SOBRE BIFURCAÇÃO E SIMETRIA EM
EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Luiz Fernandes Galante

Orientador: *Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universidade
de de São Paulo, para a obtenção do Título
lo de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS - SP.

- 1991 -

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, pela oportunidade de aprimoramento profissional que me concedeu com a orientação deste trabalho, conduzida com seriedade e segurança; aos colegas do Departamento de Matemática da FCT-UNESP de Presidente Prudente, pelas condições favoráveis que me proporcionaram; aos meus familiares pelo apoio e a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a feitura deste trabalho.

À Penha, Fernando, Paula
e Juliana.

R E S U M O

Neste trabalho estudamos existência bifurcação e simetrias de soluções especiais de equações não-lineares da forma:

$$(1) \quad Lx = N(x, p, \epsilon) + \mu f,$$

as quais são equivariantes sob a ação de certos grupos de simetrias.

Assumimos que a equação (1) está definida num espaço de Banach X , f é um elemento fixo de um espaço de Banach Z , L é um operador linear e contínuo de X em Z , N é um operador não linear, p , μ e ϵ são pequenos parâmetros.

Sob certas hipóteses mostramos que simetrias do termo forçante implicam em simetrias das pequenas soluções da equação acima. Discutimos também a genericidade da principal hipótese deste trabalho. Alguns exemplos envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais são analisados.

* Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES.

A B S T R A C T

The object of this work is to study existence and bifurcation of special solutions of a nonlinear equations:

$$Lx = N(x, p, \epsilon) + \mu f,$$

defined in a Banach space X , which is equivariant under the action of a certain symmetry groups. It is assumed that L is a continuous linear operator, N is a nonlinear operator, the forcing term f is an element of a Banach space Z , p , μ and ϵ are small parameters.

Under certain hypothesis it is shown that symmetries of the forcing term f imply symmetries of the small solutions of the above nonlinear equations.

It is also discussed the genericity of the main hypothesis of this work. Some examples involving either ordinary differential equations or partial equations are also analysed.

Í N D I C E

	Introdução.....	i
CAP I.	Preliminares.....	1
CAP II.	Sobre Formas Normais de Funções Equivariantes.....	5
CAP III.	Equações com D_m -equivariança.....	11
CAP IV.	Equações com OH_m -equivariança.....	30
CAP V.	Equações com não linearidade $O(2)$ -equivariante e termo forçante D_m -invariante: Bifurcação e Genericidade.....	43
CAP VI.	Equações com não linearidade $O(2)$ -equivariante e força externa OH_m -invariante: Bifurcação e Genericidade.....	58
CAP VII.	Exemplos e Comentários Finais.....	65
	Bibliografia.....	105

INTRODUÇÃO.

Diversos problemas em equações diferenciais ordinárias, equações a derivadas parciais e equações íntegro-diferenciais, após convenientes formalizações, reduzem-se a equações abstratas em espaços de Banach, da forma:

$$(1) \quad Lx = N(x, p, \epsilon) + \mu f,$$

onde p , μ e ϵ são parâmetros reais, L é um operador linear, N é um operador não linear e f um elemento fixo no espaço ambiente, satisfazendo determinadas condições de pequenez regularidade e simetria.

Em geral, para o problema traduzido por (1), além da existência de soluções num determinado espaço, importa saber, como a natureza e o número destas soluções variam com os parâmetros e quais são suas propriedades de simetria.

Neste trabalho, estaremos interessados em equações não lineares do tipo (1), que são equivariantes sob ações de certos grupos.

Mostramos que estas equações possuem um conjunto de soluções especiais que bifurcam a partir de soluções que são invariantes sob ações específicas destes grupos, herdando alguma simetria de uma solução específica, que indicaremos por Kf .

Descrevemos as superfícies de bifurcação e a variação do número destas soluções, quando os parâmetros variam numa pequena vizinhança da origem.

Em alguns casos particulares em que a não linearidade de (1) é equivariante sob ações do grupo $O(2)$ constituído pelas matrizes reais $A=A_{2 \times 2}$ tais que $AA^t = A^t A = I$, provamos sob certa condição, que estas são as únicas soluções peque-

nas da equação. Estabelecemos um critério para verificar a genericidade da condição imposta e a consequente validade dos resultados para a maioria das equações daquele tipo.

Trabalhos anteriores foram desenvolvidos por vários autores a partir de uma equação do tipo:

$$(2) \quad \ddot{x} + x = g(x, p) + \mu f(t),$$

onde $m \geq 1$ é um inteiro, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, par e $2\pi/m$ -periódica, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar em x com $g(x, p) = O(|px| + |x|^3)$ para $(x, p) \rightarrow (0, 0)$.

Hale-Rodrigues [9], estudaram a equação de Duffing:

$$\ddot{x} + x = px + x^3 + \mu f$$

com f par, 2π -periódica, e provaram que toda solução 2π -periódica pequena é par. Esses autores em [10], utilizaram os resultados acima na análise da equação de Duffing amortecida

$$\ddot{x} + x = px + x^3 + \delta \dot{x} + \mu \cos t.$$

Rodrigues-Vanderbauwhede [12], generalizaram estes resultados para equações não lineares abstratas com simetrias análogas àsquelas da equação de Duffing estudada em [9].

Fürkötter-Rodrigues [3], estudaram a equação (2) com $m=2$ e provaram sob certa condição genérica, que as soluções 2π -periódicas pequenas herdam alguma simetria de f .

Esses autores, em [5], estenderam os resultados acima para o caso $m > 2$; em [4] e [6] provaram resultados similares para o caso $m \geq 2$ e f π/m -harmônica-ímpar (isto é, $f(t + \frac{\pi}{m}) = -f(t)$).

A motivação de alguns dos nossos resultados originou-se da análise de existência de soluções 2π -periódicas da equação:

$$(3) \quad \ddot{x} + x = [p + \epsilon H(t)]x + g(x, t, p, \epsilon) + \mu f(t)$$

onde p, μ e ϵ são parâmetros reais, $m \geq 2$ é um inteiro fixado, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, par e $2\pi/m$ -periódica; $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^{m+3} , ímpar em x , $2\pi/m$ -periódica em t , com $g(x, t, p, \epsilon) = o(|px| + |\epsilon x| + |x|^3)$ para $(x, p, \epsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Outras motivações surgiram da análise de existência de soluções 2π -periódicas de sistemas de equações diferenciais não lineares e de equações a derivadas parciais.

Alguns dos resultados apresentados nos Capítulos V e VI deste trabalho generalizam aqueles de Fürkotter-Rodrigues, porém a técnica utilizada por nós é diferente.

A abordagem foi motivada em grande parte pelos exemplos da aplicação. Ela inclui o exemplo (3) e outros modelos envolvendo sistemas de equações diferenciais ordinárias e equações a derivadas parciais.

A análise da equação de bifurcação dependeu parcialmente de sua forma normal, a qual obtivemos seguindo uma sugestão dada pessoalmente por Vanderbauwhede. Esse autor, em [3], considera um problema diferente, porém relacionado ao nosso, para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

As principais ferramentas utilizadas são: Método de Liapunov-Schmidt para Equações Equivariantes, Teorema das Funções Implícitas e Representação de Grupos.

Como contribuições deste trabalho destacamos: o estudo de existência, bifurcação e simetrias de soluções especiais, para algumas famílias de equações não lineares definidas em espaços de Banach, equivariantes sob ações de certos grupos de simetria; a demonstração de que, dentro de certa condição, as únicas soluções possíveis de certas famílias de

equações com não linearidade $O(2)$ -equivariante, são as soluções especiais acima citadas e, finalmente, o estabelecimento de um critério que permite verificar a genericidade da condição imposta.

A seguir faremos uma descrição do conteúdo dos capítulos que compõe este trabalho.

No Capítulo I apresentamos as hipóteses comuns às famílias de equações não lineares que serão consideradas. As condições de simetria são dadas por um subgrupo G de $O(2)$ que é depois especificado nos capítulos seguintes. Por aplicação do Método de Liapunov-Schmidt, Teorema das Funções Implícitas e uma identificação do Kernel, reduzimos a equação original a uma equação complexa.

No Capítulo II estabelecemos a Forma Normal das Funções Complexas que são equivariantes em relação a ações específicas do grupo diedral D_m , isto é, o subgrupo de $O(2)$ gerado pelas rotações de ângulo $\phi_j = 2j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e pela reflexão $\tau: (x, y) \rightarrow (x, -y)$.

No Capítulo III, consideramos a classe de equações não lineares da forma (1), que são equivariantes sob ações do grupo D_m . Determinamos uma família de soluções especiais que bifurcam a partir de soluções D_m -invariantes. Descrevemos as superfícies de bifurcação, a variação do número de soluções D_m -invariantes e especiais, e as simetrias herdadas pelas soluções especiais.

No Capítulo IV, consideramos a classe das equações não lineares da forma (1), que são equivariantes sob ações de um grupo específico, que indicaremos por OH_m . Como no capítulo anterior, determinamos um conjunto de soluções especiais que bifurcam a partir de soluções OH_m -invariantes. Determinamos as superfícies de bifurcação, as simetrias e a

variação do número de soluções, quando os parâmetros percorrem uma vizinhança da origem.

No Capítulo V, estudamos um caso particular daquele abordado no Capítulo III. Consideramos equações não lineares da forma

$$(4) \quad Lx = N(x,p) + \mu f$$

onde os operadores L e N são $O(2)$ -equivariantes e a força externa f é D_m -invariante. Na equação (3) isto corresponde ao caso em que $\epsilon=0$ e a não linearidade $g(x,t,p,0)$ é autônoma, isto é, independente de t .

Provamos para este caso que se um determinado coeficiente é não nulo, então as únicas soluções pequenas da equação, com (p,μ) numa vizinhança da origem e $\mu \neq 0$, são harmônicas ou especiais. Estabelecemos um critério que permite verificar se o não anulamento do coeficiente é uma condição genérica.

No Capítulo VI, estudamos o caso particular do Capítulo IV em que a equação tem a forma (4) com L e N $O(2)$ -equivariantes e f OH_m -invariante. Provamos, como no capítulo anterior, que se um determinado coeficiente é não nulo, então as únicas soluções possíveis são π/m - harmônicas ou especiais. Estabelecemos também para este caso um critério para verificar se o não anulamento do coeficiente é uma condição genérica.

No Capítulo VII, fazemos aplicações em modelos de equações diferenciais ordinárias, de sistemas e problemas a valores de contorno elítico não lineares. Finalizamos com alguns comentários sobre possíveis extensões das idéias deste trabalho.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste capítulo, além de obter resultados básicos, estabeleceremos um primeiro contacto com o problema a ser analisado.

Sejam X, Z , espaços de Banach com $X \subset Z$, B uma bola centrada na origem de X , Ω uma vizinhança da origem no $\mathbb{R}^2$, $L: X \rightarrow Z$ um operador linear, $N: B \times \Omega \rightarrow Z$ um operador não linear e f um elemento fixo no espaço Z .

Pretendemos estudar famílias de equações da forma:

$$Lx = N(x, p, \varepsilon) + \mu f \quad (1)$$

onde p, ε e μ são pequenos parâmetros.

Nossas hipóteses básicas são:

(H₁) $L: X \rightarrow Z$ é um operador linear, contínuo, com $\text{Ker} L = [u_1, u_2]$, $R(L)$ fechado e $\text{Ker} L \oplus R(L) = Z$.

(H₂) Existe uma representação Γ de $O(2)$ em Z , tal que,

$$\Gamma(\phi)u_1 = \cos \phi u_1 + \sin \phi u_2 ,$$

$$\Gamma(\phi)u_2 = -\sin \phi u_1 + \cos \phi u_2 ,$$

$$\Gamma_\tau u_1 = u_1 , \quad \Gamma_\tau u_2 = -u_2$$

Estamos indicando por $\Gamma(\phi)$ o operador $\Gamma(R_\phi)$ e por Γ_τ o operador $\Gamma(\tau)$, onde

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sejam G um grupo topológico compacto, $\Gamma:G \rightarrow L(X)$ e $\tilde{\Gamma}:G \rightarrow L(Z)$ representações de G em X (respectivamente em Z) e W um subconjunto de X .

Uma aplicação $h:W \rightarrow Z$ é *equivariante* relativamente à terna $(G, \Gamma, \tilde{\Gamma})$ se:

- (i) $\Gamma(g)W = W$ para todo $g \in G$,
- (ii) $\tilde{\Gamma}(g)h(x) = h(\Gamma(g)x)$, $\forall g \in G$ e $x \in W$.

Um elemento $f \in Z$ é *invariante* relativamente ao par $(G, \tilde{\Gamma})$ se $\tilde{\Gamma}(g)f = f$, para todo $g \in G$.

Na hipótese abaixo, citamos principalmente as propriedades de simetria que serão exigidas dos operadores L , N e do termo forçante f .

- (H₃) (a) O operador $(x, p, \varepsilon) \in B \times \Omega \rightarrow N(x, p, \varepsilon) \in Z$ está no espaço $BC^1(B \times \Omega, Z)$, é ímpar em x com $N_x(0, 0, 0) = 0$, onde $BC^1(B \times \Omega, Z)$ indica o conjunto das funções $N: B \times \Omega \rightarrow Z$ que juntamente com suas derivadas parciais de 1.ª ordem são contínuas e limitadas em $B \times \Omega$.

(b) Existem um subgrupo $G \subset O(2)$ e representações

$\Gamma_s: G \rightarrow L(Z)$, $s=0,1$, tais que, para s fixado em $\{0,1\}$, os operadores L e N são equivariantes relativamente à terna (G, Γ_0, Γ_s) e f é invariante relativamente ao par (G, Γ_s) .

Os resultados básicos mencionados abaixo podem ser encontrados em [14].

Da hipótese (H_1) segue que existe uma projeção $P \in L(Z)$, tal que, $P.Z = \text{Ker} L$ e $(I-P)Z = R(L)$.

A restrição do operador L ao subespaço $X_{(I-P)} = (I-P)X$ possui inversa limitada $K: R(L) \rightarrow X_{(I-P)}$, satisfazendo:
 $K.L(x) = (I-P)x$, $PK(I-P)z = 0$, $L.K(I-P)z = (I-P)z$, $\forall x \in X$,
 $\forall z \in Z$.

Por aplicação do Método de Liapunov - Schmidt, escrevendo $x = u + v$, com $u \in \text{Ker} L$ e $v \in R(L)$, a equação (1) reduz-se ao sistema abaixo, cujas equações são denominadas respectivamente equação auxiliar e de bifurcação:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (a) \quad v &= K(I-P) [N(u+v, p, \epsilon) + \mu f] \\ (b) \quad 0 &= P [N(u+v, p, \epsilon) + \mu f] \end{aligned}$$

A equação (1.1.a), via Teorema das Funções Implícitas, define uma função $v = v^*(u, p, \mu, \epsilon) : U \times \omega_0 \rightarrow V$, onde U , ω_0 e V são vizinhanças da origem, respectivamente dos espaços X_p , R^3 e $X_{(I-P)}$.

A projeção P pode ser tomada equivariante relativamente ao par $(O(2), \Gamma)$. O operador $K: R(L) \rightarrow X_{(I-P)}$ é equivariante relativamente à terna (G, Γ_s, Γ_o) .

Se a projeção P é equivariante relativamente ao par (G, Γ_j) , $j=0,1$, então:

(i) as vizinhanças U e V da definição da função v^* podem ser tomadas satisfazendo $\Gamma_o(g)U=U$, $\Gamma_o(g)V=V$, $\forall g \in G$;

(ii) as funções $v^*(u, \lambda)$ e

$\tilde{Q}(u, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} P[N(u+v^*(u, \lambda), p, \epsilon) + \mu f]$,
onde $\lambda=(p, \mu, \epsilon)$, são respectivamente (G, Γ_o)
e (G, Γ_o, Γ_s) -equivariante na variável u .

Identificando o espaço vetorial real $\text{Ker} L = [u_1, u_2]$ com $\mathbb{C}$, mediante o isomorfismo topológico:

$$\chi(au_1 + bu_2) = a + ib : \text{Ker} L \rightarrow \mathbb{C},$$

obtemos a equação complexa:

$$(1.2) \quad Q(z, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{X} \tilde{Q}(\tilde{X}^{-1} z, \lambda) = 0.,$$

equivalente à equação de bifurcação (1.1.b), onde $\lambda=(p, \mu, \epsilon) \in \omega_o$ e $z \in \chi(U)$.

CAPÍTULO II

SOBRE FORMAS NORMAIS DE FUNÇÕES EQUIVARIANTES

O principal objetivo deste capítulo é estabelecer a Forma Normal das funções de variável complexa a valores complexos, que são equivariantes sob determinadas ações do grupo D_m no espaço dos números complexos.

O Lema 2.1 e seu corolário fornecem resultados técnicos que serão utilizados na demonstração do resultado principal dado pelo Teorema 2.1 .

Indiquemos por B_r^k a bola aberta de raio r e centro na origem do R^k com a norma euclidiana.

LEMA 2.1

Seja $H \in BC^2(B_r^{m+n}, R)$ e $f: B_\epsilon^n \rightarrow R^m$ de classe C^1 com $f(0) = 0$, tal que,

$$Gr(f) = \{(x, (fx)) \mid x \in B_\epsilon^n\} \subset H^{-1}(\{0\}) \subset B_r^{n+m},$$

onde $0 < \epsilon < r$. Então existe $\tilde{H}: B_\epsilon^{n+m} \rightarrow L(R^n, R)$, de classe C^1 , tal que,

$$H(x, y) = \tilde{H}(x, y) (y - f(x)), \quad \forall (x, y) \in B_\epsilon^{n+m}$$

PROVA

Sendo $0 < \epsilon < r$ temos que se $(x, y) \in B_\epsilon^{n+m}$ então o segmento dado por :

$$\begin{aligned} & (x, f(x)) + \theta [(x, y) - (x, f(x))] = \\ & (x, f(x)) + \theta (y - f(x)), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \end{aligned}$$

está contido em B_r^{n+m} . Assim a função:

$$(x, y, \theta) \in B_\epsilon^{n+m} \times [0, 1] \rightarrow H(x, f(x) + \theta(y - f(x)))$$

está bem definida e tem-se:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \theta}(x, f(x) + \theta(y - f(x))) d\theta = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial y}(x, f(x) + \theta(y - f(x))) d\theta \cdot (y - f(x)) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{H}(x, y) \cdot (y - f(x)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{H}: B^{n+m} \rightarrow L(R^m, R)$ é de classe C^1 .

COROLÁRIO 2.1

Sejam $H \in BC^2(B_r^2, R)$ e $\psi: R^2 \rightarrow R$ um funcional linear não trivial, tais que,

$$\text{Ker} \psi \cap B_r^2 \subset H^{-1}(\{0\}).$$

Nestas condições, existem $\epsilon > 0$ e $\tilde{H}: B_\epsilon^2 \rightarrow R$, de classe C^1 , tais que, $H(x, y) = \tilde{H}(x, y) \cdot \psi(x, y)$, $\forall (x, y) \in B_\epsilon^2$.

PROVA

Podemos supor sem perda de generalidade que $\psi(x,y) = ax+by$ com $b \neq 0$. Considerando-se a função $f : B_{\epsilon}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (-a/b)x$, a prova segue por aplicação do teorema anterior às funções H e f , notando-se que $\text{Gr}(f) \subset H^{-1}(\{0\})$.

TEOREMA 2.1

Seja $m \geq 2$, $q \geq 1$ e $s \in \{0,1\}$ inteiros fixados,

Se $Q : B_r^2 \rightarrow \mathbb{C}$ está no espaço $BC^{m+q}(B_r^2, \mathbb{C})$ e satisfaz as relações:

$$e^{i2\pi/m} Q(z) = Q(ze^{i2\pi/m}),$$

$$(-1)^s \overline{Q(z)} = Q(\bar{z}), \quad \forall z \in B_r^2,$$

então existem $\epsilon \in \mathbb{R}$ com $0 < \epsilon < r$ e funções reais $f=f_{m,s}$, $g=g_{m,s}$, definidas em $B_{\epsilon}^2 = B(0, \epsilon) \subset \mathbb{C}$, de classes respectivamente C^q e C^{q-1} , tais que:

$$(a) \quad (-i)^s Q(z) = f(z)z + g(z) \bar{z}^{m-1},$$

$$(b) \quad f(ze^{i2\pi/m}) = f(\bar{z}) = f(z),$$

$$(c) \quad g(ze^{i2\pi/m}) = g(\bar{z}) = g(z), \quad \forall z \in B^2.$$

PROVA

Na prova deste teorema identificaremos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ mediante a correspondência $(x+iy) \longleftrightarrow (x,y)$.

Seja $H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}[(-i)^s Q(z)\bar{z}] : B_r^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Das hipóteses seguem as identidades:

$$(a_1) \quad H(z e^{i2\pi/m}) = H(z) \quad ,$$

$$(b_1) \quad H(\bar{z}) = -H(z) \quad .$$

Consideremos os funcionais lineares $\psi_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidos por:

$$\psi_j(x, y) = \sin(j\pi/m)x - \cos(j\pi/m)y \quad ,$$

$$j = 0, \dots, m-1 \quad .$$

A função $H(z)$ se anula nos conjuntos $\text{Ker}\psi_j \cap B_r^2$, $j = 0, \dots, m-1$. De fato, se $z \in \text{Ker}\psi_j \cap B_r^2$ para algum j fixo, então temos:

$$z = \rho e^{ij\pi/m} = \rho e^{ij(2\pi/m - \pi/m)} = \bar{z} / e^{ij2\pi/m} \quad .$$

Segue por (a_1) e (b_1) que $H(z) = 0$. Aplicando o Corolário 2.1 m -vezes, determinamos $B_{\epsilon'}^2 \subset B_r^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $\tilde{H}: B_{\epsilon'}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, classe C^q , tais que,

$$(2.1) \quad H(z) = \tilde{H}(z) \prod_{j=0}^{m-1} \psi_j(z), \quad \forall z \in B_{\epsilon'}^2$$

A função $\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\omega(z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(\bar{z})^m$ também se anula nos conjuntos $\text{ker}\psi_j \cap B_r^2$, $j = 0, \dots, m-1$. Por aplicação do Corolário 2.1 m -vezes, encontramos $B_{\epsilon''}^2 \subset B_r^2$ e $\tilde{\omega}: B_{\epsilon''}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

tais que,

$$(2.2) \quad \omega(z) = \tilde{\omega}(z) \prod_{j=0}^{m-1} \psi_j(z), \quad \forall z \in B_{\varepsilon}^2$$

As funções $\omega(z) = \text{Im}(\bar{z})^m$ e $\prod_{j=0}^{m-1} \psi_j(z)$ são homogêneas de grau m , portanto:

$$\omega(tz) = t^m \text{Im}(\bar{z})^m = \tilde{\omega}(tz) t^m \prod_{j=0}^{m-1} \psi_j(z)$$

e então $\tilde{\omega}(z) = c$, com $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ nos pontos do conjunto

$$B_{\varepsilon}^2 - \bigcup_{j=0}^{m-1} \text{Ker} \psi_j \cap B_{\varepsilon}^2.$$

Segue por continuidade que $\tilde{\omega}(z) = c$, $\forall z \in B_{\varepsilon}^2$. Da igualdade (2.2) temos $\prod_{j=0}^{m-1} \psi_j(z) = c^{-1} \text{Im}(\bar{z})^m$. Substituindo em

(2.1) e definindo $g = g_s : B_{\varepsilon}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(z) = c^{-1} \tilde{H}(z)$ temos:

$$(2.3) \quad H(z) = g(z) \omega(z), \quad \forall z \in B_{\varepsilon}^2,$$

com g de classe C^q .

$$\begin{aligned} \text{Seja } W(z) &\stackrel{\text{def}}{=} (-i)^s Q(z) - g(z) (\bar{z})^{m-1} \\ &= W_1(z) + W_2(z)i \end{aligned}$$

definida em $B_{\varepsilon}^2 \subset \mathbb{C}$ a valores em $\mathbb{C}$, onde W_j , $j=1,2$ são reais. Segue da definição de H e da igualdade (2.3) que

$$(2.4) \quad \text{Im}(W(z)\bar{z}) = W_2(z)x - W_1(z)y = 0$$

Da igualdade (2.4) temos que a função $W_2: B_{\epsilon}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se anula para $z=(x,0)$ com $x \neq 0$. Por continuidade segue que W_2 se anula para $x=0$, ou seja, W_2 se anula em $\text{Ker} \psi \cap B_{\epsilon}^2$, onde $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional linear $\psi(x,y)=y$.

