I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE
DE SOLUÇÕES LIMITADAS

Maurício Silveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE
DE SOLUÇÕES LIMITADAS

Maurício Silveira

Orientador: Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Car
los, da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Dou
tor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS

1985

" As muitas horas de trabalho profissional, seus riscos e entusiasmos, seu caráter de necessidade, e suas - esperanças, são a fecunda matéria-prima para uma transformação espiritual."

À Rosa Maria e
a Ana Carolina.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de reiterar profundos agradecimentos às seguintes pessoas:

Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues - pela paciência, esmero, amizade, dedicação, capacidade e sobriedade profissional com a qual participou na elaboração deste trabalho.

Dr. Natalino Adelmo de Molfetta - chefe do DM-UFSCar, amigo constante, que me proporcionou uma disponibilidade sem a qual não teria conseguido cumprir este programa.

Dr. Nelson Onuchic - que tendo me orientado de forma exemplar no meu programa de mestrado, deu-me a segurança necessária para galgar este novo passo.

Dr. Janey Antonio Vaccach - que desde o meu primeiro ano na Universidade, depositou em mim a confiança de um verdadeiro irmão, e foi para mim sempre um exemplo de conduta profissional.

Dr. Plácido Zoêga Táboas - por todos os momentos de apoio e completa disponibilidade dispensados na discussão de tópicos referentes a este trabalho.

A *sra. Neube Elizabeth Guillen Stabili* - pelo primor, dedicação, zelo e capacidade profissional com a qual datilografou estas notas.

Agradeço ainda a todos os funcionários da Gráfica da UFSCar pelo acurado trabalho de impressão.

Enfim a todos os colegas de departamento da UFSCar, e
e do ICMSC-USP , pelo ambiente de trabalho entusiástico e acol
lhedor sempre encontrado.

Este trabalho só foi possível
graças ao apoio das entidades
CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

ABSTRACT

The main purposes of this work are to study existence and regularity, with respect to time and to a parameter, of - bounded solutions of certain equations both in finite and infinite dimension, and to apply these results to the analysis of existence and bifurcation of homoclinic and heteroclinic solutions in models which involve ordinary as well as partial differential nonlinear equations. Special emphasis is given to a nonlinear beam equation which extends a model proposed by Holmes-Marsden by including an unbounded term depending on the parameter.

The main tools used are Alternative Method with an appropriate Fredholm Alternative, Uniform Contraction Principle and Semigroup Theory.

INDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 0 - PRELIMINARES I

- 0.1 - Definições 1
- 0.2 - Lemas 2
- 0.3 - Teoremas 6

CAPÍTULO 1 - SOLUÇÕES LIMITADAS DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGENEA - CASO : DIMENSÃO FINITA

- 1.1 - Problema Direto 9
- 1.2 - Problema Recíproco 16
- 1.3 - Preparação para o uso do Método Alternativo. 21

CAPÍTULO 2 - APLICAÇÕES

- 2.1 - Ligação Heteroclínica no R^n 25
- 2.2 - Ligação Heteroclínica no R^2 30
- 2.2.1 - Análise da Equação de Bifurcação 35
- 2.3 - Um Particular Exemplo 45

CAPÍTULO 3 - PRELIMINARES II

- 3.1 - Definições e Teoremas 49

CAPÍTULO 4 - SOLUÇÕES LIMITADAS DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGENEA - CASO : DIMENSÃO INFINITA

- 4.1 - Introdução 57
- 4.2 - Lemas 58
- 4.3 - Soluções Limitadas da Equação Não Homogenea. 64
- 4.4 - Preparação para o uso do Método Alternativo. 71

CAPÍTULO 5	-	ALGUMAS PROPRIEDADES DE CONTINUIDADE E DIFE - RENCIABILIDADE	
5.1	-	Introdução	75
5.2	-	Desigualdade Integral	76
5.3	-	Diferenciabilidade com relação a variável t ..	78
5.4	-	Continuidade com relação a Parâmetro	83
5.5	-	Diferenciabilidade com relação a Parâmetro ..	88
CAPÍTULO 6	-	A EQUAÇÃO DA VIGA	
6.1	-	Análise Inicial da Equação	127
6.2	-	Dicotomia Exponencial Trivial	131
6.3	-	Existência de Solução Periódica	135
6.3.1	-	Diferenciabilidade com relação a t	139
6.3.2	-	Diferenciabilidade com relação a Parâmetro ..	141
6.3.3	-	Diferenciação mista	143
6.3.4	-	Análise do Limite	148
6.4	-	Existência de Solução Limitada	152
6.4.1	-	Diferenciabilidade com relação a t	161
6.4.2	-	Diferenciabilidade com relação a Parâmetro ..	163
6.4.3	-	Análise do Limite	165
6.4.5	-	A Equação de Bifurcação	167
COMENTÁRIOS FINAIS			171
BIBLIOGRAFIA			179
NOTAÇÃO			185

INTRODUÇÃO

Os objetivos principais deste trabalho são estudar existência e regularidade, em relação ao tempo e a parâmetro, de soluções limitadas de certas equações em dimensão finita e infinita e aplicar esses resultados à análise de existência e bifurcação de soluções homoclínicas e heteroclínicas em modelos que envolvem equações não lineares, tanto ordinárias como parciais.

As principais técnicas utilizadas são Método Alternativo com Alternativa de Fredholm, técnicas de Dicotomia Exponencial, Princípio da Contração Uniforme, Teorema da Função Implícita e técnicas de Semi-grupos de Operadores Lineares.

A motivação inicial deste trabalho veio de Chow, Hale e Mallet-Paret [10], no qual é abordado o estudo de soluções homoclínicas de uma equação do tipo $\ddot{x} + g(x) = -\lambda \dot{x} + \mu f(t)$, onde λ e μ são pequenos parâmetros e f é periódica em t . Nesse trabalho é estabelecida uma Alternativa de Fredholm relativa a soluções limitadas de equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas.

Assim sendo, no Capítulo 1, estabelecemos uma Alternativa de Fredholm, referente a soluções limitadas, de um sistema em dimensão finita do tipo $\dot{x} = A(t)x + h(t)$. Mais especificamente, se certas hipóteses de dicotomia exponencial, relativas ao sistema homogêneo estão satisfeitas e, h é contínua e limitada, então essa equação não homogênea tem solução limitada em $\mathbb{R}$ se e somente se h é ortogonal num certo sentido, a toda solução limitada da equação adjunta $\dot{y} = -yA(t)$.

Em Silveira [42] apresentamos uma versão inicial desse resultado. Lovelady [32], Hallam [19] e Palmer [36] também tem resultados relacionados.

Mostramos também um resultado recíproco, isto é ; se vale a Alternativa de Fredholm então as hipóteses de dicotomia associadas ao sistema homogêneo estão satisfeitas.

Na linha de Hale [16] (Lema 2.1, pag. 263) que considera o caso periódico, estabelecemos um resultado preparatório para o Método Alternativo, com projeções convenientes que estendem as utilizadas em Chow, Hale e Mallet-Paret [10]. Uma das projeções dadas em Hale [16] e Hallam [14] não são convenientes para o nosso caso.

O Capítulo 2 é constituído de Aplicações ao estudo de existência e bifurcação de soluções homoclínicas e heteroclínicas de equações diferenciais ordinárias não lineares.

Os Capítulos de 3 a 6 constituem uma segunda parte desse nosso trabalho em que, basicamente, analisamos problemas de equações em dimensão infinita.

A motivação inicial veio de Holmes-Marsden [23] que estuda existência de soluções homoclínicas, tendo como principal exemplo um modelo dinâmico, para estudar vibrações de uma viga, dado por uma equação parcial não linear, amortecida e forçada. Vários de nossos resultados também tiveram motivações em Ribeiro [40] e Neves [34].

Assim, no Capítulo 4, apresentamos uma extensão da Alternativa de Fredholm e do resultado preparatório para o Método Alternativo para o caso de dimensão infinita.

No Capítulo 5 apresentamos um resultado de suavidade de solução contínua e limitada em R , de uma certa equação integral. Abordamos também a diferenciabilidade em relação a ϵ do operador de evolução associado a uma equação do tipo $\dot{u} = A(\epsilon, t)u$, com o parâmetro ϵ comparecendo em parte não limitada de $A(\epsilon, t)$. Estudamos também a regularidade de soluções limitadas de certas equações não homogêneas, com relação a parâmetro, estendendo resultado de Neves [34].

No Capítulo 6 aplicamos os resultados anteriores, ao estudo de existência e regularidade de soluções periódicas e homoclínicas da equação da viga, com modelo semelhante ao dado em Holmes e Marsden (ver também Ball [3], Ichikawa e Pritchard [26]).

Para encerrar o trabalho, apresentamos uma seção de conclusões finais, onde abordamos informações relacionadas às nossas e, possíveis extensões de resultados aqui apresentados.

Entre as contribuições deste trabalho destacamos resultados relativos a existência de soluções limitadas de uma equação não homogênea, regularidade em relação a t de solução contínua e limitada de uma certa equação integral, diferenciabilidade do operador de evolução com relação a parâmetro e regularidade de soluções limitadas com relação a parâmetro, com a dificuldade que o parâmetro comparece na parte não limitada do operador linear da equação.

Na aplicação que consideramos esta última dificuldade está presente, o que não ocorre no modelo analisado por Holmes e Marsden [23].

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES I

0.1 - DEFINIÇÕES

Seja x um vetor do R^n , $A(t)$ matriz contínua $n \times n$ para $t \in J \subset R$, J intervalo, e consideremos o sistema de equações diferenciais

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

Seja $Y(t)$ uma matriz fundamental de (H)

D.1 - Diremos que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ se existe uma projeção P , constantes K e α positivas tais que

$$|Y(t)PY^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s \geq 0$$

$$|Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t \geq 0$$

D.2 - Diremos que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_- se existe uma projeção Q , constantes K e α positivas tais que

$$|Y(t)QY^{-1}(s)| \leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad t \leq s \leq 0$$

$$|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{\alpha(s-t)} \quad s \leq t \leq 0$$

D.3 - Diremos que (H) admite uma dicotomia exponencial em R se vale a definição D.1 com $t \geq s$, $t, s \in R$.

Observação:

Nas hipóteses acima, eventualmente podemos assumir, sem perda de generalidade, que $Y(0) = I$.

De fato, caso contrário, definimos $X(t) = Y(t)Y^{-1}(0)$ e $\bar{P} = Y(0)PY^{-1}(0)$.

Logo, se (H) satisfaz D.1 com matriz fundamental $Y(t)$ e projeção P , então (H) satisfaz D.1 com matriz fundamental $X(t)$, $X(0) = I$, e projeção $\bar{P}$.

0.2 - LEMAS

Consideremos os sistemas de equações diferenciais

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x \qquad (Adj) \quad \dot{y} = -yA(t)$$

onde x é $n \times 1$ e y é $1 \times n$.

Seja $X(t)$ matriz fundamental de (H) tal que $X(0) = I$.

Lema 0.2.1

Supondo que (H) satisfaz D.1 com projeção P e que $x(t)$ é uma solução qualquer de (H), $x(0) = x_0$.

$$(a) \quad \text{se } (I-P)x_0 \neq 0 \text{ então } |X(t)(I-P)x_0| \geq K_1 e^{\alpha t}, \\ K_1 > 0, \quad t \geq 0.$$

$$(b) \quad x(t) \text{ é limitada em } R_+ \text{ se e somente se} \\ |x(t)| \leq K_2 e^{-\alpha t}, \quad K_2 > 0, \quad t \geq 0.$$

c) $x(t)$ é limitada em R_+ se e somente se $(I-P)x_0 = 0$

D.

(a) Seja $z_0 = (I-P)x_0$. Logo, podemos escrever:

$$|z_0|^2 = |z'_0 \cdot z_0| = |z'_0 \cdot (I-P)x_0| = |z'_0 (I-P)^2 x_0| =$$

$$|z'_0 (I-P) X^{-1}(t) X(t) (I-P)x_0| \leq |z'_0 (I-P) X^{-1}(t)| \cdot$$

$$|X(t) (I-P)x_0| \leq K e^{-\alpha t} |z'_0| |X(t) (I-P)x_0|,$$

onde ' = transposta.

Desta forma concluímos que $|X(t) (I-P)x_0| \geq K_1 e^{\alpha t}$,
 $K_1 > 0$, $t \geq 0$, o que prova o item (a).

(b) Temos $x(t) = X(t)x_0 = X(t)Px_0 + X(t)(I-P)x_0 =$

$$= x_1(t) + x_2(t)$$

Suponhamos que $x(t) \in \beta(R_+)$. Por hipótese, (H) satisfaz D.1 e, portanto concluímos que $x_1(t) \in \beta(R_+)$.

Logo $x_2(t) = x(t) - x_1(t) \in \beta(R_+)$, portanto do parágrafo a) resulta que $(I-P)x_0 = 0$; ou seja, $x_2(t) \equiv 0$ em R_+ .

Portanto, $x(t) = x_1(t)$ e a prova se completa.

(c) A prova está contida na verificação do item anterior.

Lema 0.2.2

Supomos que (H) satisfaz D.2 com projeção Q e que $x(t)$ é uma solução qualquer de (H), $x(0) = x_0$

(a) se $(I-Q)x_0 \neq 0$ então $|x(t)(I-Q)x_0| \geq K_3 e^{-\alpha t}$, $K_3 > 0$,
 $t \leq 0$

(b) $x(t)$ é limitada em R_- se, e somente se,
 $|x(t)| \leq K_4 e^{\alpha t}$, $K_4 > 0$, $t \leq 0$

(c) $x(t)$ é limitada em R_- se, e somente se, $(I-Q)x_0 = 0$

D.

É análoga a prova do Lema 0.2.1.

Lema 0.2.3

Assumimos que (H) satisfaz D.1 com projeção P , e D.2 com projeção Q . Seja $x(t)$ solução de (H) com $x(0) = x_0$. Logo,

(a) $x(t)$ é limitada em R se, e somente se,
 $|x(t)| \leq K_5 e^{-\alpha |t|}$, $K_5 > 0$ $t \in R$

(b) $x(t)$ é limitada em R se, e somente se,
 $(I-P)x_0 = 0 = (I-Q)x_0$

D.

Basta combinar os Lemas 0.2.1 e 0.2.2.

Lema 0.2.4

Dentro das hipóteses do lema anterior, se $y(t)$ é uma solução qualquer do (Adj) então :

(a) $y(t)$ é limitada em R_+ se, e somente se ,

$$|y(t)| \leq K_6 e^{-\alpha t}, \quad K_6 > 0, \quad t \geq 0$$

(b) $y(t)$ é limitada em R_- se, e somente se ,

$$|y(t)| \leq K_7 e^{\alpha t}, \quad K_7 > 0, \quad t \leq 0$$

(c) $y(t)$ é limitada em R se, e somente se ,

$$|y(t)| \leq K_8 e^{-\alpha |t|}, \quad K_8 > 0, \quad t \in R$$

D.

É análoga à prova dos lemas anteriores.

Observação:

Supondo D.1 com projeção P , $X(0) = I$ e $(I-P)x_0 \neq 0$, pode-se provar que $x(t) = X(t)x_0$ satisfaz $|x(t)| \geq K_9 e^{\alpha t}$, $K_9 > 0$, $t \geq 0$.

Considerações análogas são válidas para $t \leq 0$.

Lema 0.2.5

Assumimos que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ (resp. R_-) com projeção P e matriz fundamental $Y(t)$, $Y(0) = I$. Seja $Q: R^n \rightarrow R^n$ uma projeção com $R(Q) = R(P)$. Logo (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ (resp. R_-) com projeção Q e matriz fundamental $Y(t)$.

Para uma demonstração ver [8].

Lema 0.2.6

Seja V um espaço vetorial com corpo de escalares K . Seja $V' = \{\phi: V \rightarrow K \text{ operadores lineares contínuos}\}$. Sejam $y, y_1, \dots, y_n$ elementos de V' . Logo, são equivalentes:

(a) y é linearmente dependente com $y_1, \dots, y_n$

(b) $\bigcap_{j=1}^n N(y_j) \subset N(y)$

onde $N(y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Núcleo de } y$.

Para uma demonstração ver [30].

0.3 - TEOREMAS

Consideremos agora o sistema de equações diferenciais

$$(N.H.) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

Teorema 0.3.1

Assumimos $A(t)$ limitada em R_+ . Seja $Y(t)$ matriz fundamental de (H) e P uma projeção. Logo a equação $(M.H.)$ tem pelo menos uma solução limitada em R_+ para cada f limitada em R_+ se, e somente se, existem constantes K_1, K_2, α_1 e α_2 positivas tais que:

$$|Y(t)PY^{-1}(s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \quad t \geq s \geq 0$$

$$|Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)| \leq K_2 e^{\alpha_2(t-s)} \quad s \geq t \geq 0$$

Para uma demonstração ver [7].

Observação:

Resultado análogo existe para R_- .

Teorema 0.3.2

Supomos que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ . Seja $B(t)$ matriz de funções contínuas tal que:
 $\int_{R_+} |B(t)| dt < \infty$. Então o sistema $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ admite uma dicotomia exponencial em R_+ .

Para uma demonstração ver [7].

CAPÍTULO 1

SOLUÇÕES LIMITADAS DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA -- CASO: DIMENSÃO FINITA.

1.1 - PROBLEMA DIRETO

Sejam x e y vetores do R^n , $A(t)$ matriz $n \times n$ contínua em R e $f \in \beta(R)$.

Consideremos os sistemas de equações diferenciais

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

$$(Adj) \quad \dot{y} = -yA(t)$$

$$(N.H.) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

Teorema 1.A

Suponhamos que (H) admite dicotomia exponencial em R_+ e em R_- com projeções P e Q respectivamente. Então dada $f \in \beta(R)$ a equação $(N.H.)$ tem solução limitada em R se e, somente se, $\int_R y(t)f(t)dt = 0$ para toda solução y do (Adj) em $\beta(R)$.

D.

Sem perda de generalidades podemos assumir que $Y(0)=I$

Sejam $X_j \subset R^n$ sub-espacos definidos por:

$$X_1 = \{x_0 \in R^n : x(t, x_0) \in \beta(R)\}$$

$$X_2: X_1 \oplus X_2 = \{x_0 \in R^n : x(t, x_0) \in \beta(R_+)\}$$

$$X_3: X_1 \oplus X_3 = \{x_0 \in R^n : x(t, x_0) \in \beta(R_-)\}$$

$$X_4: \bigoplus_{j=1}^4 X_j = R^n$$

onde $x(t, x_0)$ é a solução de (H) satisfazendo $x(0, x_0) = x_0$.

Consideremos $P_j : R^n \rightarrow X_j$ projeções sobre X_j ,
 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tais que $P_i \circ P_j = 0$ para $i \neq j$.

