DECAIMENTO EXPONENCIAL EM TERMOELAS
TICIDADE LINEAR UNIDIMENSIONAL E
UMA APLICAÇÃO

Anízio Perissinotto Junior

Tese apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de
São Carlos, da Universidade
de São Paulo, para obtenção
do Título de Doutor em Ciên
cias (Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

SÃO CARLOS - SP

1986

Para Regina Estela,
Gustavo, Guilherme, Maria Carolina, Eduardo
Anízio - Ivone ; João - Alice

AGRADECIMENTOS

Não podemos ter a esperança de nomear todos os que merecem nossos agradecimentos; podemos, entretanto, indicar entre os nossos amigos e colegas, os que contribuíram com muito mais do que a obrigação normal da amizade e da boa vontade.

Agradecemos

ao nosso orientador professor doutor Orlando Francisco Lopes, do IMECC-UNICAMP, gostaríamos de devolver-lhe todo o entusiasmo, a confiança, a dedicação, o estímulo, a paciência e a amizade que se fez irradiar em nós e também pela oportunidade de uma convivência matemática proveitosa e gratificante, sem a qual, este trabalho não estaria concluído.

aos professores Plácido Zoega Táboas, José Gaspar Ruas Filho e Aloisio José Freiria Neves, aos colegas do D.M. - Rio Claro, IMECC-UNICAMP e ICMSC-USP pela consideração, estímulo e apoio recebido.

ABSTRACT

In this work we show the essential spectral radius of the semigroup generated by the partial differential equations of the linear unidimensional thermoelasticity is less than one. We apply this result to the study of convergence to equilibrium of solutions of a semilinear equation.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I	- DEFINIÇÕES	1
CAPÍTULO II	- PROPOSIÇÕES	4
CAPÍTULO III	- UM ESTUDO SOBRE O RAO ESPECTRAL ESSENCIAL DO OPERADOR SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO EM TERMOELAS TICIDADE LINEAR UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA PERIÓDICA	8
CAPÍTULO IV	- UM CONTRA-EXEMPLO	35
CAPÍTULO V	- DECAIMENTO EXPONENCIAL EM TERMOELASTICIDADE LI NEAR UNIDIMENSIONAL	41
CAPÍTULO VI	- CONVERGÊNCIA PARA O EQUILÍBRIO DE UMA EQUAÇÃO DA TERMOELASTICIDADE SEMILINEAR UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRAS NULAS	64
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
	ÍNDICE DE SÍMBOLOS	78

INTRODUÇÃO

Os objetivos deste trabalho são o estudo do raio espectral essencial de operadores de evolução associados às equações diferenciais parciais provenientes da termoelasticidade linear unidimensional e uma aplicação numa equação semilinear.

O procedimento adotado é o de, em primeiro lugar, transformar o problema dado numa equação linear de evolução $\dot{u} = Au$ num espaço de Hilbert H , onde A é um operador linear fechado definido num subespaço vetorial denso de H , o qual gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) ; t \geq 0\}$ sobre o espaço H . Em seguida, encontramos uma outra equação linear de evolução $\dot{u} = A_0 u$, "mais simples", que também gera semigrupo fortemente contínuo $\{T_0(t) ; t \geq 0\}$ sobre H de maneiras que o raio espectral essencial de $T(t)$ seja igual ao raio de $T_0(t)$.

A título de motivação abordamos primeiramente o caso em que a condição de fronteira é de periodicidade em x e em seguida com condição de fronteira nula. Esses dois casos tem tratamentos diferentes pois no primeiro a equação pode ser resolvida quase explicitamente.

Finalmente, atacamos o problema da convergência para equilíbrio no caso de uma equação semilinear da termoelasticidade unidimensional com condição de fronteira nula. A teoria previamente desenvolvida é usada para se obter a pré-compacidade de solução limitada.

CAPÍTULO I

DEFINIÇÕES

1.1. OPERADOR DISSIPATIVO.

Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle, \rangle$. Seja A um operador linear definido em um subespaço $D(A)$ de H com valores em H . Dizemos que A é dissipativo se a parte real de $\langle Ah, h \rangle$ for menor ou igual a zero para todo h em $D(A)$.

1.2. SEMIGRUPO FORTEMENTE CONTÍNUO

Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo fortemente contínuo é uma família $\{T(t); t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos definidos em X com valores em X satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $T(0) =$ identidade de X ;
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$
- (iii) $T(t)x$ tende para x , em X , quando t tende para 0^+ , para cada x em X .

1.3. SEMIGRUPO DE CONTRAÇÕES

Um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito de contrações se $|T(t)| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

1.4. GERADOR INFINITESIMAL

Seja X um espaço de Banach. Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X , o seu gerador infinitesimal é a função A definida em $D(A)$ contido em X com valores em X , definida por:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} |T(t)x - x|$$

e $D(A)$ consiste de todos os pontos x de X para os quais esse limite existe.

1.4. PONTO NORMAL

Seja V um espaço vetorial normado. Seja T um operador linear contínuo de V em V . Um escalar λ é dito um ponto normal de T se uma das seguintes condições acontece:

- (i) λ está no conjunto resolvente de T ;
- (ii) λ é um ponto isolado do espectro de T , o qual é um autovalor de multiplicidade finita (isto é, a projeção associada

$$P_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \lambda| = \delta} (\mu - T)^{-1} x \, d\mu, \quad \delta > 0 \text{ pequeno,}$$

tem imagem de dimensão finita).

1.5. RAIOS ESPECTRAIS ESSENCIAIS

Seja V um espaço vetorial normado. Seja T um operador linear contínuo de V em V . O raio espectral essencial de T , $\text{re}(T)$, é definido como sendo o número

$$\text{re}(T) = \inf\{r > 0 : \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r\} \text{ é constituído de pontos normais}\}.$$

1.6. OPERADOR COMPACTO

Seja V um espaço vetorial normado. Seja T um operador

dor linear contínuo de V em V . Dizemos que T é compacto se, para cada sequência limitada (x_n) em V , a sequência (Tx_n) possui uma subsequência convergente.

CAPÍTULO II

PROPOSIÇÕES

2.1. (Lumer-Phillips). Seja A um operador linear dissipativo cujo domínio $D(A)$ é um subespaço vetorial denso de um espaço de Banach X . Se existir um $\tilde{\lambda} > 0$ tal que o operador linear $(\tilde{\lambda}I - A)$ definido em $D(A)$ com valores em X é sobrejetivo, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em X .

Demonstração: Pazy - página 16 - teorema 4.5.

2.2. O operador linear A gera semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$ sobre X com $|T(t)| \leq e^{wt}$ se e somente se o operador linear $(A - wI)$ de domínio $D(A)$ é dissipativo e existir $\tilde{\lambda} > w$ tal que o operador linear $(\tilde{\lambda}I - A)$ definido em $D(A)$ com valores em X é sobrejetivo.

2.3. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ semigrupo fortemente contínuo. Então $|T(t)|$ é limitado no intervalo fechado $[0, a]$.

Demonstração: Pazy - página 4 - teorema 2.2.

2.4. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se existem constantes w e M tal que $|T(t)| \leq M e^{wt}$, para todo $t \geq 0$, então $r(T(t)) \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: $r(T(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |T(t)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |T(nt)|^{1/n} \leq$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} M^{1/n} e^{wt} = e^{wt}.$ c.q.d.

2.5. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se existe um número $s > 0$ tal que $r(T(s)) \leq e^{ws}$ então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma constante M tal que $|T(t)| \leq M e^{(w+\varepsilon)t}$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: $r(T(s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |T(s)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |T(ns)|^{1/n} \leq e^{ws}$ para $s > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que $|T(ns)|^{1/n} \leq e^{(w+\varepsilon)s}$ sempre que $n \geq N(\varepsilon)$. E daí, $|T(ns)| \leq e^{n(w+\varepsilon)s}$, $n \geq N(\varepsilon)$. Da proposição 2.3., existe uma constante M de modo que: $|T(\tilde{t})| \leq M$ para $0 \leq \tilde{t} \leq s$. Assim dando $t \geq 0$ podemos escrever $t = ns + \tilde{t}$, onde $0 \leq \tilde{t} \leq s$ e daí $|T(t)| \leq M K \leq M e^{(w+\varepsilon)t}$ onde escolho M suficientemente grande.

2.6. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ semigrupo fortemente contínuo. Então existe um número $s > 0$ tal que $r(T(s)) < 1$ se e somente se existem constantes $M > 0$ e $w > 0$ tal que $|T(t)| \leq M e^{-wt}$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Para a prova, usamos as proposições 2.4. e 2.5. e a seguinte observação: se $r(T(s)) < 1$, então $r(T(s)) \leq r < 1$ e daí $|T(t)| \leq M r^n$, $0 < r < 1$.

2.7. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo e seja A o seu gerador infinitesimal. Se x está em $D(A)$ então:

- (i) $T(t)x$ está em $D(A)$
- (ii) $\frac{d}{dt} T(t)x = A T(t)x = T(t) Ax$

$$(iii) \quad T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau$$

Demonstração: Pazy - página 5 - teorema 2.5.

2.8. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo e A o seu gerador infinitesimal. Se λ é autovalor de A então $\mu = e^{\lambda t}$ é autovalor de $T(t)$. Se $\mu \neq 0$ é autovalor de $T(t)$ então existe λ , autovalor de A tal que $\mu = e^{\lambda t}$.

2.9. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo com gerador A . Seja λ um ponto isolado do espectro A . Seja $P(\lambda): H \rightarrow H$ a

seguinte projeção:
$$P(\lambda) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \lambda| = \delta} (A - \mu)^{-1} x d\mu$$

Então a imagem dessa projeção é um conjunto invariante por A e também por $T(t); t \geq 0$.

2.10. Sejam T e T_0 dois operadores lineares contínuos de X em X . Se $T - T_0$ um operador compacto, então $re(t) = re(T_0)$.

Demonstração: Gohberg - Krein

2.11. Seja X um espaço de Banach. Seja T um operador linear contínuo de X em X . Se $|\lambda| > \|T\|$ então λ pertence ao conjunto resolvente de T .

Demonstração: Taylor - página 260 - teorema 5.2.A.

2.12. A imersão $u \rightarrow u$ de $H^m[a,b]$ em $H^j[a,b]$ é compacta se $0 \leq j < m < \infty$. Em particular, um conjunto limitado na norma $H^1[a,b]$ tem fecho compacto em $L^2[a,b]$. (Rellich).

Demonstração: Friedman - página 31 - teorema 11.2.

2.13. Um subconjunto E de $\ell^2(\mathbb{Z})$ tem fecho compacto se e somente se E é limitado em $\ell^2(\mathbb{Z})$ e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que $\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon$ para toda sequência (a_n) em E .

2.14. Considere a seguinte equação:

$\tilde{u} = Au + h$, onde A é uma matriz constante e h um elemento de $L^2[0, 2\pi]$ com período 2π . Se a única solução 2π -periódica do homogêneo for a trivial, então a equação acima tem solução u em $H^1[0, 2\pi]$ com período 2π . Além disso, existe constante M tal que

$$|u|_{H^1} \leq M|h|_{L^2}.$$

CAPÍTULO III

Um Estudo sobre o RAI0 ESPECTRAL ESSENCIAL
do Operador Solução de uma Equação em Termo
moelasticidade Linear Unidimensional com
Condições de Fronteira Periódica.

Neste capítulo calcularemos o raio espectral essencial
de um semigrupo proveniente de uma equação da termoelasticidade
unidimensional. Como consequência, provaremos que as soluções
tendem a zero exponencialmente num certo subespaço de codimen
são finita.

Consideremos o sistema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0$$

para x em $\mathbb{R}$, $t \geq 0$, k é uma constante estritamente positiva e m
uma constante não nula.

As condições de fronteira são:

$$u(t, x+2\pi) = u(t, x)$$
$$\theta(t, x+2\pi) = \theta(t, x)$$

para todo x em $\mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

O sistema anterior pode ser visto como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m \frac{\partial v}{\partial x}$$

e as condições de fronteira são:

$$u(t, x+2\pi) = u(t, x)$$

$$v(t, x+2\pi) = v(t, x)$$

$$\theta(t, x+2\pi) = \theta(t, x)$$

para todo x real e $t \geq 0$.

Utilizando agora a seguinte mudança de variável.

$$z = \frac{\partial u}{\partial x} - v$$

$$w = \frac{\partial u}{\partial x} + v$$

chegamos ao sistema

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial t} &= - \frac{\partial z}{\partial x} + m \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
 (I) \quad \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} - m \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{m}{2} \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned}$$

e as condições de fronteira

$$\begin{aligned}
 z(t, x+2\pi) &= z(t, x) \\
 (I) \quad w(t, x+2\pi) &= w(t, x) \\
 \theta(t, x+2\pi) &= \theta(t, x)
 \end{aligned}$$

para todo x real e $t \geq 0$.

O sistema (I) pode ser olhado como um sistema de equações de evolução

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= -z' + m\theta' \\
 (II) \quad \dot{w} &= w' - m\theta' \\
 \dot{\theta} &= k\theta'' + \frac{m}{2}z' - \frac{m}{2}w'
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$(II) \quad \dot{u} = Au$$

no seguinte espaço de fase

$$\begin{aligned}
 H = \{u = (z, w, \theta) : z, w \text{ e } \theta \in L^2[0, 2\pi]; z(x+2\pi) &= z(x); \\
 w(x+2\pi) &= w(x); \theta(x+2\pi) = \theta(x), x \text{ real}\}
 \end{aligned}$$

que é um espaço de Hilbert complexo com o seguinte produto interno:

$$\begin{aligned} \langle (z, w, \theta), (z_1, w_1, \theta_1) \rangle = & \int_0^{2\pi} z(x) \bar{z}_1(x) dx + \\ & \int_0^{2\pi} w(x) \bar{w}_1(x) dx + 2 \int_0^{2\pi} \theta(x) \bar{\theta}_1(x) dx . \end{aligned}$$

O operador A é definido por

$$A(z, w, \theta) = (-z' + m\theta', w' - m\theta', k\theta'' + \frac{m}{2} z' - \frac{m}{2} w')$$

$$A: D(A) \longrightarrow H$$

$$D(A) = \{ (z, w, \theta) \in H : z, w, \theta \text{ e } \theta' \in AC(\mathbb{R}); z', w', \theta' \text{ e } \theta'' \in L^2[0, 2\pi] \} .$$

4.1. LEMA: O operador linear A definido acima é dissipativo.

Demonstração: Para cada (z, w, θ) em $D(A)$, um cálculo dá:

$$\operatorname{Re} \langle A(z, w, \theta), (z, w, \theta) \rangle = -2k \int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx \leq 0$$

o que mostra que A é dissipativo.

c.q.d.

4.2. LEMA: Existe $\lambda > 0$ tal que o operador linear $(\lambda I - A)$ definido em $D(A)$ com valores em H é sobrejetivo, onde A e $D(A)$

estão definidos acima.