Segue do Corolário 2.1 que existe $\epsilon > 0$ e $f=f_s: B_{\epsilon}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, classe C^{q-1} , tais que, $W_2(z) = f(z)y$, $\forall z \in B_{\epsilon}^2$. Por (2.4) temos $W_1(z) = f(z)x$, portanto,

$$(2.5) \quad W(z) = W_1(z) + i W_2(z) = f(z)z$$

Definindo $\epsilon = \min\{\epsilon', \epsilon'', \epsilon'''\}$, por (2.1) segue

$$(2.6) \quad (-i)^s Q(z) = f(z)z + g(z) (\bar{z})^{m-1}, \quad \forall z \in B_{\epsilon}^2.$$

A função $\omega(z) = \text{Im} (\bar{z})^m$ tem as propriedades de simetria da função H dadas por (a_1) e (b_1) . Por (2.3) seguem as igualdades:

$$g(z e^{i2\pi/m}) = g(\bar{z}) = g(z).$$

Da relação (2.6) temos:

$$f(z) r^2 = (-i)^s Q(z) \bar{z} - g(z) (\bar{z})^m.$$

Usando esta relação e a igualdade

$$\overline{((-i)^s Q(z) \bar{z})} = (-i)^s Q(\bar{z}) z, \text{ obtemos:}$$

$$f(z e^{i2\pi/m}) = f(z) = f(\bar{z}).$$

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES COM $\mathcal{D}_m$ -EQUIVARIANÇA

Neste capítulo, vamos considerar a família de equações não lineares:

$$(1) \quad Lx = N(x, p, \varepsilon) + \mu f$$

onde L, N e f satisfazem as hipóteses (H_1) , (H_2) e a seguinte:

(H_4) Para $m \geq 2$ e $s \in \{0, 1\}$ fixados;

(i) $N(x, p, \varepsilon) = (pA + \varepsilon B)x + Q_3 x^3 + R(x, p, \varepsilon)$ pertence ao espaço $BC^{m+3}(B \times \Omega, Z)$, é ímpar em x , $A, B, \in L(X, Z)$, $Q_3 \in L(X^3, Z)$, $R(x, p, \varepsilon) = o(|px| + |\varepsilon x| + |x^3|)$ para $(x, p, \varepsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$, onde indicamos por $BC^{m+3}(B \times \Omega, Z)$ o conjunto das funções definidas em $B \times \Omega$ a valores em Z , que juntamente com suas derivadas até a ordem $m+3$ são contínuas e limitadas em $B \times \Omega$;

(ii) $\Gamma(2\pi/m)Lx = L(\Gamma(2\pi/m)x)$, $(-1)^s \Gamma_\tau Lx = L(\Gamma_\tau x)$;

(iii) $\Gamma(2\pi/m) N(x, p, \varepsilon) = N(\Gamma(2\pi/m)x, p, \varepsilon)$,

$(-1)^s \Gamma_\tau N(x, p, \varepsilon) = N(\Gamma_\tau x, p, \varepsilon)$;

$$(iv) \quad \Gamma(2\pi/m)f = f, \quad (-1)^s \Gamma_\tau f = f; \quad ;$$

$$(v) \quad \Gamma(\phi)A = A\Gamma(\phi) \quad \forall \phi \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad PAu_1 = u_{1+s}, \quad \text{onde}$$

$P \in L(Z)$ é a projeção tal que $P.X = \text{Ker} L$.

Por aplicação dos resultados dos capítulos anteriores reduziremos a equação (1) a um sistema com duas equações de bifurcação. Da análise deste sistema deduziremos a existência de superfícies de bifurcação de soluções especiais subharmônicas, isto é, $\Gamma(2\pi)$ -invariantes, numa vizinhança de $\lambda = 0$.

Daremos as propriedades de simetria das soluções bifurcadas subharmônicas, bem como a variação do número de soluções harmônicas (isto é, $\Gamma(2\pi/m)$ -invariantes) e subharmônicas especiais, quando $\lambda = (p, \mu, \epsilon)$ varia numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^3$.

Observamos que a $(O(2), \Gamma)$ -equivariância do operador A está sendo exigida na hipótese (H_4) , somente por comodidade, para simplificar a expressão de alguns coeficientes.

LEMA 3.1

Para todo $\phi \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$(a) \quad [\chi \Gamma(\phi) \chi^{-1}]z = e^{i\phi} z,$$

$$(b) \quad [\chi \Gamma_\tau \chi^{-1}]z = \bar{z}.$$

PROVA

Fazendo $z \stackrel{\text{def}}{=}} r e^{i\theta}$, os resultados seguem das iden

tidades: $\chi^{-1}z = r\Gamma(\theta)u_1$, $\Gamma(\phi)\Gamma(\theta) = \Gamma(\phi+\theta)$, $\Gamma_\tau\Gamma(\theta)u_1 = \Gamma(-\theta)u_1$.

LEMA 3.2

Se $f \in Z$ é invariante pelos operadores $(-1)^s \Gamma_\tau$ e $\Gamma(\alpha)$, para algum $s \in \{0,1\}$ e $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ fixados, então $Pf = 0$.

PROVA

Suponha $s = 0$ e seja $Pf \stackrel{\text{def}}{=} au_1 + bu_2$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Temos $\Gamma_\tau Pf = P\Gamma_\tau f = Pf$ e $\Gamma(\alpha)Pf = P\Gamma(\alpha)f = Pf$. Da primeira igualdade decorre que $b=0$. Substituindo na segunda obtemos $a=0$. A prova do caso $s=1$ é análoga.

Seja D_m o subgrupo de $O(2)$ gerado pelas matrizes $R_{2\pi/m}$ e τ . Para cada $s \in \{0,1\}$, consideremos a representação Γ_s de D_m em Z , definida a partir de $\Gamma_s(R_{2\pi/m}) = \Gamma(2\pi/m)$, $\Gamma_s(\tau) = (-1)^s \Gamma_\tau$.

As condições (ii), (iii) e (iv) da hipótese (H_4) implicam que os operadores L e N são $(D_m, \Gamma_0, \Gamma_s)$ -equivariantes e $f \in Z$ é invariante relativamente a (D_m, Γ_s) . Da definição de Γ_s e hipótese (H_2) segue que a projeção P é (D_m, Γ_j) -equivariante, $j=0,1$.

A equação (1) satisfaz a hipótese (H_3) do Capítulo I com $G = D_m$, portanto (1) reduz-se à equação complexa:

$$0 = Q(z, \lambda) = \chi \tilde{Q}(\chi^{-1}z, \lambda) = \chi P[N(\chi^{-1}z + v^*(\chi^{-1}z, \lambda), p, \epsilon) + \mu f].$$

onde $v^*(u, \lambda)$ e $\tilde{Q}(u, \lambda)$ são respectivamente (D_m, Γ_o) e $(D_m, \Gamma_o, \Gamma_s)$ -equivariantes.

Pelo Lema 3.2 segue que $Pf=0$, portanto a equação acima assume a forma:

$$(3.1) \quad Q(z, \lambda) = \chi P N(\chi^{-1} z + v^*(\chi^{-1} z, \lambda), p, \epsilon) = 0$$

No lema seguinte mostraremos que a função $Q(z, \lambda)$ satisfaz as relações de equivariança do Teorema 2.1.

LEMA 3.3

Assumindo válidas as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_4) para a equação (1), temos:

$$(a) \quad e^{i2\pi/m} Q(z, \lambda) = Q(e^{i2\pi/m} z, \lambda),$$

$$(b) \quad (-1)^s \overline{Q(z, \lambda)} = Q(\bar{z}, \lambda).$$

PROVA

Utilizando-se o Lema 3.1, as relações (iii) da hipótese (H_4) e a (D_m, Γ_o) -equivariança de $v^*(\chi^{-1} z, \lambda)$ temos:

$$\begin{aligned} (a) \quad e^{i2\pi/m} Q(z, \lambda) &= [\chi \Gamma(2\pi/m) \chi^{-1}] \cdot Q(z, \lambda) = \\ &= \chi P N(\Gamma(2\pi/m) \chi^{-1} z + v^*(\Gamma(2\pi/m) \chi^{-1} z, \lambda), p, \epsilon) = \\ &= \chi P N(\chi^{-1} e^{i2\pi/m} z + v^*(\chi^{-1} e^{i2\pi/m} z, \lambda), p, \epsilon) = \\ &= Q(e^{i2\pi/m} z, \lambda). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad (-1)^s \overline{Q(z, \lambda)} &= (-1)^s [\chi \Gamma_T \bar{X}^1] \cdot Q(z, \lambda) = \\
&= \chi P N(\Gamma_T \bar{X}^1 z + v^*(\Gamma_T \bar{X}^1 z, \lambda), p, \epsilon) = \\
&= \chi P N(\bar{X}^1 \bar{z} + v^*(\bar{X}^1 \bar{z}, \lambda), p, \epsilon) = \\
&= Q(\bar{z}, \lambda) .
\end{aligned}$$

Por aplicação do Teorema 2.1, segue que existem funções $f=f_{m,s}$, $g=g_{m,s}$, definidas em $B_\epsilon^2 \times \omega_0$ a valores em $\mathbb{R}$, respectivamente de classes C^3 e C^2 na primeira variável, onde ω_0 é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}^3$, tais que:

$$\begin{aligned}
(-i)^s Q(z, \lambda) &= f(z, \lambda) z + g(z, \lambda) (\bar{z})^{m-1} , \\
(3.2) \quad f(z e^{i2\pi/m}, \lambda) &= f(\bar{z}, \lambda) = f(z, \lambda) , \\
g(z e^{i2\pi/m}, \lambda) &= g(\bar{z}, \lambda) = g(z, \lambda) ,
\end{aligned}$$

para todo $(z, \lambda) \in B_\epsilon^2$.

Para cada $z \in \mathbb{C}$, escreveremos $z = r e^{i\phi}$, onde $r \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi)$ são univocamente determinados se $z \neq 0$. Usando estas coordenadas definimos:

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad (a) \quad F(r, \phi, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} Q(z, \lambda)] , \\
(b) \quad G(r, \phi, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} [(-i)^s e^{-i\phi} Q(z, \lambda)] .
\end{aligned}$$

Das igualdades (3.2) e (3.3) temos os seguintes:

LEMA 3.4

A equação (1) com as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_A) é

equivalente ao sistema:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (a) \quad F(r, \phi, \lambda) &= r [f(z, \lambda) + r^{m-2} \cos m\phi g(z, \lambda)] = 0, \\ (b) \quad G(r, \phi, \lambda) &= r^{m-1} \sin m\phi g(z, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

As equações acima são chamadas respectivamente 1a. e 2a. equação de bifurcação. Seja

$$J(r, \phi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(z, \lambda) + r^{m-2} g(z, \lambda) \cos m\phi.$$

O lema seguinte será utilizado na análise da 1a. equação de bifurcação.

LEMA 3.5

Assumindo verificadas as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_4) , a função $J(r, \phi, \lambda)$, para cada ϕ fixo, admite a representação abaixo, numa vizinhança de $(r, \lambda) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} J(r, \phi, \lambda) &= p + \gamma_s(\phi)\varepsilon + \alpha_s(\phi)r^2 + \lambda_s(\phi)\mu^2 + \xi_s(\phi)r\mu + \\ &+ o(|p| + |\varepsilon| + r^2 + \mu^2), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_s(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi_{PB} \Gamma(\phi) u_1], \\ \alpha_s(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi_{PQ_3} (\Gamma(\phi) u_1)^3], \\ \lambda_s(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} 3 \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi_{PQ_3} (\Gamma(\phi) u_1, K^2 f)], \\ \xi_s(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{zero, se } m \neq 3; \\ 3 \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi_{PQ_3} (\Gamma(\phi) u_1, K f)]^2 \text{ se } m=3. \end{cases} \end{aligned}$$

PROVA

Na prova deste teorema usaremos as notações:

$$R(s, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi_P] ,$$

$$W \stackrel{\text{def}}{=} r\Gamma(\phi)u_1 + v^*(r, \phi, \lambda) ,$$

$$\chi^{-1}_z \stackrel{\text{def}}{=} r\Gamma(\phi)u_1 ,$$

onde $z = re^{i\phi}$. Com estas notações, pela definição de $J(r, \phi, \lambda)$ e equação 3.4.a, temos:

$$(3.5) \quad F(r, \phi, \lambda) = R(s, \phi) N(W, p, \epsilon) = r J(r, \phi, \lambda) .$$

Derivando a última equação obtemos:

$$(3.6) \quad R(s, \phi) \left[\frac{\partial^n}{\partial r^n} N(W, p, \epsilon) \right] = \left[r \frac{\partial J^n}{\partial r^n}(r, \phi, \lambda) + n \frac{\partial J^{n-1}}{\partial r^{n-1}}(r, \phi, \lambda) \right]$$

Verifica-se sem dificuldades que as funções $v^*(r, \phi, \lambda)$, $v_{rr}^*(r, \phi, \lambda)$ e $v_{r\mu}^*(r, \phi, \lambda)$ se anulam para $r=\mu=0$. Segue por (3.6) que as derivadas: $\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi, \lambda)$ e $\frac{\partial J}{\partial \mu}(r, \phi, \lambda)$ se anulam para $r=0$ e $\mu=0$. Decorre daí que se anulam as derivadas mistas:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r \partial p} , \frac{\partial^2 J}{\partial r \partial \epsilon} , \frac{\partial^2 J}{\partial \mu \partial p} , \frac{\partial^2 J}{\partial \mu \partial \epsilon} \quad \text{em } r=\mu=0 .$$

Usando o fato que $v^*(r, \phi, \lambda)$ se anula em $(0, \phi, 0)$, obtemos a partir de (3.6):

$$\frac{\partial J}{\partial p}(0, \phi, 0) = R(s, \phi) A \Gamma(\phi)u_1 = 1 ,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(0, \phi, 0) = \gamma_s(\phi) = R(s, \phi) B \Gamma(\phi) u_1 .$$

Ainda das relações (3.6) obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(0, \phi, 0) = \alpha_s(\phi) = R(s, \phi) Q_3((\Gamma(\phi) u_1)^3) ,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mu^2}(0, \phi, 0) = \lambda_s(\phi) = 3 R(s, \phi) Q_3(\Gamma(\phi) u_1, K f^2) ,$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r \partial \mu}(0, \phi, 0) = \xi_s(\phi) = 3 R(s, \phi) Q_3((\Gamma(\phi) u_1)^2, K f) .$$

Da definição de $J(r, \phi, \lambda)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi, \lambda) = & \left\{ \frac{\partial f}{\partial r}(z, \lambda) + (m-2) r^{m-3} g(z, \lambda) \cos m\phi + \right. \\ & \left. r^{m-2} \frac{\partial g}{\partial r}(z, \lambda) \cos m\phi \right\} . \end{aligned}$$

Da relação $f(z e^{i2\pi/m}, \lambda) = f(z, \lambda)$ obtem-se $\frac{\partial f}{\partial z}(0, \lambda) = 0$, segue daí que $\left\{ \frac{\partial f}{\partial r}(z, \lambda) \right\}_{r=0} = \frac{\partial f}{\partial z}(0, \lambda) e^{i\phi} = 0$, onde $z = r e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi)$.

Analogamente se mostra que $\left\{ \frac{\partial g}{\partial r}(z, \lambda) \right\}_{r=0} = 0$. Portanto, para $m \neq 3$ temos $\frac{\partial J}{\partial r}(0, \phi, \lambda) = 0$.

A prova do lema se completa com a utilização do desenvolvimento de Taylor.

LEMA 3.6

Nas condições do Lema 3.5, se $m > 2$, os coeficientes $\gamma_s(\phi)$ e $\lambda_s(\phi)$, independem de ϕ e são dados respectivamente

por:

$$(a) \quad \gamma_s \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}[(-i)^s \chi_{\text{PBu}_1}] ,$$

$$(b) \quad \lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} 3 \text{Re}[(-i)^s \chi_{\text{PQ}_3}(u_1, K_F^2)] .$$

Se $m=3$, os coeficientes $\alpha_s(j\pi/3)$, $j=0,1,2$ independem de j e são dados por:

$$(c) \quad \alpha_s \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}[(-i)^s \chi_{\text{PQ}_3}((u_1)^3)] .$$

PROVA

$$\begin{aligned} (a) \quad \gamma_s(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}[(-i)^s e^{-i\phi} \chi_{\text{PB}}(\Gamma(\phi)u_1)] = \\ &= \text{Re}[(-i)^s e^{-i\phi} \cos\phi \chi_{\text{PBu}_1} + (-i)^s e^{-i\phi} \sin\phi \chi_{\text{PBu}_2}] = \\ &= (-i)^s \cos^2\phi \chi_{\text{PBu}_1} + (-i)^{s+1} \sin^2\phi \chi_{\text{PBu}_2} . \end{aligned}$$

Usando a relação $\gamma_s(0) = \gamma_s(2\pi/m)$ temos:

$$(-i)^s \chi_{\text{PBu}_1} [1 - \cos^2(2\pi/m)] = (-i)^{s+1} \sin^2(2\pi/m) \chi_{\text{PBu}_2} .$$

Sendo $0 < 2\pi/m < \pi$ temos $(-i)^s \chi_{\text{PBu}_1} = (-i)^{s+1} \chi_{\text{PBu}_2}$.

Substituindo na expressão de $\gamma_s(\phi)$ obtem-se γ_s .

De modo análogo se prova a igualdade (b).

Para provar (c) observemos que o polinômio homogêneo $x \in X \rightarrow Q_3(x^3) \in Z$, satisfaz a relação $\Gamma(2\pi/3)Q_3(x^3) = Q_3(\Gamma(2\pi/3)x^3)$. Desta relação e do Lema 3.1 segue

$$\begin{aligned} \alpha_s(2\pi/3) &= \text{Re}[(-i)^s e^{-i2\pi/3} \chi_{\text{PQ}_3}((\Gamma(2\pi/3)u_1)^3)] = \\ &= \text{Re}[(-i)^s Q_3(u_1^3)] = \alpha_s(0) \quad e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_s(\pi/3) &= \operatorname{Re}[(-i)^s e^{-i\pi/3} \chi_{PQ_3}(\Gamma(\pi/3)u_1^3)] = \\
&= \operatorname{Re}[(-i)^s e^{-i\pi} e^{i2\pi/3} \chi_{PQ_3}(\Gamma(\pi/3)u_1^3)] = \\
&= \operatorname{Re}[(-i)^s \chi_{PQ_3}(u_1^3)] = \\
&= \alpha_s(0) .
\end{aligned}$$

Portanto $\alpha_s(j\pi/3)$ independe de $j=0,1,2$.

OBSERVAÇÃO 3.1

Se o polinômio homogêneo $x \in X \rightarrow Q_3(x^3) \in Z$ satisfaz $\Gamma(\phi)Q_3(x^3) = Q_3(\Gamma(\phi)x^3)$, $\forall \phi \in R$, $\forall x \in X$, então o coeficiente $\alpha_s(\phi)$ independe de ϕ e é dado por:

$$\alpha_s \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re}[(-i)^s \chi_{PQ_3}(u_1^3)] .$$

Procederemos agora a análise do sistema de equações (3.4). Assumiremos que as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_4) estão satisfeitas e que $\alpha_s(\frac{j\pi}{m}) > 0$, $j=0,1$. Indicaremos as soluções de (1) por:

$$x(r, \phi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} r\Gamma(\phi)u_1 + v^*(r, \phi, \lambda)$$

Notemos que $r=0$ é solução do sistema (3.4). As soluções correspondentes têm a forma $x(0, \phi, \lambda) = v^*(0, \phi, \lambda)$ e são harmônicas, isto é, invariantes pelo operador $\Gamma(2\pi/m)$. Estas soluções são também invariantes pelo operador Γ_τ .

Para $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, temos

$$G(r, \phi_j, \lambda) = r^{m-1} \operatorname{sen} \phi_j g(z, \lambda) = 0 .$$

Substituindo $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$ na equação $F(r, \phi, \lambda) = r J(r, \phi, \lambda) = 0$, obtemos as m -equações $F(r, \phi_j, \lambda) = 0$. Como a função $F(r, \phi, \lambda)$ é $2\pi/m$ - periódica em ϕ , estas m -equações reduzem-se a duas:

$$F(r, \phi_j, \lambda) = r J(r, \phi_j, \lambda) = 0, \quad j=0, 1.$$

As superfícies de bifurcação, em cada caso, serão obtidas resolvendo o sistema:

$$J(r, \phi_j, \lambda) = p + \gamma_s(\phi_j)\epsilon + \alpha_s(\phi_j)r^2 + \lambda_s(\phi_j)\mu^2 + \xi_s(\phi_j)r\mu + o(|\epsilon| + |p| + r^2 + \mu^2) = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi_j, \lambda) = 2\alpha_s(\phi_j)r + \xi_s(\phi_j)\mu + o(|\epsilon| + |p| + \mu^2 + |r|) = 0.$$

Sendo $\det \frac{\partial (J, J_r)}{\partial (p, r)} = 2\alpha_s(\phi_j) \neq 0$ em $r=0$, $\lambda=0$ e $\phi=\phi_j$,

segue do Teorema das Funções Implícitas que o sistema acima define um par de funções reais $r=r(\mu, \epsilon, \phi_j)$, $p=p(\mu, \epsilon, \phi_j)$ numa vizinhança de $r=0$, $\lambda=0$.

