MÉTODOS DIRETOS PARA A ANÁLISE
DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS
E EQUAÇÕES A DIFERENÇAS FINITAS

Raimundo Rodrigues Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Vieira de Carvalho

Tese apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de São
Carlos, da Universidade de São
Paulo, para obtenção do Título
de Doutor em Ciências (Matemá-
tica).

Aos meus irmãos

Vera e Edson

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar minha gratidão ao amigo e orientador Prof. Dr. Luiz Antonio Vieira de Carvalho pela orientação segura e objetiva.

Agradeço também à Prof.^a Dr.^a P. S. Grôмова pela freqüente contribuição e incentivos desde os tempos em que me o rientou no Mestrado, na Universidade Amizade dos Povos, de Moscou.

Aos professores do I.C.M.S.C.-U.S.P. pelo apoio recebido.

À Lene pelo seu excelente trabalho de datilografia.

À aluna do Curso de Bacharelado em Matemática Silvia Maria Perez nos trabalhos de computação e elaboração do programa em anexo.

Este trabalho contou com o auxílio financeiro do CNPq - Bolsa de Doutorado, e com o auxílio parcial da FINEP.

INTRODUÇÃO

Este trabalho pode ser visto como sendo composto de duas partes, uma que trata da estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade do equilíbrio trivial das equações a diferenças finitas, nos sentidos de Lagrange e de Liapunov e, a outra que se dedica ao estudo da estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade da solução nula das equações diferenciais.

No Capítulo II, tratamos das equações a diferenças finitas onde, com a ajuda da métrica de Minkovsky foi desenvolvida uma técnica que nos dá critérios de avaliação do comportamento das soluções destas equações em alguma vizinhança da origem.

Utilizando esta técnica, funções vetoriais positivas definidas (diz-se às funções $v = (v_1, \dots, v_N)$, tais que $v_s(t, x) \geq 0$, $s = 1, \dots, k$, $k \leq N$ e $\sum_{s=1}^k v_s(t, x)$ é positiva definida) e a teoria das inequações a diferenças finitas do tipo de Tchapliguin, construímos sistemas de comparação, de estrutura mais simples que o original e que nos dá informações sobre o comportamento assintótico das soluções deste sistema inicial.

Para a equação do tipo $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$ foi elaborado um programa computacional para verificar as hipóteses dos teoremas (2.2) e (2.3), que se encontra em anexo.

No Capítulo III, consideramos as equações diferenciais funcionais no espaço de Hilbert $L_2[-\tau, 0) \times \Phi$. Valendo-nos da idéia de B. S. Razumikhin, da teoria das inequações diferenciais e das funções vetoriais de Liapunov, construímos sistemas

de comparação já no espaço $\mathbb{R}^n$, portanto simplificando, consideravelmente, o problema original.

Com a utilização deste método, podemos analisar sistemas do tipo misto de forma proveitosa. Isto é, sistemas que se apresentam como sendo ordinários em determinados intervalos de tempo, como equações diferenciais funcionais nos demais intervalos.

A B S T R A C T

The main objective of this work is to study the asymptotic behavior of the solutions of both functional differential equations and difference equations, through direct methods.

For the case of functional differential equations, we use Lyapunoff vector functions, in connection with Razumikhin's idea in order to construct appropriate comparison systems.

For the case of difference equations, we use the invariants of Minkowski's metric in order to develop a principle which gives useful criteria to determine various kinds of stability, including those of Lagrange and Lyapunoff. Besides this, the above technique is also used in the construction of comparison systems for these equations.

I N D I C E

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I	
§ 1. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	1
§ 2. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS	9
§ 3. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES A DIFERENÇAS FINITAS	13
CAPÍTULO II	
§ 1. EQUAÇÕES A DIFERENÇAS FINITAS. DEFINIÇÕES E EXEMPLOS	17
§ 2. ESTABILIDADE. DEFINIÇÕES	26
§ 3. ESTABILIDADE ASSINTÓTICA. DEFINIÇÕES	30
§ 4. INSTABILIDADE. DEFINIÇÃO	35
§ 5. PLANO E MÉTRICA DE MINKOVSKY. ESTABILIDADE, ESTABILIDADE ASSINTÓTICA E INSTABILIDADE DA EQUAÇÃO $x_n = ax_{n-1} + b_n x_{n-2}$	39
§ 6. MÉTODO DA COMPARAÇÃO. FUNÇÃO VETORIAL DE LIAPUNOV. DEFINIÇÕES	49
§ 7. INVARIÂNCIA	59

CAPÍTULO III

§ 1. FUNÇÕES VETORIAIS DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS	63
§ 2. INSTABILIDADE. DEFINIÇÃO	77
 BIBLIOGRAFIA	 81
 ANEXO I	 85

CAPÍTULO I

§ 1. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Consideramos, inicialmente, o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{y}(t) = Y(t, y(t)) \quad (1.1)$$

onde a função Y das variáveis $y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições do teorema de existência, unicidade e dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais.

Um dos capítulos mais importantes da teoria qualitativa das equações diferenciais é, sem dúvida, a teoria da estabilidade. Isto se deve ao fato de, quase sempre, não nos ser possível a obtenção da solução geral do sistema em estudo. Desta forma, devemos, apenas com o conhecimento do segundo membro da equação, saber o comportamento assintótico das soluções, isto é, o seu comportamento quando $t \rightarrow +\infty$.

Como as soluções dependem continuamente das condições iniciais e estas são medidas físicas, portanto, passíveis de erros, devemos saber se todas as soluções oriundas de condições iniciais correspondentes a pequenos erros de medição, são próximas, ou não, em algum sentido, da solução que corresponde à condição inicial ideal x_0 .

Este é um problema muito antigo e apareceu, primeiramente

te, na mecânica. No entanto, somente em 1892, com a publicação da Tese de Doutorado de A. M. Liapunov, ficou definido, com rigor, este problema e, apenas após a Primeira Guerra Mundial, devido ao aparecimento e desenvolvimento da indústria aeronáutica, esta teoria ocupou um lugar de destaque no mundo científico.

Seja $\psi(t)$ uma solução do sistema de equações diferenciais (1.1).

Definição 1.1

A solução $\psi(t)$, $t \in [a, +\infty)$ do sistema (1.1) é estável, segundo Liapunov, se para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $t_0 \in [a, +\infty)$, existir um $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tal que se $||y(t_0) - \psi(t_0)|| < \delta$, então $||y(t, y(t_0)) - \psi(t, \psi(t_0))|| < \varepsilon$ para $t \in [t_0, +\infty)$.

Definição 1.2

A solução $\psi(t)$ de (1.1) é uniformemente estável, segundo Liapunov, se na Definição 1.1, o número δ puder ser encontrado independentemente de t_0 .

Definição 1.3

A solução $\psi(t)$ de (1.1) é assintoticamente estável, segundo Liapunov, se ela for estável no sentido da definição 1.1 e, para $||y(t_0) - \psi(t_0)|| < \delta_1 < \delta$, $\delta_1 > 0$, tivermos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ||y(t, y(t_0)) - \psi(t, \psi(t_0))|| = 0.$$

Definição 1.4

A solução $\psi(t)$ de (1.1) é instável, segundo Liapunov, se ela não for estável no sentido da definição 1.1.

Consideramos a solução particular do sistema (1.1),

$$y_1(t) = \psi_1(t), \dots, y_n = \psi_n(t)$$

que corresponde às condições iniciais,

$$t = t_0, y_1 = \psi_1(t_0), \dots, y_n = \psi_n(t_0).$$

Damos, agora, uma pequena perturbação, em módulo, a estas condições e representamos por $y(t)$ a solução correspondente.

Representamos por $x_j(t)$ a diferença $y_j(t) - \psi_j(t)$ e a chamamos de variação da grandeza y_j . Se esta diferença for pequena, então a distância entre estas soluções também será pequena.

Substituindo $y_j(t) = \psi_j(t) + x_j(t)$ na equação (1.1), obtemos

$$\frac{d\psi_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = Y_j(t, \psi_1 + x_1, \dots, \psi_n + x_n).$$

Desenvolvendo, em série de Taylor, o segundo membro desta igualdade nas vizinhanças do zero, por $x_j, j = 1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} &= Y_j(t, \psi_1, \dots, \psi_n) + \\ &+ \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1} \right)_{x=0} x_1 + \dots + \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_n} \right)_{x=0} x_n + X_j^* \end{aligned}$$

onde X_j^* é o conjunto dos elementos que dependem de x_i com potência superior à unidade.

Considerando que $\psi(t)$ é solução de (1.1) e representando por

$$a_{jk}(t) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right)_{x=0},$$

obtemos

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + X_j^*,$$

$$j = 1, \dots, n,$$

ou ainda, sob a forma vetorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (1.2)$$

Esta última equação é chamada, comumente, de equação do movimento perturbado, pois ela "mede" a distância entre a solução $\psi(t)$ que corresponde à condição inicial $\psi(t_0)$ e a solução $y(t)$ que corresponde à condição inicial perturbada $\psi(t_0) + \alpha$. Portanto, falar sobre a estabilidade da solução $\psi(t)$ de (1.1) é equivalente falar sobre a estabilidade da solução trivial da equação (1.2).

0 sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) \end{cases}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (1.3)$$

é chamado de "equação da primeira aproximação" de (1.2).

Daqui para frente, sempre que nos referirmos a um sistema de equações diferenciais ordinárias já consideramo-lo, sem perda de generalidade na forma (1.2). Isto significa que vamos nos interessar

pela estabilidade da solução nula.

A equação da primeira aproximação, quase sempre, dá uma resposta fiel sobre a estabilidade ou instabilidade da solução nula de (1.2), porém há casos em que a informação colhida pela equação (1.3), nada tem em comum com a equação (1.2).

Exemplo [10]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases} \quad (1.4)$$

A solução nula de (1.4) é instável para $\alpha > 0$ e assintoticamente estável para $\alpha < 0$. No entanto, a equação da primeira aproximação

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 \end{cases}$$

é estável para qualquer α .

Apesar disto, este método tem o seu lado positivo, pois a estabilidade assintótica, ou instabilidade da solução trivial de (1.3), implica na estabilidade assintótica, ou instabilidade da solução trivial de (1.2), respectivamente.

Liapunov indicou outros métodos para estudar a estabilidade das soluções das equações diferenciais, mas o que mais despertou o interesse dos matemáticos tem sido o "Segundo Método",

também chamado de "Método das Funções de Liapunov", ou ainda de "Método Direto de Liapunov".

Suponhamos que a função $v(x_1, \dots, x_n)$, definida no espaço de fase das variáveis $x_1, \dots, x_n$ é contínua em alguma região D , vizinhança da origem, e $v(0, \dots, 0) = 0$. Suponhamos também que as derivadas parciais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, são contínuas em D .

A função $v(x_1, \dots, x_n)$ é dita positiva definida em D se, para qualquer $x \in D \setminus \{0\}$, tivermos $v(x) > 0$. Se a desigualdade for ao contrário, isto é, $v(x) < 0$, então a função $v(x)$ é negativa definida em D . Se tivermos $v(x) \geq 0$, ou $v(x) \leq 0$ em D , então dizemos que a função $v(x)$ é não negativa no primeiro caso e não positiva no segundo.

Para o caso autônomo acima, ou seja, para o caso em que a função v depende apenas de $x \in D$, temos uma correspondência direta entre as grandezas $v(x)$ e $||x||$, isto é, $v(x)$ positiva, ou negativa definida é pequena em módulo, se e somente se $||x||$ for pequena.

Para o caso não autônomo, isto é, quando v depende de $x \in D$ e de $t \in \mathbb{R}^+ = [t_0, +\infty)$, esta correspondência pode não existir, se mantivermos a mesma compreensão de função positiva, ou negativa definida, como descrita anteriormente. Por exemplo a função

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-t}(x_1^2 + x_2^2)$$

é aparentemente, positiva definida, no entanto, esta correspondência inexistente.

Para restabelecer este fato, que é fundamental no segundo método de Liapunov, para o caso não autônomo, vamos entender que a função $v(t,x)$, contínua em $R^+ \times D$, juntamente com a sua derivada $\frac{dv}{dt}$, é positiva definida em $R^+ \times D$, se existir uma função autônoma $w(x)$, positiva definida em D , tal que $v(t,x) \geq w(x)$ para todo $t \in R^+$ e $x \in D$.

Se a função $w(x)$ for negativa definida em D e tivermos a desigualdade $v(t,x) \leq w(x)$ para todo $t \in R^+$ e $x \in D$, então a função $v(t,x)$ é negativa definida em $R^+ \times D$.

Chamaremos de derivada, em relação a t de $v(t,x)$, ao longo das soluções de (1.2), a expressão:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\text{grad } v, X(t,x)),$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno comum do R^n e $\text{grad } v$ é o gradiente de v .

Enunciaremos a seguir, o teorema central do segundo método de Liapunov.

Teorema

Se existir uma função $v(t,x)$, positiva definida, cuja derivada, com relação a t , é negativa ou igual a zero (negativa definida), ao longo das soluções de (1.2), para $t \geq t_0$, então a solução trivial de (1.2) é estável (assintoticamente estável).

Atualmente existem muitos teoremas que invertem este teorema de Liapunov, ou seja: Se a solução de (1.2) é estável, ou assintoticamente estável, então existe, pelo menos, uma função $v(t,x)$ que satisfaz as condições do teorema de Liapunov.

Apesar disto, este método não resolve totalmente o problema, pois encontrar tal função é um trabalho muito difícil e esta dificuldade cresce com o grau do sistema, tornando, muitas vezes, impraticável a busca de uma função de Liapunov.

O segundo método de Liapunov tem se desenvolvido em diferentes direções. E. A. Barbachin [9] provou um teorema, para os sistemas autônomos, que enfraquece a condição $\dot{v}(t,x) \leq 0$, ou seja, temos garantida a estabilidade assintótica, mesmo quando $\dot{v}(t,x)$ for igual a zero em uma variedade que não contenha trajetória completa, a não ser a origem.

F. N. Bailey [24] chamou a atenção pelo fato de, às vezes, ser possível fraccionar o sistema em estudo em subsistemas, de alguma forma fracamente relacionados entre si, como, por exemplo, a linearidade. Como os subsistemas são de grau bem inferior ao do sistema, é possível a construção de funções de Liapunov para cada um deles. Juntando estas funções em uma só função vetorial, é possível alguma conclusão sobre a estabilidade da solução trivial do sistema em questão.

Na década de 1960, as funções vetoriais de Liapunov foram utilizadas na construção de sistemas de comparação a partir da teoria das inequações diferenciais do tipo de Tchapliguin, ou seja, inequações do tipo $\dot{y} \leq f(t,y)$, onde a desigualdade entre os vetores $\dot{y}$ e $f(t,y)$ é entendida como sendo por componentes.

