**SOBRE ESTABILIDADE na DISCRETIZAÇÃO
de EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

Célia Aparecida Zorzo Barcelos

Orientadora : Prof. Dra. Célia Maria Finazzi de Andrade

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, para obtenção do Título de Doutor em Ciências (Matemática).

**São Carlos
1989**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS por tudo.

À professora Célia Maria Finazzi de Andrade, por sua dedicação, pela segurança com que me orientou e pela amizade.

Ao professor José Alberto Cuminato, pela valiosa e indispensável colaboração como co-orientador deste trabalho.

À professora Marielza Jorge Fávares, pelo constante apoio em todos esses anos.

Ao professor Odelar Leite Linhares por ter, no início de meus estudos, me encaminhado na área de Análise Numérica.

Ao professor José Vítor Zago, que me orientou no início do programa de doutorado.

À Sandra e ao Godoy pela amizade e pelo apoio em todos esses anos que estivemos em São Carlos.

Às secretárias da Pós-Graduação do ICMCS pelo carinho com que sempre me atenderam.

Ao meu marido José Emílio e aos meus filhos Emílio e Daniel pelo incentivo, pela compreensão e pelo carinho que me dedicaram nestes anos.

Ao departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia pelo afastamento concedido.

À CAPES pelo auxílio concedido através do PICD.

A todas as pessoas que, de uma maneira ou outra, cooperaram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

Stability of Runge-Kutta methods is studied. An extension of algebraic stability, namely C-algebraic stability is introduced, permitting the analysis of confluent methods. An alternative to the Direct Liapunov method is presented, which is helpful in studying the stability of difference equations. Relationships with early stabilised concepts are presented. It is also introduced a new concept of k -contractivity which extends the concept of contractivity and can be used to analyse the stability of multistep methods and cyclic methods. Theoretical results are always followed up by illustrative applications.

RESUMO

Neste trabalho é estudada a estabilidade de métodos de Runge-Kutta. A C-estabilidade algébrica é introduzida como uma extensão da estabilidade algébrica, o que permite a análise de métodos confluentes. É também apresentada uma alternativa para o método Direto de Liapunov a qual é útil no estudo da estabilidade de equações de diferenças. São estabelecidas as relações entre a estabilidade de Liapunov e os conceitos de estabilidade previamente colocados. É também introduzido um novo conceito de K-contratividade, o qual estende o conceito de contratividade e que pode ser usado para analisar a estabilidade de métodos de passo múltiplo e métodos cíclicos. Os resultados teóricos são ilustrados com aplicações.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
------------------	---

CAPÍTULO I - MÉTODOS NUMÉRICOS: CONTRATIVIDADE; ESTABILIDADE DE MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

I-1 - Introdução	1
I-2 - Limitações no Estudo da Estabilidade Absoluta ..	4
I-3 - Condições de Lipschitz "one sided" e Norma Logarítmica	7
I-4 - Dissipatividade e Contratividade	11
I-5 - Métodos de Runge-Kutta e Contratividade	12
I-6 - C-Estabilidade Algébrica	16

CAPÍTULO II - ESTABILIDADE DE UMA EQUAÇÃO DIFERENÇA PELO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

II-1 - Introdução	33
II-2 - Estabilidade pelo Método direto de Liapunov ..	35
II-3 - Aplicações do Método Direto de Liapunov a Métodos de Passo Múltiplo	43

<i>II-4 - Funções de Liapunov e Métodos de Runge-Kutta .</i>	48
<i>II-5 - Uma extensão do Método Direto de Liapunov no caso Autônomo</i>	49
<i>II-6 - Instabilidade</i>	63

CAPÍTULO III - K-CONTRATIVIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS

<i>III-1 - Introdução</i>	68
<i>III-2 - K-Contratividade de Métodos Numéricos</i>	71
<i>III-3 - O Conceito de K-Contratividade aplicado a Métodos de Passo Múltiplo</i>	73
<i>III-4 - Métodos Compostos ou Cíclicos</i>	76

BIBLIOGRAFIA	80
---------------------------	-----------

INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade de uma equação diferença é de suma importância na área de Análise Numérica, pois é fundamental saber como pequenas perturbações nas condições iniciais se acumulam quando resolvemos um problema contínuo utilizando um método numérico.

Nosso estudo se resume na abordagem de equações de diferenças correspondentes a métodos numéricos para a solução de um problema de valor inicial.

Na literatura, em geral, no estudo da estabilidade numérica toma-se como problema teste a equação linear com coeficientes constantes $\dot{y} = \lambda y$, que nem sempre retrata o comportamento de uma equação diferencial não autônoma.

Burrage e Butcher fizeram uma importante contribuição ao estudo da estabilidade dos métodos de Runge-Kutta analisando a estabilidade de tais métodos para uma determinada classe de problemas, mais geral que o problema teste acima. Para obter a relação entre os conceitos de ESTABILIDADE ALGÉBRICA e AN-ESTABILIDADE, os autores necessitaram tirar da classe dos métodos estudados os métodos confluentes, pois tais métodos não satisfaziam às condições necessárias para seus teoremas.

A contribuição original do capítulo I consiste na introdução do conceito de C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA e teoremas que

relacionam o novo conceito com outros já existentes. A C-ESTABILIDADE ALOÉBRICA estende o conceito de ESTABILIDADE ALOÉBRICA e é adequado à análise dos métodos confluentes. Este material se encontra na secção 1.6.

No capítulo II estudamos a estabilidade segundo Liapunov de uma equação diferença.

As secções II.3 e II.4 apresentam algumas aplicações originais do método Direto de Liapunov em métodos numéricos. Relacionamos os conceitos de estabilidade de métodos de Runge-Kutta, estudados no capítulo I, com a estabilidade de Liapunov.

A simples transferência para o caso discreto do método Direto de Liapunov é muito restritiva, pois "obriga" a função de Liapunov V a ser "decrecente" ao longo da solução. Torna-se importante a procura de outras variações do método Direto de Liapunov. [Ferreira-86] utilizou um novo método direto comparando o valor da função V sobre a solução calculada, não apenas nos dois passos consecutivos j e $j-1$, como LaSalle e outros, mas também no passo $j-p$, p inteiro fixo. A nossa contribuição original está na generalização da idéia acima para o caso onde p não necessariamente é fixo, p depende da condição inicial, apenas é limitado por um inteiro fixo k , $2 \leq p \leq k$. Isto é feito através da definição de k -dicotomia. Apresentamos também um resultado sobre instabilidade, e um teorema sobre invariância muito útil nas aplicações. Este material encontra-se nas secções II.5 e II.6.

No capítulo III, fazemos uma aplicação da idéia do capítulo II apresentando a K -contratividade como uma ferramenta adicional no estudo da estabilidade de técnicas numéricas. Damos também uma

fundamentação teórica para o uso dos métodos compostos ou cíclicos para a solução de uma equação diferencial ordinária.

CAPÍTULO I

MÉTODOS NUMÉRICOS : CONTRATIVIDADE , ESTABILIDADE DE MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

I - 1 - INTRODUÇÃO

Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

onde $y(t)$ é um vetor de m elementos em $\mathbb{C}$, e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ é uma função contínua que satisfaz às condições do teorema de existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais e $t_0 \leq t \in \mathbb{R}$.

Para resolver numericamente o problema (1.1.1) é usual considerar uma equação diferença

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} y(t_{n+k}) &= F(t_{n+k}, y(t_{n+k}), y(t_{n+k-1}), \dots, y(t_n), h) \quad n \geq 0 \\ y(t_j) &= y_j \quad 0 \leq j \leq k-1 \end{aligned}$$

onde h é denominado comprimento de passo e $t_n = t_0 + nh$ se h for fixo.

A solução da equação (1.1.2) é tomada como uma aproximação

da solução de (1.1.1).

Nas últimas décadas avanços importantes foram obtidos nesta área, principalmente devido ao avanço da tecnologia computacional.

Por um método, vamos entender um método numérico de uma classe, que é dado pela seguinte equação diferença

$$(1.1.3) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \phi_f(t_{n+k}, y_{n+k}, \dots, y_n) \quad n \geq 0$$

$$y_j = \eta_j(h) \quad j=0,1,2,\dots,k-1$$

onde h é o comprimento de passo e k é o número de passos. Esta classe inclui métodos lineares de passo múltiplo, métodos do tipo Previsor-Corretor, métodos híbridos e métodos de Runge-Kutta.

O estudo da estabilidade de (1.1.3) em intervalos finitos, ou com o comprimento de passo tendendo a zero, isto é, ZERO-ESTABILIDADE já é bem entendido numericamente. Entretanto, muitos problemas relacionados com (1.1.1), como por exemplo a procura de soluções periódicas ou o estudo da estabilidade, envolvem intervalos infinitos. Neste caso nos interessa saber sob que condições as soluções de (1.1.2) tem as mesmas propriedades que as soluções de (1.1.1).

Vários autores como Butcher, Dahlquist, Lambert, Jeltsch, Dekker, Verwer, Burrage e outros dão valiosas contribuições para esse estudo.

Os próximos diagramas apresentados por Lambert [Lambert-87] tornam claros os relacionamentos que devem existir entre o problema contínuo (1.1.1) e sua discretização (1.1.2).

O segundo diagrama é relativo à sintaxe da ESTABILIDADE ABSOLUTA, que é o estudo da estabilidade da equação diferença com comprimento de passo h fixo e equação teste linear com coeficientes constantes.

Dependendo das características da região de ESTABILIDADE ABSOLUTA $\mathcal{R}_A$, definimos:

$A(0)$ - ESTABILIDADE - Um método é $A(0)$ -ESTÁVEL se

$$\{ h\lambda / \operatorname{Im}(h\lambda) = 0, \operatorname{Re}(h\lambda) < 0 \} \subset \mathcal{R}_A.$$

$A(\alpha)$ - ESTABILIDADE - Um método é $A(\alpha)$ - ESTÁVEL se

$$\{ h\lambda / -\alpha < \pi - \arg(h\lambda) < \alpha \} \subset \mathcal{R}_A.$$

A - ESTABILIDADE- Um método é A -ESTÁVEL se

$$\{ h\lambda / \operatorname{Re}(h\lambda) < 0 \} \subset \mathcal{R}_A.$$

I - 2 - LIMITAÇÕES NO ESTUDO DA ESTABILIDADE ABSOLUTA

O uso da equação teste linear com coeficientes constantes, tem se mostrado um tanto restritivo e muitas vezes inadequado.

Um argumento bastante usado é que em alguma vizinhança da solução exata $y(t)$ de (1.1.1), as soluções de $\dot{y} = f(t, y)$ podem ser aproximadas pelas soluções da seguinte equação variacional

$$\dot{y} = f(t, y(t)) + [y - y(t)] \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y}$$

Supondo que o jacobiano possa ser localmente estacionário e que localmente possa ser visto como uma matriz constante A , temos como resultado a seguinte equação

$$\dot{y} = Ay + \phi.$$

Como a estabilidade da primeira aproximação depende essencialmente da matriz A , vamos ignorar ϕ e tomar

$$\dot{y} = A y .$$

O espectro deste "jacobiano" congelado, às vezes não traz informações válidas, ou seja, o diagrama

nem sempre é verdadeiro, como podemos constatar através de vários exemplos encontrados na literatura.

Vamos ilustrar com o exemplo introduzido por Vinograd em 1952 e encontrado em [Dekker, Verwer-84].

Exemplo 1.1.1 - Consideremos o seguinte sistema

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) ,$$

onde $A(t)$ é dada por

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1-9\cos^2(6t)+6\sin(12t) & 12\cos^2(6t)+\frac{9}{2}\sin(12t) \\ -12\sin^2(6t)+\frac{9}{2}\sin(12t) & -1-9\sin^2(6t)-6\sin(12t) \end{pmatrix}$$

A equação característica é dada por $\lambda^2 + 11\lambda + 10 = 0$ e suas raízes características são $\lambda = -1$ e $\lambda = -10$.

A solução geral do sistema é

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(6t)+2\sin(6t) \\ 2\cos(6t)-\sin(6t) \end{pmatrix} + C_2 e^{-10t} \begin{pmatrix} \sin(6t)-2\cos(6t) \\ 2\sin(6t)+\cos(6t) \end{pmatrix}$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Vemos que se $C_1 \neq 0$, $\|y(t)\| \rightarrow \infty$. Logo não podemos tirar conclusões qualitativas sobre o comportamento assintótico das soluções de $\dot{y} = A(t)y$ olhando simplesmente para o espectro da matriz $A(t)$.

Resumindo, a análise do espectro de uma matriz jacobiana de um problema linear ou não, com coeficientes variáveis, pode não dar informações precisas sobre a propagação de perturbação local na solução exata.

Vemos então a necessidade de se ter uma teoria mais rigorosa para o estudo da estabilidade numérica.

Generalizações do estudo da A-ESTABILIDADE são dadas, no caso dos métodos de Runge-Kutta, pelos conceitos de AN-ESTABILIDADE, ESTABILIDADE ALGÉBRICA, C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA, B-ESTABILIDADE, BN-ESTABILIDADE.

Antes de abordarmos os vários aspectos da estabilidade, vamos analisar a contratividade de uma solução numérica, através da condição de Lipschitz "one-sided".

I - 3 - CONDIÇÃO DE LIPSCHITZ "ONE-SIDED" E NORMA LOGARÍTMICA

Nesta secção, nosso objetivo é usar a constante de Lipschitz "one-sided" para impor condições ao problema geral (1.1.1) a fim de obtermos informações sobre o comportamento assintótico da solução exata.

A condição de Lipschitz clássica não é muito usada, pois não distingue problemas como $\dot{y} = -1000 y$ e $\dot{y} = 1000 y$.

Seja $\langle , \rangle$ um produto interno em $\mathbb{C}^m$ e $\| \cdot \|$ a norma correspondente.

Definição 1.3.1 - Uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ satisfaz à condição de Lipschitz "one sided" em um conjunto $G \subseteq \mathbb{C}^m$, se existe um real l , tal que

$$(1.3.1) \quad \operatorname{Re}(\langle f(t, y) - f(t, \tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle) \leq l \| y - \tilde{y} \|^2$$

para todo y e $\tilde{y} \in G$. l é chamada constante de Lipschitz "one sided" de f em relação a y .

MOTIVAÇÃO

Consideremos o seguinte problema de valor inicial $\dot{y} = f(t, y)$, com solução exata $y(t)$ e condição inicial y_0 .

