são localmente lipschitzianas, aplicam conjuntos limitados em conjuntos limitados e $e : \mathbb{R} \rightarrow H$ é contínua, todas as condições para a aplicação do teorema 0.2.9 de existência local e unicidade estão satisfeitas. Vamos supor também que h e g sejam Gataux deriváveis. É importante observar que mesmo para soluções "mild" $(u(t), v(t))$, $u : [0, b) \rightarrow H$ é de classe C^1 , embora $u : [0, b) \rightarrow D(-C)^{1/2}$ seja apenas contínua.

LEMA I.4.4. (ver [17]). Se existe uma função escalar de classe C^1 , $V(w)$ definida em $[0, +\infty) \times X$, com as seguintes propriedades:

- (i) $a(\|w\|) \leq V(w) \leq b(\|w\|)$, onde $a(r)$ e $b(r)$ são funções contínuas crescentes e $a(r) \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow +\infty$;
- (ii) $\exists r_0 > 0$ tal que $\dot{V}(w) \leq -c(\|w\|)$ para $\|w\| \geq r_0$, onde $c(r)$ é positiva e contínua;

então as soluções de I.4.3 são U.U.B.

TEOREMA I.4.5. Além das hipóteses feitas anteriormente suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:

H_1 - existe $G : D(-C)^{1/2} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , limitada inferiormente em $D(-C)^{1/2}$ tal que $g(u) = \text{grad } G(u)$ relativamente ao produto escalar de H e existe uma função d crescente contínua tal que $G(u) \leq d(r)$ se $\|u\| \leq r$;

H_2 - $\langle u, g(u) \rangle$ é limitada inferiormente em $D(-C)^{1/2}$;

H_3 - $h(0) = 0$ e existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha|v|^2 \leq \langle v, h(v) \rangle$ e $|h(v)| \leq \beta|v|$ para todo v em H ;

H_4 - $e : \mathbb{R} \rightarrow H$ é limitada.

Então I.4.3 é U.U.B.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o funcional

$$W(u, v) = \frac{|v|^2}{2} + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} u|^2 + 2b \langle u, v \rangle + G(u),$$

com $b > 0$ a ser escolhido satisfazendo a diversas condições, a primeira das quais $b^2 < \frac{\lambda_1}{16}$. Com essa escolha de b existem constantes $k_2 > k_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} k_1(|v|^2 + |(-C)^{1/2} u|^2) &\leq \frac{|v|^2}{2} + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} u|^2 + 2b \langle u, v \rangle \leq \\ &\leq k_2(|v|^2 + |(-C)^{1/2} u|^2) \text{ para todo } (u, v) \text{ em } X. \end{aligned}$$

A derivada de W ao longo das soluções de I.4.3 é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\langle v, h(v) \rangle + 2b\langle v, v \rangle - 2b\langle u, h(v) \rangle - \\ &- 2b|(-C)^{1/2}u|^2 + \langle v, e(t) \rangle - 2b\langle u, g(u) \rangle + 2b\langle u, e(t) \rangle \\ &\leq (2b - \alpha)|v|^2 + 2b\beta|u||v| - 2b|(-C)^{1/2}u|^2 + \langle v, e(t) \rangle \\ &- 2b\langle u, g(u) \rangle + 2b\langle u, e(t) \rangle. \end{aligned}$$

Em seguida escolhemos $b > 0$ de tal modo que $(2b - \alpha)|v|^2 + 2b\beta|u||v| - 2b|(-C)^{1/2}u|^2 \leq -\theta(|v|^2 + |(-C)^{1/2}u|^2)$, para algum $\theta > 0$; para isto usamos $2b\beta|u||v| \leq \frac{2b\beta}{\sqrt{\lambda_1}}|(-C)^{1/2}u||v|$ e impomos $\frac{b^2\beta^2}{\lambda_1} < 2b(\alpha - 2b)$ o que é satisfeito se $b < \frac{2\alpha}{4 + \frac{\beta^2}{\lambda_1}}$. Le-

vando em conta as hipóteses H_1, H_2 e H_4 e usando as desigualdades elementares $\langle v, e(t) \rangle \leq \frac{m^2}{2}|v|^2 + \frac{1}{2m^2}|e(t)|^2$ e $\langle u, e(t) \rangle \leq \frac{m^2}{2}|v|^2 + \frac{1}{2m^2}|e(t)|^2 \leq \frac{m^2}{2\lambda_1}|(-C)^{1/2}u|^2 + \frac{1}{2m^2}|e(t)|^2$ com m pequeno vemos que $\dot{W} \leq -\gamma\|w\|^2 + k$, onde k e γ são constantes e $\gamma > 0$.

Pelo lema I.4.4. temos que a equação I.4.3 é U.U.B.

COROLÁRIO I.4.6. Se $Q : H \rightarrow H$ é um operador auto-adjunto positivo definido e limitado em um espaço de Hilbert H e C, h, g e $e(t)$ satisfazem as condições do teorema I.4.5, então a equação

$$I.4.7. \quad Qu_{tt} - Cu + h(u_t) + g(u) = e(t)$$

é U.U.B.

DEMONSTRAÇÃO. Escrevendo essa última equação na forma

$$u_{tt} - Q^{-1}Cu + Q^{-1}h(u_t) + Q^{-1}g(u) = Q^{-1}e(t)$$

e definindo um novo (equivalente) produto escalar em H por $[u_1, u_2] = \langle Qu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Qu_2 \rangle$ e é fácil verificar que $Q^{-1}C$ é autoadjunto negativo definido relativamente à $[,]$, e que se $g(u) = \text{grad } G(u)$ com respeito à $\langle , \rangle$, então $Q^{-1}g(u) = \text{grad } G(u)$ com respeito à $[,]$ e $[u, Q^{-1}g(u)] = \langle u, g(u) \rangle$; finalmente $[v, Q^{-1}h(v)] = \langle v, h(v) \rangle$ e a conclusão segue do teorema I.4.5.

Como um exemplo desse tipo consideremos um sistema

$$a_{11}u_{tt} + a_{12}U_{tt} = +C_1u - h_1(u_t) - g_1(u) + e_1(t)$$

I.4.8.

$$a_{21}u_{tt} + a_{22}U_{tt} = +C_2U - h_2(U_t) - g_2(u) + e_2(t)$$

no espaço produto $H = N \times N$ onde a matriz a_{ij} é autoadjunta positiva definida, e C_1 e C_2 , h_1 e h_2 , g_1 e g_2 , e_1 e e_2 satisfazem as mesmas hipóteses como C , h , g e e no teorema I.4.5. Para verificar que I.4.8 é de fato do tipo I.4.7 é suficiente tomar em $H = N \times N$ o produto escalar

$$\langle \langle (u_1, U_1), (u_2, U_2) \rangle \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle U_1, U_2 \rangle$$

Vamos agora dar condições sob as quais podemos garantir que a aplicação periódica S é uma α -contração; estudamos duas situações diferentes.

TEOREMA I.4.9. Além das hipóteses $H_1 - H_4$ no teorema I.4.5 suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:

H_5 - $e(t)$ é p -periódica;

H_6 - existem constantes $0 < \alpha < \beta$ tais que

$$\alpha |v_1 - v_2|^2 \leq \langle v_1 - v_2, h(v_1) - h(v_2) \rangle \text{ e}$$

$$|h(v_1) - h(v_2)| \leq \beta |v_1 - v_2|, \text{ para todo } v_1, v_2 \text{ em } H;$$

H_7 - para todo R_1 existem constantes $K > 0$ e $0 < a \leq 1$

$$\text{tais que } |g(u_1) - g(u_2)| \leq K |u_1 - u_2|^a \text{ se } |(-C)^{1/2} u_1|,$$

$$|(-C)^{1/2} u_2| \leq R_1;$$

H_8 - $D(-C)^{1/2}$ é compactamente imerso em H .