O método da comparação, tem se mostrado bastante viável, pois para a sua construção, são usadas funções vetoriais de Liapunov onde, geralmente, suas componentes não precisam ser funções do tipo Liapunov [1].

§ 2. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

O problema de estabilidade torna-se ainda mais complicado em se tratando das equações diferenciais funcionais. Estas equações são muito antigas e foram encontradas, ainda nos trabalhos de Euler [25], no entanto, o seu estudo sistemático se deu apenas a partir de 1950, com o desenvolvimento dos sistemas automáticos de controle.

O retardamento é um fator que influi consideravelmente no decorrer do processo. Por exemplo, em se tratando de um sistema de regularização automática, o retardamento seria o intervalo de tempo em princípio sempre existente, necessário ao sistema para reagir ao impulso inicial.

Para estas equações, a simples passagem do segundo método de Liapunov, não pode ser visto como um método geral de pesquisa sobre estabilidade, pois os teoremas deste, não são inversíveis [7], isto é, pode não existir uma função de Liapunov que satisfaça as condições do teorema de Liapunov, para um determinado sistema. Mesmo assim, o segundo método de Liapunov tem sido, amplamente aplicado e tem dado valiosos critérios de estabilidade e instabilidade.

Nos últimos tempos, o desenvolvimento deste método tem se dado, primordialmente, em duas direções distintas. A primeira proposta constitui na substituição das funções por funcionais de Liapunov [12, 16], e hoje, temos valiosos trabalhos publicados neste sentido, mas devemos ressaltar a grande dificuldade na construção de tais funcionais [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

Este método consiste em ver a trajetória de um ponto, descrita por uma equação diferencial funcional em um espaço funcional, ou seja, as trajetórias $x_s(t, x_1(t_0+\theta), \dots, x_n(t_0+\theta))$, correspondentes ao tempo t , são definidas pelas funções $x_s(t_0+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, $s = 1, \dots, n$. Assim sendo, é natural substituir as funções de Liapunov $v(t, x_1, \dots, x_n)$ pelos funcionais do tipo $v(t, x(t+\theta), \dots, x_n(t+\theta))$.

A segunda proposta é de B. S. Razumikhin [5] que propõe a avaliação do sinal da derivada $\dot{v}(t, x)$, não ao longo de todas as soluções do sistema em estudo, mas apenas ao longo das integrais que satisfazem certas condições. Isto é, contrai o conjunto das funções, ao longo das quais, avalia-se o sinal desta derivada.

Daremos, a seguir, o enunciado do teorema central de [5]. Para tanto vamos considerar a equação diferencial funcional

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \\ x_t &= x(t+\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0 \\ x_{t_0} &= \psi \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde a função $f : I \times S_H \rightarrow R^n$ é contínua em relação a t e x_t é Lipschitziana por x_t , onde $S_H = \{\psi : \psi \in C_{[-h, 0]}, ||\psi|| < H\}$
 $||\psi|| = \max_{-h \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)|.$

Teorema

Se existir uma função $v(t, x)$, positiva definida, cuja derivada por t , $\dot{v}(t, x)$, é não positiva (negativa definida) ao

longo de todas as soluções de (1.5) que satisfazem a condição

$$v(\sigma, x(\sigma)) \leq v(t, x(t)), \quad \sigma < t, \quad t \geq t_0,$$

então a solução trivial de (1.5) é estável (assintoticamente estável).

Posteriormente, Z. Mikolajska [14] mostrou que este mê todo nos dá apenas a estabilidade ou estabilidade assintótica absoluta, ou seja, estabilidade ou estabilidade assintótica para qualquer retardamento. Apesar disto, este trabalho é de grande valor teórico e de fácil aplicação.

Como exemplo, consideramos a equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau) \quad (1.6)$$

onde a , b e τ são constantes e $\tau > 0$.

Tomamos $v(t, x) = \frac{1}{2}x^2$, logo

$$\dot{v}(t, x) = -ax^2(t) - bx(t)x(t-\tau),$$

ou $\dot{v}(t, x) \leq -ax^2(t) + |b| |x(t)| |x(t-\tau)|$.

Pelo teorema, basta avaliar o sinal de $\dot{v}(t, x)$ ao longo das soluções que satisfazem a condição $x^2(t-\tau) \leq x^2(t)$, ou ainda $|x(t-\tau)| \leq |x(t)|$. Portanto,

$$\dot{v}(t, x) \leq (|b| - a)x^2(t).$$

Desta forma, uma condição suficiente para a estabilidade assintótica e absoluta da equação (1.6) é que $|b| - a < 0$.

Um aspecto interessante, sob o ponto de vista teórico deste método, é que não existe função de Liapunov que satisfaça as condições do teorema de Liapunov sobre a estabilidade e estabilidade assintótica, para esta equação. Assim sendo, se chamarmos a função $v(t,x)$ que satisfaz o teorema de Razumikhin de função de Razumikhin, então podemos concluir que pode existir a função de Razumikhin e não existir a função de Liapunov (o inverso é verdadeiro). Mostramos este fato.

Se $v(t,x)$ for uma função de Liapunov para a equação $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, então $v(kt, x)$ será uma função de Liapunov para a equação $\dot{x}(t) = kf(t, x_t)$, para qualquer $k > 0$. Portanto, ambas as equações deveriam ter a solução nula estáveis, simultaneamente. No nosso caso concreto, as regiões de estabilidade, no plano dos parâmetros (a,b) , da equação

$$x(t) = -k(ax(t) + bx(t-\tau)) \quad \text{e} \quad x(t) = -ax(t) - bx(t-\tau)$$

deveriam ser coincidentes. Para mostrar que isto não é verdade, vamos desenharmos a região de estabilidade da segunda equação, obtida pelo método da D-partição [26].

Figura 1.1

Há no entanto, um funcional de Liapunov que dá condição suficiente e necessária para a estabilidade assintótica de (1.6) [30].

Desta forma, vemos que o ponto $(a,b) = (0, \frac{\pi}{4\tau})$ pertence à região de estabilidade assintótica, enquanto que o ponto $(0, \frac{2\pi}{\tau})$, correspondente a $k = 8$, já pertence à região de instabilidade.

Associando os trabalhos de V. M. Matrossov [1, 2, 3, 4]

e de B. S. Razumikhin [5], nos foi possível estabelecer critérios de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade da solução trivial para as equações diferenciais funcionais onde o segundo membro pode ser descontínua em t , utilizando o método da comparação, cujo sistema de comparação é construído a partir de funções vetoriais onde as suas componentes não são, necessariamente, funções de Liapunov.

§ 3. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES A DIFERENÇAS FINITAS

A aplicação do segundo método de Liapunov é ainda mais difícil, em se tratando de equações a diferenças finitas, mesmo para os casos mais simples como o de equações discretas,

$$x_n = f_n(x_{n-1}) \quad (1.7)$$

A simples transferência deste método para estas equações, deixa muito a desejar, pois a função de Liapunov, calcula-

da ao longo das soluções do sistema, deve ser não crescente para termos garantida a estabilidade do equilíbrio $x_n \equiv 0$, e monotonicamente decrescente, para termos a estabilidade assintótica. Isto diminui grandemente a aplicação do método, devido ao caracter altamente oscilatório das soluções destas equações.

No entanto, alguns trabalhos tem aparecido no sentido de expandir o segundo método de Liapunov para as equações a diferenças finitas. Salientamos a importância teórica do trabalho de Krzysztof Gajewski [13] que, utilizando o método da comparação, obteve bons critérios de estabilidade e estabilidade assintótica, apesar da grande dificuldade na construção da equação de comparação. A mesma coisa, podemos falar do trabalho de V.D. Irtegov [17] que utiliza funções vetoriais de Liapunov para a construção do sistema de comparação.

O princípio da invariancia foi estendido por LaSalle [27] às equações

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad (1.8)$$

onde $T : R^m \rightarrow R^m$ é contínua em R^m e se $x^j \rightarrow y$, então $T(x^j) \rightarrow Ty$.

A seguir, daremos algumas definições e enunciaremos o teorema central deste princípio.

Definição 1.1

O ponto y é um ponto limite positivo do ponto $T^n x$, se existir uma seqüência de inteiros $\{n_i\}$, tal que $n_i \rightarrow +\infty$ e $T^{n_i} x \rightarrow y$ para $i \rightarrow +\infty$.

Definição 1.2

O conjunto M é dito positivamente invariante, se $T(M) \subset M$. Se tivermos $T(M) = M$, então o conjunto M é dito invariante.

Teorema 1.1

Suponhamos que v é uma função de Liapunov em uma região G para (1.8), e x_n é uma solução de (1.8), limitada em G para $n \geq 0$. Então existe um número c , tal que

$$x_n \rightarrow M \cap v^{-1}(c)$$

onde $v^{-1}(c) = \{x : v(x) = c, x \in \mathbb{R}^m\}$.

Com a ajuda deste teorema é possível tirarmos conclusões sobre a estabilidade assintótica do equilíbrio trivial de (1.8), mesmo quando a variação Δv de v ao longo de (1.8), definida por

$$\Delta v = v(x_{n+1}) - v(x_n)$$

seja apenas não positiva, desde que tenhamos $M = \{0\}$.

CAPÍTULO II

§ 1. EQUAÇÕES A DIFERENÇAS FINITAS

DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Consideramos a equação a diferenças finitas do tipo

$$y_n = f_n(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-N}) \quad (2.1)$$

Entendemos por solução de (2.1), que corresponde a condição inicial $(y_{n_0-1}, y_{n_0-2}, \dots, y_{n_0-N})$, a função escalar discreta $y_n(n_0, y_{n_0-1}, \dots, y_{n_0-N})$ que torna esta equação uma identidade em $I = \{n_0, n_{0+1}, \dots\}$.

A equação (2.1) pode ser escrita na forma de sistema, cuja solução seria uma função vetorial m-dimensional. Isto é, fazendo $x_n^1 = y_n, x_n^2 = y_{n-1}, \dots, x_n^{N+1} = y_{n-N}$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n^1 = f_n(x_{n-1}^1, \dots, x_{n-1}^N) \\ x_n^2 = x_{n-1}^1 \\ x_n^3 = x_{n-1}^2 \\ \vdots \\ x_n^N = x_{n-1}^{N-1} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Este é um sistema de equações a diferenças finitas que pode ser generalizado da seguinte forma:

(2.3)

Escrevendo o sistema (2.3) sob a forma vetorial, temos:

$$(2.4)$$

onde $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$ e $f_n = (f_n^1, \dots, f_n^m)$.

A seguir, vamos estudar a equação (2.4), considerando a função $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $I = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ contínua com relação a seus argumentos e $f_n(0) = 0$ para todo $n \in I$. Denotaremos por $\|x\|$ a norma de x , a qual é definida por

$$||\mathbf{x}|| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}.$$

Entenderemos por solução da equação (2.4), correspondente à condição inicial $x_0 = x(n_0) \in R^m$, a seqüência de vetores do espaço R^m , definida por:

$$\{x_0, f_1(x_0), f_2(f_1(x_0)), \dots\}.$$

Esta solução existe e é única devido, exclusivamente, ao fato de f ser uma função.

Para simplificar a notação, vamos representar por $x_n(x_0)$ a solução de (2.4), que corresponde à condição inicial x_0 . Assim, $x_0(x_0) = x_0$, $x_1(x_0) = f_1(x_0)$, $x_2(x_0) = f_2(x_1)$, ...

Definição 2.1

Chamaremos de ponto de equilíbrio de (2.4), a um vetor do R^m que torna a equação (2.4) uma identidade.

Exemplo 2.1

Consideremos a equação a diferenças finitas, linear e não homogênea

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = c, \quad (2.5)$$

onde a , b e c são constantes. Fazendo $x_n = x^* = \text{constante}$, teremos

$$x^* = \frac{c}{1+a+b}, \quad \text{se } 1+a+b \neq 0,$$

que é um equilíbrio de (2.5), neste caso.

Portanto, devido a condição $f_n(0) \equiv 0$, vemos que a origem é um ponto de equilíbrio de (2.4). Durante todo o tempo, estaremos nos preocupando com o comportamento das soluções de (2.4) em alguma vizinhança da origem.

O nosso trabalho consiste em utilizar mais de uma variação da função de "Liapunov", ou seja, comparar o valor da solução de (1.7), calculada no momento n , não apenas com o valor calculado em $n-1$, mas também com o valor em $n-k$.

Introduzindo a métrica de Minkovsky e comparando as variações $\Delta_{(1,n)}^v$ e $\Delta_{(k,n)}^v$, nos foi possível a obtenção de critérios de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade para o equilíbrio trivial da equação do tipo (1.7).

Com esta extensão e com a teoria das inequações a diferenças finitas e funções vetoriais de Liapunov, construímos sistemas de comparação para tais equações.

Representaremos a função $v(t, x)$, calculada ao longo das soluções de (2.4), por $v_n(x_n)$.

Definição 2.2

Chamaremos de " (k,n) -ésima variação" de $v(t,x)$ ao longo das soluções de (2.4), a função $\Delta_{(k,n)} v(x_n)$, definida por:

$$\Delta_{(k,n)} v(x_n) = v_n(f_n(x_{n-1})) - v_{n-k}(x_{n-k}).$$

Exemplo 2.2

Seja dada a equação

$$x_n = ux_{n-1}(1-x_{n-2}), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.6)$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$ e u é uma constante. Calculamos as funções $\Delta_{(1,n)} v(x_n)$ e $\Delta_{(2,n)} v(x_n)$, com $v(x) = x^2$.

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} \Delta_{(1,n)} v(x_n) &= x_n^2 - x_{n-1}^2 = \\ &= u^2 x_{n-1}^2 (1-x_{n-2})^2 - x_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Fazendo $x_{n-1} = x$ e $x_{n-2} = y$, temos:

$$\Delta_{(1,n)} v(x_n) = (u^2 - 2u^2 y + u^2 y^2 - 1)x^2.$$

Para $\Delta_{(2,n)} v(x_n)$, temos:

$$\Delta_{(2,n)} v(x_n) = x_n^2 - x_{n-2}^2.$$

Analogamente, obtemos:

$$\Delta_{(2,n)} v(x_n) = (u^2 x^2 - 1)y^2 - 2u^2 x^2 y + u^2 x^2.$$

Exemplo 2.3

Analísaremos, agora, a equação

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$, a e b são constantes.

Para esta equação, encontraremos uma fórmula de recorrência que nos dará a (k, n) -ésima variação de $v(x) = x^2$, para qualquer k inteiro e positivo, em função de x_{n-1} e x_{n-2} .

Para $k = 1$ ou $k = 2$, as variações são obtidas diretamente da definição, já em função de x_{n-1} e x_{n-2} . Portanto, vamos nos interessar no caso em que k é maior que dois. Por definição temos:

$$\Delta_{(k,n)} v(x_n) = (ax_{n-1} + bx_{n-2})^2 - x_{n-k}^2.$$

Desta forma, o nosso problema se resume em achar x_{n-k} em função de x_{n-1} e x_{n-2} . Para tanto fazemos

$$x_{n-k} = \alpha_k x_{n-1} + \beta_k x_{n-2}$$

onde α_k e β_k são funções de a e b .