Consideremos ainda o problema perturbado $\dot{\tilde{y}} = f(t, \tilde{y})$, com solução exata $\tilde{y}(t)$ e condição inicial $\tilde{y}_0$.

Fazendo $z(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$, temos o seguinte problema de valor inicial

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= G(t, z) \\ z(t_0) &= z_0 = \tilde{y}_0 - y_0 \end{aligned}$$

onde $G(t, z) = f(t, z+y(t)) - f(t, y(t))$.

No estudo do equilíbrio trivial de (1.3.2), tomamos $V = \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $V(x) = \|x\|^2$; então $\dot{V}(z) = 2 \langle \dot{z}, z \rangle \leq 2 \ell \|z\|^2$. Logo vemos que se $\ell \leq 0$ temos $\dot{V}(z) \leq 0$ ao longo da solução de (1.3.2) e portanto, pelo método direto de Liapunov [Hale-80], o equilíbrio trivial de (1.3.2) é estável segundo Liapunov.

OBSERVAÇÕES

i-) Se a função f satisfaz uniformemente à condição clássica de Lipschitz com constante $\mathcal{L}$, então $\mathcal{L}$ é também uma constante de Lipschitz "one sided". Realmente, pela desigualdade de Schwarz temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle f(t, y_1) - f(t, y_2), y_1 - y_2 \rangle) &\leq \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \|y_1 - y_2\| \leq \\ &\leq \mathcal{L} \|y_1 - y_2\|^2 \end{aligned}$$

A afirmação inversa não é verdadeira [Dekker, Verwer-84].

ii-) Observemos que ℓ depende da particular escolha do

produto interno, podendo ser negativo.

Se $f(t,y)=A(t)y$, para encontrar esta constante de Lipschitz "one sided" podemos lançar mão de uma ferramenta adicional, a norma logarítmica, introduzida em 1959, por Dahlquist.

NORMA LOGARÍTMICA

Definição 1.3.2 - Seja A uma matriz quadrada; dizemos que

$$\mu(A) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

é a norma logarítmica de A.

Observações:

i-) A norma logarítmica não é uma norma, $\mu(A)$ pode ser negativo.

ii-) O limite acima existe para todas as matrizes e todas as normas subordinadas.

iii-) Para as normas L_1, L_2 e L_∞ , $\mu(A)$ pode ser obtida pelas seguintes fórmulas:

Norma L_1

$$\mu_1(A) = \max_j [a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}|]$$

Norma L_2

$$\mu_2(A) = \text{maior autovalor de } \frac{1}{2} (A^T + A)$$

$$\text{Norma } L_{\infty}$$

$$\mu_{\infty}(A) = \max_i [a_{ii} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}|]$$

iv-) A menor constante de Lipschitz "one sided" de uma matriz A é dada por $\mu(A)$.

v-) A norma logarítmica realmente nos dá informações concretas sobre o comportamento da solução exata.

Vamos ilustrar o sucesso da norma logarítmica utilizando o exemplo (1.1.1).

Seja $\dot{y} = A(t)y$ com

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$a_{11}(t) = -1 - 9 \cos^2(6t) + 6 \sin(12t)$$

$$a_{12}(t) = 12 \cos^2(6t) + 9/2 \sin(12t)$$

$$a_{21}(t) = -12 \sin^2(6t) + 9/2 \sin(12t)$$

$$a_{22}(t) = -1 - 9 \sin^2(6t) - 6 \sin(12t)$$

A equação característica de $\frac{1}{2}(A(t)+A^T(t))$ é dada por $\det [\frac{1}{2}(A(t) + A^T(t)) - \lambda I] = 0$, o que nos leva à seguinte equação do segundo grau em λ :

$$\lambda^2 - \text{traço}[\frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))] \lambda + \det [\frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))] = 0.$$

Temos que:

$$\text{traço} [\frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))] = \text{traço}(A(t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= -2 - 9 (\sin^2(6t) + \cos^2(6t)) = -11, \text{ e} \\
\det \left[\frac{1}{2} (A(t) + A^T(t)) \right] &= \det(A(t)) - \frac{1}{4} (a_{12}(t) - a_{21}(t))^2 = \\
&= 10 - \frac{1}{4} (12)^2 = -26.
\end{aligned}$$

Logo a equação característica é $\lambda^2 + 11\lambda - 26 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -13$ e portanto os autovalores λ_i de $\left[\frac{1}{2} (A(t) + A^T(t)) \right]$ não satisfazem $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$.

Estas considerações justificam o fato já mencionado do crescimento sem limite da solução deste problema, quando $C_1 \neq 0$.

I - 4 - DISSIPATIVIDADE E CONTRATIVIDADE

Sejam $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$, duas soluções de (1.1.1) com condições iniciais y_0 e $\tilde{y}_0$ respectivamente, com $y_0 \neq \tilde{y}_0$.

Definição 1.4.1 - Dizemos que o problema (1.1.1) é dissipativo se f satisfizer (1.3.1) com constante de Lipschitz "one sided" $l \leq 0$, isto é,

$$\operatorname{Re}(\langle f(t, y) - f(t, \tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle) \leq 0.$$

É bem sabido, que em um problema dissipativo,

$$\| y(t+h) - \tilde{y}(t+h) \| \leq \| y(t) - \tilde{y}(t) \|,$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $h > 0$, isto é, a diferença de quaisquer duas soluções de (1.1.1) tem comportamento contrativo.

Vamos agora ver o análogo discreto deste conceito.

Sejam $\dots y_{n-1}, y_n, \dots$ e $\dots \tilde{y}_{n-1}, \tilde{y}_n, \dots$ duas sequências de soluções da equação diferença (1.1.2) satisfazendo às condições iniciais $y(t_j) = y_j$ e $\tilde{y}(t_j) = \tilde{y}_j$ com $y_j \neq \tilde{y}_j$ para $j=0,1,\dots,k-1$.

Por contratividade da solução numérica entendemos:

Definição 1.4.2 - Dizemos que a equação diferença (1.1.2) é contrativa para um determinado h fixo, se para aquele h , temos

$$\| y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} \| \leq \| y_n - \tilde{y}_n \|$$

$$\forall n \geq k \quad \text{e} \quad \forall y_j \text{ e } \tilde{y}_j \in \mathbb{C}^m, j=0,1,\dots,k-1.$$

Observamos que se $\mu(A) \leq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, o problema $\dot{y} = A(t)y$ é dissipativo.

I - 5 - MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA - CONTRATIVIDADE

Vamos, no que segue deste capítulo, estudar especificamente a estabilidade de métodos de Runge-Kutta, abordando os conceitos de AN-ESTABILIDADE, ESTABILIDADE ALGÉBRICA, C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA, B-ESTABILIDADE e BN-ESTABILIDADE, todos relacionados com contratividade. Estas condições especiais de estabilidade nos permitirão obter métodos adequados para a solução dos chamados problemas "stiff".

Neste campo tivemos importantes contribuições dadas por Butcher, Dahlquist, Spijker, Burrage, Hundsdorfer, Cash e outros.

Seja o problema de valor inicial (1.1.1) satisfazendo

$$(1.5.1) \quad \operatorname{Re}(\langle f(t,y) - f(t,\tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle) \leq 0.$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall y, \tilde{y} \in \mathbb{C}^m$ com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{C}^m$.

Consideremos ainda a solução numérica de (1.1.1) satisfazendo (1.5.1), pelo método de Runge-Kutta

$$(1.5.2) \quad \begin{aligned} Y_i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j) & 1 \leq i \leq s \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, Y_i) & n \geq 0 \end{aligned}$$

onde $h = t_{n+1} - t_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ é denominado comprimento de passo; s é um inteiro maior ou igual a um; a_{ij} , b_j são parâmetros reais e $c_j = a_{j1} + a_{j2} + \dots + a_{js}$.

Definimos as matrizes $s \times s$, $A = (a_{ij})$, $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_s)$ e o vetor $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T \in \mathbb{R}^s$.

AN-ESTABILIDADE, BN-ESTABILIDADE E ESTABILIDADE ALGÉBRICA

O conceito de AN-ESTABILIDADE, introduzido por Burrage e Butcher [1979], como uma extensão do conceito de A-estabilidade, considera a solução numérica de (1.1.1) com $f(t,y) = \lambda(t)y$, tal que $\operatorname{Re}(\lambda(t)) \leq 0$.

Aplicando o método de Runge-Kutta (1.5.2) à equação teste acima citada obtemos

$$y_{n+1} = \mathcal{X}(\xi) y_n$$

onde $\mathcal{X}(\xi) = 1 + b^T \xi (I - A \xi)^{-1} e$,

$$\xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s), \quad \xi_i = h \lambda(t_n + c_i h) \text{ e } e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s.$$

Motivados por estas considerações é definida a AN-ESTABILIDADE.

Definição 1.5.1 - Um método de Runge-Kutta é AN-ESTÁVEL se

$$|\mathcal{X}(\xi)| = |1 + b^T \xi (I - A \xi)^{-1} e| \leq 1$$

para todo $\xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)$ tal que $\xi_i = \xi_j$ sempre que $c_i = c_j$ e tal que $\text{Re}(\xi_i) \leq 0$ para $i = 1, 2, \dots, s$.

Burrage e Butcher [1979] também introduziram os conceitos de BN-estabilidade e estabilidade algébrica.

Sejam y_n, y_{n+1} e Y_i soluções numéricas correspondentes a (1.1.1), (1.5.1), obtidas por (1.5.2) e sejam $\tilde{y}_n, \tilde{y}_{n+1}$ e $\tilde{Y}_i$ soluções obtidas pelo mesmo algoritmo quando há perturbações ou quando tomamos valores iniciais distintos, isto é:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_i &= \tilde{y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, \tilde{Y}_j) & 1 \leq i \leq s \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, \tilde{Y}_i) & n \geq 0 \end{aligned}$$

Definição 1.5.2 - Um método de Runge-Kutta (1.5.2) é dito **B-ESTÁVEL** se para todo problema autônomo satisfazendo (1.5.1), para quaisquer $y_n, \tilde{y}_n$ e para todo $h > 0$ temos:

$$\|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \leq \|y_n - \tilde{y}_n\| \quad n \geq 0.$$

Definição 1.5.3 - Um método de Runge-Kutta (1.5.2) é dito **BN-ESTÁVEL** se para toda função f satisfazendo (1.5.1), para quaisquer $y_n, \tilde{y}_n$ e para todo $h > 0$ temos:

$$\|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \leq \|y_n - \tilde{y}_n\| \quad n \geq 0.$$

Observamos que, de acordo com a definição acima, **BN-ESTABILIDADE** significa que as soluções numéricas de problemas dissipativos, são contrativas segundo alguma norma.

Definição 1.5.4 - Um método de Runge-Kutta é dito **ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL** se $B \geq 0$ e $M = BA + A^T B - bb^T \geq 0$, isto é, B e M são matrizes não negativas definidas.

O próximo teorema, apresentado em [Burrage-Butcher-79], relaciona **ESTABILIDADE ALGÉBRICA** com **BN-ESTABILIDADE**.

Teorema 1.5.1 - Se um método de Runge-Kutta é **ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL** então ele é **BN-ESTÁVEL**.

Para relacionar AN-ESTABILIDADE COM ESTABILIDADE ALGÉBRICA, precisamos da noção de confluência.

Definição 1.5.5 - Um método de Runge-Kutta é dito confluente se $c_i = c_j$ para algum $i \neq j$, e não confluente no caso contrário.

Teorema 1.5.2 - Um método de Runge-Kutta que é ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL é AN-ESTÁVEL e se o método é não confluente, o inverso também é verdadeiro.

A hipótese do método ser não confluente é essencial para a validade do teorema (1.5.2), isto é mostrado em um exemplo, que veremos adiante e que foi apresentado em [Burrage, Butcher-79].

I - 6 - C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA

Motivados pelo fato que existem métodos confluentes que são AN-ESTÁVEIS, e sentindo a falta de técnicas para verificar se um método confluente apresenta alguma propriedade de estabilidade, apresentamos uma generalização do conceito de ESTABILIDADE ALGÉBRICA que chamamos de C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA. Este conceito é equivalente ao já existente para métodos não confluentes e é uma generalização deste no caso contrário.

Observamos que, para termos a condição $x^H M x \geq 0$, necessária para a equivalência entre ESTABILIDADE ALGÉBRICA e AN-ESTABILIDADE,

não é preciso, no caso de métodos confluentes, que M seja positiva definida em todo $\mathbb{C}^s$, basta que M seja positiva definida em um subespaço $S \subseteq \mathbb{C}^s$ [def.1.6.1]. Por isso antes de chegar propriamente a definir C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA, apresentamos o conceito de matriz S-não negativa definida.

Embora a definição de C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA envolva somente os coeficientes do método, sua real importância está no fato de nos levar a conclusões sobre o comportamento assintótico da solução de uma equação de diferenças, resultante da aplicação do método ao problema (1.1.1), (1.5.1).

Para o desenvolvimento dos estudos precisamos definir uma relação de equivalência sobre os c_i 's, $i = 1, 2, \dots, s$.

Definição 1.6.1 - Para cada $k = 1, 2, \dots, s$, dizemos que $i \approx k$, ou que $i \in [k]$, se $c_i = c_k$ para quaisquer $i, k = 1, 2, \dots, s$.

Definição 1.6.2 - Denotaremos por

$$F = \{e_k \in \mathbb{R}^s / e_k = (e_k^1, e_k^2, \dots, e_k^s) \text{ com } e_k^j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in [k] \\ 0 & \text{se } j \notin [k] \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, s\}$$

E o conjunto dos $r \leq s$ vetores linearmente independentes de F .

S o subespaço gerado por E .

Dizemos que uma matriz G é S-não negativa definida se $x^H G x \geq 0$, $\forall x \in S$.

Se $\dim S = r \leq s$, temos r classes de equivalência disjuntas, as quais denotaremos por $[i_1], [i_2], \dots, [i_r]$ onde i_j é o menor inteiro pertencente à classe $[i_j]$.

É claro que $\bigcup_{j=1}^r [i_j] = \{1, 2, \dots, s\}$.

A seguir generalizamos o conceito de ESTABILIDADE ALGÉBRICA e apresentamos relações com conceitos já existentes.

Definição 1.6.3 - Dizemos que um método de Runge-Kutta é C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL se $\sum_{i \in [k]} b_i \geq 0$ para todo $k = i_1, i_2, \dots, i_r$, com $r \leq s$ e $M = BA + A^T B - bb^T$ é S-não negativa definida.

