EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS,
ESTABILIDADE E APLICAÇÕES DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS RETARDADAS AUTÔNOMAS NÃO LINEARES

Sandra Maria Semensato de Godoy

Orientador: *Prof. Dr. José Geraldo dos Reis*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universidad
de de São Paulo, para a obtenção do Títul
o de Doutor em Ciências (Matemática).

MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Geraldo dos Reis, pela dedicação, solicitude e paciência com que nos orientou, pelo exemplo de seriedade profissional com que conduziu este trabalho, e pela grande amizade com que sempre nos distinguiu.

Ao Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas, pela prontidão e boa vontade com que sempre nos ouviu, e pelas inúmeras e oportunas sugestões apresentadas.

Ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, nosso Orientador de Mestrado e nosso incentivador no início do Doutorado.

Ao Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé, pela orientação na fase de cursos do Doutorado.

À Sidney Porcincula, Técnico em Computação do Departamento de Genética e Matemática Aplicada à Biologia, da FMRP-USP, pela gentileza em nos auxiliar na parte computacional.

Aos colegas do ICMSC-USP, pela amizade e incentivo.

À Sonia Regina Derigi Borges e à Elisabeth Luísa Moretti e Silva, funcionárias da Área Acadêmica do ICMSC-USP, pela gentileza, prontidão e eficiência com que sempre nos atenderam, e pela amizade e carinho que nos dedicam em todos os momentos.

À Sílvia Helena Franchin, Secretária do Departamento de Matemática, do ICMSC-USP, pela paciência e esmero com que datilografou este trabalho.

Enfim, agradeço a todos aqueles que direta, ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Aos Meus Pais

Ao Godoy

À Renata e À Vânia

A B S T R A C T

The Retarded Differential Equation

$$(I) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda F(x(t-1)),$$

was studied.

First, some applications on three biological models were made.

It was shown that, for λ going to infinity, under mild conditions in $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., F has a stable orbit 2-periodic, the periodic solutions of (I), converge to a "square wave" type function.

Sequentially, studying the stability of the solutions, for $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, it was shown that it only depends on the eigenvalues of $DF(0)$.

Finally, applying additional hypothesis in F , it was shown the existence of periodical solutions for $\lambda > \lambda_0$, being $DF(0)$ a rotation followed by a stretching, i.e., the Jacobian matrix of $DF(0)$ assumes one of the following forms:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b > a, \quad a^2 + b^2 > 1.$$

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - O Comportamento das Soluções quando $\lambda \rightarrow \infty$ em presença de uma Órbita Periódica de Período 2 Estável	01
CAPÍTULO II - Aplicações em Alguns Modelos Usados em Biologia	16
CAPÍTULO III - Estabilidade e Existência de Soluções Periódicas	35
Capítulo IV - Alguns Exemplos	72
BIBLIOGRAFIA	83

INTRODUÇÃO

Este trabalho é dedicado ao estudo de Equações Diferenciais Retardadas do tipo:

$$(I) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda F(x(t-1)), \quad \text{onde } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

O trabalho constitui-se de três partes distintas

A primeira parte é desenvolvida nos capítulos I e II nos quais estudamos o caso em que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e estamos interessados no comportamento das soluções quando λ tende ao infinito.

O primeiro capítulo é dedicado a alguns preliminares e resultados já estabelecidos anteriormente em [5] e [18], que são necessários aos nossos objetivos.

No segundo capítulo, aplicamos os resultados do primeiro, a três modelos que são usados em biologia e ecologia e medicina.

A interpretação de cada modelo é feita no corpo do trabalho.

O primeiro modelo é usado pela "Comissão Internacional da Pesca da Baleia" e consiste da seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\mu N(t) + \nu N(t-\tau)(1 - N^Z(t-\tau)).$$

O segundo modelo é usado em hematologia, e explora a existência de um retardo existente no controle da produção de células do sangue pela concentração de células do sangue periférico.

A equação é dada por:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma x(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tau)}{\theta^n + x^n(t-\tau)}.$$

O terceiro modelo é utilizado no estudo de população da mosca azul (*Lucila Cuprina*).

A equação é dada por:

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\delta N(t) + PN(t-t_D) \exp\left\{-\frac{N(t-t_D)}{N_D}\right\}$$

Estes modelos foram estudados em [5] quanto a existência de um contínuo de soluções periódicas que variam lentamente.

O objetivo agora é mostrar que quando λ tende ao infinito, mas de tal forma que F continue tendo uma órbita de período 2 estável, então as soluções que variam lentamente tendem uniformemente em compactos de $R-Z$ para a função "onda quadrada", cujos patamares são os valores de F nesta órbita de período dois.

Ao mesmo tempo, foi feito um estudo do comportamento das funções que aparecem nos três modelos. Este estudo foi feito através de variações nos parâmetros de cada função em particular, completando informações que eram dada em [5].

Foi então possível, observando o comportamento das iteradas de cada função particular, determinar de maneira aproximada, duas novas regiões, ou seja:

- a) A região onde a órbita de período dois é estável.
- b) A região em que aparecem órbitas de período três, e, portanto, de acordo com [15], a existência de órbitas de qualquer período $n \in \mathbb{N}$.

A terceira e quarta partes, formam o capítulo três.

Na terceira, passamos a estudar o problema da estabilidade da solução nula de (I) quando $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. O caso $n=1$ é estudado em [18].

Inicialmente são apresentados alguns resultados, que embora não sejam difíceis de serem estabelecidos, são novos, e, mostram-se úteis em conclusões posteriores.

Entre eles destacamos os seguintes:

1º) Se existir uma sequência de bolas $A_n \subset R^n$, $A_n \supset A_{n+1}$, $f(A_n) \subset A_{n+1}$, então toda solução de (I) com condição inicial $\phi/\phi(\theta) \in A_{n_0}$, para algum n_0 , permanece em A_{n_0} , para todo $t \geq 0$.

2º) Se nas condições de (1º) tivermos $A_1 = F(A)$ e $A_n = F(A_{n-1})$ e $\emptyset \neq A_\infty = \bigcap_{n \geq 1} A_n$, então toda solução de I com condição inicial em A, tende para A_∞ com $t \rightarrow \infty$.

3º) Se $E \subset R^n$ é um subespaço vetorial de R^n tal que $F: E \rightarrow E$, então E é invariante pelo operador solução de (I).

Em seguida, é feito o estudo da equação característica de (I) para $n = 2$.

Fica claro no texto que com os resultados dos itens 1º, 2º e 3º, basta estudarmos o caso $n = 1$ e $n = 2$ para determinarmos a estabilidade para qualquer $n > 2$.

Neste sentido, mostra-se que o comportamento das soluções de (I) no que diz respeito a estabilidade, depende apenas do Jacobiano de F no zero.

Com relação a este aspecto destacamos o seguinte resultado.

"A solução nula é assintoticamente estável para todo $\lambda > 0$, se e somente se, todos os auto valores de $DF(0)$, reais ou complexos, tiverem módulo menor do que um".

A existência de um auto valor qualquer com norma maior do que um, implica a existência de um $\lambda_0 \geq 0$ tal que a solução nula é instável para $\lambda > \lambda_0$.

Terminando o terceiro capítulo, apresentamos um teorema sobre a existência de soluções periódicas da equação (I) quando $n = 2$, com F satisfazendo algumas hipóteses adicionais e $JF(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ ou $JF(0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a > 0$, $b > 0$, $b > a$, $a^2 + b^2 > 1$.

Mostramos inicialmente que para todo $\lambda > \lambda_0$ existe uma solução periódica não trivial de (I), que ocorre por bifurcação de Hopf.

Este teorema é demonstrado usando-se a teoria de ponto fixo para operadores definidos em cones.

Finalmente, no último capítulo, alguns exemplos de equações com estas propriedades, são apresentados.

NOTAÇÕES

$C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$: espaço de Banach das funções contínuas no intervalo $[-r, 0]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, com a topologia da convergência uniforme.

$$\text{Se } \phi \in C, \quad \|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|.$$

Dada uma função contínua $x : [\sigma - r, \sigma + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a > 0$, define-se $x_t \in C$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, $\sigma \leq t \leq \sigma + a$.

Dada a equação diferencial funcional retardada

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad f : D \subset \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dizemos que $x = x(t) = x(t, \phi)$ é uma solução da equação acima com condição inicial $\phi \in C$ se existe $a > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $x \in C([\sigma - r, \sigma + a], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$, $x(t)$ satisfaz a equação acima para $t \in [\sigma, \sigma + a]$ e $x_\sigma(\sigma, \phi) = \phi$.

Para maiores detalhes sobre a teoria geral das Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento, veja [12].

CAPÍTULO I

O COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES QUANDO $\lambda \rightarrow \infty$ EM PRESENÇA DE UMA ÓRBITA PERIÓDICA DE PERÍODO 2 ESTÁVEL

A equação

$$(I-1) \quad \dot{x}(t) = -x(t) + f_{\alpha}(x(t-r)), \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tem sido intensivamente estudada, tendo em vista as suas aplicações em modelos biológicos. Vide [5], [7], [8], [9], [17], [19].

Esta equação é equivalente à equação:

$$(I-2)_{\lambda} \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f_{\alpha}(x(t-1)), \quad \lambda > 0.$$

De fato, basta fazer $t = sr$ e $\bar{x}(s) = x(sr)$.

É fácil ver que dada $\psi \in C([-1,0], \mathbb{R})$, a solução $x(t)$ de $(I-2)_{\lambda}$ é obtida integrando-se passo a passo, em intervalos de tamanho unitário, lembrando que:

$$x(t) = -e^{-\lambda t} \psi(0) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f_{\alpha}(\psi(s-1)) ds$$

Para tornar este trabalho auto-suficiente, vamos apresentar uma série de resultados que podem ser encontrados em [5], [18].

Proposição (I-1):

(i) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\lambda > 0$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado tal que $f(I) \subset I$.

Se $\psi \in C([-1,0], \mathbb{R})$ satisfaz $\psi(\theta) \in I$ para todo $\theta \in [-1,0]$, então a solução $x(t, \lambda, \psi)$ de $(I-2)_{\lambda}$ satisfaz $x(t, \lambda, \psi)(\theta) \in I$, $\forall t \in I$.

(ii) Definimos o conjunto

$$I_{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I), \quad \text{onde } f^n(I) = f(f^{n-1}(I)).$$

Necessariamente I_∞ é um subconjunto fechado e conexo de I .

Se $I_\infty \neq \emptyset$ então as soluções de $(I-2)_\lambda$ com $\psi(\theta) \in I$ para $\theta \in [-1, 0]$, satisfazem:

$$\text{dist}(x(t, \lambda, \psi), I_\infty) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Vejamos agora o caso onde f tem um ponto fixo a que é um "atrator", isto é, para todo $x \in I$, $f^n(x) \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$.

Proposição (I-2):

Seja $f: I \rightarrow I$ contínua e seja I um intervalo compacto.

Seja $x_n = x_n(x_0) = f^n(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

Suponhamos que exista $a \in I$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ para todo $x_0 \in I$.

Então o conjunto $I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I) = \{a\}$.

Nas condições das duas proposições anteriores, podemos fazer a seguinte afirmação sobre o comportamento assintótico das soluções de $(I-2)_\lambda$.

Corolário (I-1):

Sejam $f: I \rightarrow I$, $I = [B, A]$, e a com as mesmas propriedades da proposição (I-2).

Se $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ satisfaz $B \leq \psi(t) \leq A$, para todo $t \in [0, 1]$ e $\lambda > 0$, então temos para a solução de $(I-2)_\lambda$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \lambda, \psi) = a.$$

O teorema seguinte, mostrou-se muito útil nas aplicações que faremos posteriormente.

Teorema (I-1):

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Se x^* é ponto fixo atrator de f , isto é, $|f'(x^*)| < 1$, então $x(t) \equiv x^*$ é ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $(I-2)_\lambda$.

Consideremos agora a equação $(I-2)_\lambda$ no caso em que $k = f'(x^*)$ é tal que $|k| > 1$.

A equação característica associada a $(I-2)_\lambda$ é

$$(I-3) \quad \zeta + \lambda - \lambda k e^{-\zeta} = 0.$$

O lema seguinte dá uma perfeita caracterização do comportamento das raízes de (I-3) em função de λ .

Lema (I-1):

(a) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que a equação característica admite uma raiz imaginária pura.

(b) Existe uma sequência $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \rightarrow \infty$ tal que para cada λ_m existe $R_m \in \mathbb{R}$ com iR_m solução da equação (I-3).

Mais ainda: Se $k < -1$, a equação tem precisamente m raízes com parte real e imaginária positivas no intervalo $(\lambda_{m-1}, \lambda_m)$.

Precisamos de mais algumas definições:

Definição (I-1):

(i) Dizemos que x_0 é um **ponto fixo ejetivo** de f , se existir uma vizinhança U de x_0 , tal que, para todo $x \in U - \{x_0\}$, existe um inteiro positivo $k(x)$ tal que $f^{k(x)}(x) \notin U$.

(ii) Dizemos que x_0 é um **ponto fixo atrator** de f , se existir

uma vizinhança V de x_0 , tal que para cada vizinhança U de x_0 , e $x \in V$, existe um inteiro N tal que $f^n(x) \in U$, para todo $n \geq N$.

O teorema seguinte descreve como se comporta a equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f_{\lambda, \mu}(x(t-1)),$$

de acordo com a variação dos parâmetros λ e μ .

O nosso objetivo em apresentá-lo aqui é melhorá-lo obtendo informações ainda mais detalhadas sobre a região A_3 (definida no Teorema abaixo), que se subdividirá em outras, nas quais o comportamento das soluções é bastante distinto. E isto será feito tendo em vista aplicações nos modelos que virão posteriormente.

Teorema (I-2):

Consideremos a equação (I-2) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.

Suponhamos que $f_{\lambda, \mu} : I \rightarrow I$, $f_{\lambda, \mu}(0) = 0$, $f_{\lambda, \mu}(1) < 1$, para todo λ, μ .

Suponhamos ainda que:

S_1) existe uma região $A_1 \subset \mathbb{R}^2$ tal que para $(\lambda, \mu) \in A_1$, $f(\cdot)$ tem apenas o zero como ponto fixo e $f'_{\lambda, \mu}(0) = k$, $|k| < 1$.

S_2) existe uma região $A_2 \subset \mathbb{R}^2$ tal que para $(\lambda, \mu) \in A_2$, $f(\cdot)$ tem um novo ponto fixo $x^* \neq 0$, $x^* = x^*(\lambda, \mu)$, $f'_{\lambda, \mu}(0) > 1$ e $f'_{\lambda, \mu}(x^*) = k$, $|k| < 1$, e também $(\lambda, \mu) \in A_2 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$ (λ_0 referido no Lema (I-1)).

S_3) existe uma região $A_3 \subset \mathbb{R}^2$ tal que para $(\lambda, \mu) \in A_3$, $f'_{\lambda, \mu}(0) > 1$ e $f'_{\lambda, \mu}(x^*) < -1$ e também $(\lambda, \mu) \in A_3 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$.

Então valem as seguintes afirmações:

1º) Para $(\lambda, \mu) \in A_1$, a solução nula é estável e atrai toda solução com condição inicial ψ tal que $\psi(t) \in I$, $-1 \leq t \leq 0$.

2º) Para $(\lambda, \mu) \in A_2$, a solução nula é ejetiva e x^* é estável.

3º) Para $(\lambda, \mu) \in A_3$, a solução nula e a solução x^* são ejetivas.

Ainda mais:

Para $\lambda_m = \frac{\lambda_0 + 2m\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}$, onde λ_0 e k são como no lema (I-1),

acontece uma bifurcação de Hopf da solução x^* , com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas (a partir de $(\lambda_0, 0)$).

Como anteriormente, maiores informações sobre o comportamento assintótico das soluções da equação $(I-2)_\lambda$ podem ser dadas através do comportamento da f .

É o que passamos a fazer a seguir.

Seja $f = f_\alpha$ uma função contínua, tal que $f(0) = 0$, existe um intervalo $I \subset [0, 1]$ tal que $f: I \rightarrow I$, existe $c \in I$ tal que c é o ponto de máximo de f em I e com a seguinte propriedade: f é crescente se $0 < x < c$ e decrescente se $x > c$.

Nestas condições, definimos:

Definição (I-2):

(i) A órbita de $x \in I$ é a sequência

$$\{f^n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$$

consistindo de x e de suas sucessivas iterações.

(ii) A órbita de $x \in I$ é uma **órbita periódica** de f se $f^n(x) = x$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Neste caso, o menor destes n é o período da órbita.

Usaremos o seguinte resultado:

"Uma condição necessária e suficiente para que a órbita n -periódica de x seja estável é que $|(f^n)'(x)| < 1$ ".

Voltemos à nossa equação $(I-2)_\lambda$.

Seja $k = f'(0)$.

Se $|k| < 1$, então a solução nula é estável e se $|k| > 1$ então a solução nula é instável e "aparece" um novo ponto fixo atrator x^* . Sabemos que este ponto fixo permanece estável enquanto $-1 < f'(x^*) < 1$.

Quando $|f'(x^*)| > 1$, estamos interessados em saber o que acontece com a solução da equação $(I-2)_\lambda$ quando os parâmetros λ, μ variam.