Demonstração: Mostremos que para qualquer escalar $\lambda > 0$, a única solução 2π -periódica da equação $(\lambda I - A)(z, w, \theta) =$

$(0, 0, 0)$ é a solução trivial. Assim:

$$\begin{aligned} z' - m\theta' + \lambda z &= 0 \\ -w' + m\theta' + \lambda w &= 0 \\ -\theta'' - \frac{m}{2k} z' + \frac{m}{2k} w' + \frac{\lambda}{k} \theta &= 0 \end{aligned}$$

Seja $(z(x), w(x), \theta(x))$ uma solução 2π -periódica do sistema. Então

$$\begin{aligned} -z'\bar{z} + m\theta'\bar{z} - \lambda z\bar{z} &= 0 \\ w\bar{w} - m\theta'\bar{w} - \lambda w\bar{w} &= 0 \\ 2k\theta''\bar{\theta} + mz'\bar{\theta} - mw'\bar{\theta} - 2\lambda\theta\bar{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} -z'\bar{z} + m\theta'\bar{z} - \lambda z\bar{z} + w\bar{w} - m\theta'\bar{w} - \lambda w\bar{w} + 2k\theta''\bar{\theta} + mz'\bar{\theta} - mw'\bar{\theta} - \\ - 2\lambda\theta\bar{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a 2π e tomando a parte real teremos:

$$-\lambda \int_0^{2\pi} (|z(x)|^2 + |w(x)|^2 + |\theta(x)|^2) dx - 2k \int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (|z(x)|^2 + |w(x)|^2 + |\theta(x)|^2) dx = 0$$

E essa igualdade é verdadeira se e somente se

e

$$\int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx = 0$$

Portanto $z(x) = w(x) = \theta(x) = 0$. Com a proposição 2.14. temos o resultado. c.q.d.

4.3. TEOREMA: O operador linear A definido anteriormente é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t); t \geq 0\}$ em H .

Demonstração: Usar proposição 2.1. com os lemas 4.1. e 4.2.

4.4. Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo de contrações então

$$|T(t)| \leq 1, t \geq 0, \text{ e daí } r(T(t)) \leq 1; t \geq 0.$$

Estudaremos o raio espectral essencial do operador de evolução $T(t,0)$ associado à equação de evolução (II). Devido à dificuldade de se fazer diretamente tal estudo, lançaremos mão da proposição 2.10.

Para tanto consideremos o sistema auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= - \frac{\partial z}{\partial x} + az \\ \text{(III)} \quad \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} + aw \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

com as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned} z(t, x+2\pi) &= z(t, x) \\ \text{(III)} \quad w(t, x+2\pi) &= w(t, x) \\ \theta(t, x+2\pi) &= \theta(t, x) \end{aligned}$$

para todo real x e $t \geq 0$.

Por enquanto, a é um número real arbitrário, que será escolhido convenientemente.

O sistema (III) pode ser olhado como um sistema de equações de evolução

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -z' + az \\ \text{(IV)} \quad \dot{w} &= w' + aw \\ \dot{\theta} &= k\theta'' \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\dot{u} = A_0 u$$

no espaço de fase H como anteriormente definido.

O operador A_0 é definido por

$$A_0(z, w, \theta) = (-z' + az, w' + aw, k\theta'')$$

com $A_0: D(A_0) \longrightarrow H$; $D(A_0) = D(A)$.

4.5. LEMA: O operador linear A_0 , acima definido é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T_0(t) ; t \geq 0\}$.

Demonstração: Para (z, w, θ) em $D(A)$, com um simples cálculo dá:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle (A_0 + aI)(z, w, \theta), (z, w, \theta) \rangle &= \\ &= 2a \int_0^{2\pi} (|z(x)|^2 + |w(x)|^2 + |\theta(x)|^2) dx - 2k \int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Dissemos inicialmente que a seria escolhido convenientemente. Uma primeira hipótese será: $a < 0$. Com isso, o operador $A_0 + aI$ é dissipativo.

Com o raciocínio análogo ao Lema 4.2. (página 13) podemos mostrar que existe $\lambda > 0$ de tal modo que o operador $(\lambda I - A_0)$ de $D(A)$ em H seja sobrejetivo.

Portanto, A_0 gera semigrupo.

c.q.d.

Nosso intuito é mostrar a existência de um número a tal que o operador $T(t) - T_0(t)$ é compacto e daí podermos usar a proposição 2.10. Para tanto, vamos calcular o semigrupo $\{T_0(t) ; t \geq 0\}$ e o seu raio espectral essencial.

4.6. LEMA: O semigrupo fortemente contínuo $\{T_0(t); t \geq 0\}$ é dado por:

$$T_0(t) (z_0, w_0, \theta_0) = \left(\sum e^{(a-in)t} z_{on} e^{inx}, \right. \\ \left. \sum e^{(a+in)t} w_{on} e^{inx}, \sum e^{-kn^2 t} \theta_{on} e^{inx} \right)$$

para cada (z_0, w_0, θ_0) em H .

Demonstração: Formalmente fazemos:

$z(t, x) = \sum z_n(t) e^{inx}$, $w(t, x) = \sum w_n(t) e^{inx}$ e $\theta(t, x) = \sum \theta_n(t) e^{inx}$. Substituindo agora no sistema (III) e usando as coordenadas teremos:

$$\frac{dz_n(t)}{dt} = (a-in) z_n(t)$$

$$\frac{dw_n(t)}{dt} = (a+in) w_n(t)$$

$$\frac{d\theta_n(t)}{dt} = -kn^2 \theta_n(t)$$

resolvendo esse sistema com as condições iniciais acima, teremos a expressão para o semigrupo $\{T_0(t); t \geq 0\}$.

E agora, com um pouco de trabalho, mostramos que $\{T_0(t); t \geq 0\}$ é o semigrupo com gerador A_0 .

4.7. LEMA: O raio espectral essencial do semigrupo $\{T_0(t); t \geq 0\}$ é e^{at} .

Demonstração: Escrevamos $T_0(t) = (\hat{T}_0(t), \tilde{T}_0(t), \bar{T}_0(t))$.

Afirmamos que se λ é um escalar com $|\lambda| \neq e^{at}$, então λ está no conjunto resolvente de $\hat{T}_0(t)$. De fato, se $|\lambda| \neq e^{at}$ existe uma constante $c > 0$ tal que $|\lambda - e^{(a-in)t}| \geq c > 0$, para todo n . Se $f = \sum f_n e^{inx}$, então $|z_{on}| \leq \frac{|f_n|}{c}$ para todo n . E daí

$|z_0| \leq \frac{1}{c} |f|$. Portanto, $(\lambda - \hat{T}_0(t))^{-1}$ existe e é contínua, isto é,

λ está no conjunto resolvente de $\hat{T}_0(t)$. Logo, $\text{re } (\hat{T}_0(t)) = e^{at}$. Analogamente, $\text{re } (\tilde{T}_0(t)) = e^{at}$. Como $\bar{T}_0(t)$ é compacto, $\text{re } (T_0(t)) = 0$. Logo $\text{re } (T_0(t)) = e^{at}$. c.q.d.

4.8. Determinação formal do semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$ em H .

Sejam $z(t) = \sum z_n(t) e^{inx}$, $w(t) = \sum w_n(t) e^{inx}$ e $\theta(t) = \sum \theta_n(t) e^{inx}$ soluções do sistema (II). Substituindo e usando as coordenadas teremos :

$$\dot{z}_n(t) = -inz_n(t) + inm\theta_n(t)$$

$$\dot{w}_n(t) = inw_n(t) - inm_n(t)$$

$$\dot{\theta}_n(t) = -kn^2\theta_n(t) + in\frac{mz_n(t)}{2} - in\frac{mw_n(t)}{2}$$

A equação característica para o sistema acima é:

$$\lambda^3 + kn^2\lambda^2 + (n^2 + n^2m^2)\lambda + kn^4 = 0$$

Procuraremos a raiz da seguinte forma:

$$\lambda = b + dn + \frac{c}{n}$$

com b e d constantes e $c = c(n)$.

Substituindo na equação característica teremos:

$$\begin{aligned} & kd^2n^4 + kn^4 + d^3n^3 + 2kdn^3 + dn^3 + m^2dn^3 + b^3 + \frac{c^3}{n^3} + 3bd^2n^2 + \\ & 3b\frac{c^2}{n^2} + 3b^2dn + 3b^2\frac{c}{n} + 3d\frac{c^2}{n} + 3d^2cn + 6bdc + kb^2n^2 + kc^2 + 2kbcn + \\ & 2kdcn^2 + bn^2 + cn + m^2bn^2 + m^2cn = 0 \end{aligned}$$

Substituindo $d^2 = -1$ e $b = -\frac{m^2}{2k}$ na expressão acima teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{c^3}{n^3} + \left(\frac{3d}{n} - \frac{3m^2}{2kn^2} + k \right) c^2 + \left(\frac{3m^4}{4k^2n} - \frac{3m^2d}{2k} - 2n + 2kdn^2 \right) c = \frac{m^6}{8k^3} + \\ & \frac{3m^4d}{4k^2}n + m^2n^2 - \frac{m^4}{4k}n^2 = 0 \end{aligned}$$

Definindo-se:

$$\begin{aligned} g(c) = & \frac{c^3}{n^3} + \left(\frac{3d}{n} - \frac{3m^2}{2kn^2} + k \right) c^2 + \frac{3m^4}{4k^2n} c + \left(2kdn^2 - 2n - \frac{3m^2d}{2k} \right) c + \\ & + \left(m^2 - \frac{m^4}{4k} \right) n^2 + \frac{3m^4d}{4k^2}n - \frac{m^6}{8k^3} \end{aligned}$$

$$f(c) = kc^2 + \left(2kdn^2 - 2n - \frac{3m^2d}{2k} \right) c + \left(m^2 - \frac{m^4}{4k} \right) n^2 + \frac{3m^4d}{4k^2}n - \frac{m^6}{8k^3}$$

teremos:

$$|f(c) - g(c)| \leq \frac{|c|^3}{n^3} + \frac{3m^2}{2kn^2} |c|^2 + \frac{3}{n} |c|^2 + \frac{3m^4}{4k^2n} |c|.$$

Por outro lado:

$$|f(c)| \geq 2kn^2 |c| - k|c|^2 - 2n|c| - \frac{3m^2}{2k} |c| - \left| m^2 - \frac{m^4}{4k} \right| n^2 - \frac{3m^4}{4k^2} n - \frac{m^6}{8k^3}.$$

então $|f(c) - g(c)| \leq |f(c)|$ para todo c em C tal que:

$$|c| = K > \left| \frac{m^2}{2k} - \frac{m^4}{8k^2} \right|.$$

E assim, estamos em condições de usar o teorema de Rouché para essas duas funções, f e g para n suficientemente grande. Precisamos agora resolver a equação; Para tanto usaremos novamente o teorema de Rouché.

Definindo-se as funções:

$$F(c) = 2kf(c) / (4k^2dn^2 + 4kn - 3m^2d)$$

$$G(c) = c - \frac{m^2}{2kd} - \frac{m^4}{8k^2d}$$

É claro que $|F(c) - G(c)| \leq |G(c)|$ para todo c em C tal que

$$|c| = 2 + \frac{m^2}{2k} + \frac{m^4}{8k^2} \quad \text{e } n \text{ suficientemente grande.}$$

Lembrando que $d = \frac{1}{n} i$, então podemos encontrar três

autovalores distintos, a saber:

$$\lambda_1 = \lambda_1(m, k, n) = -\frac{m^2}{2k} + \frac{c}{n} + in$$

$$\lambda_2 = \lambda_2(m, k, n) = -\frac{m^2}{2k} + \frac{\tilde{c}}{n} - in$$

$$\lambda_3 = \frac{m^2}{2k} - \frac{c+\tilde{c}}{n} - kn^2$$

onde $c = c(n)$ e $\tilde{c} = \tilde{c}(n)$, porém limitados.

Os autovetores associados são:

$$\lambda_1 : \left(\frac{\min}{in+\lambda_1}, \frac{\min}{in-\lambda_1}, 1 \right) = (a_{11}, a_{21}, 1)$$

$$\lambda_2 : \left(\frac{\min}{in+\lambda_2}, \frac{\min}{in-\lambda_2}, 1 \right) = (a_{12}, a_{22}, 1)$$

$$\lambda_3 : \left(\frac{\min}{in+\lambda_3}, \frac{\min}{in-\lambda_3}, 1 \right) = (a_{13}, a_{23}, 1)$$

$$a_{11} = 2k\min^2 / (4kin^2 - m^2n + 2kc) ;$$

$$a_{21} = 2k\min^2 / (m^2n - 2kc) ;$$

$$a_{12} = 2k\min^2 / (-m^2n + 2k\tilde{c}) ;$$

$$a_{22} = 2k\min^2 / (4kin^2 + m^2n - 2k\tilde{c}) ;$$

$$a_{13} = 2k\min^2 / (-2k^2n^3 + 2kin^2 + 2m^2n - 2k(c+\tilde{c})) ;$$

$$a_{23} = 2k\min^2 / (2k^2n^3 + 2kin^2 - 2m^2n + 2k(c+\tilde{c})) .$$

Utilizando a mudança de variável:

$$\begin{bmatrix} z_n \\ w_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_n \\ \tilde{w}_n \\ \tilde{\theta}_n \end{bmatrix}$$

chegamos ao sistema:

$$\dot{\tilde{z}}_n = \lambda_1 \tilde{z}_n$$

$$\dot{\tilde{w}}_n = \lambda_2 \tilde{w}_n$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_n = \lambda_3 \tilde{\theta}_n$$

e resolvendo: $\tilde{z}_n(t) = e^{\lambda_1 t} \tilde{z}_{on}$; $\tilde{w}_n(t) = e^{\lambda_2 t} \tilde{w}_{on}$;

$$\tilde{\theta}_n(t) = e^{\lambda_3 t} \tilde{\theta}_{on} .$$

Assim: $z_{on} = A_{11} \tilde{z}_{on} + A_{12} \tilde{w}_{on} + A_{13} \tilde{\theta}_{on}$

$$w_{on} = A_{21} \tilde{z}_{on} + A_{22} \tilde{w}_{on} + A_{23} \tilde{\theta}_{on}$$

$$\theta_{on} = A_{31} \tilde{z}_{on} + A_{32} \tilde{w}_{on} + A_{33} \tilde{\theta}_{on}$$

e as expressões dos A_{ij} 's são:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21} - a_{13}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

onde:

$$a_{11}a_{22} = -4k^2m^2n^4 / (-16k^2n^4 + (8k^2ic - 8k^2i\tilde{c})n^2 + (2km^2c + 2km^2\tilde{c} - m^4)n - 4k^2c - 4k^2\tilde{c})$$

$$a_{12}a_{23} = -4k^2m^2n^4 / (-2k^2m^2n^4 + (4k^3\tilde{c} - 2kim^2)n^3 + (2m^4 + 4k^2i\tilde{c})n^2 - (2km^2c - 6km^2\tilde{c})n + 4k^2c\tilde{c} + 4k^2\tilde{c}^2)$$

$$a_{13}a_{21} = -4k^2m^2n^4 / (-2k^2m^2n^4 + (2km^2i + 4k^2c)n^3 + (2m^4 - 4k^2ic)n^2 - (6km^2c - 2km^2\tilde{c})n + 4k^2c^2 + 4k^2c\tilde{c})$$

$$a_{13}a_{22} = -4k^2m^2n^4 / (-8k^3in^5 - (8k^2 - 2k^2m^2)n^4 + (8km^2i + 4k^3\tilde{c})n^3 + (2m^4 - 8k^3ic - 12k^2i\tilde{c})n^2 - (2km^2c - 6km^2\tilde{c})n + 4k^2(c+\tilde{c})\tilde{c})$$

$$a_{12}a_{21} = -4k^2m^2n^4 / (-m^4n^2 + (2km^2c + 2km^2\tilde{c})n - 4k^2c\tilde{c})$$

$$a_{11}a_{23} = -4k^2m^2n^4 / (8k^3in^5 - (8k^2 - 2k^2m^2)n^4 + (4k^3c - 10km^2i)n^3 + (12k^2ic + 8k^2i\tilde{c} + 2m^4)n^2 - (6km^2c - 2km^2\tilde{c})n + 4k^2(c+\tilde{c})c)$$

$$A_{11} = (a_{12}a_{21} - a_{12}a_{22} + a_{13}a_{22} - a_{13}a_{21} + \det M) / (a_{11} - a_{12})\det M$$

$$a_{12}a_{22} = -4k^2m^2n^4 / (-4km^2in^3 + (8k^2i\tilde{c} - m^4)n^2 + 4km^2\tilde{c}n - 4k^2\tilde{c}^2)$$

$$a_{11} - a_{12} = (-8k^2mn^4 + (4k^2mi\tilde{c} - 4k^2mic)n^2) / (-4km^2in^3 + (8k^2i\tilde{c} + m^4)n^2 - (2km^2c + 2km^2\tilde{c})n + 4k^2c^2)$$

$$A_{12} = (a_{13} - a_{12}) / \det M$$

$$a_{13} - a_{12} = (4k^3min^5 + 4k^2mn^4 - (4km^3i + 2km^2i)n^3 + 4kmi(c+\tilde{c})n^2) / (2k^2m^4n^4 - (2km^2i + 4k^3\tilde{c})n^3 + (4km^2\tilde{c} - 2m^4)n^2 + (2km^2c + 6km^2\tilde{c})n - 4k^2c\tilde{c} - 4k^2\tilde{c}^2)$$

$$A_{13} = (a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{21} - a_{11}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{12}a_{21} - a_{12}\det M) / (a_{11} - a_{12})\det M$$