Então a aplicação periódica S é uma α -contração; em particular existe uma solução "mild" p -periódica.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $w_1 = (u_1, v_1)$, $w_2 = (u_2, v_2)$ dois pontos em X e $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \geq 0$ as soluções tais que $w_1(0) = w_1$ e $w_2(0) = w_2$. Como I.4.2 é U.U.B temos que $w_1(t)$, $w_2(t)$ permanecem limitados por alguma constante R_1 para todo $t \geq 0$. Consideremos o funcional

$$E = \frac{1}{2} |v_1 - v_2|^2 + 2b \langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} (u_1 - u_2)|^2,$$

onde b é escolhido como na prova do teorema I.4.5. Usando H_6 é fácil verificar que a derivada de $E(t)$ ao longo do par, de soluções $(w_1(t), w_2(t))$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\theta E(t) + \langle v_1(t) - v_2(t), g(u_2(t)) - g(u_1(t)) \rangle$$

$$+ 2b \langle u_1(t) - u_2(t), g_2(u_2(t)) - g(u_1(t)) \rangle.$$

onde $\theta > 0$ é uma constante e então, usando H_7 , temos

$$E(p) \leq e^{-\theta p} E(0) + K_1 \sup_{0 \leq t \leq p} |u_1(t) - u_2(t)|^a,$$

K_1 constante, e $\|S(w_2) - S(w_1)\| \leq e^{\frac{-\theta p}{2}} \|w_2 - w_1\| + \rho(w_2, w_1)$ onde $\|w\|^2 = \frac{1}{2} |v|^2 + 2b \langle u, v \rangle + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} u|^2$ e $\rho(w_2, w_1) = K \sup_{0 \leq t \leq p} |u_1(t) - u_2(t)|^{\frac{a}{2}}$. Seja (u_n, v_n) uma seqüência limitada em relação à norma $\frac{1}{2} |v|^2 + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} u|^2$, do fato de ser U.U.B. concluímos que $\frac{1}{2} |v_n(t)|^2 + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} u_n(t)|^2$ permanece limitado por uma constante fixa para t em $[0, p]$ e H_8 implica que $u_n(t)$ tem fecho compacto em H para cada t fixo; além disso, $|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \sup_{0 \leq s \leq p} |v_n(s)|$ e pelo teorema

Arzelà-Ascoli temos que a pseudo-métrica ρ é pré-compacta com respeito à norma $(\frac{|v|^2}{2} + \frac{1}{2} |(-C)^{1/2} u|^2)^{1/2}$ e, conseqüentemente, com a norma $\|\cdot\|$ (pois são equivalentes); as conclusões seguem dos teoremas I.1.5 e I.1.10.

COROLÁRIO I.4.10. Consideremos a equação semilinear da onda

$$u_{tt} = \Delta u - h(u_t) - g(u) + e(t, x)$$

num domínio regular limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, com condições de fronteira de Dirichlet: $u = 0$ em $\partial\Omega$ e suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

H'_1 - a função $\tilde{g}(u) = \int_0^u g(s) ds$ é limitada inferiormente para u em $\mathbb{R}$;

H'_2 - a função $ug(u)$ é limitada inferiormente para u em $\mathbb{R}$;

H'_3 - $h(0) = 0$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 e $0 < \alpha \leq h'(v) \leq \beta$ para algumas constantes α e β ;

H'_4 - $e: \mathbb{R} \rightarrow L_2(\Omega)$ é p -periódica e contínua;

H'_5 - $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 e satisfaz as seguintes condições de crescimento $|g'(u)| \leq a + b|u|^\theta$, $0 \leq \theta < 2$ se $n=3$; qualquer θ se $n=2$, e nenhuma restrição se $n=1$. Então existe uma solução "mild" p -periódica.

DEMONSTRAÇÃO. Não é difícil verificar que o funcional

$G(u) = \int_{\Omega} \tilde{g}(u(x)) dx$ é bem definido em $D(-\Delta)^{1/2} = H_0^1(\Omega)$ e sa-

tisfaz H_1 do teorema I.4.5, também

$h : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ definida por $h(v)x = h(v(x))$ é lipschitziana e Gataux derivável e

$g : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ definida por $g(u)x = g(u(x))$ é lipschitziana e C^1 .

Para verificar H_7 quando $n = 3$ usamos as seguintes estimativas:

$$|g(u_1) - g(u_2)|_{L_2} \leq$$

$$\leq (K_1 \max(|u_1|_{L_6}^{\theta}, |u_2|_{L_6}^{\theta}) + K_2) |u_1 - u_2|_{L_r} \leq$$

$$\leq (K_1 \max(|u_1|_{H^1}^{\theta}, |u_2|_{H^1}^{\theta}) + K_2) |u_1 - u_2|_{L_r}, \quad r = \frac{6}{3-\theta} < 6 \quad e$$

$$|u_1 - u_2|_{L_r} \leq K_3 |u_1 - u_2|_{H^1}^{1-a} |u_1 - u_2|_{L_2}^a, \quad a = 1 - \frac{\theta}{2} > 0;$$

para $n = 1$ ou 2 a verificação é semelhante. As outras hipóteses nos teoremas I.4.5 e I.4.9 são obviamente satisfeitas e a conclusão segue.

OBSERVAÇÕES.

1. Nakao [11] provou um resultado semelhante dado pelo corolário I.4.10 admitindo $\theta \leq 2$ para $n = 3$, mas requerendo $e(t, x)$ limitada por uma constante M_0 . O caso $g \equiv 0$ foi tratado por

por Prodi e Prouse com menos restrições sobre o crescimento de h (ver [11] para essas referências). Em [14] Prodi estudou o caso do crescimento linear em h e $g \neq 0$, mas ele colocou uma restrição muito forte sobre o crescimento de g .

2. Se a equação da onda no corolário I.4.10 é considerada com condições de fronteira de Neuman então as mesmas conclusões valem se existe uma constante $C > 0$ tal que $g(u) - Cu$ satisfaz as hipóteses H'_1 e H'_2 .

O próximo resultado trata de equações que representam vibrações de vigas.

TEOREMA I.4.11. Suponhamos que o termo $g(u)$ no sistema I.4.2 tem a forma $g(u) = m(\langle Bu, u \rangle) \cdot Bu$ onde $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 e $B: D(-C)^{1/2} \rightarrow H$ é limitado, não negativo e autoadjunto com respeito a $\langle, \rangle$. Suponhamos também que as seguintes condições são satisfeitas:

$\bar{H}_1$ - a função $M(r) = \int_0^r m(s) ds$ é limitada inferiormente para $r \geq 0$;

$\bar{H}_2$ - a função $rm(r)$ é limitada inferiormente para $r \geq 0$;

$\bar{H}_3$ e $\bar{H}_4$ como H_3 e H_4 no teorema I.4.5. Então o sistema I.4.2 é U.U.B. Além disso, se as hipóteses H_5 , H_6 e H_8 do teorema I.4.9 são satisfeitas, então a aplicação periódica S é uma α -contração; em particular existe uma solução "mild" p -periódica.