Do Lema 0.2.5 decorre que existem K e α constantes positivas tais que

$$|Y(t)(P_1+P_2)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s \geq 0$$

$$(H.A.) \quad |Y(t)(P_3+P_4)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t \geq 0$$

$$|Y(t)(P_1+P_3)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad t \leq s \leq 0$$

$$|Y(t)(P_2+P_4)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{\alpha(s-t)} \quad s \leq t \leq 0$$

Seja $f \in \beta(R)$ qualquer. Vamos provar que: se $x(t)$ solução de (N.H.) é limitada em R então $\int_R P_4 Y^{-1}(s) f(s) ds = 0$.

Da fórmula da variação das constantes segue que:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Y(t)x_0 + \int_0^t Y(t)IY^{-1}(s)f(s)ds \\
 &= Y(t)x_0 + \int_0^t Y(t)(P_1+P_2+P_3+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds \\
 &= Y(t)[x_0 + \int_0^\infty (P_3+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds] + \\
 &+ \int_0^t Y(t)(P_1+P_2)Y^{-1}(s)f(s)ds - \\
 &- \int_t^\infty Y(t)(P_3+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

As hipóteses (H.A.) asseguram que as integrais acima convergem e são limitadas para $t \geq 0$.

Desta forma, decorre que $x(t)$ solução de (N.H.) é limitada em R_+ se e somente se $(P_3+P_4)z_0 = 0$ onde $z_0 = x_0 + \int_0^\infty (P_3+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds$.

De forma análoga, obtemos uma representação da solução $x(t)$ de (N.H.) em R_- .

De fato; vale também que:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Y(t)w_0 + \int_0^t Y(t)(P_1+P_3)Y^{-1}(s)f(s)ds + \\
 &+ \int_{-\infty}^t Y(t)(P_2+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds \text{ com } w_0 = x_0 - \\
 &- \int_{-\infty}^0 (P_2+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Assim dado que $Y(t)w_0$ é solução de (H), obtemos que: $x(t)$ é limitada em R_- se e somente se $(P_2+P_4)w_0 = 0$.

Nas representações (1.1) e (1.2), fazendo $t = 0$, obtemos que: se $x(t)$ solução de (N.H.) é limitada em R então

$$w_0 + \int_{-\infty}^0 (P_2 + P_4) Y^{-1}(s) f(s) ds = z_0 - \int_0^{\infty} (P_3 + P_4) Y^{-1}(s) f(s) ds$$

$$\text{onde } (P_3 + P_4) z_0 = 0 = (P_2 + P_4) w_0$$

Donde, se $x(t)$ é limitada em R então

$$\int_R P_4 Y^{-1}(s) f(s) ds = 0.$$

Reciprocamente, vamos supor que $\int_R P_4 Y^{-1}(s) f(s) ds = 0$.
O nosso objetivo é provar que existe uma solução $x(t)$ de (N.H.), limitada em R .

Seja x_0 um vetor do R^n escolhido tal que :

$$P_1 x_0 = 0$$

$$P_2 x_0 = \int_{-\infty}^0 P_2 Y^{-1}(s) f(s) ds$$

(1.3)

$$P_3 x_0 = \int_{-\infty}^0 P_3 Y^{-1}(s) f(s) ds$$

$$P_4 x_0 = \int_{-\infty}^0 P_4 Y^{-1}(s) f(s) ds \stackrel{\text{hip}}{=} \int_{-\infty}^0 P_4 Y^{-1}(s) f(s) ds$$

Sejam z_0 e w_0 vetores do R^n definidos por

$$z_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \int_0^{\infty} (P_3 + P_4) Y^{-1}(s) f(s) ds$$

$$w_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_0 - \int_{-\infty}^0 (P_2 + P_4) Y^{-1}(s) f(s) ds.$$

Logo de (1.3) decorre que: $(P_3+P_4)z_0 = 0$ e $(P_2+P_4)w_0 = 0$.

Consideremos a solução $x(t)$ de (N.H.) dada por:

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} Y(t)x_0 + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(s)f(s)ds \stackrel{\text{def}}{=} (K_1 f)(t) \quad (1.4)$$

onde o vetor x_0 é explicitado em (1.3).

Então,

$$\begin{aligned} x(t) = & Y(t)z_0 + \int_0^t Y(t)(P_1+P_2)Y^{-1}(s)f(s)ds - \\ & - \int_t^\infty Y(t)(P_3+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds \quad \forall t \in R \end{aligned} \quad (1.5)$$

Da hipótese (H.A.) e do Lema 0.2.1 decorre que $x(t)$ é limitada em R_+ .

Analogamente, obtemos uma outra representação de $x(t)$ dada por:

$$\begin{aligned} x(t) = & Y(t)w_0 + \int_0^t Y(t)(P_1+P_3)Y^{-1}(s)f(s)ds + \\ & + \int_{-\infty}^t Y(t)(P_2+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds \quad \text{e assim } x(t) \text{ é limitada} \\ & \text{em } R_-. \end{aligned}$$

Para terminarmos a demonstração vamos verificar que o subespaço gerado pelas linhas da matriz $P_4Y^{-1}(s)$ coincide com o espaço das soluções limitadas em R do (Adj) .

Seja $\Psi(s) = P_4 Y^{-1}(s)$ e consideremos os conjuntos:

$$E_1 = [\text{linhas de } \Psi(s)]$$

$$E_2 = [\text{soluções limitadas em } R \text{ do } (Adj)]$$

A nossa tese é, então provar que $E_1 = E_2$. Provemos inicialmente que $E_1 \subset E_2$.

Se $w \in E_1$ então $w(s) = w_0 P_4 Y^{-1}(s)$ com w_0 vetor linha.

Como

$$\left| (P_3 + P_4) Y^{-1}(s) \right|_{(H.A.)} \leq K e^{-\alpha s} \quad \forall s \geq 0$$

temos que

$$\begin{aligned} |P_4 Y^{-1}(s)| &= |P_4^2 Y^{-1}(s)| = |P_4 (P_4 + P_3) Y^{-1}(s)| \\ &\leq |P_4| |(P_4 + P_3) Y^{-1}(s)| \leq K_1 e^{-\alpha s} \quad \forall s \geq 0 \end{aligned}$$

Juntando os resultados decorre que: $w \in \beta(R_+)$.

Prova-se de forma análoga que $w \in E_1 \Rightarrow w \in \beta(R_-)$.

Logo $E_1 \subset E_2$.

Provaremos agora que $E_2 \subset E_1$.

O Lema 0.2.4 permite definir em E_2 o produto inter

no.

$$\langle u, v \rangle_{E_2} = \int_R u(s)v(s)ds; \quad v' = \text{transposto de } v$$

Suponhamos por absurdo que exista $w \in E_2$, $w \notin E_1$.

Então $w \neq 0$.

Logo dado que $E_2 = E_1 \oplus E_1^\perp$ então $w = w_1 + w_2$

com

$$* \quad w_1 \in E_1 \qquad * \quad w_2 \in E_1^\perp \qquad * \quad w_2 \neq 0$$

Consideremos agora a equação

$$\dot{x} = A(t)x + w_2' \tag{1.6}$$

Como $w_2 \in E_1^\perp$ temos que $\langle w_2, P_4 Y^{-1}(s) \rangle_{E_2} = 0$ e daí segue pela parte inicial da demonstração do Teorema que existe $x_0(t)$ solução não trivial de (1.6) que é limitada em R .

Assim $w_2 \dot{x}_0 = w_2 A(t)x_0 + w_2 w_2'$ e como $w_2 \in E_2$ decorre que $w_2 \dot{x}_0 = -\dot{w}_2 x_0 + w_2 w_2'$; ou seja $w_2 \dot{x}_0 + \dot{w}_2 x_0 = |w_2|^2$.

Integrando em R obtemos

$$\int_R \frac{d}{dt}(w_2 x_0) dt = \int_R |w_2|^2 dt \neq 0 \tag{1.7}$$

Do Lema 0.2.4 segue que w_2 decai exponencialmente quando $t \rightarrow \pm\infty$. Como x_0 é limitada em R temos que:

$$\int_R \frac{d}{dt}(w_2 x_0) dt = 0 \tag{1.8}$$

As igualdades (1.7) e (1.8) fornecem-nos uma contradição, o que nos leva a concluir que $E_2 \subset E_1$.

□

Observação:

Tem algum interesse um caso particular em que podem ocorrer as hipóteses (H.A.).

Consideremos em (H.A.), $P_2 = P_3 = 0$; isto é, o sistema (H) admite somente soluções limitadas em R , ou então ilimitadas quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Seja $r = \dim_{P_1} R^n$. Retirando possivelmente a exigência que $Y(0) = I$, podemos supor que $P_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. Assim o espaço das soluções limitadas em R do (Adj) é o subespaço gerado pelas linhas de $P_4 Y^{-1}(s)$, o qual tem dimensão $n-r$.

No caso periódico (ver [16]) a dimensão do espaço das soluções periódicas do Adjunto coincide com a dimensão do espaço das soluções periódicas de (H).

Vemos assim que isso pode não ocorrer quando tratamos de soluções limitadas em R , pois no caso acima a dimensão do espaço das soluções limitadas em R de (H) é r , e a dimensão do espaço das soluções limitadas em R do (Adj) é $n-r$.

1.2 - PROBLEMA RECÍPROCO

Vamos estabelecer agora condições suficientes para

provamos um teorema recíproco do Teorema 1.A.

Supomos $A(t)$ contínua e limitada em R .

Teorema 1.B

Assumimos as hipóteses:

(H.B₁) Qualquer solução limitada y do (Adj) é absolutamente integrável em R .

(H.B₂) Dada $F \in \beta(R)$ a equação $\dot{x} = A(t)x + F(t)$ tem solução limitada em R se e somente se

$$\int_R y(t)F(t)dt = 0 \quad \forall y \text{ solução limitada em } R \text{ do Adj.}$$

Então, são válidas para (H) as condições de dicotomia exponencial em R_+ e em R_- .

D.

Vamos provar que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ .

Vamos usar para este objetivo o Teorema 0.3.1.

Seja $f \in \beta(R_+)$ uma função qualquer; vamos construir uma extensão F de f a R , tal que $\int_R yF = 0 \quad \forall y \in \Phi$ onde Φ é base de soluções em $\beta(R)$ do (Adj).

Pomos $F = \begin{cases} f & \text{para } t \geq 0 \\ g & \text{para } t \leq 0 \end{cases}$ e já que f é

dada procuramos $g \in \beta(R_-)$ tal que $\int_R yF = 0 \quad \forall y \in \Phi$ e $g(0) = f(0)$.

A primeira condição é equivalente a

$$\int_{R_-} yg = - \int_{R_+} yf \quad \forall y \in \Phi$$

Seja $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix}$ base de soluções limitadas do

(Adj). Precisamos encontrar $g \in \beta(R_-)$ tal que $g(0) = f(0)$ e $\int_R \phi_j g = - \int_{R_+} \phi_j f$ para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Seja $T_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R_-} \phi_j g \in R$, para $g \in \beta(R_-)$ e seja

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}$$

Fazendo $\alpha_j = - \int_{R_+} \phi_j f$ e $\gamma = f(0)$, a determinação de

g acima fica reduzida a resolver o seguinte problema:

P.1. Dados $\alpha \in R^m$ e $\gamma \in R^n$, então existe $g \in \beta(R_-)$ tal que $Tg = \alpha$ e $g(0) = \gamma$.

Consideremos outro problema:

P.2. Dado $\beta \in R^m$, então existe $h \in \beta(R_-)$ tal que $Th = \beta$ e $h(0) = 0$.

Prova-se que P_1 é equivalente a P_2 .

Consideremos, agora, $E = \{\phi \in \beta(R_-): \phi(0) = 0\}$. Logo o problema P_2 acima é posto na forma:

P.3. $T: E \rightarrow R^m$ tal que $Tg = \int_{R_-} \phi g$ é sobrejetora?

Afim de resolvermos P_3 consideremos em E o proble

ma da determinação de h_j tal que $Th_j = e_j = (0, 0, \dots, \overset{j}{\underset{\downarrow}{1}}, \dots, 0)^t$
 $1 \leq j \leq m$.

Considerando $T_j: E \rightarrow R$ segue-se trivialmente que :

└ T_j é contínuo

└ $N_j = \text{Núcleo de } T_j \subset E$ são subespaços fechados de co
 dimensão 1, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Vamos fixar atenção no problema $Th = e_1$ isto é:

$$\begin{cases} T_1 h = 1 \\ T_j h = 0 \quad j \in \{2, \dots, m\} \end{cases} \quad h \in E$$

Fazemos então a seguinte afirmação: "Existe $h \in \bigcap_{j=2}^m N_j$
 tal que $T_1 h \neq 0$ ".

De fato, caso contrário, para todo $h \in \bigcap_{j=2}^m N_j$ te-
 mos $T_1 h = 0$ ou seja $\bigcap_{j=2}^m N_j \subset N_1$.

Logo do Lema 0.2.6 decorre que $\exists \lambda_j \in R$ tal que

$$T_1 = \sum_{j=2}^m \lambda_j T_j$$

Desta forma

$$T_1 \cdot h = \left(\sum_{j=2}^m \lambda_j T_j \right) \cdot h = 0 \Rightarrow \int_{R_-} \left(\phi_1 - \sum_{j=2}^m \lambda_j \phi_j \right) \cdot h \, dt = 0$$

$\forall h \in E$.

Desse fato, dada a arbitrariedade de h decorre que $\phi_1 = \sum_{j=2}^m \lambda_j \phi_j$; o que é um absurdo pois ϕ é uma base de soluções do (Adj) .

Logo fica provada a afirmação anterior; isto é:

$\exists h \in E: T_j h = 0 \quad j \in \{2, \dots, m\} \text{ e } T_1 h \neq 0.$

Seja $h_1 \in E$ definido por: $h_1 = \frac{1}{T_1 h} \cdot h$

Logo, h_1 satisfaz:
$$\begin{cases} T_1 h_1 = 1 \\ T_j h_1 = 0 \quad j \in \{2, \dots, m\} \end{cases}$$

ou seja resolvemos o problema: $Th_1 = e_1; \quad h_1 \in E.$

De forma análoga; para cada $j \in \{2, \dots, m\}$ resolve m-se em E os problemas $Th_j = e_j$.

Agora, dado $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in R^m$, seja $h = \sum_{j=1}^m \beta_j h_j$; portanto, h resolve o problema P.3.

Logo, dada a equivalência de P.3 com P.1 decorre que existe $g \in \beta(R_-)$ tal que $Tg = \alpha$ e $g(0) = \gamma \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$.

Portanto, existe $F \in \beta(R)$ tal que $\int_R y F = 0 \quad \forall y \in \Phi.$

Assim, de (HB_2) decorre que $\dot{x} = A(t)x + F(t)$ tem uma solução limitada em R .

Agora, dado que $F(t) = f(t)$ para $t \geq 0$, então $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ tem uma solução limitada em R_+ .

Então, do Teorema 0.3.1 segue que o sistema (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ .

De forma análoga concluímos que o sistema (H) possui uma dicotomia exponencial em R_- .

□

1.3 - PREPARAÇÃO PARA O USO DO MÉTODO ALTERNATIVO

Com a alternativa de Fredholm obtida no Teorema 1.A, podemos formular para o caso de soluções limitadas, um resultado análogo ao apresentado por Hale em [16] para soluções periódicas, e que dá uma preparação para o uso do Método Alternativo.

Seja $E = \{x(t) \in \beta(R), x(t) \text{ solução de } (H)\}$.

Seja Ψ uma matriz cujas linhas constituem uma base de soluções em $\beta(R)$ do (Adj) .

Definindo $D = \int_R \Psi \cdot \Psi'$ prova-se que D é não singular; e a convergência da integral é assegurada pelo Lema 0.2.4.

Seja $L: \beta(R) \rightarrow E$ projeção contínua e sobre, M projeção em $\beta(R)$ definida por

$$(Mf)(t) = \Psi'(t)b; \quad b = D^{-1} \int_R \Psi f, \quad f \in \beta(R) \quad (1.9)$$

Lema 1.3.1

Assumimos que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ e R_- . Logo:

(a) Dada $f \in \beta(R)$ o sistema $(N.H)$ tem solução em $\beta(R)$ se e somente se $Mf = 0$.

(b) Se $Mf = 0$, então existe uma única solução $(Kf)(.)$ de $(N.H)$ em $\beta(R)$ satisfazendo $L(Kf) = 0$. Além disso o operador $K: (I-M)\beta(R) \rightarrow (I-L)\beta(R)$ é um operador linear contínuo.

(c) Se $f(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$, então $(Kf)(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$.

D.

A parte (a) já foi provada no Teorema 1.A.

Agora se $Mf = 0$, então, de (1.4), existe a solução $(K_1 f)(t)$ que é limitada em R .

Além disso, $\forall t \in R$ temos:

$$(K_1 f)(t) = Y(t)z_0 + \int_0^t Y(t)(P_1+P_2)Y^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^\infty Y(t)(P_3+P_4)Y^{-1}(s)f(s)ds; \text{ com } z_0 \in X_1 \oplus X_2 \quad (1.10)$$

Desta forma, do Lema 0.2.1 e da hipótese (H.A.) decorre que:

$$|(K_1 f)(t)| \leq c_1 |f|, \quad c_1 > 0, \quad t \geq 0 \quad (1.11)$$

De forma análoga, usando a representação de $(K_1 f)(t)$ para $t \leq 0$ obtemos:

$$|(K_1 f)(t)| \leq c_2 |f|, \quad c_2 > 0, \quad t \leq 0 \quad (1.12)$$

Logo de (1.11) e (1.12) decorre que $|K_1 f| \leq c |f|$ $c > 0$, $f \in \beta(R)$ ou seja K_1 é linear limitado.

Seja $(Kf)(t) \stackrel{\text{def}}{=} (I-L)(K_1 f)(t)$.

Logo $K: (I-M)\beta(R) \rightarrow (I-L)\beta(R)$ é um operador linear

limitado e é claro que $LKf = 0$.

Agora, a unicidade da solução é provada como se segue :

Se x e y são soluções da equação (N.H.) em $\beta(R)$ satisfazendo $Lx = Ly = 0$, então, decorre que

i) $x - y$ é solução de (H) em $\beta(R) \Rightarrow L(x-y) = x-y$ pois L é projeção sobre as soluções limitadas de (H).

$$ii) L(x-y) = Lx - Ly = 0$$

Logo de i) e ii) obtemos $x = y$, e a prova do item b) se completa.

Faremos a verificação do item c) do Lema 1.2.1 apenas para $t \rightarrow \infty$.