Portanto, basta encontrarmos os coeficientes α_k e β_k . Procuramos uma fórmula que nos dê estes valores. Por indução, temos:

$$x_{n-0} = \alpha_0 x_{n-1} + \beta_0 x_{n-2},$$

portanto $\alpha_0 = a$ e $\beta_0 = b$;

$$x_{n-1} = \alpha_1 x_{n-1} + \beta_1 x_{n-2},$$

ou seja, $\alpha_1 = 1$ e $\beta_1 = 0$;

$$x_{n-2} = \alpha_2 x_{n-1} + \beta_2 x_{n-2} ,$$

logo, $\alpha_2 = 0$ e $\beta_2 = 1$;

$$x_{n-3} = \alpha_3 x_{n-1} + \beta_3 x_{n-2}$$

e, diretamente da equação, supondo $b \neq 0$, obtemos:

$$x_{n-3} = \frac{1}{b} x_{n-1} - \frac{a}{b} x_{n-2} ,$$

donde concluímos que $\alpha_3 = \frac{1}{b}$ e $\beta_3 = -\frac{a}{b}$;

$$x_{n-4} = \alpha_4 x_{n-1} + \beta_4 x_{n-2}$$

e, da equação e da expressão x_{n-3} , obtemos

$$x_{n-4} = \frac{\beta_3}{b} x_{n-1} + \left(\alpha_3 - \frac{a\beta_3}{b} \right) x_{n-2} ,$$

portanto, $\alpha_4 = \frac{\beta_3}{b}$ e $\beta_4 = \alpha_3 - \frac{a\beta_3}{b}$.

Suponhamos conhecidos α_{k-1} e β_{k-1} , e calculemos α_k e β_k .

Assim sendo,

$$x_{n-(k-1)} = \alpha_{k-1} x_{n-1} + \beta_{k-1} x_{n-2} .$$

Desta última expressão, temos:

$$x_{n-k} = \alpha_{k-1} x_{n-1} + \beta_{k-1} x_{n-3} ,$$

ou seja:

$$x_{n-k} = \frac{\beta_{k-1}}{b} x_{n-1} + \left(\alpha_{k-1} - \frac{a\beta_{k-1}}{b} \right) x_{n-2} ,$$

logo, $\alpha_k = \frac{\beta_{k-1}}{b}$ e $\beta_k = \alpha_{k-1} - \frac{a\beta_{k-1}}{b}$, ou ainda, usando a forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1} \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

que é, por sua vez, uma equação a diferença finita, cuja solução para a condição inicial $(\alpha_0, \beta_0) = (a, b)$, nos dá a sequência de valores que procuramos, e x_{n-k} é dado pela fórmula:

$$x_{n-k} = \alpha_k x_{n-1} + \beta_k x_{n-2} \quad (2.9)$$

Agora, estamos preparados para encontrar a função $\Delta_{(k,n)} v(x_n)$ que vai depender de $\alpha_k(a,b)$, $\beta_k(a,b)$, x_{n-1} e x_{n-2} .

Pela definição temos, para qualquer k inteiro e positivo

$$\Delta_{(k,n)} v(x_n) = x_n^2 - x_{n-k}^2 = (x_n - x_{n-k})(x_n + x_{n-k}).$$

Substituindo x_n pela equação (2.7) e x_{n-k} encontrado pela fórmula (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{(k,n)} v(x_n) &= (ax_{n-1} + bx_{n-2} - \alpha_k x_{n-1} - \beta_k x_{n-2}) \cdot \\ &\cdot (ax_{n-1} + bx_{n-2} + \alpha_k x_{n-1} + \beta_k x_{n-2}) = \\ &= [(a - \alpha_k)x_{n-1} + (b - \beta_k)x_{n-2}] \cdot \\ &\cdot [(a + \alpha_k)x_{n-1} + (b + \beta_k)x_{n-2}] \end{aligned}$$

Fazendo $x_{n-1} = x$ e $x_{n-2} = y$ e usando a notação vetorial, esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta_{(k,n)} v(x_n) = (a - \alpha_k, b - \beta_k) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . \quad (2.10)$$

$$\cdot (a + \alpha_k, b - \beta_k) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Definição 2.3

Chamaremos de região de positividade da função $\Delta_{(i,n)} v_n(x_n)$, ao conjunto definido por:

$$\Gamma_i^+ = \{x_n : x_n \in \mathbb{R}^m \text{ e } \Delta_{(i,n)} v_n(x_n) > 0\}.$$

Exemplo 2.4

Para a equação (2.6) obtemos:

$$\Delta_{(1,n)} v(x_n) = (u^2 - 2u^2y + u^2y^2 - 1)x^2 ,$$

$$\Delta_{(2,n)} v(x_n) = (u^2x^2 - 1)y^2 - 2u^2x^2y + u^2x^2 .$$

Vamos procurar as fronteiras $\partial\Gamma_1^+$ e $\partial\Gamma_2^+$ de Γ_1^+ e Γ_2^+ , ou seja; $\partial\Gamma_1^+$ é dada pela equação:

$$(u^2 - 2u^2y + u^2y^2 - 1)x^2 = 0 ,$$

e $\partial\Gamma_2^+$ é dada pela equação:

$$(u^2x^2 - 1)y^2 - 2u^2x^2y + u^2x^2 = 0 .$$

Considerando $x \neq 0$ na primeira equação, obtemos:

$$u^2 y^2 - 2u^2 y + u^2 - 1 = 0,$$

de onde temos:

$$y_1 = \frac{u-1}{u} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{u+1}{u}.$$

Para melhor esboçar a região Γ_1^+ no plano dos parâmetros (x, y) , vamos considerar, sem perda da generalidade, que $\frac{u-1}{u} < 0$ e $\frac{u+1}{u} > 0$, ou seja $0 < u < 1$.

Figura 2.1

Resolvendo a segunda equação com a condição $u^2 x^2 - 1 \neq 0$, obtemos:

$$y = \frac{ux}{ux \pm 1}.$$

Assim, temos as fronteiras de Γ_2^+ , que nos permite fazer o seu esboço, ou seja,

Figura 2.2

§ 2. ESTABILIDADE. DEFINIÇÕES

Definição 2.4

O equilíbrio trivial de (2.4) é estável, se para algum $\delta > 0$, existirem $\varepsilon(n_0, \delta) > 0$ e $N(n_0, \delta) \in \mathbb{Z}^+$, tais que se $||x_0|| < \delta$ então $||x_n(x_0)|| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Definição 2.5

O equilíbrio trivial de (2.4) é estável segundo Liapunov, se dado um $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(n_0, \varepsilon) > 0$, tal que, se $||x_0|| < \delta$, então $||x_n(x_0)|| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Definição 2.6

O equilíbrio trivial de (2.4) é uniformemente estável segundo Liapunov, se na definição (2.5), o número δ pode ser encontrado independentemente de n_0 .

Definição 2.7

O equilíbrio trivial de (2.4) é estável segundo Lagrange se existe um $\delta > 0$, tal que, se $||x_0|| < \delta$, então a solução $x_n(x_0)$ é limitada para todo $n \geq n_0$.

Apesar da semelhança entre as definições (2.4) e (2.7), vamos nos referir, ao longo do trabalho, apenas à definição (2.4).

A definição (2.4) se situa entre as definições de estabilidade segundo Liapunov e segundo Lagrange.

Teorema 2.1

O equilíbrio trivial de (2.4) é estável para algum $\delta > 0$, se existirem $v(t,x)$ positiva definida, $d > 0$, $k > 1$ e $n_0 \in I$, tais que se $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) \geq 0$, então $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) \leq 0$ na bola $B(d) = \{x : x \in R^m, ||x|| < d\}$, para todo $n \geq n_0 + k$.

Prova

Suponhamos que as hipóteses do teorema estão satisfeitas. Logo, dado δ , $0 < \delta < d$, existe um número $A > 0$ definido por:

$$A = \max\{v_j(x_j), ||x_0|| \leq \delta < d, n_0 \leq j \leq n_0 + k\}.$$

É evidente que $v_n(x_n(x_0)) \leq A$ para todo $n_0 \leq n \leq n_0 + k$.
Vamos mostrar que $v_n(x_n(x_0)) \leq A$ para todo $n \geq n_0$.

Suponhamos, por absurdo que $v_n(x_n(x_0)) > A$ para alguns $n > n_0 + k$. Seja n^* o primeiro índice onde isto ocorre. Então $v_{n^*-1}(x_{n^*-1}(x_0)) \leq A$ e $v_{n^*}(x_{n^*}(x_0)) > A$, portanto, $\Delta_{(1,n^*)} v_{n^*}(x_{n^*}) > 0$. No entanto, por hipótese, devemos ter $\Delta_{(k,n^*)} v(x_{n^*}) \leq 0$, ou seja:

$$v_{n^*}(x_{n^*}) \leq v_{n^*-k}(x_{n^*-k}) \leq A,$$

o que contradiz a suposição $v_{n^*}(x_{n^*}) > A$, logo $v_n(x_n) \leq A$ para todo $n \geq n_0$. Como $v(t,x)$ é uma função positiva definida, por este A podemos encontrar um número $\varepsilon(A) > 0$, tal que

$$||x_n(x_0)|| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e $||x_0|| \leq \delta < d$. Desta forma, o teorema fica provado.

Este teorema pode ainda ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2.1'

O equilíbrio trivial de (2.4) é estável para algum $\delta > 0$, se existirem $v(t,x)$ positiva definida, $d > 0$ e $k > 1$, tais que

$$\Gamma_1^+ \cap \Gamma_k^+ \cap B(d) = \emptyset.$$

Exemplo 2.5

No exemplo (2.4), encontramos as funções $\Delta_{(1,n)} v(x_n)$ e $\Delta_{(2,n)} v(x_n)$ e as suas respectivas regiões de positividade Γ_1^+ e Γ_2^+ , correspondentes à equação $x_n = ux_{n-1}(1-x_{n-2})$, que foram esboçadas (Fig.2.1 e Fig.2.2). Concluimos, portanto, que as condições do teorema (2.1') estão satisfeitas se $u \neq 1$, e que

$$d = \min \left\{ \frac{u+1}{u}, \frac{u-1}{u} \right\}.$$

Corolário 2.1

Se para todo $\varepsilon > 0$ existirem $\alpha(n_0, \varepsilon) > 0$, $\delta(n_0, \varepsilon) > 0$, $k(n_0, \varepsilon) > 1$ e uma função $v(t, x)$ positiva definida e contínua, tais que $v_n(x_n(x_0)) < \alpha$ se $\|x_n(x_0)\| < \varepsilon$ para todo $n \in \{n_0, n_0+1, \dots, n_0+k\}$ e $\|x_0\| < \delta$, e se $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) \geq 0$ implica que $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) \leq 0$, então a solução trivial de (2.4) é estável segundo Liapunov.

Prova

Analogamente ao que foi feito na prova do teorema (2.1), usando a condição " $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) \geq 0$ implica que $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) \leq 0$ ", pode-se provar que $v_n(x_n(x_0)) < \alpha$ para todo $n \geq n_0$ e $\|x_0\| < \delta$.

Como a função $v(t, x)$ é contínua e positiva definida então, para qualquer número ε positivo, podemos encontrar um número $\alpha > 0$, tal que, se $v(t, x) < \alpha$, então $\|x\| < \varepsilon$. Isto é, dado um $\alpha > 0$, encontramos $\alpha(n_0, \varepsilon)$ e $\delta(n_0, \varepsilon) > 0$, tais que se $\|x_0\| < \delta$, então $v_n(x_n(x_0)) < \alpha$ para todo $n \geq n_0$, logo $\|x_n(x_0)\| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Desta forma, o corolário fica provado.

§ 3. ESTABILIDADE ASSINTÓTICA. DEFINIÇÕES

Definição 2.9

O equilíbrio trivial de (2.4) é assintoticamente estável, se ela for estável no sentido da definição 2.4 e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ||x_n(x_0)|| = 0 \quad \text{se} \quad ||x_0|| < \delta_1 \leq \delta, \quad \delta_1 > 0.$$

Definição 2.10

O equilíbrio trivial de (2.4) é assintoticamente estável, segundo Liapunov, se ela for estável no sentido da definição (2.5) e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ||x_n(x_0)|| = 0 \quad \text{se} \quad ||x_0|| < \delta_1 \leq \delta, \quad \delta_1 > 0.$$

Definição 2.11

Dada uma seqüência $\{\lambda_s\}_0^\infty \in \mathbb{R}$, dizemos que o produto infinito $\prod_{s=0}^\infty \lambda_s$ é convergente, se:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \prod_{s=0}^j \lambda_s = \beta \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta \neq 0.$$

Se $\lim_{j \rightarrow +\infty} \prod_{s=0}^j \lambda_s = \infty$, ou igual a zero, então dizemos que

$\prod_{s=0}^\infty \lambda_s$ é divergente.

Teorema 2.2

O equilíbrio trivial de (2.4) é assintoticamente estável para algum $\delta > 0$, se existirem $v(t, x)$ positiva definida,

$d > 0$ e $k > 1$, tais que se $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) \geq 0$, então

$\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) < 0$ na bola $B(d) = \{x : x \in \mathbb{R}^m, \|x\| < d\}$, para todo $n \geq n_0 + k$.

PROVA

Pelo teorema (2.1), temos que a solução trivial de (2.4) é estável. Devemos mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n(x_0)\| = 0, \text{ se } \|x_0\| \leq \delta < d.$$

Definimos:

$$C_j = \sup \{ v_n(x_n(x_0)), n_0 + jk < n \leq n_0 + (j+1)k \}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

Construímos a função auxiliar $y : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ do seguinte modo:

$$y(t) = C_j, \text{ se } t \in (n_0 + jk, n_0 + (j+1)k].$$

Portanto $y(t)$ é uma função escada. Mostramos que ela é decrescente. De fato, se isto não acontecesse, teríamos $C_j \leq C_{j+1}$, para algum j , e aí $\Delta_{(k,n(j+1))} v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)}) \geq C_{j+1} - C_j \geq 0$. Para $\Delta_{(1,n(j+1))} v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)})$, teríamos duas possibilidades: se $C_{j+1} = v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)})$, então ou $n(j+1)-1$ cairá no intervalo $(n_0 + jk, n_0 + (j+1)k]$ ou cairá no intervalo $(n_0 + (j-1)k, n_0 + jk]$. Na primeira alternativa $\Delta_{(1,n(j+1))} v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)}) \geq 0$ pois,

$$\Delta_{(1,n(j+1))} v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)}) = v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)}) -$$

$$= v_{n(j+1)-1}(x_{n(j+1)-1}).$$

e $v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)})$ é a cota superior deste conjunto. No segundo caso, teríamos $v_{n(j+1)-1}(x_{n(j+1)-1}) \leq C_j \leq C_{j+1}$, o que, também implicaria em $\Delta_{(1,n(j+1))} v_{n(j+1)}(x_{n(j+1)}) \geq 0$, contradizendo a hipótese do teorema.