Vimos que $\frac{\partial J}{\partial r}(0, \phi_j, \lambda) = 0$ se $m \neq 3$, isto é, $r=0$ é solução de $\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi_j, \lambda) = 0$ no caso em que $m \neq 3$. Substituindo na 1ª. equação obtemos:

$$p = -\gamma_s(\phi_j)\epsilon - \lambda_s(\phi_j)\mu^2 + o(|\epsilon| + \mu^2).$$

Assim, se $m=2$ e $\gamma_s(0) \neq \gamma_s(\pi/2)$ ou $\lambda_s(0) \neq \lambda_s(\pi/2)$, temos duas superfícies de bifurcação dadas por:

$$p = -\gamma_s(0)\varepsilon - \lambda_s(0)\mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2),$$

$$p = -\gamma_s(\pi/2)\varepsilon - \lambda_s(\pi/2)\mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2).$$

Se $m > 3$ temos uma única superfície de bifurcação dada por:

$$p = -\gamma_s \varepsilon - \lambda_s \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2).$$

No caso $m=3$, não temos $\frac{\partial J}{\partial r}(0, \phi_j, \lambda) = 0$, mas da definição de $J(r, \phi, \lambda)$ temos $J(r, 0, \lambda) = f(r, \lambda) + r g(r, \lambda)$ e $J(-r, \pi/3, \lambda) = f(-re^{i\pi/3}, \lambda) + r g(-re^{i\pi/3}, \lambda)$.

Da relação $f(re^{i2\pi/3}, \lambda) = f(r, \lambda)$ obtemos $f(r, \lambda) = f(-re^{i\pi/3}, \lambda)$ e o mesmo vale para $g(r, \lambda)$, isto é, $g(r, \lambda) = g(-re^{i\pi/3}, \lambda)$. Destas relações segue que

$$J(r, 0, \lambda) = J(-r, \pi/3, \lambda),$$

$$\frac{\partial J}{\partial r}(r, 0, \lambda) = -\frac{\partial J}{\partial r}(-r, \pi/3, \lambda).$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas o sistema

$$J(r, 0, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial r}(r, 0, \lambda) = 0,$$

define funções $r = r(\mu, \varepsilon, 0)$, $p = p(\mu, \varepsilon, 0)$, satisfazendo as relações $r(\mu, \varepsilon, 0) = -r(\mu, \varepsilon, \pi/3)$; $p(\mu, \varepsilon, 0) = p(\mu, \varepsilon, \pi/3)$.

Da equação $\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi_j, \lambda) = 0$ temos

$$r = r(\mu, \varepsilon, \phi_j) = -\frac{\xi_s(\phi_j)}{2\alpha_s} \mu + o(|\varepsilon| + |\mu| + \mu^2)$$

Definindo $\eta = \xi_s(0) = -\xi_s(\pi/3)$, temos $\eta^2 = \xi_s^2(\phi_j)$, $j=0,1$. Substituindo em $J(r, \phi_j, \lambda) = 0$ obtemos a equação da superfície de bifurcação correspondente:

$$p = -\gamma_s \varepsilon + \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_s} - \lambda_s \right) \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2)$$

Esboçamos abaixo os gráficos das superfícies de bifurcação correspondentes aos casos $m=2$, $m=3$ e $m>3$, assumindo que $\gamma_s(\pi/2) < 0 < \gamma_s(0)$, $0 < \lambda_s(\pi/2) < \lambda_s(0)$, $(\frac{\eta^2}{4\alpha_s} - \lambda_s) < 0$ e $\gamma_s < 0 < \lambda_s$.

(fig 3.1 - caso $m=2$)

(fig 3.2 - caso $m=3$) (fig 3.3 - caso $m>3$)

Reunimos no teorema seguinte os resultados demonstrados acima.

TEOREMA 3.1

Assumindo as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_4) e $\alpha_s(\phi_j) > 0$, $j=0,1$, valem os seguintes resultados para a equação (1):

(a) Se $m=2$ e $\gamma_s(0) \neq \gamma_s(\pi/2)$ ou $\lambda_s(0) \neq \lambda_s(\pi/2)$, existem duas superfícies de bifurcação numa vizinhança de $\lambda=0$, dadas por:

$$p = -\gamma_s(0)\varepsilon - \lambda_s(0)\mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2),$$

$$p = -\gamma_s(\pi/2)\varepsilon - \lambda_s(\pi/2)\mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2).$$

(b) Se $m=3$, existe uma única superfície de bifurcação dada por:

$$p = -\gamma_s\varepsilon + \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_s} - \lambda_s\right)\mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2)$$

(c) Se $m > 3$, existe uma única superfície de bifurcação dada por:

$$p = -\gamma_s \varepsilon - \lambda_s \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) .$$

A seguir vamos mostrar como varia o número de soluções da equação (1), quando $\lambda = (p, \mu, \varepsilon)$ atravessa uma superfície de bifurcação por um ponto $\lambda_0 = (p_0, \mu_0, \varepsilon_0)$ próximo da origem, ao longo de uma reta por λ_0 e paralela ao eixo O_p .

Do que vimos, existem $r_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi_j \in [0, \pi)$, tais que, $J(r_0, \phi_j, \lambda_0) = 0$. Consideremos a função:

$$J(r, p_0) \stackrel{\text{def}}{=} J(r, \phi_j, p_0, \mu_0, \varepsilon_0) ,$$

definida numa vizinhança de r_0 . A terna (r_0, ϕ_j, λ_0) é solução do sistema $J(r, \phi, \lambda) = 0$, $\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi, \lambda) = 0$ e por hipótese temos $\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(0, \phi_j, 0) = 2\alpha_s(\phi_j) > 0$. Segue que se r_0 e λ_0 são suficientemente pequenos tem-se por continuidade $\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(r_0, \phi_j, \lambda_0) > 0$, portanto a função $J(r, p_0)$ assume um mínimo em $r = r_0$.

Seja agora a função:

$$J(p) \stackrel{\text{def}}{=} J(r_0, \phi_j, p, \mu_0, \varepsilon_0)$$

definida numa vizinhança de p_0 . Sendo $\frac{\partial J}{\partial p}(0, \phi_j, 0) = 1$ temos como antes que $\frac{\partial J}{\partial p}(p_0) = \frac{\partial J}{\partial p}(r_0, \phi_j, \lambda_0) > 0$, portanto a função $J(p)$ é crescente.

Os gráficos das funções $J(r, p_0)$, $J(r, p_1)$ e $J(r, p_2)$,

onde $p_1 < p_0$, $p_2 > p_0$, mostram que temos respectivamente: uma, duas e nenhuma solução, conforme p seja igual, menor ou maior que p_0 .

Lembrando que, $r_0 = 0$ se $m \neq 3$ e $r_0 \neq 0$ se $m = 3$, temos o seguinte:

TEOREMA 3.2

Se $\lambda_0 \in S$, onde S é uma superfície de bifurcação da equação (1), então temos:

(a) Se $m \neq 3$, para cada fase $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, a equação (1) com $\lambda = (p, \mu_0, \varepsilon_0)$ tem uma solução harmônica se $p > p_0$; uma solução harmônica e duas bifurcadas subharmônicas (isto é, invariantes por $\Gamma(2\pi)$) se $p < p_0$.

(b) Se $m = 3$, para cada fase $\phi_j = j\pi/3$, $j=0, 1, 2$, a equação (1) com $\lambda = (p, \mu_0, \varepsilon_0)$ tem uma solução harmônica se $p > p_0$; uma harmônica e uma bifurcada subharmônica se $p = p_0$; uma harmônica e duas subharmônicas bifurcadas se $p < p_0$.

Nas figuras abaixo indicamos o número total de solu

ções (harmônicas e subharmônicas com fases especiais) da equação (1), em função da posição do parâmetro em relação às superfícies de bifurcação, nos casos $m=2$, $m=3$ e $m>3$.

(fig 3.5 - caso $m=2$)

(fig 3.6 - caso $m=3$)

(fig 3.7 - caso $m>3$)

No que segue, vamos explicitar algumas propriedades de simetria das soluções $x(r, \phi_j, \lambda)$ da equação (1), com λ próximo da origem. Vimos anteriormente que as soluções "harmônicas" : $x(0, \phi, \lambda) = v^*(0, \phi, \lambda)$ são Γ_τ -invariantes. O mesmo ocorre com as soluções com fase nula : $x(r, 0, \lambda) = ru_1 + v^*(r, 0, \lambda)$. As demais soluções bifurcadas não são Γ_τ -invariantes, entretanto, mediante a ação do operador $\Gamma(-\phi_j)$, elas tornam-se Γ_τ -invariantes, herdando assim alguma simetria do termo Kf , possivelmente diferente daquelas de f .

TEOREMA 3.3

Assumindo verificadas as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_4) e $\alpha_s(j\pi/m) > 0$, $j=0,1$, as soluções com fase especial ϕ_j da equação (1) : $x(r, \phi_j, \lambda)$, $j=0, \dots, m-1$, têm a seguinte propriedade de simetria:

$$\Gamma(-\phi_j) x(r, \phi_j, \lambda) \text{ é } \Gamma_\tau\text{-invariante}.$$

PROVA

A prova decorre da identidade

$$(3.7) \quad \begin{aligned} &\Gamma(j\pi/m) K(I-P)N(\Gamma(-j\pi/m)x, p, \epsilon) = \\ &\Gamma(-j\pi/m) K(I-P)N(\Gamma(j\pi/m)x, p, \epsilon) \end{aligned}$$

a qual é consequência do fato do operador $K(I-P)N$ ser equi-variante com relação ao operador $\Gamma(2\pi/m)$. De fato, fazendo $\phi_j = j\pi/m$ temos:

$$\begin{aligned}
& \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda) = \\
& = \Gamma(-\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(\phi_j)(ru_1 + \Gamma(-\phi_j)v^*(r, \phi_j, \lambda)), p, \epsilon) + \\
& + \Gamma(-\phi_j) K\mu f .
\end{aligned}$$

Aplicando Γ_τ e a identidade (3.7) temos:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\tau [\Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)] = \\
& = \Gamma(\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(-\phi_j)(ru_1 + \Gamma_\tau \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)), p, \epsilon) + \\
& + \Gamma(\phi_j) K\mu f = \\
& = \Gamma(-\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(\phi_j)(ru_1 + \Gamma_\tau \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)), p, \epsilon) + \\
& + \Gamma(-\phi_j) K\mu f .
\end{aligned}$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas segue que $\Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante, portanto,

$$\Gamma(-\phi_j) x(r, \phi_j, \lambda) = ru_1 + \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)$$

é Γ_τ -invariante, $j=0, \dots, m-1$.

OBSERVAÇÃO 3.2

Notemos que se $s=0$, então f e Kf são Γ_τ -invariantes, porém, se $s=1$ então Kf é Γ_τ -invariante e f é $(-\Gamma_\tau)$ -invariante. Segue que $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ herda simetria de Kf , a qual coincide com a de f somente no caso $s=0$.

CAPÍTULO IV

EQUAÇÕES COM OH_m -EQUIVARIANÇA

Neste capítulo vamos considerar a equação (1) num contexto em que estão presentes mais simetrias que no caso D_m -equivariante estudado no capítulo anterior.

Mais precisamente, assumiremos verificadas para a equação (1) as hipóteses (H_1) , (H_2) do Capítulo I e a seguinte:

(H_5) Para $m \geq 2$ e $s \in \{0,1\}$ fixados;

(i) $N(x,p,\epsilon) = (pA + \epsilon B)x + Q_3 x^3 + R(x,p,\epsilon)$ é ímpar em x , pertence a $BC^{m+3}(B \times \Omega, Z)$ se m é ímpar, pertence a $BC^{2m+3}(B \times \Omega, Z)$ se m é par, $A, B \in L(X; Z)$, $Q_3 \in L^3(X, Z)$ e $R(x,p,\epsilon) = o(|px| + |\epsilon x| + |x^3|)$ para $(x,p,\epsilon) \rightarrow (0,0,0)$;

(ii) $\Gamma(\pi/m) Lx = L(\Gamma(\pi/m)x)$, $(-1)^s \Gamma_\tau Lx = L(\Gamma_\tau x)$;

(iii) $\Gamma(\pi/m) N(x,p,\epsilon) = N(\Gamma(\pi/m)x, p, \epsilon)$,

$(-1)^s \Gamma_\tau N(x,p,\epsilon) = N(\Gamma_\tau x, p, \epsilon)$;

(iv) $\Gamma(\pi/m)f = -f$, $(-1)^s \Gamma_\tau f = f$;

(v) $\Gamma(\phi)A = A\Gamma(\phi) \quad \forall \phi \in R$ e $PAu_1 = u_{1+s}$ onde P

$\in L(Z)$ é a projeção tal que $P.X = \text{Ker} L$.

Como anteriormente, por aplicação dos resultados do

Capítulo I, reduziremos a equação (1) a uma equação complexa $Q(z, \lambda) = 0$; obteremos as formas normais de $Q(z, \lambda)$ nos casos m par e m ímpar, em seguida reduzimos a equação a um sistema de equações $F(r, \phi, \lambda) = 0$, $G(r, \phi, \lambda) = 0$. Da análise deste sistema deduzimos a existência de superfícies de bifurcação e de soluções especiais subharmônicas, as quais (exceto no caso $m=3$) bifurcam a partir de soluções ψ_m - harmônicas - ímpares (isto é, invariantes pelo operador $-\Gamma(\pi/m)$). Deduziremos também a variação do número destas soluções e as propriedades de simetria das soluções bifurcadas.

Observamos aqui que a hipótese (H_5) implica (H_4) , isto é, se a equação (1) tem uma OH_m -equivariância então tem também uma D_m -equivariância.

Consideramos o subgrupo OH_m de $O(2)$ gerado pelas matrizes $R_{\pi/m}$ e τ . Para cada $s \in \{0, 1\}$, consideremos a representação Γ_s de OH_m em Z , definida a partir de $\Gamma_s(R_{\pi/m}) = -\Gamma(\pi/m)$, $\Gamma_s(\tau) = (-1)^s \Gamma_\tau$.

Pela hipótese (H_5) temos que os operadores L e N são equivariantes relativamente à terna $(OH_m, \Gamma_o, \Gamma_s)$ e o elemento $f \in Z$ é invariante relativamente ao par (OH_m, Γ_s) .

Segue que as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_3) do Capítulo I estão satisfeitas com $G = OH_m$, portanto a equação (1) é equivalente à equação complexa

$$(4.1) \quad Q(z, \lambda) = \chi P N(\bar{\chi} z + v^* (\bar{\chi} z, \lambda), p, \epsilon) = 0$$

OBSERVAÇÃO 4.1

Observamos que OH_m na verdade é D_{2m} . Optamos por uma notação diferente motivados pelas aplicações que envolvem funções " π/m - harmônicas - ímpares" (odd-harmonic). Observamos também que a representação considerada neste caso é diferente daquela tratada no caso correspondente do capítulo anterior.

O lema seguinte e seu corolário serão utilizados na obtenção da Forma Normal de $Q(z, \lambda)$.

LEMA 4.1

A função $Q(z, \lambda) : \chi(U) \times \omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz as relações de equivariança:

$$(a) \quad -e^{i\pi/m} Q(z, \lambda) = Q(-e^{i\pi/m} z, \lambda)$$

$$(b) \quad (-1)^s \overline{Q(z, \lambda)} = Q(\bar{z}, \lambda)$$

PROVA

A prova segue do Lema 3.1, das relações (ii) da hipótese (H_5) e da (OH_m, Γ_0) -equivariança de $v^*(\chi^{-1}z, \lambda)$.

$$\begin{aligned} (a) \quad & -e^{i\pi/m} Q(z, \lambda) = -[\chi \Gamma(\pi/m) \chi^{-1}] Q(z, \lambda) = \\ & = \chi P N(-\Gamma(\pi/m) \chi^{-1} z + v^*(-\Gamma(\pi/m) \chi^{-1} z, \lambda), p, \varepsilon) = \\ & = \chi P N(\chi^{-1}(-e^{i\pi/m} z) + v^*(\chi^{-1}(-e^{i\pi/m} z), \lambda), p, \varepsilon) = \\ & = Q(-e^{i\pi/m} z, \lambda) . \end{aligned}$$

(b) Análoga à do Lema 3.3 .

COROLÁRIO 4.1

A função $Q(z, \lambda): X(U) \times \omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz as relações:

- (a) $e^{i2\pi/m} Q(z, \lambda) = Q(e^{i2\pi/m} z, \lambda)$, $\forall m \geq 2$ inteiro;
- (b) $e^{i\pi/m} Q(z, \lambda) = Q(e^{i\pi/m} z, \lambda)$, $\forall m \geq 2$ par.

PROVA

Segue do lema anterior e das identidades:

$$\begin{aligned} e^{i2\pi/m} &= (-e^{i\pi/m}) (-e^{i\pi/m}), \\ e^{i\pi/m} &= (-e^{i\pi/m}) (e^{i \frac{m}{2} \cdot \frac{2\pi}{m}}). \end{aligned}$$

LEMA 4.2

Assumindo verificadas as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_5) para a equação (1), existem funções $f \stackrel{\text{def}}{=} f_{m,s}$, $g \stackrel{\text{def}}{=} g_{m,s}$ definidas em $B_{\varepsilon}^2 \times \omega_0$ a valores em $\mathbb{R}$, de classe C^1 , tais que,

- (a) $(-i)^s Q(z, \lambda) = f(z, \lambda) z + (\bar{z})^{m-1} g(z, \lambda)$,
 $f(z e^{i2\pi/m}, \lambda) = f(\bar{z}, \lambda) = f(z, \lambda)$,
 $g(z e^{i2\pi/m}, \lambda) = g(\bar{z}, \lambda) = g(z, \lambda)$ no caso m ímpar;
- (b) $(-i)^s Q(z, \lambda) = f(z, \lambda) z + (\bar{z})^{2m-1} g(z, \lambda)$,
 $f(z e^{i\pi/m}, \lambda) = f(\bar{z}, \lambda) = f(z, \lambda)$ e
 $g(z e^{i\pi/m}, \lambda) = g(\bar{z}, \lambda) = g(z, \lambda)$ no caso m par.

PROVA

Segue do Teorema 2.1 e das igualdades (b), (c), e (d).

Fazendo $z = re^{i\phi}$ com $r \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, \pi)$ e definindo:

$$F(r, \phi, \lambda) = \operatorname{Re}[(-i)^s e^{-i\phi} Q(z, \lambda)] ,$$

$$G(r, \phi, \lambda) = \operatorname{Im}[(-i)^s e^{-i\phi} Q(z, \lambda)] ,$$

temos o seguinte:

LEMA 4.3

Assumindo verificadas as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_5) , a equação (1) reduz-se ao sistema:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} F(r, \phi, \lambda) &= r[f(z, \lambda) + r^{m-2} g(z, \lambda) \cos m\phi] = 0 , \\ G(r, \phi, \lambda) &= r^{m-1} \operatorname{sen} m\phi g(z, \lambda) = 0 , \end{aligned}$$

no caso $m \geq 3$ ímpar ;

$$(4.3) \quad \begin{aligned} F(r, \phi, \lambda) &= r[f(z, \lambda) + r^{2m-2} g(z, \lambda) \cos 2m\phi] = 0 , \\ G(r, \phi, \lambda) &= r^{2m-1} \operatorname{sen} 2m\phi g(z, \lambda) = 0 , \end{aligned}$$

no caso $m \geq 2$ par.

A seguir vamos analisar o sistema correspondente ao caso $m \geq 2$ par. Para o caso $m \geq 3$ ímpar, valem os resultados obtidos no capítulo anterior.

Definindo $J(r, \phi, \lambda) = f(z, \lambda) + r^{2m-2} g(z, \lambda)$, tem-se o

seguinte:

LEMA 4.4

Assumindo verificadas as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_5) para a equação (1), a função $J(r, \phi, \lambda)$, para cada ϕ fixo, admite a representação:

$$J(r, \phi, \lambda) = p + \gamma_s \epsilon + \alpha_s(\phi) r^2 + \lambda_s \mu^2 + o(|p| + |\epsilon| + r^2 + \mu^2),$$

onde:

$$\gamma_s = \operatorname{Re} [(-i)^s \chi_{PB} u_1] \quad ;$$

$$\alpha_s(\phi) = \operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi_{PQ_3} (\Gamma(\phi) u_1)^3] \quad ;$$

$$\lambda_s = \operatorname{Re} [(-i)^s \chi_{PQ_3} (u_1, K^2 f)] \quad .$$

PROVA

Análoga a do Lema 3.5 .

Consideremos o sistema (4.3). Como no capítulo anterior, $r=0$ é solução do sistema, porém a solução correspondente $x(0, \phi, \lambda) = v^*(0, \phi, \lambda)$ é par e " π/m -harmônica-ímpar", isto é, invariante pelos operadores Γ_τ e $-\Gamma(\pi/m)$.

Para $\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$, temos $G(r, \phi_j, \lambda) = r^{2m-1} \operatorname{sen}(2m\phi_j) g(z, \lambda) = 0$. Substituindo na 1a. equação de (4.3) obtemos as $2m$ -equações :

$$(4.4) \quad F(r, \phi_j, \lambda) = r J(r, \phi_j, \lambda) = 0 \quad .$$

Devido à π/m -periodicidade da função $J(r, \phi, \lambda)$, as equações (4.4) reduzem-se a duas:

$$F(r, \phi_j, \lambda) = 0, \quad j=0,1.$$

As superfícies de bifurcação são obtidas através do sistema:

$$(4.5) \quad J(r, \phi_j, \lambda) = p + \gamma_s \varepsilon + \alpha_s(\phi_j) r^2 + \lambda_s \mu^2 + o(|p| + |\varepsilon| + r^2 + \mu^2) = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi_j, \lambda) = 2\alpha_s(\phi_j) r + o(|p| + |\varepsilon| + |r| + \mu^2) = 0,$$

$$j=0,1.$$

Supondo $\alpha_s(\phi_j) > 0$, $j=0,1$, temos:

$$\det \frac{\partial (J, r)}{\partial (p, \mu)} = 2\alpha_s(\phi_j) > 0 \quad \text{em } r=0, \phi=\phi_j \text{ e } \lambda=0.$$

Segue pelo Teorema das Funções Implícitas que para cada $j \in \{0,1\}$ fixado, o sistema (4.5) define um par de funções $r = r(\mu, \varepsilon, \phi_j)$, $p = p(\mu, \varepsilon, \phi_j)$, numa vizinhança de $r=0$ e $\lambda=0$.