Na expressão (1.10) temos:

$$z_0 \in X_1 \oplus X_2 \Rightarrow |Y(t)z_0| \leq c_3 e^{-\alpha t} \quad t \geq 0 \quad c_3 > 0$$

Agora, da hipótese (H.A) temos:

$$\left| \int_0^t Y(t)(P_1 + P_2)Y^{-1}(s)f(s)ds \right| \leq K \frac{\int_0^t e^{\alpha s} |f(s)| ds}{e^{\alpha t}}$$

Logo, pode ocorrer:

$$\triangle \quad \int_0^t e^{\alpha s} |f(s)| ds \text{ limitada quando } t \rightarrow \infty, \text{ então}$$

$$\frac{\int_0^t e^{\alpha s} |f(s)| ds}{e^{\alpha t}} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \text{ ou,}$$

$\triangle \int_0^t e^{\alpha s} |f(s)| ds \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, pela regra de L'Hospital temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t e^{\alpha s} |f(s)| ds}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} |f(t)| = 0$$

Em cada caso obtivemos que:

$$\int_0^t Y(t)(P_1 + P_2)Y^{-1}(s) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Um procedimento análogo pode ser feito para analisar o comportamento da integral imprópria de (1.10) quando $t \rightarrow \infty$.

Logo $(K_1 f)(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como do Lema 0.2.1 segue que as soluções limitadas de (H) tendem a zero quando $|t| \rightarrow \infty$ então $(LK_1 f)(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$, o que completa a demonstração do item (c).

□

Observação:

1) Para as aplicações que temos em mente a projeção L é definida por $(Lf)(t) = \Phi(t) C^{-1} \Phi'(0) f(0)$ onde $C \stackrel{\text{def}}{=} \Phi'(0)\Phi(0)$ e $\Phi(t)$ é uma matriz cujas colunas constituem uma base de soluções limitadas de (H).

2) Na linha de Hale, [16], poderíamos ter tomado

$$(Lf)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t)a; a = C^{-1} \int_R \Phi' f \text{ e } C \stackrel{\text{def}}{=} \int_R \Phi' \Phi.$$

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES

2.1 - LIGAÇÃO HETEROCLÍNICA NO R^n

Consideremos x um vetor do R^n ; $f: R^n \rightarrow R^n$ de classe C^2 , X_1, X_2 pontos de equilíbrio do sistema de equações diferenciais.

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

Sejam $A = f_x(X_1)$ e $B = f_x(X_2)$ e vamos supor que para todo auto valor λ de A , ou B , vale que $\text{Re} \lambda \neq 0$.

Assumimos também que existe uma ligação heteroclínica unindo os pontos X_1 e X_2 ; isto é, existe uma órbita do sistema que tende a X_1 e X_2 , e que está contida na variedade estável de X_1 e na variedade instável de X_2 .

Figura 1

Seja $P: R \rightarrow R^n$ tal que $P(t)$ é solução da equação, $t \rightarrow P(t)$ parametriza a órbita acima, e :

$$|P(t) - X_1| \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} \quad t \geq 0, \quad K_1 > 0, \quad \alpha_1 > 0 \quad (2.2)$$

$$|P(t) - X_2| \leq K_2 e^{\alpha_2 t} \quad t \leq 0, \quad K_2 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad (2.3)$$

Consideremos $\lambda \in R^p, F: R \times R^n \times R^p \rightarrow R^n$ suficiente - mente diferenciável, $F(t, x, 0) = 0, F(t+T, x, \lambda) = F(t, x, \lambda), T > 0$, e o sistema de equações diferenciais perturbado

$$\dot{x} = f(x) + F(t, x, \lambda) \quad (2.4)$$

O objetivo é analisar a existência de soluções $x(t)$ de (2.4) próximas de uma transladada de $P(t)$.

Seja $S_1 = P(0) + S$; S_1 é a secção normal à órbita - em $P(0)$, e S é um subespaço vetorial do R^n de dimensão $n - 1$.

Procuraremos soluções $x(t)$ de (2.4) com $x(-\alpha) \in S_1$ e $x(-\alpha)$ próximo de $P(0)$, $\alpha \in R$.

Figura 2

Introduzindo a mudança de variável $x(t-\alpha)=P(t)+z(t)$ recaímos no sistema:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_x(P(t))z + G(t, z, \lambda, \alpha), \quad G(t, z, \lambda, \alpha) = \\ &= O(|\lambda| + |z|^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

O nosso objetivo é procurar soluções $z(t)$ próximas do zero e tal que $z(0) \in S$.

Seja $A(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_x(P(t))$ e consideremos os sistemas

$$(H) \quad \dot{z} = A(t)z$$

$$(Adj) \quad \dot{z} = -zA(t)$$

$$(N.H.) \quad \dot{z} = A(t)z + H(t)$$

Tentaremos utilizar o Teorema 0.3.2. Para tanto, vamos verificar se o sistema (H) admite dicotomia exponencial em R_+ .

Seja $B(t) = A(t) - A$. Logo $A(t) = A + B(t)$.

Como os auto-valores da matriz A tem parte real não nula, temos que o sistema $\dot{z} = Az$ admite uma dicotomia exponencial em R_+ .

Como f é de classe C^2 , existe $N > 0$ tal que:

$$|B(t)| = |A(t) - A| = |f_x(P(t)) - f_x(X_1)| \leq$$

$$\leq N |P(t) - X_1| \leq NK_1 e^{-\alpha_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

(2.2)

Portanto decorre que: $\int_{R_+} |B(t)| dt < \infty$.

Assim sendo, o Teorema 0.3.2 garante que o sistema (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ .

Verifica-se condição semelhante em R_- .

Seja $\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_r(t))$ matriz $n \times r$ cujas colunas formam uma base de soluções em $\beta(R)$ de (H).

Vamos, por conveniência, assumir que $\phi_1(t) = \dot{P}(t)$.

Seja E definido como no Lema 1.2.1 e $L: \beta(R) \rightarrow E$ a projeção definida por $(Lf)(t) = \phi(t)C^{-1}\phi'(0)f(0)$ com $C \stackrel{\text{def}}{=} \phi'(0)\phi(0)$.

Seja M uma projeção como em (1.9).

Do Lema 1.2.1 segue-se que Dada $H \in \beta(R)$, o sistema $(N.H.)$ tem solução $z(t)$ em $\beta(R)$ se e somente se $MH = 0$. Se $MH = 0$ então existe uma única solução $z(t) = (KH)(t)$ de $(N.H.)$ satisfazendo $Lz = 0$, o que implica pela definição de L que $(\dot{P}(0))'.z(0) = 0$. Portanto $z(0) \in [\dot{P}(0)]^\perp = S$.

Usando o procedimento usual do Método Alternativo como em [11], temos que:

$\vdash z(t)$ é solução limitada em R de $\dot{z} = A(t)z + G(t, z, \lambda, \alpha)$ com $Lz = 0$ se e somente se $z(t)$ é solução limitada em R do sistema

$$\left[\begin{array}{l} \underline{a} \quad \dot{z} = A(t)z + (I-M)G \\ \underline{b} \quad MG = 0 \end{array} \right.$$

o que é equivalente a

$$\left[\begin{array}{l} \underline{a} \quad z(.) = K(I-M)G(., z(.), \lambda, \alpha) \\ \underline{b} \quad MG = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

A equação (2.6.a) é conhecida como equação auxiliar, e a equação (2.6.b) como equação de bifurcação.

Seja $N: \beta(R) \times R^p \times R \rightarrow \beta(R)$ o operador definido por $N(z, \lambda, \alpha)(.) = z(.) - K(I-M)G(., z(.), \lambda, \alpha)$.

Logo, vale :

$$\vdash N(0, 0, \alpha) = 0$$

$$\vdash N_z(0, 0, \alpha) = I$$

Do Teorema das Funções Implícitas decorre que existem vizinhanças U e V do zero em $\beta(R)$ e R^p , respectivamente, e uma função $z^*(.) = z^*(\lambda, \alpha)(.)$, $z^* \in U$, $\lambda \in V$ tais que z^* satisfaz (2.7.a) e $z^*(0, \alpha) = 0$ para $\alpha \in R$.

Substituindo-se $z^*(.)$ na relação (2.6.b), da igualdade $MG = 0$, decorre a equação de bifurcação

$$\int_R \Psi(s) G(s, z^*(s), \lambda, \alpha) ds = 0 \quad (2.7)$$

Observação

Análise idêntica é feita para o caso de uma ligação homoclínica no R^n ; $X_1 = X_2$.

2.2 - LIGAÇÃO HETEROCLÍNICA NO R^2

Vamos considerar a equação diferencial:

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (2.8)$$

onde g é de classe C^2 , $g(0) = 0$ e $x \in R$.

Na forma de sistema esta equação é do tipo

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g(x_1) \end{pmatrix} = f(x_1, x_2) \quad (2.9)$$

Sejam $A = (a, 0)$ e $B(-a, 0)$, $a > 0$ pontos de equilíbrio do sistema (2.9).

Vamos assumir que os autovalores das matrizes $f_x(A)$, $f_x(B)$, tem parte real diferente de zero. Esta hipótese equivale a $g'(-a) < 0$ e $g'(a) < 0$.

Supomos que existe uma órbita heteroclínica ligando A e B .

Seja $P(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, solução de (2.9) tal que, $P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{p}(0) \end{pmatrix}$, $\dot{p}(0) \neq 0$ e que parametriza a citada órbita heteroclínica.

Figura 3

Desta forma, existem α_1 e α_2 reais positivos tais que:

$$|P(t)-A| \leq k_1 e^{-\alpha_1 t} \quad t \geq 0$$

$$|P(t)-B| \leq k_2 e^{\alpha_2 t} \quad t \leq 0$$

Sejam λ_1, λ_2 parâmetros reais e consideremos a equação diferencial perturbada

$$\ddot{x} + g(x) = -\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 h(t); \quad h \in P_T$$

Na forma de sistema tal equação é do tipo:

$$\dot{X} = f(X) + F(t, X, \lambda) \quad \text{com} \quad (2.10)$$

$$F(t, X, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_1 x_2 + \lambda_2 h(t) \end{pmatrix}, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{e}$$

$$F(t, X, 0) = 0.$$

Coloca-se, desta forma, o mesmo problema do § 2.1; isto é: "Para (λ_1, λ_2) suficientemente próximo do zero, existe uma solução $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de (2.10) próxima de uma transladada de $P(t)$ "?

Introduzindo a mudança $X(t-\alpha) = P(t) + Z(t)$ $\alpha \in R$, $Z = (z, \dot{z})$, recaímos no sistema:

$$\dot{Z} = f_X(P(t))Z + G(t, Z, \lambda, \alpha) \quad \text{com} \quad (2.11)$$

$$G(t, Z, \lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 h(t-\alpha) + G_1(t, z) \end{pmatrix}$$

com $G_1(t, z) = o(|z|^2)$ quando $|z| \rightarrow 0$.

Logo, vamos procurar soluções X de (2.10) com a condição $X(-\alpha) = (x(-\alpha), \dot{x}(-\alpha)) = (0, \dot{x}(-\alpha)) \in S$.

Neste caso a secção normal S_1 à curva $P(t)$, passando pelo ponto $P(0)$, que foi introduzida no parágrafo anterior, coincide com o sub-espaco S de equação $x_1 = 0$ no plano de fase (x_1, x_2) .

Decorre portanto que o nosso objetivo inicial concentra-se agora em encontrar soluções $Z(t)$ de (2.11) próximas do zero, e $Z(0) = (z(0), \dot{z}(0)) \in S$; ou seja, $z(0) = 0$.

$$\text{Seja } A(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_X(P(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(p(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que o traço de $A(t)$ é zero podemos considerar uma outra solução $Q(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$ do sistema

$$(H) \quad \dot{Z} = A(t)Z$$

satisfazendo $W(\dot{P}, Q) = \det \begin{pmatrix} \dot{p} & q \\ \ddot{p} & \dot{q} \end{pmatrix} = 1$ e $q(0) = 0$. Dai decorre que $\dot{q}(0) = \frac{1}{\dot{p}(0)}$.

De $\dot{P}(t) = f(P(t))$ decorre que $\dot{P}(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$.

Como $W(\dot{P}, Q) = 1$, decorre que $\dot{p} \dot{q} - \ddot{p} q = 1$ e daí concluímos que $Q = (q, \dot{q})$ é não limitada.

Na verdade, usando-se o Teorema 4 ou o Teorema 11 de Coppel [7], pode-se provar que $\dot{P}(t) \sim e^{-\beta_1 t}$, $Q(t) \sim e^{\beta_1 t}$ quando $t \rightarrow \infty$, e $\dot{P}(t) \sim e^{\beta_2 t}$, $Q(t) \sim e^{-\beta_2 t}$ quando $t \rightarrow -\infty$, onde $\beta_1 = (-g'(a))^{1/2}$ e $\beta_2 = (-g'(-a))^{1/2}$.

Consideremos a seguinte matriz fundamental.

$$Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dot{p} & q \\ \ddot{p} & \dot{q} \end{pmatrix} \quad \text{do sistema (H).}$$

$$\text{Logo } Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q} & -q \\ -\ddot{p} & \dot{p} \end{pmatrix} \quad \text{é matriz fundamen-}$$

tal do sistema.

$$(Adj) \quad \dot{Z} = -Z A(t)$$

De forma natural, aparecem as bases Φ e Ψ de soluções limitadas de (H) e do (Adj), respectivamente; ou seja, $\Phi(t) = (\dot{P}(t))$ $\Psi(t) = (-\ddot{p}, \dot{p})$.

Logo, podemos definir as projeções L e M em $\beta(R)$ como no §2.1; isto é,

$$(Lf)(t) = \Phi(t) C^{-1} \Phi'(0) f(0), \quad C = \Phi'(0) \Phi(0)$$

$$(Mf)(t) = \Psi'(t) \cdot b, \quad b = D^{-1} \int_R \Psi f, \quad D = \int_R \Psi \Psi'$$

Portanto, estamos em condições de usar o Lema 1.2.1,

e tirar as respectivas conclusões com relação às soluções limitadas de

$$(N.H.) \quad \dot{Z} = A(t)Z + H(t) \quad H \in \beta(R)$$

Inicialmente observamos que:

$$MH = 0 \text{ se e somente se } \int_R \Psi H = 0 \text{ se e somente se } \int_R \dot{p} h = 0$$

para $H = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$.

Além disso, $LZ = 0$ se e somente se $\phi'(0)Z(0) = 0$, o que é equivalente a $z(0) = 0$, ou ainda $Z(0) \in S$. (2.12)

2.2.1 - Análise da Equação de Bifurcação

Sabemos de (2.11) e (2.12) que $\dot{Z}(t)$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \dot{Z} = f_X(P(t))Z + G(t, z, \lambda, \alpha) \\ LZ = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Agora, de (2.6), isto equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} \underline{a} & Z(.) = K(I-M) G(., Z(.), \lambda, \alpha) \\ \underline{b} & MG = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Definindo $K(\alpha) = \frac{1}{\eta} \int_R \dot{p}(t)h(t-\alpha)dt$ função T-periódica, onde $\eta = \int_R \dot{p}^2$, e após encontrarmos z^* , solução de (2.14.a), a equação de bifurcação apresentada em (2.7) transforma-se, neste caso, em :

$$\phi(\lambda, \alpha) \stackrel{def}{=} -\lambda_1 + \lambda_2 K(\alpha) + G_2(\lambda, \alpha) = 0 \quad (2.15)$$

onde $G_2(\lambda, \alpha) = -\frac{\lambda_1}{\eta} \int_R \dot{p} z^* + \frac{1}{\eta} \int_R \dot{p} G_1(., z^*)$

Dado que $z^*(\lambda, \alpha) = o(|\lambda|)$ quando $|\lambda| \rightarrow 0$ e $G_1(., z) = o(|z|^2)$ quando $|z| \rightarrow 0$ decorre que $G_2(\lambda, \alpha) = o(|\lambda|^2)$ quando $|\lambda| \rightarrow 0$.

Fazendo-se uma estimativa "a priori" em (2.15) pode-se provar que tal equação é equivalente a

$$\begin{cases} -\beta + K(\alpha) + G_3(\lambda_2, \alpha) = 0 & \text{com} \\ G_3(\lambda_2, \alpha) = o(|\lambda_2|) & \text{quando } |\lambda_2| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

As considerações anteriores são válidas para $\alpha \in R$. Vamos a seguir fazer α variar no intervalo $[0, T]$.

Assumimos, por simplicidade, que a função K satisfaça às condições :

Existe somente um máximo α_1 e um mínimo α_2 , no intervalo $[0, T]$. Além disso $K(\alpha_1) \neq K(\alpha_2)$, $K'(\alpha) > 0$ para $\alpha \in [0, \alpha_1)$ e $\alpha \in (\alpha_2, T]$ e $K'(\alpha) < 0$ para $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ (ver a figura - 4).

Figura 4

A fim de dar uma idéia do que ocorre, observamos, inicialmente, que na primeira aproximação ($\lambda_2 = 0$), as únicas soluções de (2.16) são pares (α_0, β_0) , tais que $K(\alpha_0) = \beta_0$.

Logo, se:

└ $\beta > K(\alpha_1)$ ou $\beta < K(\alpha_2)$, então, não existe solução da equação $K(\alpha) = \beta$.

└ $K(\alpha_2) < \beta < K(\alpha_1)$, então existem pelo menos duas soluções da equação $K(\alpha) = \beta$.

O Lema abaixo diz que para λ_2 próximo do zero tal comportamento é preservado para a equação (2.16).

Lema 2.2.1

Existe uma vizinhança do ponto $\lambda = 0$ e duas curvas C_1 e C_2 , de classes C^2 , contidas em V , tangentes no ponto $\lambda = 0$ às retas $\lambda_1 = K(\alpha_1)\lambda_2$ e $\lambda_1 = K(\alpha_2)\lambda_2$, respectivamente, e tais que C_1, C_2 dividem V em dois setores S_1 e S_2 , disjuntos, de forma que:

- | para $\lambda \in S_1$ não existe solução de (2.15)
- | para $\lambda \in S_2$ existem pelo menos duas soluções de (2.15).

Figura 5

A prova do Lema 2.2.1 é idêntica a do Lema 3.1 de [10].

Observação:

Tentaremos dar uma idéia de uma possível situação on de ocorre a existência de solução de (2.15) limitada em R .

Pode-se provar que os pontos de equilíbrio A e B que são ligados pela órbita heteroclínica de (2.4) dão origem a soluções periódicas de (2.10) após perturbação.

Seja (α_0, β_0) tal que $K(\alpha_0) = \beta_0$ como na figura abaixo.

Figura 6

Pode-se provar que existe solução $X(t) = P(t+\alpha) + Z^*(t+\alpha)$ de (2.10) com $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ próximo de β , onde Z^* é pequeno uniformemente.

A figura 7 mostra a solução $P(t)$ que parametriza a trajetória heteroclínica. A figura 8 mostra as soluções periódicas de (2.10) que foram originadas pelos pontos críticos A e B de (2.9), e a solução $X(t) = P(t+\alpha) + Z^*(t+\alpha)$ on de $\alpha \sim \alpha_0$.

Figura 7

Figura 8

Pode-se demonstrar que a solução $X(t)$ está na variedade estável da órbita periódica originada por A e na variedade instável da órbita periódica originada por B.

Também é possível demonstrar que podem existir infinitas intersecções entre essas duas variedades.

Uma possível secção no instante t_0 com as variedades citadas é mostrada na figura 9.

Figura 9

Para maiores detalhes referentes ao aspecto abordado acima, ver [10].