Sabe-se da literatura que à medida que os parâmetros variam, o comportamento da f também varia, de forma que, no momento em que o ponto x^* deixa de ser estável, surgem, por bifurcação deste ponto, 2 outros pontos, x_1 e x_2 , que são pontos fixos de f^2 e, portanto, uma órbita de período 2 de f .

Inicialmente, esta órbita é estável. Conforme os parâmetros continuam a crescer, esta órbita também se tornará instável e dará origem a uma órbita de período 4 e assim sucessivamente, até que órbitas de período arbitrariamente grande surjam, estabelecendo o que é chamado de maneira geral, caos [15].

O nosso objetivo principal é estudar o comportamento das solu-

Sabemos que existe uma região para os parâmetros na qual esta órbita é estável.

Um dos nossos objetivos, será, em cada modelo, a determinação desta região e o comportamento assintótico das soluções de $(I-2)_\lambda$ para valores do parâmetro nesta região.

Notemos que para uma função f que satisfaz as condições acima impostas, existe uma vizinhança V de x^* tal que para todo $x \in V$, temos:

$$I \quad \begin{cases} \text{se } x < x^* \Rightarrow f(x) > x^* \\ \text{se } x > x^* \Rightarrow f(x) < x^* \end{cases}$$

Sabemos então que, nestas condições, existe uma conjugação topológica entre as soluções de $(I-2)_\lambda$ em uma vizinhança de x^* e as soluções de:

$$(I-3)_\lambda \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda g_\alpha(x(t-1))$$

onde:

$$II \quad \begin{cases} g : [-B, A] \rightarrow [-B, A], \quad 0 \in [-B, A] \\ g'(0) < -1, \quad xg(x) < 0, \quad x \neq 0, \quad g \in C^1 \end{cases}$$

Para isto, basta definir:

$$g(x) = f(x + x^*) - f(x^*) .$$

E se f satisfaz I então g satisfaz II, pelo menos em uma vizinhança de zero.

Mostremos que g satisfaz as seguintes condições:

(H₁) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem constantes positivas A e B tais que

$$g([-B, A]) \subset [-B, A]$$

$$xg(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in [-B, A], \quad x \neq 0.$$

(H₂) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g(0) = 0$, g é diferenciável em $x = 0$, e $g'(0) = -k < -1$, g é monótona decrescente em alguma vizinhança de $x = 0$.

Temos:

$$g'(0) = f'(x^*) < -1.$$

Também temos que g está definida em uma vizinhança V do zero e para x tal que $x + x^* \in V$, segue que

$$\text{se } x < 0 \Rightarrow x + x^* < x^* \Rightarrow f(x + x^*) > f(x^*) = x^* \text{ e portanto } g(x) > 0$$

$$\text{se } x > 0 \Rightarrow x + x^* > x^* \Rightarrow f(x + x^*) < f(x^*) = x^* \text{ e portanto } g(x) < 0.$$

Agora, note que g não vai poder ser definida em todo o intervalo $[-x^*, 1-x^*]$ (lembre-se que f é definida em $[0, 1]$), pois, neste caso, $g(-x^*) = -f(x^*) < 0$ e, portanto, a hipótese $xg(x) < 0$ não se verificará.

Portanto, se faz necessário reduzir a vizinhança em torno do zero a fim de que g satisfaça a todas as condições.

Seja então g definida em um intervalo "conveniente" $[-B, A]$.

Isto será feito em detalhes em cada uma das aplicações, posteriormente.

Suponhamos agora que f possua uma órbita de período 2 estável $\{x_1, x_2\}$.

Mostremos que g satisfaz;

(H_3) : a função g satisfaz (H_1) . Além disso, existem $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$, $y_2 \leq A$, $y_1 \geq -B$ tais que se $y_0 \in (0, A]$ e $y_n = g^n(y_0)$ é an-êsima iterada de y_0 sob g , então para cada $n \geq 0$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = y_2$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = y_1.$$

Para demonstrar (H_3) precisamos de hipóteses adicionais.

Entretanto, os modelos que aparecem nas aplicações no próximo capítulo, satisfazem a estas hipóteses.

Vamos então colocar as hipóteses necessárias, e mostrar então que (H_3) estará satisfeita, se estas hipóteses forem verificadas.

S_1) Suponhamos que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ seja de classe C^3 e satisfaça a todas as condições já impostas na página 5.

S_2) Suponhamos ainda, que a derivada Schwarziana de f em x , denotada por $Sf(x)$ e definida por:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

seja estritamente negativa $\forall x \in [0, 1]$, $x \neq c$.

S_3) Suponhamos que f leve o intervalo $[f(1), f(c)]$ em si próprio.

Nestas condições, mostraremos que (H_3) está satisfeita.

O seguinte teorema, devido a David Singer, encontra-se Collet and Eckmann - "Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems" -

Teorema (I-3):

Se f satisfaz S_1, S_2 , então cada órbita periódica estável atrai pelo menos um dos pontos: $0, c, 1$ (isto é, os extremos do intervalo, ou o ponto crítico).

Dois importantes resultados seguem deste teorema:

Corolário (I-2):

Se f satisfaz S_1, S_2, S_3 , então ela possui no máximo uma órbita periódica estável, mais possivelmente um ponto fixo estável no intervalo $[0, f(1))$.

Se c não for atraído para uma órbita periódica estável então f não possui órbita periódica estável em $[f(1), f(c)]$.

Corolário (I-3):

Se f satisfaz S_1, S_2, S_3 e se $f'(0) > 1$, então a alternativa de um ponto fixo em $[0, f(1))$ não pode ocorrer.

Seja $x \in [0, 1]$ um ponto fixo estável de f^n e suponha que $|(f^n)'(x)| < 1$.

A **variedade estável** de x é o conjunto dos pontos y para os quais $f^{n \cdot m}(y) \rightarrow x$, $m \rightarrow \infty$.

A **variedade estável semi local** de x é a componente conexa da variedade estável de x , que contém x . Ela é um intervalo aberto $(r, s) \subset [0, 1]$.

Observemos que se no lugar de $[0, 1]$ colocarmos $[a, b]$, todos os resultados acima continuam válidos, com as convenientes adaptações.

Passemos agora à demonstração de (H_3) .

Mostremos inicialmente que para $x_0 \in (x^*, x^* + A) = (x^*, A')$,
 $A' > f(c)$,

$$f^{2n+1}(x_0) \rightarrow x_1, \quad n \rightarrow \infty$$

e

$$f^{2n}(x_0) \rightarrow x_2, \quad n \rightarrow \infty$$

onde x^*, x_1, x_2 foram definidos na página 6.

É imediato que se $f^{2n}(x_0) \rightarrow x_2, \quad n \rightarrow \infty$, então $f^{2n+1}(x_0) \rightarrow x_1, \quad n \rightarrow \infty$.

Mostremos que $f(c)$ pertence à variedade estável semi-local de $x_2 : (r, s)$.

Seja $G = f^2$. Temos que G leva (r, s) em si próprio mas não r e s , pois r e s não estão na variedade estável semi-local.

Então, podem ocorrer:

$$a) \quad G(r) = r \quad \text{e} \quad G(s) = s.$$

$$b) \quad G(r) = s \quad \text{e} \quad G(s) = r.$$

$$c) \quad G(r) = G(s).$$

Temos que a) não ocorre pois se ocorrer a) existirá uma outra órbita de período 2 de f , e estamos supondo que existe apenas uma órbita periódica de período 2 estável.

Também b) não ocorre, pois se ocorresse existiria uma órbita de período 4 de f .

Portanto, só pode ocorrer c). Mas então, temos pelo Teorema de Rolle, que existe $x_0(r, s)$ tal que $G'(x) = 0$.

Mas:

$$G'(x) = f'(f(x)) \quad f'(x) = 0$$

Como $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f'(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = c$.

Como $x \in (r, s)$ temos que $f^2(x) = f(c) \in (r, s)$

Seja agora $x_0 \in (x^*, A')$.

Se $x_0 \in (r, s)$ nada temos a demonstrar.

Seja então $x_0 \in (x^*, r]$.

Neste caso, 2 coisas podem acontecer:

1) Se alguma iterada ímpar de x_0 cair entre x_1 e c , então na próxima iterada ela cairá entre x_2 e s (pois, $f(c) \in (r, s)$), e, portanto, na variedade estável semi-local de x_2 e, então $f^{2n}(x_0) \rightarrow x_2, n \rightarrow \infty$.

2) Suponhamos então que toda iterada de $x_0 \in (x^*, r]$ pertença a $[c, f(c)]$.

Sejam z_1 e $z_2 \in (x^*, r]$, $z_1 < z_2$.

Como f é decrescente em $(x^*, r]$, então $f(z_1) > f(z_2)$ e, então, $f^2(z_1) < f^2(z_2)$ pela hipótese 2).

Concluimos então que f^2 é crescente em $[x^*, r]$ (na realidade a conclusão vale para $(x^*, f(c)]$).

Como $(f^2(x^*))' > 1$, temos que existe uma vizinhança V de x^* tal que $(f^2(x))' > 1 \quad \forall x \in V$.

Seja então $x_0 \in V$, $x_0 > x^*$.

Temos:

$|x^* - f^2(x_0)| > |x^* - x_0| \Rightarrow f^2(x_0) > x_0$ e como f^2 é crescente em $(x^*, f(c)]$, temos que $f^4(x_0) > f^2(x_0)$.

Enfim, vemos que a sequência $f^{2n}(x_0)$ é crescente e limitada e, portanto é convergente.

Suponhamos que $f^{2n}(x_0) \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$.

Portanto, a subsequência $f^{2n+2}(x_0) \rightarrow f^2(a)$.

Assim, devemos ter $f^2(a) = a$, ou seja, a é ponto fixo de f^2 e então $a = x_2$.

Tomemos finalmente $x'_0 \in (x^*, r]$ e $x'_0 \notin V$.

Seja $x_0 \in V$.

Então $x'_0 > x_0 \Rightarrow f^{2n}(x'_0) > f^{2n}(x_0)$.

Portanto temos: $f^{2n}(x_0) < f^{2n}(x'_0) < x_2$ (caso contrário, $f^{2n}(x'_0)$ já estaria na variedade estável semi-local para algum n).

E então $f^{2n}(x'_0) \rightarrow x_2$, $n \rightarrow \infty$, pelo Teorema do Confronto.

Definimos agora:

$$y_2 = x_2 - x^* > 0$$

$$y_1 = x_1 - x^* < 0.$$

E então:

$$g(y_1) = f(x_1 - x^* + x^*) - f(x^*) = x_2 - x^* = y_2$$

e

$$g(y_2) = f(x_2 - x^* + x^*) - f(x^*) = x_1 - x^* = y_1.$$

Assim, sendo $y_0 = x_0 - x^*$, $y_0 \in (0, A]$, temos:

$$g(y_0) = g(x_0 - x^*) = f(x_0) - f(x^*) = f(x_0) - x^*$$

$$g^2(y_0) = g(f(x_0) - f(x^*)) = f^2(x_0) - x^*$$

E portanto, $g^{2n+1}(y_0) \rightarrow x_1 - x^* = y_1, \quad n \rightarrow \infty$

e

$g^{2n}(y_0) \rightarrow x_2 - x^* = y_2, \quad n \rightarrow \infty.$

Assim, H_3 está demonstrada.

Tendo em vista a relação existente entre as soluções de $(I-2)_\lambda$ e $(I-3)_\lambda$, é claro que as soluções de $(I-2)_\lambda$ gozam, a menos de uma translação, das mesmas propriedades de $(I-3)_\lambda$.

Se g satisfaz (H_3) , podemos estudar o comportamento assintótico das soluções de $(I-3)_\lambda$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, e, para isto, vamos utilizar alguns resultados, todos devidos a Mallet-Paret e Nussbaum [18], que passamos a enunciar.

Existe uma mudança de variáveis para soluções periódicas de equações diferenciais com retardamento, a qual tem se mostrado útil no estudo do comportamento assintótico de equações diferenciais do tipo $(I-3)_\lambda$.

Seja $x(t)$ uma solução periódica que oscila lentamente de período minimal $\bar{q}$ de $(I-3)_\lambda$, para algum $\lambda \neq 0$, isto é, uma solução de $(I-3)_\lambda$ tal que existem números $q > 1$ e $\bar{q} > q + 1$ tais que

$$x(0) = 0,$$

$$x(t) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < t < q,$$

$$x(t) < 0 \quad \text{para} \quad q < t < \bar{q} \quad \text{e}$$

$$x(t + \bar{q}) = x(t) \quad \forall t.$$

Defina $r \in \mathbb{R}$ por $r = \frac{\lambda}{2} (\bar{q} - 2)$.

Considere as funções:

$$y(t) = y_0(t) = x(-\frac{1}{\lambda} t)$$

e

$$z(t) = y_1(t) = x(\frac{1}{2} \bar{q} - \frac{1}{\lambda} t).$$

Obtemos no lugar de $(I-3)_\lambda$ um sistema com 2 equações:

$$\begin{array}{l} (I-3.1)_r \\ (I-3.2)_r \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = y(t) - g(z(t-r)) \\ \dot{z}(t) = z(t) - g(y(t-r)). \end{array} \right.$$

Mallet-Paret e Nussbaum relacionaram as soluções das equações $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$ com as soluções da equação $(I-3)_\lambda$, através do seguinte resultado.

Teorema (I-4):

Seja $g : [-B, A] \rightarrow [-B, A]$ satisfazendo (H_1) e (H_2) e sejam c e d constantes positivas, $c \leq A$, $d \leq B$, e seja $\gamma > 1$ uma constante tal que:

- (1) g é monótona decrescente em $[-d, c]$.
- (2) $g(x) \geq c$ se $-B \leq x \leq -d$ e $g(x) \leq -d$, se $c \leq x \leq A$.
- (3) $|g(g(x))| \geq \gamma |x|$ onde $-d \leq x \leq c$.

Seja $x_n(t)$ uma sequência de soluções periódicas que oscilam lentamente de $(I-3)_{\lambda_n}$ para alguma sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$, e defina $r_n > 0$ por:

$$\bar{q}_n = 2(1 + \frac{1}{\lambda_n} r_n)$$

onde $\bar{q}_n$ é o período minimal de $x_n(t)$.

Então, tomando uma subsequência, se necessário, temos:

$$(I-3.3) \quad x_n\left(-\frac{1}{\lambda_n} t\right) \rightarrow y(t)$$

$$x_n\left(\frac{1}{2} \bar{q}_n - \frac{1}{\lambda_n} t\right) \rightarrow z(t)$$

uniformemente em conjuntos compactos de R .

Além disso, temos convergência das derivadas primeiras com relação a t em (I-3.3) e as funções $(y(t), z(t))$ satisfazem as equações (I-3.1)_r e (I-3.2)_r, para todo $t \in R$, onde $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ é estritamente positivo.

Além disso, as soluções $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem:

$$-B \leq y(t), z(t) \leq A \quad \forall t.$$

e temos as propriedades assintóticas:

$$\begin{cases} \liminf_{t \rightarrow -\infty} y(t) & \text{e} & \liminf_{t \rightarrow \infty} z(t) \geq c \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) & \text{e} & \limsup_{t \rightarrow -\infty} z(t) \leq -d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow -\infty} y(t) & \text{e} & \limsup_{t \rightarrow \infty} z(t) > c \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) & \text{e} & \liminf_{t \rightarrow -\infty} z(t) < -d \end{cases}$$

Finalmente, $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem as condições de monotonicidade:

$$-d < y(t) < c \Rightarrow \dot{y}(t) \leq 0$$

Obtemos assim, um par de equações $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$ associadas à equação $(I-3)_\lambda$.

Observemos que o parâmetro λ está ausente em $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$, mas foi introduzido um parâmetro r , o qual está relacionado com o período minimal $\bar{q}$.

Veremos a seguir, que as equações $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$ desempenham um papel muito importante na obtenção de resultados sobre o comportamento assintótico da equação $(I-3)_\lambda$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, pois, as propriedades das equações $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$ estão intimamente ligadas com aquelas da equação $(I-3)_\lambda$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, como já pudemos ver pelo teorema acima.

Corolário (I-4):

Suponhamos que g satisfaça (H_2) e (H_3) .

Sejam $y(t)$ e $z(t)$ e r como no teorema anterior.

Então com y_1 e y_2 como em (H_3) , temos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (y_2, y_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (y_1, y_2).$$

E então $(y(t), z(t))$ é uma solução heteroclínica unindo as soluções constantes (y_2, y_1) e (y_1, y_2) de $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$.

Observemos que se g satisfizer (H_2) e (H_3) , então os limites $(y(t), z(t))$ do Corolário acima existem quando $t \rightarrow \pm \infty$.

Entretanto, a existência destes limites não dá nenhuma informação sobre o comportamento das soluções periódicas $x(t)$ que oscilam lentamente, a partir daquele exibido pelas equações $(I-3.1)_r$ e $(I-3.2)_r$ (pois não temos a hipótese de monotonicidade em $[-B, A]$).