Teorema 1.6.1 - Todo método ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL é C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL.

dem.:

Trivial, pois se o método é ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL, cada $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, s$ e M é uma forma quadrática não negativa. $\square$

Teorema 1.6.2 - Todo método C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL que é não confluyente é ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL.

AN-ESTABILIDADE E C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA

Daremos agora resultados análogos ao teorema (1.5.2) considerando a C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA e métodos confluentes.

Para o desenvolvimento do próximo teorema precisamos de um resultado demonstrado por [Burrage-Butcher-79] e apresentado no lem.

seguinte.

Lema 1.6.1 - Seja ξ , tal que $\det(I-A\xi) \neq 0$ e seja $u = (I-A\xi)^{-1}e$; então, sendo $M = (m_{ij})$

$$(1.6.1) \quad |K(\xi)|^2 - 1 = 2 \sum_{i=1}^s b_i \operatorname{Re}(\xi_i) \|u_i\|^2 - \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \bar{\xi}_i \bar{u}_i \xi_j u_j$$

onde $\bar{u}_i$ é o conjugado de u_i .

Teorema 1.6.3 - Todo método de Runge-Kutta que é AN-ESTÁVEL é C-ALGÉBRICAMENTE estável.

dem.:

Devemos mostrar que $\sum_{i \in [k]} b_i \geq 0$ para $k = i_1, i_2, \dots, i_r$ e que M é S-não negativa definida, S como na definição (1.6.2).

Observamos que ξ_i , $1 \leq i \leq s$ pode ser tomado arbitrariamente no semi-plano complexo não positivo, apenas devem satisfazer $\xi_i = \xi_j$ se $i \neq j$.

$$\text{Dado } k, i_1 \leq k \leq i_r, \text{ tomamos } \xi_i = \begin{cases} -\varepsilon & \text{se } i \in [k] \\ 0 & \text{se } i \notin [k] \end{cases}, \text{ onde } \varepsilon$$

é um número real, positivo. Sempre é possível encontrar ε tão pequeno tal que $(I-A\xi)$ seja regular. Substituindo esses valores em (1.6.1), temos, para o dado k :

$$|K(\xi)|^2 - 1 = -2\varepsilon \sum_{i \in [k]} b_i \|u_i\|^2 - \varepsilon^2 \sum_{i,j \in [k]} m_{ij} \bar{u}_i u_j$$

Por esta particular escolha de ξ , u_j , $1 \leq j \leq s$, é do tipo

$$u_j = 1 + O(\varepsilon).$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} |K(\xi)|^2 - 1 &= -2 \varepsilon \sum_{i \in [k]} b_i (1+O(\varepsilon))^2 - \varepsilon^2 \sum_{i,j \in [k]} m_{ij} \bar{u}_i u_j = \\ &= -\varepsilon \left(2 \sum_{i \in [k]} b_i + O(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

Tomando ε suficientemente pequeno e sendo o método AN-ESTÁVEL, $|K(\xi)|^2 - 1 \leq 0$ e então $\sum_{i \in [k]} b_i \geq 0$.

Este argumento pode ser repetido para cada k , $k = i_1, i_2, \dots, i_r$.

Para provar que M é S-não negativa definida, tomamos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ imaginários puros, isto é, fazemos $\xi_j = \varepsilon \eta_j i$, onde os η_j são números reais arbitrários com $\eta_j = \eta_k$ se $j \in [k]$, e ε é um número real, positivo e pequeno.

Com esta particular escolha de ξ , temos também que u_j , $1 \leq j \leq s$, é da forma

$$u_j = 1 + O(\varepsilon).$$

Substituindo em (1.6.1), temos:

$$|K(\xi)|^2 - 1 = -\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \eta_i \eta_j \bar{u}_i u_j = -\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \eta_i \eta_j + O(\varepsilon^3).$$

Como AN-ESTABILIDADE implica que $|K(\xi)|^2 \leq 1$, temos que $\sum_{i,j=1}^s m_{ij} \eta_i \eta_j$ não pode ser negativo, isto é, M é S-não negativa definida. □

Exemplo 1.6.1 - Considerando o método de 3 estágios e ordem 4, de [Burrage,Butcher-79]:

$$\begin{array}{c|ccc}
 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)(1-\alpha) & \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)(1+\alpha) \\
 \hline
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)(1-\alpha) & \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)(1+\alpha) \\
 \hline
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} & \beta - \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)(1-\alpha) & \beta - \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)(1+\alpha) \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
 \end{array}$$

onde α é um parâmetro real e $\beta = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Para este exemplo, vale:

$$M = \frac{2\sqrt{3} - 3}{48} (\alpha - (7 + 4\sqrt{3})) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É mostrado em [Burrage,Butcher-79, pag 50], que o método é AN-ESTÁVEL para $\alpha \geq 0$, pois $|\mathcal{K}(\xi)| = 1$, $\forall \xi$ com $\xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_i \in \mathbb{C}^-$, tal que $\xi_2 = \xi_3$ e não é algebricamente estável para $\alpha \neq 7 + 4\sqrt{3}$.

No entanto, observamos que o método é C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL, pois M é S -não negativa definida, onde $S = \{e_1, e_2\}$ com $e_1 = (1, 0, 0)^T$ e $e_2 = (0, 1, 1)^T$.

Realmente

$$\begin{aligned}
 (\xi e)^H M (\xi e) &= \\
 &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{48} (\alpha - (7 + 4\sqrt{3})) [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{48} (\alpha - (7 + 4\sqrt{3})) [\bar{\xi}_1 \xi_2 - \|\xi_2\|^2 - \bar{\xi}_1 \xi_2 + \|\xi_2\|^2] = 0.
 \end{aligned}$$

Seria extremamente prático o inverso do teorema (1.6.3), pois nos possibilitaria analisar a AN-ESTABILIDADE de um método confluyente ou não, olhando simplesmente para as matrizes B e $M = BA + A^T B - bb^T$. Entretanto, no caso geral, o inverso do teorema (1.6.3) não é verdadeiro, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 1.6.2 - Consideremos o seguinte método de Runge-Kutta

1		1/2	0	1/2
1		1	0	0
1/3		0	0	1/3
<hr/>		1/3	1/3	1/3

Neste caso temos que

$$M = BA + A^T B - bb^T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1/2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja S o subespaço gerado por $\{e_1, e_2\}$ onde $e_1 = (1, 1, 0)^T$ e $e_2 = (0, 0, 1)^T$.

$x^H M x \geq 0 \quad \forall x \in S$, logo M é S -não negativa definida e assim o método de Runge-Kutta é C -ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL.

Vamos agora calcular

$$\mathcal{K}(\xi) = 1 + b^T \xi (I - A \xi)^{-1} e.$$

Tomando $\xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ com $\xi_1 = \xi_2$, temos

$$\mathcal{K}(\xi) = \frac{6 + \xi_1 + \xi_1^2 - \frac{1}{3} \xi_1 \xi_3 + \frac{2}{3} \xi_1^2 \xi_3}{6(1 - \frac{1}{2} \xi_1)(1 - \frac{1}{3} \xi_3)}$$

Como o denominador não se anula para $\text{Re}(\xi_i) \leq 0$, temos pelo Princípio do Módulo Máximo que $|\mathcal{K}(\xi)|$ atinge seu máximo para ξ_1 e ξ_2 imaginários puros. Assim, fazendo $\xi_1 = bi$ e $\xi_2 = ci$ com b e c constantes reais, temos:

$$\mathcal{K}(\xi) = \frac{(6 - b^2 + \frac{1}{3} bc) + (b - \frac{2}{3} b^2 c)i}{(6 - bc) - (3b + 2c)i}$$

Se tomarmos por exemplo $b = 10$ e $c = 0$, temos que $|\mathcal{K}(\xi)| > 1$ e portanto este método não é AN-ESTÁVEL.

No entanto podemos ter o inverso do teorema (1.6.3) em alguns casos especiais.

Teorema 1.6.4 - Um método de Runge-Kutta **C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL** tal que $u_i = u_j$ para $i \in [j]$, onde u_k é a k -ésima componente do vetor $u = (I - A\xi)^{-1}e$, é **AN-ESTÁVEL**.

dem.:

Devemos mostrar que $|K(\xi)| \leq 1$, onde $\xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)$ com $\xi_i = \xi_j$ se $i \in [j]$ e $\text{Re}(\xi_i) \leq 0$ $i = 1, 2, \dots, s$.

Como $u_i = u_j$ se $i \in [j]$, temos por (1.6.1) que

$$\begin{aligned} |K(\xi)|^2 - 1 &= 2 \sum_{i=1}^s b_i \text{Re}(\xi_i) \|u_i\|^2 - \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \bar{\xi}_i \bar{u}_i \xi_j u_j = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{i_r} \left(\sum_{i \in [k]} b_i \right) \text{Re}(\xi_k) \|u_k\|^2 - (\xi u)^H M (\xi u). \end{aligned}$$

Sendo $\text{Re}(\xi_k) \leq 0$, $\sum_{i \in [k]} b_i \geq 0$, $k = i_1, i_2, \dots, i_r$ e M **S-não** negativa definida, temos que $|K(\xi)| \leq 1$. □

Corolário 1.6.5 - Um método de Runge-Kutta de 2 estágios é **C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL** se e somente se for **AN-ESTÁVEL**.

dem.:

Se o método for **AN-ESTÁVEL**, temos pelo teorema (1.6.3) que ele é **C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL**.

Suponhamos que um método de Runge-Kutta de 2 estágios é **C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL**. Temos duas possibilidades a considerar:

i-) O método é não confluyente; então **C-ALGEBRICAMENTE**

ESTÁVEL é equivalente a ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL, e assim pelo teorema (1.5.2) [Burrage, Butcher-79] o método é AN-ESTÁVEL.

(i-) O método é confluyente, isto é, $c_1 = c_2$ ou $a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22}$.

Tomando $u = (I - A\xi)^{-1}e$ temos:

$$u_1 = 1 + a_{11}\xi u_1 + a_{12}\xi u_2 \quad e$$

$$u_2 = 1 + a_{21}\xi u_1 + a_{22}\xi u_2 \quad .$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, vem

$$(u_1 - u_2) = \xi_1(u_1 - u_2)(a_{11} - a_{21}) \quad e$$

$$[1 - \xi_1(a_{11} - a_{21})](u_1 - u_2) = 0.$$

Como ξ_1 é arbitrário com $\text{Re}(\xi_1) \leq 0$, temos que $u_1 = u_2$ e assim pelo teorema (1.6.4) segue o resultado. Q

Corolário 1.6.6 - Um método de Runge-Kutta de 3 estágios tal que $c_1 = c_2 = c_3$ é AN-ESTÁVEL se e somente se for C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL.

dem.:

Já sabemos (teorema 1.6.3) que AN-ESTABILIDADE implica em C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA.

Suponhamos válida a C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA.

Tomando $c_1 = c_2 = c_3$ ou $a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33}$ e resolvendo o sistema $u = (I - A\xi)^{-1}e$, temos que

$$u_1 = u_2 = u_3 = - \frac{1}{a_{31}\zeta_1 + a_{32}\zeta_1 + a_{33}\zeta_1 - 1} = - \frac{1}{c_3\zeta_1 - 1}.$$

Assim pelo teorema (1.6.4) segue o resultado. $\square$

Corolário 1.6.7 - Seja a matriz A do método de Runge-Kutta do tipo

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix}, \text{ onde cada bloco } A_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \text{ é de}$$

dimensão menor ou igual a 3 e todos os c_i 's de cada bloco são iguais. Então o método é AN-ESTÁVEL se e somente se for C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL.

dem.:

A prova de que AN-ESTÁVEL implica em C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL é dado no teorema (1.6.3). Vamos analisar a afirmação inversa.

Seja d_i a dimensão do bloco A_i .

A matriz $(I - A\xi)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} I_1 - A_1 \zeta^1 & & & 0 \\ & I_2 - A_2 \zeta^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_r - A_r \zeta^r \end{bmatrix}, \text{ onde } I_j \text{ é a matriz}$$

identidade de dimensão d_j , e ζ^j é uma matriz diagonal de dimensão d_j , cujos elementos diagonais são todos iguais a ζ_j , $i \in [j]$.

$$(I - A\zeta)^{-1} = \begin{bmatrix} (I_1 - A_1 \zeta^1)^{-1} & & & 0 \\ & (I_2 - A_2 \zeta^2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (I_r - A_r \zeta^r)^{-1} \end{bmatrix},$$

Como $u = (I - A\zeta)^{-1}e$, temos que todos os u_i 's de uma mesma classe são iguais, assim pelo teorema (1.6.4) segue o resultado. $\square$

Vamos dar agora um teorema que caracteriza todos os métodos confluentes de 2 estágios.

Teorema 1.6.8 - Uma condição necessária e suficiente para que um método de Runge-Kutta consistente e confluyente de 2 estágios seja C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL é que c_1 seja maior ou igual a $1/2$.

dem.:

Um método de Runge-Kutta de dois estágios, consistente e confluyente é do tipo $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}$, com $c = (c_1, c_2)^T$ onde $c_1 = c_2$ e $b = (b_1, b_2)^T$. Pela consistência temos $\sum_{i \in [1]} b_i = 1 > 0$.

Tomando por S o subespaço gerado por $e_1 = (1, 1)^T$, vamos mostrar que $M = BA + A^T B - bb^T$ é S -não negativa definida se e somente se $c_1 \geq 1/2$.

Seja $x \in S$, S é o subespaço gerado por $e_1 = (1, 1)^T$, temos que

$$\begin{aligned} x^H M x \geq 0 &\Leftrightarrow 2b_1(a_{11} + a_{12}) + 2b_2(a_{21} + a_{22}) - (b_1 + b_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &2b_1c_1 + 2b_2c_1 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2c_1(b_1 + b_2) \geq 1 \Leftrightarrow 2c_1 \geq 1 \Leftrightarrow \\ &c_1 \geq 1/2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.6.3 - O método de Runge-Kutta

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

é C -ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL, pois $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ e pelo teorema (1.6.8) segue o resultado.

Exemplo 1.6.4 -

$$\begin{array}{c|ccc}
 \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
 \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\
 \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1
 \end{array}$$

O método 1.6.4 é C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEL, pois $c_1 = c_2 = \frac{3}{4}$, $c_3 = \frac{1}{2}$ e pelo teorema (1.6.7) segue o resultado.