Da definição de $J(r, \phi_j, \lambda)$ segue que $J_r(0, \phi_j, \lambda) = 0$ e $J(0, \phi_j, \lambda)$ independe de ϕ_j , portanto $r = r(\mu, \varepsilon, \phi_j) = 0$ e $p = p(\mu, \varepsilon, \phi_j) = -\gamma_s \varepsilon - \lambda_s \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2)$ é a única solução do sistema (4.5), independente de ϕ_j . Temos assim uma única superfície de bifurcação dada por:

$$p = -\gamma_s \varepsilon - \lambda_s \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2).$$

Reunimos os resultados da análise do caso OH_m -equivariante no seguinte:

TEOREMA 4.1

Assumindo as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_5) e $\alpha_s(\phi_j) > 0$, $j=0,1$, valem para a equação (1) os seguintes resultados:

(a) Se $m \neq 3$, existe uma única superfície de bifurcação numa vizinhança de $\lambda=0$, definida por:

$$p = -\gamma_s \varepsilon - \lambda_s \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) .$$

(b) Se $m=3$, existe uma única superfície de bifurcação numa vizinhança de $\lambda=0$, definida por:

$$p = -\gamma_s \varepsilon + \left(\frac{\eta_s^2}{4\alpha_s} - \lambda_s \right) \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) .$$

Pode-se mostrar, como no Capítulo II, que se $\lambda_o = (p_o, \mu_o, \varepsilon_o)$ está na superfície de bifurcação acima e (r_o, ϕ_j) é tal que $J(r_o, \phi_j, \lambda_o) = 0$, a função:

$$J(r, p) \stackrel{\text{def}}{=} J(r, \phi_j, p, \mu_o, \varepsilon_o) ,$$

definida numa vizinhança de (r_o, p_o) , assume um mínimo em r_o para $p=p_o$ fixado. Usando este fato e lembrando que $r_o=0$ se $m \neq 3$, $r_o \neq 0$ se $m=3$, temos o:

TEOREMA 4.2

Nas condições do teorema anterior, seja $\lambda_o = (p_o, \mu_o, \varepsilon_o)$ pertencente a uma superfície de bifurcação da equação (1) com

com p_0 , μ_0 e ε_0 pequenos e seja $\lambda=(p, \mu_0, \varepsilon_0)$ com p variando numa vizinhança de p_0 . Valem os seguintes resultados:

(a) Se $m > 3$ é ímpar, para cada fase $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, a equação (1) com $\lambda=(p, \mu_0, \varepsilon_0)$, tem uma solução π/m - harmônica-ímpar se $p \geq p_0$, uma solução π/m - harmônica-ímpar e duas soluções bifurcadas subharmônicas se $p < p_0$.

(b) Se $m=3$, para cada fase $\phi_j = j\pi/3$, $j=0, 1, 2$, a equação (1) com $\lambda=(p, \mu_0, \varepsilon_0)$, tem uma solução π/m - harmônica-ímpar se $p > p_0$, uma solução π/m - harmônica-ímpar e uma solução subharmônica se $p = p_0$, uma solução π/m - harmônica-ímpar e duas soluções subharmônicas bifurcadas se $p < p_0$.

(c) Se $m \geq 2$ é par, para cada fase $\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$, a equação (1) com $\lambda=(p, \mu_0, \varepsilon_0)$, tem uma solução π/m - harmônica-ímpar se $p \geq p_0$, uma solução π/m - harmônica-ímpar e duas subharmônicas bifurcadas se $p < p_0$.

Nos gráficos abaixo apresentamos a variação do número de soluções π/m - harmônicas-ímpares e subharmônicas com fases especiais em função da posição de $\lambda=(p, \mu_0, \varepsilon_0)$, em cada caso considerado no teorema.

(fig 4.1 - caso $m > 3$ ímpar) (fig 4.2 - caso $m = 3$) (fig 4.3 - caso $m > 2$ par)

No teorema seguinte daremos as propriedades de simetria das soluções bifurcadas subharmônicas da equação (1) no caso OH_m -equivariante. Observamos que neste caso as soluções preservam alguma simetria do termo Kf , possivelmente diferente daquelas de f .

TEOREMA 4.3

Nas condições do Teorema 4.1 temos o seguinte:

(a) Se $m \geq 3$ é ímpar, as soluções $x(r, \phi_j, \lambda)$ com $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, são tais que $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante.

(b) Se $m \geq 2$ é par, as soluções $x(r, \phi_j, \lambda)$ com $\phi_j = j\pi/2m$, são tais que:

(i) $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante se j é par com $0 \leq j < 2m-1$;

(ii) $\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ é $(-\Gamma_\tau)$ -invariante se j é ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$.

PROVA

(a) Análoga à do Teorema 3.3 .

(b.i) Seja $\phi_j = j\pi/2m$ com j par. Temos:

$$\begin{aligned} & \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda) = \\ & = \Gamma(-\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(\phi_j) (ru_1 + \Gamma(-\phi_j)v^*(r, \phi_j, \lambda)), p, \epsilon) + \\ & + \mu \Gamma(-\phi_j) Kf . \end{aligned}$$

Utilizaremos as identidades:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \Gamma(j\pi/2m) K(I-P)N(\Gamma(-j\pi/2m)x, p, \epsilon) = \\ & \Gamma(-j\pi/2m) K(I-P)N(\Gamma(j\pi/2m)x, p, \epsilon) \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \Gamma(j\pi/2m) Kf = \Gamma(-j\pi/2m) Kf \quad (j \text{ par})$$

A primeira é consequência do fato do operador $K(I-P)N$ ser $\Gamma(\pi/m)$ -equivariante. A segunda decorre da propriedade: $\Gamma(\pi/m)f = -f$.

De (4.6) e (4.7) tem-se:

$$\begin{aligned} & \Gamma_\tau \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda) = \\ & = \Gamma(\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(-\phi_j)(ru_1 + \Gamma_\tau \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda))), p, \epsilon) + \\ & + \mu \Gamma(\phi_j) Kf = \\ & = \Gamma(-\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(\phi_j)(ru_1 + \Gamma_\tau \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda))), p, \epsilon) + \\ & + \Gamma(-\phi_j) \mu Kf. \end{aligned}$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas segue que

$$\Gamma_\tau \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda) = \Gamma(-\phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda),$$

de onde segue que $\Gamma(-\phi_j) x(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante para j par com $0 \leq j \leq 2m-1$.

(b.ii) Seja $\phi_j = j\pi/2m$ com j ímpar. Temos:

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{\pi}{2} - \phi_j\right) v^*(r, \phi_j, \lambda) = \\ & = \Gamma(-\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(-\phi_j)(ru_2 + \Gamma\left(\frac{\pi}{2} - \phi_j\right) v^*(r, \phi_j, \lambda))), p, \epsilon) + \\ & + \mu \Gamma(-\phi_j) K\Gamma(\pi/2)f. \end{aligned}$$

Se m par temos $\Gamma(\pi)f = \Gamma(m \frac{\pi}{m})f = f$. Segue deste fato que $\Gamma(\frac{\pi}{2})f = \Gamma(-\pi/2)f$. Para j ímpar temos também:

$$-\Gamma(\phi_j)Kf = \Gamma(-\phi_j)Kf. \text{ Portanto,}$$

$$\begin{aligned} & -\Gamma_\tau \Gamma(\pi/2 - \phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda) = \\ & = \Gamma(-\phi_j) K(I-P)N(\Gamma(-\phi_j)(ru_2 - \Gamma_\tau \Gamma(\pi/2 - \phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)), p, \epsilon) + \\ & + \mu \Gamma(-\phi_j) K\Gamma(\pi/2)f. \end{aligned}$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas segue que $\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda)$ é $(-\Gamma_\tau)$ -invariante, portanto,

$$\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j) x(r, \phi_j, \lambda) = ru_2 + \Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j) v^*(r, \phi_j, \lambda) \quad \text{é}$$

$(-\Gamma_\tau)$ -invariante, $\forall j$ ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$.

OBSERVAÇÃO 4.2

Observamos que a simetria de $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ (para $\phi_j = j\pi/m$, m ímpar, $j=0, \dots, m-1$ ou $\phi_j = j\pi/2m$, m par, j par, $0 \leq j < 2m-1$) é a mesma de Kf . Esta simetria coincide com a de f apenas no caso $s=0$.

Observamos também que a simetria de $\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ (para $\phi_j = j\pi/2m$, m par, j ímpar, $1 \leq j \leq 2m-1$) é a mesma de $\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j)Kf$, a qual no caso $s=0$ coincide com a de $\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j)f$. O mesmo não ocorre no caso $s=1$.

CAPÍTULO V

EQUAÇÕES COM NÃO LINEARIDADE $O(2)$ -EQUIVARIANTE E TERMO FORÇANTE D_m INVARIANTE : BIFURCAÇÃO E GENERICIDADE

Neste capítulo vamos considerar a equação (1) com $\epsilon=0$, L e N ($O(2), \Gamma_0, \Gamma_s$)-equivariantes e f (D_m, Γ_s)-invariante, onde Γ_s , $s=0,1$, são representações de $O(2)$ em $L(Z)$, obtidas a partir daquelas definidas para o subgrupo D_m no Capítulo III.

Nestas condições, a equação apresenta uma D_m -equivariância, valendo portanto todos os resultados estabelecidos no Capítulo III. Assim, com relação a existência, bifurcação e simetrias de soluções, podemos afirmar que a equação considerada, com $\lambda=(p, \mu)$ numa pequena vizinhança da origem, possui soluções harmônicas e bifurcadas subharmônicas, com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, as quais tornam-se Γ_τ -invariantes sob a ação do operador $\Gamma(-\phi_j)$.

Nosso objetivo é mostrar que, sob certa condição, estas são as únicas soluções possíveis da equação (1).

Provaremos no final do capítulo, resultados sobre a genericidade da condição mencionada, numa certa classe de termos forçantes e não-linearidades.

Consideremos a equação:

$$(2) \quad Lx = N(x, p) + \mu f$$

satisfazendo as hipóteses (H_1) , (H_2) e a seguinte:

(H_6) Para $m \geq 2$ inteiro e $s \in \{0,1\}$ fixados tem-se:

(i) $N(x, p) = pAx + \tilde{N}(x) + o(|px|) : B \times \Omega \rightarrow Z$, onde $B = B(0, r) \subset X$ e Ω é uma vizinhança aberta da origem em R , $A \in L(X, Z)$, $\tilde{N} \in BC^{m+3}(B, Z)$ é ímpar com $\tilde{N}_x(0) = 0$;

(ii) $\Gamma(\phi) Lx = L(\Gamma(\phi)x)$, $(-1)^s \Gamma_\tau Lx = L(\Gamma_\tau x)$,
 $\forall \phi \in R$;

(iii) $\Gamma(\phi) N(x, p) = N(\Gamma(\phi)x, p)$,
 $(-1)^s \Gamma_\tau N(x, p) = N(\Gamma_\tau x, p)$, $\forall \phi \in R$;

(iv) $\Gamma(2\pi/m)f = f$, $(-1)^s \Gamma_\tau f = f$;

(v) $PAu_1 = u_{1+s}$, onde $P \in L(Z)$ é a projeção tal que $PX = \text{Ker} L$.

Definindo-se $\Gamma_s : O(2) \rightarrow L(Z)$ a partir de $\Gamma_s(R_\phi) = \Gamma(\phi)$ e $\Gamma_s(\tau) = (-1)^s \Gamma_\tau$, seguem do Capítulo III os resultados:

TEOREMA 5.1

Assumindo verificadas para a equação (2) as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_6) tem-se:

(1) A equação (2) é equivalente à equação complexa:

$$Q(z, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} PN(\tilde{\chi}^{-1}z + v^*(\tilde{\chi}^{-1}z, \lambda), p) = 0 ,$$

onde $z \in \chi(U)$ e $\lambda = (p, \mu)$ percorre uma vizinhança ω_0 da origem em R^2 ;

(2) existem funções $f = f_{m,s}$, $g = g_{m,s} : B_\epsilon^2 \times \Omega \rightarrow R$,
 onde $B_\epsilon^2 = B(0, \epsilon) \subset \mathbb{C}$, tais que a equação $Q(z, \lambda) = 0$ é equivalente ao sistema:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} F(r, \phi, p, \mu) &= r [f(z, \lambda) + r^{m-2} g(z, \lambda)] = 0, \\ G(r, \phi, p, \mu) &= r^{m-1} \sin m\phi g(z, \lambda) = 0; \end{aligned}$$

(3) se $\alpha_s = \alpha_s(0) > 0$ e $\lambda_s(0) \neq \lambda_s(\frac{\pi}{2})$, então existem curvas de bifurcação numa vizinhança de $\lambda = 0$ dadas por:

$$(a) \quad \begin{aligned} p &= -\lambda_s(0)\mu^2 + o(\mu^2), \\ p &= -\lambda_s(\frac{\pi}{2})\mu^2 + o(\mu^2) \text{ se } m=2; \end{aligned}$$

$$(b) \quad p = (\frac{\eta^2}{4\alpha_s} - \lambda_s)\mu^2 + o(\mu^2) \text{ se } m=3;$$

$$(c) \quad p = -\lambda_s\mu^2 + o(\mu^2) \text{ se } m>3;$$

(4) se $\lambda_o = (p_o, \mu_o)$ pertence a uma curva de bifurcação, então, para cada fase $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, a equação (2) com $\lambda=(p, \mu_o)$, admite:

(a) no caso $m \neq 3$, uma solução harmônica se $p \geq p_o$,
uma harmônica e duas bifurcadas se $p < p_o$;

(b) no caso $m=3$, uma solução harmônica se $p > p_o$,
uma harmônica e uma subharmônica se $p = p_o$,
uma harmônica e duas subharmônicas se $p < p_o$;

(5) as soluções harmônicas são Γ_τ -invariantes, as soluções bifurcadas subharmônicas são tais que $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante, $j=0, \dots, m-1$.

O lema abaixo será utilizado na prova do próximo teorema.

LEMA 5.1

Supondo satisfeitas para a equação (2) as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_6) , então a função $G(r, \phi, p, \mu)$ definida por (5.1) satisfaz:

- (a) $G(r, \phi, p, 0) = 0$;
- (b) $G(r, \phi, p, \mu)$ é par em μ , se m é par.

PROVA

(a) Segue do Lema 3.3 e hipótese (H_6) que:

$$\begin{aligned} G(r, \phi, p, 0) &= \text{Im} [(-i)^s e^{-i\phi} Q(z, p, 0)] = \\ &= \text{Im} [(-i)^s Q(r, p, 0)]. \end{aligned}$$

Sendo $(-i)^s Q(r, p, 0)$ real temos $G(r, \phi, p, 0) = 0$.

(b) A função $v^*(u, p, \mu)$ tem a propriedade:

$$-v^*(-u, p, -\mu) = v^*(u, p, \mu).$$

De fato temos:

$$\begin{aligned} -v^*(-u, p, -\mu) &= -K(I-P) [N(-u + v^*(-u, p, -\mu), p) - \mu f] = \\ &= K(I-P) [N(u - v^*(-u, p, -\mu), p) + \mu f], \end{aligned}$$

$$v^*(u, p, \mu) = K(I-P) [N(u + v^*(u, p, \mu), p) + \mu f].$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas segue a identidade.

Decorre da propriedade acima que a função $Q(z, p, \mu)$ é par em μ quando m é par, pois pelo Lema 3.1 temos:

$$\begin{aligned}
Q(z, p, -\mu) &= -e^{i\pi} Q(z, p, -\mu) \\
&= -\chi P \Gamma(\pi) N(\bar{\chi}^{-1} z + v^* (\bar{\chi}^{-1} z, p, -\mu), p) \\
&= \chi P N(\bar{\chi}^{-1} z - v^* (-\bar{\chi}^{-1} z, p, -\mu), p) \\
&= Q(z, p, \mu) .
\end{aligned}$$

Assim,

$$G(r, \phi, p, -\mu) = \text{Im} [(-i)^s e^{-i\phi} Q(z, p, -\mu)] = G(r, \phi, p, \mu) .$$

Pelo lema anterior segue que a função $G(r, \phi, p, \mu)$ $= r^{m-1} \text{sen} m\phi \ g(z, \lambda)$ tem a forma:

$$(5.2) \quad G(r, \phi, p, \mu) = \begin{cases} r^{m-1} \mu^2 \text{sen}(m\phi) (\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é par,} \\ r^{m-1} \mu \text{sen}(m\phi) (\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde ... indicam termos $O(|r| + |p| + |\mu|)$ quando $(r, p, \mu) \rightarrow (0, 0, 0)$ e $\rho(N, f)$ é definido por $\frac{1}{2} g_{\mu\mu}(0, 0)$ no caso m par e por $g_{\mu}(0, 0)$ no caso m ímpar.

TEOREMA 5.2

Suponhamos verificadas para a equação (2) as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_6) e $\alpha_s \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_s(0) > 0$.

Se $\rho = \rho(N, f) \neq 0$, então, as únicas soluções de (2) com $\lambda = (p, \mu)$ e $\mu \neq 0$ numa vizinhança da origem, são harmônicas ou bifurcadas subharmônicas com fases $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$.

PROVA

Se $x(r, \phi, \lambda)$ é solução de (2) com $\lambda = (p, \mu)$ e $\mu \neq 0$, então $G(r, \phi, p, \mu) = 0$. Segue por (5.2) que se $\rho = \rho(N, f) \neq 0$ então $r=0$ ou $\phi = \phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, ou seja, a solução $x(r, \phi, \lambda)$ é harmônica ou bifurcada subharmônica com fase ϕ_j .

Os próximos lemas serão utilizados na prova da genericidade da condição $\rho = \rho(N, f) \neq 0$.

LEMA 5.2

Se $m \geq 1$ é um inteiro, então, para todo j com $1 \leq 2j+1 \leq m$ e $t \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & (\cos t)^{m-(2j+1)} (\sin t)^{2j+1} = \\ & = (-1)^j \frac{\sin mt}{2^{m-1}} + \sum_{1 \leq k < m} a_k \sin kt, \end{aligned}$$

onde $a_k \in \mathbb{R}$.

PROVA

A representação acima obtem-se utilizando-se as identidades:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

LEMA 5.3

Se $f \in Z$ é invariante pelo operador $(-1)^s \Gamma_\tau$, então, $\chi Pf \in R$ se $s=0$ e $\chi Pf \in \mathbb{C}$ se $s=1$.

PROVA

Segue da equivariança de P em relação ao operador Γ_τ .

COROLÁRIO 5.1

Se $f \in Z$ é invariante pelo operador $(-1)^s \Gamma_\tau$, então:

$$\operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi Pf] = (-i)^s \cos \phi \chi Pf \quad e$$

$$\operatorname{Im} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi Pf] = -(-i)^s \sin \phi \chi Pf.$$

COROLÁRIO 5.2

Se $f \in Z$ é invariante pelo operador $(-1)^{s+1} \Gamma_\tau$, então:

$$\operatorname{Re} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi Pf] = (-i)^{s+1} \sin \phi \chi Pf,$$

$$\operatorname{Im} [(-i)^s e^{-i\phi} \chi Pf] = (-i)^{s+1} \cos \phi \chi Pf.$$

LEMA 5.4

Suponhamos que a equação (2) satisfaça a hipótese (H_1) e que, para algum inteiro $k \geq 1$, $N(x, p) = pAx + \tilde{N}(x) + o(|px|)$ com $\tilde{N} \in BC^{2k+3}(B, Z)$ ímpar e $\tilde{N}_x(0) = 0$. Então existem funções

$$w_1 = w_1(Q_3, \dots, Q_{2k-1}, f, r, \phi, \mu) = O(|r| + |\mu|)^3,$$

$$w_2 = w_2(Q_{2k+1}, f, r, \phi, \mu) = O(|r| + |\mu|)^{2k+3},$$

tais que:

$$v^*(r, \phi, 0, \mu) = \mu Kf + w_1 + w_2 + O(|r| + |\mu|)^{2k+3},$$

$$\text{onde } Q_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)!} \frac{\partial^{2j+1} \tilde{N}}{\partial x^{2j+1}}(0), \quad j=0, \dots, m-1.$$

PROVA

Faremos a prova por indução sobre k .

Para $k=1$, $\tilde{N} \in BC^5(B, Z)$, então $\tilde{N}(x) = Q_3 x^3 + O(|x|)^5$.