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12}a_{13} = & -8k^3m^3in^6 / (8k^3m^2in^6 - (2k^2m^4 - 8k^2m^2 + 16k^4i\tilde{c})n^5 + \\ & (4k^3m^2c + 4k^3m^2\tilde{c} - 16k^3\tilde{c} - 6km^4i)n^4 + (2m^5 + 20k^2m^2i\tilde{c} \\ & - 4k^2m^2ic - 8k^4c\tilde{c})n^3 - (6km^4c - 6km^4\tilde{c} + 8k^3ic\tilde{c} - \\ & - 16k^3i\tilde{c}\tilde{c})n^2 + (4k^2m^2c^2 + 4k^2m^2\tilde{c}^2 + 16k^2m^2c\tilde{c})n - \\ & - 8k^3c^2\tilde{c} - 8k^3c\tilde{c}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12}a_{13}a_{21} = & -8k^3m^3in^6 / (-2k^2m^4n^5 + (2km^3i + 4k^3m^2c + \\ & + 4k^3m^2\tilde{c})n^4 - (4k^2m^2ic + 4k^2m^2i\tilde{c} - 2m^6 + 8k^4c\tilde{c})n^3 + \\ & + (8k^3ic\tilde{c} - 6km^4c - 6km^4\tilde{c})n^2 + (4k^2m^2c^2 + 8k^2m^2c\tilde{c} - \\ & - 4k^2m^2\tilde{c}^2)n - 8k^3c^2\tilde{c} - 8k^3c\tilde{c}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}a_{13}a_{22} = & -8k^3m^3in^6 / (32k^4n^7 - 32k^3in^6 + (2k^2m^4 - 32k^2m^2 - \\ & - 16k^4ic)n^5 + (16k^3c + 16k^3\tilde{c} - 4k^3m^3c - 4k^3m^2\tilde{c} + \\ & + 14km^4i - 32k^3\tilde{c})n^4 + (20k^2m^2ic - 20k^2m^2i\tilde{c} + \\ & + 16k^3m^2i\tilde{c} - 2m^5 + 8k^4c\tilde{c})n^3 - (16k^3ic^2 + 16k^3i\tilde{c}^2 + \\ & + 8k^3ic\tilde{c} - 6km^4c + 6km^4\tilde{c})n^2 - (4k^2m^2c^2 - 4k^2m^2\tilde{c}^2 + \\ & + 16k^2m^2c\tilde{c})n + 8k^3c^2\tilde{c} + 8k^3c\tilde{c}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12}a_{12}a_{21} = & -8k^3m^3in^6 / (m^4n^3 - (4km^4\tilde{c} - 2km^2c)n^2 + (8k^2m^2c\tilde{c} + \\ & + 4k^2m^2\tilde{c}^2)n - 8k^3c\tilde{c}^2) \end{aligned}$$

$$A_{21} = ((a_{13} - a_{11})(a_{21} - a_{22}) - \det M) / (a_{11} - a_{12}) \det M$$

$$\begin{aligned} a_{13} - a_{11} = & (4k^3min^5 - 4k^2mn^4 - 4km^3in^3 + (4k^2mic + 4k^2ic + \\ & + 4k^2i\tilde{c} - 2km^3i)n^2) / (-8k^3in^5 + (2k^2m^2 - 8k^2)n^4 + \\ & + (6km^2i - 4k^3c)n^3 + (2m^4 + 8k^2i\tilde{c} - 4k^2ic)n^2 + \\ & + (6km^2c + 2km^2\tilde{c})n - 4k^2c^2 - 4k^2c\tilde{c}). \end{aligned}$$

$$a_{21} - a_{22} = (-8k^2mn^4 + (4k^2mic - 4k^2mi\tilde{c})n^2) / (4km^2in^3 + (m^4 - 8kic)n^2 - (2km^2c + 2km^2\tilde{c})n + 2k^2c\tilde{c}).$$

$$A_{22} = (a_{11} - a_{13}) / \det M$$

$$A_{23} = ((a_{13} - a_{11})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{11}\det M) / (a_{11} - a_{12})\det M$$

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = & (-64k^2m^2n^8 + (4k^2m^6 - 32k^4m^2i\tilde{c} - 4k^2m^6)n^6 + \\ & + 8k^3m^4cn^5) / (16k^2m^4n^6 - (8k^2m^4ic - 8k^2m^4i\tilde{c} - \\ & - m^8)n^4 - (2km^5c + 2km^6\tilde{c})n^3 + 4k^2m^4c\tilde{c}n^2 + \\ & + n(2km^2c + 2km^2\tilde{c})(-16k^2n^4 + 8k^2icn^2 - \\ & - 8k^2i\tilde{c}n^2 - m^4n^2 + 2km^2cn + 2km^2\tilde{c}n - 4k^2c\tilde{c}) - \\ & - 4k^2c\tilde{c}(-16k^2n^4 + 8k^2icn^2 - 8k^2i\tilde{c}n^2 - m^4n^2 + \\ & + 2km^2cn + 2km^2\tilde{c}n - 4k^2c\tilde{c})) \end{aligned}$$

$$A_{31} = (a_{21} - a_{22}) / \det M$$

$$A_{32} = (a_{12} - a_{11}) / \det M$$

$$A_{33} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) / \det M.$$

E desta forma se o semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) ; t \geq 0\}$ for dado por:

$$T(t)(z_0, w_0, \theta_0) = (z(t), w(t), \theta(t))$$

onde (z_0, w_0, θ_0) está em H . Se denotarmos suas componentes por:

$$\{T(t)(z_0, w_0, \theta_0)\}_n = (z_n(t), w_n(t), \theta_n(t))$$

e daí:

$$\begin{aligned} z_n(t) = & \{a_{11} A_{11} e^{\lambda_1 t} + a_{12} A_{21} e^{\lambda_2 t} + \\ & + a_{13} A_{31} e^{\lambda_3 t}\} z_{on} + \{a_{11} A_{12} e^{\lambda_1 t} + a_{12} A_{22} e^{\lambda_2 t} + \\ & + a_{13} A_{32} e^{\lambda_3 t}\} w_{on} + \{a_{11} A_{13} e^{\lambda_1 t} + a_{12} A_{23} e^{\lambda_2 t} + \\ & + a_{13} A_{33} e^{\lambda_3 t}\} \theta_{on} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_n(t) = & \{a_{21} A_{11} e^{\lambda_1 t} + a_{22} A_{21} e^{\lambda_2 t} + \\
& + a_{23} A_{31} e^{\lambda_3 t}\} z_{on} + \{a_{21} A_{12} e^{\lambda_1 t} + a_{22} A_{22} e^{\lambda_2 t} + \\
& + a_{23} A_{32} e^{\lambda_3 t}\} w_{on} + \{a_{21} A_{13} e^{\lambda_1 t} + a_{22} A_{23} e^{\lambda_2 t} + \\
& + a_{23} A_{33} e^{\lambda_3 t}\} \theta_{on}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_n(t) = & \{A_{11} e^{\lambda_1 t} + A_{21} e^{\lambda_2 t} + A_{31} e^{\lambda_3 t}\} z_{on} + \\
& + \{A_{12} e^{\lambda_1 t} + A_{22} e^{\lambda_2 t} + A_{32} e^{\lambda_3 t}\} w_{on} + \{A_{13} e^{\lambda_1 t} + A_{23} e^{\lambda_2 t} + \\
& + A_{33} e^{\lambda_3 t}\} \theta_{on}
\end{aligned}$$

4.9. TEOREMA: O semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$, gerado por A é:

$$\begin{aligned}
T(t)(z_o, w_o, \theta_o) = & (\Sigma z_n(t) e^{inx}, \Sigma w_n(t) e^{inx}, \\
& \Sigma \theta_n(t) e^{inx})
\end{aligned}$$

onde $z_n(t)$, $w_n(t)$ e $\theta_n(t)$ estão dados nas expressões acima.

DEMONSTRAÇÃO: Com um pouco de cálculo podemos mostrar que esse é o semigrupo gerado por A.

4.10. TEOREMA: Se $a = -\frac{m^2}{2k}$, então para todo elemento (z_o, w_o, θ_o)

de H , $\{T(t) - T_o(t)\}(z_o, w_o, \theta_o)$ é elemento de

$\{H^1[0, 2\pi]\}^3$. Além disso:

$$|\{T(t) - T_o(t)\}(z_o, w_o, \theta_o)| \leq M |(z_o, w_o, \theta_o)|_{L^2}$$

com M uma constante que independe do elemento

(z_o, w_o, θ_o)

DEMONSTRAÇÃO: Vamos estimar as coordenadas:

$$(z_n(t) - z_n^o(t), w_n(t) - w_n^o(t), \theta_n(t) - \theta_n^o(t))$$

onde $z_n(t), w_n(t)$ e $\theta_n(t)$ são dados no parágrafo 4.8. e

$$z_n^o(t) = e^{(-\frac{m^2}{2k} - in)t} \quad z_{on} = e^{\beta_1 t} z_{on} ;$$

$$w_n^o(t) = e^{(-\frac{m^2}{2k} + in)t} \quad w_{on} = e^{\beta_2 t} w_{on} ;$$

$$\theta_n^o(t) = e^{-kn^2 t} \theta_{on} = e^{\beta_3 t} \theta_{on} .$$

Olhemos para a expressão assintótica de cada a_{ij} e cada A_{ij} . A notação $a_n \sim b_n$ significará $\frac{a_n}{b_n}$ tende para 1 com n tendendo para $+\infty$.

$$a_{11} \sim \frac{m}{2} ; \quad a_{21} \sim \frac{2ki}{m} n ; \quad a_{12} \sim -\frac{2ki}{m} n ; \quad a_{22} \sim \frac{m}{2} ;$$

$$a_{13} \sim -\frac{mi}{kn} ; \quad a_{23} \sim \frac{mi}{kn} ; \quad \det M \sim -\frac{4k^2}{m^2} n^2 ; \quad A_{11} \sim -\frac{m^3}{8k^2 n^2} ;$$

$$A_{12} \sim -\frac{mi}{2kn} ; \quad A_{13} \sim \frac{m^4 - 8m}{16k^2 n^2} ; \quad A_{21} \sim \frac{mi}{2kn} ; \quad A_{22} \sim -\frac{m^3}{8k^2 n^2} ;$$

$$A_{23} \sim -\frac{m^2}{2k^2 n^2} ; \quad A_{31} \sim -\frac{mi}{2kn} ; \quad A_{32} \sim \frac{mi}{2kn} ; \quad A_{33} \sim 1$$

Agora vemos que: $\lim_{n \rightarrow \infty} |n a_{ij} A_{lr}| = 0$ ou $g = g(m, k)$ e

$\lim_{n \rightarrow \infty} |n A_{lr}| = 0$ ou $h = h(m, k)$, para $l \neq 3$ e $r \neq 3$. Podemos, desta

forma, concluir que: $|a_{ij} A_{lr}| \leq \frac{K}{|n|}$ e $|A_{lr}| \leq \frac{K}{|n|}$ a menos

de A_{33} onde K é uma constante que não depende de $(z_{on}, w_{on}, \theta_{on})$.