DEMONSTRAÇÃO. Definindo $G(u) = \frac{1}{2} M(\langle Bu, u \rangle)$ vemos que $g(u) = \text{grad } G(u)$ com respeito ao produto escalar de H e as hipóteses $H_1 - H_4$ do teorema I.4.5 são satisfeitas e isso implica que $\tilde{E}$ é U.U.B. Sejam $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ dois valores iniciais em X , $(u_1(t), v_1(t)), (u_2(t), v_2(t))$ as soluções com valores iniciais neles e definimos a função $F(t) = E(t) - \frac{1}{2} m(\langle Bu_1(t), u_1(t) \rangle) \cdot \langle u_1(t) - u_2(t), Bu_2(t) - Bu_1(t) \rangle$ onde $E(t)$ é como no teorema I.4.9. Usando as desigualdades anteriores para $\frac{d}{dt} E(t)$ vemos que

$$\frac{dF}{dt} \leq -\theta(F(t) + \frac{1}{2} m(\langle Bu_1(t), u_1(t) \rangle) \langle u_1(t) - u_2(t), Bu_2(t) - Bu_1(t) \rangle)$$

$$+ (m(\langle Bu_2(t), u_2(t) \rangle) - m(\langle Bu_1(t), u_1(t) \rangle)) \langle v_1(t) - v_2(t),$$

$$Bu_2(t) \rangle + 2b \langle u_1(t) - u_2(t), g(u_2(t)) - g(u_1(t)) \rangle$$

$$- m'(\langle Bu_1(t), u_1(t) \rangle) \langle Bu_1(t), v_1(t) \rangle \langle u_1(t) - u_2(t),$$

$$Bu_2(t) - Bu_1(t) \rangle, \text{ onde } \theta > 0 \text{ é uma constante; usando } \langle Bu_1, u_1 \rangle -$$

$$- \langle Bu_2, u_2 \rangle = \langle B(u_1 + u_2), u_1 - u_2 \rangle, \text{ o fato é que } m \text{ é } C^1 \text{ e}$$

que I.4.2 é U.U.B temos

$$F(p) \leq e^{-\theta p} F(0) + K_1 \sup_{0 \leq t \leq p} |u_1(t) - u_2(t)|,$$

$$E(p) \leq e^{-\theta p} E(0) + K_2 \sup_{0 \leq t \leq p} |u_1(t) - u_2(t)| \text{ e então}$$

$$\|S(w_1) - S(w_2)\| \leq e^{-\frac{\theta p}{2}} \|w_1 - w_2\| + \rho(w_1, w_2)$$

onde $\|\cdot\|$ é como no teorema I.4.9 e

$$\rho(w_1, w_2) = \sqrt{K_2} \left(\sup_{0 \leq t \leq p} |u_1(t) - u_2(t)| \right)^{1/2}.$$

A pré-compacidade é provada da mesma maneira como no teorema I.4.9. As conclusões seguem dos teoremas I.1.5 e I.1.10.

OBSERVAÇÃO. O teorema I.4.11 vale também para sistemas do tipo I.4.8 desde que $g_1(u)$ e $g_2(u)$ são do mesmo tipo como $g(u)$ naquele teorema.

COROLÁRIO I.4.12. Consideremos a equação

$$u_{tt} = -\Delta^2 u - h(u_t) + m(|\text{grad } u|_{L_2}^2) \Delta u + e(t, x)$$

em um domínio regular limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e com condições de fronteira de Dirichlet $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$ e suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 , $h(0) = 0$ e existem constantes α, β tais que $0 < \alpha \leq h'(v) \leq \beta$ para todo v em $\mathbb{R}$;
- (ii) $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 e $M(r) = \int_0^r m(s) ds$ e $rm(r)$ são limitadas inferiormente para $r \geq 0$;
- (iii) $e : \mathbb{R} \rightarrow L_2(\Omega)$ é p -periódica e contínua. Então existe uma solução "mild" p -periódica.

OBSERVAÇÃO. O problema de valor inicial para a equação I.4.1 com $h = 0$ e g do tipo indicado no teorema I.4.11 foi tratado por Medeiros [10] e para sistemas do tipo I.4.8 por Andrade [1]. Essas equações aparecem em conexão com problemas da teoria de elasticidade.

CAPÍTULO II

CONVERGÊNCIA PARA O EQUILÍBRIO

II.1. INTRODUÇÃO

Supondo que nas equações anteriormente vistas não haja termo forçante (ou que esse termo seja constante em t) estudaremos o problema de convergência para equilíbrio, isto é, estaremos interessados em dar condições para que toda solução limitada tenda para um ponto de equilíbrio (solução estacionária).

A técnica empregada é a do princípio de invariância e funcionais de Liapunov (como no caso de equações ordinárias). No entanto, existe aqui uma dificuldade a mais por não se saber a priori que as soluções limitadas tem órbita pré-compacta (fecho compacto ou totalmente limitada). Em alguns casos a pré-compacidade dessas órbitas será obtida através do decaimento exponencial da parte linear "mais importante" da equação. Em outras a convergência da solução na topologia fraca será usado como um passo intermediário para se obter convergência forte.

II.2. DOIS RESULTADOS DE PRÉ-COMPACIDADE DE ÓRBITAS LIMITADAS

LEMA II.2.1. Se um semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ num espaço de Banach X satisfaz $\|T(t)\| \leq K e^{-\alpha t}$, $K, \alpha > 0$, constantes e $Q \subset X$ é um conjunto compacto, então o conjunto das integrais $\int_0^t T(s)h(s)ds, t \geq 0$, onde h percorre o conjunto das funções contínuas de $[0, +\infty)$ em

Q é pré-compacto.

DEMONSTRAÇÃO. De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^t T(s)h(s)ds &= \int_0^{\bar{t}} T(s)h(s)ds + \\ &+ \int_{\bar{t}}^t T(s)h(s)ds. \text{ Como } \left| \int_{\bar{t}}^t T(s)h(s)ds \right| \leq \\ &\leq K \sup |h(s)| \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha\bar{t}} - e^{-\alpha t}), \text{ vemos que dado} \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$, existe $\bar{t}(\varepsilon)$ tal que $\left| \int_{\bar{t}}^t T(s)h(s)ds \right| < \varepsilon$, para

$t \geq \bar{t}(\varepsilon)$. Como as integrais $\int_0^{\bar{t}(\varepsilon)} T(s)h(s)ds$

formam um conjunto pré-compacto, o lema está demonstrado.

Consideremos a equação autônoma

II.2.2. $\dot{u} = Au + f(u)$

supondo válidas as condições do teorema 0.2.9.

TEOREMA II.2.3. Se o semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ gerado por A satisfaz $|T(t)| \leq K e^{-\alpha t}$, $K, \alpha > 0$ constantes e $f: X \rightarrow X$ é uma função compacta, então toda órbita de uma solução limitada de II.2.2 é pré-compacta.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da igualdade

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(u(s))ds = T(t)u_0 + \\ + \int_0^t T(s) f(u(t-s))ds,$$

do fato de $T(t)u_0$ tender a zero e do lema anterior.

TEOREMA II.2.4. Suponhamos que existam projeções P e Q contínuas complementares, isto é, $PQ = QP = 0$, $P + Q = I$, que comutam com $T(t)$ para todo $t \geq 0$ (ou, o que é a mesma coisa, $P(X)$ e $Q(X)$ são subespaços invariantes com relação a $T(t)$ para todo $t \geq 0$) tais que $P(X)$ é um subespaço de dimensão finita e $|T(t)Qu| \leq K e^{-\alpha t} |Qu|$, $K, \alpha > 0$, constantes. Se, além disso, $f : X \rightarrow X$ é compacta, então toda órbita de uma solução limitada $u(t)$, $t \geq 0$ de II.2.2 é pré-compacta.

Webb, [18] estudou esse tipo de problema.

DEMONSTRAÇÃO. Como

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(s) f(u(t-s))ds, \text{ temos que}$$

$$Qu(t) = T(t)Qu_0 + \int_0^t T(s)Q f(u(t-s))ds$$

e portanto, usando as hipóteses e os argumentos do teorema anterior concluímos que $Qu(t)$, $t \geq 0$ tem fecho compacto. Como $Pu(t)$, $t \geq 0$ está num espaço de dimensão finita e é limitado, o

teorema segue.

II.3. UM NOVO ESPAÇO DE FASE

Numa das aplicações que faremos, o quadro funcional abstrato desenvolvido até agora não se aplica diretamente. Por causa disso somos obrigados a refazer parte da teoria para que ela se aplique a soluções "mild" num sentido um pouco diferente do visto até agora.

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$. Seja X_A o espaço de Banach $D(A)$ com a norma $|u|_A = |u| + |Au|$. Supondo A inversível (o que sempre pode ser feito sem perda de generalidade) vamos tomar $|u|_A = |Au|$, a qual é equivalente à anteriormente definida.