A seguir apresentamos resultados numéricos correspondentes à aplicação do método acima (exemplo 1.6.4) ao seguinte problema "stiff" [Burrage-Cash-89, pag.6].

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -24 & 25 \\ 26 & -25 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1.0025 \\ 0.9974 \end{bmatrix}$$

cuja solução exata é

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{1}{51} (26 y_1(0) + 25 y_2(0)) e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\
 & \frac{1}{51} (y_1(0) - y_2(0)) e^{-50x} \begin{bmatrix} 25 \\ -26 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para efeito de comparação relacionamos também os resultados correspondentes ao método de Euler, que sabe-se não ser adequado a problemas "stiff".

$y_1(x)$			
x	sol. exata	método de Euler	método do ex. 1.6.4
0	1.0025	1.0025	1.00250
0.1	1.1052	1.0900	1.10419
0.2	1.2214	1.2500	1.22206
0.3	1.3499	1.1710	1.35000
0.4	1.4918	2.1041	1.49240
0.5	1.6487	-0.9495	1.64987
0.6	1.8221	12.0116	1.82904
0.7	2.0198	-39.0115	2.0188
0.8	2.2255	165.9844	2.22703
0.9	2.4596	-653.0053	2.46145
10.0	2.7189	2624.0469	2.72055

$y_2(x)$			
x	sol. exata	método de Euler	método do ex. 1.6.4
0	0.9974	0.9974	0.9974
0.1	1.1052	1.1104	1.10637
0.2	1.2214	1.1684	1.22113
0.3	1.3499	1.4974	1.35040
0.4	1.4918	0.7985	1.49223
0.5	1.6487	4.2729	1.64944
0.6	1.8221	-8.8781	1.82901
0.7	2.0198	44.5473	2.01493
0.8	2.2255	-168.2509	2.22702
0.9	2.4596	683.9358	2.46145
10.0	2.7189	-2723.7175	2.72055

CONCLUSÃO -

As relações entre os diversos conceitos de estabilidade de métodos de Runge-Kutta são sintetizados nos diagramas abaixo:

Métodos não confluentes

Métodos confluentes

onde

- AN - AN-estabilidade
- ALG - estabilidade algébrica
- C-ALG - C-estabilidade algébrica
- A - A-estabilidade
- BN - BN-estabilidade
- B - B-estabilidade

(As implicações dos diagramas não apresentadas neste trabalho podem ser encontradas em [Dekker-Verwer-79]).

O teorema (1.6.4) e corolários (1.6.5), (1.6.6) e (1.6.7), estendem a certos métodos confluentes resultados de Burrage e Butcher, enquanto que o teorema (1.6.8) caracteriza todos os métodos confluentes de dois estágios C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEIS. O teorema

(1.6.3), mostra que o conjunto dos métodos AN-ESTÁVEIS é um subconjunto dos métodos C-ALGEBRICAMENTE ESTÁVEIS.

Os problemas que apareceram no sentido de estabelecer resultados análogos aos do caso não confluyente são naturais e esperados, visto que o conceito de C-ESTABILIDADE ALGÉBRICA é mais geral do que o conceito de ESTABILIDADE ALGÉBRICA. É portanto compreensível que nem todas as equivalências sejam possíveis. Entretanto, os conceitos de AN e BN-ESTABILIDADE estão ambos intrinsecamente relacionados com contratividade, que é certamente um conceito mais forte que estabilidade.

CAPÍTULO II

ESTABILIDADE DE UMA EQUAÇÃO DIFERENÇA PELO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

II - 1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo trata de equações de diferenças, principalmente no que concerne às propriedades de estabilidade. Como já foi dito no capítulo anterior, um problema de valor inicial é usualmente aproximado por uma equação diferença e assim sendo é de suma importância termos condições que nos permitam concluir que pequenas perturbações introduzidas nas condições iniciais não se propagam de maneira inadequada, levando a resultados que se afastam sem controle da solução verdadeira.

Colocaremos a seguir, nesta secção II.1, alguns preliminares que introduzem aos estudos feitos posteriormente.

Consideremos a seguinte equação diferença de primeira ordem

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= f(t_n, y_n) = f_n(y_n) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad t_0 \geq 0, \quad n=0,1,2,\dots$$

onde $t_n = t_0 + nh$, $h \geq 0$ é denominado comprimento de passo, $y_n = y(t_n)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua no segundo argumento e $f(t, 0) = 0$.

Denotamos por $y_n(t_0, y_0)$ a solução de (2.1.1) com $y(t_0) = y_0$,

ou a trajetória de y_0 , por f , isto é, consideramos por solução de (2.1.1) correspondente à condição inicial y_0 , a sequência $\{y_0, f_1(y_0), f_2(f_1(y_0)), \dots\}$ de vetores em $\mathbb{R}^m$. Esta solução existe e é única para cada condição inicial y_0 , pelo fato de f ser uma função bem definida.

Sempre que não houver perigo de confusão, usaremos $y_n(y_0)$ ou $f_n(y_{n-1})$ para denotar $y_n(t_n, y_0)$.

Definição 2.1.1 - Um ponto y , tal que $f(t,y) = y$, isto é, $y_n(y) = y$ é dito um equilíbrio de (2.1.1). Por simplicidade de linguagem, denominamos o equilíbrio $y \equiv 0$ de equilíbrio trivial.

Vamos sempre nos preocupar com o comportamento das soluções de (2.1.1) em alguma vizinhança da origem.

O estudo das equações de diferenças de ordem k , $k \geq 1$

$$y_n = f_n(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}) \quad n = k, k+1, \dots$$

pode ser reduzido ao das equações de primeira ordem, através de uma mudança de variável. Fazendo $y_n = y_n^1$, $y_{n-1} = y_n^2$, ..., $y_{n-k} = y_n^{k+1}$, obtemos o seguinte sistema de equações de diferenças de primeira ordem

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n^1 = f_n(y_{n-1}^1, \dots, y_{n-1}^K) \\ y_n^2 = y_{n-1}^1 \\ y_n^3 = y_{n-1}^2 \\ \dots \dots \dots \\ y_n^K = y_{n-1}^{K-1} \end{array} \right.$$

o qual pode ser generalizado por

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n^1 = f_n^1(y_{n-1}^1, \dots, y_{n-1}^K) \\ y_n^2 = f_n^2(y_{n-1}^1, \dots, y_{n-1}^K) \\ y_n^3 = f_n^3(y_{n-1}^1, \dots, y_{n-1}^K) \\ \dots\dots\dots \\ y_n^K = f_n^K(y_{n-1}^1, \dots, y_{n-1}^K) \end{array} \right.$$

que sob a forma vetorial fica

$$y_n = f_n(y_{n-1}), \quad \text{onde } y_n = (y_n^1, \dots, y_n^k) \in f_n = (f_n^1, f_n^2, \dots, f_n^k).$$

A seguir daremos algumas definições sobre a estabilidade de (2.1.1), e faremos aplicações do método Direto de Liapunov em algumas equações de diferenças que representam métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias.

II - 2 - ESTABILIDADE PELO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

As "funções de Liapunov", usadas para o estudo da estabilidade de equações diferenciais ordinárias, foram definidas com rigor em 1892 por Liapunov, em sua tese de doutoramento. O método direto de Liapunov é motivado pelo conceito de energia e pelo fato que, se próximo a um ponto de equilíbrio de um sistema a

energia deste sistema é não crescente, então o equilíbrio é estável. Para equações de diferenças, vários autores como LaSalle, Hurt entre outros, trouxeram grande contribuição usando a teoria clássica de Liapunov.

Vamos dar as definições de estabilidade de uma equação diferença, segundo Liapunov.

Definição 2.2.1 - O equilíbrio trivial de (2.1.1) é estável se, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que, se $\|y_0\| < \delta$ então $\|y_n(t_0, y_0)\| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2.2 - O equilíbrio trivial de (2.1.1) é assintoticamente estável, se for estável e para $\|y_0\| < \delta$, $\|y_n(t_0, y_0)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Definição 2.2.3 - O equilíbrio trivial de (2.1.1) é dito exponencialmente estável se existirem constantes positivas α , μ e r , independentes de t_0 , tais que

$$\|y_n(t_0, y_0)\| \leq \alpha \|y_0\| \exp(-\mu(t_n - t_0))$$

para todo $n \geq 0$ e $\|y_0\| < r$.

A seguir daremos o conceito de função positiva definida [Hahn-67].

Definição 2.2.4 - Uma função contínua $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é dita positiva definida (semi positiva definida) em um domínio U contendo a origem se $V(0) = 0$ e $V(y) > 0$ para $y \neq 0$ ($V(0) = 0$ e $V(y) \geq 0$ para $y \neq 0$).

Definição 2.2.5 - Uma função $g(s)$ de valores reais é dita de classe K ($g \in K$) se ela é definida, contínua, estritamente crescente em $0 \leq s < \infty$ e se anula em $s=0$, isto é, $g(0) = 0$.

Definição 2.2.6 - Uma função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é dita positiva definida se V for contínua na segunda variável y , $V(t,0) = 0$ para qualquer $t \geq 0$ e existir uma função $g(s)$ de classe K , $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(t,y) \geq g(\|y\|)$, $\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

A seguir vamos definir uma "função de Liapunov" para (2.1.1) [Hurt-67].

Definição 2.2.7 - Dizemos que uma função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov para (2.1.1) em um domínio $U \subset \mathbb{R}^m$ contendo a origem, se existir uma função contínua $r : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta V(t_n, \xi) = V(t_{n+1}, f(t_n, \xi)) - V(t_n, \xi) \leq -r(\xi) \leq 0$$

para qualquer $n \geq 0$ e qualquer $\xi \in U$.

O próximo teorema, dado por Stetter em [Stetter-73], nos fornece uma condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial do equilíbrio trivial de (2.1.1).

Teorema 2.2.1 - O equilíbrio trivial de (2.1.1) é exponencialmente estável se e somente se existirem constantes positivas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e δ , independentes de t_n e uma função de Liapunov $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que, para $\|\xi\| < \delta$ e $t_n \in \mathbb{R}$ satisfaz:

$$i-) \quad \alpha_1 \|\xi\|^2 \leq V(t, \xi) \leq \alpha_2 \|\xi\|^2$$

$$ii-) \quad \Delta V(t_n, \xi) = V(t_{n+1}, \gamma_{n+1}(t_n, \xi)) - V(t_n, \xi) \leq -\alpha_3 \|\xi\|^2$$

A estabilidade exponencial é uma exigência bastante forte, vamos dar alguns teoremas sobre estabilidade e estabilidade assintótica, que são análogos discretos dos teoremas de estabilidade dados por Halanay [Halanay-66].

Teorema 2.2.2 - Suponhamos que para (2.1.1) existe uma função de Liapunov $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, positiva definida. Então o equilíbrio trivial de (2.1.1) é estável.

dem.:

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos δ_1 , $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0)$ tal que, se $\|\xi\| < \delta_1$ então $V(t_0, \xi) < g(\varepsilon)$. Tal escolha é sempre possível

pois V é contínua em ξ , e $V(t_0, 0) = 0$.

Se V é uma função de Liapunov para (2.1.1) em $\|\xi\| < \delta_2$, tomamos $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ e y_0 tal que $\|y_0\| < \delta$.

Definindo $V_n = V(t_n, y_n(t_0, y_0))$, temos que $V_n \leq V_0$.

Sendo V positiva definida, a correspondente função g de classe K , satisfaz:

$$g(\|y_n(t_0, y_0)\|) \leq V(t_n, y_n(t_0, y_0)) = V_n \leq V_0 = V(t_0, y_0) < g(\varepsilon)$$

Pela monotonicidade de g , segue:

$$\|y_n(t_0, y_0)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq 0 \quad \text{e} \quad \|y_0\| < \delta.$$

Logo, o teorema está provado. □

Teorema 2.2.3 - O equilíbrio trivial de (2.1.1) é assintoticamente estável se existir uma função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, positiva definida que, para todo $t_n \geq t_0$ e $\|\xi\| < \delta$ satisfaz:

$$\Delta V(t_n, \xi) = V(t_{n+1}, y_{n+1}(t_n, \xi)) - V(t_n, \xi) \leq -s(V(t_n, \xi))$$

onde s é uma função contínua, monótona crescente e $s(0) = 0$.

dem.:

Pelo teorema anterior temos que o equilíbrio trivial é estável.

Por hipótese $V(t_n, y_n(t_0, y_0))$ decresce quando n cresce,

assim $\exists A$, tal que $\lim_{t_n \rightarrow \infty} V(t_n, y_n(t_0, y_0)) = A$

Se $A \neq 0$, sendo s monótona crescente temos que $s(A) \neq 0$ e

$$s(A) < s(V(t_n, y_n(t_0, y_0)))$$

Tomando $\xi = y_{n-1}(t_0, y_0)$ temos:

$$\Delta V(t_{n-1}, \xi) = V(t_n, y_n(t_{n-1}, \xi)) - V(t_{n-1}, \xi) \leq -s(V(t_{n-1}, \xi)) < -s(A).$$

Assim;

$$\Delta V(t_{n-1}, \xi) = V_n - V_{n-1} \leq -s(A).$$

Portanto

$$V_n \leq V_{n-1} - s(A)$$

Sucessivamente, temos:

$$V_n \leq V_0 - n s(A)$$

Logo $V_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, o que é um absurdo, pois por hipótese V é positiva definida.

Portanto $A = 0$, e assim

$V(t_n, y_n(t_0, y_0)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e $g(\|y_n(t_0, y_0)\|) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como g é estritamente crescente segue o resultado, isto é

$$\|y_n(t_0, y_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

□

Para o desenvolvimento do próximo teorema vamos considerar a equação (2.1.1) na forma:

$$(2.2.1) \quad y_{n+1} = y_n + h \psi(t_n, y_n)$$

isto é; tomar $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(t_n, y_n) = y_n + h \psi(t_n, y_n)$, onde ψ satisfaz à condição uniforme de Lipschitz

$$\|\psi(t_n, \xi_1) - \psi(t_n, \xi_2)\| \leq \mathcal{L} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

e $\psi(t_n, 0) = 0$.