Nós não podemos concluir que $x(t)$ é uniformemente próxima da função "onda quadrada".

$$\text{sqw}(t) = \begin{cases} y_2, & 2n < t < 2n+1 \\ -y_1, & 2n+1 < t < 2n+2 \end{cases}$$

em conjuntos compactos de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

Mas, temos o seguinte resultado.

Teorema (I-5):

Suponhamos que g satisfaça (H_2) e (H_3) e que a_1, a_2, b_1, b_2 sejam números positivos tais que $-a_1 < y_1 < -a_2$ e $b_1 < y_2 < b_2$ onde y_1 e y_2 são como em (H_3) .

Então existe um número $k > 0$ tal que se $x(t)$ é uma solução periódica que oscila lentamente de $(I-3)_\lambda$ para algum $\lambda > 0$, então:

$$\mu\{t \in [0, \bar{q}], x(t) \notin (b_2, b_1) \cup (-a_1, -a_2)\} \leq k \frac{1}{\lambda}$$

onde μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\bar{q}$ é o período minimal de $x(t)$.

O Corolário (I-4) e os Teoremas (I-4) e (I-5) mostram como as soluções periódicas que oscilam lentamente convergem para a função escada $\text{sqw}(t)$, definida acima, quando $\lambda \rightarrow \infty$ e quando g satisfaz (H_2) e (H_3) .

CAPÍTULO II

APLICAÇÕES EM ALGUNS MODELOS USADOS EM BIOLOGIA

1º Modelo

O nosso primeiro modelo, é um modelo usado pela "Comissão Internacional da Pesca da Baleia". Esta equação é estudada em [19] e maiores esclarecimentos sobre o comportamento assintótico das soluções e existência de soluções periódicas são acrescentadas em [5].

A linha aqui seguida é a mesma de [5] e o nosso objetivo é mostrar que resultados mais detalhados podem ser obtidos, quando se leva em conta o surgimento de órbitas de período 2 de f , que, como veremos a seguir desempenham um papel muito importante no comportamento assintótico das soluções.

Vamos considerar a seguinte equação:

$$(II-4) \quad \frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) + \lambda \frac{\mu}{\lambda} N(t-1)(1 - N^2(t-1))$$

onde $N(t) = \frac{P(t)}{k}$ onde $k \geq \max_t P(t)$ de tal forma que $0 < N(t) < 1 \quad \forall t$.

Tomamos $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ onde μ é a taxa de nascimento e λ é a taxa de mortalidade.

Esta equação tem 2 pontos de equilíbrio para $\frac{\mu}{\lambda} > 1$:

$$N(t) = 0$$

$$N(t) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{1/2} = x^*,$$

que são pontos fixo de

$$f_{\alpha}(x) = \alpha x(1 - x^2)$$

Temos que:

$$f'_\alpha(x) = \alpha - \alpha(z+1)x^z \quad \text{e, portanto, } f'_\alpha(0) = \alpha.$$

Portanto, para $\alpha < 1$, o zero é o único ponto fixo estável de f .

Neste caso, $I_\infty = \{0\}$ e toda solução de (II-4) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Isto significa que a taxa de mortalidade é maior que a taxa de natalidade, e a população caminha para a extinção independentemente da condição inicial.

Assim que α passa pelo 1, aparece um novo ponto fixo x^* , que bifurca do zero e permanece estável enquanto α estiver na faixa $1 < \alpha < 1 + \frac{2}{z}$.

Este é o intervalo de variação de α para que o ponto fixo $(1 - \frac{1}{\alpha})^{1/z}$ seja atrator, isto é,

$$-1 < f'[(1 - \frac{1}{\alpha})^{1/z}] < 1.$$

Seja agora

$$1 + \frac{2}{z} < \alpha < (\frac{z+1}{z})(z+1)^{1/z}.$$

Observamos que $\alpha = (\frac{z+1}{z})(z+1)^{1/z}$ é o valor de α acima do qual f deixa de ser uma aplicação de I em I e não tem mais sentido abordar o problema por este método. Este valor de α é obtido impondo-se que $f(x_{\max}) < 1$ onde $x_{\max}$ é aquele valor de x onde f assume o seu máximo.

Para α nestas condições garantimos que para cada $\lambda_m = \frac{(\lambda_0 + 2m\pi)}{\sqrt{k^2 - 1}}$ onde $k = f'[(1 - \frac{1}{\alpha})^{1/z}]$ e onde λ_0, λ_1 são como no Lema (I-1) da parte an-

terior, acontece uma bifurcação de Hopf da solução x^* , com o aparecimento, a partir de λ_0 , de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que variam lentamente.

É claro que não podemos ter esperanças de dar informações precisas para α variando em toda esta região.

Não é difícil perceber que fixando um z e fazendo α crescer, o comportamento de f vai se tornando cada vez mais complexo, chegando a ser completamente caótico próximo da curva $\alpha = \frac{z+1}{z} (z+1)^{1/z}$.

Entretanto, sabemos que em uma faixa inicial imediatamente acima da curva $\alpha = 1 + \frac{2}{z}$, temos uma região em que aparece uma órbita periódica de período 2 estável $\{x_1, x_2\}$ e isto leva a um comportamento bastante interessante das soluções de (II-4) quando $\lambda \rightarrow \infty$.

A determinação desta faixa foi feita de maneira aproximada através do cálculo dos valores de α e z para os quais as órbitas de período 2 permanecem estáveis.

Alguns destes valores serão dados em uma tabela a seguir, e a curva será representada em um diagrama paramétrico, posteriormente.

α	3.44	2.63	2.23	1.97	1.49	1.24
z	1	1.5	2	2.5	5	10

Entretanto necessitamos de um cuidado extra, pois a transformação

$$g(x) = f(x + x^*) - f(x^*)$$

não pode ser feita em todo o intervalo $I = [0,1]$, pois poderíamos não ter satisfeita a hipótese $xg(x) < 0$, em vista do formato de f_{∞} .

Logo, um intervalo $[0, x_3]$ deve ser removido para que a hipótese seja cumprida. Temos que x_3 é aquele valor de $x < x^*$ tal que $f(x_3) = x^*$.

Tirando $[0, x_3]$, devemos também retirar um intervalo $[x_4, 1]$, em vista do formato da f ($f(1) = 0$), e, onde x_4 é tal que $x > x_4 \Rightarrow f(x) < x_3$.

Devemos ainda mostrar que $f(x_{\max}) < x_4$ para não haver problemas de valores centrais serem levados em pontos retirados, o que nos impediria de fazer iterações.

Assim, teremos a garantia de que as iteradas de f em pontos do intervalo central serão levadas nele próprio, e que a órbita periódica $\{x_1, x_2\}$ estará neste intervalo.

A determinação destes intervalos, a não ser no caso mais simples de $z = 1$ é praticamente impossível analiticamente. Basta ver que para $z = 10$, envolve a solução de uma equação de grau 121.

Assim, estes valores foram calculados numericamente para vários valores de α e z e alguns resultados são apresentados na tabela a seguir.

z	α	x_3	x_4	x_1	x_2
1.0	3.44	0.374	0.874	0.442	0.848
1.5	2.63	0.416	0.875	0.489	0.848
2.0	2.23	0.454	0.876	0.531	0.849
2.5	1.97	0.501	0.871	0.568	0.849
5.0	1.49	0.624	0.879	0.670	0.865
10.0	1.24	0.738	0.898	0.773	0.884

Uma outra questão é a determinação da região em que provavelmente já surgiram órbitas de período arbitrariamente longo, ou seja, a região em que pontos fixos de f^{2k} já deixaram de ser estáveis para k arbitrário.

trariamente grande.

Seja $\lambda^{(2k)}(\alpha)$ a inclinação de $f^{(2k)}$ em qualquer um dos seus $2k$ pontos fixos periódicos.

Na região em que estamos interessados, deveremos ter que

$$\lambda^{(2k)}(\alpha) < -1 \text{ para } k \text{ arbitrariamente grande.}$$

Portanto, uma maneira aproximada para a determinação desta região é usar a relação de recorrência

$$\lambda^{(2k)}(\alpha) \cong 3 - 2 [\lambda^{(k)}(\alpha)]^2$$

que é citada em [20].

Uma aplicação repetida desta fórmula leva-nos à seguinte fórmula:

$$\lambda^{(k)}(\alpha) \cong \left[\frac{1}{2} \left(3 + \left[\frac{1}{2} \left(3 + \dots \left[\dots \frac{1}{2} \left(3 - \lambda^{(2^n k)}(\alpha) \right) \right]^{1/2} \right) \right]^{1/2} \right) \right]^{1/2}.$$

O uso desta fórmula mostra que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(2^n \cdot k)}(\alpha_0) = -1 \text{ quando } \lambda^{(k)}(\alpha_0) \cong -1.5.$$

Basta, portanto, calcular o valor de α tal que $\lambda(\alpha) = -1.5$.

Temos:

A qualidade da aproximação melhora com k .

Mas f^4 já dá uma aproximação bastante razoável.

Entretanto não é fácil a determinação destes pontos.

Por exemplo, para $z = 5$ e $\alpha = 1,7127$ temos que a derivada da órbita periódica de período 4 vale $17,82 \dots$.

Já para $\alpha = 1,7128$ esta derivada vale $-13,92 \dots$.

Portanto, o valor de α para o qual a derivada vale $-1,5$ deve estar entre estes dois.

Para $z = 4$ e $\alpha = 1,658$ a órbita $0,86898 \dots ; 0,8847 \dots ; 0,5680 \dots ; 0,8438 \dots$; tem derivada $-1,51 \dots$.

Para $z = 3$ e $\alpha = 1,873$, a órbita $0,8348 \dots ; 0,6538 \dots ; 0,8823 \dots ; 0,5154 \dots$; tem derivada $-1,501 \dots$.

Para $z = 1,5$ e $\alpha = 2,724$ a órbita $0,4071 \dots ; 0,8209 \dots ; 0,5730 \dots ; 0,8838 \dots$, tem derivada $-1,509 \dots$.

Entretanto, um método mais seguro para testar o comportamento de f é a existência de soluções periódicas de período 3.

Como se sabe, a existência de órbitas de período 3 implica na existência de órbitas de período n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Ver [15].

Procuramos determinar a existência destas órbitas.

Usamos o fato que as órbitas de período 3 de f , são pontos fixos de $f^3 = f \circ f \circ f$, e aplicamos o método de Newton para tentar a determinação destes pontos.

É muito difícil por razões de convergência e precisão nos cálculos, saber para que valor do parâmetro estas órbitas aparecem, mas, conseguimos estabelecer alguns valores do parâmetro para os quais este tipo de órbita já se fazia presente.

Damos abaixo, alguns destes valores com as respectivas órbitas.

Para $z=1$, $\alpha = 3,829$ temos a órbita dada por $0,1621 \dots$; $0,5201 \dots$; $0,9556 \dots$.

A derivada desta órbita vale $1,39 \dots$, o que sugere que ela já deve ter aparecido há algum tempo, mas não conseguimos determinar, nenhuma órbita de período 3 para $z=1$ e $\alpha < 3,829$.

Para $z = 1,5$ e $\alpha = 2,9135$, temos a órbita: $0,9480\dots$; $0,2166 \dots$ e $0,5588 \dots$, com derivada $1,081 \dots$.

Para $z = 2$, e $\alpha = 2,485$, temos a órbita: $0,9379 \dots$; $0,2803 \dots$ e $0,6418 \dots$ com derivada $4,53$.

Para $z = 2,5$ e $\alpha = 2,3$ a órbita $0,9571 \dots$, $0,2286 \dots$ e $0,5126 \dots$ com derivada $-8,1066 \dots$.

Para $z = 5$, e $\alpha = 1,9$ a órbita $0,8343 \dots$; $0,9443 \dots$ e $0,4470 \dots$, com derivada $30,06 \dots$.

Para $z = 10$, e $\alpha = 1,3037$ a órbita $0,9318 \dots$; $0,6151 \dots$ e $0,7959 \dots$ com derivada $1,07 \dots$.

Temos que $g(x) = f(x+x^*) - f(x^*)$ onde $f(x) = \alpha x(1-x^z)$ satisfaz a todas as hipóteses do Teorema (I-3), do Corolário (I-3) e do Teorema (I-4).

Portanto, conforme a conclusão que já tiramos a partir destes resultados no parágrafo anterior, temos que a solução $x(t)$ da equação

$$(II-5) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda g(x(t-1))$$

converge para uma função "onda quadrada", determinada pela órbita de período 2 de g , quando $\lambda \rightarrow \infty$ e o par $(z, \alpha) \in A_4 \cup A_3$.

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) + \lambda \alpha N(t-1)(1 - N^z(t-1))$$

diferem das soluções de (II-5) por uma translação, estas também convergirão para a transladada desta onda quadrada.

Temos por exemplo:

Para $z = 1,5$ e $\alpha = 23,43$, a função onda quadrada para a qual converge a solução de (II-4) quando $\lambda \rightarrow \infty$, é dada por:

$$\text{sqwt} = \begin{cases} 0,723 \dots & 2n < t < 2n+1 \\ 0,653 \dots & 2n+1 < t < 2n+2 \end{cases}$$

Graficamente, temos:

Isto mostra, de maneira bastante clara, que o comportamento assintótico das soluções de uma equação do tipo $(I-2)_\lambda$ pode ser bastante inesperado, já que para valores pequenos do parâmetro λ , o comportamento é bastante "razoável".

As observações acima mostram que f satisfaz numa vizinhança de x^* a todos os requisitos para que g satisfaça (H_1) , (H_2) e (H_3) .

Temos então o seguinte diagrama paramétrico de bifurcação

Diante dos argumentos expostos, podemos então enunciar o seguinte teorema a respeito do modelo estudado:

Teorema (II-1):

Seja a equação (II-4) e seja $f_\alpha = f_\alpha(x) = \alpha x(1-x^2)$ onde $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$, $z \in \mathbb{R}^+$, $x \in [0,1]$.

Então, podemos dividir o plano (z, α) em regiões A_i , $i = 1 \dots 6$ com as propriedades abaixo:

Se o par $(z, \alpha) \in A_1 \Rightarrow$ a solução nula de (II-4) é estável.

Se o par $(z, \alpha) \in A_2 \Rightarrow$ a solução x^* é estável e a solução nula é instável.

Se o par $(z, \alpha) \in A_3 \Rightarrow$ existe um contínuo ilimitado de soluções periódicas que oscilam lentamente e quando $\lambda \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow \text{sqw}(t)$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, onde

$$\text{sqw}(t) = \begin{cases} x_2, & 2n < t < 2n+1 \\ x_1, & 2n+1 < t < 2n+2 \end{cases},$$

onde $\{x_1, x_2\}$ constitui a órbita periódica de período 2 estável de f .

Se o par $(z, \alpha) \in A_4 \Rightarrow$ a solução $x(t) \rightarrow sqw(t)$, $\lambda \rightarrow \infty$, uniformemente em compactos de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, podendo apresentar fenômeno de Gibbs (isto é, perto dos pontos inteiros, onde $sqw(t)$ é descontínua, a solução $x(t)$ pode ultrapassar os valores x_1 e x_2 de $sqw(t)$, por uma quantia que não se torna pequena quando $\lambda \rightarrow \infty$).

Se o par $(z, \alpha) \in A_5 \Rightarrow$ as soluções mencionadas em A_4 , deixam de ser estáveis.

Se o par $(z, \alpha) \in A_6 \Rightarrow f$ deixa de ser uma aplicação de $[0,1]$ em $[0,1]$.

Note que para um z fixado, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, temos um diagrama paramétrico do tipo:

Observação 1:

Queremos aqui observar que a convergência de $x(t)$ para $sqw(t)$ no Teorema (II-1) pode acontecer de 2 formas, pois, perto dos inteiros onde $sqw(t)$ é descontínua, o comportamento da solução $x(t)$ pode ser muito complicado, podendo ocorrer um fenômeno semelhante ao fenômeno de Gibbs das séries clássicas de Fourier.

Se $g(x) = f(x+x^*) - f(x^*)$ satisfaz H_2 e H_3 e se g é monótona em todo o intervalo $[y_1, y_2]$, onde y_1 e y_2 são como em H_3 , então a convergência de $x(t)$ a $sqw(t)$ é "muito regular" (o gráfico de $x(t)$ "lembra" uma onda quadrada quando $\lambda \rightarrow \infty$) ([18] - pag. 119 - Corolário 4.3).

Nos nossos modelos, sabemos que os pontos x_1 e x_2 da órbita periódica, bifurcam do ponto x^* a partir de valores dos parâmetros que estão na fronteira entre as regiões A_2 e A_3 (veja figura na página 27).

Para valores dos parâmetros em A_3 próximos desta fronteira, os 2 pontos x_1 e x_2 estão ambos à direita do ponto crítico c .

Neste caso, podemos restringir f a um intervalo contendo x_1 e x_2 onde f é monótona decrescente, e portanto g também será monótona decrescente em um intervalo contendo y_1 e y_2 .

Neste caso, $x(t) \rightarrow sqw(t)$ uniformemente em compactos de $R - Z$ e não há fenômeno de Gibbs.

É o que ocorre no exemplo da página 23. Observe que $c = x_{\max} = 0.6$.