Do teorema 0.13 segue que $T(t) : X_A \rightarrow X_A$ é um semigrupo fortemente contínuo. Os lemas seguintes são de verificações quase imediatas.

LEMA II.3.1.

a) O espectro de $T(t)$ em X_A é igual ao espectro de $T(t)$ em X ;

b) Se $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são autovalores isolados de A e

$$P = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} R(\lambda_n; A) d\lambda, \text{ onde } \Gamma_n \text{ é uma circunferência}$$

tal que λ_n é o único ponto de $\sigma(A)$ no seu interior, então

$P : X_A \rightarrow X_A$ é uma projeção contínua, e $P(X_A)$ é invariante em

relação a $T(t)$, $t \geq 0$. Além disso, $\sigma(T(t)/P(X)) = \sigma(T(t)/P(X_A))$.

LEMA II.3.2. Consideremos a equação linear não homogênea

$$\text{II.3.3.} \quad \dot{u} = Au + g(t)$$

e a solução "mild"

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)g(s)ds = T(t)u_0 + \int_0^t T(s)g(t-s)ds$$

Se $u_0 \in D(A)$ e $g: [0, +\infty) \rightarrow X$ é C^1 , $u: [0, +\infty) \rightarrow X_A$ é contínua. Além disso,

$$\dot{u}(t) = T(t)Au_0 + T(t)g(0) + \int_0^t T(s)g'(t-s)ds = T(t)Au_0 +$$

$$+ T(t)g(0) + \int_0^t T(t-s)g'(s)ds,$$

$$Au(t) = \dot{u}(t) - g(t) \quad e$$

$$A_h u(t) = T(t)A_h u_0 + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)g(t+h-s)ds + \frac{1}{h} \int_h^0 T(s)g(t+h-s)ds +$$

$$+ \int_0^t T(s) \frac{g(t+h-s) - g(t-s)}{h} ds$$

onde

$$A_h u = \frac{T(h)u - u}{h}, \quad h > 0.$$

LEMA II.3.4. Se X é um espaço reflexivo e A_h é como no lema anterior, então para todo u em X tal que $\liminf_{h \rightarrow 0} |A_h u| < \infty$ segue-se que $u \in D(A)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2a], pg. 88, teorema 2.1.2.

Consideremos agora a equação

$$\dot{u} = Au + f(u)$$

onde $f: X_A \rightarrow X$.

DEFINIÇÃO II.3.6. Uma função u definida em $[0, a]$ é solução de II.3.5 se

- (i) $u: [0, a] \rightarrow X_A$ é contínua
- (ii) $u: [0, a] \rightarrow X$ é C^1
- (iii) a equação está satisfeita em $[0, a]$.

TEOREMA II.3.7. Suponhamos X reflexivo e que as hipóteses seguintes estão satisfeitas:

H_1 - $f: X_A \rightarrow X$ é diferenciável com derivada $f'(u)$ no seguinte sentido: $f'(u): X_A \rightarrow X$ é linear, tem extensão contínua para X (portanto $f'(u) \in L(X, X)$) e $f(u+h) - f(u) - f'(u)h = \theta(h)$ com $\frac{\theta(h)}{|h|} \rightarrow 0$ quando $|h|_{X_A} \rightarrow 0$.

$H_2 - f' : X_A \rightarrow L(X, X)$ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados e é contínua no seguinte sentido: se u_n, u estão em X_A , e $u_n \rightarrow u$ em X com $|Au_n|$ limitada, então $|f'(u_n) - f'(u)| \rightarrow 0$.

Então para todo $u_0 \in X_A$ existe $a > 0$ e solução $u(t)$ de II.3.5 definida em $[0, a]$.

OBSERVAÇÃO. Dizer que f é diferenciável no sentido acima é mais restrito do que dizer que $f : X_A \rightarrow X$ é diferenciável no sentido habitual pois estamos supondo que $\frac{|\theta(h)|}{|h|} \rightarrow 0$ quando $|h|_{X_A} \rightarrow 0$ e não que $\frac{|\theta(h)|}{|h|_{X_A}} \rightarrow 0$ quando $|h|_{X_A} \rightarrow 0$.

Este teorema apresenta uma versão diferente da encontrada em Segal [16], onde a função f é C^1 com derivada lipschitziana.

Antes de demonstrar o teorema vamos demonstrar alguns lemas que podem ser vistos como um cálculo diferencial para essa nova noção de derivada.

LEMA II.3.8. Se $u : I \rightarrow X_A$ é contínua e $u : I \rightarrow X$ é C^1 e valem as hipóteses H_1 e H_2 acima, então $f(u(\cdot)) : I \rightarrow X$ é C^1 e $\frac{d}{dt} f(u(t)) = f'(u(t))u'(t)$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\left| \frac{f(u(t+s)) - f(u(t))}{s} - f'(u(t))u'(t) \right|_X =$$

$$= \left| \frac{f(u(t) + u(t+s) - u(t)) - f(u(t))}{s} - f'(u(t))u'(t) \right|_X$$

$$= \left| f'(u(t)) \frac{(u(t+s) - u(t))}{s} - f'(u(t))u'(t) + \frac{\theta(u(t+s)-u(t))}{s} \right|_X$$

Como

$$\left| \frac{\theta(u(t+s)-u(t))}{s} \right|_X = \frac{|\theta(u(t+s)-u(t))|_X}{|u(t+s)-u(t)|_X} \frac{|u(t+s)-u(t)|_X}{|s|}$$

e $|u(t+s) - u(t)|_{X_A} \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$ segue-se que $\frac{d}{dt} f(u(t)) = f'(u(t))u'(t)$.

Quanto a continuidade de $f'(u(t))u'(t)$ temos:

$$|f'(u(t+\epsilon))u'(t+\epsilon) - f'(u(t))u'(t)|_X$$

$$\leq |f'(u(t+\epsilon))(u'(t+\epsilon)-u'(t))|_X + |(f'(u(t+\epsilon))-f'(u(t)))u'(t)|_X$$

e isto vai a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ por H_2 e pela continuidade de $u'(t)$.

LEMA II.3.9. Ainda nas hipóteses H_1 e H_2 vale a desigualdade do valor médio: $|f(u) - f(v)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(v+t(u-v))| |u-v|$ se u e v estão em X_A .

DEMONSTRAÇÃO. Do lema anterior temos:

$$\frac{d}{dt} f(v + t(u - v)) = f'(v + t(u - v))(u - v),$$

e a desigualdade segue por integração entre 0 e 1.

LEMA II.3.10. Ainda nas hipóteses H_1 e H_2

a) se $u_n : [0, a] \rightarrow X$ é uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente (em X) para $u : [0, a] \rightarrow X$ e $u_n(t)$, $u(t)$ estão em X_A com $|Au_n(t)|$ limitada para $n = 1, 2, \dots$ e $t \in [0, a]$, então $f'(u_n(t)) \rightarrow f'(u(t))$ em $L(X)$, uniformemente em $[0, a]$;

b) Se X é reflexivo, então f' é uniformemente contínua em conjuntos compactos K de X tais que $|Au| \leq \text{constante}$ se $u \in K$.

DEMONSTRAÇÃO. Óbvio (na parte b) temos que usar o Lema II.3.4).

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.3.7. Consideremos a equação integral

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds \quad \text{em } X.$$

Sejam $b > 0$ fixado, $L = \sup_{0 \leq t \leq b} |T(t)Au_0| + \sup_{0 \leq t \leq b} |T(t)f(u_0)|$,

$M = 4L$, $N = \sup_{\substack{0 \leq s \leq b \\ |u|_{X_A} \leq M}} |T(s)f'(u)|$ e $0 < a \leq b$ tal que $aN \leq \frac{1}{2}$.