Exemplo

Um exemplo muito conhecido na literatura, onde se verifica a existência de uma órbita heteroclínica unindo

pontos de equilíbrio é na equação do pêndulo: $\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$.

O modelo perturbado $\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = -\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 h(t)$, h função T-periódica é de um pêndulo amortecido com um termo forçante.

Observação 1

Apesar de não necessitarmos posteriormente da expressão explícita do operador K , é possível calculá-la, usando as relações (1.3), (1.4) e (1.5) do capítulo anterior.

Neste caso, tomamos $Y(t) = Z(t) Z^{-1}(0)$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $P_2 = P_3 = 0$ e $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De (1.3), decorre que:

$$x_0 = P_4 x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{-\infty}^0 p h_1 + \dot{p} h_2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \beta(R).$$

Como $\Phi'(0) = (\dot{p}(0), 0)$ temos que $\Phi'(0)x_0 = 0$ e daí $(LK_1 H)(t) = 0$. Portanto, $K_1 = K$. Neste caso, temos também, que $z_0 = w_0 = 0$.

A representação (1.5) fornece desta forma a expressão de $(KH)(t)$, a saber,

$$\begin{aligned} (KH)(t) &= \int_0^t Y(t) P_1 Y^{-1}(s) H(s) ds - \int_t^\infty Y(t) P_4 Y^{-1}(s) H(s) ds \quad (2.17) \\ &= \int_0^t Y(t) P_1 Y^{-1}(s) H(s) ds + \int_{-\infty}^t Y(t) P_4 Y^{-1}(s) H(s) ds = \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \int_0^t (\dot{p}(t)\dot{q}(s)h_1(s) - \dot{p}(t)q(s)h_2(s))ds - \dots \\ - \int_t^\infty (-\ddot{p}(t)\dot{q}(s)h_1(s) + \dot{p}(t)q(s)h_2(s))ds \\ \int_0^t (\ddot{p}(t)\dot{q}(s)h_1(s) - \ddot{p}(t)q(s)h_2(s))ds - \dots \\ - \int_t^\infty (-\dot{q}(s)\ddot{p}(t)h_1(s) + \dot{p}(t)\dot{q}(s)h_2(s))ds \end{array} \right]_{(2 \times 1)}$$

Observação 2

O caso em que a equação (2.9) tem uma ligação homo-clínica como indicada na *figura 10* pode também ser colocado no contexto dos resultados desenvolvidos anteriormente. Este caso é tratado em [10].

Figura 10

Assumimos g de classe C^2 , $g(0) = 0$ e $g'(0) < 0$.

Vamos supor que existe uma órbita homoclínica emanando do ponto de equilíbrio $(0,0)$. Seja $P(t) = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$ uma parametrização desta órbita, $P(0) = \begin{pmatrix} p(0) \\ 0 \end{pmatrix}$ $p(0) \neq 0$.

Coloca-se em [10] o problema: "Para λ variando numa vizinhança do zero, verificar a existência de solução $X(t)$ de (2.10) próxima de uma transladada de $P(t)$ ".

A secção normal S_1 a órbita $P(t)$ coincide com o subespaço S de equação $x_2 = 0$ no plano de fase (x_1, x_2) .

Figura 11

Neste caso procuramos soluções $X(t)$ de (2.10) satisfazendo $X(-\alpha) = (x(-\alpha), 0) \in S_1$.

Introduzindo a mudança de variável $X(t-\alpha) = P(t) + Z(t)$

recaímos no problema de encontrar soluções limitadas de (2.11) com $Z(0) \in S$, o que equivale a $\dot{z}(0) = 0$.

A construção da base Φ e Ψ de (H) e do (Adj) é análoga ao caso anterior.

Neste caso, temos que $LZ = 0$ implica $\Phi'(0)Z(0) = 0$. Logo, $\ddot{p}(0)\dot{z}(0) = 0$ e, portanto, $\dot{z}(0) = 0$. Tal condição equivale a $Z(0) \in S$.

As condições obtidas no parágrafo anterior podem ser adaptadas para este caso.

2.3 - UM PARTICULAR EXEMPLO

Um exemplo de equação onde aparecem órbitas homoclínicas e heteroclínicas é dado pelo modelo do movimento de um pêndulo que oscila em um plano. O plano gira com velocidade angular ω . A equação, após normalizações, é dada por:

$$\ddot{v} + (\lambda - \cos v) \sin v = 0.$$

onde $\lambda = \frac{g}{\omega^2 \ell}$, ℓ = comprimento do pêndulo

As figuras 12, 13 e 14 mostram o retrato de fase com a variação do parâmetro λ em R_+ .

Maiores detalhes podem ser encontrados em [2].

Figura 12

Figura 13

Figura 14

Um outro exemplo enquadrado no contexto acima é o da oscilação de um pêndulo no qual seu ponto de fixação está submetido a um torque constante. Este modelo pode ser encontrado em [45].

A equação que rege o movimento é dada por

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \sin x = \gamma.$$

Observação 3

Uma aplicação que poderia ser desenvolvida nesta altura, seria a análise da existência de soluções limitadas de

$$\begin{cases} \ddot{x} + g(x) = F(t, x, \dot{x}, \lambda, y) & x \in R \\ \dot{y} = G(t, x, \dot{x}, \lambda, y) & y \in R^n \end{cases}$$

onde $\ddot{x} + g(x) = 0$ tem uma órbita homoclínica ou heteroclínica, com condições convenientes sobre F e G .

Uma vez que uma aplicação análoga a esta vai ser analisada posteriormente em dimensão infinita, deixamos de desenvolver aqui esta parte.

CAPÍTULO 3

PRELIMINARES II

3.1 - DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Teorema 3.1.1

Seja A gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t) \in L(W)$ $t \geq 0$, W um espaço de Banach.

Seja $A(t) = A + B(t)$ com $B(t) \in L(W)$ e $t \rightarrow B(t)x : R \rightarrow W$ contínua para cada $x \in X$.

Para cada $s \in R$, a equação diferencial $\dot{x} = A(t)x$, $x \in W$ tem uma única solução "mild" $x(t)$ $t \geq s$ que varia continuamente com $x(s)$. Escrevendo $x(t) = T(t,s)x(s)$ $t \geq s$ a família de operadores lineares $\{T(t,s) \mid t \geq s\}$ satisfaz

$$(a) \quad T(s,s) = I, \quad T(t,\sigma)T(\sigma,s) = T(t,s), \quad t \geq \sigma \geq s$$

$$(b) \quad (t,s) \rightarrow T(t,s)x \text{ é contínua para } t \geq s, \text{ e cada } x \in W.$$

Se $t \rightarrow B(t)x : R \rightarrow W$ é C^1 então

$$(i) \quad T(t,s)D(A) \subset D(A)$$

$$(ii) \quad \text{Em } D(A), T(t,s) \text{ é fortemente continuamente diferenciável com relação a } t \text{ e } s, \text{ com } \frac{\partial}{\partial t} T(t,s)x = A(t)T(t,s)x \text{ e } \frac{\partial}{\partial s} T(t,s)x = -T(t,s)A(s)x \\ \forall x \in D(A), \quad t \geq s. \text{ Além disso, a aplicação}$$

$t \rightarrow AT(t,s)x$ é contínua, $t \geq s$.

$$(iii) \quad T(t,s) = T(t-s) + \int_s^t T(t-\sigma)B(\sigma)T(\sigma,s)d\sigma$$

Para uma demonstração ver [20] e [28].

Observação:

O operador $T(t,s)$ do teorema acima é conhecido como o operador de evolução associado à equação $\dot{x} = A(t)x$.

Em Krein [28], está justificado que, se existe λ_0 ponto regular comum, e $R(\lambda_0; t) = (\lambda_0 - A(t))^{-1}$ é uniformemente limitado para $t \in [0, T]$ (Veja Lema 4.2.1), mediante uma mudança de variável, podemos supor sem perda de generalidade, que a equação $\dot{x} = A(t)x$ tem $A(t)$ com inversa uniformemente limitada para $t \in [0, T]$.

Logo, vale :

Teorema 3.1.2

Nas condições anteriores a família $T(t,s)$ satisfaz:

$$(i) \quad |T(t,s)| \leq M, \quad M > 0, \quad T \geq t \geq s \geq 0$$

$$(ii) \quad V(t,s) \stackrel{def}{=} A(t)T(t,s)A^{-1}(s) \text{ é um operador limitado e fortemente contínuo no triângulo } T \geq t \geq s \geq 0.$$

Para uma demonstração ver [28].

Observação:

No caso de $A(t)$ não ser invertível, mas existir λ_0 ponto regular comum, então a condição (ii) do Teorema 3.1.2 é substituída por: $V(t,s) = A(t)T(t,s)(\lambda_0 - A(s))^{-1}$ é um operador linear limitado e fortemente contínuo no triângulo $T \geq t \geq s \geq 0$.

Seja $J = R_+, R_-$ ou R e $T(t,s)$ $t \geq s$ o operador de evolução associado a equação

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x \quad x \in W$$

Definição 3.1.3

Diremos que (H) admite uma dicotomia exponencial em J , se existe uma família de projeções $P(s) \in L(W)$, tal que:

$$(a) \quad T(t,s)P(s) = P(t)T(t,s) \quad t \geq s$$

$$(b) \quad T(t,s)|_{R(P(s))}: R(P(s)) \rightarrow R(P(t)) \text{ é um isomorfismo, com o operador inverso denotado por } T(s,t) \quad t \geq s.$$

$$(c) \quad |T(t,s)P(s)| \leq K e^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t,$$

$$(d) \quad |T(t,s)(I-P(s))| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s$$

$$t, s \in J.$$

Se $P(s) = I$, $s \in J$, a dicotomia exponencial é denominada trivial.

Seja W um espaço de Banach $\eta > 0$ e $\Lambda = [-\eta, \eta]$.
Seja $A(r) : D \rightarrow W$ um operador linear fechado com $D = D(A(r))$, domínio denso em W (independente de r).

Dentro da hipótese acima, seja $\rho(A(r))$ o conjunto dos valores complexos λ , tais que $R(\lambda; A(r)) = (\lambda - A(r))^{-1} \in L(W)$, $r \in \Lambda$, e assumindo que $A(r)$ é fortemente continuamente diferenciável em Λ , vale o

Teorema 3.1.4

Para $\lambda \in \rho(A(r))$, temos que:

(i) $A(r)R(\lambda; A(s))$ é um operador linear limitado, definido em W , contínuo na norma de $L(W)$ em relação a r e s .

(ii) $A(r)R(\lambda; A(s))$ e $R(\lambda; A(r))$ são fortemente diferenciáveis em relação a r com

$$\frac{\partial}{\partial r} (A(r)R(\lambda; A(s)))x = A'(r)R(\lambda; A(s))x$$

$$\forall x \in W$$

$$\frac{\partial}{\partial r} R(\lambda; A(r))x = R(\lambda; A(r))A'(r)R(\lambda; A(r))x$$

Além disso, $A'(r)R(\lambda; A(s))$ é um operador linear limitado fortemente contínuo como função das duas variáveis r, s .

Segue desse Teorema e do Teorema de Banach-Steinhaus que $A'(r)R(\lambda;A(r))$ é uniformemente limitado, isto é:

$$\|A'(r)R(\lambda;A(r))\|_{L(W)} \leq K, \quad K > 0, \quad r \in \Lambda.$$

Para uma demonstração ver [34] e [28].

Teorema 3.1.5

Assumimos que $A(r)$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados $T(r,t)$, $t \geq 0$ satisfazendo $\|T(r,t)\|_{L(W)} \leq K e^{\alpha t}$, $t \geq 0$, K e α constantes positivas independentes de $r \in \Lambda$. Então,

(i) Se $r_n \rightarrow r$ em Λ , quando $n \rightarrow \infty$, então $T(r_n, t)w \rightarrow T(r, t)w$ $t \geq 0$ $w \in W$ quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em t e w , para $t \in [0, T]$ $T > 0$ e $w \in K$ onde K é um compacto de W .

(ii) $T(r, t)$ é fortemente continuamente diferenciável com

$$\frac{\partial}{\partial r}(T(r, t))u = \int_0^t T(r, t-\sigma)A'(r)T(r, \sigma)u d\sigma, \quad u \in D$$

Para uma demonstração ver [34].

Teorema 3.1.6

Supomos F um subconjunto fechado de um espaço de Banach X , interior $F \neq \emptyset$, Λ um subconjunto aberto de um espa

ço de Banach Y . Assumimos que $T: \Lambda \times F \rightarrow F$, $(\lambda, x) \mapsto T(\lambda, x)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(H.1) $T(., x): \Lambda \rightarrow F$ é contínua

(H.2) $T(\lambda, .): F \rightarrow F$ é contínua e tem para cada $\lambda \in \Lambda$ um único ponto fixo $x(\lambda)$ variando continuamente sobre Λ .

(H.3) Se $x(\Lambda) = F_1$, então $T(\lambda, x)$ é C^1 em λ para $(\lambda, x) \in \Lambda \times F_1$.

(H.4) Existe um aberto $F_2 \subset X$, $F \subset F_2$ e $\delta_1 \in [0, 1)$, tal que a derivada $T(\lambda, x)$ com relação a x é contínua e tem norma menor que δ_1 para $(\lambda, x) \in \Lambda \times F_2$.

Então a aplicação $\lambda \mapsto x(\lambda)$ é C^1 .

Para uma demonstração ver [11].

Lema 3.1.7

Assumimos $A: D(A) \subset W \rightarrow W$ um operador fechado, tal que para cada $\lambda > w$, $\lambda \in R$, temos que $\lambda \in \rho(A)$ e $|R(\lambda; A)| \leq \frac{M}{\lambda - w}$, $M > 0$, $w \in R$. Sejam a e b constantes positivas com $b \leq \frac{1}{4(M+1)}$. Então, existe $d = d(a, b, w, M)$, tal que se $\lambda > d$ e se $B: W \rightarrow W$ satisfaz $D(B) \supset D(A)$ e

$$|Bx| \leq a|x| + b|Ax| \quad \forall x \in D(A), \text{ então } \lambda \in \rho(A+B) \text{ e}$$

$$|R(\lambda: A+B)| \leq \frac{8M}{d-w}$$

D.

Da hipótese, decorre que $\forall x \in W$

$$|BR(\lambda:A)x| \leq a|R(\lambda:A)x| + b|AR(\lambda:A)x| \leq$$

$$\frac{aM}{\lambda-w} |x| + b|(\lambda-A)R(\lambda:A)x - \lambda R(\lambda:A)x| \leq$$

$$\leq \left[\frac{Ma}{\lambda-w} + b \left(1 + \frac{\lambda M}{\lambda-w} \right) \right] |x|$$

Desta forma, impomos como primeira condição $\frac{aM}{\lambda-w} < \frac{1}{4}$,

o que equivale a $\lambda > w + 4Ma$ (3.1)

De forma análoga, impomos a condição $1 + \frac{\lambda M}{\lambda-w} < \frac{5}{2} (M+1)$

o que equivale a $\lambda > \frac{w(5M+3)}{3(M+1)}$ (3.2)

Logo, de (3.1) e (3.2) tomando $d = \max\{w+4Ma, \frac{w(5M+3)}{3(M+1)}\}$

retornando à estimativa inicial obtemos:

$$|BR(\lambda:A)x| \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8} \right) |x| = \frac{7}{8} |x| \quad \forall \lambda > d \text{ o que im-}$$

plica $|BR(\lambda:A)| < 1$ e portanto $I - BR(\lambda:A)$ é invertível

$\forall \lambda > d$, e sendo $\lambda - (A+B) = (I - BR(\lambda:A))(\lambda - A)$, obtemos que

$$R(\lambda: A+B) = R(\lambda:A)(I - BR(\lambda:A))^{-1}.$$

Desta forma para cada $\lambda > d$, temos

$$|R(\lambda: A+B)| \leq \frac{M}{\lambda-w} \cdot \frac{1}{1-|BR(\lambda:A)|} \leq \frac{8M}{\lambda-w} \leq \frac{8M}{d-w}$$

□

Observação:

A condição $b < \frac{1}{4(M+1)} < 1$ implica, em particular, que

$A + B$ é fechado. (Ver [15], Lema V.3.5, página 122).

CAPÍTULO 4

SOLUÇÕES LIMITADAS DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA - CASO: DIMENSÃO INFINITA.

4.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo neste capítulo, é obter uma extensão do Teorema 1.A abordado no Capítulo 1, para o caso em que o vetor x pertence a um espaço de Banach de dimensão infinita.

Seja $(W, |\cdot|)$ um espaço de Banach.

Seja $A(t) = A + B(t)$ um operador linear com

H.T.1 A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados $T(t)$, $t \geq 0$ satisfazendo à condição :

$$\|T(t)\|_{L(W)} \leq K e^{-\alpha t} \quad t \geq 0, \quad M > 0, \quad \alpha > 0.$$

No transcorrer deste capítulo a função $t \rightarrow B(t) : R \rightarrow L(W)$ deverá satisfazer algumas das hipóteses listadas abaixo.

H.B.1 $t \rightarrow B(t) : R \rightarrow L(W)$ contínua e limitada.

H.B.2 $t \rightarrow B(t) : R \rightarrow L(W)$ é de classe C^1 .

H.B.3 $t \rightarrow \dot{B}(t) : R \rightarrow L(W)$ é limitada.

4.2 - LEMAS

Lema 4.2.1

Assumimos satisfeitas as hipóteses $H.T.1$ e $H.B.1$. Então, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R(\lambda; A(t)) = (\lambda - A(t))^{-1}: W \rightarrow D(A)$ é um operador linear limitado para $\lambda > \lambda_0$, (λ_0 independente de $t \in \mathbb{R}$).

$\mathcal{D}$.

Definimos $|B|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |B(t)|$ e por $H.B.1$ temos que $|B|_\infty < \infty$.

O resultado agora segue o raciocínio do Lema 3.1.7; sendo que, neste caso, $\lambda_0 \geq w + M|B|_\infty$ e $|R(\lambda; A(t))| \leq \frac{M}{\lambda - w - M|B|_\infty}$ para $\lambda > \lambda_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

□

Eventualmente será usada a notação $R(\lambda, t)$ para representar o operador $R(\lambda; A(t))$.

Consideremos agora $T(t, s)$ $t \geq s$ o operador de evolução associado à equação $\dot{x} = A(t)x$, $x \in W$, $t \in \mathbb{R}$.

Nos próximos três resultados a serem estabelecidos assumimos que:

$$H.T.2 \quad |T(t, s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s, \quad K > 0, \quad \alpha > 0.$$

Lema 4.2.2

Supomos satisfeitas as hipóteses $H.T.1$, $H.T.2$, $H.B.1$,

H.B.2 e H.B.3. Além disso vamos assumir que $B(t)$ satisfaz:

$\int_R |B(t)| dt < \infty$, $\int_R |\dot{B}(t)| dt < \infty$. Então para $t \geq s$, $t, s \in R$, vale que $|AT(t,s)R(\lambda:A(s))| \leq K_1 e^{-\alpha(t-s)}$, $K_1 > 0$.