Entretanto, quando os valores dos parâmetros estão longe da fronteira mencionada acima, o ponto x_1 pode passar à esquerda de c , e, neste caso, não é possível restringir f a um intervalo contendo x_1 e x_2 de tal forma que g seja monótona em um intervalo contendo y_1 e y_2 , e, então, o fenômeno de Gibbs poderá ocorrer.

Observação 2:

Embora não pareça natural que uma população tenha o comportamento descrito por uma função do tipo onda quadrada ($\text{sqw}(t)$), este fenômeno é frequentemente observado na natureza.

Como por exemplo, basta observar a população de pernilongos em países de clima frio, que no inverno praticamente desaparecem, e entretanto, num curto espaço de tempo, no início do verão, a população atinge níveis altos e constantes, para depois novamente se extinguirem.

Em certas espécies de borboletas, o fenômeno também ocorre.

De uma maneira geral, este fenômeno é observado em populações cuja reprodução é feita através de ovos que levam um longo período para eclodirem e quando eclodem, o fazem quase ao mesmo tempo.

2º Modelo

O modelo que estudaremos a seguir, é um modelo com aplicações em Hematologia [17].

Ele explora a existência de um retardo existente no controle da produção de células do sangue pela concentração de células do sangue periférico.

Em seres humanos, este retardo varia de pessoa para pessoa num período que pode ser de 17 a 28 dias.

Seja $y(t)$ a concentração de células circulantes (célula/Kilo) e suponha que as células são retiradas aleatoriamente da circulação a uma taxa γ (dia^{-1}) proporcional à sua concentração.

Para reproduzir os efeitos do controle exercido pela população de células circulantes, através de poietina, no comportamento de células primordiais, é assumido que o fluxo (células/Kg/dia) depende de $y(t)$ no instante $t - \tau$.

Isto leva à seguinte equação:

$$(II-6) \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta(y(t-\tau)).$$

A forma da função $\delta(y(t-\tau))$ é ainda discutível.

Um dos modelos mais aceitos é o seguinte:

$$\delta(y(t-\tau)) = \frac{\beta_0 \theta^n y(t-\tau)}{\theta^n + y^n(t-\tau)}.$$

onde n é um parâmetro, $n > 1$.

Assim, a equação (II-6) fica:

Fazendo

$$x(t) = \frac{y(t\tau)}{\theta}, \text{ temos:}$$

$$\dot{x}(t) = -\tau\gamma x(t) + \frac{\tau\beta_0(x(t-1))}{1+x^n(t-1)}.$$

Fazendo $\beta_0 = \beta\gamma$ e $\lambda = \tau\gamma$, obtemos:

$$(II-7) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \frac{\lambda\beta x(t-1)}{1+x^n(t-1)}.$$

Temos então, neste modelo,

$$f(x) = \frac{\beta x}{1+x^n}.$$

Esta função tem um único ponto crítico, $\bar{x} = \frac{1}{(n-1)^{1/n}}$, que é um ponto de máximo de f , e

$$f(\bar{x}) = \frac{\beta(n-1)}{n(n-1)^{1/n}}.$$

Observemos que o valor máximo de f é menor que β . Como estudaremos a função variando β , para $\beta \geq 1$, tomaremos um domínio suficientemente grande.

Temos assim, que o ponto fixo não nulo, estará neste intervalo tomado, pois:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = (\beta - 1)^{1/n}.$$

E como para $\beta > 1 \Rightarrow \beta < \beta^n + 1$, temos:

$$\dots 1/n \dots$$

e, portanto, o ponto fixo está no intervalo tomado.

Temos que:

$$f'(0) = \beta.$$

Portanto, para $0 < \beta < 1$, temos um único ponto fixo atrator que é o zero.

Quando β passa pelo um, aparece um segundo ponto fixo

$$x^* = (\beta - 1)^{1/n}.$$

Este ponto fixo será atrator se e somente se

$$-1 < f'(x^*) < 1.$$

Como já sabemos que $f'(x^*) < 0$, estudaremos então o problema quando $f'(x^*) < -1$, pois neste caso teremos bifurcação de Hopf.

Temos:

$$f'((\beta - 1)^{1/n}) = 1 + \frac{n}{\beta} - n.$$

$$\text{Então } 1 + \frac{n}{\beta} - n < -1 \iff \beta > \frac{n}{n-2} = 1 + \frac{2}{n-2}.$$

Primeiramente, seja

$$1 + \frac{2}{n-2} < \beta < n(n-1)^{\frac{1-n}{n}}.$$

Como anteriormente, garantimos que para cada $\lambda_m = \frac{\lambda_0 + 2m\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}$, on-

de $k = 1 + \frac{n}{\beta} - n$, $\beta = \frac{\beta_0}{\gamma}$, e onde λ_0, λ_m são tomados como no Lema (I-1) do capítulo anterior, acontece uma bifurcação de Hopf de x^* , com o apare-

cimento, a partir de λ_0 , de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que variam lentamente.

Entretanto, como no caso anterior, o comportamento das soluções para valores do par (n, β) logo acima da curva $\beta = 1 + \frac{2}{n-2}$, não é o mesmo.

Num estágio inicial, aparecem pelos motivos expostos no modelo anterior, uma faixa onde existe uma órbita de f com período 2 estável.

As mesmas observações feitas no modelo anterior são válidas, e somente como exemplo, calculamos:

x^* = primeiro ponto fixo diferente de zero

$\bar{x}$ = ponto de máximo

$z_1 = f(\bar{x})$

$z_2 = f(z_1)$

$z_3 = f(z_2)$

Note que para não termos problemas com as propriedades da função $g(x) = f(x+x^*) - f(x^*)$ devemos ter $z_3 > x^*$.

Obtivemos os seguintes resultados:

n	β	x^*	$\bar{x}$	z_1	z_2	z_3
2.8	3.7	1.4464 ...	0.81062 ...	1.9860 ...	0.9667 ...	1.9292 ...
2.8	3.51	1.3893 ...	0.8106 ...	1.8297 ...	0.9993 ...	1.7560 ...
4.0	2.166	1.0392 ...	0.7598 ...	1.2347 ...	0.8047 ...	1.2884 ...

Por exemplo:

Para $n = 2.8$ e $\beta = 3.55$, temos a órbita de período 2:

$$x_1 = 1.24676 \dots ; x_2 = 1.5506 \dots$$

A medida que β vai variando, esta órbita vai se deslocando da seguinte forma:

Para $\beta = 5.6$, temos: $x_1 = 0,7778 \dots ; x_2 = 2.93871 \dots$

Para $\beta = 10$, temos: $x_1 = 0.5877 \dots ; x_2 = 4.7749 \dots$

Esta órbita permanece estável (do ponto de vista computacional) até $\beta = 11.45$.

A partir deste valor, não conseguimos mais determiná-la, pois não havia convergência das iteradas para a mesma.

Fizemos uma busca empírica, para estabelecer a curva no plano (β, n) , em que as órbitas de período 2 deixavam de ser estáveis.

Isto foi feito da seguinte maneira: fixávamos n e variávamos β de forma crescente, observando para que valores de β havia convergência de $f^k(x)$ para a órbita de período 2.

Obtivemos os seguintes resultados:

n	2.1	2.3	2.5	2.8	3.0	3.5	4.1	4.7	5
β	36.00	22.67	20.00	11.45	7.15	3.78	2.65	2.19	2.01

Procuramos também, determinar os valores dos parâmetros para os quais as derivadas das órbitas de período 4 atingem o valor -1.5, que segundo a estimativa dada na página 23, é um valor no qual já devem ter aparecido órbitas de todas as ordens.

Obtivemos os seguintes resultados:

n	2.4	2.5	3.0	3.5	4.0	5
β	900.000	4940	13.935	5.04	3.31559	2.2403
derivada da órbita	-1.502	-1.500	-1.500	-1.4989	-1.4999	-1.499

Como no 1º modelo, também aqui, podemos subdividir o plano (n, β) em regiões A_i , $i = 1 \dots 6$, com as mesmas propriedades enunciadas no Teorema (II-1).

Observamos também, que a solução $x(t)$ da equação (II-7) converge uniformemente em conjuntos compactos de $R-Z$ para uma função onda quadrada, quando $\lambda \rightarrow \infty$ e $(n, \beta) \in A_3 \cup A_4$.

Neste caso, por exemplo, para $n = 2.8$ e $\beta = 3.55$, é a função

$$sqw(t) = \begin{cases} 1.5506 \dots & 2n < t < 2n + 1 \\ 1.24676 \dots & 2n + 1 < t < 2n + 2 \end{cases}$$

3º Modelo

Este modelo é utilizado no estudo de população da mosca azul
(*Lucilia Cruprina*)

A equação é dada por:

$$(II-8) \quad \frac{d}{dt} N(t) = -\delta N(t) + PN(t - t_D) \exp\left(-\frac{N(t - t_D)}{N_D}\right)$$

onde:

$N(t)$ = número de elementos da população no instante t .

t_D = tempo gasto para um ovo se transformar num elemento sexualmente adulto.

N_D = tamanho no qual a população atinge a capacidade máxima de reprodução.

A equação acima é equivalente à equação:

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) + \lambda k N(t-1) \exp(-N(t-1)).$$

Para isto, basta fazer: $\lambda = t_D \delta$, $k = \frac{P}{\delta}$.

Neste caso, temos que:

$$f_k(x) = kxe^{-x}$$

Os pontos fixos desta função são:

$$x = 0$$

$$x^* = \ln k.$$

Assim, vemos que para $0 < k \leq 1$, temos apenas o zero como ponto

fixo e para $k > 1$, aparece um novo ponto fixo $x^* = \ln k$.

Como $f'(0) = k$, teremos que o zero é ponto fixo atrator quando $k < 1$.

Como $f'(x^*) = 1 - \ln k$, teremos que x^* é ponto fixo atrator para $1 < k < e^2$.

Vamos mostrar que para $k > e^2$, temos:

$$I \quad \begin{cases} x < x^* \Rightarrow f(x) > x^* \\ x > x^* \Rightarrow f(x) < x^* \end{cases}$$

o que é equivalente a mostrar que $f'(x^*) < 0$, já que $f \in C^\infty$.

Mas, $f'(x^*) = 1 - \ln k$ e, portanto, $f'(x^*) < 0$ e, portanto, a propriedade (I) está satisfeita.

Devemos observar que este modelo é bem mais simples do que os anteriores pois só possui um parâmetro.

As afirmações anteriores continuam válidas, ou seja, logo que k ultrapassar o valor e^2 , aparece uma órbita de período 2 estável que perdura para k aproximadamente $k = 12,39255$.

Só para exemplificar, temos que para

$$\begin{aligned} k = 8, \quad x_1 &= 2,77256 \dots, \quad x_2 = 1,38623 \dots \\ k = 10, \quad x_1 &= 0,93459 \dots, \quad x_2 = 3,67054 \dots \\ k = 12,392, \quad x_1 &= 0,709448 \dots, \quad x_2 = 4,324667 \dots \end{aligned}$$

Ao contrário do 1º modelo, não existe aqui o problema da f não ser uma aplicação do intervalo no intervalo. Como f é monótona se $x > 1$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, basta tomar um intervalo de amplitude maior que k/e que é o máximo da função, que este problema estará resolvido.

arbitrariamente grandes, também foi feita, usando-se a estimativa dada por May [20].

Aqui, a aproximação dada por f^2 é muito ruim, pois,

$$f'(x^*) = -\frac{3}{2} = 1 - \ln k \text{ é tal que}$$

$$\ln k = -\frac{5}{2} \Rightarrow k = 12,1824.$$

Entretanto, para $k = 12,2$, a órbita de período 2 ainda é estável.

Usando-se a aproximação dada por f^4 , obtemos através do método de Newton a estimativa de 14,6776 que é mais razoável.

Quanto ao aparecimento de órbitas de período 3, podemos dizer que o mesmo só deve ocorrer para x superior a 22, pois não conseguimos localizar nenhuma destas órbitas para valores de k inferiores a 22.

Quando $k = 22,255$, existe a órbita periódica $x_1 = 1,16 \dots$; $x_2 = 8,08 \dots$; $x_3 = 5,52 \dots$.

A solução $N(t)$ de (II-8) converge uniformemente em conjuntos compactos de $R-Z$ para uma função onda quadrada, quando $\lambda \rightarrow \infty$ e $k \in A_3 \cup A_4$.

Por exemplo, para $k = 10$,

$$\text{sqw}(t) = \begin{cases} 3,67054 \dots & 2n < t < 2n+1 \\ 0,93459 \dots & 2n+1 < t < 2n+2 \end{cases}.$$

CAPÍTULO III

ESTABILIDADE E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Este capítulo, é dedicado ao estudo de sistemas de Equações Diferenciais Retardadas da forma:

$$(III-1) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Como dissemos na introdução, o nosso principal objetivo é procurar propriedades da solução, que são determinadas pela função f .

Neste sentido, conseguimos mostrar que, da mesma forma que no caso real, grande parte do comportamento da solução, é determinado pelo comportamento das iteradas da f .

Como é bem conhecido na literatura, por exemplo, [24], o comportamento da f na vizinhança de um ponto crítico, é determinado pelo espectro do seu Jacobiano neste ponto.

Conseguimos mostrar, que esta influência se estende às soluções da equação (III-1).

Também, a perda de estabilidade e bifurcação de Hopf, com o aparecimento de soluções periódicas, podem ser determinadas pelo estudo do Jacobiano de f no ponto crítico.

Observemos que, é óbvio que $x(t) = x_0$ é ponto crítico de (III-1) se e somente se x_0 é ponto fixo de f .

Vamos precisar da seguinte definição:

Definição (III-1):

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(A) \subset A$

Colocando: $f^2(A) = f(f(A))$

e

(III-1)

definimos:

$$A_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(A).$$

Lema (III-I):

Consideremos uma sequência de bolas $A_n \subset \mathbb{R}^n$ de raios M_n , tal que $A_n \supset A_{n+1}$, e uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(A_n) \subset A_{n+1}$.

Seja $\phi/\phi(\theta) \in A_{n_0}$, para algum n_0 , $\phi \in C$, $-1 \leq \theta \leq 0$.

Então a solução $x(t, \phi)$ de (III-I) é tal que $x(t, \phi)(\theta) \in A_{n_0}$ para todo $t \geq 0$, $-1 \leq \theta \leq 0$.

Prova:

Suponhamos que $x(t, \phi)(\theta)$ saia da bola A_{n_0} .

Então, existe um menor $t_0 > 0$ onde a solução $x(t) = x(t, \phi)$ entra contra a fronteira de A_{n_0} , isto é,

$$\|x(t_0, \phi)\| = M_{n_0} \quad \text{e} \quad \|x(t, \phi)\| < M_{n_0}, \quad 0 \leq t < t_0.$$

mas,

$$\begin{aligned} x(t_0) \dot{x}(t_0) &= x(t_0) [-\lambda x(t_0) + \lambda f(x(t_0-1))] = \\ &= -\lambda x(t_0) x(t_0) + \lambda x(t_0) f(x(t_0-1)) = \\ &= -\lambda \|x(t_0)\|^2 + \lambda x(t_0) f(x(t_0-1)) \leq \\ &\leq -\lambda M_{n_0}^2 + \lambda \|x(t_0)\| \|f(x(t_0-1))\| \leq \\ &\leq -\lambda M_{n_0}^2 + \lambda M_{n_0} M_{n_0+1} = -\lambda M_{n_0} [M_{n_0} - M_{n_0+1}] < 0. \end{aligned}$$

Portanto, o vetor tangente à órbita $x(t, \phi)$ em $t = t_0$, aponta para o interior da bola A_{n_0} .

Portanto, a solução não pode sair neste t_0 . $\square$

Lema (III-2):

Nas condições do Lema (III-1), seja $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$.

Então $x(t, \phi)(\theta) \rightarrow x_0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Prova:

Observemos primeiramente que x_0 é ponto fixo de f , e que $d(x_t(\phi)(0), A_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Suponhamos que exista n tal que $d(x_t(\phi)(0), A_n) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$ (I).

Portanto,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| \leq M_n.$$

E então,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|f(x(t)) - x_0\| \leq M_{n+1}.$$

Ou seja,

dado $\delta > 0$, $\exists T$ tal que $\forall t \geq T$,

$$\|f(x(t)) - x_0\| \leq M_{n+1} + \delta, \quad \forall t \geq T.$$

Temos, portanto,

$$x(t) = e^{-\lambda(t-T)} x(T) + \lambda \int_T^t e^{\lambda(s-T)} f(x(s-1)) ds$$

logo,

$$\|x(t) - x_0\| \leq e^{-\lambda t} \|x(T) - x_0\| + (M_{n+1} + \delta) [1 - e^{-\lambda(T-t)}].$$

Quando $t \rightarrow \infty$,

$$\|x(t) - x_0\| \leq M_{n+1} + \delta.$$

Como δ é arbitrário, temos que (I) vale para $n + 1$. $\square$

Corolário (III-1):

Seja x_0 ponto fixo de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que todos os auto valores do operador linear $Df(x_0)$ tenham módulo menor do que um.

Então, existe vizinhança A de x_0 , tal que

$$\phi(\theta) \in A \Rightarrow x(t, \phi)(\theta) \rightarrow x_0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Prova:

Seja $\|Df(x_0)\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os auto valores de $Df(x_0)$.