Definamos

$$u_1(t) = T(t)u_0$$

$$u_{n+1}(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(u_n(s)) ds$$

e mostremos que $|Au_n(t)| \leq M$, $|u'_n(t)| \leq 2L$, para $0 \leq t \leq a$. De fato se $n = 1$ essas desigualdades são verdadeiras, supondo válidas para n temos pelo lema II.3.2:

$$u'_{n+1}(t) = T(t)Au_0 + T(t)f(u_0) + \int_0^t T(t-s) f'(u_n(s))u'_n(s) ds,$$

donde $|u'_{n+1}(t)| \leq L + aN^2L \leq 2L$.

Além disso,

$$Au_{n+1}(t) = u'_{n+1}(t) - f(u_n(t)) = u'_{n+1}(t) - f(u_n(0)) -$$

$$- \int_0^t f'(u_n(s))u'_n(s) ds, \text{ donde concluimos}$$

$|Au_{n+1}(t)| \leq 2L + L + aN^2L \leq 4L$, e a indução está completa.

As desigualdades provadas acarretam

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)|_X = \left| \int_0^t T(t-s) (f(u_n(s)) - f(u_{n-1}(s))) ds \right|_X \leq$$

$$\leq a N \sup_{0 \leq s \leq t} |u_n(s) - u_{n-1}(s)|_X \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq s \leq t} |u_n(s) - u_{n-1}(s)|_X$$

donde concluimos que $u_n(t) \rightarrow u(t)$ em X uniformemente em $[0, a]$. Como $|u'_n(t)| \leq 2L$, é fácil ver pelo lema II.3.2 que $|A_h u_n(t)|$ permanece limitada uniformemente em h e n e, portanto, pelo lema II.3.4 $u(t)$ está em X_A . Por passagem ao limite obtemos

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds = T(t)u_0 + \int_0^t T(s)f(u(t-s))ds.$$

Consideremos a função $v : [0, a] \rightarrow X$ contínua que resolve

$$v(t) = T(t)Au_0 + T(t)f(u_0) + \int_0^t T(t-s)f'(u(s))v(s)ds.$$

(observe que o núcleo é contínuo em t e s).

Então

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) &= \frac{T(t+h)u_0 - T(t)u_0}{h} - T(t)Au_0 - T(t)f(u_0) \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(u(t+h-s))ds + \int_0^t T(s) \left[\frac{f(u(t+h-s)) - f(u(t-s))}{h} \right. \\ &\quad \left. - f'(u(t-s))v(t-s) \right] ds. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{f(u(t+h-s)) - f(u(t-s))}{h} - f'(u(t-s)) v(t-s) =$$

$$= \left(\int_0^1 f'(u(t-s) + r(u(t+h-s) - u(t-s))) dr \right) \frac{u(t+h-s) - u(t-s)}{h}$$

$$- f'(u(t-s)) v(t-s) = \left(\int_0^1 (f'(u(t-s) + r(u(t+h-s) - u(t-s))) \right.$$

$$\left. - f'(u(t-s)) dr \right) \left(\frac{u(t+h-s) - u(t-s)}{h} \right) + f'(u(t-s)) v(t-s).$$

$$\cdot \left[\frac{u(t+h-s) - u(t-s)}{h} - v(t-s) \right]$$

obtemos

$$\left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right| \leq \gamma_h(t) + P \int_0^t \frac{u(t+h-s) - u(t-s)}{h} -$$

$- v(t-s) | ds$, onde $\gamma_h(t) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, uniformemente em $[0, a]$. Portanto

$$\left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right| \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

EXEMPLO II.3.11. Consideremos

$$u_{tt} = \Delta u + f(u) \quad \text{em } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado regular.

Escrevendo como sistema

$$\dot{w} = Aw + F(w)$$

$$w = (u, v), \quad A(u, v) = (v, \Delta u), \quad F(u, v) = (0, f(u)).$$

Sabemos que A gera grupo unitário em $H_0^1 \times L_2$ cujo domínio é $(H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1$.

Além disso, sabemos que $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ (funções contínuas em Ω) com imersão compacta.

Portanto $f : H_0^1 \cap H^2 \rightarrow L_2$ está bem definida se f é de classe C^1 . Mostremos que H_1 e H_2 estão satisfeitas:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left| \frac{f(u+h) - f(u) - f'(u)h}{|h|_{L_2}} \right|_{L_2} = \\ &= \frac{\left| \int_0^1 (f'(u+t \cdot h) - f'(u)) dt \cdot h \right|_{L_2}}{|h|_{L_2}} \leq \left| \int_0^1 f'(u+t \cdot h) - f'(u) dt \right|_{L_\infty} \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0$ em H^2 , $\sup |h| \rightarrow 0$, donde este último termo vai

a zero.

$H_2 - f'(u) \in L(L_p)$ é definida pela multiplicação por $f'(u)$.
Portanto

$$|f'(u_n) - f'(u)|_{L(L_p)} = |f'(u_n) - f'(u)|_{L_\infty}.$$

Se $u_n \rightarrow u$ em L_2 e $|u_n|_{H^2} \leq \text{cte}$, segue-se que $u_n \rightarrow u$ em $C(\bar{\Omega})$ pela imersão compacta, donde $|f'(u_n) - f'(u)|_{L(L_2)} \rightarrow 0$.

O fato é que f' leva limitados de X_A em limitados de $L(L_2)$ é óbvio pela mesma razão.

OBSERVAÇÃO. Usando argumentos semelhantes pode-se demonstrar resultados de continuação de soluções e dependência contínua em relação às condições iniciais. Dessa forma, se $u(t, u_0)$ é a solução de II.3.5 com $u(0, u_0) = u_0$ vemos que essa função é contínua em (t, u_0) , $t \geq 0$ e $u(t+s, u_0) = u(t, u(s, u_0))$, $t, s \geq 0$.

Nesse novo espaço de fase podemos enunciar e demonstrar resultados semelhantes aos teoremas II.2.3 e II.2.4.

TEOREMA II.3.12. Se o semi-grupo $\{T(t), t \geq 0\}$ gerado por A satisfaz $|T(t)| \leq Ke^{-\alpha t}$, $K, \alpha > 0$, α e K constantes e $f: X_A \rightarrow X$ é compacta de classe C^1 no sentido das hipóteses H_1 e H_2 e $f'(u) \cdot h$ pertence a um conjunto compacto fixo se $|u|_{X_A} \leq \text{cte}$ e $|h|_X \leq 1$, então a órbita de toda solução de II.3.5 que é limitada em $[0, +\infty)$ é pré-compacta.

~~DEMONSTRAÇÃO.~~ Por definição da norma em X_A basta mostrar que $\{Au(t), t \geq 0\}$ tem fecho compacto em X . Como $Au(t) = u'(t) - f(u(t))$, basta demonstrar que $\{u'(t), t \geq 0\}$ tem fecho compacto em X . Mas

$$u'(t) = T(t)Au_0 + T(t)f(u(0)) + \int_0^t T(s)f'(u(t-s))u'(t-s)ds.$$

Pelo raciocínio anterior vemos que $\{u(t), t \geq 0\}$ tem fecho compacto em X e daí concluímos que $f'(u(t-s))u'(t-s)$ pertence a um conjunto compacto fixo. Portanto o resultado segue do lema II.2.1.

TEOREMA II.3.13. Se $\{T(t), t \geq 0\}$ satisfaz as condições do teorema II.2.4 e f às do teorema anterior, então toda solução de II.3.5 que é limitada em $[0, +\infty)$ tem órbita pré-compacta em X_A .

DEMONSTRAÇÃO. Como anteriormente.

II.4. PRINCÍPIO DE INVARIANÇA

DEFINIÇÃO II.4.1. Seja $u(t), t \geq 0$ uma solução de II.3.5 com $u(0) = u_0$. Dizemos que $p \in X_A$ está no conjunto limite positivo $\omega(u_0)$ de $u(t)$ se existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $u(t_n) \rightarrow p$ em X_A .

TEOREMA II.4.2. Se a órbita de $u(t)$ é précompacta então $\omega(u_0)$ é não vazio, compacto, conexo, invariante e $d(u(t), \omega(u_0)) \rightarrow 0$

quando $t \rightarrow +\infty$ (essa distância é em X_A).