D.

De H.T.1 decorre que $0 \in \rho(A)$.

Do Teorema 3.1.1 sabemos que $T(t,s) = T(t-s) + \int_s^t T(t-\xi)B(\xi)T(\xi,s)d\xi$.

Decorre dos Lemas 4.2.1 ou 3.1.7 e dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, que :

$$\begin{aligned} T(t,s)R(\lambda:A(s))x &= T(t-s)R(\lambda:A(s))x + \int_s^t T(t-\xi)B(\xi)T(\xi,s) \\ &\cdot R(\lambda:A(s))x d\xi = T(t-s)R(\lambda:A(s))x + \int_s^t -\left\{\frac{\partial}{\partial \xi} T(t-\xi)A^{-1}B(\xi) \cdot \right. \\ &\cdot T(\xi,s)R(\lambda:A(s))x \Big|_{\xi=s}^{\xi=t} \\ &\cdot R(\lambda:A(s))x + \int_s^t T(t-\xi)A^{-1}[\dot{B}(\xi)T(\xi,s) + B(\xi)A(\xi)T(\xi,s)]R(\lambda:A(s))x d\xi. \quad \forall x \in W. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos para $AT(t,s)R(\lambda:A(s))$ a representação:

$$\begin{aligned} AT(t,s)R(\lambda:A(s)) &= T(t-s)A R(\lambda:A(s)) - B(t)T(t,s)R(\lambda:A(s)) \\ &+ T(t-s)B(s)R(\lambda:A(s)) + \int_s^t T(t-\xi)[\dot{B}(\xi)T(\xi,s) + B^2(\xi)T(\xi,s) \\ &\cdot R(\lambda:A(s))]d\xi + \int_s^t T(t-\xi)B(\xi)AT(\xi,s)R(\lambda:A(s))d\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Definindo $C(\xi) = \dot{B}(\xi) + B^2(\xi)$, adicionando e subtraindo $\lambda R(\lambda, A(s)) - B(s)R(\lambda: A(s))$ ao 1º termo da expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} AT(t, s)R(\lambda: A(s)) &= -T(t, s) - B(t)T(t, s)R(\lambda: A(s)) + \\ &+ \lambda T(t-s)R(\lambda: A(s)) + \int_s^t T(t-\xi)C(\xi)T(\xi, s)R(\lambda: A(s))d\xi \\ &+ \int_s^t T(t-\xi)B(\xi)AT(\xi, s)R(\lambda: A(s))d\xi \end{aligned}$$

Nas hipóteses do Lema os quatro primeiros termos da expressão acima são majorados na norma de $L(W)$ por $(cte)e^{-\alpha(t-s)}$, $t \geq s$.

Portanto definindo $V(t, s) \stackrel{def}{=} |AT(t, s)R(\lambda: A(s))|$ $t \geq s$ obtemos que: $V(t, s) \leq (cte)e^{-\alpha(t-s)} + \int_s^t K e^{-\alpha(t-\xi)} |B(\xi)| V(\xi, s) d\xi$

Fazendo uso da desigualdade de Gronwall obtemos

$$V(t, s) \leq (cte)e^{-\alpha(t-s)} e^{K \int_s^t |B(\xi)| d\xi} \leq K_1 e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s$$

□

Observação

Nas condições do Lema anterior decorre que

$$(a) \quad |A(t)T(t, s)R(\lambda: A(s))|_{L(W)} \leq (cte)e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s.$$

$$(b) \quad \text{Se } E: D(E) \rightarrow X \text{ é um operador linear fechado com } D(E) \supset D(A) = D(A(t)), \text{ então } |ET(t, s)R(\lambda: A(s))| \leq (cte)e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s.$$

Lema 4.2.3

Assumindo satisfeitas as hipóteses $H.T.2$ e $H.B.1.$, seja $h: R \rightarrow W$ uma função contínua e limitada. Então a função $t \rightarrow \int_{-\infty}^t T(t,s)h(s)ds : R \rightarrow W$ é contínua e limitada.

D.

A demonstração decorre, de forma natural, do Teorema 3.1.1 e da hipótese sobre h .

□

Lema 4.2.4

Assumimos as hipóteses do Lema 4.2.2. Então dada $g \in C^1(R)$, $\dot{g}$ limitada, definindo $v(t) = \int_{-\infty}^t T(t,s)g(s)ds$ de corre que:

(a) $v(t) \in D(A)$

(b) $v(t) \in C^1$

(c) $v(t)$ satisfaz a equação $\dot{v}(t) = A(t)v(t) + g(t)$

D.

Do Lema 4.2.1 decorre que: existe $\lambda_0 > 0$, (λ_0 independente de t), tal que: $R(\lambda_0, t) = (\lambda_0 - A(t))^{-1} : W \rightarrow D(A)$ é um operador linear limitado.

Então:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \int_{-\infty}^t T(t,s)(\lambda_0 - A(s))R(\lambda_0,s)g(s)ds = \\
 &= \lambda_0 \int_{-\infty}^t T(t,s)R(\lambda_0,s)g(s)ds + \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial}{\partial s} T(t,s)\right)R(\lambda_0,s)g(s)ds \\
 &= \lambda_0 \int_{-\infty}^t T(t,s)R(\lambda_0,s)g(s)ds + R(\lambda_0,t)g(t) - \\
 &\quad \int_{-\infty}^t T(t,s)R(\lambda_0,s)(\dot{g}(s) + \dot{B}(s)R(\lambda_0,s)g(s))ds
 \end{aligned}$$

Nos cálculos acima foram utilizados os Teoremas 3.1.2 e 3.1.4. Do Teorema 3.1.1 e do Lema 4.2.2, segue-se que :

$v(t) \in D(A)$ o que prova o item (a).

Derivando a última expressão obtemos:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(t) &= \lambda_0 \int_{-\infty}^t A(t)T(t,s)R(\lambda_0,s)g(s)ds - \int_{-\infty}^t \{A(t)T(t,s) \cdot \\
 &\quad \cdot R(\lambda_0,s)(\dot{g}(s) + \dot{B}(s)R(\lambda_0,s)g(s))\}ds + \lambda_0 R(\lambda_0,t)g(t) \\
 &= A(t)v(t) + g(t)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

pois $\lambda_0 R(\lambda_0,t)g(t) = A(t)R(\lambda_0,t)g(t) + g(t)$. A convergência das últimas integrais segue-se das hipóteses e do Lema 4.2.2; e, portanto, fica provado o item (c).

Da expressão (4.2) segue-se que a continuidade de $\dot{v}$ estará provada se provarmos que dada $f \in \beta(R)$ a função $t \rightarrow w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t A(t)T(t,s)R(\lambda_0,s)f(s)ds = \int_0^{\infty} \{A(t)T(t,t-\sigma) \cdot R(\lambda_0,t-\sigma)f(t-\sigma)\}d\sigma$ é contínua para $t \in R$.

Do Lema 4.2.2 decorre que essa integral converge absoluta e uniformemente em $t \in R$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon)$ suficientemente grande tal que

$$\left| \int_T^\infty A(t)T(t, t-\sigma)R(\lambda_0, t-\sigma)f(t-\sigma)d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.3)$$

Assim

$$\begin{aligned} w(t+h) - w(t) &= \int_0^T \{A(t+h)T(t+h, t+h-\sigma)R(\lambda_0, t+h-\sigma) \cdot \\ &\cdot f(t+h-\sigma)\}d\sigma - \int_0^T A(t)T(t, t-\sigma)R(\lambda_0, t-\sigma)f(t-\sigma)d\sigma + I = \\ &= I + \int_0^T \{A(t+h)T(t+h, t+h-\sigma)R(\lambda_0, t+h-\sigma)[f(t+h-\sigma)-f(t-\sigma)]\}d\sigma + \\ &+ \int_0^T \{[A(t+h)T(t+h, t+h-\sigma)R(\lambda_0, t+h-\sigma)-A(t)T(t, t-\sigma)R(\lambda_0, t-\sigma)] \cdot \\ &\cdot f(t-\sigma)\}d\sigma \text{ onde } |I| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ por } (4.3). \end{aligned}$$

Do Lema 4.2.2 e da hipótese sobre f decorre que existe $h_0 = h_0(\varepsilon)$ tal que a penúltima integral acima fica, em norma, menor que $\frac{\varepsilon}{4}$ para $|h| < h_0$.

Diminuindo possivelmente h_0 , segue-se do Teorema 3.1.2 que a última integral fica, em norma, menor que $\frac{\varepsilon}{4}$ se $|h| < h_0$.

Agrupando as estimativas acima obtemos que $|w(t+h)-w(t)| < \varepsilon$ se $|h| < h_0$, o que prova o item (b).

□

4.3 - SOLUÇÕES LIMITADAS DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Seja X um espaço de Banach de dimensão n . Vamos mostrar inicialmente que a equação diferencial em X ,

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

onde $t \in R \rightarrow A(t) \in L(X)$ é contínua, é equivalente a uma equação diferencial no R^n do tipo:

$$(h) \quad \dot{z} = C(t)z.$$

Seja $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ base de X e $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ base dual de Φ , isto é $\Psi \cdot \Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\phi_1, \dots, \phi_n) = I_{R^n}$.

$$\text{Seja } \Phi \cdot z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \phi_i z_i, \quad \Psi x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \psi_1 x \\ \vdots \\ \psi_n x \end{pmatrix}.$$

Para $\phi \in X$ e $\psi \in X'$ definimos $\phi \cdot \psi \in L(X)$ por $(\phi \cdot \psi)x \stackrel{\text{def}}{=} \phi \cdot (\psi x) \in X$.

Sendo Φ e Ψ como acima, então

$$\Phi \cdot \Psi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \phi_i \psi_i.$$

Desta forma, temos que, $\Phi \cdot \Psi = I_X$.

De fato; dado $x \in X$, existe $z \in R^n$ tal que $x = \Phi \cdot z$ ou, equivalentemente, $z = \Psi \cdot x$.

Portanto:

$$(\Phi \cdot \Psi)x = \Phi \cdot (\Psi(\Phi z)) = \Phi \cdot (\Psi \Phi)(z) = \Phi \cdot z = x$$

para $A \in L(X)$ definimos $A.\Phi = (A\phi_1, \dots, A\phi_n)$.

Fazendo uso das notações acima e usando a mudança de variável $x = \Phi.z$, (ou $z = \Psi.x$), a equação (H) $\dot{x} = A(t)x$ fica reduzida à equação (h) $\dot{z} = C(t)z$ onde $C(t)$ é uma matriz de ordem n definida por $C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi.A(t).\Phi$.

Observação

Pode-se formular resultado análogo para a equação $\dot{x} = A(t)x + f(t)$. A mesma é transformada na equação $\dot{z} = C(t)z + g(t)$ onde $z \in R^n$, $\Phi.g = f$ ou $g = \Psi.f$.

Consideremos agora os sistemas de equações diferenciais em x

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

$$(Adj.) \quad \dot{y} = -A^*(t)y$$

$$(N.H.) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

Lema 4.3.1

Seja X um espaço de Banach de dimensão finita e vamos supor que (H) admite uma dicotomia exponencial em R_+ e uma dicotomia exponencial em R_- . Então, dada $f \in \beta(R)$ a equação (N.H.) tem solução $x(t)$ limitada se e somente se
$$\int_R y(t).f(t)dt = 0 \quad \forall y \text{ solução limitada do } (Adj.).$$

D.

Fixada $f \in \beta(R)$ consideremos os sistemas de equações

diferenciais no R^n .

$$(h) \quad \dot{z} = C(t)z$$

$$(adj.) \quad \dot{w} = -C(t)w$$

$$(n.h.) \quad \dot{z} = C(t)z + g(t)$$

onde $g \stackrel{def}{=} \Psi f$ e $C(t) = \Psi A(t) \Phi$

Da parte introdutória segue-se que (N.H.) tem solução limitada se e somente se o mesmo vale para (n.h.).

Como (H) possui uma dicotomia exponencial em R_+ , fazendo $U(t) \stackrel{def}{=} T(t, 0)$, onde $T(t, s)$ é o operador de evolução associado a (H), segue-se de Krein-Daleckii [12] que existe projeção constante P em X , tal que:

$$|U(t)PU^{-1}(s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s \geq 0$$

$$|U(t)(I-P)U^{-1}(s)| \leq K e^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t \geq 0$$

Seja $Z(t)$ matriz fundamental de (h) tal que $Z(0) = I$ e $Q \stackrel{def}{=} \Psi P \Phi$, projeção no R^n .

Levando em conta que $U(t) = T(t, 0) = \Phi Z(t)\Psi$, $U^{-1}(t) = T(0, t) = \Phi Z^{-1}(t)\Psi$ temos que (h) satisfaz uma dicotomia exponencial em R_+ com projeção Q . Resultado análogo pode ser verificado em R_- .

Do Teorema 1.A decorre que (n.h) tem solução limitada em R se e somente se $\int_R w(t)g(t)dt = 0$ para toda solução $w(t)$ da equação (adj.).

Como $w(t)$ é solução limitada do (adj) se e somente se

$y(t) = w(t)\Psi$ é solução limitada do (Adj.), e como $w(t)g(t) = w(t).\Psi f(t) = y(t)f(t)$, temos que a última afirmação é equivalente $\int_R y(t).f(t)dt = 0$ para toda solução $y(t)$ limitada do (Adj.).

□

Seja W um espaço de Banach.

Lema 4.3.2

Assumimos que a equação (H) $\dot{x} = A(t)x$, $x \in W$ admite uma dicotomia exponencial em R . Então $x(t)$ solução "mild" de (H) é limitada em R se e somente se $x(t) = 0 \quad \forall t \in R$.

D.

$\Leftarrow$) Óbvio

$\Rightarrow$) Assumimos $x(t)$ solução limitada de (H).

Dado que (H) admite uma dicotomia exponencial em R , então pela Definição 3.1.2, existem $U(t) \in L(W)$ família de projeções, K, α constantes positivas tais que :

$$|T(t,s)U(s)| \leq K e^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t$$

$t, s \in R$

$$|T(t,s)(I-U(s))| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s$$

A solução $x(t)$ pode ser escrita na forma

$$x(t) = U(t)x(t) + (I-U(t))x(t).$$

Fixemos t_0 um real qualquer. Como $U(t)x(t) = U(t)T(t, t_0)x(t_0) = T(t, t_0)U(t_0)x(t_0)$ $t \geq t_0$.

Das hipóteses acima segue-se que $U(t)x(t)$ é limitada em R .

Da última expressão acima, e dada a arbitrariedade de $t_0 \in R$, obtemos que $U(t)x(t)$ é solução de (H) em R e portanto $(I-U(t))x(t)$ satisfaz a mesma condição.

Além disso, vale que:

$$\begin{aligned} |U(t_0)x(t_0)| &= |T(t_0, t)T(t, t_0)U(t_0)x(t_0)| = \\ &= |T(t_0, t)U(t)T(t, t_0)x(t_0)| = |T(t_0, t)U(t)U(t)x(t)| \\ &\leq K e^{-\alpha(t-t_0)} |U(t)x(t)| \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Assim: $|U(t)x(t)| \geq \frac{1}{K} e^{\alpha(t-t_0)} |U(t_0)x(t_0)|$ para $t \geq t_0$.

Da hipótese de dicotomia decorre que $(I-U(t))x(t) = T(t, t_0)(I-U(t_0))x(t_0)$ é limitada para $t \geq t_0$.

Portanto, $U(t_0)x(t_0)$ deve necessariamente ser zero.

Concluimos, portanto que, $U(t)x(t) = 0 \quad \forall \quad t \in R$.

Logo $x(t) = (I-U(t))x(t)$. Uma análise semelhante é feita para $t \leq t_0$ o que prova que $x(t) \equiv 0$ em R .

□

Observação

1) Este Lema é proposto como exercício em Henry [21].

2) A hipótese de dicotomia acima, para a equação (H)

implica numa dicotomia exponencial para a equação adjunta.

O objetivo a seguir é estabelecer um resultado que prepare a equação para o uso do Método Alternativo.

Seja $W = W_1 \oplus W_2$ um espaço de Banach reflexivo, W_1 sub-espaço de dimensão finita e $\pi : W \rightarrow W_1$ a projeção sobre W_1 na direção de W_2 .

Seja $A : D \subset W \rightarrow W$ gerador infinitesimal de um C_0 semi-grupo $T(t)$, $t \geq 0$, de modo que $W_1 \subset D$.

Seja $A(t) = A + B(t)$, onde $B(t)$ satisfaz as hipóteses H.B.1, H.B.2 e H.B.3.

Definindo $A_1(t) = A(t)\pi$ e $A_2(t) = A(t)(I-\pi)$, assumimos a hipótese

$$(H.1) \quad A(t)\pi x = \pi A(t)x, \quad \forall x \in D$$

Portanto, decorre que $A_1(t) : W_1 \rightarrow W_1$ e $A_2(t) : W_2 \cap D \rightarrow W_2$, e além disso de [28] obtemos que $T(t,s)\pi = \pi T(t,s)$.

Consideremos as hipóteses :

(H.2) A equação $\dot{u} = A_1(t)u$ admite uma dicotomia exponencial em R_+ (respectivamente R_-) com projeção $P(s)$ (respectivamente $Q(s)$).

(H.3) A equação $\dot{v} = A_2(t)v$ admite uma dicotomia exponencial trivial em R .

Lema 4.3.3

Assumimos as hipóteses $H.1$, $H.2$ e $H.3$ acima. Seja $f \in \beta(R)$ tal que $(I-\pi)f$ é de classe C^1 com derivada limitada. Então, a equação (N.H.) $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ tem solução $x(t) \in C^1$ e limitada em R se e somente se $\int_R y(s).f(s)ds = 0$ para toda y solução limitada em R do (Adj.).

D.

Para $u = \pi x$ e $v = (I-\pi)x$, a equação (N.H.) tem solução limitada em R se e somente se o sistema abaixo tem solução (u,v) limitada em R satisfazendo:

$$(N.H.1) \quad \dot{u} = A(t)u + \pi f(t)$$

$$(N.H.2) \quad \dot{v} = A_2(t)v + (I-\pi)f(t)$$

Dos Lemas 4.2.4, 4.3.1 e 4.3.2, decorre que, esse sistema tem solução limitada em R , se e somente se

$$\int_R y_1(t). \pi f(t) dt = 0 \quad \text{para toda solução limitada em } R \quad \text{de}$$

$$\dot{y}_1 = -A_1^*(t)y_1.$$

Por outro lado, temos que se y é solução forte em R de $\dot{y} = -A^*(t)y$, definindo $y_1(t) = y(t)|_{W_1}$ e $y_2(t) = y(t)|_{W_2}$ prova-se que $y_i(t)$ são soluções de $\dot{y}_i = -A_i^*(t)y_i$ (Adj. i) $i=1,2$.