Sejam $k > 0$ e $\varepsilon > 0$ escolhidos suficientemente pequenos tal que:

$$\|Df(x_0)\| < k < 1 \quad \text{e} \quad 0 < k + \varepsilon < 1.$$

Temos:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + \gamma(x_0, h) \quad \text{e}$$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \gamma(x_0, h) = 0.$$

$$\|h\| \rightarrow 0$$

Como $f(x_0) = x_0$, temos:

$$\|f(x_0 + h) - x_0\| \leq (k + \epsilon) \|h\|.$$

Através de uma indução sobre n , mostra-se que

$$\|f^n(x_0 + h) - x_0\| \leq (k + \epsilon)^n \|h\|.$$

Portanto, existe uma sequência de bolas A_n , que são vizinhanças de x_0 , de raios $M_n = (k + \epsilon)^n \|h\|$ tal que $f(A_n) \subset A_{n+1}$, $\forall n$.

Portanto, $A_\infty = \{x_0\}$, e o resultado segue do lema anterior. $\square$

Como veremos no final deste capítulo, é necessário certo cuidado quando o conjunto A_∞ não se reduz a um ponto ou a uma bola. Através de um exemplo, mostraremos a existência de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $A_\infty = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$, mas a solução da equação dada não convergirá para A_∞ .

É interessante notar que outras propriedades de caráter mais geral, são herdadas do comportamento da f , pelas soluções de (III-1).

Uma das mais interessantes, é dada no seguinte teorema:

Lema (III-3):

Suponhamos que exista no $\mathbb{R}^n$, um subespaço E , tal que $f: E \rightarrow E$, isto é, E é invariante pela f .

Seja $\phi \in C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(\theta) \in E$, $-1 \leq \theta \leq 0$.

Então a solução $x(t, \phi)$ de (III-1) é tal que $x(t, \phi)(\theta)$ permanece em E para todo $t \geq 0$.

Prova:

Seja

$$C_1 = \{\phi \in C([-1,0], \mathbb{R}^n), \text{ tal que } \phi(\theta) \in E\}.$$

C_1 é um subespaço de C .

Mostremos que C_1 é um subespaço invariante pelas soluções de (III-1), isto é, dada $\phi \in C_1$, $x(t, \phi)$ permanece em C_1 para todo $t \geq 0$.

Temos:

$$x(t) = e^{-\lambda t} x(0) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(x(s-1)) ds.$$

Temos: $x(0) = \phi(0) \in E$ por hipótese e também $f(x(s-1))$ por hipótese.

Portanto, $x(t, \phi) \in C_1$. $\square$

Teorema (III-1):

Consideremos a equação (III-1) e suponhamos que $Df(x_0)$ possua pelo menos um auto valor real com módulo maior do que 1.

Então, existe um $\lambda_0 > 0$, a partir do qual a solução nula se torna instável.

Prova:

Seja ξ um auto valor de $Df(x_0)$, $|\xi| > 1$.

Seja v um auto vetor associado a ξ .

Seja E o subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado por v .

Já sabemos, pelo Lema (III-3) que se $\phi(\theta) \in E$ para $\theta \in [-1,0]$, então $x_t(\phi)(\theta) \in E$, $\forall t \geq 0$.

Mas, neste subespaço, a equação (III-1) linearizada, reduz-se a:

$$\dot{c}(t) = -\lambda c(t) + \lambda \xi c(t-1),$$

onde $c(t)$ é a coordenada de $x(t)$ na base $\{v\}$ de E .

Ou seja, temos o equivalente a uma equação na reta, com $|\xi| > 1$, e, portanto, instável para $\lambda > \lambda_0$, de acordo com o Lema (I-1). $\square$

Vamos agora considerar a linearização da equação (III-1) em torno do zero, isto é, a equação

$$(III-2) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda Df(0)(x(t-1))$$

quando o operador linear $Df(0)$ possui um auto valor complexo $a+bi$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Seja $\psi = u + iv$ um auto vetor associado a $a+bi$.

Consideremos o subespaço $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão 2 gerado por u e v .

Neste subespaço, a matriz do operador linear $Df(0)$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Seja $E_c = \{\phi \text{ tais que } \phi(\theta) \in E, -1 \leq \theta \leq 0\}$.

Para $\phi \in E_c$, temos que a equação (III-2) reduz-se a

$$(III-3) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda A x(t-1),$$

que é uma equação em $\mathbb{R}^2$.

Teorema (III-2):

Nas condições acima, seja $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Então vale o seguinte:

- (1) Se $\gamma < 1 \Rightarrow$ a solução nula de (III-3) é assintoticamente estável para qualquer $\lambda > 0$.
- (2) Se $\gamma > 1 \Rightarrow$ Existe um λ_0 a partir do qual a solução nula de (III-1) se torna instável.
- (3) Se $a < 1 \Rightarrow \lambda_0 > 0$ e não temos raízes da equação característica de (III-3) com parte real positiva para $0 < \lambda < \lambda_0$.
- (4) Se $a > 1 \Rightarrow$ Para todo $\lambda > 0$ existe uma raiz da equação característica de (III-3) com parte real positiva.
- (5) Nos casos (3) e (4) existe uma sequência $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$, tal que no intervalo $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, a equação característica de (III-3) tem exatamente $n + 1$ raízes com partes real e imaginária positivas se ocorrer (3) e $(n + 2)$ se ocorrer (4).

Prova:

Provaremos o teorema no caso em que $a > 0$ e $b > 0$.

Nos outros casos a demonstração é análoga.

- (1) Seja $\gamma < 1$.

Se $\gamma < 1$ é evidente que $Df(0)$ atua como uma contração em uma vizinhança do zero. Logo, existe uma sequência (A_n) satisfazendo o Corolário (III-1) com $A_\infty = \{0\}$.

Observação: Apesar disto, ficará evidente na demonstração dos outros itens, a não existência de raízes da equação característica com parte real positiva quando $\gamma < 1$, e chamaremos atenção para este fato, quando isto ocorrer.

(2) Seja $\gamma > 1$.

Uma condição necessária e suficiente para que (III-2) tenha uma solução não trivial da forma $x(t) = e^{\xi t} w$, $w \in \mathbb{R}^2$, é que w seja uma solução não nula de

$$\Delta(\xi)w = 0 \quad \text{onde} \quad \Delta(\xi) = \det(\xi + \lambda)I - \lambda A e^{-\xi},$$

o que produz a equação característica de (III-3),

$$(\xi + \lambda - \lambda a e^{-\xi})^2 e^{2\xi} = -\lambda^2 b^2.$$

Temos que ξ é solução desta equação se e somente se ξ for solução de:

$$(\xi + \lambda - \lambda a e^{-\xi}) e^{\xi} = \pm i \lambda b.$$

Isto mostra que não existe solução real ξ desta equação para $\lambda > 0$.

Temos que se ξ é uma raiz da equação acima, a conjugada $\bar{\xi}$ também o é. Trabalharemos então com ξ tal que $\text{Im}(\xi) > 0$.

Vamos procurar soluções imaginárias $\xi = iv$, com $0 < v < \frac{\pi}{2}$ da equação:

$$(III-4) \quad (\xi + \lambda - \lambda a e^{-\xi}) e^{\xi} = i \lambda b.$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} i v e^{i v} + \lambda e^{i v} - \lambda a = i \lambda b \Leftrightarrow \\ i v (\cos v + i \operatorname{sen} v) + \lambda (\cos v + i \operatorname{sen} v) - \lambda a = i \lambda b. \end{cases}$$

Separando em parte real e imaginária, vem que:

$$\begin{cases} -v \operatorname{sen} v + \lambda \cos v = \lambda a \\ v \cos v + \lambda \operatorname{sen} v = \lambda b \end{cases} \quad (\text{I})$$

Multiplicando a 1ª equação por $\cos v$ e a segunda por $\operatorname{sen} v$, temos:

$$\begin{cases} -v \operatorname{sen} v \cos v + \lambda \cos^2 v = \lambda a \cos v & (\text{i}) \\ v \cos v \operatorname{sen} v + \lambda \operatorname{sen}^2 v = \lambda b \operatorname{sen} v & (\text{ii}) \end{cases}$$

$$(\text{i}) + (\text{ii}) \Rightarrow 1 = a \cos v + b \operatorname{sen} v. \quad (\text{II})$$

Sabemos que: $a = \gamma \cos \theta$

$$b = \gamma \operatorname{sen} \theta, \quad \text{onde } \theta = \arg(a + bi), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

De (II) segue então que,

$$1 = \gamma (\cos \theta \cos v + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v) \Leftrightarrow$$

$$1 = \gamma \cos(\theta - v)$$

$$\cos(\theta - v) = \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{III})$$

Observemos que esta última equação só tem sentido se $\gamma > 1$.

Voltando em (I) e substituindo a e b , obtemos:

$$\begin{cases} -v \operatorname{sen} v + \lambda \cos v = \lambda \gamma \cos \theta \\ v \cos v + \lambda \operatorname{sen} v = \lambda \gamma \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \theta + \lambda \cos v \operatorname{sen} \theta = \lambda \gamma \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \text{(iii)} \\ -v \cos v \cos \theta - \lambda \operatorname{sen} v \cos \theta = -\lambda \gamma \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \text{(iv)} \end{cases}$$

$$(iii) + (iv) \Rightarrow$$

$$-v(\operatorname{sen} v \operatorname{sen} \theta + \cos v \cos \theta) + \lambda(\cos v \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} v \cos \theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}(\theta - v) = \frac{v}{\lambda \gamma} \quad . \quad (IV)$$

$$\text{Tomando-se } v_0 = -\arccos \frac{1}{\gamma} + \theta, \quad 0 < \theta - v_0 < \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda_0 = \frac{v_0}{\gamma \operatorname{sen}(\theta - v_0)},$$

obtemos, desta forma, as sequências:

$$v_m = v_0 + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_m = \frac{v_m}{\gamma \operatorname{sen}(\theta - v_m)}$$

que é a sequência referida em (5).

Seja agora,

$$\sigma(\xi, \lambda) = \xi e^\xi + \lambda e^\xi - \lambda a - i\lambda b.$$

$$\text{Tomemos } \xi_m = i v_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$(10) \quad \sigma(\xi_m, \lambda_m) = 0.$$

$$(20) \quad \left. \frac{\partial \sigma(\xi, \lambda)}{\partial \xi} \right|_{(\xi_m, \lambda_m)} = e^{\xi} + \xi e^{\xi} + \lambda e^{\xi} \Big|_{(\xi_m, \lambda_m)} = e^{\xi} (1 + \lambda + \xi) \Big|_{(\xi_m, \lambda_m)} =$$

$$= e^{iv_m} (1 + iv_m + \lambda_m) \neq 0.$$

$$(30) \quad \left. \frac{\partial \sigma(\xi, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(\xi_m, \lambda_m)} = e^{\xi} - a - ib \Big|_{(\xi_m, \lambda_m)} = e^{iv_m} - a - ib.$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas, temos que $\xi_m = \xi_m(\lambda)$ para próximo de λ_m .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \xi_m(\lambda) &= \frac{-\frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma(\xi_m, \lambda_m)}{\frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\xi_m, \lambda_m)} = \frac{-e^{iv_m} + a + bi}{e^{iv_m} (1 + iv_m + \lambda_m)} = \\ &= \frac{e^{-iv_m} [-e^{iv_m} + a + bi]}{(1 + \lambda_m) + iv_m} = \frac{-1 + ae^{-iv_m} + bie^{-iv_m}}{(1 + \lambda_m) + iv_m} = \\ &= \frac{(-1 + ae^{-iv_m} + bie^{-iv_m})(1 + \lambda_m - iv_m)}{(1 + \lambda_m)^2 + v_m^2} = \\ &= \frac{-1 - \lambda_m + iv_m + (a + bi)(\cos v_m - i \sin v_m)(1 + \lambda_m - iv_m)}{(1 + \lambda_m)^2 + v_m^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \frac{d}{d\lambda} \xi_m(\lambda_m) &= (-1 - \lambda_m + a \cos v_m + \lambda_m a \cos v_m - a v_m \operatorname{sen} v_m + b v_m \cos v_m + \\
 &+ b \operatorname{sen} v_m + \lambda_m b \operatorname{sen} v_m) ((1 + \lambda_m)^2 + v_m^2)^{-1} = \\
 &= [-1 - \lambda_m + (1 + \lambda_m) \gamma^2 (\cos \theta \cos v_m + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v_m) + \\
 &+ \gamma^2 v_m (-\cos \theta \operatorname{sen} v_m + \operatorname{sen} \theta \cos v_m)] ((1 + \lambda_m)^2 + v_m^2)^{-1} = \\
 &= [-1 - \lambda_m + (1 + \lambda_m) \gamma^2 \cos(\theta - v_m) + \\
 &+ \gamma^2 v_m \operatorname{sen}(\theta - v_m)] ((1 + \lambda_m)^2 + v_m^2)^{-1} = \\
 &= (-1 - \lambda_m + (1 + \lambda_m) \gamma^2 \frac{1}{\gamma^2} + \gamma^2 v_m \frac{v_m}{\lambda_m^2 \gamma^2}) ((1 + \lambda_m)^2 + v_m^2)^{-1} = \\
 &= (-1 - \lambda_m + 1 + \lambda_m + \frac{v_m^2}{\lambda_m^2}) ((1 + \lambda_m)^2 + v_m^2)^{-1} > 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{Re} \xi_m(\lambda)$ é uma função crescente, e assim as raízes da equação característica passam obrigatoriamente do real negativo para o real positivo, quando λ passa por λ_m , e são simples.

Note que o par $(\xi_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é solução da equação $\sigma(\xi, \lambda) = 0$, ou seja, $\sigma(0, 0) = 0$.

Suponhamos que exista uma raiz com parte real positiva para $0 < \lambda < \lambda_0$.

Temos, para

$$\sigma(\xi, \lambda) = \xi + \lambda - \lambda a e^{-\xi} - i \lambda b e^{-\xi} = 0,$$

$$|\xi| = |\lambda - \lambda e^{-\xi}(a + bi)| < \lambda_0 + e^{-\operatorname{Re}(\xi)} \lambda_0 \gamma < \lambda_0(1 + \gamma).$$

Portanto, se existir uma solução ξ , com $\operatorname{Re} \xi > 0$ para $0 < \lambda < \lambda_0$, ela estará no semi-disco aberto à direita de centro no zero e raio $\lambda_0(1 + \gamma)$.

Observemos que não temos solução no contorno, e então, o Teorema de Rouché [1], garante que o número de raízes dentro do disco é independente de λ , para $0 < \lambda < \lambda_0$.

Estudemos o caso λ próximo de zero, já que $(0,0)$ é solução.

Temos:

$$\sigma(0,0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}(\xi, \lambda) \right|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \sigma(\xi, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(0,0)} = 1 - a - ib.$$

Pelo Teorema da Funções Implícitas, temos:

$$\left. \frac{d\xi}{d\lambda} \right|_{(0,0)} = -1 + ae^{-\xi} + ibe^{-\xi} \Big|_{(0,0)} = -1 + \gamma \cos \theta + i\gamma \sin \theta.$$

Portanto,

$$\operatorname{Re} \frac{d\xi}{d\lambda} = -1 + \gamma \cos \theta.$$

Portanto, a solução nula se "deslocará" para a esquerda se $-1 + \gamma \cos \theta < 0 \iff \cos \theta < \frac{1}{\gamma}$ e não temos raízes com parte real positiva para $0 < \lambda < \lambda_0$.

E, a solução nula se "deslocará" para a direita se

$-1 + \gamma \cos \theta > 0 \Leftrightarrow \cos \theta > \frac{1}{\gamma}$ e então para todo $\lambda > 0$ existe uma raiz com parte real positiva.

Assim, ficam também demonstradas (3) e (4).

A demonstração de [5] segue de (2), (3) e (4).

Consideremos as seguintes equações diferenciais:

$$(III-5) \quad \dot{x}(t) = Lx_t + H(x_t)$$

$$(III-6) \quad \dot{y}(t) = Ly_t$$

onde $L : R^2 \rightarrow R^2$ é um operador linear contínuo, H é contínua, $H(0) = 0$ e $H'(0) = 0$.

A equação característica de (III-5) é

$$\det \Delta(\xi) = 0, \quad \Delta(\xi) = \xi I - L(e^\xi I).$$

Para qualquer auto valor ξ , o espaço de fase C é decomposto como $C = P_\xi + Q_\xi$, onde P_ξ e Q_ξ são invariantes sob o operador solução $T(t)$, $t \geq 0$, dado por $T(t)\phi = y_t(\phi)$, $\phi \in C$ [12].

Seja π_ξ o operador projeção com imagem P_ξ definido por esta decomposição.

Na demonstração de nosso próximo teorema, vamos utilizar os seguintes resultados:

Teorema (III-3): [23]

Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

(i) Existe um auto valor ξ de (III-6) com $\operatorname{Re} \xi > 0$.