Portanto, $y(t)$ é uma função decrescente, e $\{C_j\}$ é uma seqüência estritamente decrescente.

Mostramos agora que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Como $C_j > C_{j+1}$, então existe um número positivo $\lambda_j < 1$, tal que:

$$C_{j+1} = \lambda_j C_j,$$

ou ainda

$$C_{j+1} = \prod_{s=0}^j \lambda_s C_0$$

A seguir a prova se dará por contradição. Isto é, supo-
nhamos que existe um C positivo, tal que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = C$$

Por hipótese, $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n)$ e $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n)$ não se anulam simultaneamente, a não ser na origem. Portanto, por este C , encontramos $\hat{\delta}(C) > 0$, tal que se $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) \geq 0$, então $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) < -\hat{\delta}(C)$ para todo x_0 pertencente ao anel $B(d) \setminus B(C)$.

Temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} C_{j+1} = \lim_{j \rightarrow +\infty} C_0 \prod_{s=0}^j \lambda_s = C.$$

Desta forma, o produto infinito $\prod_{s=0}^{\infty} \lambda_s$ é convergente e igual ao número positivo $\frac{C}{C_0}$.

Se $\Delta_{(k,n(j+1))}^{V_{n(j+1)}(x_{n(j+1)})} = C_{j+1}^{-V_{n(j+1)}-k} (x_{n(j+1)}-k)^{V_{n(j+1)}-k} \geq 0$,
então $\Delta_{(1,n(j+1))}^{V_{n(j+1)}(x_{n(j+1)})} = C_{j+1}^{-V_{n(j+1)}-1} (x_{n(j+1)}-1)^{V_{n(j+1)}-1} < -\hat{\delta}(C)$, ou
ainda

$$C_{j+1} - C_j \leq C_{j+1} - V_{n(j+1)}-1 (x_{n(j+1)}-1)^{V_{n(j+1)}-1} < -\hat{\delta}(C).$$

Portanto:

$$C_0 \prod_{s=0}^j \lambda_s - C_0 \prod_{s=0}^{j-1} \lambda_s < -\hat{\delta}(C),$$

ou

$$C_0 (\lambda_j - 1) \prod_{s=0}^{j-1} \lambda_s < -\hat{\delta}(C).$$

Dividindo ambos os membros por $C_0 (\lambda_j - 1) < 0$, obtemos:

$$\prod_{s=0}^{j-1} \lambda_s > \frac{\hat{\delta}(C)}{C_0 (1 - \lambda_j)}.$$

Levando em consideração que o produto infinito é convergente e vale $\frac{C}{C_0}$, e que uma condição necessária para a convergência de um produto infinito é que o último termo do produto tenda à unidade, e passando ao limite, $j \rightarrow +\infty$, na última desigualdade, teremos:

$$\frac{C}{C_0} = +\infty.$$

Desta forma, chegamos a um absurdo. Portanto, $\prod_{s=0}^{+\infty} \lambda_s$ é divergente. Como λ_s é positivo e menor que um, temos:

$$\prod_{s=0}^{+\infty} \lambda_s = 0.$$

Assim provamos que

$$C = C_0 \prod_{s=0}^{+\infty} \lambda_s = 0,$$

ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

o que implica $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x_n) = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} ||x_n(x_{n_0})|| = 0$ para todo $||x_0|| \leq \delta < d$. Assim, concluímos a demonstração do teorema.

Este teorema, na linguagem de Γ_1^+ e Γ_k^+ , pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2.2'

O equilíbrio trivial de (2.4) é assintoticamente estável para algum $\delta > 0$, se existirem $v(t, x)$ positiva definida, $d > 0$ e $k > 1$, tais que:

$$\overline{\Gamma_1^+} \cap \overline{\Gamma_k^+} \cap B(d) = \{0\}.$$

Exemplo 2.6

A equação

$$x_n = ux_{n-1}(1-x_{n-2})$$

tem o seu equilíbrio trivial assintoticamente estável, pois o fecho das regiões de positividade Γ_1^+ e Γ_2^+ têm um único ponto em comum, dentro da bola de raio $d = \min\{|\frac{u+1}{u}|, |\frac{u-1}{u}|\}$, como foi esboçado nas Figuras (2.1) e (2.2).

Corolário 2.2

Se para todo $\varepsilon > 0$ existirem um $\alpha(n_0, \varepsilon) > 0$, $\delta(n_0, \varepsilon) > 0$, $k(n_0, \varepsilon) > 1$ e uma função $v(t, x)$ positiva definida e contínua, tais que $v_n(x_n(x_0)) < \alpha$ se $||x_n(x_0)|| < \varepsilon$ para todo $n \in \{n_0, n_0+1, \dots, n_0+k\}$ e $||x_0|| < \delta$, e se $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) \geq 0$ implica que $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) < 0$, então a solução trivial de (2.4) é assintoticamente estável segundo Liapunov.

Prova

Pelo Corolário (2.1) temos que a solução nula da equação (2.4) é estável segundo Liapunov. Analogamente à prova do teorema (2.2), mostramos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x_n(x_0)) = 0, \quad \text{se } ||x_0|| < \delta,$$

o que nos dá

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ||x_n(x_0)|| = 0, \quad \text{se } ||x_0|| < \delta.$$

§ 4. INSTABILIDADE. DEFINIÇÃO

Definição 2.12

A solução trivial de (2.4) é instável, se ela não for estável no sentido da definição (2.4).

Teorema 2.3

O equilíbrio trivial de (2.4) é instável se existirem $v(t,x)$ positiva definida, e que admite o limite superior infinitesimal, $d > 0$ e $k > 1$, tais que se $\Delta_{(1,n)} v(x_n) > 0$, $(\Delta_{(k,n)} v(x_n) > 0)$, então $\Delta_{(k,n)} v(x_n) > 0$, $(\Delta_{(1,n)} v(x_n) > 0)$ na bola: $B(d) = \{x : x \in \mathbb{R}^m, \|x\| < d\}$.

Além disto, existe pelo menos uma solução ilimitada.

Prova

Suponhamos satisfeitas as hipóteses do teorema e definimos:

$$\tilde{C}_j = \sup\{v_n(x_n(x_0)), n \in (n_0 + jk, n_0 + (j+1)k]\}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

onde x_0 é tomado tão próximo da origem quanto se queira.

Construímos a função auxiliar $\tilde{y} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ do seguinte modo:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}_j, \text{ se } t \in (n_0 + jk, n_0 + (j+1)k].$$

Analogamente ao que foi feito na prova do teorema (2.2), mostramos que a função escada $\tilde{y}(t)$ é crescente e a sequência $\{\tilde{C}_j\}$ é estritamente crescente.

Mostramos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{y}(t) = +\infty.$$

Como $\tilde{C}_j < \tilde{C}_{j+1}$, então existe um número $\tilde{\lambda}_j > 1$, tal que:

$$\tilde{C}_{j+1} = \tilde{\lambda}_j \tilde{C}_j ,$$

ou ainda

$$\tilde{C}_{j+1} = \prod_{s=0}^j \tilde{\lambda}_s C_o .$$

A seguir a prova se dará por contradição. Isto é, suponhamos que existe um $\tilde{C}$ positivo, tal que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{y}(t) = \tilde{C} .$$

Por hipótese, $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n)$ e $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n)$ não se anulam simultaneamente, a não ser na origem. Portanto, por este C , encontramos $\tilde{\delta}(\tilde{C}) > 0$, tal que se

$$\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) > 0 \quad (\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) > 0),$$

então

$$\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) > \tilde{\delta}(\tilde{C}) (\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) > \tilde{\delta}(\tilde{C})),$$

para todo x_o pertencente ao anel $B(d) \setminus B(C)$.

Desta forma, temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{y}(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \tilde{C}_{j+1} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \tilde{C}_o \prod_{s=0}^j \tilde{\lambda}_s = \tilde{C} .$$

Portanto o produto infinito $\prod_{s=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_s$ é convergente e igual ao número positivo $\frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_o}$.

Sem a perda da generalidade, vamos considerar apenas o caso em que se $\Delta_{(k,n)} v_n(x_n) > 0$, então $\Delta_{(1,n)} v_n(x_n) > \tilde{\delta}(\tilde{C})$.

Analogamente à prova do teorema (2.2), estabelecemos que:

$$\prod_{s=0}^{j-1} \tilde{\lambda}_s > \frac{\tilde{\delta}}{C_o (\tilde{\lambda}_j - 1)} .$$

Passando ao limite, $j \rightarrow +\infty$, na última desigualdade, e levando em consideração que o produto infinito $\prod_{s=0}^{+\infty} s$ é convergente e igual a $\frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_0}$, logo $\lim_{s \rightarrow +\infty} \lambda_s = 1$, temos que:

$$\frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_0} = +\infty.$$

Com este absurdo, concluímos que o produto $\prod_{s=0}^{+\infty} \lambda_s$ é divergente e, como $\lambda_s > 1$, temos

$$\prod_{s=0}^{+\infty} \lambda_s = +\infty.$$

Assim provamos:

$$\tilde{C} = \tilde{C}_0 \prod_{s=0}^{+\infty} \lambda_s = +\infty,$$

ou seja: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$, ou ainda $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x_n(x_0)) = +\infty$ para algum $\|x_0\| < \tilde{\delta}$.

Como a função $v(t, x)$ admite o limite superior infinitesimal, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n(x_0)\| = +\infty$$

para algum $\|x_0\|$ tão pequeno quanto se queira.

Assim o teorema fica provado.

Este teorema pode ser enunciado, na linguagem de Γ_1^+ e Γ_k^+ , da seguinte maneira:

Teorema 2.3'

O equilíbrio trivial de (2.4) é instável se existirem u ma função $v(t,x)$ positiva definida que admite o limite superior infinitesimal, $d > 0$ e $k > 1$, tais que:

$$\Gamma_k^+ \cap B(d) \subset \Gamma_1^+ \cap B(d),$$

ou

$$\Gamma_1^+ \cap B(d) \subset \Gamma_k^+ \cap B(d).$$

§ 5. PLANO E MÉTRICA DE MINKOVSKY, ESTABILIDADE, ESTABILIDADE
ASSINTÓTICA E INSTABILIDADE DA EQUAÇÃO $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$

Para fins ilustrativos, vamos analisar, detalhadamente, a aplicação dos teoremas (2.1), (2.2) e (2.3) para a equação do tipo:

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad (2.11)$$

onde a e b são constantes reais.

No primeiro parágrafo deste capítulo obtivemos a fórmula geral de $\Delta_{(k,n)} v(x_n)$ (2.10), para o caso $v(x) = x^2$.

Vamos descrever, agora, um método que facilita a comparação das funções $\Delta_{(1,n)} v(x_n)$ e $\Delta_{(k,n)} v(x_n)$. Para isto, vamos analisar a métrica de Minkovsky desenvolvida no plano euclidiano.

Tomamos, neste plano a base ortonormal e_1 e e_2 e introduzimos a métrica de Minkovsky com a ajuda da forma quadrática

$$||x||^2 = x_1^2 - x_2^2.$$

Deste modo, podemos definir o produto interno como sendo:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2.$$

Tomamos um vetor e_3 unitário e normal ao plano definido pelos vetores e_1 e e_2 , e definimos o produto externo pela fórmula:

$$[x, y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

Os vetores e_1 e e_2 são ortonormais, também na mêtrica de Minkovsky, pois $||e_1||^2 = 1$ e $||e_2||^2 = -1$ e $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

Da mesma forma que o produto externo definido no plano euclidiano, o vetor $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ está à direita do vetor $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ se, e somente se, o número $x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0$.

No plano euclidiano, a norma de Minkovsky tem um sentido especial, como, por exemplo, a esfera unitária

$$||x||^2 = 1,$$

que é a equação de dois pares de hipérbole conjugados, com as assíntotas $x = \pm y$. Desta forma, são vetores unitários, na mêtrica de Minkovsky, todos os vetores que têm o seu extremo sobre as ramificações destas hipérboles. Os vetores direcionais das

assíntotas são isotrópicos.

Analogamente ao que foi feito para as funções $\Delta_{(1,n)} v(x)$ e $\Delta_{(k,n)} v(x)$, podemos escrever:

$$||x||^2 = x_1^2 - x_2^2 = (1,-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (1,1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

e a região de positividade da função $||x||^2$ está bem definida pelos vetores normais às assíntotas $n_1 = (1,-1)$ e $n_2 = (1,1)$. Estes vetores estão ordenados de tal forma que n_1 esteja à direita de n_2 , ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Portanto, as assíntotas das hipérboles dividem o plano em quatro setores de tal forma que se para algum x de um destes setores tivermos $||x||^2 > 0$, então para qualquer outro y deste mesmo setor, $||y||^2 > 0$. O contrário também é verdade, isto é, se $||x||^2 < 0$, então $||y||^2 < 0$.

Estes conhecimentos da equação da hipérbole $x_1^2 - x_2^2 = 1$, podem ser facilmente estendidos para qualquer hipérbole $\psi(x_1, x_2) = C$, pois, com a transformação

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

levamos a hipérbole $\psi(x_1, x_2) = C$ à sua forma canônica no plano (y_1, y_2) :

$$\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 ;$$

e com a transformação

$$\xi_1 = ay_1$$

$$\xi_2 = by_2$$

obtemos a equação

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 1.$$

Para definirmos a região de positividade da hipérbole

$$\psi(x,y) = (a,b) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (c,d) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

devemos girar o vetor (a,b) , normal a uma das assíntotas em $\frac{\pi}{2}$, e o outro vetor (c,d) em $-\frac{\pi}{2}$. Estes vetores são de tal forma ordenados que $ad - bc > 0$, ou seja, (a,b) está à direita de $(b,-a)$. Mostramos, agora, que a região delimitada pelos vetores $(-d,c)$ e $(b,-a)$ é a região de positividade da função $\psi(x,y)$. Para isto, basta verificar que $\psi(x,y) > 0$ ao longo do vetor bissetriz

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - d \\ c - a \end{bmatrix} ,$$

ou seja:

$$(a,b) \begin{bmatrix} b & -d \\ c & -a \end{bmatrix} (c,d) \begin{bmatrix} b & -d \\ c & -a \end{bmatrix} = (ad - bc)^2 > 0.$$

Se fizermos:

$$\Delta_{(1,n)} v(x_n) = n_1^1(x,y)^T n_2^1(x,y)^T$$

$$\Delta_{(k,n)} v(x_n) = n_1^k(x,y)^T n_2^k(x,y)^T$$

onde o vetor normal n_1^s está à direita do vetor n_2^s , $n = 1, k$, então a condição do teorema (2.2'): $\overline{\Gamma_1^+} \cap \overline{\Gamma_k^+} = \{0\}$ (a estabilidade, neste caso é global) é satisfeita se, ou bem o vetor n_2^k está à direita de n_1^1 , ou bem n_2^1 está à direita de n_1^k , isto é:

$$\text{ou } \det \begin{bmatrix} n_2^k \\ n_1^1 \end{bmatrix} > 0, \quad \text{ou } \det \begin{bmatrix} n_2^1 \\ n_1^k \end{bmatrix} > 0 \quad (2.12)$$

Exemplo 2.7

Tomamos a equação:

$$x_n = 0,1x_{n-1} + 0,1x_{n-2},$$

$$\Delta_{(1,n)} v(x_n) = (-0,9; 0,1)(x,y)^T (1,1; 0,1)(x,y)^T.$$

Como o determinante

$$\left\| \begin{array}{cc} 0,1 & 0,1 \\ 0,9 & -1 \end{array} \right\| < 0,$$

$$\Delta_{(2,n)} v(x_n) = (0,1;-0,9)(x,y)^T (0,1;1,1)(x,y)^T,$$

como o determinante

$$\begin{vmatrix} 0,1 & -0,9 \\ 0,1 & 1,1 \end{vmatrix} > 0,$$

então $n_1^2 = (0,1;-0,9)$ e $n_2^2 = (0,1;1,1)$.