Do Lema 4.3.2 decorre que a única solução limitada em R do (Adj.2) é a nula. Se $y(t)$ é solução forte do (Adj), temos que $y(t)$ é solução limitada em R se e somente se $y_1(t)$ é limitada em R pois $y_2(t) \equiv 0$ em R .

Reunindo as afirmações acima concluímos que a equação (N.H.) tem solução limitada em R , se e somente se

$$\begin{aligned} \int_R y(t) \cdot f(t) dt &= \int_R y(t) \pi f(t) dt + \int_R y(t) (I - \pi) f(t) dt \\ &= \int_R y_1(t) \pi f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

□

Da demonstração acima e do Lema 4.3.2 decorre o

Corolário 4.3.4

Dentro das hipóteses do Lema 4.3.3, a equação (N.H) tem solução limitada em R se e somente se $\int_R w(t) \cdot \pi f(t) dt = 0$ para toda solução $w(t)$ limitada em R do $(adj) \dot{w} = -wC(t)$ onde $C(t)$ é obtida como no Lema 4.3.1.

4.4 - PREPARAÇÃO PARA O USO DO MÉTODO ALTERNATIVO

Seja V um espaço de Banach e $W = R^n \times V$ munido da norma habitual do espaço produto.

Neste parágrafo $\beta(R, W)$ representará o conjunto das funções $\phi: R \rightarrow W$ contínuas e limitadas.

Consideremos agora os sistemas de equações diferenciais

$$(H) \quad \begin{cases} (a) \quad \dot{z} = C(t)z \\ (b) \quad \dot{v} = A(t)v \end{cases}$$

(N.H.)

$$\begin{cases} (a) \quad \dot{z} = C(t)z + F(t) \\ (b) \quad \dot{v} = A(t)v + G(t) \end{cases}$$

$$(Adj.) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \dot{y} = -yC(t) \\ (b) \quad \dot{w} = -A^*(t)w \end{array} \right. \quad \text{onde } z \in R^n, \quad v \in V.$$

Vamos assumir que o sistema (H.a) admite uma dicotomia exponencial em R_+ e R_- , e que o sistema (H.b.) admite uma dicotomia exponencial trivial em R .

Sejam $L_1: \beta(R, R^n) \rightarrow E$ e $M_1: \beta(R) \rightarrow \beta(R)$ projeções definidas como no Lema 1.3.1, onde $E = \{z(t) \in \beta(R, R^n), z(t) \text{ solução de (H.a)}\}$.

Para $f = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \in \beta(R, W)$ definimos L e M projeções em $\beta(R, W)$ por:

$$(Lf)(.) = \begin{pmatrix} (L_1 F)(.) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (Mf)(.) = \begin{pmatrix} (M_1 F)(.) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seja $K: \beta(R, W) \rightarrow \beta(R, W)$ definido por

$$(Kf)(.) = \begin{pmatrix} (K_1 F)(.) \\ \int_{-\infty}^{\infty} T(., s)G(s)ds \end{pmatrix} \quad \text{onde } (K_1 F)(t) \text{ é a única so}$$

lução limitada em R de (N.H.a.) tal que $L_1 K_1 F = 0$ assegurada pelo Lema 1.3.1.

O operador K está bem definido e é linear limitado pelos Lemas 1.3.1 e 4.2.3.

Seja $Y = \{f = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \in \beta(R, W) : \dot{G} \text{ é contínua e limitada}\}$.

Desta forma podemos rephrasear o Lema 4.3.3 do se-

guinte modo

Corolário 4.4.1

(a) Dada $f \in Y$ o sistema (N.H.) tem solução C^1 limitada se e somente se $Mf = 0$, ou equivalentemente $M_1 F = 0$.

(b) Se $Mf = 0$, então $(Kf)(t)$ é a única solução forte limitada de (N.H.) satisfazendo $L(Kf) = 0$.

(c) Se $f(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$ então $(Kf)(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$.

D.

A prova segue diretamente dos Lemas 1.3.1, 4.2.4 e

4.3.3.

□

CAPÍTULO 5

ALGUMAS PROPRIEDADES DE CONTINUIDADE E DIFERENCIABILIDADE.

5.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo, é estudar propriedades de regularidade com relação ao tempo e ao parâmetro de soluções limitadas de uma certa equação integral.

Seja W um espaço de Banach e $\Lambda_1 = (0, \varepsilon_0]$ um intervalo real com $\varepsilon_0 > 0$.

No transcorrer do capítulo faremos referências a classe $F = \{\phi: \Lambda_1 \times R \rightarrow W\}$, tal que, $\phi(\varepsilon, t)$ satisfaz:

- (a) $t \rightarrow \phi(\varepsilon, t) : R \rightarrow W$ é contínua e limitada.
- (b) $\varepsilon \rightarrow \phi(\varepsilon, t) : \Lambda_1 \rightarrow W$ é continua uniformemente com relação a $t \in R$.
- (c) $\forall \varepsilon \in \Lambda_1$ o conjunto $\{\phi(\varepsilon, t), t \in R\}$ é relativamente compacto.

Observação:

- 1) Se $\beta(R) = \{\phi: R \rightarrow W \text{ contínua e limitada}\}$ as condições (a) e (b) equivalem dizer que a aplicação $\varepsilon \rightarrow \phi(\varepsilon, .) : \Lambda_1 \rightarrow \beta(R)$ é contínua.
- 2) A observação anterior permite concluir que a aplicação $(\varepsilon, t) \rightarrow \phi(\varepsilon, t) : \Lambda_1 \times R \rightarrow W$ é contínua e limitada.

5.2 - DESIGUALDADE INTEGRAL

Lema 5.2.1

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ funções reais contínuas definidas em R , não negativas com $a(t)$ limitada e $\int_R b(t)dt < \infty$. Seja $v(t)$ uma solução contínua e limitada da desigualdade integral $v(t) \leq a(t) + \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} b(s)v(s)ds$.

Então, $v(t) \leq a(t) + e^{\int_{-\infty}^t b(s)ds} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\int_{-\infty}^s b(\sigma)d\sigma} a(s)ds$.

D.

Seja $w(t) = e^{\alpha t} v(t)$. Logo, w satisfaz a desigualdade $w(t) \leq a(t)e^{\alpha t} + \int_{-\infty}^t b(s)w(s)ds$.

Definindo $u(t) = \int_{-\infty}^t b(s)w(s)ds$, decorre que:

$$\dot{u}(t) = b(t)w(t) \leq b(t)(a(t)e^{\alpha t} + u(t))$$

e, portanto: $\dot{u}(t) - b(t)u(t) \leq b(t)a(t)e^{\alpha t}$ o que implica em:

$$e^{-\int_{-\infty}^t b(s)ds} (\dot{u}(t) - b(t)u(t)) \leq e^{-\int_{-\infty}^t b(s)ds} e^{\alpha t} a(t)b(t)$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\int_{-\infty}^t b(s)ds} u(t) \right) \leq e^{-\int_{-\infty}^t b(s)ds} e^{\alpha t} b(t)a(t)$$

o que implica em:

$$e^{-\int_{-\infty}^t b(s)ds} u(t) \leq \int_{-\infty}^t e^{-\int_{-\infty}^s b(\sigma)d\sigma} e^{\alpha s} b(s) a(s) ds.$$

Portanto:

$$u(t) \leq e^{\int_{-\infty}^t b(s)ds} \int_{-\infty}^t e^{-\int_{-\infty}^s b(\sigma)d\sigma} e^{\alpha s} b(s) a(s) ds$$

Logo,

$$w(t) - a(t)e^{\alpha t} \leq u(t) \leq e^{\int_{-\infty}^t b(s)ds} \int_{-\infty}^t e^{-\int_{-\infty}^s b(\sigma)d\sigma} e^{\alpha s} b(s) a(s) ds.$$

$$e^{\alpha s} b(s) a(s) ds.$$

Assim,

$$w(t) \leq a(t)e^{\alpha t} + u(t) \leq a(t)e^{\alpha t} + e^{\int_{-\infty}^t b(s)ds} \int_{-\infty}^t e^{-\int_{-\infty}^s b(\sigma)d\sigma} e^{\alpha s} b(s) a(s) ds$$

Decorre que:

$$v(t) \leq a(t) + e^{\int_{-\infty}^t b(s)ds} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{-\int_{-\infty}^s b(\sigma)d\sigma} e^{\alpha s} b(s) a(s) ds$$

□

Observação:

Dentro das hipóteses do lema acima, temos que;

$a(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$ e $b(t)$ é limitada, então $v(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$ e que

$$|v|_{\infty} \leq |a|_{\infty} (1 + e^{\int_R b(t) dt} \int_R b(t) dt).$$

5.3 - DIFERENCIABILIDADE COM RELAÇÃO A VARIÁVEL t

Teorema 5.3.1

Seja W um espaço de Banach, $A : D \rightarrow W$ gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t) \in L(W)$ $t \geq 0$ e consideremos a equação de evolução não linear em W .

$$\dot{u} = Au + f(t, u) \quad (5.1)$$

com $f: R \times W \rightarrow W$ de classe C^1 .

Assumimos as hipóteses H.T.1 e H.T.2, onde $T(t, s)$ $t \geq s$ é o operador de evolução associado a equação:

$$\dot{u} = (A + B(t))u, \quad B(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(t, u(t)) \quad (5.2)$$

onde $u(t)$ é uma solução uniformemente contínua da equação integral

$$u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s, u(s)) ds \quad (5.3)$$

(H.1) $O = \{u(t), t \in R\} \in W$ é relativamente compacto. Para $K =$ Envoltória convexa fechada de O assumimos ainda que:

(H.2) i) $f: R \times K \rightarrow W$ é limitada

ii) $(t, u) \rightarrow f_t(t, u) : R \times K \rightarrow W$

$(t, u) \rightarrow f_u(t, u) : R \times K \rightarrow L(W)$

são uniformemente contínuas e limitadas.

Então decorre que:

a) $u \in C^1$ e $\dot{u}(t) = \int_{-\infty}^t T(t, s) f_t(s, u(s)) ds$

b) $u(t) \in D(A), \quad \forall t \in R$

c) $u(\cdot)$ satisfaz a equação (5.1)

D.

Considero a equação diferencial

$$\dot{v} = Av + f_u(t, u(t))v + f_t(t, u(t)) \quad (5.4)$$

e seja $v(t)$ definida por :

$$v(t) = \int_{-\infty}^t T(t,s) f_t(s, u(s)) ds \quad (5.5)$$

Sabemos do Teorema 3.1.1 que para $t \geq s$, $t, s \in R$ vale que:

$$T(t,s) = T(t-s) + \int_s^t T(t-\sigma) B(\sigma) T(\sigma,s) d\sigma \quad (5.6)$$

Fazendo uso de (5.6) e mudando a ordem das integrais repetidas, obtemos que a expressão de $v(t)$ dada em (5.5) adquire a forma:

$$v(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) (f_t(s, u(s)) + f_u(s, u(s)) v(s)) ds \quad (5.7)$$

Além disso, fazendo uso das hipóteses H.T.2 e H.2, pode-se provar que $v(t)$ dada por (5.5) é contínua. (Ver Lema 4.2.3).

O objetivo agora é provar que $\dot{u}(t) = v(t) \forall t \in R$ e portanto o item a) do Teorema está provado pela afirmação acima.

Consideremos a função resto

$$\begin{aligned} R_h(t) &\stackrel{\text{def}}{=} u(t+h) - u(t) - h v(t) = \int_{-\infty}^{t+h} T(t+h-s) f(s, u(s)) ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s, u(s)) ds - h \int_{-\infty}^t T(t,s) f_t(s, u(s)) ds \\ &\stackrel{(5.7)}{=} \int_{-\infty}^t T(t-s) [f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s+h)) - h f_t(s, u(s))] ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t T(t-s) [f(s, u(s+h)) - f(s, u(s)) - h f_u(s, u(s)) v(s)] ds \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Análise de I_1

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^t T(t-s) [f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s+h)) - hf_t(s, u(s))] ds \\
 &= \int_{-\infty}^t T(t-s) \left[\int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(\theta(s+h) + (1-\theta)s, u(s+h)) d\theta - hf_t(s, u(s)) \right] ds \\
 &= \int_{-\infty}^t T(t-s) \left[h \int_0^1 (f_t(s+\theta h, u(s+h)) - f_t(s, u(s))) d\theta \right] ds \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t T(t-s) f_h^1(s) ds
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Da hipótese H.2 decorre diretamente que $f_h^1(t) = o(h)$ quando $h \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in R$.

Análise de I_2

$$I_2 = \int_{-\infty}^t T(t-s) [f(s, u(s+h)) - f(s, u(s)) - hf_u(s, u(s))v(s)] ds$$

Temos

$$\begin{aligned}
 f(s, u(s+h)) - f(s, u(s)) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(s, \theta u(s+h) + (1-\theta)u(s)) d\theta \\
 &= \int_0^1 f_u(s, \theta u(s+h) + (1-\theta)u(s)) (u(s+h) - u(s)) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\text{Seja } C(s, h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f_u(s, \theta u(s+h) + (1-\theta)u(s)) d\theta$$

e consideremos a equação diferencial

$$\dot{w} = (A + C(t, h))w \tag{5.9}$$

Pode-se provar fazendo uso da desigualdade de Gronwall e do fato que $C(t, h)$ está próximo de $B(t)$, uniforme - mente para h próximo de zero, por H.T.2 e H.2; que o o perador de evolução $T_h(t, s)$ associado a (5.9) satisfaz

$$|T_h(t, s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \quad K_1 > 0, \alpha_1 > 0, t \geq s \quad (5.10)$$

Logo, a parcela I_2 pode ser escrita na forma

$$I_2 = \int_{-\infty}^t T(t-s) C(s, h) (u(s+h) - u(s)) ds - h \int_{-\infty}^t T(t-s) \cdot$$

$$f_u(s, u(s)) v(s) ds = \int_{-\infty}^t T(t-s) C(s, h) R_h(s) ds +$$

$$h \int_{-\infty}^t T(t-s) (C(s, h) - f_u(s, u(s))) v(s) ds =$$

$$\int_{-\infty}^t T(t-s) C(s, h) R_h(s) ds + h \int_{-\infty}^t \{T(t-s) [\int_0^1 (f_u(s, \theta u(s+h) +$$

$$+ (1-\theta)u(s)) - f_u(s, u(s))\} v(s) d\theta\} ds =$$

$$\int_{-\infty}^t T(t-s) C(s, h) R_h(s) ds + \int_{-\infty}^t T(t-s) f_h^2(s) ds \quad (5.11)$$

$$\text{com } f_h^2(s) \stackrel{\text{def}}{=} h \int_0^1 (f_u(s, \theta u(s+h) + (1-\theta)u(s)) - f_u(s, u(s))) \cdot$$

$$v(s) d\theta.$$

Dado que, por (5.5) $v(t)$ é limitada em R , das hipóteses H.1 e H.2 decorre que $f_h^2(t) = o(h)$, quando $h \rightarrow 0$, uniformemente para $t \in R$.

Portanto, temos que, utilizando (5.8) e (5.11) na expressão de $R_h(t)$ obtemos:

$$\begin{aligned} R_h(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-s) (f_h^1(s) + f_h^2(s)) ds + \int_{-\infty}^t T(t-s) C(s, h) R_h(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t T_h(t, s) f_h(s) ds, \end{aligned}$$

onde $f_h(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_h^1(t) + f_h^2(t)$ com $f_h(t) = o(h)$ quando $h \rightarrow 0$, uniformemente para $t \in R$.

Desta forma, de (5.10), decorre diretamente que $R_h(t) = o(h)$ quando $h \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in R$, o que completa a prova do item a).

Fazendo no Lema 4.2.4 $B(t) = 0$, e tomando $g(t) = f(t, u(t))$, a conclusão dos itens b) e c) decorre diretamente do Lema 4.2.4.

□

5.4 - CONTINUIDADE COM RELAÇÃO A PARÂMETRO

Seja $A(\varepsilon) : D \rightarrow W$ um operador linear fechado com domínio $D = D(A(\varepsilon))$, (independente de $\varepsilon \in \Lambda = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$), denso em W .

Vamos assumir as hipóteses:

(H.A.1) $A(\varepsilon)$ é gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de operadores lineares limitados $T(\varepsilon, t)$ $t \geq 0$, $\varepsilon \in \Lambda$.

(H.T.3) $|T(\varepsilon, t)| \leq K e^{-\alpha t}$ $t \geq 0$, onde as constantes K e α

independem de ϵ e Λ .

Definindo $A(\epsilon, t) = A(\epsilon) + B(t)$, consideremos em W a equação diferencial $\dot{w} = A(\epsilon, t)w$, e seja, $T(\epsilon, t, s)$ o operador de evolução associado. Assumimos ainda que

(H.T.4) $|T(\epsilon, t, s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s, \quad K \text{ e } \alpha \text{ constantes}$
positivas independentes de $\epsilon \in \Lambda$.

Lema 5.4.1

Supomos satisfeitas as hipóteses H.A.1, H.T.3, H.T.4, H.B.1, H.B.2 e $\int_R |B(t)| dt < \infty$. Seja $\psi : \Lambda \times R \rightarrow W$ definida por $\psi(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s)g(\epsilon, s)ds$, onde $g \in F$.

Vamos supor que para cada $\epsilon \in \Lambda$, $\{B(t)\psi(\epsilon, t) \mid t \in R\}$ é relativamente compacto. Então, $\epsilon \rightarrow \psi(\epsilon, t)$ é contínua uniformemente para $t \in R$.

D.

Da relação que existe entre $T(t)$ e $T(t, s)$, (Teorema 3.1.1), decorre que:

$$\psi(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s)g(\epsilon, s)ds + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s)B(s)\psi(\epsilon, s)ds \quad (5.12)$$

Inicialmente vamos provar que a função $\epsilon \rightarrow \phi(\epsilon, t)$ def $\int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s)g(\epsilon, s)ds$ é contínua, uniformemente em $t \in R$.

De fato; temos que para $h \sim 0$

$$\begin{aligned}\phi(\varepsilon+h, t) - \phi(\varepsilon, t) &= \int_{-\infty}^t T(\varepsilon+h, t-s)g(\varepsilon+h, s)ds \\ &- \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t-s)g(\varepsilon, s)ds = \int_0^{\infty} T(\varepsilon+h, \sigma)g(\varepsilon+h, t-\sigma)d\sigma \\ &- \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma)g(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma = \int_0^T T(\varepsilon+h, \sigma)g(\varepsilon+h, t-\sigma)d\sigma \\ &- \int_0^T T(\varepsilon, \sigma)g(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma + I_1 - I_2, \text{ onde}\end{aligned}$$

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_T^{\infty} T(\varepsilon+h, \sigma)g(\varepsilon+h, t-\sigma)d\sigma \quad \text{e} \dots$$

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_T^{\infty} T(\varepsilon, \sigma)g(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma$$

Da hipótese H.T.3, temos que: Dado $\eta > 0$, existe $T = T(\eta) > 0$ suficientemente grande, tal que:

$$\left| \int_T^{\infty} T(\varepsilon, \sigma)g(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma \right| \leq \frac{K}{\alpha} e^{-\alpha T} |g| < \frac{\eta}{4}$$

Portanto, $|I_j| < \frac{\eta}{4}$ para $j = 1, 2$.