Sejam:

$$p_1 = p_1(n, t) = a_{11} A_{11} e^{\lambda_1 t} + a_{12} A_{21} e^{\lambda_2 t} - e^{\beta_1 t} + a_{13} A_{31} e^{\lambda_3 t};$$

$$p_2 = p_2(n, t) = a_{11} A_{12} e^{\lambda_1 t} + a_{12} A_{22} e^{\lambda_2 t} + a_{13} A_{32} e^{\lambda_3 t};$$

$$p_3 = p_3(n, t) = a_{11} A_{13} e^{\lambda_1 t} + a_{12} A_{23} e^{\lambda_2 t} + a_{13} A_{33} e^{\lambda_3 t};$$

$$q_1 = q_1(n, t) = a_{21} A_{11} e^{\lambda_1 t} + a_{22} A_{21} e^{\lambda_2 t} + a_{23} A_{31} e^{\lambda_3 t};$$

$$q_2 = q_2(n, t) = a_{21} A_{12} e^{\lambda_1 t} + a_{22} A_{22} e^{\lambda_2 t} - e^{\beta_2 t} + a_{23} A_{32} e^{\lambda_3 t};$$

$$q_3 = q_3(n, t) = a_{21} A_{13} e^{\lambda_1 t} + a_{22} A_{23} e^{\lambda_2 t} + a_{23} A_{33} e^{\lambda_3 t};$$

$$r_1 = r_1(n, t) = A_{11} e^{\lambda_1 t} + A_{21} e^{\lambda_2 t} + A_{31} e^{\lambda_3 t};$$

$$r_2 = r_2(n, t) = A_{12} e^{\lambda_1 t} + A_{22} e^{\lambda_2 t} + A_{32} e^{\lambda_3 t};$$

$$r_3 = r_3(n, t) = A_{13} e^{\lambda_1 t} + A_{23} e^{\lambda_2 t} + A_{33} e^{\lambda_3 t} - e^{\beta_3 t};$$

Com isso podemos reescrever:

$$\{T(t) - T_0(t)\}_n(z_o, w_o, \theta_o) =$$

$$= (p_1 z_{on} + p_2 w_{on} + p_3 \theta_{on}, q_1 z_{on} + q_2 w_{on} + q_3 \theta_{on}, r_1 z_{on} + r_2 w_{on} + r_3 \theta_{on}).$$

Mostraremos que: $\{T(t) - T_0(t)\}(z_o, w_o, \theta_o)$ está em $\{H^1[0, 2\pi]\}^3$, isto

é $\{T(t) - T_0(t)\}(z_o, w_o, \theta_o) = \sum \{T(t) - T_0(t)\}_n(z_o, w_o, \theta_o) e^{inx}$ está em $\{H^1[0, 2\pi]\}^3$. Para tanto basta verificar que:

$$\sum n^2 | \{T(t) - T_0(t)\}_n (z_0, w_0, \theta_0) |^2 < \infty$$

Na primeira coordenada temos:

$$\begin{aligned} |z_n(t) - z_n^0(t)| &= |p_1 z_{on} + p_2 w_{on} + p_3 \theta_{on}| \leq \\ &\leq |p_1| |z_{on}| + |p_2| |w_{on}| + |p_3| |\theta_{on}| ; \\ |p_1| &\leq |a_{11} A_{11}| |e^{\lambda_1 t}| + |a_{12} A_{21} e^{\lambda_2 t} - e^{\beta_1 t}| + |a_{13} A_{31}| |e^{\lambda_3 t}| \\ |a_{11} A_{11}| |e^{\lambda_1 t}| &\leq \frac{k}{|n|} ; \\ |a_{13} A_{13}| |e^{\lambda_3 t}| &\leq \frac{k}{|n|} ; \\ |a_{12} A_{21} e^{\lambda_2 t} - e^{\beta_1 t}| &= |a_{12} A_{21} e^{\lambda_2 t} - a_{12} A_{21} e^{\beta_1 t} + \\ &\quad + a_{12} A_{21} e^{\beta_1 t} - e^{\beta_1 t}| \leq \\ &\leq |a_{12} A_{21}| |e^{(\lambda_2 - \beta_1)t} - 1| |e^{\beta_1 t}| + \\ &\quad |a_{12} A_{21} - 1| |e^{\beta_1 t}| ; \end{aligned}$$

$$\lambda_2 - \beta_1 = \frac{\tilde{c}}{n} ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{12} A_{21} = 1 ;$$

$$|e^{\beta_1 t}| = e^{(-\frac{m^2}{2k})t} .$$

Para complementarmos usaremos o lema:

4.11. LEMA: Dado $M > 0$, existe $\tilde{M} = \tilde{M}(M)$ tal que $|e^{ct} - 1| \leq \tilde{M}|c|$, para $0 \leq t \leq M$, $|c| \leq M$, onde c é um número com plexo

DEMONSTRAÇÃO: $e^{ct} = 1 + ct + \frac{c^2 t^2}{2!} + \dots$

$$|e^{ct} - 1| = |ct + \frac{c^2 t^2}{2!} + \frac{c^3 t^3}{3!} + \dots| \leq$$

$$|c| \left| t + \frac{|c| t^2}{2!} + \frac{|c|^2 t^3}{3!} + \dots \right| \leq \frac{|c|}{M} \left| Mt + \frac{M^2 t^2}{2!} + \frac{M^3 t^3}{3!} + \dots \right| =$$

$$\left(\frac{e^{Mt} - 1}{M} \right) |c| . \quad \text{c.q.d.}$$

Usando o lema 4.11., para mostrar que:

$$|e^{(\lambda_2 - \beta_1)t} - 1| \leq \frac{K}{|n|} ,$$

basta provar: $|\lambda_2 - \beta_1| \leq \frac{K}{|n|}$; e isso acontece.

Logo: $|a_{12} A_{21} e^{\lambda_2 t} - e^{\beta_1 t}| \leq \frac{K}{|n|}$. Portanto $|p_1| \leq \frac{K}{|n|}$

Analogamente fazemos para $p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3$ e obtemos as desigualdades desejadas.

Conseqüentemente:

$$|p_1 z_{on} + p_2 w_{on} + p_3 \theta_{on}|^2 \leq \frac{K}{|n|^2} \{ |z_{on}|^2 + |w_{on}|^2 + |\theta_{on}|^2 \}$$

$$|q_1 z_{on} + q_2 w_{on} + q_3 \theta_{on}|^2 \leq \frac{K}{|n|^2} \{ |z_{on}|^2 + |w_{on}|^2 + |\theta_{on}|^2 \}$$

$$|r_1 z_{on} + r_2 w_{on} + r_3 \theta_{on}|^2 \leq \frac{K}{|n|^2} \{ |z_{on}|^2 + |w_{on}|^2 + |\theta_{on}|^2 \}$$

Assim: $\sum n^2 | \{ T(t) - T_0(t) \}_n (z_0, w_0, \theta_0) |^2 \leq$

$$K \sum \{ |z_{on}|^2 + |w_{on}|^2 + |\theta_{on}|^2 \} < \infty$$

E também: $\| \{T(t) - T_0(t)\}(z_0, w_0, \theta_0) \| \leq M \| (z_0, w_0, \theta_0) \|_{L^2}$

com M uma constante que independe do elemento (z_0, w_0, θ_0) . c.q.d.

4.12. TEOREMA: Se $a = -\frac{m^2}{2k}$, então $T(t) - T_0(t) : H \longrightarrow H$

é um operador compacto para todo $t \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Usando que a imersão de $H^1[0, 2\pi]$ em $L^2[0, 2\pi]$ ser compacta (proposição 2.12), e o teorema 4.10, temos o resultado acima.

4.13. Então se $a = -\frac{m^2}{2k}$ temos que $\operatorname{re}(T(t)) = \operatorname{re}(T_0(t))$ e daí $\operatorname{re}(T(t)) = e^{-\frac{m^2}{2k} t}$. Logo os elementos do espectro de $T(t)$ que têm norma maior do que $e^{-\frac{m^2}{2k} t}$ são pontos normais (mais precisamente são autovalores isolados).

4.14. TEOREMA: Se $a = -\frac{m^2}{2k}$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um subespaço vetorial $\tilde{H}$ de H , de codimensão finita, tal que $\|T(t)\tilde{u}\| \leq M e^{(-\frac{m^2}{2k} + \varepsilon)t} \|\tilde{u}\|$ para todo $\tilde{u}$ de $\tilde{H}$, onde M é uma constante.

DEMONSTRAÇÃO: Esse teorema decorre da definição de raio espectral essencial e usando a proposição 2.5. c.q.d.

4.15. TEOREMA: O zero é autovalor do operador A .

DEMONSTRAÇÃO: Para verificar se zero é autovalor precisamos ver

se a equação $A(z, w, \theta) = (0, 0, 0)$ tem solução não trivial 2π -periódica.

Assim queremos resolver:

$$-z' + m\theta' = 0$$

$$w' - m\theta' = 0$$

$$\theta'' + \frac{m}{2k} z' - \frac{m}{2k} w' = 0$$

Seja $(z(x), w(x), \theta(x))$ uma solução 2π -periódica. Então

$$-z'\bar{z} + m\theta'\bar{z} = 0$$

$$w'\bar{w} - m\theta'\bar{w} = 0$$

$$2k\theta''\bar{\theta} + mz'\bar{\theta} - mw'\bar{\theta} = 0$$

$$\text{E daí : } -z'\bar{z} + m\theta'\bar{z} + w'\bar{w} - m\theta'\bar{w} + 2k\theta''\bar{\theta} + mz'\bar{\theta} - mw'\bar{\theta} = 0 .$$

Integrando de 0 a 2π e tomando a parte real temos:

$$-2k \int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx = 0$$

e daí $\theta'(x) = 0$ e então $\theta(x)$ é constante. Substituindo nas duas primeiras equações:

$$-z' = 0$$

$$w' = 0$$

e daí z e w são funções constantes.

Logo temos solução 2π -periódica : (constante, constante, constante).

É claro que tal solução está em $D(A)$. Portanto o zero é autovalor de A .

4.16. TEOREMA: Se a parte real de λ é maior ou igual a zero e λ diferente de zero, então λ está no conjunto resolvente do operador A .

DEMONSTRAÇÃO: λ estará no conjunto resolvente do operador A se a única solução da equação $(A - \lambda I)(z, w, \theta) = (0, 0, 0)$ em $D(A)$ é a trivial.

Escrevemos então o sistema:

$$-z' + m\theta' - \lambda z = 0$$

$$w' - m\theta' - \lambda w = 0$$

$$\theta'' + \frac{m}{2k} z' - \frac{m}{2k} w' - \frac{\lambda}{k} \theta = 0$$

ou

$$-z' + m\theta' - \lambda z = 0$$

$$w' - m\theta' - \lambda w = 0$$

$$\theta'' - \frac{m\lambda}{2k} z - \frac{m\lambda}{2k} w - \frac{\lambda}{k} \theta = 0$$

Seja $(z(x), w(x), \theta(x))$ uma solução 2π -periódica desse sistema. Então:

$$-z'\bar{z} + m\theta'\bar{z} - \lambda z\bar{z} = 0$$

$$w'\bar{w} - m\theta'\bar{w} - \lambda w\bar{w} = 0$$

$$2k\theta''\bar{\theta} - mz'\bar{\theta} - mw'\bar{\theta} - 2\lambda\theta\bar{\theta} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{E daí : } & -z'\bar{z} + m\theta'\bar{z} - \lambda z\bar{z} + w'\bar{w} - m\theta'\bar{w} - \lambda w\bar{w} + 2k\theta''\bar{\theta} - mz'\bar{\theta} - \\ & - mw'\bar{\theta} - 2\lambda\theta\bar{\theta} = 0 \end{aligned}$$

Integrando de 0 a 2π e tomando a parte real, teremos:

$$-\operatorname{Re} \lambda \int_0^{2\pi} (|z(x)|^2 + |w(x)|^2 + |\theta(x)|^2) dx - 2k \int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx = 0$$

Se $\operatorname{Re} \lambda > 0$, então essa igualdade só vale quando:

$$\int_0^{2\pi} (|z(x)|^2 + |w(x)|^2 + |\theta(x)|^2) dx = 0 \text{ e } \int_0^{2\pi} |\theta'(x)|^2 dx = 0.$$

Portanto $z(x) = w(x) = \theta(x) = 0$.

Se $\operatorname{Re} \lambda = 0$, então $\theta(x)$ é constante; $\theta(x) = \theta_0$. Substituindo na terceira equação do segundo sistema e integrando de 0 a 2π concluímos que: $\theta(x) = 0$.

Reescrevendo agora o primeiro e o segundo sistema:

$$-z' - \lambda z = 0$$

$$w' - \lambda w = 0$$

$$z' - w' = 0$$

$$-z' - \lambda z = 0$$

$$-w' - \lambda w = 0$$

$$z + w = 0$$

De $z' - w' = 0$ tiramos que $z - w$ é constante. Como $z + w = 0$, então z é constante e w é menos essa constante. Sabemos que os autovalores que dão solução 2π -periódica são da forma in , n inteiro, e desta forma:

$$z(x) = e^{-inx} z_0$$

$$w(x) = e^{inx} w_0$$

$$0 = z + w = e^{-inx} z_0 + e^{inx} w_0. \text{ Logo } z_0 = w_0 = 0.$$

Portanto $z(x) = w(x) = 0$. Não esquecer que $\lambda \neq 0$ e daí não queremos $n = 0$. c.q.d.

4.17. Logo, o raio espectral de $T(t)$ é igual a 1. Ainda mais, só existe um autovalor de $T(t)$ de módulo 1, que é $\lambda = e^{0t} = 1$.

E como os elementos do espectro de $T(t)$ que têm norma maior do que $e^{-\frac{m^2}{2k}t}$ são autovalores isolados (finitos) então podemos dizer que existe um $c > 0$ tal que todo λ do espectro de $T(t)$ com $\lambda \neq 1$, temos $|\lambda| \leq c < 1$.

4.18. TEOREMA: O autoespaço generalizado associado ao autovalor zero do operador A tem dimensão 3.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo teorema 4.15. temos que (constante, constante, constante) é autovetor associado ao autovalor zero.

Desta forma já temos, no mínimo, dimensão 3.

Da definição de raio espectral essencial sabemos que A restrito a esse subespaço generalizado é uma matriz quadrada de dimensão finita. Denotamos tal matriz por B . Sabemos que B é equivalente a uma matriz J , na forma canônica de Jordan. Logo será equivalente à matriz nula, ou a uma matriz com zeros na diagonal principal e 1 na diagonal imediatamente superior de alguns blocos.

Caso fosse essa segunda hipótese, teríamos solução do tipo $t e^{0t}$, que é ilimitada. Absurdo pois todas as soluções são limitadas. Então só pode ser a matriz nula. E daí a dimensão do autoespaço generalizado é 3 pois os autovetores generalizados são os próprios autovetores. c.q.d.

4.19. Como consequência imediata o autoespaço generalizado associado ao autovalor $\lambda = e^{0t} = 1$ de $T(t)$ tem dimensão 3 pois $T(t)$ a esse subespaço é e^{Bt} .

CAPÍTULO IV

UM CONTRA-EXEMPLO

Neste capítulo vamos mostrar que as equações da termoelasticidade bidimensional geram um semigrupo fortemente contínuo com raio espectral essencial igual a 1 e que o autoespaço generalizado associado ao autovalor 1 tem dimensão infinita.

Consideremos o sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta u + p \operatorname{grad} \operatorname{div} u - m \operatorname{grad} \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \Delta \theta - m \operatorname{div} v$$

onde p e k são constantes estritamente positivas, m é uma constante não nula, $u = (\tilde{u}, \hat{u})$, $v = (\tilde{v}, \hat{v})$.

As condições de fronteira são:

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y)$$

$$u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y)$$

$$\theta(t, x + 2\pi, y) = \theta(t, x, y)$$

$$\theta(t, x, y + 2\pi) = \theta(t, x, y)$$

para todo x e y reais e $t \geq 0$.

Reescrevendo o sistema:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{v}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + p \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y \partial x} \right) - m \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \hat{v}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + p \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} \right) - m \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - m \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right)$$

Esse sistema pode ser visto como uma equação de evolução:

$$\dot{u} = Au$$

no seguinte espaço de fase

$$H = \{ (\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta) : \tilde{u} \text{ e } \hat{u} \in H^1([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]), \tilde{v}, \hat{v} \text{ e } \theta \in$$

$L^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$, todas são periódicas de período 2π nas va

riáveis x e y e $\tilde{u}$ e $\hat{u}$ tem média zero}

que é um espaço de Hilbert real com o seguinte produto interno:

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta), (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \hat{u}_1, \hat{v}_1, \theta_1) \rangle = & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\tilde{v} \cdot \tilde{v}_1 + \hat{v} \cdot \hat{v}_1 + \\ & + \text{grad} \tilde{u} \cdot \text{grad} \tilde{u}_1 + \text{grad} \hat{u} \cdot \text{grad} \hat{u}_1 + p(\tilde{u}_x + \hat{u}_y)(\tilde{u}_{1x} + \hat{u}_{1y}) + \theta \theta_1] dx dy \end{aligned}$$

O operador A é definido por:

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta) = & (\tilde{v}, \Delta \tilde{u} + p \tilde{u}_{xx} + p \hat{u}_{yx} - m \theta_x, \hat{v}, \Delta \hat{u} + p \hat{u}_{yy} + p \tilde{u}_{xy} - m \theta_y, \\ & k \Delta \theta - m \tilde{v}_x - m \hat{v}_y) ; \end{aligned}$$

$$A : D(A) \longrightarrow H$$

$$D(A) = \{ (\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta) \in H : \tilde{u}, \hat{u} \text{ e } \theta \in H^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) ;$$

$$\tilde{v} \text{ e } \hat{v} \in H^1([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) \}$$

Esse operador A gera semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t); t \geq 0\}$ sobre H .