A função $v^*(r, \phi, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} v^*(r, \phi, 0, \mu)$ se anula em $r = \mu = 0$, portanto $v^*(r, \phi, \mu) = O(|r| + |\mu|)$. Por substituição na equação auxiliar obtemos a aproximação:

$$v^*(r, \phi, \mu) = \mu Kf + O(|r| + |\mu|)^3.$$

Repetindo o processo obtemos:

$$\begin{aligned} v^*(r, \phi, \mu) &= \\ &= \mu Kf + K(I-P)Q_3(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf)^3 + O(|r| + |\mu|)^5 = \\ &= \mu Kf + w_1 + w_2 + O(|r| + |\mu|)^5, \end{aligned}$$

$$\text{onde } w_1 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad w_2 \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P)Q_3(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf)^3.$$

Seja $k > 1$ e suponhamos que a afirmação seja válida para k , isto é, $\tilde{N} \in BC^{2k+3}(B, Z)$ e existem funções

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1(Q_3, \dots, Q_{2k-1}, f, r, \phi, \mu) = O(|r| + |\mu|)^3,$$

$$\tilde{w}_2 = \tilde{w}_2(Q_{2k+1}, f, r, \phi, \mu) = O(|r| + |\mu|)^{2k+1},$$

tais que:

$$v^*(r, \phi, \lambda) = Kf + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + W, \text{ onde } W = o(|r| + |\mu|)^{2k+3}.$$

Provemos que a afirmação vale para $k+1$. Seja $\tilde{N} \in BC^{2k+5}(B, Z)$. Então $\tilde{N}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} Q_{2j+1}(x)^{2j+1} + o(|x|^{2k+5})$. Pela hipótese da indução e da relação:

$$\tilde{N} \in BC^{2k+5}(B, Z) \subset BC^{2k+3}(B, Z),$$

segue que:

$$\begin{aligned} v^*(r, \phi, \mu) &= \mu Kf + K(I-P)\tilde{N}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + W) + \\ &\quad + o(|r| + |\mu|)^{2k+5} \\ &= \mu Kf + K(I-P) \sum_{j=1}^{k+1} Q_{2j+1}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + W)^{2j+1} + \\ &\quad + o(|r| + |\mu|)^{2k+5} \\ &= \mu Kf + w_1 + w_2 + o(|r| + |\mu|)^{2k+5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } w_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^k K(I-P)Q_{2j+1}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)^{2j+1} = \\ &= o(|r| + |\mu|)^3, \end{aligned}$$

$$w_2 \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P)Q_{2k+3}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf)^{2k+3} = o(|r| + |\mu|)^{2k+3}.$$

TEOREMA 5.3

Se as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_6) com m par, estão verificadas para a equação (2), então, o coeficiente $\rho = \rho(\tilde{N}, f)$ definido pela equação:

$$(5.3) \quad G(r, \phi, 0, \mu) = r^{m-1} \mu^2 \operatorname{sen} m\phi \left(\rho + o(|p| + |r| + |\mu|) \right)$$

$\tilde{e}$ contínuo em $(\tilde{N}, f)$ e $\tilde{e}$ é definido por:

$$\rho = \delta(Q_{m+1}, Kf^2) + \tilde{\delta}(Q_3, \dots, Q_{m-1}, f),$$

onde $\tilde{\delta}$ independe de Q_{2j+1} para $j \geq m$ e $\delta(\cdot, \cdot, \cdot)$ é a função tri-linear de $L^{m+1}(X, Z) \times X \times X \rightarrow R$, definida por:

$$\begin{aligned} \delta(Q_{m+1}, g, f) &= \\ &= -\binom{m+1}{2} \frac{(-i)^s}{2^{m-1}} \left[\sum_{j=0}^{m-2/2} \binom{m-1}{2j} (-1)^j \chi_{PQ_{m+1}}(u_1^{m-1-2j}, u_2^{2j}, Kg, Kf) \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{j=0}^{m-2/2} \binom{m-1}{2j+1} (-1)^j \chi_{PQ_{m+1}}(u_1^{m-1-(2j+1)}, u_2^{2j+1}, Kg, Kf) \right]. \end{aligned}$$

PROVA

Notando-se que ρ independe de p , segue da equação (5.3) que

$$(5.4) \quad \rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{m+1} G}{\partial r^{m-1} \partial \mu^2}(0, \phi, 0, 0) \operatorname{sen} m\phi \, d\phi.$$

Definindo $I(s, \phi) = \operatorname{Im}[(-i)^s e^{-i\phi} \chi_P]$, temos pelo Lema 5.4 :

$$\begin{aligned} G(r, \phi, 0, \mu) &= I(s, \phi) \tilde{N}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf + w_1 + w_2 + W) = \\ &= I(s, \phi) \sum_{j=1}^{m-2/2} Q_{2j+1}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf + w_1)^{2j+1} + \\ &+ I(s, \phi) Q_{m+1}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf)^{m+1} + o(|r| + |\mu|)^{m+3}, \end{aligned}$$

O coeficiente do termo em $r^{m-1}\mu^2$ da segunda parcela da expressão de $G(r, \phi, 0, \mu)$ dada acima é:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \binom{m+1}{2} I(s, \phi) Q_{m+1}((\Gamma(\phi)u_1)^{m-1}, Kf^2)$$

Por aplicação dos Lemas 5.2 e 5.3 obtemos:

$$T = \delta(Q_{m+1}, Kf^2) \operatorname{sen} m\phi + \nabla(Q_{m+1}, Kf^2) \sum_{k=1}^{m-1} a_k \operatorname{sen} k\phi,$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla(Q_{m+1}, Kf^2) &= \\ &= -\binom{m+1}{2} (-i)^s \left[\sum_{j=0}^{m-2/2} \binom{m-1}{2j} \chi^{PQ}_{m+1}(u_1^{m-1-2j}, u_2^{2j}, Kf^2) + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{j=0}^{m-2/2} \binom{m-1}{2j+1} \chi^{PQ}_{m+1}(u_1^{m-1-(2j+1)}, u_2^{2j+1}, Kf^2) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(Q_{m+1}, Kf^2) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^{m+1}}{\partial^{m-1} r \partial \mu^2} [I(s, \phi) Q_{m+1}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf) + \right. \\ &\quad \left. + O(|r| + |\mu|)^{m+3}] \right\}_{r=\mu=0} \operatorname{sen} \phi \, d\phi, \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(Q_3, \dots, Q_{m-1}, f) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{m-2/2} I(s, \phi) \frac{\partial^{m+1}}{\partial^{m-1} r \partial \mu^2} \left\{ Q_{2j+1}(r\Gamma(\phi)u_1 + \mu Kf + w_1)^{2j+1} \right\}_{r=\mu=0} \operatorname{sen} m\phi \, d\phi. \end{aligned}$$

temos:

$$\rho = \delta(Q_{m+1}, Kf^2) + \tilde{\delta}(Q_3, \dots, Q_{m-1}, f) .$$

A continuidade de $\rho(N, f)$ segue da continuidade do integrando em (N, f) de (5.4).

Para os números $m \geq 2$ e $s \in \{0, 1\}$ fixados na hipótese (H_6) , consideremos os seguintes espaços de Banach:

$$H_m^s \stackrel{\text{def}}{=} \{ \tilde{N} \in BC^{m+3}(B, Z), \text{ ímpar com } \tilde{N}_x(0)=0 \text{ e } \tilde{N} \text{ } (O(2), \Gamma_o, \Gamma_s)\text{-equivariante} \} ,$$

$$\mathcal{D}_m^s \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in Z \mid f \text{ é invariante relativamente a } (D_m, \Gamma_s) \} .$$

A seguir daremos uma condição para que se tenha $\rho = \rho(N, f) \neq 0$ genericamente na classe $H_m^s \times \mathcal{D}_m^s$, isto é, para que o conjunto

$$\Sigma_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \{ (\tilde{N}, f) \in H_m^s \times \mathcal{D}_m^s \mid \rho(\tilde{N}, f) \neq 0 \}$$

seja aberto e denso em $H_m^s \times \mathcal{D}_m^s$.

TEOREMA 5.4

Consideremos a equação (2) satisfazendo as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_6) com $m \geq 2$ par.

Se existem funções $f_o \in \mathcal{D}_m^s$ e $Q_{m+1}^o \in L^{m+1}(X, Z)$, tais

que o polinômio homogêneo $x \in X \rightarrow Q_{m+1}^0(x^{m+1}) \in Z$ está em H_m^s e $\delta(Q_{m+1}^0, Kf_0^2) \neq 0$, então Σ_ρ é aberto e denso em $H_m^s \times \mathcal{D}_m^s$.

PROVA

Seja $(\tilde{N}, f) \in H_m^s \times \mathcal{D}_m^s - \Sigma_\rho$ e consideremos a sequência (N_k, f_k) de elementos de $H_m^s \times \mathcal{D}_m^s$, definida por :

$$(N_k, f_k) = \begin{cases} (\tilde{N}, f + \frac{1}{k} f_0) , & \text{se } \rho(\tilde{N}, f + \frac{1}{k} f_0) \neq 0 , \\ (\tilde{N} + \frac{1}{k} Q_{m+1}^0, f + \frac{1}{k} f_0) , & \text{se } \rho(\tilde{N}, f + \frac{1}{k} f_0) = 0 . \end{cases}$$

Da condição $\delta(Q_{m+1}^0, Kf_0^2) \neq 0$ segue que o polinômio

$$M(\xi) = \delta(Q_{m+1}^0, (Kf + \xi Kf_0)^2) =$$

$$= \delta(Q_{m+1}^0, (Kf_0)^2) \xi^2 + 2\delta(Q_{m+1}^0, Kf, Kf_0) \xi + \delta(Q_{m+1}^0, Kf^2)$$

não se anula em $I = (-\epsilon, \epsilon) - \{0\}$, para algum $\epsilon > 0$.

Seja $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Mostremos que a subsequência $(N_k, f_k)_{k > k_0}$ pertence a Σ_ρ . De fato, se para $k > k_0$ tivermos $\rho(\tilde{N}, f + \frac{1}{k} f_0) \neq 0$, isto implica que $\rho(N_k, f_k) \neq 0$ e então $(N_k, f_k) \in \Sigma_\rho$. Por outro lado, se $\rho(\tilde{N}, f + \frac{1}{k} f_0) = 0$, então temos:

$$\begin{aligned}
\rho(N_k, f_k) &= \rho(\tilde{N} + \frac{1}{k} Q_{m+1}^0, f + \frac{1}{k} f_0) = \\
&= \delta(Q_{m+1} + \frac{1}{k} Q_{m+1}^0, (Kf + \frac{1}{k} Kf_0)^2) + \\
&\quad \tilde{\delta}(Q_3, \dots, Q_{m-1}, f + \frac{1}{k} f_0) = \\
&= \delta(Q_{m+1}, (Kf + \frac{1}{k} f_0)^2) + \tilde{\delta}(Q_3, \dots, Q_{m-1}, f + \frac{1}{k} f_0) + \\
&\quad + \frac{1}{k} M(\frac{1}{k}) = \\
&= \rho(\tilde{N}, f + \frac{1}{k} f_0) + \frac{1}{k} M(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} M(\frac{1}{k}) \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto $(N_k, f_k) \in \Sigma_\rho$ também neste caso.

Da desigualdade

$$\|(N_k, f_k) - (\tilde{N}, f_0)\| \leq \frac{1}{k} (\|Q_{m+1}^0\| + \|f_0\|),$$

segue que (N_k, f_k) converge para $(\tilde{N}, f)$ em $H_m^s \times \mathcal{D}_m^s$, portanto,

$$H_m^s \times \mathcal{D}_m^s \subset \bar{\Sigma}_\rho \subset H_m^s \times \mathcal{D}_m^s, \text{ ou seja } \bar{\Sigma}_\rho = H_m^s \times \mathcal{D}_m^s.$$

Da continuidade de $\rho(N, f)$ segue que Σ_ρ é aberto.

Enunciaremos abaixo os correspondentes aos Teoremas 5.3 e 5.4 para o caso m ímpar. As demonstrações são similares e por esta razão não serão apresentadas.

TEOREMA 5.5

Assumindo verificadas para a equação (2) as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_6) com m ímpar, o coeficiente $\rho = \rho(\tilde{N}, f)$ definido pela equação:

$$G(r, \phi, p, \mu) = r^{m-1} \mu \operatorname{sen} m\phi (\rho + o(|r| + |\mu|))$$

é contínuo em $(\tilde{N}, f)$ e é definido por:

$$\rho = v(Q_m, Kf) + \tilde{v}(Q_3, \dots, Q_{m-2}, f),$$

onde $v(\cdot, \cdot)$ é a função bilinear definida por

$$\begin{aligned} v(Q_m, Kf) &= \\ &= - \frac{m(-i)^s}{2^{m-1}} \left[\sum_{s=0}^{m-1/2} \binom{m-1}{2j} (-1)^j \chi_{PQ_m}(u_1^{m-2j}, u_2^{2j}, Kf) + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{j=0}^{m-1/2} \binom{m-1}{2j+1} (-1)^j \chi_{PQ_m}(u_1^{m-(2j+1)}, u_2^{2j+1}, Kf) \right] \end{aligned}$$

e $\tilde{v}$ independe de Q_{2j+1} para $j \geq \frac{m-1}{2}$.

TEOREMA 5.6

Nas condições do teorema anterior, se existem $f_0 \in \mathcal{D}_m^s$ e $Q_m^0 \in L^m(X, Z)$, tais que, o polinômio homogêneo $x \in X \rightarrow Q_m^0(x^m) \in Z$ está em H_m^s e $v(Q_m^0, Kf_0) \neq 0$, então o conjunto

$$\Sigma_\rho = \{(\tilde{N}, f) \in H_m^s \times \mathcal{D}_m^s \mid v(\tilde{N}, f) \neq 0\}$$

é aberto e denso em $H_m^s \times \mathcal{D}_m^s$.

CAPÍTULO VI

EQUAÇÕES COM NÃO LINEARIDADE $O(2)$ -EQUIVARIANTE E TERMO FORÇANTE OH_m -INVARIANTE : BIFURCAÇÃO E GENERICIDADE

Quando a equação (1) apresenta uma OH_m -equivariância, caracterizada pela hipótese (H_6) , então, do que vimos no Capítulo IV, para $\lambda = (p, \mu, \epsilon) \in \mathbb{R}^3$ suficientemente pequeno, existem soluções " $\frac{\pi}{m}$ - harmônicas-ímpares" e bifurcadas "subharmônicas" com fases especiais ϕ_j . Além disso, estas soluções sob a ação do operador $\Gamma(-\phi_j)$, tornam-se Γ_τ -invariantes.

Neste capítulo vamos considerar a equação (1) com $\epsilon = 0$, L e N $(O(2), \Gamma_o, \Gamma_s)$ -equivariantes e f (OH_m, Γ_s) -invariante, para $m \geq 2$ e $s \in \{0, 1\}$ fixados.

Daremos uma condição para que a equação:

$$(2) \quad Lx = N(x, p) + \mu f$$

com $\lambda = (p, \mu)$ numa pequena vizinhança da origem e $\mu \neq 0$ tenha somente soluções " $\frac{\pi}{m}$ - harmônicas-ímpares" e bifurcadas subharmônicas com fases especiais.

No final do capítulo estabeleceremos resultados sobre a genericidade da condição mencionada numa certa classe de não linearidade N e termo forçante f .

Consideremos a equação (2) satisfazendo as hipóteses (H_1) , (H_2) e a seguinte:

(H₇) Para $m \geq 2$ e $s \in \{0,1\}$ fixados tem-se:

- (i) $N(x,p) = pAx + \tilde{N}(x) + o(|px|) : B \times \Omega \rightarrow Z$,
onde Ω é uma vizinhança aberta da origem
em R , $B = B(0,r) \subset X$, $A \in L(X,Z)$, $\tilde{N} \in$ ao es-
paço $BC^{m+3}(B,Z)$ é ímpar com $\tilde{N}_x(0)=0$ se m
é ímpar, $\tilde{N} \in BC^{2m+3}(B,Z)$ é ímpar com $\tilde{N}_x(0)$
 $= 0$ se m é par.
- (ii) $\Gamma(\phi)Lx = L(\Gamma(\phi)x)$, $(-1)^s \Gamma_\tau Lx = L(\Gamma_\tau x)$,
 $\forall \phi \in R$.
- (iii) $\Gamma(\phi)N(x,p) = N(\Gamma(\phi)x,p)$,
 $(-1)^s \Gamma_\tau N(x,p) = N(\Gamma_\tau x,p)$, $\forall \phi \in R$.
- (iv) $\Gamma(\pi/m)f = -f$, $(-1)^s \Gamma_\tau f = f$.
- (v) $PAu_1 = u_{1+s}$, onde $P \in L(Z)$ é a projeção
tal que $PX = \text{Ker}L$.

Como a hipótese (H₇) implica (H₅), seguindo Capítulo
V os seguintes resultados:

TEOREMA 6.1

Assumindo verificadas para a equação (2) as hipóte-
ses (H₁), (H₂) e (H₇), tem-se:

- (1) A equação (2) é equivalente à equação com-
plexa:

$$Q(z,\lambda) = \chi P N(\chi^{-1}z + v^*(\chi^{-1}z,\lambda), p) = 0 ,$$

onde $z \in \chi(U)$ e $\lambda = (p, u)$ percorre uma vizi-
nhança ω_0 da origem em R^2 .

- (2) existem funções $f \stackrel{\text{def}}{=} f_{m,s}$, $g \stackrel{\text{def}}{=} g_{m,s}$,
 $B_{\mathbb{C}}^2 \times \omega_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, onde $B_{\mathbb{C}}^2 = B(0, \epsilon) \subset \mathbb{C}$, tais que:

$$(-i)^s Q(z, \lambda) = \begin{cases} f(z, \lambda)z + g(z, \lambda)(\bar{z})^{m-1} & \text{se } m \text{ é ímpar,} \\ f(z, \lambda)z + g(z, \lambda)(\bar{z})^{2m-1} & \text{se } m \text{ é par;} \end{cases}$$

- (3) a equação (2) pode ser reduzida ao sistema:

$$\begin{cases} F(r, \phi, \lambda) = r[f(z, \lambda) + r^{m-2}g(z, \lambda)\cos m\phi] = 0, \\ G(r, \phi, \lambda) = r^{m-1}\sin m\phi g(z, \lambda) = 0, \end{cases}$$

se m é ímpar,

$$\begin{cases} F(r, \phi, \lambda) = r[f(z, \lambda) + r^{2m-2}g(z, \lambda)\cos 2m\phi] = 0, \\ G(r, \phi, \lambda) = r^{2m-1}\sin 2m\phi g(z, \lambda) = 0, \end{cases}$$

se m é par;

- (4) Se $\alpha_s = \alpha_s(0) > 0$, então existem curvas de bifurcação definidas por:

$$p = \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_s} - \lambda_s \right) \mu^2 + o(\mu^2), \text{ no caso } m=3,$$

$$p = -\lambda_s \mu^2 + o(\mu^2) \text{ no caso } m \neq 3;$$

- (5) Se $\lambda_0 = (p_0, \mu_0)$ pertence a uma curva de bifurcação, então a equação (2) com $\lambda = (p, \mu_0)$ admite:

- (a) no caso $m \geq 2$ par, para cada fase $\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$, uma solução π/m -harmônica-ímpar se $p \geq p_0$; uma solução π/m -harmônica-ímpar e duas bifurcadas subharmônicas se $p < p_0$;
- (b) no caso $m \geq 3$ ímpar, para cada fase $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, uma solução π/m -harmônica-ímpar se $p \geq p_0$; uma solução π/m -harmônica-ímpar e duas bifurcadas subharmônicas se $p < p_0$;
- (c) no caso $m=3$, para cada fase $\phi_j = j\pi/3$, $j=0, 1, 2$, uma solução π/m -harmônica-ímpar se $p > p_0$; uma solução π/m -harmônica-ímpar e uma bifurcada subharmônica se $p = p_0$; uma π/m -harmônica-ímpar e duas bifurcadas subharmônicas se $p < p_0$;
- (6) as soluções π/m -harmônicas-ímpares são Γ_τ -invariantes; as soluções bifurcadas com fase $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, no caso $m \geq 3$ ímpar, são tais que, $\Gamma(-\phi_j) x(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante, $j=0, \dots, m-1$; as soluções bifurcadas com fase $\phi_j = j\pi/2m$, no caso $m \geq 2$ par, são tais que, $\Gamma(-\phi_j) x(r, \phi_j, \lambda)$ é Γ_τ -invariante para j par, com $0 \leq j < 2m-1$; as soluções bifurcadas com fase $\phi_j = j\pi/2m$, no caso $m \geq 2$ par, são tais que, $\Gamma(\frac{\pi}{2} - \phi_j) x(r, \phi_j, \lambda)$ é $(-\Gamma_\tau)$ -invariante, para j ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$.

A função $G(r, \phi, p, \mu)$ tem a forma:

$$(6.1) \quad G(r, \phi, p, \mu) = \begin{cases} r^{m-1} \mu \operatorname{sen} m\phi (\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é ímpar,} \\ r^{2m-1} \mu^2 \operatorname{sen} 2m\phi (\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é par,} \end{cases}$$

onde $\dots$ indicam termos $O(|r| + |p| + |\mu|)$ para $(r, p, \mu) \rightarrow (0, 0, 0)$ e $\rho = \rho(N, f)$ é definido por $\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2}(0, 0)$ no caso m par e por $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0)$ no caso m ímpar.

Podem ser provados de forma similar ao que fizemos no capítulo anterior os seguintes teoremas:

TEOREMA 6.2

Suponhamos verificadas para a equação (2) as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_7) e $\alpha_s > 0$.

Se $\rho = \rho(N, f) \neq 0$, então, as únicas soluções de (2), com $\lambda = (p, \mu)$ e $\mu \neq 0$ numa vizinhança da origem, são π/m -harmônicas-ímpares ou bifurcadas subharmônicas com fases $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$ se m é ímpar, $\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$ se m é par.

TEOREMA 6.3

Se as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_7) estão verificadas para a equação (2) com m par, então, o coeficiente $\rho = \rho(N, f)$ definido pela equação:

$$G(r, \phi, p, \lambda) = r^{2m-1} \mu^2 \operatorname{sen} 2m\phi (\rho + o(|r| + |p| + |\mu|))$$

é contínuo em $(\tilde{N}, f)$ e é definido por:

$$\rho = \delta(Q_{2m+1}, Kf^2) + \tilde{\delta}(Q_3, \dots, Q_{2m-1}, f),$$

onde $\delta(\cdot, \cdot, \cdot)$ é a função trilinear definida no Teorema 5.3 e $\tilde{\delta}$ independe de Q_{2j+1} para $j \geq m$.

TEOREMA 6.4

Se as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_7) estão verificadas para a equação (2) com m ímpar, então o coeficiente $\rho = \rho(\tilde{N}, f)$ definido pela equação:

$$G(r, \phi, p, \mu) = r^{m-1} \mu \operatorname{sen} m\phi \left(\rho + O(|p| + |r| + |\mu|) \right)$$

é contínuo em $(\tilde{N}, f)$ e é definido por:

$$\rho = U(Q_m, Kf) + \tilde{U}(Q_3, \dots, Q_{m-1}, f),$$

onde $U(\cdot, \cdot)$ é a função bilinear definida no Teorema 5.5 e $\tilde{U}$ independe de Q_{2j+1} para $j \geq \frac{m-1}{2}$.

Para os números $m \geq 2$ e $s \in \{0, 1\}$ fixados na hipótese (H_7) , consideremos o subespaço:

$$OH_m^s = \{f \in Z \mid \Gamma(\pi/m)f = -f, (-1)^s \Gamma_\tau f = f\}.$$

Os teoremas seguintes mostram que a condição $\rho = \rho(\tilde{N}, f)$ é genérica na classe $H_{2m}^s \times OH_m^s$ quando m é par; em $H_m^s \times OH_m^s$ quando m é ímpar.

TEOREMA 6.5

Nas condições do Teorema 6.3, se existem $f_0 \in OH_m^s$ e $Q_{2m+1}^0 \in L^{2m+1}(X, Z)$ tais que o polinômio homogêneo $x \in X \rightarrow Q_{2m+1}^0(x^{2m+1}) \in Z$ está em H_{2m}^s e $\delta(Q_{2m+1}^0, Kf_0^2) \neq 0$, então o conjunto:

$$\Sigma_{\rho} = \{ (\tilde{N}, f) \in H_{2m}^s \times OH_m^s \mid \rho(\tilde{N}, f) \neq 0 \}$$

é aberto e denso em $H_{2m}^s \times OH_m^s$.