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}&\int_0^T T(\varepsilon+h, \sigma)g(\varepsilon+h, t-\sigma)d\sigma - \int_0^T T(\varepsilon, \sigma)g(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma \\ &= \int_0^T T(\varepsilon+h, \sigma)(g(\varepsilon+h, t-\sigma) - g(\varepsilon, t-\sigma))d\sigma + \\ &\int_0^T (T(\varepsilon+h, \sigma) - T(\varepsilon, \sigma))g(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma = I_3 + I_4\end{aligned}$$

Dado que $g \in F$, do Teorema 3.1.5 decorre que, existe $h_0 = h_0(\eta)$, tal que $|I_4| < \frac{\eta}{4}$ para $|h| < h_0$.

Como $T(\varepsilon, t)$ é uniformemente limitado, $g \in F$, temos que, diminuindo h_0 , se necessário, $|I_3| < \frac{\eta}{4}$ se $|h| < h_0$.

Agrupando as estimativas obtidas acima para I_j , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, temos que $|\phi(\varepsilon+h, t) - \phi(\varepsilon, t)| < \eta$ para $|h| < h_0$ e $t \in R$, o que prova que $\varepsilon \rightarrow \phi(\varepsilon, t)$ é contínua uniformemente para $t \in R$.

Voltando à expressão (5.12) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon+h, t) - \psi(\varepsilon, t) &= \phi(\varepsilon+h, t) - \phi(\varepsilon, t) + \int_{-\infty}^t T(\varepsilon+h, t-s) \cdot B(s) \psi(\varepsilon+h, s) ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t-s) B(s) \psi(\varepsilon, s) ds \\ &= \phi(\varepsilon+h, t) - \phi(\varepsilon, t) + \int_{-\infty}^t T(\varepsilon+h, t-s) B(s) (\psi(\varepsilon+h, s) - \\ &\quad \psi(\varepsilon, s)) ds + \int_{-\infty}^t (T(\varepsilon+h, t-s) - T(\varepsilon, t-s)) B(s) \psi(\varepsilon, s) ds \quad (5.13) \end{aligned}$$

Com relação à última integral acima, vamos definir -
que :

$$\begin{aligned} I_5 &\stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^t (T(\varepsilon+h, t-s) - T(\varepsilon, t-s)) B(s) \psi(\varepsilon, s) ds = \\ &= \int_0^\infty (T(\varepsilon+h, \sigma) - T(\varepsilon, \sigma)) B(t-\sigma) \psi(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Agora, dado $\eta > 0$, existe $T = T(\eta) > 0$ suficientemente grande, tal que

$$\left| \int_T^\infty T(\varepsilon, \sigma) B(t-\sigma) \psi(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \right| < \frac{\eta}{6}. \quad (5.14)$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^T (T(\varepsilon+h, \sigma) - T(\varepsilon, \sigma)) B(t-\sigma) \psi(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma + \\ &+ \int_T^\infty (T(\varepsilon+h, \sigma) - T(\varepsilon, \sigma)) B(t-\sigma) \psi(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Das hipóteses sobre ψ , B , e do Teorema 3.1.5, decorre que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que a primeira parcela de I_5 , fica em norma, menor que $\frac{\eta}{3}$ para $|h| < h_0$ (5.15)

De (5.14) decorre que a segunda parcela fica, em norma, menor que $\eta/3$.

Como $\varepsilon \rightarrow \phi(\varepsilon, t)$ é contínua, uniformemente para $t \in R$, temos que $|\phi(\varepsilon+h, t) - \phi(\varepsilon, t)| < \frac{\eta}{3}$ para $|h| < h_0 \forall t \in R$ (5.16)

Segue das estimativas acima, fazendo

$$v_h(t) \stackrel{def}{=} |\psi(\varepsilon+h, t) - \psi(\varepsilon, t)| \text{ em (5.13) que}$$

$$v_h(t) \leq \eta + \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} |B(s)| v_h(s) ds.$$

O Lema 5.2.1 aplicado a essa desigualdade integral assegura que, $|v_h(t)| \leq (cte) \cdot \eta$, $|h| < h_0$, $\forall t \in R$.

Logo, $v_h(t) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ uniformemente em $t \in R$.

□

Observação:

1) Nas passagens 5.15 e 5.16 foi usado um mesmo número real h_0 . Fica porém subentendido, que em cada etapa, este real pode ser diminuído, se necessário, de modo a usarmos um h_0 comum.

Este procedimento será usado frequentemente nos Teoremas 5.5.2 e 5.5.5, posteriormente.

2) No caso de $B(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$, dado que $\psi(\epsilon, t)$ é uniformemente limitada para $t \in R$, e $\epsilon \in \Lambda$, a hipótese que $\{B(t)\psi(\epsilon, t), t \in R\}$ é relativamente compacto esta automaticamente verificada.

5.5 - DIFERENCIABILIDADE COM RELAÇÃO A PARÂMETRO

Vamos assumir agora a hipótese

(H.A.2) o operador $A(\epsilon)$, $\epsilon \in \Lambda$, é fortemente continuamente diferenciável em D , isto é, a função $u(\epsilon) = A(\epsilon)x$ para $x \in D$ é continuamente diferenciável em Λ , com $u'(\epsilon) = A'(\epsilon)x$.

Lema 5.5.1

Assumimos satisfeitas as hipóteses H.A.1, H.A.2, e H.T.3. Além disso, vamos supor que a função $g(\epsilon, t)$ é tal que, $g, g_t, g_\epsilon, g_{\epsilon t}$ pertencem à classe F , onde $g_t = \frac{\partial g}{\partial t}$. Então, para cada $t \in R$ existe a derivada da aplicação $\epsilon \rightarrow \psi(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s) g(\epsilon, s) ds : \Lambda \rightarrow W$, e $t \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}(\epsilon, t)$ é limitada.

0.

Da hipótese H.A.1, decorre que existe $\lambda_0 > 0$, (independente de ε), tal que $R(\varepsilon, \lambda_0) = (\lambda_0 - A(\varepsilon))^{-1}: W \rightarrow D$ é um operador linear limitado.

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon, t) &= \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t-s) (\lambda_0 - A(\varepsilon)) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, s) ds = \\ &= - \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma) A(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma + \lambda_0 \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) \\ &\cdot g(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma = - \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{d\sigma} T(\varepsilon, \sigma) \right) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \\ &+ \lambda_0 \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1(\varepsilon, t) + \lambda_0 \psi_2(\varepsilon, t) \end{aligned}$$

Vamos analisar cada uma das parcelas $\psi_j(\varepsilon, t)$, $j=1,2$.

$$\begin{aligned} \psi_1(\varepsilon, t) &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{d\sigma} (T(\varepsilon, \sigma)) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma = \\ &= - T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t-\sigma) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \{ T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) \cdot \\ &\cdot g_t(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \} \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos

$$\psi_1(\varepsilon, t) = R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t) - \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) g_t(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma$$

As hipóteses sobre g , g_ε e H.A.2 conjuntamente com

o Teorema 3.1.4, asseguram que a aplicação $\varepsilon \rightarrow R(\varepsilon, \lambda_0)g(\varepsilon, t)$ é derivável com derivada limitada uniformemente em $t \in R$ dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} R(\varepsilon, \lambda_0)g(\varepsilon, t) &= R(\varepsilon, \lambda_0) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0)g(\varepsilon, t) + \\ &+ R(\varepsilon, \lambda_0)g_{\varepsilon}(\varepsilon, t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Agora, do Teorema 3.1.4 e do Teorema 3.1.5, segue que $\varepsilon \rightarrow \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma)R(\varepsilon, \lambda_0)g_t(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma$ é derivável com derivada dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma)R(\varepsilon, \lambda_0)g_t(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma &= \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} T(\varepsilon, \sigma) \right) \cdot \right. \\ &\cdot R(\varepsilon, \lambda_0)g_t(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma \} + \int_0^{\infty} T(\varepsilon, \sigma) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (R(\varepsilon, \lambda_0)g_t(\varepsilon, t-\sigma))d\sigma = \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\sigma} T(\varepsilon, \sigma-\xi)A'(\varepsilon)T(\varepsilon, \xi)d\xi R(\varepsilon, \lambda_0)g_t(\varepsilon, t-\sigma)d\sigma + \\ &\int_0^{\infty} \{ T(\varepsilon, \sigma)[R(\varepsilon, \lambda_0)A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0)g_t(\varepsilon, t-\sigma) + \\ &+ R(\varepsilon, \lambda_0)g_{\varepsilon t}(\varepsilon, t-\sigma)] \} d\sigma \end{aligned} \quad (5.18)$$

Estimamos as integrais acima com o auxílio das hipóteses g_t e $g_{\varepsilon t}$, e do Teorema 3.1.4 obtendo:

$$\begin{aligned} \triangle & \left| \int_0^\infty \left[\int_0^\sigma T(\epsilon, \sigma-\xi) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0) T(\epsilon, \xi) d\xi \right] g_t(\epsilon, t-\sigma) d\sigma \right| \\ & \leq \int_0^\infty \int_0^\sigma K e^{-\alpha(\sigma-\xi)} |A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0)| K e^{-\alpha\xi} |g_t(\epsilon, t-\sigma)| d\xi d\sigma \\ & \leq \frac{K^2}{\alpha^2} |A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0)|_{L(W)} |g_t| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle & \left| \int_0^\infty T(\epsilon, \sigma) R(\epsilon, \lambda_0) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0) g_t(\epsilon, t-\sigma) d\sigma \right| \\ & \leq K \int_0^\infty e^{-\alpha\sigma} |R(\epsilon, \lambda_0) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0)| |g_t(\epsilon, t-\sigma)| d\sigma \\ & \leq \frac{K}{\alpha} |R(\epsilon, \lambda_0) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0)|_{L(W)} |g_t| \end{aligned}$$

De forma análoga estimamos a integral imprópria envolvendo a função $g_{\epsilon t}$, e se completa a análise de $\psi_1(\epsilon, t)$.

Agora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \psi_2(\epsilon, t) &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} T(\epsilon, \sigma) \right) R(\epsilon, \lambda_0) g(\epsilon, t-\sigma) d\sigma \\ &+ \int_0^\infty T(\epsilon, \sigma) \frac{\partial}{\partial \epsilon} (R(\epsilon, \lambda_0) g(\epsilon, t-\sigma)) d\sigma = \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\sigma T(\epsilon, \sigma-\xi) A'(\epsilon) T(\epsilon, \xi) d\xi \right] R(\epsilon, \lambda_0) g(\epsilon, t-\sigma) d\sigma \\ &+ \int_0^\infty \{ T(\epsilon, \sigma) [R(\epsilon, \lambda_0) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0) g(\epsilon, t-\sigma) + R(\epsilon, \lambda_0) \cdot \\ &\cdot g_\epsilon(\epsilon, t-\sigma)] \} d\sigma \end{aligned} \quad (5.19)$$

A estimativa das integrais acima se faz de modo análogo ao anterior.

Agrupando os resultados obtidos em (5.17), (5.18) e (5.19), obtemos que $\forall t \in R$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi_1(\varepsilon, t) + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi_2(\varepsilon, t) = \\ &R(\varepsilon, \lambda_0) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t) + R(\varepsilon, \lambda_0) g_\varepsilon(\varepsilon, t) - \\ &\int_0^\infty \left(\int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma - \xi) A'(\varepsilon) T(\varepsilon, \xi) d\xi \right) R(\varepsilon, \lambda_0) g_t(\varepsilon, t - \sigma) d\sigma \\ &- \int_0^\infty \{ T(\varepsilon, \sigma) [R(\varepsilon, \lambda_0) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) g_t(\varepsilon, t - \sigma) + R(\varepsilon, \lambda_0) \cdot \\ &\cdot g_{\varepsilon t}(\varepsilon, t - \sigma)] \} d\sigma + \lambda_0 \int_0^\infty \left\{ \left(\int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma - \xi) A'(\varepsilon) T(\varepsilon, \xi) d\xi \right) \cdot \right. \\ &\cdot R(\varepsilon, \lambda_0) g(\varepsilon, t - \sigma) \} d\sigma + \lambda_0 \int_0^\infty \{ T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) [A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) \cdot \\ &\cdot g(\varepsilon, t - \sigma) + g_\varepsilon(\varepsilon, t - \sigma)] \} d\sigma \stackrel{def}{=} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + \lambda_0 I_5 + \\ &+ \lambda_0 I_6. \end{aligned} \tag{5.20}$$

A introdução de I_j , $j = 1, 2, \dots, 6$, se fez para futura referência.

A derivada dada pela expressão acima é limitada em $t \in R$, para cada $\varepsilon \in \Lambda$ fixado.

□

Observação:

Na verdade, no cálculo acima poderíamos ter tomado $\lambda_0 = 0$.

Teorema 5.5.2

Assumimos as hipóteses do Lema 5.5.1. Então, para cada $\varepsilon \in \Lambda = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ a aplicação $\varepsilon \rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} T(\varepsilon, \cdot - s)g(\varepsilon, s)ds$: $\Lambda \rightarrow \beta(R)$ é C^1 .

D.

No Lema 5.5.1 foi encontrada a derivada pontual da função $\psi(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t-s)g(\varepsilon, s)ds$ para cada $t \in R$.

Observando que

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\varepsilon+h, t) - \psi(\varepsilon, t)}{h} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) &= \\ \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \psi(\theta(\varepsilon+h) + (1-\theta)\varepsilon, t) d\theta - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) &= \\ = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\theta(\varepsilon+h) + (1-\theta)\varepsilon, t) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) \right) d\theta, \end{aligned}$$

o nosso problema se resume em provar que a derivada pontual

$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t)$ é contínua em ε , uniformemente para $t \in R$.

Concentrar-nos-emos agora na análise de cada um dos termos da expressão (5.20) que compoem a derivada $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + \lambda_0 I_5 + \lambda_0 I_6$.

Observemos que $R(\varepsilon+h, \lambda_0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon+h, t) - R(\varepsilon, \lambda_0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon, t) = R(\varepsilon+h, \lambda_0) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon+h, t) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon, t) \right) + (R(\varepsilon+h, \lambda_0) - R(\varepsilon, \lambda_0)) \cdot g_\varepsilon(\varepsilon, t)$.

Portanto a continuidade em ε , uniforme com relação

a t , do termo $I_2 = R(\varepsilon, \lambda_0) g_\varepsilon(\varepsilon, t)$ decorre da hipótese sobre g_ε e do fato que $R(\varepsilon, \lambda_0)$ é uniformemente limitado, e fortemente contínuo.

A continuidade uniforme do termo I_1 vai estar contida na análise posterior.

Para completarmos a análise é suficiente analisar a continuidade em ε uniforme com relação a t das expressões:

$$a) \quad \int_0^\infty T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) \alpha(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma$$

$$b) \quad \int_0^\infty T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) \beta(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma$$

$$c) \quad \int_0^\infty \left[\int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma-\xi) A'(\varepsilon) T(\varepsilon, \xi) d\xi \right] R(\varepsilon, \lambda_0) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma$$

onde α , β e γ pertencem a classe F .

Análise de a)

Sabemos que, dado $\eta > 0$ suficientemente pequeno, existe $T = T(\eta)$ suficientemente grande, tal que

$$\left| \int_T^\infty T(\varepsilon, \sigma) R(\varepsilon, \lambda_0) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) \alpha(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \right| < \frac{\eta}{6} \quad \text{uniformemente}$$

para $t \in R$, e $\varepsilon \in \Lambda$. (5.21)

Definindo $L(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} R(\varepsilon, \lambda_0) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0)$ e $\bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} L(\varepsilon) \alpha(\varepsilon, t-\sigma)$ ao calcularmos a variação incremental na expressão a) obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} (T(\varepsilon+h, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) - T(\varepsilon, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma)) d\sigma \\
 &= \int_0^T (T(\varepsilon+h, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) - T(\varepsilon, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma)) d\sigma + \\
 &+ \int_T^{\infty} T(\varepsilon+h) \bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) d\sigma - \int_T^{\infty} T(\varepsilon, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

As duas últimas integrais acima são majoradas em norma por $\frac{\eta}{6}$ por (5.21).

Agora

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (T(\varepsilon+h, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) - T(\varepsilon, \sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma)) d\sigma \\
 &= \int_0^T T(\varepsilon+h, \sigma) (\bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) - \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma)) d\sigma + \\
 & \int_0^T (T(\varepsilon+h, \sigma) - T(\varepsilon, \sigma)) \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

Como $T(\varepsilon+h, \sigma)$ é uniformemente limitado e $\varepsilon \rightarrow \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma)$ é contínua uniformemente com relação a t , existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T T(\varepsilon+h, \sigma) (\bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) - \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma)) d\sigma \right| < \frac{\eta}{3} \quad \text{para} \\
 & |h| < h_0, \quad \forall t \in R. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Do fato que $\alpha \in F$ e $L(\varepsilon) \in L(W)$ segue que $\bar{\alpha} \in F$.

Portanto a integral

$$\left| \int_0^T (T(\varepsilon+h, \sigma) - T(\varepsilon, \sigma)) \bar{\alpha}(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma \right| < \frac{\eta}{3}$$

para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$ pelo Teorema 3.1.5. (5.24)

Os resultados (5.21) (5.23) e (5.24) substituídos em (5.22), asseguram que

$$\left| \int_0^\infty (T(\varepsilon+h, t-\sigma) \bar{\alpha}(\varepsilon+h, t-\sigma) - T(\varepsilon, \sigma) \alpha(\varepsilon, t-\sigma)) d\sigma \right| < \eta \text{ pa-}$$

ra $|h| < h_0$ uniformemente em $t \in R$, o que completa a análise de a).

A integral que aparece na expressão b) é analisada de modo análogo.

Análise de c)

Inicialmente observamos que se $N(\varepsilon) \in L(W)$ é um operador linear fortemente contínuo em W para $\varepsilon \in \Lambda$, então pode-se provar que, para $x \in W$, $\varepsilon \rightarrow N(\varepsilon)x$ contínua, implica que $\varepsilon \rightarrow N(\varepsilon)x$ continua uniformemente para $x \in K$, onde K é um compacto genérico de W . (5.25)

Seja $N(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0)$ e $M(\varepsilon, \xi)x \stackrel{\text{def}}{=} N(\varepsilon)T(\varepsilon, \xi)x$, $x \in W$.

Para cada $x \in K$, $\xi \in [0, T]$ a aplicação $\varepsilon \rightarrow M(\varepsilon, \xi)x$ é contínua.

Logo, por um argumento semelhante a afirmação (5.25) de corre que: $\varepsilon \rightarrow M(\varepsilon, \xi)x$ é contínua uniformemente para $\xi \in [0, T]$, $x \in K$ compacto de W , (com algumas adaptações, esta afirmação

está essencialmente provada em [34]).