(ii) Existe um conjunto convexo fechado $k \subset \mathbb{C}$, $0 \notin k$, e $\delta > 0$

tal que

$$v = v(\delta) = \inf\{\|\pi_{\xi}\phi\|, \phi \in k, \|\phi\| = \delta\} > 0.$$

(iii) Existe uma função contínua $\tau: k \setminus \{0\} \rightarrow [\rho, \infty]$, $\rho > 0$, tal

que a aplicação A dada por:

$$A\phi = x_{\tau(\phi)}(\cdot, \phi), \quad \phi \in k \setminus \{0\}$$

$$A0 = 0$$

é completamente contínua e leva k em si próprio.

(iv) Dado $G \subset \mathbb{C}$ aberto, $0 \notin G$, existe uma vizinhança V de 0

tal que $x_t(\cdot, \phi) \in G$, se $\phi \in V \cap k$, $\phi \neq 0$, e $0 \leq t \leq \tau(\phi)$.

Então 0 é um ponto ejetivo de A .

Teorema (III-4): [18]

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e seja $\lambda > 0$.

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo fechado (possivelmente infinito) tal que $f(I) \subseteq I$.

Se $\phi \in C([-1, 0], \mathbb{R})$ satisfaz $\phi(\theta) \in I$ para todo $\theta \in [-1, 0]$, então a solução $x_t(\lambda, \phi)$ de

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1))$$

satisfaz $x_t(\lambda, \phi) \in I$, para todo $t \geq 0$.

Teorema (III-5): [22]

Seja X um espaço de Banach.

Seja $K \subset X$ um conjunto convexo fechado em X , $A: K \setminus \{0\} \rightarrow K$ uma aplicação completamente contínua, $0 \notin K$ um ponto ejetivo de A , e suponha que existe um $M > 0$ tal que para $x \in K$ com $\|x\| = M$, $A(x) = \mu x$ implica $\mu < 1$.

Então A possui um ponto fixo $x_0 \neq 0$, $\|x_0\| < M$ se, ou K é de dimensão infinita ou 0 é um ponto extremo de K .

O seguinte teorema teve sua inspiração inicial em [2] onde é demonstrado o que se segue:

Seja: $A = \{\phi \in C : \phi(\theta) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 : -1 \leq \theta \leq 0\}$.

Seja $\dot{x}(t) = f(x_t)$, $f: C \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua e leva limitado em limitado. Se $\phi \in A \Rightarrow x_t(\phi) \in A$ para todo ϕ e $f(\phi) \neq 0$, então existe solução periódica não constante em A .

O Teorema (I-2) despertou-nos novamente o interesse nesta direção.

Finalmente, Tâboas em seu trabalho "Periodic solutions of a Planar Delay Equation" [23], deu-nos o impulso final.

Geometricamente, poderíamos dizer que o resultado em [23] vale quando $JF(0)$ é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos combinada com uma expansão.

O nosso resultado vale para qualquer rotação α , $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e

$-\frac{\pi}{4} > \alpha > -\frac{\pi}{2}$ combinada também com uma expansão por um fator maior do que um.

Teorema (III-6):

Consideremos a equação

(III-7) $\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda F(x(t-1))$, onde $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, F é limitada, ou seja, existe $M > 0$ onde $\|F(x)\| < M$, para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Seja

$$JF(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

onde $a > 0$, $b > 0$, $b > a$, $a^2 + b^2 > 1$.

Sejam

$$(H_1) \quad F_1(x) (ax_1 + bx_2) > 0, \quad ax_1 + bx_2 \neq 0.$$

$$F_2(x) (-bx_1 + ax_2) > 0, \quad -bx_1 + ax_2 \neq 0.$$

$$(H_2) \quad \text{Em III: } F_2(x) < -\frac{a}{b} F_1(x)$$

$$\text{Em V: } F_2(x) > \frac{b}{a} F_1(x)$$

$$\text{Em VII: } F_2(x) > -\frac{a}{b} F_1(x)$$

$$\text{Em IX: } F_2(x) < \frac{b}{a} F_1(x)$$

onde as regiões III, V, VII e IX encontram-se na figura abaixo.

Então, para cada $\lambda > \lambda_0 \geq 0$, onde λ_0 está definido no Teorema (III-2), existe uma solução periódica de (III-7) não constante.

Figura 1

Prova:

Vamos mostrar primeiramente que todas as condições do Teorema (III-3) estão satisfeitas.

(i) esta condição é garantida pelo estudo da equação característica, já feita no Teorema (III-2).

Para mostrar as outras condições, vamos definir um conjunto convexo $k \subset C$, da seguinte forma:

$$k = \{ \phi \in C, \quad \phi_1(-1) \geq 0, \quad 0 \leq \phi_2(\theta) \leq \frac{b}{a} \phi_1(\theta), \quad \phi_1(\theta) e^{\lambda \theta}$$

não decrescente, $\theta \in [-1, 0] \}$.

Devemos mostrar que para uma condição inicial $\phi \neq 0$, $\phi \in k$, $x_t(\lambda, \phi)$ retorna a k num tempo finito, permitindo assim, a definição de um operador A da seguinte forma:

Dada $\phi \in C$, $A\phi = \psi$ é a solução no instante t_ϕ , tal que $\psi = x_{t_\phi}(\lambda, \phi) \in k$, onde t_ϕ é o instante em que $x_t(\lambda, \phi)(0)$ toca no eixo x .

Assim, $A : k \setminus \{0\} \rightarrow k$,

$$A(\phi) = x_{t_\phi}(\phi), \quad \phi \neq 0$$

$$A_0 = 0.$$

Para isto, vamos mostrar que dada $\phi \neq 0$, $\phi \in k$, $x_t(\lambda, \phi)(0)$ gira no sentido horário, retornando a k num tempo finito.

Vamos então mostrar que $x_t(\lambda, \phi)(0)$ atravessa todas as regiões da figura 1 e não tende a zero em nenhuma delas.

Seja $\phi \in K$.

De acordo com a figura 1, e com a definição de k , $\phi(0)$ estará na união de I e II.

Mostremos inicialmente que a solução $x_t(\lambda, \phi)(\theta)$, $-1 \leq \theta \leq 0$ não sai da região I para a região IX.

Suponhamos que exista um primeiro θ_1 tal que $x_t(\lambda, \phi)(\theta_1)$ é tal que $x_2(t, \phi)(\theta_1) = \frac{b}{a} x_1(t, \phi)(\theta_1)$.

Vamos mostrar que o vetor tangente no ponto $x_t(\lambda, \phi)(\theta_1)$ aponta para o interior da região I.

Levando em conta que $F_1 > 0$ e $F_2 < 0$ em I, temos a figura abaixo:

Assim, o vetor tangente em $x_t(\lambda, \phi)(\theta_1)$ aponta para o interior de I e, portanto, a solução $x_t(\lambda, \phi)(\theta)$ não sai por este ponto.

Vamos agora mostrar que $x_t(\lambda, \phi)$, $\phi \in k$, não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Vamos supor, por um momento, que $x_t(\lambda, \phi) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Temos então que a expansão de Taylor de F_1 e F_2 em torno do zero é:

$$F_1(x) = ax_1 + bx_2 + t.o.s.$$

$$F_2(x) = -bx_1 + ax_2 + t.o.s.$$

Voltemos agora a considerar a equação (III-7) na região (I).

Temos em I que $F_1 > 0$, portanto, $x_1(t) > x_1(0)e^{-\lambda t}$ e, portanto, a solução não tende a zero em tempo finito.

Também:

$F_1(x) = ax_1 + bx_2 + t.o.s. > ax_1 + bx_1 + t.o.s.$, pois em (I) temos $x_2 > x_1$.

Portanto, como $a^2 + b^2 > 1$, $a > 0$, $b > 0$, então $a + b > 1$ e então existe constante $c > 1$,

$$\dot{x}_1(t) > -\lambda x_1(t) + \lambda c x_1(t-1).$$

Consideremos a seguinte equação em R :

$$\dot{z}_1(t) = -\lambda z_1(t) + \lambda c z_1(t-1).$$

Como $c > 1$, temos que pelo Teorema (III-4) a solução $z_1(\lambda, \phi)$ não pode tender a zero nesta região.

Como $x_1(\lambda, \phi) > z_1(\lambda, \phi) > 0$ temos que a solução $x_t(\lambda, \phi)$ não

Temos na região I que $x_2(t) \leq x_2(0)e^{-\lambda t}$. Suponhamos que $x(t)$ permaneça nesta região para todo $t \geq 0$. Então $x_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ e então $\dot{x}_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ e, portanto, $F_2(x_1(t-1), x_2(t-1)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Mas então $(x_1(t-1), x_2(t-1)) \rightarrow (0,0), t \rightarrow \infty$, e então $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ (absurdo).

Assim, temos que existe um primeiro $t_1 > 0$ tal que $x_{t_1}(\lambda, \phi)(0)$ pertence à reta $x_2 = x_1$, entrando assim na região II.

Usando a expansão de Taylor de F_2 em torno do zero, temos:

$$F_2(x) = -bx_1 + ax_2 + t.o.s = -bx_1 + bx_2 + (a-b)x_2 + t.o.s < -bx_1 + bx_1 + (a-b)x_2 + t.o.s.$$

Assim, como $a-b < 0$, existe $c < 0$ tal que

$$\begin{aligned} x_2(n+1) &= x_2(0)e^{\lambda(-n-1)} + \lambda \int_0^{n+1} e^{\lambda(s-n-1)} F_2(x(s-1)) ds < \\ &< x_2(0)e^{\lambda(-n-1)} + \lambda \int_0^{n+1} e^{\lambda(s-n-1)} cx_2(s-1) ds < \\ &< x_2(0)e^{\lambda(-n-1)} + \lambda \int_0^{n+1} e^{-(-n-1)} cx_2(-1) ds = \\ &= e^{\lambda(-n-1)} [x_2(0) + \lambda cx_2(-1)(n+1)]. \end{aligned}$$

Lembrando que $c < 0$ e $x_2(-1) > 0$, temos que quando $n \rightarrow \infty$, $x_2(\lambda, \phi)(\theta) < 0$, e, portanto, $x_2(\lambda, \phi)(\theta)$ deixa o primeiro quadrante, ou seja, deixa a região II, cruzando o eixo dos x num tempo t finito, e assim a solução entra na região III.

A solução não volta para a região II devido às propriedades do campo vetorial.

Mostremos que $x_t(\lambda, \phi)$ não tende a zero em III.

Usando também aqui a expansão de Taylor de F_2 em torno do zero, temos:

$$F_2(x) = -bx_1 + ax_2 + t.o.s. < bx_2 + ax_2 + t.o.s. = (b+a)x_2 + t.o.s.$$

Portanto,

$$\dot{x}_2(t) = -\lambda x_2(t) + \lambda F_2(x(t-1)) < -\lambda x_2(t) + \lambda c x_2(t-1), \quad c > 0,$$

e agora usamos o mesmo argumento usado na região I.

Voltando à região III, mostremos que quando a solução $x_t(\lambda, \phi)(0)$ toca na reta $x_2 = -\frac{a}{b}x_1$, então ela a cruza.

Temos:

Para que o vetor tangente no ponto $x_t(\lambda, \phi)(0)$ aponte para o interior de IV, devemos impor:

$$-\lambda x_2(t) + \lambda F_2(x(t-1)) < -\frac{a}{b} [-\lambda x_1(t) + \lambda F_1(x(t-1))], \quad \text{ou seja,}$$

$$F_2(x(t-1)) < -\frac{a}{b} F_1(x(t-1)) \quad \text{que é uma de nossas hipóteses.}$$

É fácil ver que esta desigualdade se verifica para $JF(0)$ em toda a região III se $b > a$.

Temos então que a solução entra na região IV e não volta para III, pois em IV, $F_1(x) < 0$ e $F_2(x) < 0$.

Em IV, para mostrarmos que $x_t(\lambda, \phi)$ não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, dividimos esta região em 2 partes através da reta $r: x_2 = -x_1$.

Acima desta reta, procedemos como em I e III, usando que aqui $F_2(x) = -bx_1 + ax_2 + t.o.s. < (b+a)x_2 + t.o.s.$

Abaixo desta reta, procedemos como em II, usando que $F_1(x) < (a-b)x_1 + t.o.s.$ e mostrando que $x_1(t)$ deixa IV, indo para V, cortando o eixo dos y num tempo finito.

Da região V, a solução não volta para IV, pois em V, $F_1(x) < 0$ e $F_2(x) < 0$.

Em V, a solução não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, pois usando a linearização de $F_2(x)$ em torno do zero temos $F_1(x) < (a+b)x_1 + t.o.s.$, e basta agora aplicarmos um raciocínio análogo ao usado nas regiões I e III.

Para mostrar que, se existir um t tal que $x_t(\lambda, \phi)(0)$ toca na reta $x_2 = \frac{b}{a}x_1$, então ela entra para a região VI, procede-se de maneira análoga àquela feita em IV, usando-se aqui a hipótese $F_2(x) > \frac{b}{a}F_1(x)$, uma vez que as condições sobre F_1 e F_2 aqui são diferentes.

Assim, a solução entra em VI, e não volta para V, pois em VI, $F_1(x) < 0$ e $F_2(x) > 0$ e, portanto, o campo vetorial aponta para o interior de VI.

Para mostrarmos que $x_t(\lambda, \phi)$ não tende a zero em VI, dividimos esta região em 2 partes através da reta $x_2 = x_1$.

Abaixo desta reta, usamos o mesmo raciocínio que em I e III.

Acima desta reta, procedemos como em II.

Assim, a solução corta o eixo dos x num tempo t finito e entra em VII, não voltando para VI, pois em VII, $F_1(x) < 0$ e $F_2(x) > 0$ e assim, o campo vetorial aponta para o interior de VII.

Pelo mesmo raciocínio usado em III, temos que $x_t(\lambda, \phi)$ não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, em VII.

Usando a hipótese $F_2(x) > -\frac{a}{b} F_1(x)$, em VII, temos que $x_t(\lambda, \phi)$ atravessará a reta $x_2 = -\frac{a}{b} x_1$, entrando assim na região VIII.

De VIII a solução não volta para VII, pois em VIII $F_1(x) > 0$ e $F_2(x) > 0$ e então o campo vetorial aponta para o interior de VIII.

Em VIII, $x_t(\lambda, \phi)$ não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, por um raciocínio análogo aos usados anteriormente em IV e VI.

No instante em que $x_t(\lambda, \phi)(0)$ tocar o eixo y , o campo vetorial estará apontando para o interior da região IX, pois em VIII, $F_1(x) > 0$.

Como em IX, $F_1(x) > 0$ e $F_2(x) > 0$, a solução não volta para VIII.

Também, $x_t(\lambda, \phi)$ não tende a zero em IX.

Assim, vemos que para toda solução com condição inicial $\phi \in k$, existe um instante $\bar{t}$ para o qual $x_{\bar{t}}(\lambda, \phi)(0)$ pertence à reta $x_2 = \frac{b}{a} x_1$.

Como em IX, temos a hipótese $F_2(x) < \frac{b}{a} F_1(x)$, a solução atravessará esta reta, entrando assim, novamente na região I.

É claro que $x_{\bar{t}+1}(\lambda, \phi) \in k$, pois $x_t(\lambda, \phi)(0)$ não pode cruzar o eixo dos x com $x(t-1)$ na região IX, pois enquanto isto ocorre $x_t(\lambda, \phi)(0)$ é crescente

Como já foi demonstrado, $x_t(\lambda, \phi)$ gira no sentido horário, e, portanto, existe um instante $t = t_\phi$ tal que $x_{t_\phi}(\lambda, \phi)(0)$ pertence ao eixo x .

Podemos então definir o operador:

$$A : K/\{0\} \rightarrow k$$

$$A(\cdot, \phi) = x_{t_\phi}(\lambda, \phi), \quad \phi \neq 0$$

$$A_0 = 0.$$

A continuidade em relação às condições iniciais e a transversalidade implicam na continuidade da aplicação.

$$\phi \xrightarrow{T} t_{\phi}.$$

É fácil ver que o operador A é completamente contínuo, pois a imagem de qualquer conjunto limitado em k é equicontínuo e uniformemente limitado em k .

Fica assim satisfeita a condição (iii) do Teorema (III-4).

Passemos agora à demonstração da condição (ii).

Temos que a equação:

$$(III-8) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} x(t-1)$$

é a linearização da equação (III-7) em torno do zero.

A equação característica de (III-8) é dada por:

$$(III-9) \quad (\xi + \lambda - \lambda a e^{-\xi}) e^{\xi} = i \lambda b.$$

É fato sabido [12] capítulo 7, que uma raiz (ξ) de (III-9) determina uma decomposição do espaço de fase C , como uma soma direta dada por $C = P_{\xi} + Q_{\xi}$. E sabemos da demonstração de Teorema (III-2) que podemos escolher ξ tal que $\operatorname{Re} \xi > 0$ e $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi/2$.

Seja

$$L\phi = -\lambda\phi(0) + \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \phi(-1).$$

A representação de Riesz para L , é dada por uma matriz 2×2 , $\eta(\theta)$, $-1 \leq \theta \leq 0$, tal que

$$\eta(-1) = 0, \quad \eta(\theta) = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad -1 < \theta < 0,$$

$$\eta(0) = -\lambda I + \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \theta = 0.$$

Assim, para cada $\phi \in C$, temos:

$$L\phi = \int_{-1}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta).$$

Seja A o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, de finido pelas soluções de (III-8).