Teorema 2.2.4 - Se $\psi(t_n, \xi)$ é tal que $\xi \psi(t_n, \xi) \leq 0$ para $0 < \|\xi\| \leq \delta$ e $h \leq \frac{2}{\mathcal{L}}$, onde δ é uma constante positiva e $\mathcal{L}$ é a constante de Lipschitz de ψ , então o equilíbrio trivial de (2.2.1) é estável.

dem.:

$$\text{Seja } V(t_n, y) = |y|^2,$$

$$\Delta V(t_n, \xi) = V(t_{n+1}, y_{n+1}(t_n, y_n(t_n, \xi))) - V(t_n, \xi) =$$

$$= |y_{n+1}(t_n, \xi)|^2 - |y_n(t_n, \xi)|^2 =$$

$$= [|y_n + h \psi(t_n, y_n)| - |y_n|] [|y_n + h \psi(t_n, y_n)| + |y_n|].$$

Analisando a expressão $|\alpha + h \beta| - |\alpha|$ com $|\beta| \leq \mathcal{L}|\alpha|$, $h \leq \frac{2}{\mathcal{L}}$ e com $\alpha\beta \leq 0$, temos que $|\alpha + h \beta| - |\alpha| \leq 0$. Tomando $\alpha = y_n$ e $\beta = \psi(t_n, y_n)$ obtemos:

$$\Delta V(t, \xi) =$$

$$= [|y_n + h \psi(t_n, y_n)| - |y_n|] [|y_n + h \psi(t_n, y_n)| + |y_n|] \leq 0.$$

Logo pelo teorema (2.2.2), temos que o equilíbrio trivial de (2.2.1) é estável. □

Exemplo 2.2.1 - Consideremos o seguinte problema de valor inicial em $\mathbb{R}$.

$$\dot{y} = - | -3/2 + \cos 2\pi t | y$$

$$y(t_0) = y_0$$

Discretizando por Euler, temos a seguinte equação diferença

$$(2.2.2) \quad y_{n+1} = y_n - h | -3/2 + \cos 2\pi t_n | y_n$$

Vamos verificar as hipóteses do teorema anterior.

Como $\psi(t_n, \xi) = - | -3/2 + \cos 2\pi t_n | \xi$, temos que $\xi \psi(t_n, \xi) < 0$ para qualquer $\xi \neq 0$.

y satisfaz Lipschitz, basta tomar $\mathcal{L} \geq \frac{5}{2}$. Portanto pelo teorema anterior, tomando $h \leq \frac{4}{5}$, temos que a solução trivial do sistema (2.2.2) é estável.

II - 3 - APLICAÇÕES DO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV A MÉTODOS DE PASSO MÚLTIPLO.

Nesta secção vamos utilizar os teoremas de Liapunov como ferramenta para o estudo da estabilidade, no sentido de Liapunov, do equilíbrio trivial de certos métodos de passo múltiplo.

Exemplo 2.3.1 - Consideremos o método de Adams-Moulton

$$(2.3.1) \quad y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12} [5 f_{n+2} + 8 f_{n+1} - f_n]$$

que aplicado ao problema teste $\dot{y} = \lambda y$ com $\lambda \leq 0$, resulta na seguinte equação diferença

$$(2.3.2) \quad y_{n+2} = \frac{12+8\xi}{12-5\xi} y_{n+1} - \frac{\xi}{12-5\xi} y_n$$

onde $\xi = h \lambda$ e $h = t_{n+1} - t_n$, $n \geq 0$.

Fazendo $y_n = x_{n+1}$ obtemos o seguinte sistema de 1^a ordem

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} x_{n+2} = y_{n+1} \\ y_{n+2} = -\frac{\xi}{12-5\xi} x_{n+1} + \frac{12+8\xi}{12-5\xi} y_{n+1} \end{cases}$$

Chamando $a = -\frac{\xi}{12-5\xi}$ e $b = \frac{12+8\xi}{12-5\xi}$ e tomando $0 < a \leq 1$ e $V(x,y) = a x^2 + y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta V(x_{n+1}, y_{n+1}) &= V(x_{n+2}, y_{n+2}) - V(x_{n+1}, y_{n+1}) = \\ &= a x_{n+2}^2 + y_{n+2}^2 - a x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = \\ &= a y_{n+1}^2 + [a x_{n+1} + b y_{n+1}]^2 - a x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, fazemos $y_{n+1} = y$ e $x_{n+1} = x$.

Temos então:

$$\Delta V(x,y) = ay^2 + a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - ax^2 - y^2.$$

i-) Se tomarmos $0 \leq b \leq 1-a$ temos

$$\Delta V(x,y) = -ab(x-y)^2 + a[b-(1-a)]x^2 + (b+1)[b-(1-a)]y^2.$$

Com isto, segue que

$$\Delta V(x,y) \leq -ab(x-y)^2 \leq 0$$

e assim pelo teorema (2.2.2) temos que o equilíbrio trivial de (2.3.2) é estável.

ii-) Se tomarmos $a-1 \leq b \leq 0$, temos:

$$\Delta V(x,y) = ab(x+y)^2 - a[b-(a-1)]x^2 - (1-b)[b-(a-1)]y^2$$

Como $a > 0$ e $0 \geq b \geq a-1$, temos que:

$$\Delta V(x,y) \leq ab(x+y)^2 \leq 0$$

novamente pelo teorema (2.2.2) temos que o equilíbrio trivial de (2.3.2) é estável.

Verificamos que a condição (i-) é satisfeita para todo ξ tal que $0 < -\frac{\xi}{12-5\xi} \leq 1$ e $0 \leq \frac{12+8\xi}{12-5\xi} \leq 1 + \frac{\xi}{12-5\xi}$, o que acontece para todo $\xi \in [-\frac{3}{2}, 0)$.

E a condição (i-) está satisfeita para ξ tal que $0 < -\frac{\xi}{12-5\xi} \leq 1$ e $-\frac{\xi}{12-5\xi} - 1 \leq \frac{12+8\xi}{12-5\xi} \leq 0$, isto é, para todo $\xi \in [-6, -\frac{3}{2}]$.

Observamos que as funções de Liapunov servem para determinar regiões de estabilidade para os métodos numéricos e que para o método de Adams Moulton, usando a especificada função de Liapunov $V(x,y)$, obtemos como intervalo de estabilidade $[-6, 0)$, isto é, o equilíbrio trivial do método de Adams Moulton é estável para todo $h\lambda \in [-6, 0)$.

Exemplo 2.3.2 - O método BDF

$$(2.3.4) \quad y_{n+1} - y_n = h \beta_k f_{n+1} \quad \text{com } \beta_k > 0$$

é estável para todo problema de valor inicial $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo $\langle f(t,y), y \rangle \leq 0$.

Realmente, tomando como função de Liapunov $V(x) = \|x\|$,

temos que

$$\langle y_n, y_n \rangle = \langle y_{n+1}, y_{n+1} \rangle - 2h\beta_k \langle y_{n+1}, f_{n+1} \rangle + h^2 \beta_k^2 \|f_{n+1}\|^2, \text{ ou}$$

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|, \text{ e portanto}$$

$$\Delta V(y_{n+1}) \leq 0 \quad \forall n \geq 0.$$

Temos, pelo teorema (2.2.2) que o equilíbrio trivial da técnica BDF (2.3.4) dada acima é estável.

Uma outra aplicação para o método Direto de Liapunov pode ser vista no próximo exemplo onde consideramos como problema teste a equação $\dot{y} = ay^2 + by$ que é uma classe mais geral que a classe das equações lineares com coeficientes constantes $\dot{y} = \lambda y$, usualmente usada na literatura.

Exemplo 2.3.3 - Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = ay^2 + by,$$

onde $y \in \mathbb{R}$, a e b são constantes e seu discretizado pelo método de Euler

$$(2.3.5) \quad y_{n+1} = ah y_n^2 + (1+bh) y_n = y_n [ah y_n + (1+bh)].$$

Os pontos de equilíbrio desta equação diferença são :

o equilíbrio trivial $y \equiv 0$ e $y \equiv -\frac{1+bh}{ah}$ se $a \neq 0$. Vamos analisar o equilíbrio trivial.

Tomando como função de Liapunov a função $V(x) = x^2$, temos:

$$\begin{aligned}\Delta V(y_n) &= V(y_{n+1}) - V(y_n) = \\ &= y_n^2 [ah y_n + (1+bh)]^2 - y_n^2.\end{aligned}$$

Fazendo $y_n = y$, vem

$$\Delta V(y) = y^2 [ah y + (1+bh)]^2 - y^2 = y^2 [ah y + bh] [ah y + (2+bh)]$$

Observamos que $\Delta V(y) = 0$ se $y = 0$ ou $y = -\frac{b}{a}$ ou $y = \frac{-2-bh}{ah}$. Vamos verificar o sinal de ΔV para os diversos casos de valores para a e b .

1.º caso : $a > 0$ e $b < 0$.

Neste caso, se tomarmos $h < \frac{2}{-b}$ então encontraremos uma vizinhança da origem, $U = B(0, r)$, isto é, U é a bola de centro na origem e raio r , com $r = \min \left\{ \left| -\frac{b}{a} \right|, \left| \frac{-2-bh}{ah} \right| \right\}$ onde $\Delta V(y) \leq 0 \quad \forall y \in U$. E assim, o equilíbrio trivial da equação (2.3.5) é estável.

2.º caso: $a < 0$ e $b < 0$

Este caso é idêntico ao anterior, e a conclusão segue como a anterior.

3.º caso: $a > 0$ e $b > 0$

Neste caso, ambos os pontos $y = -\frac{b}{a}$ e $y = \frac{-2-bh}{ah}$ estão à esquerda da origem e temos que o equilíbrio é instável,

pois existe uma vizinhança U da origem, onde U é dado como nos casos anteriores tal que $\Delta V(y) > 0$ para qualquer $y \in U$, e portanto temos que o equilíbrio trivial de (2.3.5) é instável [LaSalle-77].

4.º caso: $a < 0$ e $b > 0$.

Neste caso análogo ao anterior, temos que o equilíbrio trivial de (2.3.5) é instável.

Vemos portanto que apenas no 1.º e no 2.º caso temos a estabilidade da solução trivial de (2.3.5). Nestes casos podemos obter também o intervalo de estabilidade do método de Euler para a equação teste $\dot{y} = a y^2 + b y$, com $b < 0$; basta escolher h , tal que $h < -\frac{2}{b}$.

II - 4 - FUNÇÕES DE LIAPUNOV E MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Vamos agora pesquisar as relações entre o método direto de Liapunov e os vários conceitos de estabilidade estudados no capítulo anterior para o método de Runge - Kutta (1.5.2) aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y) & t &\geq 0 \\ (2.4.1) \quad y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua que satisfaz $\langle f(t, y) - f(t, \tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle \leq 0$ para quaisquer $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ e $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.1 - O equilíbrio trivial de um método de Runge-Kutta AN-ESTÁVEL é estável.

dem.:

Fazendo $z = y - \tilde{y}$ e tomando $V(z) = \|z\|$, segue que $\Delta V(z_n) = V(z_{n+1}) - V(z_n) = \|z_{n+1}\| - \|z_n\| \leq 0$. Portanto V é uma função de Liapunov para (1.5.2), e pelo teorema (2.2.2) segue o resultado. $\square$

Teorema 2.4.2 - Seja (2.4.1) com $f(t, y) = \lambda(t) y$. O equilíbrio trivial de um método de Runge-Kutta AN-ESTÁVEL é estável.

dem.:

Se um método é AN-ESTÁVEL temos que $y_{n+1} = K(\xi) y_n$ com $|K(\xi)| \leq 1$. Analogamente ao teorema anterior temos o resultado. $\square$

II - 5 - UMA EXTENSÃO DO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV NO CASO AUTÔNOMO

Vimos anteriormente que, se para (2.1.1) existir uma função de Liapunov positiva definida, temos a estabilidade da solução trivial.

Encontrar tal função V não é um trabalho trivial, pelo contrário, é um trabalho bastante difícil e às vezes até mesmo impossível.

Nosso desejo é procurar outras condições que, quando satisfeitas, possam garantir a estabilidade da solução trivial de (2.1.1).

Vamos ver alguns resultados para sistemas autônomos, isto é, o sistema considerado daqui em diante será

$$(2.5.1) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= f(y_n) \\ y_0 &= y \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua.

Em [LaSalle-77] é estudado o equilíbrio trivial de (2.5.1) através da comparação de valores de uma função V sobre a solução, em passos consecutivos j e $j-1$. Em [Ferreira-86] e [Carvalho-Ferreira-88] é feita a comparação dos valores de V calculada sobre a solução nos passos j e $j-p$, com p independente da condição inicial y . Estes autores introduziram a próxima definição e os dois teoremas que a seguem.

Definição 2.5.1 - Sejam $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e i um inteiro, $1 \leq i \leq k$; definimos

$$\Delta_i V(y_k(y)) = V(y_k(y)) - V(y_{k-i}(y))$$

Também indicamos $\Delta_i V(y_k(y))$ por $\Delta_{k-i}^k V(y)$.

Observamos que $\Delta_1 V(y_k) = \Delta V(y_{k-1})$.

Teorema 2.5.1 - Suponhamos que existam uma função positiva definida V e constantes $d > 0$ e $p > 1$, p inteiro, tais que sempre que $\|y\| < d$ e $\Delta_{p-1}^p V(y) \geq 0$ temos $\Delta_0^p V(y) \leq 0$. Então o equilíbrio trivial de (2.5.1) é estável.

Teorema 2.5.2 - Se, em adição às hipóteses do teorema acima, a função V é tal que $0 < \|y\| < d$ e $\Delta_{p-1}^p V(y) \geq 0$ implicam que $\Delta_0^p V(y) < 0$, então o equilíbrio trivial de (2.5.1) é assintoticamente estável.

Vamos dar agora alguns teoremas que estendem estes resultados, comparando o valor da função V calculada sobre a solução de (2.5.1) no passo j ($V(y_j(y))$), com o valor de V calculada sobre a solução no passo $j-p$ ($V(y_{j-p}(y))$) com $p = p(y)$ e $1 < p \leq k$ para algum inteiro finito k .