TEOREMA 6.6

Nas condições do Teorema 6.4, se existe $f_0 \in OH_m^s$ e $Q_m^0 \in L^m(X, Z)$, tais que, o polinômio homogêneo $x \in X \rightarrow Q_m^0(x^m) \in Z$ está em H_m^s e $U(Q_m^0, Kf_0) \neq 0$, então o conjunto:

$$\Sigma_{\rho} = \{ (\tilde{N}, f) \in H_m^s \times OH_m^s \mid \rho(N, f) \neq 0 \}$$

é aberto e denso em $H_m^s \times OH_m^s$.

CAPÍTULO VII

EXEMPLOS E COMENTÁRIOS FINAIS

No que segue, como exemplos de aplicação da teoria desenvolvida, analisaremos em algumas equações diferenciais escalares e vetoriais, o problema de existência e bifurcação de soluções 2π -periódicas (exemplos 7.1 a 7.4).

Em outras aplicações (exemplos 7.5 e 7.6) analisaremos a questão da existência e bifurcação de soluções clássicas, para um problema a valores de contorno envolvendo o operador de Laplace.

Na verdade, a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores foi fortemente motivada por estes exemplos.

Neste capítulo, algumas verificações são às vezes repetitivas, entretanto elas são necessárias, pois em problemas com muitas simetrias ocorre com frequência o anulamento de coeficientes e integrais. Exigimos em nossas hipóteses o não anulamento de certos coeficientes, desta forma, os cálculos que se seguem, justificam em cada caso tal procedimento.

No final do capítulo, fazemos alguns comentários sobre as possibilidades de extensões das idéias deste trabalho a casos mais gerais, e sobre possíveis adaptações que permitem a sua utilização na análise de casos similares não considerados no texto.

EXEMPLO 1EQUAÇÃO ESCALAR COM D_m -EQUIVARIANÇA

Seja $m \geq 2$ um inteiro fixado. Indiquemos por $\hat{m}$ o menor inteiro ímpar $\geq m$. Consideremos a equação escalar:

$$(1) \quad \ddot{x} + x = [p + \epsilon H(t)]x + g(x) + h(x, t, p, \epsilon) + \mu f(t)$$

onde:

- (a) p, μ e ϵ são pequenos parâmetros reais;
- (b) $f(\cdot), H(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, pares e $\frac{2\pi}{m}$ -periódicas;
- (c) $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar em x , classe C^{m+3} em $\mathbb{R}^4$, par e $2\pi/m$ -periódica em t com $h(x, t, p, \epsilon) = o(|px| + |\epsilon x|)$ para $(x, p, \epsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$;
- (d) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, classe C^{m+3} com $g'(0) = 0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(\hat{m})}(0) \neq 0$.

Analisaremos a existência e bifurcação de soluções 2π -periódicas da equação (1).

Vamos adaptar o exemplo acima às condições abstratas exigidas nos capítulos anteriores. Sejam:

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{ z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid z \text{ é contínua e } \frac{2\pi}{m}\text{-periódica} \},$$

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{ z \in Z \mid \dot{z}, \ddot{z} \in Z \},$$

com as topologias C^0 e C^2 respectivamente;

$$(Lx)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(\cdot) + x(\cdot) : X \rightarrow Z \quad e$$

$N(x, p, \varepsilon)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} [pA + \varepsilon B] x(\cdot) + \alpha_3 x(\cdot)^3 + R(x, p, \varepsilon)(\cdot)$
 definido em $B \times \Omega$ a valores em Z , onde $B = B(0, r) \subset X$, Ω é uma
 vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}^2$, $\alpha_3 = 1/3! g^{(3)}(0)$, $A, B \in$
 $L(X, Z)$ são definidos por $A = I_X$, $Bx(\cdot) = H(\cdot)x(\cdot)$ e
 $R(x, p, \varepsilon)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} g(x(\cdot)) - \alpha_3 x(\cdot)^3 + h(x, t, p, \varepsilon)$.

Com as definições acima a equação (1) pode ser escrita na forma:

$$Lx = N(x, p, \varepsilon) + \mu f,$$

onde $L: X \rightarrow Z$ é um operador linear contínuo com $\text{Ker} L = [u_1, u_2]$,
 onde $u_1(\cdot) = \cos(\cdot)$, $u_2(\cdot) = \sin(\cdot)$, $R(L)$ é fechado em Z e
 $\text{Ker} L \oplus R(L) = Z$.

A aplicação $\Gamma: O(2) \rightarrow L(Z)$ definida por $\Gamma(\phi)z(\cdot) =$
 $= z(\cdot - \phi)$, $\Gamma_\tau z(\cdot) = z(-\cdot)$, para todo ϕ em $\mathbb{R}$ e z em Z , define
 uma representação de $O(2)$ em Z , satisfazendo:

$$\Gamma(\phi)u_1 = \cos \phi u_1 + \sin \phi u_2,$$

$$\Gamma(\phi)u_2 = -\sin \phi u_1 + \cos \phi u_2,$$

$$\Gamma_\tau u_1 = u_1, \quad \Gamma_\tau u_2 = -u_2.$$

A aplicação $N: B \times \Omega \rightarrow Z$ pertence ao espaço $BC^{m+3}(B \times \Omega, Z)$,
 é ímpar na variável x e $R(x, p, \varepsilon) = o(|px| + |\varepsilon x| + |x|^3)$ para
 $(x, p, \varepsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Os operadores L , N e a função $f(\cdot)$ satisfazem as relações de simetria:

$$\Gamma(2\pi/m) Lx = L(\Gamma(2\pi/m)x), \quad \Gamma_\tau Lx = L(\Gamma_\tau x):$$

$$\Gamma(2\pi/m)N(x,p,\varepsilon) = N(\Gamma(2\pi/m)x,p,\varepsilon) ,$$

$$\Gamma_{\tau}N(x,p,\varepsilon) = N(\Gamma_{\tau}x,p,\varepsilon),$$

$$\Gamma(2\pi/m)f = f \quad , \quad \Gamma_{\tau}f = f .$$

A projeção $P \in L(Z)$ definida por:

$$Pf(\cdot) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^2 f(s)u_j(s) ds u_j(\cdot)$$

$\tilde{e}(O(2),\Gamma)$ - equivariante e além disso verifica $PAu_1(\cdot)=u_1(\cdot)$

Mostramos acima que estão verificadas para a equação (1) as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_4) do Capítulo III com $s=0$.

Sendo $\alpha_s(j\pi/m) = 1/8 g^{(3)}(0) \neq 0$ segue que para $\lambda=(p,\mu,\varepsilon)$ próximo da origem do R^3 , a equação (1) possui soluções harmônicas e 2π -periódicas (subharmônicas).

As equações das superfícies de bifurcação são definidas por:

$$p = -\gamma_o(\phi_j)\varepsilon - \lambda_o(\phi_j)\mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|) ,$$

$\phi_j = j\pi/2$, $j=1,2$ e $m=2$;

$$p = -\gamma_o\varepsilon + \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_o} - \lambda_o\right)\mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|) ,$$

onde $m \geq 3$,

$$\gamma_o(\phi_j) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} H(s) ds + \frac{\cos 2\phi_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(s)\cos 2s ds ,$$

$$\lambda_o(\phi_j) = \frac{3\alpha_3}{2\pi} \int_0^{2\pi} Kf(s)^2 ds + \frac{3 \cos 2\phi_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} KF(s)^2 \cos 2s ds$$

$$Kf(t) = (I-P) \left[-\cos t \int_0^t f(s) \sin s \, ds + \sin t \int_0^t f(s) \cos s \, ds \right],$$

$$\gamma_0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} H(s) \, ds, \quad \lambda_0 = 3\alpha_3 / 2\pi \int_0^{2\pi} Kf(s)^2 \, ds, \quad \alpha_0 = 3/4\alpha_3,$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq 3; \\ 3\alpha_3/4 \int_0^2 Kf(s) \cos 3s \, ds, & \text{se } m=3. \end{cases}$$

Para o caso particular em que $f(t) = 1 + \cos mt$, $H(t) = 1 + \cos mt$ e $h(x, t, p, \varepsilon) = [p + \varepsilon \cos mt] x^3$, temos:

$$\gamma_0(\phi_j) = 1 + \frac{\cos 2\phi_j}{2}$$

$$\lambda_0(\phi_j) = \alpha_3 [19/6 - \cos 2\phi_j], \quad \alpha_0 = 3/4 \alpha_3,$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \lambda_0 = 3 \left[1 + \frac{1}{2(m^2-1)^2} \alpha_3 \right],$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq 3, \\ -3/32 \alpha_3 & \text{se } m=3. \end{cases}$$

As superfícies de bifurcação neste caso são definidas por:

$$p = -\frac{3}{2}\varepsilon - 13/6 \alpha_3 \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) \quad \text{e}$$

$$p = -\frac{1}{2}\varepsilon - 25/6 \alpha_3 \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) \quad \text{no ca-}$$

so $m=2$,

$$p = -\varepsilon - 3 \left[1 + \frac{1}{2(m^2-1)^2} \right] \alpha_3 \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2)$$

no caso $m>3$,

$$p = -\epsilon - \frac{3113}{1024} \alpha_3 \mu^2 + o(|\epsilon| + \mu^2)$$

no caso $m=3$.

Se $\epsilon = 0$ e $h(x, t, p, 0)$ é independente de t , a equação (1) apresenta não linearidade $(O(2), \Gamma)$ -equivariante e força externa (D_m, Γ) -invariante. Segue pelo Capítulo V que a parte principal do coeficiente $\rho(N, f)$, definido a partir de (5.2) é dada por:

$$\delta(Q_{m+1}, kf^2) = - \binom{m+1}{2} \frac{\alpha_{m+1}}{2^{m-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Kf(s)^2 \cos ms \, ds,$$

no caso m par e

$$v(Q_m, Kf) = - \frac{m \alpha_m}{2^{m-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Kf(s) \cos ms \, ds,$$

no caso m ímpar, onde

$$Q_{\hat{m}} = \alpha_{\hat{m}} = \frac{1}{\hat{m}!} g^{(\hat{m})}(0).$$

Para o caso particular acima considerado em que $f(t) = H(t) = 1 + \cos mt$, $h(x, t, p,) = [p + \epsilon \cos mt] x^3$, temos:

$$\delta(Q_{m+1}, Kf^2) = \frac{m \alpha_{m+1}}{2^{m-1} (m-1)} \quad \text{se } m \text{ é par,}$$

$$v(Q_m, Kf) = \frac{m \alpha_m}{2^{m-1} (m^2 - 1)} \quad \text{se } m \text{ é ímpar.}$$

Observamos que o polinômio homogêneo $Q_{\hat{m}}^0 : X \rightarrow Z$ e a função $f_0 \in Z$, definidos por:

$$Q_m^0(x) = \alpha_m x^{\hat{m}} \quad \text{e} \quad f_0(t) = 1 + \cos mt,$$

estão respectivamente nos espaços:

$$H_m^0 = \{ \tilde{N} \in BC^{m+3}(B, \mathbb{Z}) \mid \tilde{N} \text{ é ímpar, } \tilde{N}_x(0)=0, \Gamma(\phi)\tilde{N}(x) = \tilde{N}(\Gamma(\phi)x), \Gamma_\tau \tilde{N}(x) = \tilde{N}(\Gamma_\tau x), \forall \phi \in \mathbb{R}, \forall x \in B \},$$

$$D_m^0 = \{ f \in \mathbb{Z} \mid \Gamma(2\pi/m)f = f \text{ e } \Gamma_\tau f = f \},$$

e satisfazem:

$$\delta(Q_{m+1}^0, Kf_0^2) = \frac{m \alpha_{m+1}}{2^{m-1}(m-1)} \neq 0 \quad \text{se } m \text{ é par,}$$

$$v(Q_m^0, Kf_0) = \frac{m \alpha_m}{2^{m-1}(m^2-1)} \neq 0 \quad \text{se } m \text{ é ímpar.}$$

Segue pelo Teorema 5.4 que o coeficiente $\rho(N, f)$ é genericamente não nulo na classe $H_m^0 \times D_m^0$. Assim, para a "maioria" dos pares (g, f) satisfazendo as condições (d) e (b) respectivamente, as únicas soluções da equação (1) (com $\mu \neq 0$ e $\varepsilon = 0$) são harmônicas ou bifurcadas subharmônicas com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e com a propriedade de simetria: $\Gamma(-\phi_j) x(\tau, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é par.

EXEMPLO 2EQUAÇÃO ESCALAR COM OH_m -EQUIVARIANÇA

Seja $m \geq 2$ um inteiro fixado e consideremos a equação:

$$(2) \quad \ddot{x} + x = [p + \epsilon H(t)]x + g(x) + h(x, t, p, \epsilon) + \mu f(t)$$

onde:

- (a) p, μ e ϵ são pequenos parâmetros reais;
- (b) $f, H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são pares, contínuas, f π/m -harmônica-ímpar e H π/m -periódica;
- (c) $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar em x , classe C^{2m+3} em $\mathbb{R}^4$, par e π/m -periódica em t , com $h(x, t, p, \epsilon) = o(|px| + |\epsilon x|)$ para $(x, p, \epsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$;
- (d) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, classe C^{2m+3} com $g'(0) = 0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(2m+1)}(0) \neq 0$ se m é par; classe C^{m+3} com $g'(0) = 0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(m)}(0) \neq 0$ se m é ímpar.

Analisaremos a existência e bifurcação de soluções 2π -periódicas da equação (2).

Definindo-se os espaços Z, X , os operadores L e N , a projeção P e a representação Γ de $O(2)$ em Z como no exemplo anterior, a equação (2) escreve-se na forma:

$$Lx = N(x, p, \epsilon) + \mu f,$$

onde os operadores L, N e a função f verificam as hipóteses $(H_1), (H_2)$ e (H_5) do Capítulo IV; além disso os coeficientes $\alpha_0(\phi_j)$, $j=0,1$, ($\phi_j = j\pi/m$ se m é ímpar, $\phi_j = j\pi/2m$ se m é par)

independem de ϕ_j e tem valor comum $\alpha_0 = \frac{1}{8} g^{(3)}(0) \neq 0$.

Segue do Capítulo IV que para $\lambda = (p, \mu, \varepsilon)$ próximo da origem em $\mathbb{R}^3$, a equação (2) possui soluções π/m -harmônicas-ímpares e soluções 2π -periódicas (subharmônicas).

As equações das superfícies de bifurcação são definidas por:

$$p = -\gamma_0 \varepsilon + \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_0} - \lambda_0 \right) \mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|),$$

onde γ_0 , λ_0 e η são definidos como no exemplo anterior.

Para o caso particular em que $f(t) = \cos mt$, $H(t) = 1 + \cos 2mt$ e $h(x, t, p, \varepsilon) = [p + \varepsilon \cos 2mt] x^3$ temos:

$$\gamma_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{3\alpha_3}{2(m^2-1)^2}, \quad \alpha_0 = \frac{3}{4}\alpha_3,$$

$$\eta = 0 \text{ se } m \neq 0, \quad \eta = -3/32 \alpha_3 \text{ se } m = 3,$$

onde $\alpha_3 = 1/3! g^{(3)}(0)$.

As superfícies de bifurcação neste caso são dadas por:

$$p = -\varepsilon - \frac{3\alpha_3}{2(m^2-1)^2} \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) \text{ se } m \neq 3,$$

$$p = -\varepsilon - \frac{3\alpha_3}{512} \mu^2 + o(|\varepsilon| + \mu^2) \text{ se } m=3.$$

Se $\varepsilon=0$ e $h(x, t, p, \varepsilon)$ independe de t , a equação resultante tem não linearidade $O(2)$ -equivariante e força externa OH_m -invariante. Segue do Capítulo VI que a parte principal do coeficiente $\rho(N, f)$, definido a partir de (6.1), é dado por:

$$\delta(Q_{2m+1}, Kf^2) = - \binom{2m+1}{2} \frac{\alpha_{2m+1}}{2^{2m-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Kf(s)^2 \cos 2ms \, ds$$

no caso m par,

$$v(Q_m, Kf) = - \frac{m \alpha_m}{2^{m-1}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Kf(s) \cos ms \, ds$$

no caso m ímpar, onde

$$Q_k = \alpha_k = 1/k! \, g^{(k)}(0), \quad k=2m-1, m.$$

Para o caso particular considerado em que $f(t) = \cos mt$ temos:

$$\delta(Q_{2m+1}, Kf^2) = - \frac{m(2m+1)}{2^{2m}(m^2-1)^2} \alpha_{2m+1} \quad \text{se } m \text{ é par,}$$

$$v(Q_m, Kf) = \frac{m}{2^{m-1}(m^2-1)} \alpha_m \quad \text{se } m \text{ é ímpar.}$$

Observamos que se m é par o polinômio homogêneo Q_{2m+1}^0 $X \rightarrow Z$ e a função $f_0: R \rightarrow R$ definidos por: $Q_{2m+1}^0(x) = \alpha_{2m+1} x^{2m+1}$, $f_0(t) = \cos mt$, pertencem respectivamente aos espaços:

$$H_{2m}^0 = \{ \tilde{N} \in BC^{2m+3}(B, Z) \mid \tilde{N} \text{ é ímpar, } \tilde{N}_x(0) = 0, \Gamma(\phi)\tilde{N}(x) = \tilde{N}(\Gamma(\phi)x), \Gamma_\tau \tilde{N}(x) = \tilde{N}(\Gamma_\tau x), \forall \phi \in R, \forall x \in B \},$$

$$OH_m^0 = \{ f \in Z \mid -\Gamma(\pi/m)f = f, \Gamma_\tau f = f \},$$

e satisfazem $(Q_{2m+1}^0, Kf_0^2) \neq 0$.

Segue pelo Teorema 6.5 que o coeficiente $\rho(N, f)$ é genericamente não nulo na classe $H_{2m}^0 \times OH_m^0$. Assim para a "maioria" dos pares (g, f) satisfazendo as condições (d) e (b) respectivamente, as únicas soluções da equação (2) (com $\varepsilon=0$ e $\mu \neq 0$) são π/m -harmônicas-ímpares ou subharmônicas bifurcadas com fases

$\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$, e com as propriedades de simetria:
 $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é par se $\phi_j = j\pi/2m$ com j par e $0 \leq j < 2m-1$;
 $\Gamma(\pi/2 - \phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é ímpar se $\phi_j = j\pi/2m$ com j ímpar e
 $1 \leq j \leq 2m-1$.

No caso m ímpar, mostra-se de maneira similar que para a "maioria" dos pares (g, f) satisfazendo as condições (d) e (b) respectivamente, as únicas soluções possíveis de (2) com $\lambda = (p, \mu, 0)$ próximo da origem e $\mu \neq 0$, são π/m -harmônicas -ímpares ou subharmônicas bifurcadas com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e com a propriedade de simetria:

$$\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot) \text{ é par, } j=0, \dots, m-1.$$

EXEMPLO 3SISTEMAS NÃO LINEARES COM D_m -EQUIVARIANÇA

Seja $m \geq 2$ um inteiro fixado.

Analisaremos a existência e bifurcação de soluções periódicas para sistemas do tipo:

$$(3) \quad \dot{W} = A_0 W + [p + \varepsilon H(t)]AW + g(W) + h(W, t, p, \varepsilon) + \mu F(t),$$

onde:

(a) $W = \text{col}(W_1, \dots, W_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, p, μ e ε são pequenos parâmetros;

$$(b) \quad A_0 = \text{diag}(A_1^0, \dots, A_n^0), \quad A_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^0 = \begin{pmatrix} 0 & w_k \\ -w_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \quad k=2, \dots, n;$$

(c) $H: \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^{2n})$ é contínua, par e $2\pi/m$ -periódica;

(d) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é contínua e $2\pi/m$ -periódica;

$$(e) \quad A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n), \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r} \\ \bar{r}+2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$k=1, \dots, n;$$

(f) $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é ímpar, classe C^{m+3} em $\mathbb{R}^{2n}$ com $g'(0) = 0$ e $g^{(\hat{m})}(0) = 0$;

(g) $h: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é ímpar em W , classe C^{m+3} em $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^3$, par e $2\pi/m$ -periódica em t , $h(W, t, p, \varepsilon) = o(|pW| + |\varepsilon W|)$ para $(W, p, \varepsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$;

(h) para $S = \text{diag}(S_1, \dots, S_n)$ onde $S_k = \text{diag}(1, -1)$,

$$\begin{aligned}
k=1, \dots, n, \text{ tem-se : } -Sg(W) &= g(SW), \\
SH(-t) &= H(t)S, \quad -SF(-t) = F(t), \\
-Sh(W, -t, p, \epsilon) &= h(SW, t, p, \epsilon).
\end{aligned}$$

Sejam:

$$Z = \{W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \mid W \text{ é contínua e } 2\pi/m \text{-periódica}\},$$

$$X = \{W \in Z \mid \dot{W} \in Z\},$$

com as topologias C^0 e C^1 respectivamente;

$$LW(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} W(\cdot) - A_0 W(\cdot) : X \rightarrow Z \quad e$$

$$\begin{aligned}
N(W, p, \epsilon)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} [p + \epsilon B]AW(\cdot) + Q_3(W(\cdot)^3) + \\
+ R(W, p, \epsilon)(\cdot),
\end{aligned}$$

definido em $B \times \Omega$ a valores em Z , onde $B = B(0, r) \subset X$, Ω é uma vizinhança aberta da origem no $\mathbb{R}^2$, $Q_3 = 1/3! g^{(3)}(0)$, $B \in L(X, Z)$ é definida por $BW(\cdot) = H(\cdot)W(\cdot)$ e,

$$R(W, p, \epsilon)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} g(W(\cdot)) - Q_3(W(\cdot)^3) + h(W(\cdot), p, \epsilon).$$

Com estas definições podemos escrever o sistema (3) na forma:

$$LW = N(W, p, \epsilon) + \mu F,$$

onde $L: X \rightarrow Z$ é um operador linear, contínuo, com $\text{Ker} L = [u_1, u_2]$, $u_1(t) = \text{col}(\cos t, -\sin t, \dots, 0)$, $u_2(t) = \text{col}(\sin t, \cos t, \dots, 0)$, $R(L)$ é fechado em Z e $R(L) \oplus \text{Ker} L = Z$.