Portanto, ξ é um autovalor simples de A . P_ξ é o subespaço generalizado 1-dimensional associado a ξ , isto é, $P_\xi = M_\xi(A)$.

Se A^* é o operador adjunto formal de A , temos que ξ também é um autovalor simples de A^* e $M_\xi(A^*)$ também é 1-dimensional.

Seja $C^* = C([0,1], R^{2*})$, onde R^{2*} é o espaço dos vetores linha de R^2 .

Temos então definida uma forma bilinear de $C^* \times C$, dada por:

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \psi(\alpha - \theta) [d\eta(\theta)]\phi(\alpha) d\alpha,$$

Seja v uma solução não trivial de $\Delta(\xi)v = 0$, onde

$$\Delta(\xi) = (\xi + \lambda)I - \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} e^{-\xi}, \text{ e se } v^* \text{ é uma solução não trivial de}$$

$v^*\Delta(\xi) = 0$, então as funções $\rho(t) = e^{\xi t}w$, $t \in [-1, 0]$ e $\psi(s) = v^*e^{-\xi s}$, $s \in [0, 1]$ geram $M_\xi(A)$ e $M_\xi(A^*)$ respectivamente [veja [12] - capítulo 7].

A decomposição de $C = P_\xi + Q_\xi$ é tal que para toda $\phi \in C$,

$$\phi = \phi^P_\xi + \phi^Q_\xi, \text{ e}$$

$$\phi^P_\xi = (\psi, \phi)\rho.$$

Passamos agora a mostrar que:

$$\inf\{\|\phi^P_\xi\|, \phi \in k, \|\phi\| = 1\} > 0$$

ou equivalente:

$$\inf\{|(\psi, \phi)|, \phi \in k, \|\phi\| = 1\} > 0.$$

Observemos primeiramente que podemos escolher $v^* = (1, -i)$ como solução de $v^*\Delta(\xi) = 0$.

Temos também:

$$\psi(0) = v^*.$$

$$\psi(\alpha - \theta) = v^*e^{-\xi(\alpha - \theta)}.$$

Portanto:

$$(\psi, \phi) = v^* \phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta v^* e^{-\xi(\alpha - \theta)} [d\eta(\theta)] \phi(\alpha) d\alpha.$$

$$(\psi, \phi) = (1, -i) \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\xi(\alpha - \theta)} (1, -i) \begin{bmatrix} d\eta_{11}(\theta) & d\eta_{12}(\theta) \\ d\eta_{21}(\theta) & d\eta_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(\alpha) \\ \phi_2(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha.$$

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) = & \phi_1(0) - i\phi_2(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\xi(\alpha - \theta)} \{ [d\eta_{11}(\theta) - id\eta_{21}(\theta)] \phi_1(\alpha) + \\ & + [d\eta_{12}(\theta) - id\eta_{22}(\theta)] \phi_2(\alpha) \} d\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) = & \phi_1(0) - i\phi_2(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\xi(\alpha - \theta)} d\eta_{11}(\theta) \phi_1(\alpha) d\alpha + \\ & + i \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\xi(\alpha - \theta)} d\eta_{21}(\theta) \phi_1(\alpha) d\alpha - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\xi(\alpha - \theta)} d\eta_{12}(\theta) \phi_2(\alpha) d\alpha + \\ & + i \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\xi(\alpha - \theta)} d\eta_{22}(\theta) \phi_2(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\psi, \phi) = & \phi_1(0) - i\phi_2(0) - \int_{-1}^0 [e^{\xi\theta} \int_0^\theta e^{-\xi\alpha} \phi_1(\alpha) d\alpha] d\eta_{11}(\theta) + \\
 & + i \int_{-1}^0 [e^{\xi\theta} \int_0^\theta e^{-\xi\alpha} \phi_1(\alpha) d\alpha] d\eta_{21}(\theta) - \\
 & - \int_{-1}^0 [e^{\xi\theta} \int_0^\theta e^{-\xi\alpha} \phi_2(\alpha) d\alpha] d\eta_{12}(\theta) + \\
 & + i \int_{-1}^0 [e^{\xi\theta} \int_0^\theta e^{-\xi\alpha} \phi_2(\alpha) d\alpha] d\eta_{22}(\theta) .
 \end{aligned}$$

Calculando as integrais de Stieltjes em θ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 (\psi, \phi) = & \phi_1(0) - i\phi_2(0) - \lambda e^{-\xi a} \int_0^{-1} e^{-\xi\alpha} \phi_1(\alpha) d\alpha - \lambda e^{-\xi b} \int_0^{-1} e^{-\xi\alpha} \phi_2(\alpha) d\alpha - \\
 & - i\lambda e^{-\xi b} \int_0^{-1} e^{-\xi\alpha} \phi_1(\alpha) d\alpha + i\lambda e^{-\xi a} \int_0^{-1} e^{-\xi\alpha} \phi_2(\alpha) d\alpha .
 \end{aligned}$$

Seja agora $\xi = x + iy$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 (\psi, \phi) = & \phi_1(0) - i\phi_2(0) + \lambda a \int_{-1}^0 e^{(-x-iy)(\alpha+1)} \phi_1(\alpha) d\alpha + \\
 & + \lambda b \int_{-1}^0 e^{(-x-iy)(\alpha+1)} \phi_2(\alpha) d\alpha + i\lambda b \int_{-1}^0 e^{(-x-iy)(\alpha+1)} \phi_1(\alpha) d\alpha - \\
 & - i\lambda a \int_{-1}^0 e^{(-x-iy)(\alpha+1)} \phi_2(\alpha) d\alpha .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\psi, \phi) = & \phi_1(0) - i\phi_2(0) + \lambda a \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} (\cos y(\alpha+1) - i \sin y(\alpha+1)) \phi_1(\alpha) d\alpha + \\
 & + \lambda b \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} (\cos y(\alpha+1) - i \sin y(\alpha+1)) \phi_2(\alpha) d\alpha +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\lambda b \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} (\cos y(\alpha+1) - i \operatorname{sen} y(\alpha+1)) \phi_1(\alpha) d\alpha - \\
 & - i\lambda a \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} (\cos y(\alpha+1) - i \operatorname{sen} y(\alpha+1)) \phi_2(\alpha) d\alpha.
 \end{aligned}$$

Seja $M = \operatorname{Re}(\psi, \phi)$ e $N = \operatorname{Im}(\psi, \phi)$.

Temos:

$$\begin{aligned}
 M = & \phi_1(0) + \lambda a \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \cos y(\alpha+1) \phi_1(\alpha) d\alpha + \\
 & + \lambda b \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \cos y(\alpha+1) \phi_2(\alpha) d\alpha + \\
 & + \lambda b \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \operatorname{sen} y(\alpha+1) \phi_1(\alpha) d\alpha - \\
 & - \lambda a \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \operatorname{sen} y(\alpha+1) \phi_2(\alpha) d\alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N = & -\phi_2(0) - \lambda a \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \operatorname{sen} y(\alpha+1) \phi_1(\alpha) d\alpha - \\
 & - \lambda b \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \operatorname{sen} y(\alpha+1) \phi_2(\alpha) d\alpha + \\
 & + \lambda b \int_{-1}^0 e^{-x(\alpha+1)} \cos y(\alpha+1) \phi_1(\alpha) d\alpha - \\
 & - \lambda a \int_{-1}^a e^{-x(\alpha+1)} \cos y(\alpha+1) \phi_2(\alpha) d\alpha.
 \end{aligned}$$

Como $0 < \gamma < \pi/2$, os termos $\text{seny}(\alpha+1)$ e $\text{cosy}(\alpha+1)$ que aparecem nas integrais de M e N são não negativos.

Em k , temos:

$$a\phi_1 + b\phi_2 > 0 \quad e$$

$$b\phi_1 - a\phi_2 > 0.$$

Assim, cada termo que aparece em M é não negativo.

Portanto,

$$M \geq \phi_1(0).$$

Seja $\phi \in k$ tal que $\|\phi\| = 1$. Então existe $\theta_0 \in [-1, 0]$ tal que $\|\phi(\theta_0)\| = 1$.

Como $\phi \in k$, podemos ver pela figura ao lado que $\phi_1(\theta_0) \geq \frac{a}{b} \phi_2(\theta_0)$, e como $\|\phi(\theta_0)\| = 1$, segue que $\phi_1(\theta_0) \geq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Como $\phi_1(\theta)e^{\lambda\theta}$ é não decrescente, temos:

$$\phi_1(0) \geq \phi_1(\theta_0)e^{\lambda\theta_0} \geq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{\lambda\theta_0} \geq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\lambda}.$$

$$\therefore M \geq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\lambda} \quad e \quad \text{então} \quad |(\psi, \phi)| = \sqrt{M^2 + N^2} \geq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\lambda} > 0$$

para cada λ .

Fica assim demonstrada a condição (ii).

Passamos agora a demonstrar a condição (iv).

Seja $x_t(\lambda, \phi) = (x_{1_t}(\lambda, \phi), x_{2_t}(\lambda, \phi)) = (x_1(t), x_2(t))$.

Sem perda de generalidade, podemos tomar os abertos como bolas abertas de centro na origem.

$$x_2 = \frac{b}{a} x_1 \quad \text{e} \quad x_2 = 0.$$

Como vamos trabalhar em vizinhanças arbitrariamente pequenas da origem, podemos usar a linearização de F_1 e F_2 , e segue-se então que existe constante $c > 0$ tal que $c|x_2'(t)| \geq x_1'(t)$.

Seja dada uma vizinhança do zero $B(0, \delta_1)$.

Escolhemos δ_2 suficientemente pequeno tal que $c\delta_2 < (\frac{\delta_1}{k} - \delta_2)$.

Seja $\phi \in B(0, \delta_2) \cap k$.

$$\therefore \|\phi(0)\| < \delta_2.$$

Suponhamos que exista um instante $\bar{t}$ tal que $x_1(\bar{t}) = \frac{\delta_1}{k}$ para algum $k > 0$.

Temos:

$$x_1(\bar{t}) = x_1(0) + \int_0^{\bar{t}} \dot{x}_1(t) dt = \frac{\delta_1}{k}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\bar{t}} \dot{x}_1(t) dt > \frac{\delta_1}{k} - \delta_2.$$

Mas, como $c|\dot{x}_2(t)| \geq \dot{x}_1(t)$, temos:

$$-c\dot{x}_2(t) \geq \dot{x}_1(t) \quad \therefore \quad c\dot{x}_2(t) \leq -\dot{x}_1(t) \quad \therefore \quad \dot{x}_2(t) \leq -\frac{1}{c}\dot{x}_1(t).$$

E então,

$$x_2(\bar{t}) = x_2(0) + \int_0^{\bar{t}} \dot{x}_2(t) dt < \delta_2 - \frac{1}{c} \int_0^{\bar{t}} \dot{x}_1(t) dt < \delta_2 - \frac{1}{c} [\frac{\delta_1}{k} - \delta_2] < 0.$$

Portanto, a solução $x_t(0)$ só pode sair de R pelo eixo dos x , através de um ponto $\bar{x}$.

Suponhamos então que $x_t(0)$ saia de R e entre numa faixa L determinada pela reta $x_2 = -\frac{a}{b}x_1$ e por uma paralela à esta reta passando pelo ponto de escape $\bar{x}$.

Seja agora $H = L \cap \overline{B(0, \delta_1)}$.

Considerando uma sequência de funções $\phi_n \in C^k \cap B(0, \delta_2)$ tais que $\phi_n(\theta) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, determinamos uma sequência H_n , onde $M_n = \sup_{x \in H_n} F_1(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ pois $F_1(x) = 0$ sobre a reta $x_2 = -\frac{a}{b}x_1$ e as faixas H_n , tendem à essa reta quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $x^n = x(\cdot, \phi_n)$.

Então

$$x_1^n(t) \leq e^{-\lambda t} x_1^n(0) + \lambda M_n (1 - e^{-\lambda t}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

e, portanto, a solução não pode sair da $B(0, \delta_1)$, passando para a região abaixo da reta $x_2 = -\frac{a}{b}x_1$.

Este raciocínio pode ser repetido até a solução retornar ao cone.

Assim, temos que todas as condições do Teorema (III-3) estão satisfeitas, e, portanto, temos que zero é um ponto fixo ejetivo do operador A .

Seja agora $\phi \in C^k$, $\|\phi\| = L$, onde $L > 0$ é escolhido suficiente grande tal que $L > M$.

Suponhamos que exista um $t_0 > 0$ tal que $\|x_{t_0}(\cdot, \phi)\| = L$

Temos:

$$\begin{aligned} x(t_0)\dot{x}(t_0) &= x(t_0)[- \lambda x(t_0) + \lambda F(x(t_0-1))] \leq \\ &\leq -\lambda \|x(t_0)\|^2 + \lambda \|x(t_0)\| \|F(x(t_0-1))\| < \\ &< -\lambda L^2 + \lambda LM < 0. \end{aligned}$$

Portanto, o vetor tangente $\dot{x}(t_0, \phi)$ aponta para o interior da bola $\bar{B}(0, L)$, para cada valor t_0 tal que $x(t_0, \phi) \in \partial \bar{B}(0, L)$.

Assim, se $\phi \in k \cap \bar{B}(0, L)$, temos $\|x(t, \phi)\| < L$, para todo $t \geq 0$, e então $A\phi = \mu\phi$ implica $\mu < 1$.

Portanto, o Teorema (III-5) nos assegura que A possui um ponto fixo x_0 não trivial com $\|x_0\| < L$.

Isto significa que para cada $\lambda > \lambda_0$, a equação (III-7) tem uma solução periódica não constante.

Vamos agora estudar o caso em que $JF(0)$ é da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$,
 $a > 0$, $b > 0$, $b > a$, $a^2 + b^2 > 1$.

Ou seja, neste caso, a rotação é no sentido anti horário de um ângulo $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{4}$ seguida de uma expansão por um fator maior do que um.

Teorema (III-7):

Consideremos a equação

(III-8) $\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda G(x(t-1))$, onde $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G = (G_1, G_2)$, G é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|G(x)\| < M$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Seja

$$JG(0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b > a, \quad a^2 + b^2 > 1.$$

Sejam:

$$(H'_1) : G_1(x)(ax_1 - bx_2) > 0, \quad ax_1 - bx_2 \neq 0$$

$$G_2(x)(bx_1 + ax_2) > 0, \quad bx_1 + ax_2 \neq 0.$$

$$(H'_2) : \text{Em II: } G_2(x) > \frac{a}{b} G_1(x)$$

$$\text{Em IV: } G_2(x) > -\frac{b}{a} G_1(x)$$

$$\text{Em VI: } G_2(x) < \frac{a}{b} G_1(x)$$

$$\text{Em VIII: } G_2(x) < -\frac{b}{a} G_1(x)$$

onde as regiões II, IV, VI e VIII encontram-se na figura abaixo.

Então, para cada $\lambda > \lambda_0 \geq 0$, onde λ_0 está definido no teorema (III-2), existe uma solução periódica de (III-8) não constante.

Prova:

Vamos mostrar que uma mudança de variáveis reduz as hipóteses deste teorema às do teorema (III-6).

Consideremos então a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_2. \end{cases}$$

Por esta mudança de variáveis, a equação (III-8) linearizada em torno da origem, é levada na equação linearizada de (III-7).

Ou seja, $JG(0)$ é transformado no $JF(0)$ do teorema (III-6).

As hipóteses (H'_1) e (H'_2) são transformadas nas hipóteses (H_1) e (H_2) respectivamente, do teorema (III-6).

Por exemplo, a região II, na hipótese (H'_2) pela transformação acima, é levada na região III da figura 1, e a condição $G_2(x) > \frac{a}{b} G_1(x)$ imposta aqui na região II, é transformada na condição $F_2(x) < -\frac{a}{b} F_1(x)$ imposta na região III, na hipótese (H_2) do teorema (III-6). $\square$

CAPÍTULO IV

Exemplos

1º Exemplo

Este exemplo tem dois propósitos :

O primeiro, é apresentar uma equação que satisfaça a todas as exigências do teorema (III-6) e, portanto, apresenta soluções periódicas.

O segundo propósito é mostrar que se A_∞ não se constitui de um ponto ou de uma bola, as soluções podem não convergir para A_∞ , como ocorre aqui.