Definição 2.5.2 - Sejam k e i constantes inteiras com $k \geq i \geq 1$. Para $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$\Gamma_i^+ V(y_k) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \Delta_i V(y_k(y)) \geq 0 \}$$

e

$$\Gamma_i^- V(y_k) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \Delta_i V(y_k(y)) < 0 \}$$

Definição 2.5.3 - Dizemos que uma função contínua $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma k -dicotomia se existirem uma constante δ e um inteiro finito k , $2 \leq k$, tais que

$$\Gamma_1^+ V(y_k) \cap B(0, \delta) \subset \bigcup_{p=2}^k \overline{\Gamma_p^- V(y_k)} \cap B(0, \delta)$$

Uma k -dicotomia é estrita se

$$\Gamma_1^+ V(y_k) \cap B(0, \delta) \subset \bigcup_{p=2}^k \Gamma_p^- V(y_k) \cap B(0, \delta).$$

Se $\Gamma_1^+ V(y_k) \cap B(0, \delta) \subset \Gamma_k^- V(y_k) \cap B(0, \delta)$ teremos a definição de dicotomia dada em [Carvalho-Ferreira-88].

Teorema 2.5.3 - Se existirem um $d > 0$ e uma função positiva definida V , $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que V é uma k -dicotomia em $B(0, d)$ com relação a (2.5.1) para algum $k \geq 2$, k inteiro finito, então o equilíbrio trivial de (2.5.1) é estável.

dem.:

Por hipótese $V(y)$ existe para todo y tal que $\|y\| < d$.

Seja ϵ uma constante arbitrária com $0 < \epsilon < d$.

Seja $\xi < \epsilon$ tal que se $\|y\| < \xi$, então $\|f^k(y)\| < d$, onde f^k é a k -ésima iterada de f . Tomar ξ desta maneira é sempre possível pois f é uma função contínua.

Observamos que, com esta escolha, se o vetor inicial y é tal que $\|y\| < \xi$ então $\|y_k(y)\| < d$.

Seja $m = \min_{\xi \leq \|y\| \leq d} V(y)$. m existe, pois V é uma função contínua.

Novamente, usando a continuidade de V é possível encontrar uma constante δ , $0 < \delta < \xi$ tal que $V(y) < m$ para $\|y\| < \delta$.

Tomamos ainda $\delta' \leq \delta$ de modo que $V(y_n(y)) < m$ para $n=0,1,\dots,k$ e $0 < \|y\| < \delta'$. Novamente isto é possível pelas continuidades de f e V .

O teorema fica provado se mostrarmos que para todo y com

$\|y\| < \delta'$, vale que $V(y_n(y)) < m$, $\forall n \geq 0$. Suponhamos por absurdo que isto não ocorre, isto é, que podemos encontrar um y , $\|y\| < \delta'$ e tal que $V(y_r(y)) \geq m$ para algum $r > k$. Seja r^* o primeiro índice em que isto ocorre, isto é, $V(y_0(y)) < m$, $V(y_1(y)) < m$, ..., $V(y_{r^*-1}(y)) < m$ e $V(y_{r^*}(y)) \geq m$. Nesta situação temos:

$$\Delta_1 V(y_{r^*}(y)) > 0 \quad \text{e} \quad \|y_{r^*-i}(y)\| < \xi \quad i=1, \dots, r^*$$

Por hipótese temos que, se $\Delta_1 V(y_n(y)) \geq 0$, então existe uma constante $p=p(y)$, $2 \leq p \leq k$ tal que $\Delta_p V(y_n(y)) \leq 0$. Assim, temos que

$$\Delta_p V(y_{r^*}(y)) \leq 0, \quad \text{ou,}$$

$$V(y_{r^*}(y)) - V(y_{r^*-p}(y)) \leq 0.$$

Então

$$V(y_{r^*}(y)) \leq V(y_{r^*-p}(y)) < m, \quad \text{o que é uma contradição.}$$

Assim, para este arbitrário $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta' > 0$ correspondente às exigências da definição de estabilidade.

□

O próximo teorema dá condições para a estabilidade assintótica do equilíbrio trivial de (2.5.1).

Teorema 2.5.4 - Se existir um $d > 0$ tal que, em $B(0, d)$ $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva definida e uma k -dicotomia estrita em relação a (2.5.1) então o equilíbrio trivial de (2.5.1) é

assintoticamente estável.

dem.:

Seja δ' definido como no teorema anterior. Já provamos que o equilíbrio trivial é estável e vamos mostrar que é assintoticamente estável. Verificaremos que, se $\|y\| < \delta'$ então $V(y_n(y)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e assim, como V é uma função contínua positiva definida, $y_n(y) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para cada particular escolha da condição inicial y , tomamos

$$S_j = \max_{jk \leq n < (j+1)k} V(y_n(y)) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad S_j = S_j(y)$$

É claro que existe uma subsequência de inteiros n_j , $jk \leq n_j < (j+1)k$, de modo que $S_j = V(y_{n_j}(y))$

Afirmamos que $\{S_j\}$ é uma sequência estritamente decrescente. De fato, temos três situações a considerar:

(i-) Se $n_j = jk$ e $\Delta_1 V(y_{n_j}(y)) < 0$ temos;

$$S_j = V(y_{n_j}(y)) < V(y_{n_j-1}(y)) \leq S_{j-1}, \text{ como queríamos.}$$

(ii-) Se $n_j = jk$ e $\Delta_1 V(y_{n_j}(y)) \geq 0$ então por hipótese $\exists p$, $p=p(y)$, $1 < p \leq k$ tal que

$$V(y_{n_j}(y)) - V(y_{n_j-p}(y)) < 0.$$

Daí segue que

$$S_j = V(y_{n_j}(y)) < V(y_{n_j-p}(y)) \leq S_{j-1} \quad \text{pois } n_j-p \in$$

$[(j-1)k, jk)$.

iii-) Se $n_j > jk$ e $\Delta_1 V(y_{n_j}(y)) \geq 0$ aplicamos novamente a hipótese do teorema, obtendo $S_j < S_{j-1}$.

Afirmamos ainda que $\{S_j\} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

Suponhamos que não, isto é, que exista uma constante s , tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = s, s > 0$.

Consideremos o seguinte conjunto:

$A = \{ \|y\| \leq \epsilon \mid V(y) \geq s > 0 \}$, onde ϵ é como na demonstração do teorema (2.5.3).

É claro que $y_{n_j}(y) \in A$.

Sendo V uma k -dicotomia estrita temos, para $y_{n_j}(y) \in A$, $\Gamma^+ \subset \Gamma^-$, onde $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ V(y_{n_j}) \cap A$ e $\Gamma^- = \bigcup_{p=2}^k \Gamma_p^- V(y_{n_j}) \cap A$.

Além disso, o único ponto onde $\Delta_1 V(y)$ e $\Delta_p V(y)$ se anulam simultaneamente é $y=0$ e assim sendo, $\partial\Gamma^+ \cap \partial\Gamma^- = \emptyset$.

Nestas condições para $S_j = V(y_{n_j})$, podemos afirmar que existe uma constante $\lambda = \lambda(s) > 0$, tal que,

1-) $\Delta_1 V(y_{n_j}(y)) \geq 0 \Rightarrow \exists p, 2 \leq p \leq k$ com $n_j - p \in [(j-1)k, jk)$,
 $V(y_{n_j}) - V(y_{n_j-p}) \leq -\lambda$ e $V(y_{n_j-p}) \leq S_{j-1}$.

2-) $\Delta_1 V(y_{n_j}(y)) < 0 \Rightarrow V(y_{n_j}(y)) - V(y_{n_j-1}) \leq -\lambda, n_j-1 \in [(j-1)k, jk)$ e $V(y_{n_j-1}) \leq S_{j-1}$.

Em ambos os casos $S_j - S_{j-1} \leq -\lambda$, ou $S_j \leq S_{j-1} - \lambda$.

Aplicando esta desigualdade sucessivamente, obtemos

$$S_j \leq S_0 - j\lambda.$$

Nestas condições, $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = -\infty$, o que é um absurdo pois V é positiva definida. □

INVARIANCIA

Antes de darmos um exemplo de aplicação vamos ver uma versão do teorema de invariância dado por LaSalle [LaSalle-77], que nos fornece uma alternativa para o caso onde a função V é uma k -dicotomia semi positiva definida.

Vamos dar uma definição devida a Birkhoff de ponto limite.

Definição 2.5.4 - Um ponto y é dito um ponto limite de $f^n(y_0)$ se existir uma sequência de inteiros n_i tal que $n_i \rightarrow \infty$ e $f^{n_i}(y_0) \rightarrow y$. O conjunto limite positivo (ω -limite) de $f^n(y_0)$ é o conjunto de todos os seus pontos limites e é indicado por $\Omega(y_0)$.

Definição 2.5.5 - Um conjunto H é dito invariante com relação a uma função f se $f(H) = H$.

Seja G um subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Para um inteiro finito $k > 0$, definimos

$$E = \{ y \in \bar{G} \text{ tal que } \Delta_p V(y_k(y)) = 0 \text{ para algum } p, 1 \leq p \leq k \}.$$

Estamos nas condições de enunciar o teorema de invariância.

Teorema 2.5.5 - Seja V uma k -dicotomia estrita semi

positiva definida em G , e $y_n(y_0)$ uma solução de (2.5.1) limitada em G para todo $n \geq 0$. Então $y_n \rightarrow M \cap V^{-1}(0)$ quando $n \rightarrow \infty$, onde M é o maior conjunto invariante de E .

dem.:

Seja S_j como no teorema (2.5.4), usando a mesma argumentação com V semi positiva definida, e sendo V uma k -dicotomia estrita, temos que $V(y_n(y)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Tomando $s \in \Omega(y_0)$, $\exists$ uma sequência de inteiros n_i , $n_i \rightarrow \infty$, tal que $y_{n_i}(y_0) \rightarrow s$. Pela continuidade da função V , segue que $V(y_{n_i}) \rightarrow V(s)$, portanto $s \in V^{-1}(0)$, ou seja $\Omega(y_0) \subset V^{-1}(0)$. Como $\Omega(y_0)$ é invariante $f^k(s) \in \Omega(y_0)$ e assim $\Delta_0^k V(s) = V(f^k(s)) - V(s) = 0$. Logo, $s \in E$ e $\Omega(y_0) \subset E$. Novamente, pelo fato que $\Omega(y_0)$ é invariante, temos que $\Omega(y_0) \subset M$. □

Observações:

Se $M = \{0\}$ então todas as soluções convergem para a origem quando $n \rightarrow \infty$.

No caso em que $\Delta_0^1 V(y) \leq 0$ para qualquer $y \in G$, temos o teorema de invariância de LaSalle [LaSalle-77].

Exemplo 2.5.1 - Consideremos a seguinte equação diferença

$$(2.5.2) \quad \begin{aligned} y_n &= 0.1 y_{n-1}^2 + 0.1 y_{n-2} \\ y_0 &= y \quad \text{e} \quad y_1 = x \end{aligned} \quad \text{com } x \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

Esta equação pode ser vista como

$$\begin{aligned}x_n &= y_{n-1} & x_1 &= y \\ y_n &= 0.1 y_{n-1}^2 + 0.1 x_{n-1} & y_1 &= x \quad n=2,3,\dots\end{aligned}$$

Tomando $V(x,y) = y^2$, temos:

$$\begin{aligned}\Delta_1 V(x_2, y_2) &= V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) = y_2^2 - y_1^2 = \\ &= (0.1 y_1^2 + 0.1 x_1)^2 - y_1^2 = (0.1 x^2 + 0.1 y)^2 - x^2 = \\ &= (0.1 x^2 + 0.1 y - x)(0.1 x^2 + 0.1 y + x).\end{aligned}$$

Vemos que $\Delta_1 V(x_2, y_2) \leq 0$ não é satisfeita para quaisquer $x, y \in U$, onde U é uma vizinhança da origem.

Vamos analisar a variação de sinal de $\Delta_1 V(x_2, y_2)$.

Observamos que $\Delta_1 V(x_2, y_2) = 0$ se $y = -x^2 + 10x$ ou $y = -x^2 - 10x$. Em gráfico temos:

Vemos que $\Delta_1 V(x_2, y_2) > 0$ para $(x,y) \in A$.

Utilizando simplesmente a ajuda de Δ_1 , não podemos concluir nada a respeito da estabilidade do equilíbrio trivial da equação (2.5.2) com $V(x,y) = y^2$. Poderíamos tentar encontrar uma função positiva definida adequada, mas nosso objetivo aqui é estudar não

somente Δ_1 , mas também Δ_2 , Δ_3 , etc.

$$\begin{aligned}\Delta_2 V(x_2, y_2) &= V(x_2, y_2) - V(x_0, y_0) = \\ &= y_2^2 - y_0^2 = (0.1y_1^2 + 0.1x_1)^2 - y_0^2 = \\ &= (0.1y_1^2 + 1.1x_1)(0.1y_1^2 - 0.9x_1) = \\ &= (0.1x^2 + 1.1y)(0.1x^2 - 0.9y)\end{aligned}$$

Vamos analisar a variação de sinal de $\Delta_2 V(x_2, y_2)$.

$$\Delta_2 V(x_2, y_2) = 0 \text{ se } y = -1/11 x^2 \text{ ou } y = 1/9 x^2.$$

Observamos que, para quaisquer x e y com $\|x\| < \delta$ e $\|y\| < \delta$ se $\Delta_1 V(x_2, y_2) \geq 0$ temos que $\Delta_2 V(x_2, y_2) \leq 0$. Como o único conjunto invariante de $V^{-1}(0) \cap M$ é a origem, temos pelos teoremas (2.5.4) e (2.5.5) que o equilíbrio trivial de (2.5.2) é assintoticamente estável.

Exemplo 2.5.2 - Consideremos a equação da mola vibrante

$$(2.5.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{c}{m} y - kx \end{cases}$$

e sua discretizada pelo método de Euler

$$(2.5.4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h y_n \\ y_{n+1} = \left(1 - \frac{ch}{m}\right) y_n - hk x_n \end{cases} \quad \begin{matrix} x_0 = x \\ y_0 = y \end{matrix} \quad n = 0, 1, \dots$$

Tomando $c = m = k = 1$ e $h = \frac{4}{5}$ e $V(x, y) = x^2$ temos que

$$\begin{aligned} \Delta_9^4 V(x, y) &= x_4^2 - x_9^2 = (x_4 + x_9)(x_4 - x_9) = \\ &= \frac{72}{25^4} [-125x + 26y] [-20x - 37y]. \end{aligned}$$

Vamos fazer uma análise do sinal de $\Delta_9^4 V(x, y)$. $\Delta_9^4 V(x, y) = 0$ se (*) $y = \frac{125}{26} x$ e (**) $y = -\frac{20}{37} x$. A região de positividade de $\Delta_9^4 V(x, y)$ é:

e assim $\Delta_9^4 V(x,y) \geq 0$ na região $\mathcal{A}$.