A aplicação $\Gamma: O(2) \rightarrow L(Z)$ definida por: $\Gamma(\phi)W(\cdot) = W(\cdot - \phi)$, $\Gamma_t W(\cdot) = SW(-\cdot)$ define uma representação de $O(2)$ em

em Z , satisfazendo (H_2) . Os operadores L, N , a função f e a projeção $P \in L(Z)$, definida por:

$$(Pf)(\cdot) = 1/2\pi \sum_{j=1}^2 \int_0^{2\pi} (f(s) \cdot u_j(s)) ds \quad u_j(\cdot),$$

onde $(\cdot)$ indica o produto escalar de R^{2n} , satisfazem as relações da hipótese (H_3) com $s=1$.

Neste exemplo os coeficientes $\alpha_1(\phi_j)$, $j=0,1$, são independentes de ϕ_j e tem valor comum

$$\alpha_1 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} (Q_3(u_1^3(s)) \cdot u_2(s)) ds.$$

Se $\alpha_1 \neq 0$, do Capítulo III segue que o sistema (3), com $\lambda=(p,\mu,\varepsilon)$ numa pequena vizinhança da origem, possui soluções harmônicas e 2π -periódicas (subharmônicas) com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$.

As equações das superfícies de bifurcação são definidas por:

$$p = -\gamma_1(\phi_j)\varepsilon - \lambda_1(\phi_j)\mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|),$$

$\phi_j = j\pi/2$, $j=0,1$, no caso $m=2$,

$$p = -\gamma_1\varepsilon - \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_1} - \lambda_1\right)\mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|) \quad \text{no caso}$$

$m \geq 3$, onde:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\phi_j) = & 1/2\pi \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^1 (-1)^j (H(s)Au_{j+1}(s) \cdot u_{2-j}(s)) ds \\ & + \frac{\cos 2\phi_j}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^1 (H(s)Au_{j+1}(s) \cdot u_{2-j}(s)) ds, \end{aligned}$$

$$\lambda_1(\phi_j) = 3/4\pi \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^1 (-1)^j (Q_3(u_{1+j}(s), Kf^2(s)) \cdot u_{2-j}(s)) ds + \\ + \frac{3\cos 2\phi_j}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^1 (Q_3(u_{1+j}(s), Kf^2(s)) \cdot u_{2-j}(s)) ds,$$

$$\gamma_1 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} (H(s)Au_1(s) \cdot u_2(s)) ds,$$

$$\lambda_1 = 3/2\pi \int_0^{2\pi} (Q_3(u_1(s), Kf^2(s)) \cdot u_2(s)) ds,$$

$$\alpha_1 = 1/2\pi \int_0^2 (Q_3(u_1^3(s)) \cdot u_2(s)) ds,$$

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 3, \\ 3/2\pi \int_0^{2\pi} (Q_3(u_1^2(s), Kf(s)) \cdot u_2(s)) ds. \end{cases}$$

Para o caso particular bidimensional, onde

$$F(t) = \text{col}((1-m)\text{sen}mt, 1+(1-m)\text{cos}mt),$$

$$H(t) = \text{diag}(1+\text{cos}mt, 1+\text{cos}mt),$$

$$g(x,y) = \text{col}(x^2y^3 + y^{\hat{m}}, xy^2 + x^{\hat{m}}),$$

$$h(x,y,t,p,\varepsilon) = [p + \varepsilon \text{cos}mt] \text{col}(x^2y, xy^2) \quad e$$

$$S = \text{diag}(1, -1), \text{ temos:}$$

$$\gamma_1(\phi_j) = 1 + \frac{\bar{r}+1}{2} \cos 2\phi_j,$$

$$\lambda_1(\phi_j) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\phi_j,$$

$$\gamma_1=1, \quad \lambda_1=\frac{1}{4}, \quad \alpha_1=\alpha_1(\phi_j)=\frac{1}{8}, \quad \phi_j=j\pi/m, \quad j=0,1$$

e $\eta=0$ se $m \neq 3$, $\eta=\frac{1}{8}$ se $m=3$.

Neste caso as superfícies de bifurcação são dadas por:

$$p = -\left(\frac{\bar{r}+3}{2}\right)\epsilon - \frac{3}{4}\mu^2 + o(\mu^2+|\epsilon|) \quad e$$

$$p = \left(\frac{\bar{r}-1}{2}\right)\epsilon + \frac{1}{4}\mu^2 + o(\mu^2+|\epsilon|)$$

no caso $m=2$;

$$p = -\epsilon - \frac{1}{4}\mu^2 + o(\mu^2+|\epsilon|)$$

no caso $m>3$;

$$p = -\epsilon + 7/32 \mu^2 + o(\mu^2+|\epsilon|)$$

no caso $m=3$.

Se $\epsilon=0$ e $h(W,t,p,0)$ é independente de t , o sistema (3) apresenta não linearidade $O(2)$ -equivariante e força externa D_m -invariante com $s=1$. Segue do Capítulo V que a parte principal do coeficiente $\rho(N,f)$, definido a partir de (5.2) é dada por:

$$\delta(Q_{m+1}, Kf^2) = -\frac{m(m+1)}{2^{m+1}\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} \tilde{Q}_{m+1}(\xi(s)^{m-1}, Kf(s))^2 \cdot u_2(s)) ds + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} (\operatorname{Im} \tilde{Q}_{m+1}(\xi(s)^{m-1}, Kf(s))^2 \cdot u_1(s)) ds \right\}$$

no caso m par,

$$v(Q_m, Kf) = -\frac{m}{2^m \pi} \left[\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} \tilde{Q}_m^{m-1}(\xi(s), Kf(s)) \cdot u_2(s)) ds + \right. \\ \left. + \int_0^2 (\operatorname{Im} \tilde{Q}_m^{m-1}(\xi(s), Kf(s)) \cdot u_1(s)) ds \right]$$

onde $Q_k = 1/k! g^{(k)}(0) \in L^k(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$, $k=m+1, m$, $\tilde{Q}_k$ é a extensão de Q_k a $L^k(\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{2n})$ e $\xi(s) = u_1(s) + iu_2(s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

Para o caso bidimensional considerado temos:

$$\delta(Q_{m+1}, K^2 f) = -\frac{m(m+1)}{2^m} \quad \text{se } m \text{ é par,}$$

$$v(Q_m, Kf) = -\frac{m}{2^m} (-1)^{m+1/2} \quad \text{se } m \text{ é ímpar.}$$

Observamos finalmente que o polinômio homogêneo $Q_m^0 : X \rightarrow Z$ e a função $F_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definidos por :

$$Q_m^0(\hat{W}(\cdot)) = \operatorname{col}(\hat{W}_2^m(\cdot), \hat{W}_1^m(\cdot), 0, \dots, 0),$$

$$F_0(t) = \operatorname{col}((1-m)\operatorname{sen} mt, 1+(1-m)\operatorname{cos} mt, 0, \dots, 0)$$

estão respectivamente nos espaços:

$$H_m^1 = \{ \tilde{N} \in BC^{m+3}(B, Z) \mid \tilde{N} \text{ é ímpar, } \tilde{N}_x(0) = 0, \\ \Gamma(\phi)\tilde{N}(x) = \tilde{N}(\Gamma(\phi)x), -\Gamma_\tau \tilde{N}(x) = \tilde{N}(\Gamma_\tau x), \\ \forall \phi \in \mathbb{R}, \forall W \in B \},$$

$$D_m^1 = \{ f \in Z \mid f \text{ é invariante pelos operadores } \\ \Gamma(2\pi/m) \text{ e } -\Gamma_\tau \},$$

e satisfazem:

$$\delta(Q_{m+1}^0, KF_0^2) = -\frac{m(m+1)}{2^m} \neq 0 \quad \text{no caso } m \text{ par,}$$

$$v(Q_m^0, KF_0^2) = -\frac{m}{2^m}(-1)^{m+1/2} \quad \text{no caso } m \text{ ímpar.}$$

Segue que o coeficiente $\rho(N, F)$ é genericamente não nulo na classe $H_m^1 \times \mathcal{D}_m^1$. Assim, para a "maioria" dos pares (g, F) satisfazendo as condições (f) e (d) respectivamente, as únicas soluções do sistema (3), com $\lambda = (p, \mu, 0)$ próximo da origem e com $\mu \neq 0$, são harmônicas ou bifurcadas subharmônicas, com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e com a propriedade de simetria: $\Gamma(-\phi_j) \times(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é Γ_τ -invariante.

Escrevendo

$$x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot) = \text{col}(x_1(r, \phi_j, \lambda)(\cdot), x_2(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)) ,$$

isto significa que $x_1(r, \phi_j, \lambda)(\cdot - \phi_j)$ é par e $x_2(r, \phi_j, \lambda)(\cdot - \phi_j)$ é ímpar na variável $(\cdot)$, $j=0, \dots, m-1$.

EXEMPLO 4SISTEMAS NÃO LINEARES COM OH_m -EQUIVARIANÇA

Seja $m \geq 2$ um inteiro fixado.

Neste exemplo analisaremos a existência e bifurcação de soluções periódicas e π/m -harmônicas-ímpares de sistemas do tipo:

$$(4) \quad \dot{W} = A_0 W + [p + \epsilon H(t)] AW + g(W) + h(W, t, p, \epsilon) + \mu F(t),$$

onde:

(a) $W = \text{col}(W_1, \dots, W_{2n})$, p, μ, ϵ , são pequenos parâmetros reais; A_0, A e $S \in L(\mathbb{R}^{2n})$ são como no exemplo anterior;

(b) $H: \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^{2n})$ é contínua, par e π/m -periódica;

(c) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é contínua e π/m -harmônica-ímpar;

(d) $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é ímpar, classe C^{2m+3} com $g'(0) = 0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(2m+1)}(0) \neq 0$ se m é par; classe C^{m+3} com $g'(0) = 0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(m)}(0) \neq 0$ se m é ímpar;

(e) $h: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $(W, t, p, \epsilon) \mapsto h(W, t, p, \epsilon)$, ímpar em W , classe C^{2m+3} em $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^3$, par e π/m -periódica em t , $h(W, t, p, \epsilon) = o(|pW| + |\epsilon W|)$ para $(W, p, \epsilon) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Definindo-se os espaços Z e X , os operadores L e N , a projeção P e a representação Γ de $O(2)$ em Z como no exemplo anterior, verifica-se que as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_5) do Capítulo IV estão satisfeitas. Segue que para $\lambda = (p, \mu, \epsilon)$ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^3$, a equação (4) possui solu-

ções π/m -harmônicas-ímpares e 2π -periódicas (subharmônicas).

As equações das superfícies de bifurcação são definidas por:

$$p = -\gamma_1 \varepsilon + \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_1} - \lambda_1 \right) \mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|),$$

onde γ_1 , λ_1 , α_1 e η são definidos como no exemplo anterior.

Para o caso particular bidimensional onde,

$$F(t) = \text{col}((1-m)\text{sen}mt, (1-m)\text{cos}mt),$$

$$g(x,y) = \text{col}(x^2 y^3 + y^{\hat{m}}, x y^2 + x^{\hat{m}}),$$

$$h(x,y,t,p,\varepsilon) = [p + \varepsilon \text{cos}mt] \text{col}(x^2 y, x y^2) \quad e$$

$$S = \text{diag}(1, -1) \text{ temos:}$$

$$\gamma_1=1, \quad \alpha_1=1/8, \quad \lambda_1=1/4 \quad e \quad \eta=1/8.$$

Neste caso, as superfícies de bifurcação são definidas por:

$$p = -\varepsilon - \frac{1}{4} \mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|) \quad \text{para } m \neq 3,$$

$$p = -\varepsilon + 7/32 \mu^2 + o(\mu^2 + |\varepsilon|) \quad \text{para } m=3.$$

Para $\varepsilon=0$ e $h(W,t,p,\varepsilon)$ independente de t , o sistema resultante tem não linearidade $O(2)$ -equivariante e força externa OH_m -invariante. Segue do Capítulo IV que a parte principal do coeficiente $\rho(N,f)$ definido a partir de (6.1), e dado por:

$$\delta(Q_{2m+1}, Kf^2) = - \frac{m(2m+1)}{2^{2m-1} \pi} \left[\int_0^{2\pi} (\text{Re} \bar{Q}_{2m+1}(\xi(s), Kf(s)) \cdot u_1(s)) ds + \right.$$

$$+ \left[\int_0^{2\pi} (\operatorname{Im} \tilde{Q}_{2m+1}^{m-1}(\xi(s), Kf(s)) \cdot u_1(s)) ds \right],$$

no caso m par;

$$v(Q_m, Kf) = - \frac{m}{2^{m-1}\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} \tilde{Q}_m^{m-1}(\xi(s), Kf(s)) \cdot u_1(s)) ds + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} (\operatorname{Im} \tilde{Q}_m^{m-1}(\xi(s), Kf(s)) \cdot u_2(s)) ds \right],$$

no caso m ímpar, onde $Q_k = 1/k! \cdot g^{(k)}(0)$, $k=2m+1, m$; $\tilde{Q}_k$ é a extensão de Q_k a $L^k(\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{2n})$ e $\xi(s) = u_1(s) + iu_2(s) \forall s \in \mathbb{R}$.

Para o caso particular bidimensional acima considera-se o temos:

$$\delta(Q_{2m+1}, Kf^2) = - \frac{m(2m+1)}{2^{2m-1}} \quad \text{se } m \text{ é par},$$

$$v(Q_m, Kf) = - \frac{m}{2^{m+1}} (-1)^{m+1/2} \quad \text{se } m \text{ é ímpar}.$$

Observamos que se m é par o polinômio homogêneo Q_{2m+1}^0 : $X \rightarrow \mathbb{Z}$ e a função $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definidos por:

$$Q_{2m+1}^0(W(\cdot)) = \operatorname{col}(W_2^{2m+1}(\cdot), W_1^{2m+1}(\cdot), 0, \dots, 0),$$

$$F_0(t) = \operatorname{col}((1-m)\operatorname{sen} mt, (1-m)\operatorname{cos} mt, 0, \dots, 0),$$

estão respectivamente nos espaços:

$$H_{2m}^1 = \{\tilde{N} \in BC^{2m+3}(B, \mathbb{Z}) \mid \tilde{N} \text{ é ímpar}, \tilde{N}_x(0) = 0, \\ \Gamma(\phi) \tilde{N}(W) = \tilde{N}(\Gamma(\phi)W), -\Gamma_\tau \tilde{N}(W) = \tilde{N}(\Gamma_\tau W), \\ \forall \phi \in \mathbb{R}, \forall W \in B\},$$

$$OH_m^1 = \{f \in Z \mid f \text{ é invariante por } -\Gamma(\pi/m) \text{ e } -\Gamma_\tau\},$$

além disso satisfazem:

$$\delta(Q_{2m+1}^0, Kf_0^2) = -\frac{m(2m+1)}{2^{2m-1}} \neq 0.$$

Segue pelo Teorema 6.5 que o coeficiente $\rho(N, f)$ é genericamente não nulo na classe $H_{2m}^1 \times OH_m^1$. Assim, para a "maioria" dos pares (g, F) satisfazendo as condições (d) e (c) respectivamente, as únicas soluções do sistema (4), com $\lambda = (p, \mu, 0)$ próximo da origem e com $\mu \neq 0$, são π/m -harmônicas-ímpares ou bifurcadas subharmônicas com fases especiais $\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$, com as propriedades de simetria: $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é Γ_τ -invariante para todo j par, $0 \leq j < 2m-1$; $\Gamma(\pi/2 - \phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)$ é $(-\Gamma_\tau)$ -invariante para todo j ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$.

Escrevendo

$x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot) = \text{col} (x_1(r, \phi_j, \lambda)(\cdot), x_2(r, \phi_j, \lambda)(\cdot))$, isto significa que $x_1(r, \phi_j, \lambda)(\cdot - \pi/2 + \phi_j)$ é ímpar e $x_2(r, \phi_j, \lambda)(\cdot - \pi/2 + \phi_j)$ é par para todo j ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$.

No caso m ímpar prova-se de maneira similar que para a "maioria" dos pares (g, F) satisfazendo as condições (d) e (c), as únicas soluções do sistema (4), com $\lambda = (p, \mu, 0)$ próximo da origem e $\mu \neq 0$, são π/m -harmônicas-ímpares ou bifurcadas subharmônicas com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e com a propriedade de simetria: $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é par, $j=0, \dots, m-1$.

OBSERVAÇÃO 7.1

Os exemplos 3 e 4 podem ser generalizados dando-se inclusive mais liberdade à matriz S , adaptando-se as idéias de Vanderbauwhede [18] ao nosso caso.

EXEMPLO 5

PROBLEMA DE FRONTEIRA ELÍTICO COM NÃO LINEARIDADE
 $O(2)$ -EQUIVARIANTE E FORÇA EXTERNA D_m -INVARIANTE

Seja $m \geq 2$ um inteiro fixado.

Analísaremos a existência e bifurcação de soluções clássicas para o problema a valores de contorno no disco $B = \{w \in \mathbb{R}^2 : |w| < 1\}$ definido por:

$$(5) \quad \begin{aligned} (\Delta + \lambda)u &= pu + g(u) + h(u, p) + \mu f(w), & w \in B, \\ u(w) &= 0, & w \in \partial B, \end{aligned}$$

onde:

- (a) p e μ são pequenos parâmetros reais;
- (b) $f: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é α -holderiana com $\alpha \in (0, 1)$,
 $f(R_{2\pi/m} w) = f(w)$, $f(Sw) = f(w)$,
 onde $S = \text{diag}(-1, 1) \in L(\mathbb{R}^2)$;
- (c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, p) \mapsto h(u, p)$ é ímpar em u , classe C^{m+3} em $\mathbb{R}^2$, $h(u, p) = o(|pu|)$ para $(u, p) \rightarrow (0, 0)$;
- (d) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, classe C^{m+3} com $g'(0) = 0$,
 $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(\hat{m})}(0) \neq 0$;

(e) $\lambda = (\xi_{1,1})^2$, onde $\xi_{1,1}$ é a primeira raiz positiva da função de Bessel $J_1(\xi)$.

Os resultados básicos mencionados abaixo podem ser encontrados em [2], [7], [12] e [14].

Indicaremos por $C^{k+\alpha}(\bar{B})$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1) \subset \mathbb{R}$, o espaço das funções $u: B \rightarrow \mathbb{R}$, tais que, $D^p u(\cdot)$ estende-se com continuidade a $\bar{B}$, para todo $p \in \mathbb{N}^2$ com $|p| = k$.

Vamos considerar em $C^{k+\alpha}(\bar{B})$ a norma:

$$\|u\|_{k+\alpha} = \|u\|_k + \sup_{|p|=k} [D^p u]_\alpha$$

onde $\|u\|_k = \sum_{j=0}^k \max_{\xi \in \bar{B}} \{ \sup_{|p|=j} |D^p u(\cdot)| \}$ e

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{\xi \neq v \\ \xi, v \in \bar{B}}} \frac{|u(\xi) - u(v)|}{|\xi - v|^\alpha}$$

Definimos: $Z = C^\alpha(\bar{B})$,

$$X = \{u \in C^{2+\alpha}(\bar{B}) \mid u(w) = 0 \text{ em } \partial B\} = C_0^{2+\alpha}(\bar{B}),$$

com a norma $\|u\|_{k+\alpha}$, $k=0,2$ respectivamente;

$$(Lu)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta + \lambda)u(\cdot) : X \rightarrow Z,$$

$$N(u,p)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} pu(\cdot) + \alpha_3 u(\cdot)^3 + R(u,p)(\cdot) : B \times \Omega \rightarrow Z,$$

onde $\alpha_3 = 1/3! g^{(3)}(0)$, $B = B(0,r) \subset X$, Ω é uma vizinhança aberta

ta da origem em R e

$$R(u,p)(\cdot) = g(u(\cdot)) - \alpha_3 u(\cdot)^3 + h(u(\cdot), p) .$$

Com as definições acima o problema escreve-se na forma:

$$Lu = N(u,p) + \mu f,$$

onde $L: X \rightarrow Z$ é um operador linear, contínuo, com $\text{Ker} L = [u_1, u_2]$. Em coordenadas polares $u_1(r, \theta) = J_1(\sqrt{\lambda}r) \cos \theta$, $u_2(r, \theta) = J_1(\sqrt{\lambda}r) \sin \theta$; $R(L)$ é fechado em Z e $R(L) \oplus \text{Ker} L = Z$.

A aplicação $\Gamma: O(2) \rightarrow L(Z)$ definida por $\Gamma(\phi)u(w) = u(R_\phi w)$, $\Gamma_\tau u(w) = u(Sw)$, $\forall \phi \in R$, $\forall w \in \bar{B}$, define uma representação de $O(2)$ em Z satisfazendo as relações da hipótese (H_2) .

Os operadores L e N , a função f e a projeção $P \in L(Z)$ definida por:

$$(Pf)(\cdot) = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^2 \int_{\bar{B}} f(w) u_j(w) dw \quad u_j(\cdot),$$

onde $\sigma = \pi \int_0^1 r J_1(\sqrt{\lambda}r)^2 dr$, satisfazem as relações da hipótese (H_6) com $s=0$.

Neste exemplo os coeficientes $\alpha_0(\phi_j)$, $j=0,1$, independem de ϕ_j e seu valor comum α_0 é não nulo. Decorre do Capítulo V que, para $\tilde{\lambda}=(p,\mu)$ numa pequena vizinhança da origem em R^2 , o problema (5) possui soluções em $C_0^{2+\alpha}(\bar{B})$, as quais são harmônicas ou bifurcadas subharmônicas, isto é, $\Gamma(2\pi/m)-$

invariantes ou $\Gamma(2\pi)$ -invariantes respectivamente. Em coordenadas polares, $u(w) = u(r, \theta)$, significa que estas soluções são respectivamente $2\pi/m$ -periódicas ou 2π -periódicas na variável θ .