Vejamos que A é dissipativo. Para todo $(\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta)$ em $D(A)$ com um simples cálculo temos:

$$\langle A(\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta), (\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{u}, \hat{v}, \theta) \rangle = -k \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\text{grad} \theta|^2 dx dy \leq 0.$$

de maneiras que A é dissipativo.

E pode-se mostrar que existe $\lambda > 0$ tal que $(A - \lambda I)$ é sobrejetivo. Então gera semigrupo.

Para cada natural n , as funções abaixo são soluções do nosso sistema:

$$\tilde{u}(t, x, y) = \cos(n\sqrt{2} t) \cdot \cos(nx + ny) - \sin(n\sqrt{2} t) \cdot \sin(nx + ny)$$

$$\tilde{v}(t, x, y) = -n\sqrt{2} \sin(n\sqrt{2} t) \cdot \cos(nx + ny) - n\sqrt{2} \cos(n\sqrt{2} t) \cdot \sin(nx + ny)$$

$$\hat{u}(t, x, y) = -\cos(n\sqrt{2} t) \cdot \cos(nx + ny) + \sin(n\sqrt{2} t) \cdot \sin(nx + ny)$$

$$\hat{v}(t, x, y) = n\sqrt{2} \sin(n\sqrt{2} t) \cdot \cos(nx + ny) + n\sqrt{2} \cos(n\sqrt{2} t) \cdot \sin(nx + ny)$$

$$\theta(t, x, y) = 0$$

Observe que tais funções são periódicas de período $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ na variável t .

Consideremos agora a sequência de condições iniciais $w_n = (\cos(nx + ny), -n\sqrt{2} \sin(nx + ny), -\cos(nx + ny), n\sqrt{2} \sin(nx + ny), 0)$.

É claro que é uma sequência ortogonal, logo linearmente independente.

Agora $T\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)w_n = w_n$, para todo n , logo 1 é auto

valor do seguinte elemento do semigrupo: $T\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)$. Temos assim

uma quantidade enumerável de autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 1 . Portanto 1 não é ponto normal, logo o raio espectral essencial do semigrupo deve ser maior ou igual a 1 . Como o raio espectral do semigrupo é menor ou igual a 1 , então esses raios são iguais a 1 .

Também podemos ver que o autoespaço generalizado associado ao autovalor 1 é de dimensão infinita.

CAPÍTULO V

DECAIMENTO EXPONENCIAL EM TERMOELASTICIDADE LINEAR UNIDIMENSIONAL

Em { 3 } Dafermos demonstrou que toda solução do sistema abaixo tende para zero quando t cresce.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0$$

para $0 < x < \pi$, $t \geq 0$, onde k é uma constante estritamente positiva e m é uma constante não nula e as condições de fronteira:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$$

$$\theta(t, 0) = \theta(t, \pi) = 0$$

Nosso objetivo é mostrar que toda solução tende a zero exponencialmente quando t cresce. E para tanto lançaremos mão do raio espectral essencial do operador solução.

Este sistema pode ser visto como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v \\ (I) \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

e as condições de fronteira:

$$(I) \quad \begin{aligned} u(t,0) &= u(t,\pi) = 0 \\ \theta(t,0) &= \theta(t,\pi) = 0 \end{aligned}$$

O Capítulo III foi motivação para esse, porém o grau de dificuldade deste é muito maior visto que lá tínhamos autofunções ortogonais e aqui não temos.

O sistema (I) pode ser olhado como um sistema de equações de evolução.

$$(II) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u'' - m\theta' \\ \dot{\theta} &= k\theta'' - mv' \end{aligned}$$

ou ainda

$$(II) \quad \dot{z} = Az$$

no espaço de fase

$$H = H_0^1[0,\pi] \times L^2[0,\pi] \times L^2[0,\pi],$$

com o seguinte produto interno

$$\langle (u,v,\theta), (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\theta}) \rangle = \int_0^\pi [u'(x) \cdot \tilde{u}'(x) + v(x) \cdot \tilde{v}(x) + \theta(x) \cdot \tilde{\theta}(x)] dx.$$

O operador $A : D(A) \longrightarrow H$; é definido por:

$$A(u,v,\theta) = (v, u'' - m\theta', k\theta'' - mv')$$

$$D(A) = (H_0^1[0,\pi] \cap H^2[0,\pi]) \times H_0^1[0,\pi] \times (H_0^1[0,\pi] \cap H^2[0,\pi])$$

Mostra-se que A é o gerador infinitesimal de um se migruppo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) ; t \geq 0\}$ em H .

Estamos interessados no raio espectral essencial de $T(t)$. Esse raio é importante para o controle da parte do espectro contido no conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \text{re}(T(t))\}$ que é a parte do es pectro responsável pelo comportamento assintótico da solução do problema linear.

Um estudo direto no sistema é muito delicado, então o que faremos é lançar mão de um sistema auxiliar do qual saibamos calcular o seu raio espectral essencial e que seja igual ao raio espectral essencial do $T(t)$.

Em outras palavras, procuraremos encontrar uma outra equação de evolução $\dot{z} = A_0 z$, "mais simples", a qual gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T_0(t) ; t \geq 0\}$, tal que $\text{re}(T(t)) = \text{re}(T_0(t))$. O termo "mais simples" foi usado para significar que sabemos calcular o raio espectral essencial do $T_0(t)$ de maneira fácil.

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v + au \\ \text{(III)} \quad \dot{v} &= u'' + av \\ \dot{\theta} &= k\theta'' \end{aligned}$$

com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, \pi) = 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\text{(III)} \quad \dot{z} = A_0 z$$

no espaço de fase H como definido anteriormente.

O operador $A_0 : D(A) \longrightarrow H$ é definido por

$$A_0(u, v, \theta) = (v + au, u'' + av, k\theta'')$$

onde $D(A)$ é como definido anteriormente.

Assim definido, o operador A_0 é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T_0(t); t \geq 0\}$ em H .

Por conseguinte, o conjunto das condições iniciais que dão soluções regulares para ambas as equações é denso em H .

Observe que da equação para $A(t, x)$ vemos que $A(t, x)$

está em $H^1[0, \pi]$, $t > 0$, pois o semigrupo gerado por $k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ é analítico, e portanto a terceira componente é compacta em $L^2[0, \pi]$ para $t > 0$. Assim $\text{re}(T_0(t)) = e^{at}$.

5.1. TEOREMA: Se $a = -\frac{m^2}{2k}$ então $T(t) - T_0(t) : H \longrightarrow H$ é um operador

compacto, qualquer que seja $t \geq 0$. O raio espectral essencial é: $e^{(-\frac{m^2}{2k})t}$.

A demonstração será feita em vários lemas.

Pelas observações anteriores, basta demonstrar que a diferença das duas primeiras componentes é compacta em $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$. Além disso, como $T(t) - T_0(t)$ é um operador linear limitado, basta considerar iniciais, na bola unitária de $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ que dão soluções regulares $w(t) = (u(t), v(t))$.

Seja $\{R(t) ; t \geq 0\}$ o semigrupo fortemente contínuo em $L^2[0, \pi]$ gerado por $k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ cujo domínio do gerador é

$$H_0^1[0, \pi] \cap H^2[0, \pi].$$

Observemos que:

$$R(t)\hat{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2t} \langle \hat{\theta}, \sin nx \rangle \sin nx;$$

$$\hat{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\theta}_n \sin nx ; \quad \hat{\theta}_n = \langle \hat{\theta}, \sin nx \rangle_{L^2}.$$

Como a terceira componente na equação (I) ou (II) satisfaz

$$\theta(t) = R(t)\theta_0 - m \int_0^t R(t-s) \frac{\partial}{\partial x} v(s) ds ,$$

as duas primeiras equações satisfazem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v$$

(IV)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial R(t) \theta_0}{\partial x} + m^2 \int_0^t \frac{\partial R(t-s)}{\partial x} \frac{\partial v(s)}{\partial x} ds,$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v + au - au$$

(V)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + av - av - m \frac{\partial R(t) \theta_0}{\partial x} + m^2 \int_0^t \frac{\partial R(t-s)}{\partial x} \frac{\partial v(s)}{\partial x} ds$$

Seja $\{\tilde{S}(t) ; t \geq 0\}$ o semigrupo fortemente contínuo em $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ gerado pela equação da onda, isto é, gerado por (v, u'') , no domínio $(H_0^1[0, \pi] \cap H^2[0, \pi]) \times H_0^1[0, \pi]$. Então :

$$\tilde{S}(t)(u_0, v_0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (u_0^n \cos nt + \frac{1}{n} v_0^n \sin nt) \operatorname{senn} x, \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} (-n u_0^n \sin nt + v_0^n \cos nt) \operatorname{senn} x \right)$$

onde

$$u_0^n = \langle u_0, \operatorname{senn} x \rangle_{L^2} = \int_0^{\pi} u_0(x) \operatorname{senn} x \, dx$$

$$v_0^n = \langle v_0, \operatorname{senn} x \rangle_{L^2} = \int_0^{\pi} v_0(x) \operatorname{senn} x \, dx$$

Assim, o semigrupo fortemente contínuo $\{S_0(t) ; t \geq 0\}$ em $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ gerado por $(v + au, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + av)$ é

$$S_0(t) = e^{at} \tilde{S}(t).$$

Se $w(t) = (u(t), v(t))$ é solução do sistema (V), então:

$$(u(t), v(t)) = S_0(t) (u_0, v_0) + \int_0^t S_0(t-s) (-au(s), -av(s) - m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0$$

$$m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} d\tau) ds =$$

$$= S_0(t) (u_0, v_0) + \frac{m^2}{2k} \int_0^t S_0(t-s) (u(s), v(s)) ds +$$

$$\int_0^t S_0(t-s) (0, -m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0) ds +$$

$$\int_0^t S_0(t-s) (0, m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} d\tau) ds.$$

$$\text{Chamando: } (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = S_0(t) (u_0, v_0) = e^{at} \tilde{S}(t) (u_0, v_0);$$

$$(U(t), V(t)) = (u(t), v(t)) - (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = (u(t), v(t)) - S_0(t) (u_0, v_0)$$

$$\text{e assim: } u(t) = U(t) + \tilde{u}(t) \quad ; \quad v(t) = V(t) + \tilde{v}(t)$$

temos:

$$\begin{aligned} (U(t), V(t)) &= \int_0^t S_0(t-s) [-a(U(s), V(s)) - a(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)) + \\ &+ (0, -m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0) + \\ &+ (0, m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial}{\partial x} (V(\tau) + \tilde{v}(\tau)) d\tau)] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t S_0(t-s) [(-a\tilde{u}(s), -a\tilde{v}(s)) + (0, -m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0)] + \\
&+ (0, m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}(\tau) d\tau)] ds + \int_0^t S_0(t-s) [-a(U(s), V(s)) + \\
&+ (0, m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial}{\partial x} V(\tau) d\tau)] ds .
\end{aligned}$$

5.2. LEMA:

$$(i) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} R(t) z \right|_{L^2} \leq k_1 \frac{1}{\sqrt{t}} |z|_{L^2} ; \quad t > 0$$

$$(ii) \quad \left| R(t) \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{L^2} \leq k_2 \frac{1}{\sqrt{t}} |z|_{L^2} , \quad t > 0$$

$$(iii) \quad \int_0^t \left| \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial z(\tau)}{\partial x} d\tau \right|_{L^2}^2 ds \leq k_3 \int_0^t |z(s)|_{L^2}^2 ds$$

$$(iv) \quad \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s R(s-\tau) z(\tau) d\tau \right|_{L^2}^2 ds \leq k_4 \int_0^t |z(s)|_{L^2}^2 ds$$

Demonstração: $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \text{senn}x \rangle \text{senn}x$

$$R(t)z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2 t} \langle z(\tau), \text{senn}x \rangle \text{senn}x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} R(t)z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-kn^2 t} \langle z(\tau), \text{senn}x \rangle \cos nx$$

$$R(t) \frac{\partial z(\tau)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2 t} \langle \frac{\partial z(\tau)}{\partial x}, \text{senn}x \rangle \text{senn}x$$

$$\left\langle \frac{\partial z(\tau)}{\partial x}, \text{sennx} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial z(\tau)}{\partial x} \text{sennx} \, dx = -n \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle$$

Logo:

$$R(t) \frac{\partial z(t)}{\partial x} = - \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-kn^2 t} \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle \text{sennx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial z(\tau)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-kn^2 (s-\tau)} \left\langle \frac{\partial z(\tau)}{\partial x}, \text{sennx} \right\rangle \text{cosnx}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-kn^2 (s-\tau)} \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle \text{cosnx}.$$

Vamos mostrar a parte (iii)

$$\int_0^t \left| \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial z(\tau)}{\partial x} \, d\tau \right|_{L^2}^2 ds =$$

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\int_0^s e^{-kn^2 (s-\tau)} \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle \, d\tau \right)^2 ds =$$

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-2kn^2 s} \left(\int_0^s e^{kn^2 \tau} \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle \, d\tau \right)^2 ds =$$

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-2kn^2 s} \left(\int_0^s e^{\frac{kn^2 \tau}{2}} e^{\frac{kn^2 \tau}{2}} \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle \, d\tau \right)^2 ds \leq$$

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-2kn^2 s} \left(\int_0^s e^{kn^2 \tau} \, d\tau \right) \left(\int_0^s e^{kn^2 \tau} \left\langle z(\tau), \text{cosnx} \right\rangle^2 \, d\tau \right) ds$$

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-2kn^2 s} \frac{(e^{kn^2 s} - 1)}{kn^2} \int_0^s e^{kn^2 \tau} (\langle z(\tau), \cos nx \rangle)^2 d\tau ds \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k} \int_0^t e^{-kn^2 s} \left(\int_0^s e^{kn^2 \tau} (\langle z(\tau), \cos nx \rangle)^2 d\tau \right) ds =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k} \left\{ \frac{e^{-kn^2 s}}{-kn^2} \int_0^s e^{kn^2 \tau} (\langle z(\tau), \cos nx \rangle)^2 d\tau \right\} \Big|_0^t -$$

$$- \int_0^t \frac{e^{-kn^2 s}}{-kn^2} e^{kn^2 s} (\langle z(\tau), \cos nx \rangle)^2 ds =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{k^2} e^{-kn^2 t} \int_0^t e^{kn^2 \tau} (\langle z(\tau), \cos nx \rangle)^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^2} \int_0^t (\langle z(\tau), \cos nx \rangle)^2 d\tau \right\} \leq \frac{1}{k^2} \int_0^t |z(\tau)|_{L^2}^2 d\tau$$

pois $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ é um sistema ortonormal (completo) em $L_2([0, \pi])$.