Vamos agora analisar o sinal de $\Delta_1^4 V(x,y)$. Temos que

$$\begin{aligned}\Delta_1^4 V(x,y) &= x_4^2 - x_1^2 = (x_4 + x_1)(x_4 - x_1) = \\ &= \frac{56}{25^4} [65x + 178y] [-40x - 23y] .\end{aligned}$$

Temos que $\Delta_1^4 V(x,y) = 0$ se (*) $y = -\frac{65}{178} x$ ou
(**) $y = -\frac{40}{23} x$.

Passando à análise de $\Delta_0^4 V(x,y)$ temos:

$$\begin{aligned}\Delta_0^4 V(x,y) &= x_4^2 - x_0^2 = (x_4 + x_0)(x_4 - x_0) = \\ &= \frac{32}{25^4} [65x - 72y] [-70x - 9y] .\end{aligned}$$

Assim $\Delta_0^4 V(x,y) = 0$ se (*) $y = -\frac{65}{72} x$ ou (**)
 $y = -\frac{70}{9} x$. A região de negatividade de $\Delta_0^4 V(x,y)$ é dada abaixo.

Observamos que a região $\mathcal{A}$ onde $\Delta_8^4 V(x,y)$ é positiva está contida na união das regiões de negatividade de $\Delta_1^4 V(x,y)$ e $\Delta_0^4 V(x,y)$, ou seja

$$\Gamma_1^+ V(x_4, y_4) \subset \Gamma_8^- V(x_4, y_4) \cup \Gamma_4^- V(x_4, y_4)$$

E assim, como o único conjunto invariante de $V^{-1}(0) \cap M$ é a origem, temos pelo teoremas (2.5.4) e (2.5.5) que o equilíbrio trivial de (2.5.4) é assintoticamente estável, para $h = 4/5$.

II - 6 - INSTABILIDADE

Nem sempre é possível determinar se uma dada equação é estável, às vezes conseguimos mostrar que ela não é estável, isto é, ela é instável.

Com isto, torna-se bastante útil o estudo da instabilidade.

Teorema 2.6.1 - Seja $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva definida para (2.5.1) em um conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}^m$. Suponhamos que existe um inteiro finito k , tal que, sempre que $y \in G$ e $\Delta_0^1 V(y) \leq 0$ temos que $\Delta_0^p V(y) > 0$ para algum inteiro $p=p(y)$, $2 \leq p \leq k$. Então toda solução $y_n(y)$ de (2.5.1) sai de G ou tende para ∂G .

dem.:

Construimos como no teorema (2.5.5) a sequência S_j com

$$S_j = \max_{jk \leq n < (j+1)k} V(y_n(y)) \quad j=0,1,2,\dots$$

O resultado segue do fato que, para cada condição inicial y , a sequência S_j é estritamente crescente. $\square$

O seguinte teorema é uma generalização do teorema de Cetaev para equações diferenciais ordinárias.

Teorema 2.6.2 - Seja $A_H = \{ y \in \mathbb{R}^m / \|y\| < H \}$, $H > 0$.

Se existirem para (2.5.1) uma função contínua $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e um aberto $\mathcal{U} \subset A_H$, satisfazendo:

i-) $V(y) > 0$ e $\Delta_0^1 V(y) > 0 \quad \forall y \in \mathcal{U}$

ii-) $V(y) = 0 \quad \forall y \in \partial \mathcal{U}$ e $0 \in \partial \mathcal{U}$, onde $\partial \mathcal{U}$ denota a fronteira de $\mathcal{U}$ em relação a A_H ,

iii-) $V(y) \leq 0 \quad \forall y \in \underset{A_H}{C} \mathcal{U}$, onde $\underset{A_H}{C} \mathcal{U}$ denota o complementar de $\mathcal{U}$

em relação a A_H ,

então a solução trivial do sistema (2.5.1) com $f(0) = 0$, é um ponto de equilíbrio instável.

dem.:

Seja $y_0 \in \mathcal{U}$ e H_0 , tal que $0 < H_0 < H$.

Vamos mostrar que $\exists N, N=N(y_0)$ tal que $\|y_N(y_0)\| > H_0$.

Este fato prova o teorema, pois como $0 \in \partial\mathcal{U}$, toda vizinhança de $y=0$ contém um ponto $y_0 \in \mathcal{U}$.

Suponhamos que não exista tal N , isto é, $\|y_n(y_0)\| \leq H_0$
 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $y_n(y_0) \in \mathcal{U}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário existiria um inteiro s tal que $y_{s-1}(y) \in \mathcal{U}$ e $y_s(y) \notin \mathcal{U}$. Desta maneira $y_s(y) \in \partial\mathcal{U}$ ou $y_s(y) \in C_{A_H} \mathcal{U}$, o que é um absurdo, pois $\Delta_0^1 V(y_{s-1}) = V(y_s(y)) - V(y_{s-1}(y)) \leq 0$, e isto contradiz a hipótese i-).

Esta mesma hipótese i-) fornece $V(y_n(y_0)) > V(y_{n-1}(y_0))$ e recursivamente temos $V(y_n(y_0)) > V(y_0) = \alpha > 0$ pois V é uma função positiva definida.

Então se $y_0 \in \mathcal{U}$, $y_n(y_0) \in \mathcal{U}$ e $V(y_n(y_0)) > \alpha$, $\forall n \geq 0$.

Consideremos agora o seguinte conjunto

$\mathcal{K}(\alpha, H_0) = \{ y \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m / V(y) \geq \alpha \text{ e } \|y\| \leq H_0 \} \subset \mathcal{U}$, que é um conjunto compacto contendo $y_n(y_0)$, $\forall n \geq 0$.

Como $\Delta_0^1 V(y) > 0$ em $\mathcal{K}(\alpha, H_0)$ pois $\mathcal{K}(\alpha, H_0) \subset \mathcal{U}$, temos que existe uma constante real positiva ρ , tal que $\Delta_0^1 V(y_n(y)) \geq \rho$ $\forall n \geq 0$, pois toda função contínua definida em um conjunto compacto assume seu mínimo.

Deste fato concluímos que $V(y_n(y)) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, o que é um absurdo, pois V é contínua no compacto $\mathcal{K}(\alpha, H_0)$ e portanto limitada.

Logo existe um inteiro positivo e finito N tal que $\|y_N(y_0)\| > H_0$, o que prova o teorema. $\square$

Exemplo 2.6.1 - Consideremos a seguinte equação diferença

$$x_n = \frac{(c-b)}{a} y_{n-1} \quad x_0 = x$$

$$y_n = \frac{(a-b)}{b} x_{n-1} \quad y_0 = y$$

$$z_n = \frac{(b+a)}{c} x_{n-1} y_{n-1} \quad z_0 = z$$

Sejam:

$$V(x, y, z) = xy$$

$$A_H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < H^2 \} \text{ e}$$

$$\mathcal{U} = \{ (x, y, z) \in A_H / xy > 0 \}.$$

Tomando constantes a, b e c de modo que $\frac{(c-b)}{a} \cdot \frac{(a-b)}{b} > 1$, temos que $\Delta_0^1 V(x, y, z) > 0$ em $\mathcal{U}$ pois

$$\Delta_0^1 V(x, y, z) = x_1 y_1 - xy = \left[\frac{(c-b)}{a} \cdot \frac{(a-b)}{b} - 1 \right] xy.$$

Estamos portanto nas condições do teorema anterior, logo podemos concluir que a solução trivial do sistema dado é instável.

CONCLUSÃO -

Na primeira parte deste capítulo demos alguns teoremas sobre estabilidade no sentido de Liapunov e fizemos algumas aplicações em métodos numéricos considerando como problema teste a equação linear $\dot{y} = \lambda y$, a equação $\dot{y} = ay^2 + by$ e $\dot{y} = f(t, y)$ com $\langle f(t, y), y \rangle \leq 0$. Fizemos ainda a relação de conceitos de estabilidades dos métodos de Runge-Kutta estudados no capítulo I, com a estabilidade no sentido de Liapunov.

Demos também neste capítulo um teorema sobre estabilidade, para equações autônomas, que estende o método Direto de Liapunov, abordamos a instabilidade numérica nos teoremas (2.6.1) e (2.6.2), e demos uma versão do teorema de invariância de LaSalle para funções k-dicotomias.

CAPÍTULO III

K - CONTRATIVIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS

III - 1 - INTRODUÇÃO

Motivados pelas idéias exploradas no capítulo anterior, vamos introduzir a k-contratividade com o objetivo de estender um conceito de estabilidade estudado no capítulo I.

A estabilidade dos métodos numéricos vistos no capítulo I, foi desenvolvida a partir da contratividade da solução em relação a uma norma $\|.\|_N$. Desta maneira nos restringimos à classe de equações que são contrativas nesta norma.

Obviamente contratividade, em relação à norma $\|.\|_N$, da solução numérica implica em estabilidade desta solução, mas nem toda solução estável é contrativa segundo $\|.\|_N$ (Def.(1.4.2)).

Sabemos que se existir uma função positiva definida $V(t,y)$, tal que a solução numérica é contrativa segundo esta função $V(t,y)$, isto é $\Delta_1 V(t_{n+1}, y_{n+1}) = V(t_{n+1}, y_{n+1}) - V(t_n, y_n) \leq -r(y_n)$, então esta solução é estável, segundo Liapunov.

Nem sempre é fácil encontrar tal função $V(t,y)$. Por isto vamos introduzir o conceito de K-CONTRATIVIDADE que se torna uma ferramenta adicional no estudo da estabilidade numérica.

Para um sistema linear $y_{n+1} = A y_n$, se tomarmos $V(y) =$

$y^T B y$ com B uma matriz positiva definida, temos que $\Delta_1 V = y^T (A^T B A - B) y$. Se $A^T B A - B$ for uma matriz semi negativa definida temos que o equilíbrio trivial do sistema linear acima é estável. Se esta condição não estiver satisfeita significa que V não é uma "boa" função de Liapunov. E como alternativa à procura de uma outra função de Liapunov, vamos analisar outras variações de V , isto é, analisar o sinal de $\Delta_2 V = y^T ((A^T)^2 B A^2 - B) y$, $\Delta_3 V = y^T ((A^T)^3 B A^3 - B) y$, e assim por diante até que $\Delta_k V(y_k(y)) \leq 0$, $\forall y \in U$, onde U é uma vizinhança da origem.

Vamos apresentar um exemplo para justificar e facilitar o entendimento da k - CONTRATIVIDADE.

Exemplo 3.1.1 - Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = 4/5 y \\ \dot{y} = -4/5 x - 7/5 y \end{cases} \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}$$

com x_0 e y_0 dados.

Na forma matricial, fica

$$\dot{Y} = A Y \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & -7/5 \end{bmatrix}$$

Temos que o equilíbrio trivial desta equação é estável pois $f(t,y) = Ay$ satisfaz a condição $\langle f(t,y), y \rangle \leq 0$ para qualquer $y \in \mathbb{R}^2$.

Discretizando o sistema (4.1.1) pelo método de Euler temos o seguinte sistema de equações de diferenças

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{4}{5} h y_n \\y_{n+1} &= -\frac{4}{5} h x_n + \left(1 - \frac{7h}{5}\right) y_n\end{aligned}$$

e para $h = 1$, temos

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{4}{5} y_n \\y_{n+1} &= -\frac{4}{5} x_n - \frac{2}{5} y_n\end{aligned} \quad n \geq 0$$

ou na forma matricial

$$Y_{n+1} = A Y_n \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ -4/5 & -2/5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_n = (x_n, y_n)^T.$$

O sistema (4.1.2) não é contrativo na norma $\|\cdot\|_\infty$, pois $\|Y_{n+1}\|_\infty \leq \|Y_n\|_\infty$ não está satisfeita para qualquer $Y_n \in \mathbb{R}^2$. Basta tomar $Y_n = (x_n, x_n)^T$ que temos $\|Y_{n+1}\|_\infty = \frac{9}{5} \|Y_n\|_\infty$.

Poderíamos tomar a norma $\|\cdot\|_2$ em $\mathbb{R}^2$ proveniente do produto interno usual, e calcular $\|Y_{n+1}\|_2^2 - \|Y_n\|_2^2$;

$$\begin{aligned}\|Y_{n+1}\|_2^2 - \|Y_n\|_2^2 &= \langle Y_{n+1}, Y_{n+1} \rangle - \langle Y_n, Y_n \rangle = Y_{n+1}^T \cdot Y_{n+1} - Y_n^T \cdot Y_n = \\&= Y_n^T (A^T A - I) Y_n = (16/25)x_n^2 + (56/25)x_n y_n - (1/5)y_n^2,\end{aligned}$$

que não é negativa para todo $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.

Temos então que a condição $\|Y_{n+1}\|_2 \leq \|Y_n\|_2$ novamente não

está satisfeita. Poderíamos tentar uma outra norma, no entanto observamos que

$$Y_{n+2} = A^2 Y_n \quad \text{com} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 9/25 & -12/25 \\ 12/25 & -12/25 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \|A^2\|_{\infty} = \frac{24}{25} < 1, \quad \text{assim temos que;}$$

$$\|Y_{n+2}\|_{\infty} \leq \|Y_n\|_{\infty} \quad \forall n \geq 0.$$

Resultado análogo se verifica para a norma $\|\cdot\|_2$.

Em resumo, (3.1.1) é uma equação diferencial dissipativa e no entanto sua discretização pelo método de Euler não é contrativa nas normas mencionadas. Por outro lado, temos que $\|Y_{n+2}\|_{\infty} \leq \|Y_n\|_{\infty} \quad \forall n \geq 0$, o que nos indica que a solução do método de Euler aplicado a (3.1.1) tem características de estabilidade. Isto nos motiva a generalizar o conceito de contratividade como segue.

III - 2 - K-CONTRATIVIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Baseados na motivação anterior, onde verificamos que podemos enfraquecer a hipótese de contratividade da solução de $Y_{n+1} = A Y_n$ e ainda ter estabilidade da solução, definimos k-contratividade de uma solução numérica.

Definição 3.2.1 - Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{C}^m$. Dizemos que a equação diferença (1.1.2) é k-Contrativa para um determinado h se para este h, k é o menor inteiro tal que:

$$\|y_{n+k} - y_{n+k}\| \leq \|y_n - y_n\|$$

$\forall n \geq 0$ e quaisquer que sejam y_0 e $\tilde{y}_0 \in \mathbb{C}^m$.