Verificamos se o vetor n_2^2 está à direita de n_1^1 . Isto é:

$$\begin{vmatrix} 0,1 & 1,1 \\ 1,1 & 0,1 \end{vmatrix} < 0.$$

Já que esta condição não foi satisfeita, devemos verificar se o vetor n_2^1 está à direita de n_1^2 , ou seja:

$$\begin{vmatrix} -0,9 & 0,1 \\ 0,1 & -0,9 \end{vmatrix} > 0.$$

Portanto, esta condição foi satisfeita, e desta forma temos que

$$\overline{\Gamma_1^+} \cap \overline{\Gamma_2^+} = \{0\},$$

ou o que é equivalente, se $\Delta_{(2,n)} v(x_n) \geq 0$, então $\Delta_{(1,n)} v(x_n)$ é negativa. Logo, esta equação é estável assintoticamente. É fácil ver que o Corolário (2.2), também está satisfeito, portanto a estabilidade assintótica é no sentido de Liapunov.

Analogamente, podemos estabelecer que a condição " $\Gamma_1^+ \subset \Gamma_k^+$ ou $\Gamma_k^+ \subset \Gamma_1^+$ ", do teorema (2.3') para a equação (2.11)

e a função $v(x) = x^2$ está satisfeita se, ou bem n_1^k está à direita de n_1^1 e n_1^2 está à direita de n_2^k , ou bem n_1^1 está à direita de n_1^k e n_2^k está à direita de n_1^2 .

Exemplo 2.8

Tomamos a equação:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Temos:

$$\Delta_{(1,n)} v(x_n) = (2,1)(x,y)^T (0,1)(x,y)^T,$$

e

$$\Delta_{(2,n)} v(x_n) = (1,0)(x,y)^T (1,2)(x,y)^T,$$

de onde temos que $n_1^1 = (2,1)$, $n_2^1 = (0,1)$, $n_1^2 = (1,0)$ e $n_2^2 = (1,2)$.

Verificamos as condições do teorema (2.2'), ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

logo, a condição $\overline{\Gamma_1^+} \cap \overline{\Gamma_2^+} = \{0\}$, não se verifica, para $k = 2$.

Vejamos, então, se temos as condições do teorema (2.3'), ou seja:

$$\det \begin{bmatrix} n_1^1 \\ n_1^k \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} n_2^k \\ n_2^1 \end{bmatrix} > 0, \quad (2.13)$$

isto é:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Portanto, as hipóteses do teorema (2.3') não estão satisfeitas para $k = 2$. Tentamos $k = 5$. Ou seja:

$$n_1^5 = (3, -2) \quad \text{e} \quad n_2^5 = (-1, 4).$$

Verificamos as condições do teorema (2.2'), ou seja:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} < 0,$$

logo, ainda não estão satisfeitas.

Verificamos a condição (2.13) do teorema (2.3'):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

logo, esta equação é instável.

Vamos agora, analisar uma equação mais geral, ou seja, consideremos a equação a diferença finita do tipo:

$$x(t) = ax(t-r) + bx(t-s) \quad (2.14)$$

onde r e s são números positivos e $t \in [t_0, +\infty)$.

Esta equação é equivalente à

$$x(\tau) = ax(\tau-1) + bx(\tau-\theta) \quad (2.15)$$

Se θ for um número racional, então $\theta = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros. Assim sendo, a equação (2.15) é ainda equivalente a:

$$x(t) = ax(t-q) + bx(t-p) \quad (2.16)$$

Falar sobre a estabilidade da equação (2.16) é equivalente falar sobre a estabilidade de

$$x_n = ax_{n-q} + bx_{n-p} \quad (2.17)$$

Vejamos as variações $\Delta_{(q,n)} v(x_n)$ e $\Delta_{(kp,n)} v(x_n)$, isto é:

$$\Delta_{(q,n)} v(x_n) = (a-1, b, 0)(x, y, z)^T (a+1, b, 0)(x, y, z)^T$$

$$\Delta_{(kp,n)} v(x_n) = (a, b, -1)(x, y, z)^T (a, b, 1)(x, y, z)$$

Levando em consideração que p e q são números inteiros, então a equação (2.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (2.18)$$

onde x_n é um vetor e A uma matriz quadrática de dimensão igual a $\max\{p, q\}$.

Neste caso, conhecemos a solução geral, o que nos permite achar z em função de x e y , portanto:

$$\Delta_{(q,n)} v(x_n) = (a-1, b, 0)(x, y, z)^T (a+1, b, 0)(x, y, z)^T$$

$$\Delta_{(kp,n)} v(x_n) = (\alpha_k, \beta_k, 0)(x, y, z)^T (\gamma_k, \delta_k, 0)(x, y, z)^T$$

Para este caso, já estudamos, devidamente, a equação (2.14), ou seja, $\Delta_{(q,n)} v(x_n)$ e $\Delta_{(kp,n)} v(x_n)$ podem ser escritas como sendo o produto das equações de dois planos no R^3

que passam pela origem, e os vetores normais destes planos estão no plano $(x,y,0)$. Portanto, a análise a ser feita é idêntica a que já foi descrita para o caso $r = 1$ e $s = 2$.

Consideramos agora, o caso em que r e s não estão racionalmente relacionados. É fácil ver que os problemas (2.14) e (2.17) já não são mais equivalentes e, teremos:

$$\Delta_{(r,t)} v(x(t)) = (a-1, b, 0)(x, y, z)^T (a+1, b, 0)(x, y, z)^T$$

$$\Delta_{(ks,t)} v(x(t)) = (a, b, -1)(x, y, z)^T (a, b, 1)(x, y, z)^T$$

onde z já não pode ser encontrado em função de x e y , a não ser quando k for a unidade.

Mostramos isto.

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} \Delta_{(ks,t)} v(x) &= x^2(t) - x^2(t-ks) = \\ &= [x(t) - x(t-ks)][x(t) + x(t-ks)] = \\ &= [ax(t-r) + bx(t-s) - x(t-ks)] \cdot \\ &\quad \cdot [ax(t-r) + bx(t-s) + x(t-ks)] \end{aligned}$$

Fazendo:

$$x(t-r) = x, \quad x(t-s) = y \quad \text{e} \quad x(t-ks) = z,$$

temos que:

$$\Delta_{(ks,t)} v(x_n) = (a, b, -1)(x, y, z)^T (a, b, 1)(x, y, z)^T$$

Portanto, não nos será possível por uma destas variáveis em função das outras duas, a não ser quando $k = 1$, pois aí teríamos $z = y$ e cairíamos no problema já estudado.

Se $k \neq 1$, os vetores normais aos dois planos que formam $\Delta_{(ks,t)} v(x_n)$ não dependem nem de k , nem de r , nem de s , e estão perfeitamente definidos como sendo dois vetores simétricos com relação ao plano $(x,y,0)$. Portanto, em qualquer vizinhança da origem, haverá uma região na qual $\Delta_{(r,t)} v(x_n)$ e $\Delta_{(ks,t)} v(x_n)$ são positivos. Desta forma, o teorema (2.2) nos dá, apenas uma condição suficiente para a estabilidade absoluta e assintótica da equação (2.14), isto é:

$$|a| + |b| < 1.$$

No entanto, esta condição coincide com a condição suficiente e necessária para a estabilidade absoluta e assintótica de (2.14) [22].

O teorema (2.3) nos dá a seguinte condição suficiente para a instabilidade da equação (2.14):

$$\pm a + |b| > 1 \quad \text{ou} \quad |a| \pm b > 1.$$

§ 6. MÉTODO DA COMPARAÇÃO. FUNÇÃO VETORIAL DE LIAPUNOV. DEFINIÇÕES

Enunciamos, inicialmente, um lema de V. D. Irtegor [17] que faz uma extensão da teoria das inequações diferenciais do tipo de Tchaplíguin [6] às inequações a diferenças finitas.

Lema

Se para o sistema de equações a diferenças finitas

$$y_{n+1} = g_n(y_n), \quad (2.19)$$

com o segundo membro não decrescente com relação a y_n^j , $j=1, \dots, m$, tivermos

$$\psi_{n+1}^j \leq g_n^j(\psi_n^1, \dots, \psi_n^m) \leq y_{n_0}^j,$$

então $\psi_n^j \leq y_n^j$ para todo $n \geq n_0$.

Por outro lado, se tivermos

$$\psi_{n+1}^j \geq g_n^j(\psi_n^1, \dots, \psi_n^m) \geq y_{n_0}^j,$$

então $\psi_n^j \geq y_n^j$ para todo $n \geq n_0$.

Definição 2.12

A solução $y_n \equiv 0$ de (1) é dita semi-estável, segundo Lagrange, superiormente, com relação às componentes $y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^\ell$, ($\ell \leq m$), se existirem $\varepsilon > 0$, $n_0 \in I$ e $\delta(\varepsilon, n_0) > 0$, tais que, se

$$\sum_{j=1}^m |y_0^j| < \delta, \quad \text{então}$$

$$\sum_{s=1}^{\ell} |y_n^s| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Definição 2.13

A solução $y_n \equiv 0$ de (2.19) é dita semi-estável superiormente segundo Liapunov, com relação às componentes $y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^\ell$, ($\ell \leq m$), se para qualquer $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, e $n_0 \geq 0$, existir um número $\delta(\varepsilon, n_0)$ tal que, se

$$\sum_{j=1}^m |y_0^j| < \delta, \text{ então}$$

$$\sum_{s=1}^{\ell} |y_n^s| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in I.$$

Definição 2.14

A solução $y_n \equiv 0$ de (1) é dita assintoticamente semi-estável, segundo Lagrange, se ela for semi-estável, segundo Lagrange e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^{\ell} |y_n^s| = 0$$

para todo y_0 , tal que $\sum_{j=1}^m |y_0^j| < \delta$.

Definição 2.15

A solução $y_n \equiv 0$ de (2.19) é dita assintoticamente semi-estável, segundo Liapunov, se ela for semi-estável, segundo Liapunov, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^{\ell} |y_n^s| = 0$$

para todo y_0 , tal que $\sum_{j=1}^m |y_0^j| < \delta_1 \leq \delta$, $\delta_1 > 0$.

Na investigação sobre a estabilidade das soluções das equações a diferenças finitas, quase sempre são usados os métodos desenvolvidos para as equações diferenciais, em particular, o segundo método de Liapunov, que tem mostrado não ser muito eficiente, se aplicado diretamente.

Provaremos aqui, alguns resultados utilizando a teoria das funções vetoriais de Liapunov desenvolvida por V. M. Matrossov, para as equações diferenciais, usando o método de com

paração [1, 2, 3, 4].

Melhoraremos, também, os resultados de V. D. Irtegov, [17], para a equação do tipo (2.4), utilizando os resultados obtidos anteriormente, no tocante à utilização de mais de uma variação da função de Liapunov. Daremos, também, algumas maneiras de aplicação destes resultados fazendo uso do trabalho de A. M. Zverkin, [19], desenvolvido para as equações diferenciais com retardamento.

Portanto, sejam as funções reais $v_n^1(x), \dots, v_n^N(x)$ definidas e contínuas em $\Omega \times I$, onde $\Omega = \{x : x \in \mathbb{R}^m, ||x|| < H < +\infty\}$ e a função vetorial

$$v_n = (v_n^1, \dots, v_n^N), \quad v_n^s(0) \equiv 0 \quad \text{para } n \in I.$$

A norma de v_n é dada por

$$||v_n|| = |v_n^1| + \dots + |v_n^N|.$$

Teorema 2.4

Suponhamos a existência das funções $v_n^1, \dots, v_n^N$ que têm as seguintes propriedades em $\Omega \times I$:

$$(1) \quad v_n^s(x) \geq 0; \quad s = 1, \dots, \ell; \quad 1 \leq \ell \leq N, \quad \text{e} \\ \tilde{v}_n = \sum_{s=1}^{\ell} v_n^s(x) \quad \text{é positiva definida.}$$

$$(2) \quad v_{n+1}^s \leq g_n^s(v_n), \quad s = 1, \dots, N, \quad \text{ao longo das soluções de} \\ (2.4) \text{ que satisfazem a seguinte condição:}$$

$$\Delta_{(k,n)} \tilde{v}(x_n) \geq 0,$$

onde k é um inteiro.

(3) As funções $g_n^s(v_n)$ não decrescem pela função v_n .

(4) A solução $y_n^s \equiv 0$, $s = 1, \dots, N$, do sistema de comparação

$$y_{n+1}^s = g_n^s(y_n^1, \dots, y_n^N)$$

é semi-estável, segundo Liapunov (segundo Lagrange), superiormente, pelas componentes y_n^s , $s = 1, \dots, \ell$.

Então, a solução trivial de (2.4) é estável, segundo Liapunov (segundo Lagrange).

Prova

Dado um número $A > 0$, tão pequeno quanto necessário, existe um $\varepsilon(A) > 0$, tal que, se $\sum_{s=1}^{\ell} v_n^s(x) < \varepsilon$, então $||x|| < A$.