DEMONSTRAÇÃO. A habitual.

DEFINIÇÃO II.4.3. Se $V: X_A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua defini-

mos $\dot{V}(u_0) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(u(h, u_0)) - V(u_0)}{h}$. Dizemos ainda que V é

uma função de Liapunov de II.3.5 se $\dot{V}(u_0) \leq 0$ para todo $u_0 \in X_A$.

TEOREMA II.4.4. Se V é uma função de Liapunov de II.3.5 e $u(t)$, $t \geq 0$ é uma solução com órbita précompacta, então $\omega(u_0) \subset M$, onde M é o maior conjunto invariante contido no conjunto dos pontos u tais que $\dot{V}(u) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. (A prova é habitual e será dada para maior clareza). De fato, como $\dot{V}(u(t)) \leq 0$, segue-se que $V(u(t))$ é uma função não crescente. Como $\omega(u_0)$ é não vazio, existe $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\lim u(t_n)$ existe e, portanto, $\lim V(u(t_n))$ existe. Por causa da monotonicidade concluímos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(u(t))$ existe e isso acarreta que V é constante em $\omega(u_0)$ o que, por sua vez, implica $\dot{V}(u) = 0$ em $\omega(u_0)$ pela invariância desse conjunto. A afirmação final é também uma consequência da invariância de $\omega(u_0)$.

OBSERVAÇÃO. Se V é uma função de Liapunov de II.3.5 e

$\lim_{|u|_{X_A} \rightarrow +\infty} V(u) = +\infty$, é fácil ver que toda solução tem órbita limitada em $[0, \infty)$.

COROLÁRIO II.4.5. Se $\dot{V}(u) \leq -k(|Au + f(u)|)$, onde $k(s) > 0$ para $s > 0$, $k(0) = 0$, então o conjunto limite positivo de qualquer solução com órbita précompacta é formado de pontos de equilíbrio. Em particular, se o conjunto dos pontos de equilíbrio é totalmente desconexo (isto é, as componentes conexas se reduzem a pontos), segue-se que tal conjunto limite é formado por exatamente um ponto de equilíbrio.

II.5. APLICAÇÕES

Consideremos uma linha de transformação com perdas como esquematizada abaixo.

Como visto anteriormente esse problema pode ser visto como uma equação abstrata.

II.5.1. $\dot{u} = Au + f(u)$

no espaço $X = L_2[0, \ell] \times L_2[0, \ell] \times \mathbb{R}$, onde $u = (\phi, \psi, b) \in X$,

$$Au = \left(-\frac{1}{L} \psi' - \frac{R}{L} \phi', -\frac{1}{C} \phi' - \frac{G}{C} \psi, \frac{1}{C_1} \phi(\ell) \right).$$

$$D(A) = \{ (\phi, \psi, b) \in X : \phi, \psi \in AC[0, \ell], \phi', \psi' \in L_2[0, \ell], b = \psi(\ell), \psi(0) + R_0 \phi(0) = 0 \} \text{ e } f(u) = \left(0, -\frac{GE}{C}, \frac{g(b+E)}{C_1} \right).$$

Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 é fácil ver que $f : X_A \rightarrow X$ satisfaz as hipóteses H_1 e H_2 do teorema II.3.7, assim como as hipóteses dos teoremas II.3.12 e II.3.13.

TEOREMA II.5.2. A órbita de toda solução de II.5.1 que é limitada de $[0, +\infty)$ em X_A é précompacta.

DEMONSTRAÇÃO. É uma consequência imediata do teorema II.2.4 pois de acordo com [15] se

$$-\alpha > -\frac{(RC + LG)}{2LC} + \frac{1}{2\ell\sqrt{LC}} \ln \frac{|z_0 - R_0|}{|z_0 + R_0|}$$

onde $z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, existem P e Q como naquele teorema.

Nosso objetivo agora é dar condições para que toda solução de II.5.1 convirja para um ponto de equilíbrio e, para isso, vamos primeiramente usar o teorema II.4.4.

Seguindo [4] e supondo $g(v)$ função não linear de v tal

que $\int_0^V g(v) dv$ limitada inferiormente e $\max_v -\frac{g'(v)}{C_1} < \lambda < \frac{R}{L}$,

$\lambda > 0$, definimos o funcional $W : X_A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}
W(u) = & \lambda \left[\int_0^{\ell} \left(-\frac{1}{2} R I^2(x) + \frac{1}{2} G(V(x) + E)^2 - I(x) V_x(x) \right) dx \right. \\
& + \frac{1}{2} R_0 I^2(0) + \int_0^{V(\ell)+E} g(v) dv \left. \right] + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[\frac{1}{L} (V_x(x) - R I(x))^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{C} (-I_x(x) - G(V(x) + E))^2 \right] dx + \frac{1}{2C_1} (I(\ell) - g(V(\ell) + E))^2
\end{aligned}$$

$$u = (I(x), V(x), V(\ell)).$$

Mostremos inicialmente que $W(u) \rightarrow +\infty$ quando $|u|_{X_A} \rightarrow +\infty$.

De fato, $W(u)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
W(u) = & \frac{1}{2R} \left(\frac{R}{L} - \lambda \right) \int_0^{\ell} (R I(x) + V_x(x))^2 dx + \frac{1}{2R} \int_0^{\ell} V_x^2(x) dx + \\
& + \frac{\lambda}{2} R_0 I^2(0) + \frac{\lambda}{2} G \int_0^{\ell} V^2(x) dx + \frac{1}{2C} \int_0^{\ell} (G(V(x) + E) + \\
& + I_x(x))^2 dx + \lambda \int_0^{V(\ell)+E} g(v) dv + \frac{1}{2C_1} (I(\ell) - g(V(\ell) + E))^2
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $(a+b)^2 + b^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2}$ nos termos

$$\int_0^{\ell} (R I(x) + V_x(x))^2 dx + \int_0^{\ell} V_x^2(x) dx \geq \int_0^{\ell} (I_x(x) + G(V(x) + E))^2 dx +$$

$$+ \int_0^{\ell} (G(V(x) + E))^2 dx, \text{ o fato que } R_0 I(0) + V(0) = 0 \text{ e as}$$

hipóteses sobre g e λ podemos concluir que $W(u) \rightarrow +\infty$ quando $|u|_{X_A} \rightarrow +\infty$.

Pelo teorema II.3.13 vemos que as hipóteses do teorema II.4.4 estão satisfeitas.

Mostremos agora que $\dot{W}(u) \leq -k(|Au + f(u)|)$ onde $k > 0$; a derivada de W em relação à I.2.2 é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{W}(u) = & - (R - \lambda L) \int_0^{\ell} \frac{1}{L^2} (V_x(x) + RI(x))^2 dx \\ & - (G + \lambda C) \int_0^{\ell} \frac{1}{C^2} (I_x(x) + G(V(x) + E))^2 dx + \\ & - (\lambda C_1 + g'(V(\ell) + E)) \left[\frac{d}{dt} V(\ell) \right]^2 - R_0 \left[\frac{d}{dt} I(0) \right]^2 \\ \leq & -k \left[\int_0^{\ell} \left(\frac{1}{L^2} (V_x(x) + RI(x))^2 + \frac{1}{C^2} (I_x(x) + G(V(x) + E))^2 \right) dx \right. \\ & \left. + \frac{1}{C_1^2} (I(\ell) - g(V(\ell) + E))^2 \right] \end{aligned}$$

onde $k > 0$ pois $\max - \frac{g'(v)}{C_1} < \lambda < \frac{R}{L}$.

Pelo corolário II.4.5 temos que todo ponto no conjunto limite de qualquer solução de II.5.1 é um ponto de equilíbrio.

Consideremos a equação II.5.1 com $E = 0$ ou seja

II.5.3. $\dot{u} = Au + f(u)$ onde $f(u) = (0, -\frac{G}{C}, \frac{g(b)}{C_1})$.