As curvas de bifurcação são dadas pelas equações:

$$p = -\lambda_0(\phi_j)\mu^2 + o(\mu^2), \quad \phi_j = j\pi/2, \quad j=0,1, \quad \text{no}$$

caso $m=2$;

$$p = \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_0} - \lambda_0 \right) \mu^2 + o(\mu^2) \quad \text{no caso } m \geq 3,$$

onde:

$$\begin{aligned} \lambda_0(\phi_j) = & \frac{3\alpha_3}{2\sigma} \int_{\bar{B}} Kf(w)^2 J_1^2(w) dw + \\ & + \frac{3\alpha_3 \cos 2\phi_j}{2\sigma} \int_{\bar{B}} Kf(w)^2 J_1^2(\sqrt{\lambda}r) \cos 2\theta dw; \end{aligned}$$

$$\lambda_0 = \frac{3\alpha_3}{2\sigma} \int_{\bar{B}} K^2 f(w) J_1^2(w)^2 dw,$$

$$\alpha_0 = \frac{3\pi\alpha_3}{4\sigma} \int_0^1 r J_1^4(\sqrt{\lambda}r) dr;$$

$$\eta = \frac{3\alpha_3}{\sigma} \int_{\bar{B}} Kf(w) u_1(w)^3 dw.$$

A parte principal do coeficiente $\rho(N, f)$, definido a partir de (5.2), é dado por:

$$\delta(Q_{m+1}, Kf^2) = -\binom{m+1}{2} \frac{\alpha_{m+1}}{2^{m-1}\sigma} \int_{\bar{B}} Kf(w) J_1^m(\sqrt{\lambda}r) \cos m\theta \, dw,$$

no caso m par,

$$v(Q_m, Kf) = -\frac{m}{2^{m-1}\sigma} \int_{\bar{B}} Kf(w) J_1^m(\sqrt{\lambda}r) \cos m\theta \, dw,$$

no caso m ímpar, onde $Q_{\hat{m}} = 1/\hat{m}! \cdot g^{(\hat{m})}(0) = \alpha_{\hat{m}}$.

Para o caso particular em que

$$f(w) = f(r, \theta) = 4 + \lambda(r^2 - 1) + \tau_m(r, \theta)(v - \lambda),$$

onde $\tau_m(r, \theta) = J_m(\sqrt{v}r) \cos m\theta$, $v = (\xi_{m,1})^2$ onde $\xi_{m,1}$ é a primeira raiz positiva da função de Bessel $J_m(\xi)$, $h: R^2 \rightarrow R$ é definida por $h(x, y) = py^3$, temos:

$$\lambda_o = \frac{3\pi\alpha_3}{\sigma} \int_0^1 r J_1^2(\sqrt{\lambda}r) \left[(r^2 - 1)^2 + J_m^2(\sqrt{v}r)/2 \right] dr,$$

$$\lambda_o(\phi_j) = \frac{3\pi\alpha_3}{\sigma} \int_0^1 r J_1^2(\sqrt{\lambda}r) \left[(r^2 - 1)^2 + \frac{1}{2} J_2^2(\sqrt{\lambda}r) + (1 - r^2) \cos 2\phi_j J_2(\sqrt{v}r) \right] dr,$$

$$\alpha_o = \frac{3\pi\alpha_3}{4\sigma} \int_0^1 r J_1^4(\sqrt{v}r) dr,$$

$$\eta = \frac{3\pi\alpha_3}{\sigma} \int_0^1 r J_3(\sqrt{v}r) J_1^3(\sqrt{\lambda}r) dr,$$

$$\delta(Q_{m+1}, Kf^2) = \frac{m(m+1)}{2^{m-1}\sigma} \alpha_{m+1} \int_0^1 r(r^2 - 1) J_m(\sqrt{v}r) J_1^m(\sqrt{\lambda}r) dr,$$

no caso m par,

$$v(Q_m, Kf) = - \frac{m(m+1)}{2^{m-1}\sigma} \alpha_m \int_0^1 r J_m(\sqrt{\nu}r) J_1^m(\sqrt{\lambda}r) dr ,$$

no caso ímpar.

Finalmente, notemos que o polinômio homogêneo $Q_m^0: X \rightarrow Z$ e a função $f_0: \bar{B} \rightarrow R$, definidos por:

$$(Q_m^0(u))(w) = \alpha_m (u(w))^{\hat{m}} \quad e$$

$$f_0(w) = f_0(r, \theta) = 4 + \lambda(r^2 - 1) + \tau_m(r, \theta)(\nu - \lambda) ,$$

estão respectivamente nos espaços:

$$H_m^0 = \{ \tilde{N} \in BC^{m+3}(B, Z) \mid \tilde{N} \text{ é ímpar, } \tilde{N}_x(0) = 0, \Gamma(\phi)\tilde{N}(u) = \tilde{N}(\Gamma(\phi)u), \Gamma_\tau \tilde{N}(u) = \tilde{N}(\Gamma_\tau u), \forall \phi \in R, \forall u \in B \}$$

$$D_m^0 = \{ f \in Z \mid \Gamma(2\pi/m)f = f, \Gamma_\tau f = f \} .$$

Pelos cálculos anteriores temos que $\delta(Q_{m+1}^0, Kf_0^2)$ e $v(Q_m^0, Kf_0)$ são diferentes de zero, respectivamente nos casos m par e m ímpar. Portanto o coeficiente $\rho(N, f)$ é genericamente não nulo na classe $H_m^0 \times D_m^0$.

Assim, para a "maioria" dos pares (g, f) satisfazendo as condições (d) e (b) respectivamente, as únicas soluções do problema (5), com $\tilde{\lambda} = (p, \mu)$ próximo da origem e $\mu \neq 0$, são harmônicas ou bifurcadas subharmônicas, com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e com a propriedade de simetria:

$\Gamma(-\phi_j)u(r, \phi_j, \tilde{\lambda})(w)$ é Γ_τ -invariante, $j=0, \dots, m-1$.

Em coordenadas polares $w = (\bar{r}\cos\theta, \bar{r}\sin\theta)$, significa

que $u(r, \phi_j, \tilde{\lambda})(\bar{r} \cos(\theta - \phi_j), \bar{r} \sin(\theta - \phi_j))$ é par em θ , para $\phi_j = j\pi/m, j=0, \dots, m-1$.

EXEMPLO 6

PROBLEMA DE FRONTEIRA ELÍTICO COM NÃO LINEARIDADE
 $O(2)$ -EQUIVARIANTE E FORÇA EXTERNA OH_m -INVARIANTE

Seja $m \geq 2$ um inteiro fixado.

Consideremos o problema a valores de contorno no disco $B = \{w \in \mathbb{R}^2 : |w| < 1\}$;

$$(6) \quad \begin{aligned} (\Delta + \lambda)u &= pu + g(u) + h(u, p) + \mu f(w), & w \in B, \\ u(w) &= 0, & w \in \partial B, \end{aligned}$$

onde:

- (a) p e μ são pequenos parâmetros reais;
- (b) $f: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é α -holderiana com $\alpha \in (0, 1)$,
 $f(R_{\pi/m} w) = -f(w)$, $f(Sw) = f(w)$, onde $S = \text{diag}(1, -1)$;
- (c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, de classe C^{m+3} com $g'(0) = 0$,
 $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(m+1)}(0) \neq 0$ se m é ímpar; de classe C^{2m+3} com $g'(0) = 0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(2m+1)}(0) \neq 0$ se m é par;
- (d) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, p) \rightarrow h(u, p)$ é ímpar em u , classe C^{2m+3} se m é par, classe C^{m+2} se m é ímpar, com
 $h(u, p) = o(|pu|)$ para $(u, p) \rightarrow (0, 0)$;

(e) $\lambda = (\xi_{1,1})^2$, onde $\xi_{1,1}$ é a primeira raiz positiva da função de Bessel $J_1(\xi)$.

Vamos analisar a existência e bifurcação de soluções clássicas para o problema (6).

Definindo-se os espaços Z e X , os operadores L e N , a projeção P e a representação Γ de $O(2)$ em Z como no exemplo anterior, temos que $\alpha_0 = \alpha_0(\phi_j) \neq 0$, $j=0,1$, e as hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_7) do Capítulo VI estão satisfeitas.

Segue que, para $\tilde{\lambda} = (p, \mu)$ numa pequena vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, o problema (6) possui soluções em $C_0^{2+\alpha}(\bar{B})$, as quais, em coordenadas polares, são π/m -harmônicas-ímpares, (isto é, satisfazem $u(\bar{r}, \theta - \frac{\pi}{m}) = -u(\bar{r}, \theta)$) ou são bifurcadas subharmônicas (isto é, satisfazem $u(\bar{r}, \theta + 2\pi) = u(\bar{r}, \theta)$).

As curvas de bifurcação são definidas por:

$$p = \left(\frac{\eta^2}{4\alpha_0} - \lambda_0 \right) \mu^2 + o(\mu^2),$$

onde α_0 , λ_0 e η são definidos como no exemplo anterior.

Para o caso particular em que

$$f(w) = f(r, \theta) = \tau_m(r, \theta)(v - \lambda) \quad \text{temos:}$$

$$\lambda_0 = \frac{3\pi}{\sigma} \alpha_3 \int_0^1 r J_m^2(\sqrt{v}r) J_1(\sqrt{\lambda}r) dr,$$

$$\alpha_0 = \frac{3\pi}{4\sigma} \alpha_3 \int_0^1 r J_1(\sqrt{\lambda}r) dr,$$

$$\eta = \frac{-3\pi}{4\sigma} \int_0^1 r J_3(\sqrt{\nu}r) J_1(\sqrt{\lambda}r) dr .$$

A parte principal do coeficiente $\rho(N, f)$, definido a partir de (6.1), é dada por:

$$\delta(Q_{2m+1}, Kf^2) = \frac{m(2m+1)\pi}{2^{2m+1}\sigma} \alpha_{2m+1} \int_0^1 r J_m^2(\sqrt{\nu}r) J_1^m(\sqrt{\lambda}r) dr ,$$

no caso m par;

$$\nu(Q_m, Kf) = \frac{m\pi}{2^{m-1}\sigma} \alpha_m \int_0^1 r J_m(\sqrt{\nu}r) J_1^m(\sqrt{\lambda}r) dr ,$$

no caso m ímpar, onde $Q_k = 1/k! g^{(k)}(0) = \alpha_k$, $k=2m+1$, m .

Observamos que se m é par, o polinômio homogêneo $Q_{2m+1}^0 : X \rightarrow Z$ e a função $f_0 : B \rightarrow R$ definidos por:

$$(Q_{2m+1}^0(u))(w) = \alpha_{2m+1} (u(w))^{2m+1} ,$$

$$f_0(w) = f_0(r, \theta) = J_m(\sqrt{\nu}r) \cos m\theta (\nu - \lambda) ,$$

estão respectivamente nos espaços H_{2m}^0 e OH_m^0 e satisfazem:

$$\delta(Q_{2m+1}^0, Kf_0^2) \neq 0 \text{ no caso } m \text{ par,}$$

$$\nu(Q_m^0, Kf_0) \neq 0 \text{ no caso } m \text{ ímpar.}$$

Segue do Teorema 6.5 que o coeficiente $\rho(N, f)$ é genericamente não nulo. Assim, se m é par, para a "maioria"

dos pares (g, f) satisfazendo as condições (c) e (b) respectivamente, as únicas soluções do problema (6) em $C_0^{2+\alpha}(\bar{B})$ com $\tilde{\lambda}=(p, \mu)$ próximo da origem e $\mu \neq 0$, são π/m -harmônicas-ímpares ou bifurcadas subharmônicas, com fases especiais $\phi_j = j\pi/2m$ $j=0, \dots, 2m-1$, e as propriedades de simetria:

$u(r, \phi_j, \tilde{\lambda})(\bar{r}, \theta - \phi_j)$ é par em θ , para j par com $0 \leq j < 2m-1$;
 $r(r, \phi_j, \tilde{\lambda})(\bar{r}, \theta - \frac{\pi}{2} + \phi_j)$ é ímpar em θ , para todo j ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$.

No caso m ímpar, pode se mostrar de modo similar que para a "maioria" dos pares (g, f) satisfazendo as condições (c) e (b) respectivamente, as únicas soluções do problema (6) em $C_0^{2+\alpha}(\bar{B})$, com $\tilde{\lambda}=(p, \mu)$ próximo da origem e $\mu \neq 0$, são π/m -harmônicas-ímpares ou bifurcadas subharmônicas com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, e com as propriedades de simetria: $u(r, \phi_j, \tilde{\lambda})(\bar{r}, \theta - \phi_j)$ é par em θ para $j=0, \dots, m-1$.

OBSERVAÇÃO 7.2

De modo análogo aos exemplos anteriores, poderíamos também considerar o caso em que a não linearidade depende de θ e a força externa é D_m -invariante ou OH_m -invariante.

COMENTÁRIOS FINAIS

I) Observamos que as hipóteses (i)-(iii) de (H_4) a (H_7) exigem uma certa compatibilidade entre as simetrias de reflexão de f e dos elementos u_1, u_2 de $\text{Ker} L$.

A condição $(-1)^s \Gamma_\tau f = f$ para algum $s \in \{0,1\}$, significa que f deve ter a simetria de reflexão de u_{s+1} , para o s fixado. Observamos também que os operadores L e N , devem satisfazer as relações $(-1)^s \Gamma_\tau (Lx) = L(\Gamma_\tau x)$ e $(-1)^s \Gamma_\tau N(x) = N(\Gamma_\tau x)$.

Uma situação diferente e interessante aparece em alguns casos onde a simetria de reflexão de f é a mesma de u_{2-s} e os operadores L e N tem simetrias invertidas em relação às anteriores, isto é, satisfazem: $\Gamma_\tau (Lx) = L((-1)^s \Gamma_\tau x)$ e $\Gamma_\tau N(x) = N((-1)^s \Gamma_\tau x)$. Mais precisamente, consideremos a equação:

$$Lx = N(x, p, \epsilon) + \mu f$$

satisfazendo as hipóteses (H_1) , (H_2) e a seguinte

$(\tilde{H}_4)$ Para $m \geq 2$ e $s \in \{0,1\}$ fixados:

- (1) $N: B \times \Omega \rightarrow Z$ é como em (i) de (H_4) ;
- (2) $\Gamma(2\pi/m)N(x, p, \epsilon) = N(\Gamma(2\pi/m)x, p, \epsilon)$,
 $\Gamma_\tau N(x, p, \epsilon) = N((-1)^s \Gamma_\tau x, p, \epsilon)$;
- (3) $\Gamma(2\pi/m)Lx = L(\Gamma(2\pi/m)x)$,
 $\Gamma_\tau Lx = L((-1)^s \Gamma_\tau x)$;
- (4) $(-1)^{s+1} \Gamma_\tau f = f$, $\Gamma(2\pi/m)f = f$;

(5) $A \in L(X, Z)$ e a projeção $P \in L(Z)$ são como em (v) de (H_4) .

Utilizando-se uma representação conveniente de $O(2)$ em Z adaptamos o caso acima às condições do Capítulo III. Para ilustrar consideremos o exemplo escalar:

$$\ddot{x} + x = px + g(x) + \mu f$$

onde f é $2\pi/m$ -periódica e ímpar, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, de classe C^{m+3} com $g'(0)=0$ e $g^{(\widehat{m})}(0) \neq 0$, para algum inteiro $m \geq 2$.

Definindo-se

$$Z = \{z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid z(\cdot) \text{ é contínua e } 2\pi\text{-periódica}\},$$

$$X = \{z \in Z \mid \dot{z}, \ddot{z} \in Z\},$$

$$(Lx)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(\cdot) + x(\cdot) : X \rightarrow Z,$$

$$N(x, p)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} px(\cdot) + g(x(\cdot)) : B \times \Omega \rightarrow Z,$$

onde $B = B(0, r) \subset X$ e Ω é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}$, e a representação Γ de $O(2)$ em Z a partir de $\Gamma(\phi)z(\cdot) = z(\cdot - \phi)$ e $\Gamma_\tau z(\cdot) = z(-\cdot)$, temos que as hipóteses (H_1) , (H_2) e $(\widetilde{H}_4)$ estão satisfeitas.

Segue do Capítulo III os seguintes resultados:

- (a) existe um conjunto de soluções especiais 2π -periódicas (subharmônicas) com fases especiais $\phi_j = j\pi/m$, $j=0, \dots, m-1$, as quais bifurcam a partir de soluções ímpares com período mínimo $2\pi/m$ (harmônicas);

- (b) as soluções subharmônicas especiais tem a propriedade de simetria: $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é ímpar, $j=0, \dots, m-1$;
- (c) existe uma constante $\rho=\rho(N, f)=\rho(g, f)$, tal que, se $\rho \neq 0$ então as únicas soluções da equação (1), com $\lambda=(p, \mu)$ numa vizinhança da origem e $\mu \neq 0$, são as soluções harmônicas e as subharmônicas especiais citadas acima;
- (d) para a maioria dos pares (g, f) satisfazendo as condições acima tem-se $\rho(g, f) \neq 0$, isto é, a condição $\rho(N, f) \neq 0$ é genérica no espaço $H_m^0 \times D_m^0$.

II) Suponhamos agora que a equação

$$Lx = N(x, p, \epsilon) + \mu f$$

satisfaça as hipóteses (H_1) , (H_2) e a seguinte:

$(\tilde{H}_5)$ Para $m \geq 2$ inteiro e $s \in \{0, 1\}$ fixados:

1) $N: B \times \Omega \rightarrow Z$ é como em (i) de (H_4) ;

2) $\Gamma(\pi/m)N(x, p, \epsilon) = N(\Gamma(\pi/m)x, p, \epsilon)$,

$\Gamma_\tau N(x, p, \epsilon) = N((-1)^s \Gamma_\tau x, p, \epsilon)$;

3) $\Gamma(\pi/m)Lx = L(\Gamma(\pi/m)x, p, \epsilon)$,

$$\Gamma_{\tau} Lx = L((-1)^s \Gamma_{\tau} x);$$

$$4) -\Gamma(\pi/m)f = f, \quad (-1)^{s+1} \Gamma_{\tau} f = f;$$

5) $A \in L(X, Z)$ e a projeção $P \in L(Z)$ são como em (v) de (H4).

Utilizando-se uma representação conveniente de $O(2)$ em Z , adaptamos o caso acima às condições do Capítulo IV.

O exemplo

$$(2) \quad \ddot{x} + x = px + g(x) + \mu f,$$

onde f é ímpar e π/m -harmônica-ímpar, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar, classe C^{2m+3} com $g'(0)=0$, $g^{(3)}(0) \neq 0$ e $g^{(2m+1)}(0) \neq 0$, para algum inteiro $m \geq 2$ par, ilustra este caso.

Seguem do Capítulo IV os seguintes resultados:

- (a) existe um conjunto de soluções especiais 2π -periódicas (subharmônicas) com fases especiais $\phi_j = j\pi/2m$, $j=0, \dots, 2m-1$, bifurcando a partir de soluções ímpares e π/m -harmônicas-ímpares;
- (b) as soluções especiais tem as propriedades de simetria: $\Gamma(-\phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é ímpar para todo j par com $0 \leq j < 2m-1$; $\Gamma(\pi/2 - \phi_j)x(r, \phi_j, \lambda)(\cdot)$ é par para todo j ímpar com $1 \leq j \leq 2m-1$;
- (c) existe uma constante $\rho = \rho(N, f) = \rho(g, f)$, tal que,

se $\rho \neq 0$ então as únicas soluções da equação (2) com $\lambda = (p, \mu)$ numa vizinhança da origem e $\mu \neq 0$, são as soluções π/m -harmônicas-ímpares e as subharmônicas especiais citadas acima;

- (d) para a maioria dos pares (g, f) satisfazendo as condições acima tem-se $\rho(g, f) \neq 0$, isto é, a condição $\rho(N, f) \neq 0$ é genérica no espaço $H_{2m}^0 \times OH_m^0$;

No caso m ímpar valem os resultados (a)-(d) do item I.

III) Uma continuação natural deste trabalho seria obter uma versão abstrata dos casos em que ocorre quebra de simetria, como em Hale-Rodrigues [10], onde aparece uma equação de Duffing amortecida e forçada.

IV) Outra alternativa é a análise de casos em dimensões infinita de equações da forma:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x, p, \varepsilon) + \mu f, \quad \text{onde}$$

$A(t)$ define um operador de evolução em um certo espaço de Banach e certas simetrias estão presentes.

V) Observamos que a exigência da condição $X \subset Z$ e a utilização de uma única projeção P , foram influenciadas pelos exemplos da aplicação. Com algumas adaptações técnicas

pode-se obter uma versão deste trabalho com projeções diferentes, a qual poderá ser utilizada na análise de casos em que X não é subespaço de Z .

VI) Finalmente, observamos que na prática, a determinação do coeficiente $\rho = \rho(N, f)$, exige o desenvolvimento de Taylor da função $G(r, \phi, \mu)$ em potências de r , μ , até o termo de ordem $m+1$ no caso m par e até o termo de ordem m no caso m ímpar. Se a série for truncada antes desta ordem, perde-se este dado, restando possivelmente apenas a informação de que $\rho(N, f)$ é genericamente não nulo..

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. N. Chow and J. K. Hale : Methods of Bifurcation Theory. Springer - Verlag, London Heidelberg - Berlin - Tokio, (1980).
- [2] R. Courant and D. Hilbert : Methods of Mathematical Physics. Vol I. Interscience, N. Y. , (1953).
- [3] M. Furkotter and H. M. Rodrigues : Periodic Solutions of Forced Nonlinear Second Order Equations : Symmetry and Bifurcations. SIAM J. Math Anal., 17 (1986), pp 1319-1331.
- [4] M. Furkotter and H. M. Rodrigues : On Harmonic and Subharmonic Solutions of Nonlinear Second Order Equations: Symmetry and Bifurcation. Apl. Anal., 37 (1990), pp 63-93.
- [5] M. Furkotter and H. M. Rodrigues : Symmetry and Bifurcation to 2π -Periodic Solutions of Nonlinear Second Order Equations with $2/m$ -Periodic Forcings. SIAM. J. Math. Anal., 22 (1991), pp 169-180.
- [6] M. Furkotter and H. M. Rodrigues : Sobre Bifurcação e Simetria de Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Não Lineares. Tese de Doutorado - ICMSC - USP - (1989)
- [7] C. S. Honig : Análise Funcional e Aplicações - Publicações do IME - USP - (1970).
- [8] M. Golubitsky, I. Stewart and Schaeffer : Singularities and Groups in Bifurcations Theory. Springer - Verlag, N. York - Berlin, (1988).

- [9] J. K. Hale and H. M. Rodrigues : Bifurcations in the Duffing Equations with Independent Parameters I. Proc. R. Soc. Edinburgh 77A (1977), pp 57-75.
- [10] J. K. Hale and H.M. Rodrigues : Bifurcation in the Duffing Equations with Independent Parameters II -Proc. Roy. Soc. 79(A) (1978),pp 317-326.
- [11] J. K. Hale : Ordinary Differential Equations. Krieger, New York, (1980).
- [12] H. M. Rodrigues and A. Vanderbauwhede : Symmetric Perturbations of Nonlinear Equations. Symmetry of Small Solutions. Nonlinear Anal, TMA, 2(1978), pp 27-46.
- [13] A. Vanderbauwhede : Bifurcation of Subharmonic Solutions in Time-Reversible Systems. J. of. Appl. Math. and Physics (ZAMP), Vol 37, July (1986).
- [14] A. Vanderbauwhede : Local Bifurcation and Symmetry . Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, (1982)