Por hipótese, existe um $\delta(\varepsilon, n_0)$, tal que

$$\sum_{s=1}^{\ell} y_n^s(y_{n_0}, n_{n_0}) < \varepsilon, \quad \text{para } n \in I \text{ e } \sum_{s=1}^N y_{n_0}^s < \delta.$$

Como a função $v_n(x)$ é contínua por x , e $v_n^s(0) \equiv 0$, então $v_{n_0}(x)$, como função de x , admite o limite superior infinitesimal. Assim sendo, existe um número $\eta(\delta, n_0)$, tal que

$$||v_{n_0}(x_{n_0})|| < \delta \quad \text{se} \quad ||x_{n_0}|| < \eta.$$

Devemos mostrar que

$$||x_n(x_{n_0}, n_{n_0})|| < A \quad \text{para } n \geq n_0 \text{ e } ||x_{n_0}|| < \eta.$$

Esta prova se dará por contradição. Isto é, suponhamos que existem $x_{n_0}^*$ e $n^* \in I$, tal que $||x_{n_0}^*|| < \eta$, $||x_n(x_{n_0}^*, n_{n_0})|| < A$

para $n_0 \leq n < n^*$, mas $\|x_{n^*}(x_{n_0}^*, n_0)\| \geq A$.

Fazemos $y_{n_0}^{*s} = v_{n_0}^s(x_{n_0}^*)$, $1 \leq s \leq N$. Portanto,

$$\sum_{s=1}^N y_{n_0}^{*s} < \delta, \quad \text{logo} \quad \sum_{s=1}^N y_n^{*s} < \epsilon, \quad n \in I.$$

Pela segunda hipótese do teorema, temos:

$$v_{n+1} = v_{n+1}(f_n(x_n)) \leq g_n(v_n),$$

de onde obtemos o sistema de comparação

$$y_{n+1} = g_n(y_n).$$

Fazendo uso do lema de V. D. Irtegov, obtemos:

$$y_n \geq v_n \quad \text{para todo } n \geq n_0, \quad (2.20)$$

onde a desigualdade entre vetores, entendemos a desigualdade por componentes destes vetores.

De (2.20) concluímos que

$$\sum_{s=1}^N v_n^s(x_{n_0}^*) \leq \sum_{s=1}^N y_n^s(y_{n_0}^*, n_0^*) < \epsilon, \quad n \in I.$$

Isto contradiz a hipótese de que $\|x_{n^*}\| \geq A$, pois se $\sum_{s=1}^N v_n^s(x) < \epsilon$ então deveríamos ter $\|x\| < A$.

Desta forma, provamos a estabilidade, segundo Liapunov.

Analogamente, provamos a estabilidade segundo Lagrange.

Prova

A prova é análoga a do teorema (2.4), pois neste caso, o número δ pode ser escolhido independentemente do número n_0 .

Teorema 2.6

Se acrescentarmos à quarta hipótese do teorema (2.4) que a solução $y_n^s \equiv 0$, $s = 1, \dots, N$, do sistema de comparação é semi-estável, segundo Liapunov (segundo Lagrange), assintoticamente e superiormente, pelas componentes y_n^s , $s = 1, \dots, \ell$, então a solução trivial de (2.4) é assintoticamente estável, segundo Liapunov (segundo Lagrange).

Prova

Do teorema (2.4) concluimos que a solução $x_n \equiv 0$ de (2.4) é estável, segundo Liapunov (segundo Lagrange). Devemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(x_{n_0}, n_0) = 0 \quad \text{se} \quad ||x_{n_0}|| < \eta.$$

Para tanto, basta estabelecer que se $||x_{n_0}|| < \eta$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^{\ell} v_n(x_n(x_{n_0}, n_0)) = 0.$$

Analogamente à prova do teorema (2.4), pelo lema de V.

D. Irtegov, temos

$$\sum_{s=1}^{\ell} v_n(x_n(x_{n_0}, n_0)) \leq \sum_{s=1}^{\ell} y_n^s(y_{n_0}, n_0) < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Como $y_n^s \equiv 0$, $s = 1, \dots, N$ é semi-estável, superior e assintoticamente, segundo Liapunov (segundo Lagrange), pelas componentes y_n^s , $s = 1, 2, \dots, \ell$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^{\ell} v_n(x_n(x_{n_0}, n_0)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^{\ell} y_n^s(y_{n_0}, n_0) = 0$$

Desta forma, o teorema fica provado.

Analogamente ao teorema (2.5), podemos concluir que, se a função $\tilde{v}_n$ admite o limite superior infinitesimal, então a solução trivial de (2.4) é estável, uniformemente e assintoticamente, segundo Liapunov (segundo Lagrange).

Exemplo 2.9

Seja a equação

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-r} \quad (2.20)$$

Vamos considerar $v(x) = |x|$.

Pelo teorema (2.6), temos:

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &= |ax_n + bx_{n-r+1}| \leq \\ &\leq |a||x_n| + |b||x_{n-r+1}|. \end{aligned}$$

Tomando, por exemplo, $k = 1-r$, obtemos:

$$|x_{n+1}| \leq (|a| + |b|)|x_n|,$$

ou

$$v_{n+1} \leq (|a| + |b|)v_n,$$

ou ainda

$$y_{n+1} = (|a| + |b|)y_n$$

Daqui, obtemos que uma condição suficiente para a estabilidade assintótica da equação (2.20) é que

$$|a| + |b| < 1.$$

Exemplo 2.10

Consideramos a equação:

$$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + bx_{n-1}y_{n-1} \\ y_n = -cy_{n-1} + dx_{n-1}y_{n-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

Tomamos:

$$v(x) = ||x|| = \max_{i=1,2} |x^i| = |x^j|.$$

Vamos considerar, inicialmente, que $j = 1$, ou seja:

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &= |ax_n + bx_ny_n| \leq \\ &\leq |a||x_n| + |b||x_n||y_n| \leq \\ &\leq |a||x_n| + |b||x_n|^2, \end{aligned}$$

ou

$$v_{n+1} \leq |a|v_n + |b|v_n^2.$$

Assim obtemos a equação de comparação:

$$\xi_{n+1} = |a|\xi_n + |b|\xi_n^2.$$

Vamos analisar a semi-estabilidade assintótica desta e quação, utilizando o teorema (2.2'), ou seja, tomamos a função

$v(\xi) = \xi^2$ e calculamos Γ_1^+ e Γ_2^+ , no plano dos parâmetros $(x, y) = (\xi_{n-1}, \xi_{n-2})$:

$$\Delta_{(1,n)}^v = (a^2 - 1)x^2 + 2|a||b|x^3 + bx^4 > 0$$

$$\Delta_{(2,n)}^v = [(|a| + |b|)x - y][(|a| + |b|)x + y] > 0.$$

Daqui, levando em consideração que $x > 0$ e $y > 0$, obtemos as regiões:

$$\Gamma_1^+ = \left\{ \frac{1 - |a|}{|b|} < x \right\}$$

e

$$\Gamma_2^+ = \{ (|a| + |b|)x - y > 0 \}.$$

Assim sendo, a vizinhança de estabilidade será $||\xi|| < d_1$, onde

$$d_1 = \frac{1 - |a|}{|b|} > 0.$$

Analogamente, se tomarmos $j = 2$, ou seja, $v(x) = |x|^2$, obtemos a equação de comparação:

$$\xi_{n+1} = |c|\xi_n + |d|\xi_n^2.$$

A vizinhança de estabilidade para esta equação será $||\xi|| < d_2$, onde:

$$d_2 = \frac{1 - |c|}{|d|} > 0.$$

Portanto, a vizinhança de estabilidade da solução trivial de (2.21) será $||x|| < d$, onde $d = \min\{d_1, d_2\}$.

§ 7. INVARIÂNCIA

Consideramos a equação:

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad (2.22)$$

onde $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e, se $x^j \rightarrow y$, então $f(x^j) \rightarrow f(y)$.

Como solução, correspondente à condição inicial x_0 , de (2.22), entendemos o conjunto $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$.

Definição 2.16

O ponto y é ponto limite positivo de x_0 se existir uma sequência de inteiros $\{n_i\}$, tal que, $n_i \rightarrow +\infty$ e $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$, para $i \rightarrow +\infty$.

Definição 2.17

O conjunto M é dito positivamente invariante se $f(M) \subset M$. Se tivermos $f(M) = M$, então o conjunto M é dito invariante.

Representamos por $\Omega(x_0)$ o conjunto ω -limite de x_0 , o qual consiste de todos os pontos limites positivos de x_0 .

Teorema 2.7

Suponhamos que $v(x)$ é uma função positiva definida e contínua numa região G , onde satisfaz, para a equação (2.22), a seguinte condição: Existe $k > 1$, tal que se $\Delta_{(1,n)} v(x_n) \geq 0$ implica $\Delta_{(k,n)} v(x_n) \leq 0$ e x_n é uma solução de (2.22), limitada em G para todo $n \geq 0$, então existe um número C , tal que:

$$x_n \rightarrow M \cap v^{-1}(C)$$

para $n \rightarrow +\infty$, onde M é o maior conjunto invariante.

Prova

Construamos a função auxiliar $y : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ do seguinte modo:

$$y(t) = C_j, \quad t \in (jk, (j+1)k], \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{e } C_j = \sup\{v(x_n), \quad jk < n \leq (j+1)k\}.$$

$y(t)$ é não crescente, pois, em caso contrário, existiria $n^* \in [0, +\infty)$ e um índice s , tal que

$$C_{s-1} < C_s = v(x_{n^*}).$$

Neste caso teríamos:

$$\Delta_{(1, n^*)} v(x_{n^*}) > 0 \quad \text{e} \quad \Delta_{(k, n^*)} v(x_{n^*}) > 0,$$

o que contradiz a hipótese do teorema.

Como $v(x_n)$ é limitada inferiormente e superiormente, existe o limite:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v(x_n) = C.$$

Se $p \in \Omega(x_0)$, conjunto ω -limite correspondente a x_0 , então existe uma subsequência $n_i \rightarrow +\infty$ e $x_{n_i} \rightarrow p$. Como $v(x)$ é contínua, temos:

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} v(x_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} v(x_{n_i}) = v(p) = C,$$

$$\text{e } (x_0) \subset v^{-1}(C).$$

Como $\Omega(x_0)$ é invariante, temos que $v(f^n(p)) = C$ e

$$\Delta_{(1, n)} v(p) = \Delta_{(k, n)} v(p) = 0.$$

Portanto, o conjunto invariante $\Omega(x_0)$ é um subconjunto do conjunto onde as funções $\Delta_{(1,n)} v(x_n)$ e $\Delta_{(k,n)} v(x_n)$ se anulam simultaneamente, logo $\Omega(x_0)$ está em M que é o maior conjunto invariante. Assim, o teorema fica provado.

CAPÍTULO III

§ 1. FUNÇÕES VETORIAIS DE LIAPUNOV PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

Consideremos a equação diferencial funcional

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t); \quad x_t = x(t+\theta); \quad \theta \in [-h, 0]; \quad t \in \mathbb{R}^+ = [t_0, +\infty)$$

$$\psi(\theta) = \begin{cases} x_{t_0}(0) = \alpha \in \mathbb{R}^n \\ x_{t_0}(\theta) = \hat{\psi}(\theta), \quad \theta \in [-h, 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \times L_2[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\hat{\psi} : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Vamos supor que o operador f satisfaz as condições de Caratheodory em $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$, onde $\mathbb{R}^+ = [t_0, +\infty)$ e Γ é um aberto de $L_2[-h, 0]$ que contém a origem [16]. Isto é, $f(t, \hat{\psi})$ é t -mensurável para cada $\hat{\psi}$ fixa, é contínua em $\hat{\psi}$ para cada t fixo, e ainda, para cada par $(t, \hat{\psi})$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}(t, \hat{\psi}) \subset \mathbb{R}^+ \times \Gamma$ e uma função $\beta(s)$ integrável, segundo Lebesgue, tal que

$$|f(s, \tilde{\psi})| \leq \beta(s); \quad (s, \tilde{\psi}) \in \mathcal{O}(t, \hat{\psi}).$$

Nestas condições temos garantida a existência de solução no sentido de Caratheodory, bem como a dependência contínua da solução com relação às condições iniciais. Assim, entenderemos por solução do problema de Cauchy (3.1), a função $x(t)$ absolutamente contínua que satisfaz a equação (3.1) em quase todos

os pontos $t \geq t_0$ e coincide com a função inicial no conjunto $[t_0 - h, t_0]$.

Representamos por Φ o conjunto de todos os pares ordenados do tipo $\psi = (\alpha, \hat{\psi})$, onde α é um vetor do R^n e $\hat{\psi}$ é uma função do espaço de Hilbert $L_2[-h, 0]$. É fácil ver que Φ , também, é um espaço de Hilbert, onde o produto interno está definido pela fórmula:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \alpha * \beta + \int_{-h}^0 \hat{\psi}^*(\theta) \hat{\psi}(\theta) d\theta$$

onde $\psi = (\alpha, \hat{\psi})$ e $\psi = (\beta, \hat{\psi})$.

Assim, a norma em Φ fica bem definida por

$$||\psi|| = (||\alpha||_1^2 + ||\hat{\psi}||_2^2)^{1/2},$$

onde

$$||\cdot||_1 \text{ é a norma euclidiana,}$$

e $||\cdot||_2$ é a norma em L_2 .

Consideramos, concomitantemente, funções reais $v_1(t, x), \dots, v_k(t, x)$, $v_s : R^+ \times R^n \rightarrow R$, absolutamente contínuas, bem como a função vetorial

$$v = (v_1, \dots, v_k); \quad v_s(t, 0) \equiv \dot{v}_s(t, 0) \equiv 0, \quad t \in R^+,$$

onde a derivada de $v_s(t, x)$, com relação a t , pode deixar de existir, no sentido comum, em um conjunto de medida nula, e $\dot{v}_s : R^+ \times \tilde{\Gamma} \rightarrow R^n$, $\tilde{\Gamma} \subset R^n$, e a norma de v é definida por

$$||v|| = |v_1| + \dots + |v_k|.$$

Além disso, sejam as funções reais $g_1(t, \xi), \dots, g_k(t, \xi)$,

definidas em $R^+ \times G$ e Lebesgue-integrável em R^+ , onde

$$G = \{\xi : \xi \in R^k, \quad ||\xi|| < H < +\infty\}.$$

Dizemos que uma função $g(t, \xi)$ não decresce pelas suas componentes não diagonais em G , se

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k) \in G$$

$$\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_{j-1}, \xi_j, \xi'_{j+1}, \dots, \xi'_k) \in G,$$

e $\xi_i \leq \xi'_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, então $g_j(t, \xi) \leq g_j(t, \xi')$.

$$\text{Seja } S_B = \{x : x \in R^n, \quad ||x|| < B\}.$$

Chamaremos integral superior e integral inferior de uma equação diferencial que passa pelo ponto (t_0, y_0) , as funções $y^+(t, t_0, y_0)$ e $y^-(t, t_0, y_0)$, respectivamente, tal que todas as demais soluções que passam por este ponto $y(t, t_0, y_0)$, satisfazem a seguinte condição:

$$\bar{y}(t, t_0, y_0) \leq y(t, t_0, y_0) \leq \underline{y}(t, t_0, y_0).$$

No caso vetorial, estas desigualdades serão entendidas por componentes.