TEOREMA II.5.4. Se o conjunto dos pontos de equilíbrio de II.5.3 é totalmente desconexo então o conjunto limite é formado de um ponto de equilíbrio; se existir uma linha de equilíbrio e $h'(0) \neq 0$, onde $h(\lambda)$ será definida, vale a mesma conclusão.

DEMONSTRAÇÃO. Como vimos em I.2.4 os pontos de equilíbrio de II.5.3 são

$$\begin{bmatrix} I(x) \\ V(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cosh \sqrt{RG} x + R_0 \sqrt{\frac{G}{R}} \sinh \sqrt{RG} x) I(0) \\ -(R_0 \cosh \sqrt{RG} x + \sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{RG} x) I(0) \end{bmatrix}$$

com a condição $g(I(0)) = kI(0)$ onde

$$\text{II.5.5. } k = - \frac{\cosh \sqrt{RG} l + R_0 \sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{RG} l}{\sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{RG} l + R_0 \cosh \sqrt{RG} l}.$$

Se o conjunto dos pontos de equilíbrio é totalmente desconexo, a conclusão do teorema segue pelo resultado anterior e pelo corolário II.4.5.

Se o conjunto dos pontos de equilíbrio não é totalmente desconexo então existe um intervalo $[a, b]$ onde a equação $g(I(0)) = kI(0)$ está identicamente satisfeita, ou seja g é linear em $[a, b]$.

Considerando a equação característica $h(\lambda)$ dada em [15] por

$$h(\lambda) = \left(\lambda + \frac{K}{C_1}\right) (-R_0 X_{11}(\ell, \lambda) + X_{12}(\ell, \lambda) +$$

$$+ \frac{R_0}{C_1} X_{21}(\ell, \lambda) - \frac{1}{C_1} X_{22}(\ell, \lambda)), \text{ onde}$$

$$\begin{bmatrix} X_{11}(\ell, \lambda) & X_{21}(\ell, \lambda) \\ X_{21}(\ell, \lambda) & X_{22}(\ell, \lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh[a(\lambda)\ell] & -\frac{a(\lambda)}{(G+\lambda C)} \sinh[a(\lambda)\ell] \\ -\frac{(G+\lambda C)}{a(\lambda)} \sinh[a(\lambda)\ell] & \cosh[a(\lambda)\ell] \end{bmatrix}$$

$$\text{se } a(\lambda) = \sqrt{(CL)\lambda^2 + (CR + GL)\lambda + GR} \neq 0 ;$$

se

$$\lambda = -\frac{G}{C} \begin{bmatrix} x_{11}(\ell, \lambda) & x_{12}(\ell, \lambda) \\ x_{21}(\ell, \lambda) & x_{22}(\ell, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-R + \frac{G}{C} L) \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se

$$\lambda = -\frac{R}{L} \begin{bmatrix} x_{11}(\ell, \lambda) & x_{12}(\ell, \lambda) \\ x_{21}(\ell, \lambda) & x_{22}(\ell, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-G + \frac{R}{L} C) \ell & 1 \end{bmatrix}$$

e k dado em II.5.5, temos $h(0) = 0$ e

$$h'(0) = \frac{-1}{C_1(\sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{RG} \ell + R_0 \cosh \sqrt{RG} \ell)} \left[C_1(R_0 \cosh \sqrt{RG} \ell + \sqrt{\frac{R}{G}} \sinh \sqrt{RG} \ell)^2 + \ell \frac{(CR + GL)}{\sqrt{RG}} \left(\frac{R_0^2}{R} - \frac{1}{G} \right) + \frac{(CR - GL)}{2\sqrt{RG}} \left(\left(\frac{R_0^2}{L} + \frac{1}{G} \right) \sinh \sqrt{RG} \ell \cosh \sqrt{RG} \ell + \frac{2R_0}{\sqrt{RG}} \sinh^2 \sqrt{RG} \ell \right) \right].$$

Admitamos que $h'(0) \neq 0$, ou seja zero é um auto valor simples e suponhamos que existam $w_1, w_2 \in \omega(u_0)$, $w_1 \neq w_2$; então existe hiperplano passando por um ponto de equilíbrio entre w_1 e w_2 ,

invariante pela equação II.5.3. Como w_1 e $w_2 \in \omega(u_0)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(t_{n_0})$ pertence ao hiperplano e pela invariância temos que $u(t)$ pertence ao plano $t > t_{n_0}$, o que é um absurdo.

II.6. USO DA TOPOLOGIA FRACA

Uma das técnicas para se provar que toda solução limitada de uma equação de evolução converge para um ponto de equilíbrio é o emprego da topologia fraca. Essa técnica consiste em provar primeiramente que toda solução limitada converge fracamente para um ponto de equilíbrio e depois, usando algum outro argumento, prova-se que a convergência na realidade é forte.

Seja X um espaço de Hilbert separável (portanto a topologia fraca é metrizável em conjuntos limitados).

LEMA II.6.1. Consideremos em X a equação abstrata

$$\dot{u} = Bu + f(u) + h(t)$$

e suponhamos satisfeitas as seguintes condições:

(i) B é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo;

(ii) $h : [0, +\infty) \rightarrow X$ é contínua e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} |h(s)| ds = 0$

(iii) $f : X \rightarrow X$ é lipschitziana em conjuntos limitados e $f : X_w \rightarrow X_w$ é contínua, onde X_w é o espaço X equipado com a topologia fraca.

Se $u(t)$, $t \geq 0$, é uma solução de II.6.2 que é limitada em $[0, +\infty)$, então o conjunto limite positivo, na topologia fraca, $\gamma_w(u)$ dessa solução é não vazio, compacto e conexo em X_w , $d(u(t), \gamma_w(u)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ (d é a distância que dá a topologia fraca) e $\gamma_w(u)$ é invariante em relação à equação limite.

II.6.3. $\dot{u} = Bu + f(u)$

Além disso, se $\eta_0 \in \gamma_w(u)$, $\eta_0 = \lim_w u(t_n)$ e $\eta(t)$ é a solução de II.6.3 com $\eta(0) = \eta_0$, então $\eta(t) = \lim_w u(t+t_n)$ uniformemente em conjuntos compactos de $[0, +\infty)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2].

Consideremos agora a equação abstrata de segunda ordem.

II.6.4. $u_{tt} - Au + h(u_t) + g(u) = 0$

num espaço de Hilbert separável H .

Essa equação foi estudada por Ball [2] no caso de h ser linear em u_t ; aqui trataremos o caso de h não linear. A difficuldade que isso traz é que a aplicação $v \in L_2(\Omega) \rightarrow h(v) \in L_2(\Omega)$ em geral não é fracamente contínua se h for não linear. De fato, se $\tilde{h}(v)$ é definida por

$$\tilde{h}(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \leq 0 \\ v & \text{se } v \geq 0 \end{cases}$$

é fácil ver que $\int_0^{2\pi} \tilde{h}(\sin nx) dx = 2$. Portanto, $\sin nx \rightarrow 0$ e $\tilde{h}(\sin nx) \not\rightarrow 0$. Como consequência, $h(v) = \tilde{h}(v) + v$ também não é fracamente contínua e este é precisamente o tipo de h que consideraremos.