Se $k=1$ dizemos simplesmente que a equação diferença é contrativa.

Se $f(t,y) = Ay$, então a equação diferença $Y_{n+1} = AY_n$ será k -contrativa na norma $\|\cdot\|$, se existir um inteiro positivo k , tal que $\|A^k\| \leq 1$.

No exemplo anterior não temos contratividade da solução da equação (3.1.2) como já foi visto, mas temos 2-contratividade.

Para uma equação diferença não autônoma $Y_{n+1} = A(n)Y_n$, a definição de k -contratividade fica:

Definição 3.2.2 - A equação diferença $Y_{n+1} = A(n)Y_n$ é k -contrativa se existir um inteiro positivo $k \geq 1$, tal que

$$\|A(n+k-1) A(n+k-2) \dots A(n)\| \leq 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Na sintaxe de diagramas usada por Lambert[Lambert-87], temos:

A primeira idéia que nos ocorre é generalizar o conceito de AN-ESTABILIDADE para métodos de Runge-Kutta, definindo a ANk-ESTABILIDADE.

Definição 3.2.3 - Um método de Runge-Kutta (1.5.2) é dito ANk-ESTÁVEL, se existir um inteiro finito k , $1 \leq k$ tal que a função $K(\xi_n) = 1 + b^T \xi_n (I - A \xi_n)^{-1} e$, satisfaz:

$$|K(\xi_{n+k-1}) \cdot K(\xi_{n+k-2}) \cdot \dots \cdot K(\xi_n)| \leq 1 \quad \forall n \geq 0$$

e para todo $\xi_n = \text{diag}(\xi_n^1, \dots, \xi_n^s)$ com $\text{Re}(\xi_n^i) \leq 0$, $i=1, 2, \dots, s$, $n = 0, 1, \dots$ e $\xi_n^i = \xi_n^j$ se $c_i = c_j$.

Observamos que um método ser ANk-ESTÁVEL significa que $\|y_{n+k}\| \leq \|y_n\|$ para algum inteiro finito k , $1 \leq k$ e qualquer $n \geq 0$.

No entanto isto não estende a classe de métodos AN-ESTÁVEIS, como veremos no próximo teorema.

Teorema 3.2.1 - Para $k > 1$, não existe nenhum método de

Runge-Kutta que seja ANk-ESTÁVEL e não seja AN-ESTÁVEL.

dem.:

Vamos tomar um método que não seja AN-ESTÁVEL, isto é, existe pelo menos um $\xi_r = \text{diag}(\xi_r^1, \dots, \xi_r^s)$ com $\text{Re}(\xi_r^i) \leq 0$ para $i = 1, 2, \dots, s$, tal que $|K(\xi_r)| > 1$ para algum $r \geq 0$.

Vamos mostrar que este método também não será ANk-ESTÁVEL.

Chamamos de $\bar{\xi}_n$ a função constante e igual a ξ_r , isto é $\bar{\xi}_n = \xi_r$ para qualquer $n \geq 0$.

Temos então que $|K(\bar{\xi}_{n+j-1}) \cdot K(\bar{\xi}_{n+j-2}) \cdot \dots \cdot K(\bar{\xi}_n)| > 1 \quad \forall j > 1$ e $\forall n \geq 0$, portanto este método não é ANk-ESTÁVEL. $\square$

III - 3 - O CONCEITO DE K-CONTRATIVIDADE APLICADO A MÉTODOS DE PASSO MÚLTIPLO.

Vamos considerar o seguinte método de passo múltiplo

$$(3.3.1) \quad \sum_{j=p}^0 \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=p}^0 \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j})$$

e o problema de valor inicial

$$\dot{y} = f(t, y) \quad t \geq 0$$

$$y(t_0) = y_0$$

com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ definida por $f(t, y) = \lambda(t)y$ onde λ é uma função contínua $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Um método de passo múltiplo de p passos pode ser transformado em um sistema de primeira ordem. Tomando $Y_n = (Y_{n+p-1}, Y_{n+p-2}, \dots, Y_n)$, um método de passo múltiplo aplicado ao problema teste $\dot{y} = \lambda(t) y$ fica:

$Y_{n+1} = K(\xi_n) Y_n \quad n \geq 0$, onde $K(\xi_n)$ é uma matriz $p \times p$, dada por:

$$K(\xi_n) = \begin{bmatrix} \frac{\xi_n^{p-1} \beta_{p-1} - \alpha_{p-1}}{\alpha_p - \xi_n^p \beta_p} & \frac{\xi_n^{p-2} \beta_{p-2} - \alpha_{p-2}}{\alpha_p - \xi_n^p \beta_p} & \dots & \frac{\xi_n^0 \beta_0 - \alpha_0}{\alpha_p - \xi_n^p \beta_p} \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \xi_n^i = h \lambda(t_{n+i}).$$

A definição de AN-ESTABILIDADE para métodos de passo múltiplo fica como segue.

Definição 3.3.1 - Dizemos que o método de passo múltiplo (3.3.1) é AN-ESTÁVEL se para todo $\xi_n = (\xi_n^0, \xi_n^1, \dots, \xi_n^p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ com $\xi_n^i = h \lambda(t_{n+i})$, $\text{Re}(\xi_n^i) \leq 0 \quad i=0,1,\dots,p, n \geq 0$ vale:

$$\|K(\xi_n)\| \leq 1$$

Estendendo o conceito de AN-ESTABILIDADE para métodos de Passo Múltiplo, definimos a ANk-ESTABILIDADE.

Definição 3.3.2 - Dizemos que um método de passo múltiplo é ANk-ESTÁVEL se existir um inteiro finito $k \geq 1$, tal que

$$\|K(\xi_n) K(\xi_{n+1}) \dots K(\xi_{n+k-1})\| \leq 1,$$

onde ξ_n é como na definição (3.3.1).

Se para um determinado k , um método numérico não é ANk-ESTÁVEL, podemos determinar a região do semi-plano complexo negativo onde o método é k -contrativo. A técnica a ser utilizada pode ser semelhante à usada em [Dekker-Verwer-84] para determinar regiões de estabilidade de métodos de Runge-Kutta. Não fazemos aqui este trabalho pois foge ao escopo de nossos estudos.

III - 3 - MÉTODOS COMPOSTOS OU CÍCLICOS

Consideremos agora métodos compostos ou cíclicos, que consistem em aplicações sucessivas de um modo cíclico de métodos distintos [Stetter-73].

A k -contratividade explica o fato de que a composição de métodos cíclicos não contrativos podem produzir métodos contrativos.

Vejamos uma composição envolvendo métodos de Runge-Kutta.

A regra do trapézio explícita também conhecida como Euler Aperfeiçoado;

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

não é contrativa. Realmente

$$K_1(\xi) = 1 + b^T \xi (I - A\xi)^{-1} e = \frac{\xi_1 \xi_2 + \xi_1 + \xi_2 + 2}{2}, \text{ que pelo princípio}$$

do módulo máximo atinge seu máximo para ξ_1 e ξ_2 imaginários puros.

Tomando $\xi_1 = i$ e $\xi_2 = 2i$ temos que $|K_1(\xi)| = 3/2 > 1$ e assim a condição $\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|$ não é satisfeita, ou seja a regra do trapézio explícita não é AN-ESTÁVEL.

Para o método Lobatto III - C [Dekker-Verwer-84]

0	1/2	- 1/2
1	1/2	1/2
	1/2	1/2

$$\text{obtemos } K_2(\xi) = \frac{2}{\xi_1 \xi_2 - \xi_1 - \xi_2 + 2}.$$

Verificamos que, se aplicarmos uma vez a regra do trapézio explícita e uma vez a de Lobatto III-C, obtemos:

$$y_{n+2} = K_2(\xi) K_1(\xi) y_n.$$

Calculando $K_2(\xi) \cdot K_1(\xi)$, temos:

$$K_2(\xi) K_1(\xi) = \frac{\xi_1 \xi_2 + \xi_1 + \xi_2 + 2}{\xi_1 \xi_2 - \xi_1 - \xi_2 + 2} \text{ que tem módulo 1 pois o numerador}$$

e o denominador são complexos conjugados, e assim

$$\|y_{n+2}\| = \|K_2(\xi) K_1(\xi) y_n\| \leq |K_2(\xi) K_1(\xi)| \|y_n\| \leq \|y_n\|.$$

Logo a solução é 2-contrativa, isto é, a composição trapézio - Lobatto III-C é contrativa.

Os métodos compostos ou cíclicos podem ser vistos como métodos não autônomos, isto é, métodos que dependem de n .

Por exemplo, a composição trapézio - Lobatto III-C pode ser entendida como o seguinte método de Runge-Kutta

0	$\frac{1}{2} \left \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right $	$-\frac{1}{2} \left \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right $
1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \right $	$\frac{1}{2} \left \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right $
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

isto é, a matriz A do método de Runge-Kutta é dada por

$$A(n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \text{se } n \text{ for par} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Assim

$$A(n) = \begin{cases} \text{Lobatto III-C} & \text{se } n \text{ for par} \\ \text{Trapézio} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

CONCLUSÃO -

O intuito do material apresentado neste capítulo é obviamente a apresentação de possíveis direções de pesquisa segundo as quais este trabalho pode ser continuado. Essas idéias se baseiam no fato que o conceito de contratividade tem como consequência a estabilidade, não sendo porém uma condição necessária. Na prática, é bem sabido que certos métodos, apesar de não se enquadrarem como contrativos, apresentam um comportamento com características de estabilidade. O conceito de k -contratividade é mais geral e pode incluir tais métodos, como ilustram os exemplos deste capítulo.

É uma feliz consequência que este conceito parece muito apropriado para o estudo dos métodos cíclicos, que já se sabia possuírem boas propriedades de estabilidade mesmo quando os métodos constituintes não as têm individualmente.

BIBLIOGRAFIA

- [Bhatia-Szego-70] - Bhatia N.P. e Szego, G.P., *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, (1970).
- [Burrage-Butcher-79] - Burrage, K. e Butcher, J.C., *Stability criteria for implicit Runge-Kutta methods*, SIAM J. Numer. Anal., 16, 1, 46-57, (1979).
- [Butcher-75] - Butcher, J.C., *A stability property of implicit Runge-Kutta methods*, BIT, 15, 358-361, (1975).
- [Butcher-87] - Butcher, J.C., *Linear and non-linear stability for general linear methods*, BIT, 27, 182-189, (1987).
- [Butcher-87] - Butcher, J.C., *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations - Runge-Kutta and General Linear Methods*, John Wiley & Sons (1987).
- [Butcher-Cash-89] - Butcher, J.C. e Cash, J.R., *Some recent developments on numerical initial value problems: a survey*, Applied Numerical Mathematics, 5, 3-18, (1989).
- [Carvalho-Ferreira-88] - Carvalho, L.A.V. e Ferreira, R.R., *On a new extension of Liapunov's direct method to discrete equations*,

Quarterly of Applied Mathematics, XLVI, 4, 779-788, (1988).

[Crouzeix-79] - Crouzeix, M., Sur la B-stabilité des méthodes de Runge-Kutta, Num.Math, 32, 75-82, (1979).

[Crouzeix-Hundsdorfer-Spijker-83] - Crouzeix, M. , Hundsdorfer, W.H. e Spijker, M.N., On the existence of solutions to the algebraic equations in implicit Runge-Kutta methods, BIT, 23, 84-91, (1983).

[Dahlquist-78] - Dahlquist, G., G-stability is equivalent to A-stability, BIT, 18, 384-401, (1978).

[Dekker-Verwer-84] - Dekker, K. e Verwer, J. G., Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations, North-Holland, (1984).

[Ferreira-86] - Ferreira, R.R., Métodos diretos para a análise do comportamento assintótico de equações diferenciais funcionais e equações a diferenças finitas. Tese de Doutorado, ICMSC, USP, (1986).

[Hahn-67] - Hahn, W., Stability of Motion, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1967).

[Halanay-66] - Differential Equations - Stability, Oscillations time lags, Academic Press, New York, São Francisco, London, (1966).

- [Hale-80] - HALE, J. - Ordinary Differential Equations, Robert E.Krieger Publishing Company, Huntington, New York,(1980).
- [Hundsdorfer e Spijker-81] - Hundsdorfer, W. H. e Spijker, M. N.,
A note on B-stability of Runge-Kutta methods, Numer. Math. 36,
319-331, (1981).
- [Hundsdorfer e Spijker-87] - Hundsdorfer, W. H. e Spijker, M. N.,
On the algebraic equations in implicit Runge-Kutta methods, SIAM
J.Numer.Anal., 24, 3, 583-594, (1987).
- [Hurt-67] - Hurt, J., Some Aspects of Difference Equations. Tese
de doutoramento, Brown University, (1967).
- [Hurt-67] - Hurt, J., Some stability theorems for ordinary
difference equations, SIAM J. Numer. Anal., 4, 4, 582-596,
(1967).
- [Infante-Castelan-78] - Infante, E. F. e Castelan, W. B., A
Liapunov functional for a matrix difference differential
equation. Journal of Diff. Eq. 29, 439-451, (1978).
- [Infante-Walker-77] - Infante, E. F. e Walker, J. A., A Liapunov
functional for a scalar differential difference equation,
Proccedings of the Royal Society of Edinburgh, 79A, 307-316,
(1977).

- [Lambert-87] - Lambert, J.D. - Developments in stability theory for ordinary differential equations em The State of the Art in Numerical Analysis, editado por A. Iserles e M.J.D. Powell, Clarendon Press, Oxford, 409-431, (1987).
- [LaSalle -77] - LaSalle, J. P., Stability theory for difference equations, MAA Studies in Mathematics, 14, 1-31, (1977).
- [Massera-56] - Massera, J. L., Contributions to stability theory, Annals of Math., 64, 1, 182-206, (1956).
- [Ortega-73] - Ortega, J. M., Stability of difference equations and convergence of iterative processes, SIAM J. Numer. Anal., 10, 2, 268-282, (1973).
- [Sand-89] - Sand, J., Choices in contractivity theory, Applied Numer. Math., 5, 105-115, (1989).
- [Spijker-84] - Spijker, M. N., On the relation between stability and contractivity, BIT, 24, 656-666, (1984).
- [Spijker-87] - Spijker, M. N., A note on contractivity in the numerical solution of initial value problems, BIT, 27, 424-437, (1987).
- [Stetter-73] - Stetter, H. J., Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).