Definição 3.1

Dizemos que a solução trivial $y(t) \equiv 0$, da equação diferencial $\dot{y}(t) = g(t, y(t))$ é semi-estável, com relação às componentes $y_1, \dots, y_\ell$, $\ell \leq k$, se, dado um número $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tal que, se $||y_0|| < \delta$, então

$$\sum_{s=1}^{\ell} |y_s^{\pm}(t, t_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Definição 3.2

Dizemos que a solução trivial $y(t) \equiv 0$ é semi-estável, assintoticamente, com relação às componentes $y_1, \dots, y_k$, se ela for semi-estável com relação a estas componentes e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^{\ell} |y^{\theta}_s(t, t_0, y_0)| = 0.$$

Enunciaremos agora, um lema que nos será útil futuramente [4].

Seja o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $g(t, y(t))$ satisfaz as condições de Caratheodory numa região Ω , vizinhança da origem.

Lema

Se $\dot{\xi} \leq g(t, \xi)$ e $\xi(t_0) = y(t_0)$, então por cada ponto (t_0, y_0) passará uma solução $y^{\theta}_t(t, t_0, y_0)$ de (3.2) tal que

$$\xi(t, t_0, y_0) \leq y^{\theta}_t(t, t_0, y_0)$$

para todo $t \geq t_0$. $y^{\theta}_t(t, t_0, y_0)$

Se $\dot{\xi} \geq g(t, \xi)$, então

$$\xi(t, t_0, y_0) \geq y^{\theta}_t(t, t_0, y_0).$$

$$y^{\theta}_t(t, t_0, y_0)$$

Teorema 3.1

Suponhamos que existem funções $v_1(t, x), \dots, v_k(t, x)$, como acima, que têm em $R^+ \times S_B$, as seguintes propriedades:

(1) $v_s(t, x) \geq 0$, $s = 1, \dots, m$; $1 \leq m \leq k$ e $\sum_{s=1}^m v_s(t, x)$ é positiva definida.

(2) $\dot{v}_s(t, x) \leq g(t, v) + w_s(t, x_t)$, $s = 1, \dots, k$ ao longo das soluções de (3.1) que satisfazem as condições:

$$\sum_{s=1}^m v_s(\sigma, x(\sigma)) \leq \sum_{s=1}^m v_s(t, x(t)); \quad \sigma \leq t, \quad \text{e} \quad t \geq t_0,$$

onde $w_s(t, x_t) \leq 0$, $s = 1, \dots, k$.

(3) Cada função $g_s(t, v)$ não decresce pelas suas componentes não diagonais em G .

(4) A solução $y(t) \equiv 0$ do sistema de comparação

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t)) \quad (3.3)$$

onde $g = (g_1, \dots, g_k)$

é semi-estável com relação às componentes $y_1, \dots, y_m$ para $y_{s_0} \geq 0$, $s = 1, \dots, m$.

Então o equilíbrio $x(t) \equiv 0$ do sistema (3.1) é estável, segundo Liapunov.

Prova

Seja dado um número $B > A > 0$, tão pequeno quanto necessário para se encontrar um número $\varepsilon(A)$ tal que, se

$$\sum_{s=1}^m v_s(t, x) < \varepsilon \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{então} \quad ||x|| < A.$$

Uma vez que a solução $y(t) \equiv 0$ de (3.3) é estável com relação às componentes $y_1, \dots, y_m$, então dados $\varepsilon(A)$ e t_0 , existe um $\delta(\varepsilon, t_0)$, tal que

$$\sum_{s=1}^m |y_s^+(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$$

para $t \geq t_0$, $||y_0|| < \delta$ e $y_{s_0} \geq 0$, $s = 1, \dots, m$.

Uma vez que $v_s(t, x)$ é contínua e $v_s(t, 0) \equiv 0$, existe um número $\eta(\delta, t_0) < A$, tal que

$$||v(t_0, x)|| < \delta \quad \text{se} \quad ||x|| < \eta.$$

Pelo teorema da dependência contínua da solução, das condições iniciais [26], existe $t_1 > t_0$, tal que, se $||\psi|| < \eta$, então $||x(t, t_0, \psi)|| < A$, para $t \in [t_0, t_1]$.

Vamos mostrar que se $||\psi|| < \eta$, então $x(t, t_0, \psi) < A$ para todo $t \geq t_0$.

Provaremos por contradição.

Suponhamos que existem $\psi^* \in \Phi$ e $t^* \in \mathbb{R}^+$, tais que,

$$||x(t, t_0, \psi^*)|| < A \quad \text{se} \quad t \in [t_0, t^*],$$

e

$$||x(t^*, t_0, \psi^*)|| = A, \quad \text{onde} \quad ||\psi^*|| < \eta.$$

Fazemos

$$y_{s_0}^* = \sup[v_s(t_0, \psi^*), \quad \theta \in [-h, 0]].$$

Como $y_{s_0}^* \geq 0$, $s = 1, \dots, m$ e pelo elegido δ , te
remos

$$\sum_{s=1}^m |y^*(t, t_0, y_0^*)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{se} \quad ||y_0^*|| < \delta,$$

pois $y(t) \equiv 0$ é semi-estável pelas componentes $y_1, \dots, y_m$.

Sejam as funções $v_s(t, x)$, $s = 1, \dots, k$ como as já descritas. Pelas propriedades de $v_s(t, x)$, a derivada

$$\dot{v}_s(t, x) = \frac{\partial v_s}{\partial t} + (\text{grad } v_s, \dot{x}), \quad s = 1, \dots, k,$$

existe quase sempre.

Pela condição (2) do teorema, temos:

$$\dot{v}_s(t, x) \leq f_s(t, v), \quad s = 1, \dots, k, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Por isto, usando o lema, temos,

$$v_s(t, x(t, t_0, \psi^*)) \leq y_s^+(t, t_0, y_0^*), \quad s = 1, \dots, k,$$

para todo $t \geq t_0$.

Logo,

$$\sum_{s=1}^m v_s(t, x(t, t_0, \psi^*)) \leq \sum_{s=1}^m |y_s^+(t, t_0, y_0^*)| < \varepsilon$$

para todo $t \geq t_0$.

Isto contradiz a suposição de que $\|x(t^*, t_0, \psi^*)\| = A$, pois se isto fosse verdade, deveríamos ter

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \left\{ \sum_{s=1}^m v_s(t, x(t^*, t_0, \psi^*)) \right\} = \varepsilon,$$

e a solução $y(t) \equiv 0$ do sistema de comparação não seria semi-estável pelas componentes $y_1, \dots, y_m$.

Desta forma, o teorema (3.1) fica provado.

Corolário 3.1

Se na hipótese (1) do teorema (3.1) pedirmos que a função $\sum_{s=1}^m v_s(t, x)$ tenda a zero, uniformemente, em $\mathbb{R}^+$ quando $\|x\| \rightarrow 0$, então a solução trivial de $x(t) \equiv 0$ de (3.1) é uniformemente estável, segundo Liapunov.

Prova

A prova é análoga a do teorema, bastando ressaltar que, neste caso, o δ já não depende de t_0 . Depende apenas de ε .

Vejamos agora, uma aplicação para este teorema. Seja a equação

$$\dot{x}(t) = ax(t-\tau(t))$$

onde a é uma constante e

$$\tau(t) = \begin{cases} h > 0, & \text{se } t \in [2n, 2n+1) \\ 0, & \text{se } t \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta equação pode ser escrita sob a forma

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(t-h) \quad h < 1 \quad (3.4)$$

onde

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [2n, 2n+1) \\ a, & \text{se } t \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta(t) = \begin{cases} a, & \text{se } t \in [2n, 2n+1) \\ 0, & \text{se } t \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

É fácil verificar que o segundo membro de (3.4) satisfaz todas as condições de Caratheodory. Tomamos a função $v(t, x) = \frac{1}{2}x^2$ e buscamos a sua derivada, por t , ao longo das soluções da equação (3.4), ou seja,

$$\dot{v} \leq \alpha(t)x^2(t) + |\beta(t)| |x(t)| |x(t-\tau)|.$$

Pela condição $v(x(t-\tau)) \leq v(x(t))$, temos que
 $|x(t-h)| \leq |x(t)|$ de onde obtemos a inequação diferencial

$$\dot{v} \leq 2[\alpha(t) + |\beta(t)|]v.$$

Fazendo $\alpha(t) + |\beta(t)| = \gamma(t)$, obtemos a equação de comparação

$$\dot{y} = 2\gamma(t)y \quad (3.5)$$

Pelo teorema (3.1) temos que se (3.5) for estável, então (3.4) também será estável.

A solução geral de (3.5) é dada pela fórmula

$$y(t) = e^{2 \int_{t_0}^t \gamma(s) ds}$$

Como $\gamma(t)$ é uma função periódica de período $T = 2$, temos

$$\int_0^2 \gamma(t) dt = \int_0^1 \gamma dt + \int_1^2 |\gamma| dt = a + |a|.$$

Desta forma, obtemos que, uma condição suficiente para a estabilidade de (3.5), conseqüentemente, para a estabilidade de (3.4), é que a seja negativo.

Pelo teorema de B. S. Razumikhin, deveríamos ter $\alpha(t) + |\beta(t)| \leq 0$, para $t \geq t_0$, o que não é possível, pois $\alpha(t) + |\beta(t)| = |a| > 0$ para $t \in [2n, 2n+1)$.

Teorema 3.2

Nas condições do teorema (3.1), se a solução trivial $y(t) \equiv 0$ do sistema de comparação (3.3) for assintoticamente semi-estável, então a solução trivial $x(t) \equiv 0$ de (3.1) é assintoticamente estável, segundo Liapunov.

Prova

Pelo teorema (3.1), temos que a solução $x(t) \equiv 0$ é estável. Devemos provar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ||x(t, t_0, \psi)|| = 0 \quad \text{se} \quad ||\psi|| < \eta.$$

Para tanto, basta estabelecer que, se $||\psi|| < \eta$, então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^m v_s(t, x(t, t_0, \psi)) = 0.$$

Analogamente ao que foi feito na prova do teorema (3.1), temos

$$\sum_{s=1}^m v_s(t, x(t, t_0, \psi)) \leq \sum_{s=1}^m |y_s^+(t, t_0, y_0)|.$$

Como $y(t) \equiv 0$ é assintoticamente semi-estável com relação às componentes $y_1, \dots, y_m$, passando ao limite a última desigualdade, $t \rightarrow +\infty$, temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{s=1}^m v_s(t, x(t, t_0, \psi)) = 0.$$

Desta forma, o teorema (3.2) fica provado.

Corolário 3.2

Nas condições do teorema (2), se tivermos que a função $\sum_{s=1}^m v_s(t, x)$ tende a zero, uniformemente, em R^+ , quando $\|x\| \rightarrow 0$, então a solução trivial $x(t) = 0$ de (3.1) é uniformemente e assintoticamente estável, segundo Liapunov.

A prova deste corolário é imediata.

Exemplo 3.1

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(t|\sin t| + e^t)x_1(t) - (t|\sin t| - e^t)x_2(t) - \\ \quad - \sin^2 t(x_1(t)x_1^2(t-\tau) + x_1(t)x_2^2(t-\tau)) \\ \dot{x}_2(t) = -(t|\sin t| - e^t)x_1(t) - (t|\sin t| + e^t)x_2(t) - \\ \quad - \sin^2 t(x_2(t)x_1^2(t-\tau) + x_2(t)x_2^2(t-\tau)) \end{cases}$$

onde τ é uma constante positiva.

Tomando as funções $v_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$ e $v_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$ e as duas derivadas ao longo das soluções do sistema, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -2t|\sin t|(x_1(t) + x_2(t))^2 - (x_1(t) + x_2(t))^2 \\ &\quad \cdot (x_1^2(t-\tau) + x_2^2(t-\tau) \sin^2 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= -2e^t(x_1(t) - x_2(t))^2 - (x_1(t) - x_2(t))^2 \\ &\quad \cdot (x_1^2(t-\tau) + x_2^2(t-\tau) \sin^2 t) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\dot{v}_1 \leq -4t|\sin t| v_1 + w_1(t, x(t), x(t-\tau))$$

$$\dot{v}_2 \leq -4e^t v_2 + w_2(t, x(t), x(t-\tau))$$

onde

$$w_1 = -(x_1(t) + x_2(t))^2 (x_1^2(t-\tau) + x_2^2(t-\tau)) \sin^2 t \leq 0$$

$$w_2 = -(x_1(t) - x_2(t))^2 (x_1^2(t-\tau) + x_2^2(t-\tau)) \sin^2 t \leq 0$$

Conferimos as hipóteses do teorema (3.2).

(1) $v_1(x_1, x_2) \geq 0$ e $v_2(x_1, x_2) \geq 0$. $v_1 + v_2$ é uma função positiva definida.

(2) $\dot{v}_1 \leq -4t|\sin t|v_1$ e $\dot{v}_2 \leq -4e^t v_2$.

(3) A função $-4t \sin t v_1$ não decresce por v_2 , e a função $-4e^t v_2$ não decresce por v_1 .

(4) A solução nula do sistema de comparação

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -4t|\sin t| y_1 \\ \dot{y}_2 = -4e^t y_2 \end{cases}$$

é assintoticamente estável.

Então a solução trivial de (3.6) é assintoticamente estável, segundo Liapunov.

Exemplo 3.2

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) \quad (3.7)$$

onde A e B são matrizes constantes 2×2 e τ uma constante positiva.