Escrevendo como anteriormente II.6.4 na forma de sistema

$$\text{II.6.5.} \quad \dot{w} = Bw + f(w)$$

no espaço de Hilbert $X = D(-A)^{1/2} \times H$ onde $w = (u, v)$, $Bw = (v, Au)$, $f(w) = (0, -h(v) - g(u))$ $D(B) = D(A) \times D(-A)^{1/2}$, podemos demonstrar o seguinte:

TEOREMA II.6.6. Suponhamos satisfeitas as seguintes condições:

- (i) A é auto-adjunto negativo definido;
- (ii) $g : D(-A)^{1/2} \rightarrow H$ é fracamente contínua, lipschitziana em conjuntos limitados e $g(u) = \text{grad } G(u)$ no produto escalar de H , onde G é limitada inferiormente em conjuntos limitados e G fracamente contínua;

(iii) $h : H \rightarrow H$ é lipschitziana em conjuntos limitados e
 $\langle v, h(v) \rangle \geq \alpha |v|^2$, $\alpha > 0$ e $\alpha |v| \leq |h(v)| \leq \beta |v|$;

(iv) $D(-A)^{1/2}$ é compactamente imerso em H ;

(v) o conjunto dos pontos de equilíbrio é finito. Então o conjunto limite forte de toda solução limitada é formado de um ponto de equilíbrio.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(u(t), v(t))$ uma tal solução limitada em $[0, +\infty)$ e consideremos o funcional

$$W(u, v) = \frac{|v|^2}{2} + \frac{|(-A)_u^{1/2}|^2}{2} + G(u) .$$

Então

$$\dot{W}(t) = -\langle v, h(v) \rangle \leq -\alpha |v|^2 \leq 0 .$$

Como $(u(t), v(t))$ é limitada em $[0, +\infty)$ segue-se de (ii) que $W(u(t), v(t))$ é limitada inferiormente e, portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$ existe; em particular, $|v(t)|^2 \leq -\frac{\dot{W}(t)}{\alpha}$ acarreta que

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} |v(s)|^2 ds = 0$ e esse fato juntamente com as desigual-

$$\text{dades } \int_t^{t+1} |h(v(s))| ds \leq \sqrt{\int_t^{t+1} |h(v(s))|^2 ds} \leq \beta \sqrt{\int_t^{t+1} |v(s)|^2 ds}$$

nos permite concluir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} |h(v)(s)| ds = 0$.

Usando o lema II.6.1 vemos então que o conjunto limite fraco dessa solução é invariante em relação à equação limite.

$$u_t = v$$

$$v_t = Au - g(u)$$

Sejam (U_0, V_0) um ponto desse conjunto limite e $(u(t_n), v(t_n))$ tal que $(u(t_n), v(t_n)) \rightharpoonup (U_0, V_0)$. De acordo com o lema II.6.1 $(u(t+t_n), v(t+t_n)) \rightharpoonup (U(t), V(t))$ onde $(U(t), V(t))$ é a solução da equação limite com condição inicial (U_0, V_0) . Em particular, $|V(s)|^2 \leq \liminf |v(s+t_n)|^2$ usando o lema de Fatou concluímos que se $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^t |V(s)|^2 ds &\leq \liminf \int_0^t |v(s+t_n)|^2 ds \leq \liminf \left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) \int_0^t \dot{W}(s+t_n) ds \\ &= \liminf \left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) (W(t+t_n) - W(t_n)) = 0. \end{aligned}$$

Trabalhando da mesma forma com $t \leq 0$ obtemos $\int_0^t |V(s)|^2 ds = 0$

para todo t real donde $V(s) = 0$ o que acarreta que as soluções do conjunto limite fraco são equilíbrios da equação limite e da equação original pois $h(0) = 0$. Como os pontos de equilíbrio são isolados, concluímos que esse conjunto limite fraco tem um só ponto e, portanto $(u(t), v(t)) \rightharpoonup (U, 0)$.

Fazendo uma translação podemos tomar $U = 0$ e $g(0) = 0$.
Com essa mudança $(u(t), v(t)) \rightarrow (0, 0)$.

Vamos agora mostrar que essa convergência é forte, isto é, que $|v(t)|^2 + |(-A)^{1/2}u(t)|^2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Primeiramente observemos que esse limite existe pois $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$ existe e

$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(u(t))$ também existe devido as hipóteses sobre G . Além

disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u, v \rangle &= |v|^2 + \langle u, Au - h(v) - g(u) \rangle = \\ &= |v|^2 - |(-A)^{1/2}u|^2 - \langle u, h(v) \rangle - \langle u, g(u) \rangle = \\ &= 2|v|^2 - (|v|^2 + |(-A)^{1/2}u|^2) - \langle u, h(v) \rangle - \langle u, g(u) \rangle; \end{aligned}$$

integrando essa identidade entre t e $t+1$ e observando que:

(i) $\langle u(t), v(t) \rangle \rightarrow 0$, $\langle u(t), h(v(t)) \rangle \rightarrow 0$ e $\langle u(t), g(u(t)) \rangle \rightarrow 0$
(pois $u(t) \rightarrow 0$ em H por causa da imersão compacta).

(ii) $\int_t^{t+1} |v(s)|^2 ds \rightarrow 0$

concluimos que $\int_t^{t+1} (|v(s)|^2 + |(-A)^{1/2}u(s)|^2) ds \rightarrow 0$ quando

$t \rightarrow +\infty$ e, portanto, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (|v(t)|^2 + |(-A)^{1/2}u(t)|^2) = 0$.

OBSERVAÇÃO. O caso em que h depende também de u pode ser tratado de forma semelhante.

II.6.7. APLICAÇÕES

Consideremos a equação de onda

$$u_{tt} - \Delta u + h(u_t) + g(u) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

com condição de fronteira $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Suponhamos $h(0) = 0$, $|h'(v)| \leq M$ e $0 < \alpha \leq \frac{h(v)}{v}$ para todo v real. Suponhamos ainda que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja C^1 e satisfaça às mesmas condições de crescimento como anterior e que o conjunto dos pontos de equilíbrio é finito.

Usando os teoremas de imersão não é difícil de ver que as hipóteses do teorema II.6.6 estão satisfeitas.

Esse teorema pode ser também aplicado às equações abstratas e concretas tratadas no final do capítulo I.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDRADRE, N.G., On a nonlinear system of partial differential equations, J. Math. Anal. and Appl. 91, (1), (1983), 119-130.
- [2] BALL, J.M., On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations, Journal of Diff. Equations, 27, (1978), 224-265.
- [2a] BUTZER, P., BERENS, H., Semi-groups of Operators and Approximations, Springer-Verlag, 1967.
- [3] BRAYTON, R.K., Nonlinear oscillations in a distributed network, Quartely of Appl. Math., Vol. XXIV, (1967), 289-301.
- [4] BRAYTON, R.K. and MIRANKER, W.L., A stability theory for nonlinear mixed initial boundary value problems, Arch. Rational Mech. Anal. 17, (1964), 358-376.
- [5] DARBO, G., Punti uniti in trasformazione a condominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24 (1955), 84-92.
- [6] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T., Linear Operators, Parte I: General Theory, Interscience, New York, (1964).

- [7] HALE, J.K. and LOPES, O.F., Fixed point theorems and dissipative processes, *Journal of Diff. Equations*, 13, (1973), 391-402.
- [8] LOPES, O., Stability and forced oscillations, *J. Math. Anal. and Appl.*, 55, (3), (1976), 686-698.
- [9] MARTIN, R. Jr., *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Interscience, New York, (1976).
- [10] MEDEIROS, L.A., On a new class of nonlinear wave equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, 69, (1), (1979), 252-262.
- [11] NAKAO, M., Bounded, periodic or almost periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, *J. Diff. Equations*, 23, (3), (1977), 368-386.
- [12] NUSSBAUM, R., Some asymptotic fixed point theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 171, (1972), 349-375.
- [13] PAZY, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, University of Maryland, Lecture Notes, Vol. 10, (1974).
- [14] PRODI, G., Soluzioni periodiche di equazioni a derivati parziali di tipo iperbolico nonlineari, *Annali di Mat.*, XLII, (1956), 25-49.

- [15] RIBEIRO, H.S., Teoria espectral para um sistema hiperbólico e bifurcação de Hopf, Tese de doutoramento, ICMUSP, São Carlos, SP, Brasil, (1980).
- [16] SEGAL, I., Nonlinear semigroups, Annals of Mathematics , Vol. 78, nº 2, (1963), 339-364.
- [17] YOSHIKAWA, T., Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Math. Soc. of Japan, (1966).
- [18] WEBB, G.F., A Bifurcation Problem for a Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equation, SIAM J. Math. Analysis Vol. 10, nº 5, set. (1979).