De forma análoga, demonstra-se (iv).

Passemos agora para (i).

Inicialmente, olhemos para a função $f(x) = x^2 e^{-ax^2}$, $x \geq 0$, $a > 0$. Então, $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$;

$f(x) \geq 0$, $x > 0$. Os pontos críticos dessa função são: $x = 0$ e

$x = \frac{1}{\sqrt{a}}$. O ponto $\frac{1}{\sqrt{a}}$ é de máximo. $f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{a.e} \geq x^2 e^{-ax^2}$,

$x \geq 0$.

Com esta observação concluímos que: $n^2 e^{-kn^2 t} \leq \frac{\tilde{k}}{t}$, $t > 0$

Então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} R(t) z(\tau) \right|_{L^2}^2 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2 t} \langle z(\tau), \text{senn}x \rangle \cos nx \right|_{L^2}^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2kn^2 t} (\langle z(\tau), \text{senn}x \rangle)^2 \leq \\ &\leq \frac{\tilde{k}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (\langle z(\tau), \text{senn}x \rangle)^2 = \tilde{k} \frac{|z|_{L^2}^2}{t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Analogamente fazemos para o (ii), apenas lembrando de usar integração por partes em $\langle \frac{\partial}{\partial x} z(\tau), \text{senn}x \rangle$. c.q.d.

5.3. LEMA: Se Δ^{-1} é o inverso de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ com condição de fronteira de

Dirichlet, então:

$$\Delta^{-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z - z(0) - \frac{x}{\pi} (z(\pi) - z(0))$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $v = \Delta^{-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \bar{z}$, então $\Delta v = 0$, $v(0) = -z(0)$,

$v(\pi) = -z(\pi)$. Como $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$, segue que $\frac{\partial v}{\partial x}$ é cons

tante e, portanto, igual a sua média, isto é,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{1}{\pi} (v(\pi) - v(0)),$$

$$v(x) - v(0) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial s} ds = \int_0^x \frac{1}{\pi} (v(\pi) - v(0)) ds = \frac{x}{\pi} (v(\pi) - v(0)).$$

E o lema segue.

c.q.d.

5.4. LEMA: Se Δ^{-1} é o inverso de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ com condição de fronteira de

Dirichlet, então $\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} = z - z_m$, onde

$$z_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi z(x) dx.$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} - z \right) = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ segue que

$\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} - z$ é constante e, portanto igual a sua média, isto é, $\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} - z = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} - z \right) dx = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi z(x) dx$.
c.q.d.

5.5. LEMA: Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) ; t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X . Seja também $\tilde{E}$ subconjunto de $L^p([0, b], X)$, $p > 1$, limitado, tal que o conjunto

$\left\{ \int_0^t T(t-s)g(s)ds, g \in \tilde{E}, 0 \leq t \leq b \right\}$ tem fecho compacto em X .

Então, $\left\{ t \rightarrow \int_0^t T(t-s)g(s)ds, g \in \tilde{E} \right\}$ é um subconjunto equi

contínuo de $C([0, b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F_g(t) = \int_0^t T(t-s)g(s)ds$. Queremos provar que

5.6. LEMA: Se $a = -\frac{m^2}{2k}$ então $\int_0^t S_0(t-s) \left[-a\tilde{u}(s), \right.$
 $\left. -a\tilde{v}(s) - m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 + m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau \right] ds$

está num compacto de $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$, se $0 \leq t \leq b$, fixo.

DEMONSTRAÇÃO: Reescrevendo

$$\int_0^t S_0(t-s) (-a\tilde{u}(s), -a\tilde{v}(s)) ds +$$

$$\int_0^t S_0(t-s) (0, -m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0) ds +$$

$$\int_0^t S_0(t-s) (0, m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau) ds .$$

Observe que $\int_0^t S_0(t-s) (-a\tilde{u}(s), -a\tilde{v}(s)) = -atS_0(t) (u_0, v_0)$

Analisemos agora o termo do meio da expressão inicial.

$$\int_0^t S_0(t-s) (0, \frac{\partial R(s)}{\partial x} \theta_0) ds = \int_0^\delta S_0(t-s) (0, \frac{\partial R(s)}{\partial x} \theta_0) ds +$$

$$+ \int_\delta^t S_0(t-s) (0, \frac{\partial R(s)}{\partial x} \theta_0) ds .$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se $|\theta_0|_{L^2} \leq 1$, então:

$$\left| \int_0^\delta S_0(t-s) \left(0, \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 \right) ds \right|_{H_0^1 \times L^2} \leq$$

$$\int_0^\delta |S_0(t-s)| \left| \left(0, \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 \right) \right|_{H_0^1 \times L^2} ds \leq K \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2k\sqrt{\delta} < \varepsilon$$

Lembrando que o semigrupo gerado por $k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ no espaço de fase

$L^2[0, \pi]$ com domínio $H_0^1[0, \pi] \cap H^2[0, \pi]$ é analítico. Além disso,

se $\delta(\varepsilon) \leq s \leq b$ e $|\theta_0|_{L^2} \leq 1$, $\left| \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 \right| \leq \frac{k_1}{\sqrt{s}} \leq \frac{k_1}{\sqrt{\delta}}$. Logo é limitado. En

tão está em $H^1[0, \pi]$. Como a imersão é compacta segue que $\frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0$

está num compacto fixo de $L^2[0, \pi]$ (dependendo de δ) e daí

$S_0(t-s) \left(0, \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 \right)$, $\delta \leq s \leq t \leq b$, estará num compacto fixo de

$H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ (dependendo de $\delta(\varepsilon)$, assim como

$\int_\delta^t S_0(t-s) \left(0, \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 \right) ds$. Logo o termo do meio da expressão in

cial está num compacto de $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$.

Analiseemos agora o terceiro termo.

Levando em conta que $R(s)$ é solução da equação do calor e que

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + a \tilde{v} \quad \text{temos:} \quad \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^s R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \left(-\frac{1}{k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Delta^{-1} R(s-\tau) \right) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\Delta^{-1} R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} \right] \Big|_0^s + \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) \left(\frac{\partial^3 \tilde{u}(\tau)}{\partial x^3} + a \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} \right) d\tau = \\
& = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} \frac{\partial \tilde{v}(s)}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} R(s) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) \frac{\partial^3 \tilde{u}(\tau)}{\partial x^3} d\tau \\
& + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) a \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau = -\frac{1}{k} \tilde{v}(s) + \frac{1}{k} \tilde{v}_m(s) + \\
& + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} R(s) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) \frac{\partial^3 \tilde{u}(\tau)}{\partial x^3} d\tau + \\
& + \frac{a}{k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}(\tau)}{\partial x} d\tau .
\end{aligned}$$

Chamando :

$$z_1(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) \frac{\partial^3 \tilde{u}(\tau)}{\partial x^3} d\tau , \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_1(x, s)}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^s \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\tau)}{\partial x} \right) d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^s R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau)}{\partial x} d\tau - \\
&- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^s R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, 0)}{\partial x} d\tau - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^s R(s-\tau) \left(\frac{\partial \tilde{u}(\tau, \pi)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}(\tau, 0)}{\partial x} \right) \frac{x}{\pi} d\tau .
\end{aligned}$$

Além disso :

$$\int_0^\pi \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|^2 d\tau = \int_0^\pi e^{2a\tau} \left| \sum_{n=1}^\infty (n u_0^n \cos n\tau + v_0^n \sin n\tau) \right|^2 d\tau \leq$$

$$\int_0^\pi \left| \sum_{n=1}^{\infty} (u_0^n \cos n\tau + v_0^n \sin n\tau) \right|^2 d\tau$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_0^n)^2 + (v_0^n)^2.$$

Vale uma estimativa análoga para $\int_0^\pi \left| \frac{\partial \tilde{u}(\tau, \pi)}{\partial x} \right|^2 d\tau$.

$$\text{Portanto : } \left| \frac{\partial z_1(s)}{\partial x} \right|_{L^2}^2 = \int_0^\pi \left| \frac{\partial z_1(s)}{\partial x} \right|_{L^2}^2 ds \leq K_5 |(u_0, v_0)|^2.$$

$$\text{Isso acarreta : } |z_1(s)|_{L^2}^2 = \int_0^\pi |z_1(s)|^2 ds \leq K_6 |(u_0, v_0)|^2$$

$$\text{De fato, se : } z_2(s, x) = \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) \frac{\partial^3 \tilde{u}(\tau)}{\partial x^3} d\tau =$$

$$= \int_0^s R(s-\tau) \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\tau)}{\partial x} \right) d\tau =$$

$$= \int_0^s R(s-\tau) \left(\frac{\partial \tilde{u}(\tau)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}(\tau, 0)}{\partial x} + \frac{x}{\pi} \left(\frac{\partial \tilde{u}(\tau, \pi)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}(\tau, 0)}{\partial x} \right) \right) d\tau$$

então teremos uma estimativa para $|z_2(s)|_{L^2}$ análoga à estimativa

$$\text{obtida acima para } \left| \frac{\partial z_1(s)}{\partial x} \right|_{L^2}$$

$$\text{Além disso : } z_1(s, x) = \frac{dz_2}{dx}(s) \quad ; \quad z_2(s, 0) = z_2(s, \pi) = 0 \quad e$$

$$\|z_1(s)\|_{L^2}^2 = \int_0^\pi |z_1(s,x)|^2 dx = \int_0^\pi z_1(s,x) \cdot \frac{dz_2(s)}{dx} dx =$$

$$= z_1(s,x) \cdot z_2(s,x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi z_2(s,x) \frac{\partial z_1(s,x)}{\partial x} dx \leq$$

$$\leq \int_0^\pi |z_2(s,x) \cdot \frac{\partial z_1(s,x)}{\partial x}| dx \leq \|z^2(s)\|_{L^2} \cdot \left\| \frac{\partial z_1(s)}{\partial x} \right\|_{L^2}.$$

Afirmamos que : $\int_0^t S_0(t-s)(0, m^2 z_1(s)) ds$ está num conjunto compac

to de $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$.

$$\text{De fato : } \int_0^t S_0(t-s)(0, m^2 z_1(s)) ds =$$

$$(m^2 \sum_{n=1}^\infty \{ \int_0^t e^{a(t-s)} \text{senn}(t-s) \frac{1}{n} \langle z_1(s), \text{senn} x \rangle ds \} \text{senn} x,$$

$$m^2 \sum_{n=1}^\infty \{ \int_0^t e^{a(t-s)} \text{cosn}(t-s) \langle z_1(s), \text{senn} x \rangle ds \} \text{senn} x).$$

$$\langle z_1(s), \text{senn} x \rangle = \int_0^\pi z_1(s,x) \text{senn} x dx = - \int_0^\pi z_1(s,x) \frac{d \text{cos} x}{n} = -$$

$$- \frac{z_1(s,x) \text{cos} n\pi}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\partial z_1(s,x)}{\partial x} \text{cos} n x dx =$$

$$= - \frac{z_1(s,\pi) \text{cos} n\pi - z_1(s,0)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\partial z_1(s,x)}{\partial x} \text{cos} n x dx.$$

Usando : $|z_1(s, 0)| \leq K_7 \left(\left| \frac{\partial z_1(s)}{\partial x} \right|_{L^2} + |z_1(s)|_{L^2} \right)$ e as estimativas anteriores, temos : $\int_0^t |\langle z_1(s), \text{senn}x \rangle| ds \leq K_8 \frac{1}{n} |(u_0, v_0)|$ e

isso dá a compacidade procurada.

O termo $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) d\tau$ é tratado mais facilmente pois

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) d\tau \right|_{L^2} = \left| \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) a \Delta^{-1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) d\tau \right|_{L^2} \leq$$

$$K_8 \int_0^s \frac{1}{\sqrt{s-\tau}} \left| \Delta^{-1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) \right|_{L^2} d\tau \leq K_8 |(u_0, v_0)| \text{ e a norma } L_2 \text{ de sua}$$

$$\text{derivada é } \left| \int_0^s R(s-\tau) a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) d\tau \right|_{L^2} \leq K_9 \int_0^s \frac{1}{\sqrt{s-\tau}} |\tilde{v}(\tau)|_{L^2} d\tau \leq$$

$$\leq K_9 |(u_0, v_0)|.$$

$$\text{E daí, o termo : } \int_0^t S_0(t-s) \left(0, \frac{m^2}{k} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \Delta^{-1} R(s-\tau) a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) d\tau \right)$$

está num compacto de $H_0^1[0, \pi] \times L_2[0, \pi]$.

$$\text{Como } \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} R(s) \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{L^2} ds = \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial x} R(s) \Delta^{-1} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{L^2} ds \leq$$

$$\leq K_1 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \left| \Delta^{-1} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{L^2} ds \leq K_2 |(u_0, v_0)| \quad \text{e como}$$

$$\int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} R(s) \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right|_{L^2} ds = \int_0^t \left| R(s) \frac{\partial v_0}{\partial x} \right|_{L^2} ds \leq$$

$$\leq \int_0^t \frac{K_2}{\sqrt{s}} |v_0|_{L^2} ds \leq K_{10} |v_0|_{L^2} \leq K_{10} |(u_0, v_0)| \quad \text{o termo}$$

$$\int_0^t S_0(t-s) \left(0, \frac{m^2}{k} \frac{\partial}{\partial x} \Delta^{-1} R(s) \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) ds \quad \text{está num compacto de}$$

$$H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi] \quad (\text{da mesma forma que } \int_0^t S_0(t-s) (0, m^2 z_1(s)) ds \text{ aci}$$

ma).

Visto que $\tilde{v}_m(s)$ está num compacto pois sua imagem está num subes

paço de dimensão finita então $\int_0^t S_0(t-s) \left(0, \frac{m^2}{k} \tilde{v}_m(s) \right) ds$ também

num compacto de $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$.

$$\text{Calculemos agora } \therefore - \frac{m^2}{2k} \int_0^t S_0(t-s) (0, \tilde{v}(s)) ds =$$

$$- \frac{m^2}{2k} \int_0^t e^{a(t-s)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{senn}(t-s) \frac{1}{n} \tilde{v}_n(s) \text{senn} x, \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(t-s) \tilde{v}_n(s) \operatorname{senn} x \, ds .$$

$$\text{Como } \tilde{v}_n(s) = e^{as} (-n u_0^n \operatorname{senn} s + v_0^n \cos ns) ;$$

$$\operatorname{senn}(t-s) \operatorname{senn} s = \frac{1}{2} \cos(nt - 2ns) - \frac{1}{2} \cos nt ;$$

$$\operatorname{senn}(t-s) \cos ns = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(nt - 2ns) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} nt ;$$

$$\cos n(t-s) \operatorname{senn} s = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2ns - nt) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} nt ;$$

$$\cos n(t-s) \cos ns = \frac{1}{2} \cos(nt - 2ns) + \frac{1}{2} \cos nt ;$$

$$\text{temos : } \int_0^t e^{a(t-s)} \operatorname{sen}(t-s) \frac{1}{n} \tilde{v}_n(s) ds =$$

$$= \frac{t}{2} e^{at} (u_0^n \cos nt + \frac{1}{2} v_0^n \operatorname{sen} nt) - \frac{1}{2n} e^{at} \operatorname{sen} nt u_0^n ;$$

$$\int_0^t e^{a(t-s)} \cos n(t-s) \tilde{v}_n(s) ds = \frac{t}{2} e^{at} (-n u_0^n \operatorname{sen} nt + v_0^n \cos nt) +$$

$$+ \frac{1}{2n} e^{at} \operatorname{sen} nt v_0^n .$$

$$\text{Portanto, } - \frac{m^2}{2k} \int_0^t S_0(t-s) (0, \tilde{v}(s)) ds = - \frac{m^2}{2k} t S_0(t) (u_0, v_0) +$$

$$+ \text{compacto em } H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi] .$$

$$\text{Lembrando que a vale } - \frac{m^2}{2k} \text{ e que ainda não tínhamos analisado o}$$

$$\text{termo} \quad \int_0^t S_0(t-s)(-a) S_0(s) (u_0, v_0) ds = \frac{m^2}{2k} t S_0(t) (u_0, v_0) \quad ,$$

somando estes dois veremos que a expressão do lema 5.6. está um compacto de $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ se $|(u_0, v_0)| \leq 1$ e $0 \leq t \leq b$.