Com base no teorema (3.2), obtemos uma condição sufi
ciente para a estabilidade assintótica deste sistema sob a for
ma:

$$\det D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}N - \frac{K^2}{N} - \frac{2K^2}{N} & -\frac{K^2}{N} - \frac{2K^2}{N} \\ -\frac{Q^2}{P} - \frac{2Q^2}{P} & \frac{1}{2}P - \frac{Q^2}{P} - \frac{2Q^2}{P} \end{vmatrix} > 0$$

onde

$$K = \max\{|b_{11} + b_{21}|; |b_{12} + b_{22}|\}$$

$$N = \max\{a_{11} + a_{21}; a_{12} + a_{22}\} < 0$$

$$P = \max\{a_{11} - a_{21}; a_{22} - a_{12}\} < 0$$

$$Q = \max\{|b_{11} - b_{21}|; |b_{12} - b_{22}|\}$$

Realmente. Tomamos as funções $v_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$ e
 $v_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$, e suas derivadas por t , ao longo das soluu
ções de (3.7) que satisfazem a condição:

$$\begin{aligned} &v_1(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) + v_2(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) \leq \\ &\leq v_1(x_1(t), x_2(t)) + v_2(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &\leq N(x_1(t) + x_2(t))^2 + \\ &+ K|x_1(t) + x_2(t)| |x_1(t-\tau)| + \\ &+ K|x_1(t-\tau) + x_2(t-\tau)| |x_2(t-\tau)|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade

$$-az^2 + bz \leq -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a},$$

onde $a > 0$, $b > 0$, $z > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 \leq & \frac{N}{4}(x_1(t) + x_2(t))^2 - \frac{K^2}{2N}x_1^2(t-\tau) - \\ & - \frac{K^2}{N}x_2^2(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pela condição (3.8), temos

$$x_i^2(t-\tau) \leq x_1^2(t) + x_2^2(t), \quad i = 1, 2$$

Substituindo estes valores em (3.9), obtemos:

$$\dot{v}_1 \leq \left(\frac{N}{2} - \frac{K^2}{N} - \frac{2K^2}{N}\right)v_1 + \left(\frac{K^2}{N} + \frac{2K^2}{N}\right)v_2.$$

Analogamente encontramos a segunda equação,

$$\dot{v}_2 \leq -\left(\frac{Q^2}{P} + \frac{2Q^2}{P}\right)v_1 + \left(\frac{P}{2} - \frac{Q^2}{P} - \frac{2Q^2}{P}\right)v_2.$$

Escrevendo este sistema de inequações sob a forma veto
rial, temos:

$$\dot{v} \leq Dv.$$

Como N e P são números negativos, a função Dv não decresce pelas suas componentes não diagonais.

Desta forma, o sistema de comparação para a equação (3.7), será

$$\dot{y} = Dy,$$

e a sua equação característica,

$$\lambda^2 + \alpha_0 \lambda + \alpha_1 = 0$$

onde $\alpha_0 = -d_{11} - d_{22} > 0$ e $\alpha_1 = \det D$.

Pelo critério de Routh-Hurwitz, temos

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{e} \quad \alpha_0 \alpha_1 > 0.$$

Como $\alpha_0 > 0$, por hipótese, devemos ter $\alpha_1 = \det D > 0$.

§ 2. INSTABILIDADE. DEFINIÇÃO

Definição 3.3

A solução trivial $y(t) \equiv 0$, da equação (3.2) é y_1 -instável, se para qualquer número $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, porém $\delta < \varepsilon$ e ε suficientemente pequeno, existir $t_1 \in \mathbb{R}^+$ e y_0 , $\|y_0\| < \delta$, tal que, todas as soluções $y(t, t_0, y_0)$ do sistema (3.2), correspondentes às condições iniciais $y_{s_0} \geq 0$, $s=1, \dots, n$, permanecem em Ω para todo $t \in [t_0, t_0 + t_1]$, e $y_1(t_0 + t_1, t_0, y_0) > \varepsilon$.

Teorema 3.3

Suponhamos que existem funções $v_1(t, x), \dots, v_k(t, x)$, como acima, que têm em $\mathbb{R}^+ \times S_B$, as seguintes propriedades.

(1) $v_s(t, x) \geq 0$, $s = 1, \dots, m$; $1 \leq m \leq k$ e $v_1(t, x)$ é positiva definida e tende a zero, uniformemente, em $\mathbb{R}^+$, quando $\|x\|$ tende a zero.

(2) $\dot{v}_s(t, x) \geq g(t, v) + w_s(t, x_t)$, $s = 1, \dots, k$ ao longo das soluções de (1) que satisfazem a condição $v(\sigma, x(\sigma)) \leq v(t, x(t))$; $\sigma \leq t$ e $t \geq t_0$,

onde $w_s(t, x_t) \geq 0$, $s = 1, \dots, k$.

(3) Cada função $g_s(t, v)$ não decresce pelas suas componentes não diagonais, em G .

(4) A solução trivial $y(t) \equiv 0$ do sistema de comparação,

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t)) \quad (3.10)$$

onde $g = (g_1, \dots, g_k)$ é y_1 -instável, para $y_{s_0} \geq 0$, $s = 1, \dots, m$.

Então o equilíbrio $x(t) \equiv 0$ do sistema (3.1) é instável, segundo Liapunov.

Prova

Pela primeira hipótese do teorema temos que, para qualquer número $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, encontra-se um número $\alpha(\varepsilon) > 0$, tal que

$$v_1(t, x) < \varepsilon \quad \text{para} \quad ||x|| < \alpha, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Devemos mostrar que, para qualquer número $A > 0$, $A < \alpha$, arbitrário e $t_0 \geq 0$, não existe $\lambda > 0$ tal que, se $||x_0|| < \lambda$, então $||x(t, t_0, x_0)|| < A$ para todo $t \geq t_0$.

Esta prova se dará por contradição, ou seja, suponhamos a existência de tal número λ e fazemos:

$$y_{s_0} = v_s(t_0, x_0).$$

Como as funções v_s são contínuas por x_0 , podemos supor λ suficientemente pequeno, para termos:

$$0 < \sum_{s=1}^k |y_{s_0}| = \sum_{s=1}^k |v_s(t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Como solução $y(t) \equiv 0$, do sistema de comparação (3.10) é y_1 -instável, existem $T > 0$ e x_0^* , $\|x_0^*\| < \lambda$, tais que $y(t, t_0, y_0^*)$, onde $y_0^* = v(t_0, x_0^*)$, fica em S_B para $t \in [t_0, t_0 + T]$ e $y_1(t_0 + T, t_0, y_0^*) > \varepsilon$.

Pela segunda hipótese do teorema e pela segunda parte do lema, temos:

$$v_s(t, x(t, t_0, x_0^*)) \geq y_s^-(t, t_0, y_0^*)$$

para $t \in [t_0, t_0 + T]$, $s = 1, \dots, k$, e em particular

$$v_1(t, t_0, x_0^*) \geq y_1^-(t, t_0, y_0^*),$$

ou

$$v_1(t_0 + T, x(t_0 + T, t_0, x_0^*)) \geq y_1^-(t_0 + T, t_0, y_0^*) > \varepsilon$$

o que significa que $\|x(t_0 + T, t_0, x_0^*)\| > \alpha > A$, contradizendo a suposição feita. Desta forma, o teorema fica provado.

Exemplo 3.3

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x^3(t) + \beta(t)x^3(t-\tau)$$

$$\text{Tomamos a função } v(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

$$\dot{v} = \alpha(t)x^4(t) + \beta(t)x^3(t)x(t-\tau),$$

$$\dot{v} \geq \alpha(t)x^4(t) - |\beta(t)| |x^3(t)| |x(t-\tau)|,$$

$$\dot{v} \geq (\alpha(t) - |\beta(t)|)x^4(t),$$

$$\dot{v} \geq 4(\alpha(t) - |\beta(t)|)v^2.$$

Portanto o sistema de comparação será:

$$\dot{y} = 4(\alpha(t) - |\beta(t)|)y^2.$$

Fazendo $\gamma(t) = 4(\alpha(t) - |\beta(t)|)$, obtemos a solução geral desta equação, sob a forma:

$$y(t) = \frac{1}{y_0 - \int_{t_0}^t \gamma(s) ds}.$$

Como y_0 é um número positivo, vemos que se

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s) ds = +\infty,$$

então a solução trivial do sistema de comparação é instável, pois para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}^+$, existirá sempre um $t_1 > t_0$, tal que

$$y_0 = \int_{t_0}^{t_1} \gamma(s) ds.$$

Um resultado análogo foi obtido em [16], utilizando funcional de Liapunov.

- [1] V. M. Matrossov - A teoria da estabilidade do movimento. P.M.M, Volume XXVI, 1962. (Russo)
- [2] V. M. Matrossov - Critério de avaliação com funções vetoriais de Liapunov; Equações Diferenciais, Volume 4, n.^o 8, 1968; Volume 4, n.^o 10, 1968; Volume 5, n.^o 7, 1969; Volume 5, n.^o 12, 1969. (Russo)
- [3] V. M. Matrossov - Sobre as equações e inequações diferenciais com descontinuidade no segundo membro; Equações Diferenciais, Volume 3, n.^o 3, 1967; Volume 3, n.^o 5, 1967. (Russo)
- [4] V. M. Matrossov - Método das funções vetoriais de Liapunov na análise dos sistemas compostos, com parâmetros distribuídos; Automática e Telemecânica, n.^o 1, 1971. (Russo)
- [5] B. S. Razumikhin - Sobre a estabilidade dos sistemas com retardamentos. P.M.M., Volume XX, 1956. (Russo)
- [6] T. Ważewski - Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications; Ann. de la Soc. Pol. de Math., n.^o 23, 1950.
- [7] L. E. El'sgol'c; S. B. Norkin - Introdução à teoria das equações diferenciais com argumentos variados; "Nauka" - 1971. (Russo)
- [8] V. B. Kolmanovski; V. R. Nossov - Estabilidade e regimes periódicos de sistemas controlados, com retardamento; "Nauka" - 1981. (Russo)
- [9] E. A. Barbachin - Funções de Liapunov; "Nauka" - 1970. (Russo)
- [10] D. R. Merkin - Introdução à teoria da estabilidade de movimentos; "Nauka" - 1976. (Russo)
- [11] P. S. Gromova, R. R. Ferreira - Método de Bayley para as Equações diferenciais com retardamento; Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Amizade dos Povos "Patrice Lumumba", Moscou, 1978. (Russo)

- [12] N. N. Krassovski - Sobre a aplicação do segundo método de Liapunov para a comparação com sistemas retardados; P.M.M., Volume XX, 1956. (Russo)
- [13] Krzysztof Gajewski - An the stability conditions of difference equations obtained by the comparison method; Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences, Volume XXX, n.º 7-8, 1982.
- [14] Z. Mikolajska - Une remarque sur des notes de Razumichin et Krasoviskij sur la stabilité asymptotique; Polonici Mathematici, XXII, 1969.
- [15] Roland Louboutin - Sur un théorème de H. Poincaré relatif aux équations aux différences finies; C. R. Acad. Paris, t. 299, série I, n.º 12, 1984.
- [16] J. K. Hale - Theory of Functional Differential Equations; New York, 1977.
- [17] V. D. Irtegov - Sobre a estabilidade das soluções das equações à diferença; Trudy K.A.I., Volume 125, 1970. (Russo)
- [18] L. Anapolski - O método de comparação em sistemas dinâmicos discretos - Funções vetoriais de Liapunov e suas aplicações; Novossibirsk "Nauka" - 1980, p. 92. (Russo)
- [19] A. M. Zverkin - Aplicação dos teoremas de comparação para a investigação da estabilidade de equações com retardamento; Trudy Seminara po teorii ..., Volume VII, 1969. (Russo)
- [20] Jerzy Popenda; Blażej Szmanda - On the oscillation of solutions of certain difference equations; Demonstratio Mathematica, Volume XVII, n.º 1, 1984.
- [21] B. P. Demidovitch - Lições da teoria matemática da estabilidade; M. "Nauka" - 1967. (Russo)
- [22] L. A. V. Carvalho - On Lyapunov functionals for linear difference equations; Ph.D. Thesis, Brown University, Providence, R.I., USA, 1979.
- [23] N. G. Tchetaiev - Estabilidade do movimento. Trabalhos de Mecânica Analítica, AN SSSP, M., 1962. (Russo)

- [24] F. N. Bailey - The application of Lyapunov's second method to interconnected systems; J. Soc. Industr. and Appl. Math., A3, n.^o 3, 1965.
- [25] I. V. Serebriokova - Métodos de solução das equações diferenciais com argumentos variados no século XVIII e primeira metade do século XIX; Trudy Seminara po teorii ..., Volume X, 1977. (Russo)
- [26] V. B. Boamanovsky; V. R. Nossov - Estabilidade e regimes periódicos de sistemas reguladores com retardamentos. M. "Nauka" - 1981. (Russo)
- [27] J. P. LaSalle - Stability theory for difference equations. Brown University, Providence, R.I., USA, 1975.
- [28] W. B. Castelan; E. F. Infante - On a functional equation arising in the stability theory on difference-differential equations; Quaterly of Applied Mathematics, n.^o 3, Volume XXXV, 1977.
- [29] E. F. Infante; W. B. Castelan - A Liapunov functional for a matrix differential difference equation. A aparecer.
- [30] E. F. Infante; J. A. Walker - A Liapunov functional for a scalar differential difference equation; Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 79A, 1977.
- [31] L. A. V. Carvalho; E. F. Infante; J. A. Walker - On the of simple Liapunov functions for linear retarded difference-differential equations; Tôhoku Math. Journ., 32, 1980.
- [32] W. B. Castelan, E. F. Infante - A Liapunov functional for a matrix difference differential equation; J. Diff. Equations, 29, n.^o 3, 1978.
- [33] J. C. F. Oliveira; L. A. V. Carvalho - A Liapunov functional for a retarded differential equations; 11.^o S.B.A., 1980.
- [34] J. J. Levin; J. Nohel - On a nonlinear delay equation; J. Math. Appl., 8, 1964.

```

1000 REM      ****
1010 REM      **
1020 REM      **      PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA VERIFICAR AS      **
1030 REM      **
1040 REM      **      HIPOTHESES DOS TEOREMAS 2.2 E 2.3 PARA      A      **
1050 REM      **
1060 REM      **      EQUACAO 2.11      **
1070 REM      **
1080 REM      ****
1090 REM
1100 PRINT "ESCREVA A DIMENSAO DOS VETORES"
1110 INPUT X
1120 DIM F(X),T(X),A1(X),A2(X),B1(X),B2(X)
1130 PRINT "ESCREVA A,B"
1140 INPUT A,B
1150 PRINT "(a,b)=(";A;",";B;")"
1160 PRINT
1170 REM
1180 REM INICIALIZACAO DOS PARAMETROS
1190 REM
1200 K=1
1210 F(K)=A
1220 T(K)=B
1230 K=K+1
1240 C=1
1250 REM
1260 REM CALCULO DOS DETERMINANTES
1270 REM
1280 IF C=0 GOTO 1890
1290 IF K<=X GOTO 1330
1300 PRINT "ESTE PROGRAMA FOI ELABORADO PARA K<=";X
1310 C=0
1320 GOTO 1870
1330 REM CONTINUE
1340 F(K)=(1/B)*T(K-1)
1350 T(K)=(F(K-1)-((A/B)*T(K-1)))
1360 D1=((A-F(K))*(B+T(K)))-((B-T(K))*(A+F(K)))
1370 IF D1<0 GOTO 1430
1380 A1(K)=A-F(K)
1390 A2(K)=B-T(K)
1400 B1(K)=A+F(K)
1410 B2(K)=B+T(K)
1420 GOTO 1480
1430 REM CONTINUE
1440 A1(K)=A+F(K)
1450 A2(K)=B+T(K)
1460 B1(K)=A-F(K)
1470 B2(K)=B-T(K)
1480 REM ENDIF
1490 PRINT "A(";K-1;")=(";A1(K);",";A2(K);")"
1500 PRINT

```