Consideremos então, a seguinte equação no $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda \frac{2Bx(t-1)}{1 + \|x(t-1)\|^2}, \quad \text{onde}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{com } a > 0, \quad b > 0, \quad b > a, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

$$\text{Neste caso, temos } F(x) = \frac{2B(x)}{1 + \|x\|^2}.$$

Temos:

$$a) F(0) = 0$$

b) O círculo $\|x\| = 1$ fica invariante pela F pois:

$$\|F(x)\| = \|B(x)\| = 1, \quad \text{se } \|x\| = 1,$$

c) $\|F(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|x\| \neq 1$, pois:

$$\|F(x)\| = \frac{2\|x\|}{1 + \|x\|^2} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| \neq 1.$$

d) Se $\|x\| < 1 \Rightarrow \|F(x)\| > \|x\|$.

e) Se $\|x\| > \|y\| \Rightarrow \|F(x)\| > \|F(y)\|$, $0 < \|x\| < 1$, $0 < \|y\| < 1$

De fato: Consideremos a seguinte função real:

$$g(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x > 0, \quad 0 < x < 1.$$

Temos:

$$g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0 \quad \text{se } 0 < x < 1.$$

Portanto, g é uma função crescente se $0 < x < 1$, e daí, para $0 < \|x\| < 1$ e $0 < \|y\| < 1$, se $\|x\| > \|y\|$ então

$$g(\|x\|) > g(\|y\|) \Rightarrow \frac{2\|x\|}{1 + \|x\|^2} > \frac{2\|y\|}{1 + \|y\|^2} \Rightarrow \|F(x)\| > \|F(y)\|.$$

f) Seja $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < \|x\| < k, \quad k = k(\varepsilon) > 1\}$.

Vamos mostrar que $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(A)$ é S^1 .

Primeiramente, vamos limitar k , para evitar que

$$\|x\| > 1 \Rightarrow \|F(x)\| < \varepsilon.$$

Vamos impor, então, que $\|F(x)\| = \frac{2\|x\|}{1+\|x\|^2} > \varepsilon$.

Segue então que basta tomar $k = k(\varepsilon) = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$

Assim, devido às propriedades a, b, c, d, e , temos que para um conjunto do tipo A , $A_\infty \equiv S^1$.

As hipóteses do Teorema (III-6) estão satisfeitas para a equação deste exemplo, pois: F é limitada, $JF(0) = 2 \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $2(a^2 + b^2) = 2 > 1$.

Analisemos as hipóteses (H_1) e (H_2) .

$$(H_1) : F_1(x)(ax_1 + bx_2) > 0, \quad ax_1 + bx_2 \neq 0.$$

Temos:

$$\frac{2(ax_1 + bx_2)}{1 + (x_1^2 + x_2^2)} (ax_1 + bx_2) > 0, \quad ax_1 + bx_2 \neq 0.$$

Analogamente:

$$F_2(x)(-bx_1 + ax_2) > 0, \quad -bx_1 + ax_2 \neq 0.$$

$$(H_2) : F_2(x) < \frac{b}{a} F_1(x) \quad \text{em} \quad (IX).$$

$$\frac{2(-bx_1 + ax_2)}{1 + (x_1^2 + x_2^2)} < \frac{b}{a} \left[\frac{2(ax_1 + bx_2)}{1 + (x_1^2 + x_2^2)} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -bx_1 + ax_2 < \frac{b}{a} (ax_1 + bx_2) \quad \text{que é verificada para todo} \quad (x_1, x_2) \in IX.$$

Analogamente se verificam todas as outras hipóteses de (H_2) .

Então, pelo Teorema (III-6), temos que existe $\lambda_0 \geq 0$, tal que a equação dada admite solução periódica para cada $\lambda > \lambda_0$.

Observemos que esta solução $x(t)$ não permanece em S_1 para todo t , pois isto implicaria que o ponto $(1,0)$ seria um ponto de equilíbrio de F o que é contra nossas hipóteses.

Assim, temos aqui um exemplo onde a solução $x_t(\lambda, \phi)$, $\lambda > \lambda_0$, da equação dada, não converge para A_∞ .

Portanto, o Lema (III-2) não se aplica quando A_∞ não se reduz a um ponto ou a uma bola.

O exemplo seguinte foi inspirado em um exemplo de Táboas [23].

2º Exemplo

Consideremos o seguinte sistema:

$$\dot{x}_1(t) = -\lambda x_1(t) + \lambda [\arctg(ax_1(t-1)) + \arctg(bx_2(t-1))]$$

$$\dot{x}_2(t) = -\lambda x_2(t) + \lambda [\arctg(-bx_1(t-1)) + \arctg(ax_2(t-1))]$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad b > a, \quad a^2 + b^2 > 1,$$

ou seja,

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda F(x(t-1)),$$

onde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{bmatrix} \quad e$$

$$F_1(x) = \operatorname{arctg}(ax_1) + \operatorname{arctg}(bx_2)$$

$$F_2(x) = \operatorname{arctg}(-bx_1) + \operatorname{arctg}(ax_2)$$

Queremos mostrar que todas as hipóteses do teorema (III-6) estão satisfeitas.

Temos primeiramente que F é uma função limitada pois a função $y = \operatorname{arctg} x$ é limitada.

Também:

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} = a; \quad \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} = b; \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} = -b; \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} = a.$$

Portanto,

$$JF(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Mostremos que (H_1) está satisfeita.

Temos:

$$F_1(x)(ax_1+bx_2) = [\operatorname{arctg}(ax_1) + \operatorname{arctg}(+bx_2)](ax_1+bx_2).$$

Suponhamos primeiramente $ax_1 + bx_2 > 0$, ou seja, $x_2 > -\frac{a}{b}x_1$.

Devemos então considerar os seguintes casos:

i) Se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$: $\operatorname{arctg}(ax_1) + \operatorname{arctg}(bx_2) > 0$.

ii) Se $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$, temos:

$$\begin{aligned} \arctg(ax_1) + \arctg(bx_2) &> \arctg(ax_1) + \arctg(b(-\frac{a}{b}x_1)) = \\ &= \arctg(ax_1) - \arctg(ax_1) = 0. \end{aligned}$$

A desigualdade e a igualdade acima seguem dos fatos que a função $y = \arctg x$ é estritamente crescente e ímpar, respectivamente.

iii) Se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$: análogo a (ii).

Também de maneira análoga mostra-se que $F_2(x)(-bx_1+ax_2) > 0$ se $-bx_1+ax_2 \neq 0$.

Mostremos agora (H_2) .

Como já foi comentado anteriormente, o fato da derivada de F ser da forma acima, garante, uma vez que $b > a$, que estas propriedades (H_2) estão verificadas em uma vizinhança pequena de zero.

Podemos então concluir que existe uma bola de raio $\varepsilon > 0$ e centro na origem, na qual (H_2) se verifica, com exceção do zero.

Vamos fazer uso desta informação para mostrar que as desigualdades estão satisfeitas em todo o plano.

Em (IX), devemos mostrar que $F_2(x) < \frac{b}{a} F_1(x)$, ou seja,
 $\frac{b}{a} F_1(x) - F_2(x) > 0$, para todo $x = (x_1, x_2) \in IX$.

Vamos tomar um ponto na circunferência de raio ε onde esta desigualdade vale, e considerar a semi-reta r que passa pela origem e por este ponto, e mostrar que $\frac{b}{a} F_1(x) - F_2(x)$ é crescente à medida que um ponto qualquer sobre esta semi-reta se afasta da origem.

A equação de r é da forma $x_2 = cx_1$, $c > 0$, $c > \frac{b}{a}$.

Sobre r temos:

$$\begin{aligned} & \frac{b}{a} [\operatorname{arctg}(ax_1) + \operatorname{arctg}(bx_2)] - \operatorname{arctg}(-bx_1) - \operatorname{arctg}(ax_2) = \\ & = \frac{b}{a} [\operatorname{arctg}(ax_1) + \operatorname{arctg}(bcx_1)] - \operatorname{arctg}(-bx_1) - \operatorname{arctg}(acx_1). \end{aligned}$$

Seja

$$H(x_1) = \frac{b}{a} [\operatorname{arctg}(ax_1) + \operatorname{arctg}(bcx_1)] - \operatorname{arctg}(-bx_1) - \operatorname{arctg}(acx_1).$$

Temos:

$$\begin{aligned} H'(x_1) &= \frac{b}{a} \left[\frac{a}{1+a^2x_1^2} + \frac{bc}{1+b^2c^2x_1^2} \right] + \frac{b}{1+b^2x_1^2} - \frac{ac}{1+a^2c^2x_1^2} = \\ &= \frac{b}{1+a^2x_1^2} + \frac{b^2c}{a(1+b^2c^2x_1^2)} + \frac{b}{1+b^2x_1^2} - \frac{ac}{1+a^2c^2x_1^2}. \end{aligned}$$

Temos:

$$\frac{b^2c}{a(1+b^2c^2x_1^2)} > \frac{ac}{1+a^2c^2x_1^2}, \quad \text{pois } b > a$$

e, então, $H'(x_1) > 0$ e, portanto, $H(x_1)$ é função crescente.

Então, $\frac{b}{a} F_1(x) - F_2(x) > 0$ ao longo de r .

Como r é arbitrária, $\frac{b}{a} F_1(x) - F_2(x) > 0$ em toda a região IX.

Na região III, devemos mostrar que $F_2(x) < -\frac{a}{b} F_1(x)$, ou seja, $\frac{a}{b} F_1(x) + F_2(x) < 0$.

Tomemos então um ponto sobre a circunferência de raio ϵ onde vale esta desigualdade e consideremos uma semi-reta s passando pela origem e por este ponto, e mostremos que $\frac{a}{b} F_1(x) + F_2(x)$ é decrescente à medida que um ponto qualquer sobre esta semi-reta se afasta da origem.

A equação de s é da forma $x_2 = cx_1$, $c < 0$, $c > -\frac{a}{b}$.

Sobre s , temos:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} [\arctg(ax_1) + \arctg(bx_2)] + \arctg(-bx_1) + \arctg(ax_2) = \\ & = \frac{a}{b} [\arctg(ax_1) + \arctg(bcx_1)] + \arctg(-bx_1) + \arctg(acx_1). \end{aligned}$$

Seja

$$H(x_1) = \frac{a}{b} [\arctg(ax_1) + \arctg(bcx_1)] + \arctg(-bx_1) + \arctg(acx_1)$$

$$H'(x_1) = \frac{a^2}{b(1+a^2x_1^2)} + \frac{ac}{1+b^2c^2x_1^2} - \frac{b}{1+b^2x_1^2} + \frac{ac}{1+a^2c^2x_1^2}.$$

$$\text{Temos: } \frac{-b}{1+b^2x_1^2} + \frac{a^2}{b(1+a^2x_1^2)} < 0, \quad \text{pois } b > a.$$

Como os outros dois termos que aparecem na expressão de $H'(x_1)$ são negativos (pois $c < 0$), temos $H'(x_1) < 0$, e então, H é decrescente.

Na região V, para mostrarmos que $F_2(x) > \frac{b}{a} F_1(x)$, fazemos um raciocínio análogo ao feito na região IX, e na região VII, para mostrarmos que $F_2(x) > -\frac{a}{b} F_1(x)$ fazemos um raciocínio análogo ao feito na região III.

Como todas as condições do Teorema (III-6) estão satisfeitas, temos que existe $\lambda_0 > 0$, tal que, para cada $\lambda > \lambda_0$, existe uma solução periódica da equação dada neste exemplo.

3º Exemplo

Como no exemplo anterior, o sistema:

$$\dot{x}_1(t) = -\lambda x_1(t) + \lambda \arctg(ax_1(t-1) + bx_2(t-1))$$

$$\dot{x}_2(t) = -\lambda x_2(t) + \lambda \arctg(-bx_1(t-1) + ax_2(t-1))$$

$a > 0$, $b > 0$, $b > a$, $a^2 + b^2 > 1$, também possui soluções periódicas para $\lambda > \lambda_0$.

Neste caso,

$$F_1(x_1, x_2) = \arctg(ax_1 + bx_2)$$

$$F_2(x_1, x_2) = \arctg(-bx_1 + ax_2).$$

Assim, embora sejam funções diferentes daquelas do 2º exemplo, elas têm a mesma derivada no zero, ou seja, elas apresentam a mesma matriz Jacobiana no zero:

$$JF(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Aqui, as propriedades (H_1) e (H_2) do Teorema (III-6) são mais facilmente verificadas.

De fato:

$$(H_1) : F_1(x)(ax_1 + bx_2) = \arctg(ax_1 + bx_2)(ax_1 + bx_2).$$

Então:

$\arctg(ax_1 + bx_2)(ax_1 + bx_2) > 0$, $ax_1 + bx_2 \neq 0$, está sempre verificada, pois a função $\arctg x$ tem o mesmo sinal que o seu argumento.

Analogamente: $F_2(x)(-bx_1 + ax_2) > 0$, $-bx_1 + ax_2 \neq 0$.

$$(H_2) : \text{Em III: } F_2(x) < -\frac{a}{b} F_1(x).$$

Devemos mostrar que em III da figura 1, temos:

$$\frac{a}{b}[\arctg(ax_1 + bx_2)] + \arctg(-bx_1 + ax_2) < 0.$$

Mas, em III:

$$ax_1 + bx_2 > 0 \quad \text{e} \quad -bx_1 + ax_2 < 0.$$

Portanto,

$$|ax_1 + bx_2| = ax_1 + bx_2$$

e

$$|-bx_1 + ax_2| = bx_1 - ax_2.$$

E temos:

$$ax_1 + bx_2 < bx_1 - ax_2 \quad \text{pois em III: } x_1 > 0, \quad x_2 < 0 \quad \text{e por hi}$$

pótese $b > a$.

Portanto, como $\frac{a}{b} < 1$ e como $\arctg x$ é função estritamente crescente, segue que

$$\frac{a}{b} \arctg[(ax_1 + bx_2)] + \arctg(-bx_1 + ax_2) < 0.$$

De maneira análoga, demonstra-se as outras propriedades exigidas em (H_2) .

Assim, temos satisfeitas todas as hipóteses do Teorema (III-6) e, então, podemos concluir que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para cada $\lambda > \lambda_0$, existe um solução periódica da equação dada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ahlfors, L.V. - Complex Analysis. Mc Graw-Hill Book Company (1953).
- [2] Baroni, R.L.S. - Invariança, Conjuntos Limites e Estabilidade em Sistemas Semi Dinâmicos Gerados Por Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Autônomas. Tese de Doutorado, ICMSC-USP (1984).
- [3] Browder, F.E. - A Further Generalization of the Schauder Fixed Point Theorem. *Duke Math. J.*, 32, (1965), 575-578.
- [4] Dos Reis, J.G. and Baroni, R.L.S. - On the Existence of Periodic Solutions For Autonomous Retarded Functional Differential Equations on $\mathbb{R}^2$. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 102 A, (1986), 259-262.
- [5] Duarte Jr., G.G. - Comportamento Assintótico de Uma Classe de Equações Diferenciais Retardadas com Aplicações em Biologia. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, (1987).
- [6] Feigenbaum, M.J. - The Metric Universal Properties of Periodic Doubling Bifurcations and the Spectrum for a Route to Turbulence. *Annals New York Academy of Sciences*, (1980), 330-336.
- [7] Glass, L. and Mackey, M.O. - Pathological Conditions Resulting from Instabilities in Physiological Control Systems. *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines. Annals of the New York Academy of Sciences*, 316 (1979).
- [8] Guckenheimer, J. and Oster, G. and Ipaktchi, A. - The Dynamics of Density Dependent Population Models, *J. Math. Biology*, 4 (1977), 101-147.
- [9] Gurney, W.S.C. and Blythe, S.P. and Nisbet, N.R. - Nicholson's Blow-flies Revisited - *Nature*, 287 (1980), 17-21.
- [10] Hadeler, K.P. - Delay Equations in Biology. *Lectures Notes in Math.*, 730, Springer, Berlin, 1979.

- [11] Hadelier, K.P. and Tomiuk, J. - Periodic Solutions of Difference Differential Equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), 87-95.
- [12] Hale, J.K. - Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Berlin (1977).
- [13] Hale, J.K. and Sternberg, N. - Onset of Chaos in Differential Delay Equations. Lefschetz Center for Dynamical Systems and Center for Control Sciences, (1987), 87-2.
- [14] Hirsch, W.M. and Smale, S. - Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic, Press (1974).
- [15] Li, T.Y. and Yorke, J.A. - Period Three Implies Chaos. Notices of the American Mathematics Society, (1975), 985-992.
- [16] Mac Donald, N. - Time Lags in Biological Models. Lecture Notes in Biomathematics - Springer Verlag 27 (1978).
- [17] Mackey, M.C. and Glass, L. - Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems. Science, 197 (1977), 287-289.
- [18] Mallet-Paret, J. and Nussbaum, R.D. - Global Continuation and Asymptotic Behavior for Periodic Solutions of a Differential Delay Equation. Ann. mat. Pura Appl. (to appear).
- [19] May, R.M. - Nonlinear Phenomena in Ecology and Epidemiology. Nonlinear Dynamics. Annals of the New York Academy of Science 357 (1980).
- [20] May, R.M. and Oster, G.F. - Bifurcations and Dynamics Complexity in Simple Ecological Models. The American Naturalist, 110 (1976), 573-599.
- [21] Nussbaum, R.D. - Boundary Layer Phenomena for a Differential Delay Equation. Canadian Mathematical Society. Conference Proceedings, volume 8, (1977).
- [22] Nussbaum, R.D. - Periodic Solutions of Some Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations. Ann. di. Mat. Pura e Appl. 101 (1974), 263-306.

- [23] Táboas, P.Z. - Periodic Solutions of a Planar Delay Equations.
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (to appear).

- [24] Iooss, G. - Bifurcations of Maps and Applications. North Holland -
Amsterdam (1979).