Desta forma temos a compacidade nas fibras.

Na verificação da equicontinuidade usaremos o lema 5.5., isto é, precisamos verificar se cada um dos termos da expressão está em $L^p([0, b], H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi])$, $p > 1$.

O termo $(-a\tilde{u}(s), -a\tilde{v}(s)) = \frac{m^2}{2k} S_0(s) (u_0, v_0)$ está em L^∞ .

O termo $(0, -m \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0)$ está em $L^p([0, b], H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi])$

para todo p , $1 \leq p < 2$, pois $\left| \frac{\partial}{\partial x} R(s) \theta_0 \right|_{L^2} \leq \frac{k_1}{\sqrt{s}} \left| \theta_0 \right|_{L^2}$, $s > 0$.

O termo $(0, m^2 \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} R(s-\tau) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(\tau) d\tau)$ está em

$L^2([0, b], H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi])$ por causa do lema 5.2. - (iii) ,

visto ter lá demonstrado que a seguinte função:

$z : [0, b] \rightarrow L^2[0, \pi]$ é que tal $\int_0^b |z(s)|^2 ds < \infty$

e se chamarmos :

$$w(s) = \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-kn^2(s-\tau)} \langle z(\tau), \cos nx \rangle \cos nx d\tau \quad \text{então}$$

$$\int_0^b \frac{|w(t)|^2}{L^2} dt \leq M \int_0^b |z(t)|^2 dt \quad \text{onde } M \text{ é constante.}$$

E desta forma, pelo teorema de Arzelà-Ascoli, fica demonstrado o lema 5.6. c.q.d.

Para demonstrarmos o teorema 5.1., página , precisamos mostrar que para t fixado, o conjunto:

$$\{W(t, w_0) = (U(t, u_0), V(t, v_0)); \quad w_0 = (u_0, v_0) \quad \text{em}$$

$$H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi] \quad \text{com} \quad |w_0| \leq 1\}$$

é relativamente compacto em $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$, isto é, temos a

compacidade nas fibras de $W(t)$. Seja $(w_{0,j}) = (u_{0,j}, v_{0,j})$ uma

sequência em $H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ com $|w_{0,j}| \leq 1$. Seja $(W_j(t)) =$

$= (W(t, w_{0,j})) = (U(t, u_{0,j}), V(t, v_{0,j}))$. Pelo visto acima, existe

uma subsequência correspondente à expressão do lema 5.6., página

na , para a qual usaremos a notação $(h_j(t))$, a qual converge

em $C([0, b], H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi])$. Usando a desigualdade de Schwarz e

o lema 5.2. - (iii), página , obtemos:

$$|W_j(t) - W_i(t)|^2 \leq |h_j(t) - h_i(t)|^2 + K_{11} \int_0^t |W_j(s) - W_i(s)|^2 ds,$$

donde

$$|w_j(t) - w_i(t)|^2 \leq K_{12} \sup_{0 \leq t \leq b} |h_j(t) - h_i(t)|^2$$

e temos a compacidade nas fibras de $W(t)$.

C.Q.D.

5.2. TEOREMA: Se λ é um autovalor do operador A , então a parte real de λ é estritamente negativo.

DEMONSTRAÇÃO: Queremos saber quais são as soluções em $D(A)$ da equação: $(A - \lambda I)(u, v, \theta) = (0, 0, 0)$ se $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Queremos resolver:

$$v - \lambda u = 0$$

$$u'' - m\theta' - \lambda v = 0$$

$$k\theta'' - mv' - \lambda \theta = 0$$

Suponha que (u, v, θ) seja uma solução. Assim

$$-vu'' + \lambda uu'' + u''v - m\theta'v - \lambda v^2 + k\theta''\theta - mv'\theta - \lambda \theta^2 = 0.$$

Integrando de 0 a π e tomando a parte real teremos:

$$-\operatorname{Re} \lambda \int_0^\pi [u'(x)]^2 dx - \operatorname{Re} \lambda \int_0^\pi [v^2(x) + \theta^2(x)] dx - k \int_0^\pi [\theta'(x)]^2 dx = 0.$$

Se $\operatorname{Re} \lambda > 0$ então $u'(x) = v(x) = \theta(x) = 0$. E daí $u(x)$ é constante; como se anula em 0 e π temos que $u(x)$ também é nula e portanto a única solução é a nula.

Se $\operatorname{Re} \lambda = 0$, então $\theta(x)$ é constante e como se anula em 0 e π então $\theta(x)$ é nula. Substituindo no sistema teremos:

$$v - \lambda u = 0$$

$$u'' - \lambda u = 0$$

$$-mv' = 0$$

Se $\lambda=0$, da primeira equação tiramos que $v(x) = 0$ e daí que $u''(x) = 0$. Logo $u'(x)$ é constante e $u(x)$ linear em x . Como u se anula em 0 e π então $u(x) = 0$.

Se $\lambda \neq 0$, da primeira equação tiramos que v se anula em 0 e π . Da terceira equação tiramos que $v(x)$ é constante. Portanto $v(x) = 0$ e daí $u(x) = 0$.

E portanto a única solução é a nula.

Então a condição necessária para λ ser autovalor de A é que $\operatorname{Re} \lambda < 0$. c.q.d.

5.3. Desta forma o zero não é autovalor do operador A .

5.4. TEOREMA: O raio espectral do semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) ; t \geq 0\}$ é estritamente menor do que 1.

DEMONSTRAÇÃO: Seja μ um ponto do espectro de $T(t)$ tal que

$$|\mu| > e^{(-\frac{m^2}{2k} + \epsilon)t} \quad \text{para } \epsilon > 0. \text{ Então } \mu \text{ é ponto normal.}$$

Logo só temos um número finito de tais μ 's. Ainda, $\mu = e^{\lambda t}$ onde λ é autovalor do gerador A .

Como $\operatorname{Re} \lambda < 0$ então $|\mu| < 1$. Como é um número finito, existe um $c > 0$ tal que $|\mu| \leq c < 1$.

Portanto, $r(T(t)) < 1$, $t \geq 0$.

c.q.d.

5.5. CONSEQUÊNCIA: Se $a = -\frac{m^2}{2k}$, então existe um número b , estri

tamente positivo, tal que

$|T(t)u| \leq M e^{-bt} |u|$, para todo u em H .

CAPÍTULO VI

CONVERGÊNCIA PARA O EQUILÍBRIO DE UMA EQUAÇÃO DA TERMO-ELASTICIDADE SEMILINEAR UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRAS NULAS

Neste capítulo daremos uma aplicação em convergência para equilíbrio usando a pré-compacidade de órbita.

Consideremos o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v \\ (I) \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial \theta}{\partial x} - g(u) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

e as condições de fronteira

$$\begin{aligned} (I) \quad u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, \pi) = 0 \end{aligned}$$

para $0 < x < \pi$, $t \geq 0$; k é uma constante estritamente positiva; m uma constante não nula e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável.

O sistema (I) pode ser visto como uma equação de evolução.

$$(II) \quad \dot{z}(t) = Az(t) + F(z(t))$$

no seguinte espaço de fase $H = H_0^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$

que é um espaço de Hilbert real com o seguinte produto interno :

$$\langle (u, v, \theta), (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) \rangle = \int_0^\pi \{u'(x)\hat{u}'(x) + v(x)\hat{v}(x) + \theta(x)\hat{\theta}(x)\} dx$$

Se $z = (u, v, \theta)$, o operador A é definido por :

$$A(u, v, \theta) = (v, u'' - m\theta', k\theta'' - mv') \quad A: D(A) \rightarrow H$$

$$D(A) = \{H_0^1[0, \pi] \cap H^2[0, \pi]\} \times H_0^1[0, \pi] \times \{H_0^1[0, \pi] \cap H^2[0, \pi]\}.$$

A aplicação F é definida por:

$$F(u, v, \theta) = (0, -f(u), 0) \quad ; \quad F: H \rightarrow H \quad ;$$

$$f: H_0^1[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi] \quad \text{dada por :} \quad f(u)(x) = g(u(x)).$$

Daremos condições para que qualquer solução fraca da equação da termoelasticidade semilinear (I) (ou (II)) convirja para um ponto de equilíbrio. Mais precisamente demonstraremos o seguinte teorema:

6.1. TEOREMA: Suponha que os pontos de equilíbrio de (I) ou (II) em H são isolados. Então, toda solução fraca limitada $z(t) = (u(t), v(t), \theta(t))$ de (I) ou (II) converge para um ponto de equilíbrio.

A demonstração será feita em vários lemas.

6.2. LEMA: A aplicação f é lipschitziana em conjuntos limitados. Em particular, leva conjunto limitado em conjunto limitado.

DEMONSTRÇÃO: Sejam u e $\tilde{u}$ elementos de $H_0^1[0, \pi]$ com $|u|_{H_0^1} \leq L$ e

$$|\tilde{u}|_{H_0^1} \leq L. \text{ Então } |u(x)| \leq |u|_{L^\infty} \leq K|u|_{H_0^1} \leq KL.$$

$$\text{Logo } |f(u) - f(\tilde{u})|_{L^2}^2 = \int_0^\pi |f(u)(x) - f(\tilde{u})(x)|^2 dx =$$

$$\int_0^\pi |g(u(x)) - g(\tilde{u}(x))|^2 dx = \int_0^\pi \max^2 |g'(u(x) + \lambda \tilde{u}(x))| |u(x) - \tilde{u}(x)|^2 dx$$

$$\text{com } |u(x) + \lambda \tilde{u}(x)| \leq 2KL. \text{ Portanto } |f(u) - f(\tilde{u})|_{L^2}^2 \leq M(L) |u - \tilde{u}|_{H_0^1}^2.$$

c.q.d.

6.3. LEMA: A aplicação f leva conjunto limitado em conjunto relativamente compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Definamos a seguinte função :

$$h : C([0, \pi], \mathbb{R}) \rightarrow L^2[0, \pi] ; \quad h(u)(x) = g(u(x)).$$

Essa aplicação h , assim definida é uma aplicação contínua. De fato, como u e $\tilde{u}$ são limitadas, então :

$$|h(u) - h(\tilde{u})|_{L^2}^2 = \int_0^\pi |h(u)(x) - h(\tilde{u})(x)|^2 dx =$$

$$= \int_0^\pi |g(u(x)) - g(\tilde{u}(x))|^2 dx \leq M(L) \int_0^\pi |u(x) - \tilde{u}(x)|^2 dx \leq$$

$$\pi M(L) \int_0^\pi |u - \tilde{u}|^2_C dx = \pi M(L) |u - \tilde{u}|^2_C < \varepsilon, \text{ se } |u - \tilde{u}|^2_C < \delta = \frac{\varepsilon^2}{\pi M(L)}.$$

Olhando agora para o diagrama abaixo :

$$\begin{array}{ccc} H_0^1[0, \pi] & \xrightarrow[\text{compacta}]{i} & C([0, \pi]; \mathbb{R}) \\ & \searrow f & \swarrow h: \text{contínua} \\ & L^2[0, \pi] & \end{array}$$

vemos que $f = \text{hoi}$ e é compacta, isto é, leva conjunto limitado em conjunto relativamente compacto.

6.4. LEMA: A aplicação F leva conjunto limitado em conjunto relativamente compacto.

6.5. LEMA: A aplicação f é continuamente diferenciável.

DEMONSTRAÇÃO: Lembremos inicialmente que se $|h| \rightarrow 0$ em $H_0^1[0, \pi]$ então $|h| \rightarrow 0$ em $L^\infty[0, \pi]$.

$$\text{Para } h \text{ em } H_0^1[0, \pi], \quad \lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ H_0^1}} \frac{1}{|h|_{H_0^1}} |f(u_0+h) - f(u_0) - f'(u_0)h|_{L^2} =$$

$$= \lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ H_0^1}} \frac{1}{|h|_{H_0^1}} \left\{ \int_0^\pi |f(u_0+h)(x) - f(u_0)(x) - f'(u_0)h(x)|^2 dx \right\}^{(1/2)}$$

$$\lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ H_0^1}} \frac{1}{|h|_{H_0^1}} \left\{ \int_0^\pi |g(u_0(x) + h(x)) - g(u_0(x)) - g'(u_0(x))h(x)|^2 dx \right\}^{(1/2)}$$

$$= \lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ H_0^1}} \frac{1}{|h|_{H_0^1}} \left\{ \int_0^\pi |g'(u_0(x) + \lambda h(x)) - g'(u_0(x))| h(x) dx \right\}^{(1/2)} \leq$$

$$\leq \lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ H_0^1}} \frac{1}{|h|_{H_0^1}} \left\{ \int_0^\pi |g'(u_0(x) + \lambda h(x)) - g'(u_0(x))|^2 |h(x)|^2 dx \right\}^{(1/2)} =$$

$$= \lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ H_0^1}} \left\{ \int_0^\pi |g'(u_0(x) + \lambda h(x)) - g'(u_0(x))|^2 \frac{|h(x)|^2}{|h|_{H_0^1}^2} dx \right\}^{(1/2)} \leq$$

$$\lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ L}} \left\{ \int_0^\pi |g'(u_0(x) + \lambda h(x)) - g'(u_0(x))|^2 dx \right\}^{(1/2)} = 0.$$

Portanto é diferenciável e a sua derivada é : $\{f'(u_0).h\}(x) = g'(u_0(x)).h(x)$.

Com um cálculo mostra-se que é continuamente diferenciável.

c.q.d.

6.6. LEMA: A aplicação F é continuamente diferenciável.

6.7. LEMA: Toda solução fraca limitada de (I) ou (II) tem órbita com fecho compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Ver Ceron [2], página 54, Teorema II 2.3.

6.8. LEMA: A seguinte função $V : H \rightarrow R$ definida por

$$V(z) = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} \{u'(x)^2 + v(x)^2 + \theta(x)^2\} + G(u(x)) \right\} dx$$

onde $z = (u, v, \theta)$ e $G : R \rightarrow R$ é uma função definida

$$\text{por } G(r) = \int_0^r g(s) ds \quad \text{é contínua.}$$

6.9. LEMA: Se z_0 é um elemento de $D(A)$ e se $z(t, z_0) = (u(t),$

$v(t), \theta(t))$ é solução fraca de (I) ou (II) então:

$$\dot{V}(z(t, z_0)) = -k \int_0^\pi \theta'(x)^2 dx .$$

6.10. LEMA: Se $z(t, z_0)$ é solução fraca limitada de (I) ou (II) então $V(z(t, z_0))$ é não crescente, onde V é a função definida no lema 6.8.

DEMONSTRAÇÃO: Do lema 6.9. $\dot{V}(z(t, z_0)) \leq 0$, para $t \geq 0$ se z_0 é elemento de $D(A)$ então, $V(z(t, z_0))$ é não crescen

te. Seja agora z_0 um elemento de H . Como $D(A)$ é denso em H , existe uma seqüência $\{z_n(0)\}$, $z_n(0)$ em $D(A)$, tal que $z_n(0) \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $V(z(t, z_n(0))) \leq V(z_n(0))$ vem que

$\lim_{n \rightarrow \infty} V(z(t, z_n(0))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V(z_n(0))$ e então $V(z(t, z_0)) \leq V(z_0)$.

Logo, não crescente.

6.11. LEMA: Se $z(t, z_0)$ é solução fraca limitada de (I) ou (II) então valem as conclusões seguintes para a função V definida no lema 6.8., ou seja:

(i) V é limitada no conjunto $\{z(t, z_0) ; t \geq 0\}$

(ii) $V(z(t, z_0)) \rightarrow \ell$ quando $t \rightarrow \infty$, $-\infty < \ell < \infty$

(iii) $V(p) = \ell$ se p está em $w(z_0)$

(iv) $V(y(t)) = \ell$ se $y(t)$ é solução fraca de (II) passando por um elemento de $w(z_0)$

6.12. LEMA: Se $p = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta})$ está em $w(z_0)$ então $\hat{\theta} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $z(t)$ solução fraca de (I) ou (II) passando por p . Como $w(z_0)$ é invariante relativamente a (II), então $z(t)$ está em $w(z_0)$ para todo $t \geq 0$. Se p está em $D(A)$ então $z(t)$ estão em $D(A)$ e daí $\dot{V}(z(t)) = -k |\hat{\theta}'|_{L^2}^2$. Se $\hat{\theta}$ está em $H_0^1[0, \pi]$ então vale $|\hat{\theta}|_{L^2}^2 \leq a |\hat{\theta}'|_{L^2}^2$. Logo $\dot{V}(z(t)) \leq -k |\hat{\theta}|_{L^2}^2$. Integrando de 0 a t $V(z(t)) \leq V(z(0)) - k \int_0^t |\hat{\theta}|_{L^2}^2 ds$.

Se p está em H então existe uma sequência $\{p_n\}$ em $D(A)$ com $p_n \rightarrow p$ em H quando $n \rightarrow \infty$. Seja $z_n(t)$ solução fraca de (I) ou (II) passando por p_n .

Então $V(z_n(t)) \leq V(z_n(0)) - k \int_0^t |\hat{\theta}|_{L^2}^2 ds$. Como p

está em $w(z_0)$, então $V(z(t)) = \ell = V(z(0))$. Logo

$$0 \leq -K \int_0^t |\hat{\theta}|_{L^2}^2 ds \quad \text{e então} \quad |\hat{\theta}|_{L^2}^2 = 0, \quad \hat{\theta} = 0.$$

6.13. LEMA: Os pontos de equilíbrio de (I) ou (II) são da forma

$$z = (0, u, 0) \text{ onde } u \text{ satisfaz } u'' - f(u) = 0 \quad \text{e} \\ u(0) = u(\pi) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO: Um elemento $\hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta})$ de H é um ponto de equilíbrio de (II) se e somente se $\{z(t, \hat{z}) ; t \geq 0\} = \{\hat{z}\}$ isto é, $z(t, \hat{z}) = \hat{z}, t \geq 0$ se e somente se $A\hat{z} + F(\hat{z}) = 0$ se e somente se $(\hat{v}, \hat{u}'' - m\hat{\theta}' - f(\hat{u}), k\hat{\theta}'' - m\hat{v}') = (0, 0, 0)$ com as condições $\hat{u}(0) = \hat{u}(\pi) = 0$ se e somente se $\hat{v} = 0, \hat{u} - m\hat{\theta}' - f(\hat{u}) = 0, \hat{u}(0) = \hat{u}(\pi) = 0$ e $k\hat{\theta}'' = 0$ se e somente se $\hat{v} = 0, \hat{u}'' - f(\hat{u}) = 0, \hat{u}(0) = \hat{u}(\pi) = 0$ e $\hat{\theta} = 0$. c.q.d.

6.14. LEMA: Se $\hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta})$ é um ponto de equilíbrio de (II) então $V(\hat{z})$ é constante, onde V é a função definida no lema 6.8.

DEMONSTRAÇÃO: Desde que $\hat{z}(t) = \hat{z}$ é solução fraca limitada de (II) do lema 6.9. e propriedade da V , segue o lema.

6.15. LEMA: Suponha que os pontos de equilíbrio de (II) são isolados. Então, o conjunto de pontos de equilíbrio que interceptam uma bola fechada é finito.

DEMONSTRAÇÃO: Para encontrarmos os pontos de equilíbrio de (II) - precisamos resolver $u'' - f(u) = 0; \quad u(0) = 0$.

$\hat{u}(\pi) = 0$ ou $\Delta \hat{u} - f(\hat{u}) = 0$; $\hat{u}(0) = \hat{u}(\pi) = 0$ equivalentemente

$\lambda \hat{u} - \Delta \hat{u} = \lambda \hat{u} + f(\hat{u})$, para λ no conjunto resolvente de Δ , ou ainda $\hat{u} = (\lambda - \Delta)^{-1} (\lambda \hat{u} + f(\hat{u}))$. Seja então $\hat{z}_n = (0, \hat{u}_n, 0)$ uma sequência de pontos de equilíbrios de (II) em H com $|\hat{z}_n| = |\hat{u}_n| \leq L$.

Defina $\hat{v}_n = \lambda \hat{u}_n + f(\hat{u}_n)$. Como f leva conjunto limitado em conjunto limitado, temos que a sequência $\{\hat{v}_n\}$ é limitada. Como $(\lambda - \Delta)^{-1}$ é compacto, pois o semigrupo gerado por $-\Delta$ o é, segue que $\tilde{u}_n = (\lambda - \Delta)^{-1} (\lambda \hat{u}_n + f(\hat{u}_n)) = (\lambda - \Delta)^{-1} (\hat{v}_n)$ é relativamente compacto. Então exista subsequência $\{\tilde{u}_{n_k}\}$ convergente, isto é,

$\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}$ com $n_k \rightarrow \infty$ e daí $f(\tilde{u}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{u})$ com $n_k \rightarrow \infty$ desde que

f é contínua. Logo $\tilde{u} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \tilde{u}_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} (\lambda - \Delta)^{-1} (\lambda \tilde{u}_{n_k} + f(\tilde{u}_{n_k})) =$

$= (\lambda - \Delta)^{-1} (\tilde{u} + f(\tilde{u}))$. Portanto $\tilde{z} = (0, \tilde{u}, 0)$ é um ponto de equilíbrio de (II) e $|\tilde{z}| = |\tilde{u}| \leq L$. Consequentemente, o conjunto dos pontos de equilíbrio de (II) que intercepta uma bola fechada é compacto. Como, por hipótese, o conjunto dos pontos de equilíbrio é isolado então deve ser finito. c.q.d.

6.16. LEMA: Seja $z(t, z_0)$ uma solução fraca limitada de (II). Se p é um elemento de $w(z_0)$ então p é um ponto de equilíbrio de (II) em H .

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\tilde{z}(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{\theta}(t))$ solução fraca de (II) passando por p . Como $w(z_0)$ é invariante relativamente a (II), então $\tilde{z}(t)$ está em $w(z_0)$ para todo $t \geq 0$. Sabemos que $C_0^\infty[0, \pi] \times C_0^\infty[0, \pi] \times C_0^\infty[0, \pi]$ é denso em $D(A^*)$. Da definição de solu

fraca temos que, para cada (ψ, ψ, η) , ψ, ψ e η elementos de $C_0^\infty[0, \pi]$ acontece:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi, \tilde{u}(t) \rangle_{H_0^1} = \langle \psi, \tilde{v}(t) \rangle_{H_0^1} \quad \text{e então} \quad \frac{d}{dt} \langle \psi'', \tilde{u}(t) \rangle_{L^2} =$$

$$= \langle \psi'', \tilde{v}(t) \rangle_{L^2}.$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi, \tilde{v}(t) \rangle_{L^2} = \langle \psi, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t) - m \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}(t) - f(\tilde{u}) \rangle_{L^2} \quad \text{e então}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi, \tilde{v}(t) \rangle_{L^2} = \langle \psi'', \tilde{u}(t) \rangle_{L^2} + m \langle \psi', \tilde{\theta}(t) \rangle_{L^2} + \langle \psi, f(\tilde{u}(t)) \rangle_{L^2}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, \tilde{\theta}(t) \rangle_{L^2} = \langle \eta, k \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2}(t) - m \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(t) \rangle_{L^2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, \tilde{\theta}(t) \rangle_{L^2} = \langle \eta'', k \tilde{\theta}(t) \rangle_{L^2} + m \langle \eta', \tilde{v}(t) \rangle_{L^2}. \quad \text{Do lema 8.12.,}$$

temos que $\tilde{\theta}(t, x) = 0$ para todo $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$. E olhando agora para a expressão imediatamente acima vemos que:

$$\int_0^\pi \tilde{v}(t, x) \eta'(x) dx = 0 \quad \text{para todo } \eta \text{ em } C_0[0, \pi].$$

Logo $\tilde{v}(t, x) = h(t)$; $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ contínua para todo $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \pi$.

Além disso, da definição de solução fraca, $\tilde{v}: \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2[0, \pi]$ é

contínua, $\tilde{v}(t)(x) = \tilde{v}(t, x) = h(t)$ e

$$|\tilde{v}(\xi, x) - \tilde{v}(\xi, x)|_{L^2} = \sqrt{\pi} |h(\xi) - h(\xi)|, \quad \text{Então podemos concluir}$$

que para todo t , $\tilde{v}(t)$ está em $H^1[0, \pi]$ e $v: R_+ \rightarrow H^1[0, \pi]$ é contínua. De fato: como $\tilde{v}(t)$ está em $L^2[0, \pi]$ para todo t e como $\tilde{v}$ é constante em relação à variável x , então a sua derivada em relação à variável x está em $L^2[0, \pi]$ e daí $\tilde{v}(t)$ estão em $H^1[0, \pi]$ para qualquer t . Ainda mais $|\tilde{v}(\xi, x) - \tilde{v}(\xi, x)|_{H^1} = \sqrt{\pi} |h(\xi) - h(\xi)|$ e disto decore a continuidade.

Observemos agora que $\tilde{u}(t, \cdot) - \tilde{u}(0, \cdot) = \int_0^t v(s, \cdot) ds$ e como $\tilde{u}(t, \cdot)$ está em $H_0^1[0, \pi]$ segue que $\int_0^t \tilde{v}(s, \cdot) ds$ também estará em $H_0^1[0, \pi]$.

Desta forma $\frac{1}{h} \{\tilde{u}(t+h, x) - \tilde{u}(t, x)\} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \tilde{v}(s, x) ds$ converge

para $\tilde{v}(t, x)$ quando $h \rightarrow 0$.

Como $H_0^1[0, \pi]$ é fechado, então $\tilde{v}(t, x)$ está em $H_0^1[0, \pi]$. Como é constante em relação a x então $\tilde{v}(t, x) = 0$.

Do lema 8.12. sabemos que a última coordenada de p também é zero. Agora, usando a densidade mencionada anteriormente, teremos o resultado. c.q.d.

Passemos agora ao teorema 8.1.

Seja $z(t, z_0)$ uma solução fraca limitada de (II). Co

mo $w(z_0)$ é um conjunto limitado, pois é compacto e como $w(z_0)$ só possui pontos de equilíbrios isolados então esse conjunto é finito. Mas $w(z_0)$ também é conexo, ele deve se constituir num conjunto unitário. Ainda $z(t, z_0) \rightarrow w(z_0) = \{p\}$, $t \rightarrow \infty$ e p é ponto de equilíbrio de (II). c.q.d.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- { 1} Ball, J.M.; Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula. Proc. American Mathematical Society 63 (1977), 370-374.
- { 2} Ceron, S.C.S.; Comportamento assintótico de equações e sistemas hiperbólicos: soluções periódicas forçadas e convergência para equilíbrio. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos, SP, Brasil, (1984).
- { 3} Dafermos, C.M.; Contration semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics. Springer Lecture Notes in Math. nº 503 (1976), 295-306.
- { 4} Friedman, A.; Partial Differential Equations. Robert E.K.P. Co. Huntington, New York, 1976.
- { 5} Gohberg, I.C.; Krejn, M.G.; Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien. Paris, Dunod, 1971.
- { 6} Henry, D.; Semigroups. IME-USP, Notas de aula (1981).
- { 7} Helmberg, G.; Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space; North-Holland Publishing Company.
- { 8} Hönl, C.S.; Análise funcional e aplicações. IME-USP (1970).

- { 9} Lopes, O.F.; Neves, A.J.F.; Ribeiro, H.S.; Um estudo sobre o raio espectral essencial de semigrupos de operadores lineares. 18º Seminário Brasileiro de Análise (1983).

- {10} Lopes, O.F.; Neves, A.J.F.; Ribeiro, H.S.; Comportamento assintótico de sistemas hiperbólicos. 19º Seminário Brasileiro de Análise (1984).

- {11} Martin Jr., R.H.; Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. John Wiley & Sons, New York (1976).

- {12} Onuchic, O.; Equações diferenciais com retardamento. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática (1971).

- {13} Pazy, A.; Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. University of Maryland , Lecture Note # 10 (1974).

- {14} Tolstov, G.P.; Fourier series. Dover Publications, Inc. New York (1976).

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos
$ \lambda $	norma do número complexo λ
$ T $	norma do operador T
$\text{Re} \lambda$	parte real do número complexo λ
$D(T)$	domínio de definição do operador T
$R(T)$	imagem do operador T
$\rho(T)$	conjunto resolvente do operador T
$\sigma(T)$	espectro do operador T
$r(T)$	raio espectral do operador T
$\text{re}(T)$	raio espectral essencial do operador T
$AC(\mathbb{R})$	espaço vetorial das funções absolutamente contínuas sobre $\mathbb{R}$
$C([a,b])$	espaço vetorial das funções contínuas sobre $[a,b]$
$C_0^\infty([a,b])$	espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis cujos suportes são compactos contidos em $[a,b]$
$L^2[a,b]$	espaço vetorial das funções Lebesgue mensuráveis e de quadrado integráveis sobre $[a,b]$
$H^m[a,b]$	espaço vetorial das funções de $L^2[a,b]$ que tem derivada generalizada até ordem m em $L^2[a,b]$
$H_0^m[a,b]$	espaço vetorial das funções de $H^m[a,b]$ cujas derivadas generalizadas até ordem m se anulam em a e b