Além disso, dado que, $(t, x) \rightarrow T(\varepsilon, t)x$ é contínua e $N(\varepsilon) \in L(W)$, decorre que $\{M(\varepsilon, \xi)x, \xi \in [0, T], x \in K\}$ é relativamente compacto. (5.26)

Calculando a variação incremental na integral c) obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\int_0^\sigma T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) A'(\varepsilon+h) R(\varepsilon+h, \lambda_0) T(\varepsilon+h, \xi) d\xi \right) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\sigma \\ & - \int_0^\infty \left(\int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma-\xi) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0) T(\varepsilon, \xi) d\xi \right) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\sigma = \\ & \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma - \\ & \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma-\xi) M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma + \\ & + \int_T^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma - \\ & - \int_T^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma-\xi) M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma \end{aligned} \quad (5.27)$$

Como na análise anterior, provamos que: dado $\eta > 0$ existe $T = T(\eta) > 0$, tal que as duas últimas integrais impróprias são majoradas em norma por $\frac{3\eta}{8}$, $\forall t \in R$. (5.28)

Além disso,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left\{ \int_0^\sigma (T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - T(\varepsilon, \sigma-\xi) M(\varepsilon, \xi) \cdot \right. \\
 & \cdot \gamma(\varepsilon, t-\sigma)) d\xi \Big\} d\sigma = \int_0^T \int_0^\sigma \{ T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) (M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - \\
 & - M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma)) \} d\xi d\sigma + \int_0^T \int_0^\sigma \{ (T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) - T(\varepsilon, \sigma-\xi)) \cdot \\
 & \cdot M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) \} d\xi d\sigma \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

A afirmação (5.26) conjuntamente com o Teorema 3.1.5 asseguram que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que a segunda integral que aparece em (5.29) é majorada em norma por $\frac{\eta}{16}$ para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$. (5.30)

Agora nos atemos a analisar a parcela $M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma)$ que comparece na primeira integral de (5.29).

Vemos que

$$\begin{aligned}
 & M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) = \\
 & M(\varepsilon+h, \xi) (\gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - \gamma(\varepsilon, t-\sigma)) + (M(\varepsilon+h, \xi) - M(\varepsilon, \xi)) \cdot \\
 & \cdot \gamma(\varepsilon, t-\sigma) \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Como $N(\varepsilon) = A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0)$ é limitado em $\varepsilon \in \Lambda$, temos que $M(\varepsilon, \xi)$ é limitado em $(\varepsilon, \xi) \in \Lambda \times [0, T]$. Desse fato e como $\gamma \in F$, concluimos que existe $h_0 = h_0(\eta)$, tal que a

primeira parcela acima é majorada em norma por $\frac{2\eta}{16KT^2}$ (5.32)

A segunda parcela de (5.31) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} (M(\epsilon+h, \xi) - M(\epsilon, \xi))\gamma(\epsilon, t-\sigma) &= (N(\epsilon+h)T(\epsilon+h, \xi) - \\ N(\epsilon)T(\epsilon, \xi))\gamma(\epsilon, t-\sigma) &= N(\epsilon+h)(T(\epsilon+h, \xi) - T(\epsilon, \xi)) \cdot \\ \cdot \gamma(\epsilon, t-\sigma) + (N(\epsilon+h) - N(\epsilon))T(\epsilon, \xi)\gamma(\epsilon, t-\sigma) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dado que $\gamma \in F$, $N(\epsilon) \in L(W)$ é uniformemente limitado, para $\epsilon \in \Lambda$, então pelo Teorema 3.1.5, existe $h_0 = h_0(n) > 0$, tal que

$$|N(\epsilon+h)(T(\epsilon+h, \xi) - T(\epsilon, \xi))\gamma(\epsilon, t-\sigma)| \leq \frac{2\eta}{16T^2KK_1} \quad (5.34)$$

para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$, $\forall \xi \in [0, T]$, onde $\sup_{\epsilon \in \Lambda} |N(\epsilon)|_{L(W)} \leq K_1$.

Além disso, sendo que $\gamma \in F$, e $N(\epsilon)$ é fortemente contínuo em W , a afirmação (5.25) garante que a segunda parcela de (5.33) satisfaz

$$\begin{aligned} |(N(\epsilon+h) - N(\epsilon))T(\epsilon, \xi)\gamma(\epsilon, t-\sigma)| &< \frac{2\eta}{16T^2K} \text{ para} \\ |h| < h_0, \quad \forall t \in R \end{aligned} \quad (5.35)$$

As conclusões tiradas em (5.32), (5.34) e (5.35) asse-
guram que a primeira integral que consta na expressão (5.29)
é majorada em norma por $\frac{3\eta}{16}$ para $|h| < h_0$. (5.36)

As estimativas feitas em (5.28), (5.30) e (5.36) le-
vadas em (5.27) asseguram que

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) M(\varepsilon+h, \xi) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma - \right. \\ \left. \int_0^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon, \sigma-\xi) M(\varepsilon, \xi) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma \right| < \eta \quad \text{para}$$

$|h| < h_0$ uniformemente em $t \in R$, o que completa a
análise da integral c).

□

Teorema 5.5.3

Assumimos as hipóteses $H.A.1$, $H.A.2$, $H.T.3$, $H.T.4$,
 $H.B.1$ e $H.B.2$. Então, para cada $x \in D$ a aplicação
 $\varepsilon \rightarrow T(\varepsilon, t, s)x : \Lambda \rightarrow W$ é C^1 com $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} T(\varepsilon, t, s)x = \left(\int_s^t \{T(\varepsilon, t, u) \cdot \right.$
 $\left. \cdot A'(\varepsilon) T(\varepsilon, u, s)\} du \right)x$.

D .

Da hipótese $H.T.3$, decorre que $0 \in \rho(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \in \Lambda$.

Do Teorema 3.1.5 decorre que: $\forall x \in D$ a aplicação
 $\varepsilon \rightarrow T(\varepsilon, t-s)x$ é C^1 com $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} T(\varepsilon, t-s)x = \left(\int_s^t \{T(\varepsilon, t-u) A'(\varepsilon) \cdot \right.$
 $\left. \cdot T(\varepsilon, u-s)\} du \right)x$, isto é, para $h \rightarrow 0$

$$(T(\epsilon+h, t-s) - T(\epsilon, t-s) - h \int_s^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u-s) du) x = o(h) \quad (5.37)$$

Além disso, para cada $x \in W$, vale que

$$T(\epsilon, t, s)x = T(\epsilon, t-s)x + \left(\int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right) x \quad (\text{Teorema 3.1.1})$$

Portanto, para qualquer $x \in D$ vale que:

$$\begin{aligned} v_h(t, s)x &\stackrel{\text{def}}{=} \{T(\epsilon+h, t, s) - T(\epsilon, t, s) - h \int_s^t \{T(\epsilon, t, u) \cdot \\ &\cdot A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s)\} du\} x = \{T(\epsilon+h, t-s) + \int_s^t \{T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) \cdot \\ &\cdot T(\epsilon+h, \sigma, s)\} d\sigma\} x - \{T(\epsilon, t-s) + \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma\} x - \\ &- h \left\{ \int_s^t (T(\epsilon, t-u) + \int_u^t T(\epsilon, t-\xi) B(\xi) T(\epsilon, \xi, u) d\xi) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right\} x = \\ &= \{T(\epsilon+h, t-s) - T(\epsilon, t-s) - h \int_s^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du\} x + \\ &+ \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon+h, \sigma, s) d\sigma \right\} x - \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x \\ &+ \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x - \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x - \\ &- h \left\{ \int_s^t \left(\int_u^t T(\epsilon, t-\xi) B(\xi) T(\epsilon, \xi, u) d\xi \right) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right\} x = \\ &= \{T(\epsilon+h, t-s) - T(\epsilon, t-s) - h \int_s^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u-s) du\} x + \\ &+ \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) [T(\epsilon+h, \sigma, s) - T(\epsilon, \sigma, s)] d\sigma \right\} x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x - \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) B(\sigma) \right. \\
 & \left. \cdot T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x - h \left\{ \int_s^t \left[\int_u^t T(\epsilon, t-\xi) B(\xi) T(\epsilon, \xi, u) d\xi \right] A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right\} x - \\
 & - h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) \left[\int_s^u T(\epsilon, u-v) B(v) T(\epsilon, v, s) dv \right] du \right\} x
 \end{aligned}$$

A primeira parcela da igualdade acima é $o(h)$ pela a afirmação (5.37).

Logo:

$$\begin{aligned}
 v_h(t, s)x &= o(h) + \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) v_h(\sigma, s) d\sigma \right\} x + \\
 & + \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x - \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x - \\
 & - h \left\{ \int_s^t \left[\int_u^t T(\epsilon, t-\xi) B(\xi) T(\epsilon, \xi, u) d\xi \right] A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right\} x - \\
 & - h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) \left[\int_s^u T(\epsilon, u-v) B(v) T(\epsilon, v, s) dv \right] du \right\} x + \\
 & + h \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) \left[\int_s^\sigma T(\epsilon, \sigma, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right] d\sigma \right\} x \stackrel{def}{=} o(h) + \\
 & + \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h)(t-\sigma) B(\sigma) v_h(\sigma, s) d\sigma \right\} x + I_1 - I_2 - hI_3 - hI_4 + hI_5
 \end{aligned}$$

Agora, fazendo uma mudança de ordem nas integrais repetidas, temos que:

$$I_3 = \left\{ \int_s^t \left[\int_u^t T(\epsilon, t-\xi) B(\xi) T(\epsilon, \xi, u) d\xi \right] A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right\} x =$$

$$= \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\xi) B(\xi) \left[\int_s^\xi T(\epsilon, \xi, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right] d\xi \right\} x$$

Logo,

$$-hI_3 + hI_5 = h \left\{ \int_s^t [T(\epsilon+h, t-\sigma) - T(\epsilon, t-\sigma)] B(\sigma) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\int_s^\sigma T(\epsilon, \sigma, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right] d\sigma \right\} x.$$

Como a função $\sigma \in [s, t] \rightarrow \left(\int_s^\sigma T(\epsilon, \sigma, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right) x$ é contínua, segue que a imagem de $[s, t]$ pela mesma, é um subconjunto compacto de W . Do Teorema 3.1.5, segue que $-hI_3 + hI_5 = o(h)$.

Portanto, para $\forall x \in D$ temos

$$v_h(t, s)x = o(h) + \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) v_h(\sigma, s) d\sigma \right\} x +$$

$$+ I_1 - I_2 - hI_4 \quad (5.38)$$

Agora

$$I_1 = \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x = \int_s^t \{ T(\epsilon+h, t-\sigma) A(\epsilon+h) A^{-1}(\epsilon+h) \cdot$$

$$\cdot B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \} x = -A^{-1}(\epsilon+h) B(t) T(\epsilon, t, s)x + T(\epsilon+h, t-s).$$

$$\cdot A^{-1}(\epsilon+h) B(s)x + \left\{ \int_s^t T(\epsilon+h, t-\sigma) A^{-1}(\epsilon+h) \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) d\sigma \right\} x$$

De forma análoga temos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x = \\
 &= -A^{-1}(\epsilon) B(t) T(\epsilon, t, s) x + T(\epsilon, t-s) A^{-1}(\epsilon) B(s) x + \left\{ \int_s^t \{ T(\epsilon, t-\sigma) \cdot \right. \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon) \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) \} d\sigma \} x \\
 hI_4 &= h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) \left[\int_s^\sigma T(\epsilon, \sigma-v) B(v) T(\epsilon, v, s) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot dv \} d\sigma \} x = h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) [-A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) + T(\epsilon, \sigma-s) \cdot \right. \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon) B(s) + \int_s^\sigma T(\epsilon, \sigma-\xi) A^{-1}(\epsilon) \left(\frac{d}{d\xi} (B(\xi) T(\epsilon, \xi, s)) d\xi \right) d\sigma \} x = \\
 &= -h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x + h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) \cdot \right. \\
 &\cdot A'(\epsilon) T(\epsilon, \sigma-s) A^{-1}(\epsilon) B(s) d\sigma \} x + h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) \left[\int_s^\sigma \{ T(\epsilon, \sigma-\xi) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon) \frac{d}{d\xi} (B(\xi) T(\epsilon, \xi, s)) d\xi \} d\sigma \} x
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 - hI_4 &= -\{ [A^{-1}(\epsilon+h) - A^{-1}(\epsilon)] B(t) T(\epsilon, t, s) \} x + \\
 &+ \{ T(\epsilon+h, t-s) A^{-1}(\epsilon+h) - T(\epsilon, t-s) A^{-1}(\epsilon) \} B(s) x + \left\{ \int_s^t [T(\epsilon+h, t-\sigma) \cdot \right. \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon+h) - T(\epsilon, t-\sigma) A^{-1}(\epsilon)] \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) d\sigma \} x - hI_4
 \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo termos convenientes, obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 - hI_4 &= E + h A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(t) T(\epsilon, t, s) x + \\
 &+ h \left(\int_s^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u-s) du \right) \cdot \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon) B(s) x - h T(\epsilon, t-s) A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(s) x + \\
 &+ h \left\{ \int_s^t \left[\int_\sigma^t T(\epsilon, t-u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u-\sigma) d\sigma \right] \cdot \right. \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon) \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) d\sigma \Big\} x - h \left\{ \int_s^t \{ [T(\epsilon, t-\sigma) A^{-1}(\epsilon) \cdot \right. \\
 &\cdot A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon)] \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) \} d\sigma \Big\} x + h \left\{ \int_s^t \{ T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) \cdot \right. \\
 &\cdot A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) \} d\sigma \Big\} x - h \left\{ \int_s^t \{ T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) \cdot T(\epsilon, \sigma-s) A^{-1}(\epsilon) \cdot \right. \\
 &\cdot B(s) \} d\sigma \Big\} x - h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) \left[\int_s^\sigma \{ T(\epsilon, \sigma-\xi) A^{-1}(\epsilon) \frac{d}{d\xi} (B(\xi) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot T(\epsilon, \xi, s)) \} d\xi \Big] d\sigma \Big\} x \stackrel{def}{=} E + hI_5 + hI_6 - hI_7 + hI_8 - hI_9 + hI_{10} - \\
 &- hI_{11} - hI_{12}.
 \end{aligned}$$

A expressão E acima citada é dada por :

$$\begin{aligned}
 E &\stackrel{def}{=} \{ [A^{-1}(\epsilon+h) - A^{-1}(\epsilon) + h A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon)] B(t) \cdot \\
 &\cdot T(\epsilon, t, s) \} x + \{ T(\epsilon+h, t-s) A^{-1}(\epsilon+h) - T(\epsilon, t-s) A^{-1}(\epsilon) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -h\left[\left(\int_s^t T(\varepsilon, t-u)A'(\varepsilon)T(\varepsilon, u-s)du\right)A^{-1}(\varepsilon) - T(\varepsilon, t-s)A^{-1}(\varepsilon)A'(\varepsilon) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot A^{-1}(\varepsilon)\right]B(s)x + \left\{\int_s^t [T(\varepsilon+h, t-\sigma)A^{-1}(\varepsilon+h) - T(\varepsilon, t-\sigma)A^{-1}(\varepsilon) - \right. \\
 & \left. - h\left(\left(\int_\sigma^t T(\varepsilon, t-u)A'(\varepsilon)T(\varepsilon, u-\sigma)du\right)A^{-1}(\varepsilon) - T(\varepsilon, t-\sigma)A^{-1}(\varepsilon)A'(\varepsilon) \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot A^{-1}(\varepsilon)\right)\right] \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma)T(\varepsilon, \sigma, s))d\sigma\}x
 \end{aligned}$$

A primeira parcela de E é $o(h)$, pois a função $\varepsilon \rightarrow A^{-1}(\varepsilon)x : \Lambda \rightarrow W$ é diferenciável para todo $x \in W$ com $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} A^{-1}(\varepsilon)x = -A^{-1}(\varepsilon)A'(\varepsilon)A^{-1}(\varepsilon)x$.

A segunda parcela de E é $o(h)$, pois, para cada $y \in W$, a função $\varepsilon \rightarrow T(\varepsilon, \xi)A^{-1}(\varepsilon)y : \Lambda \rightarrow W$ é continuamente diferenciável, com derivada dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} T(\varepsilon, \xi)A^{-1}(\varepsilon)y &= \left(\int_0^\xi T(\varepsilon, \xi-u)A'(\varepsilon)T(\varepsilon, u)du\right)A^{-1}(\varepsilon)y - \\
 &- T(\varepsilon, \xi)A^{-1}(\varepsilon)A'(\varepsilon)A^{-1}(\varepsilon)y
 \end{aligned}$$

A terceira parcela de E é $o(h)$, pois é válido o argumento usado para a segunda expressão, e a função

$$(\varepsilon, \xi) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon} T(\varepsilon, \xi)A^{-1}(\varepsilon)g(t-\xi)x : \Lambda \times [0, t-s] \rightarrow W$$

é contínua, onde

$$g(t-\xi)x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\xi} (B(t-\xi)T(\epsilon, t-\xi, s))x$$

Das afirmações acima, decorre que $I_1 - I_2 - hI_4 = o(h) + hI_5 + hI_6 - hI_7 + hI_8 - hI_9 + hI_{10} - hI_{11} - hI_{12}$.

Mediante uma mudança de ordem nas integrais repetidas podemos provar que $I_8 = I_{12}$.

Também é claro que $I_6 = I_{11}$. Desta forma, temos:

$$I_1 - I_2 - hI_4 = o(h) + hI_5 - hI_7 - hI_9 + hI_{10} \quad (5.39)$$

Efetuando uma integração por partes no termo I_{10} vem :

$$\begin{aligned} hI_{10} &= h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x = \\ &= h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x = \\ &= h \left\{ \int_s^t - \frac{\partial}{\partial \sigma} T(\epsilon, t-\sigma) A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) d\sigma \right\} x = \\ &= -h T(\epsilon, t-\sigma) A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s) x \Big|_s^t + h \left\{ \int_s^t \{ T(\epsilon, t-\sigma) \cdot \right. \\ &\quad \cdot A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) \} d\sigma \Big\} x = -h A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) \cdot \\ &\quad \cdot A^{-1}(\epsilon) B(t) T(\epsilon, t, s) x + h T(\epsilon, t-s) A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) B(s) x + \\ &\quad + h \left\{ \int_s^t T(\epsilon, t-\sigma) A^{-1}(\epsilon) A'(\epsilon) A^{-1}(\epsilon) \frac{d}{d\sigma} (B(\sigma) T(\epsilon, \sigma, s)) d\sigma \right\} x \end{aligned}$$

Desta forma, temos que $hI_{10} = -hI_5 + hI_7 + hI_9$.

Esta conclusão levada na expressão (5.39) assegura que $I_1 - I_2 - hI_4 = o(h)$.

Retornando à igualdade (5.38), obtemos que

$$v_h(t, s)x = o(h) + \left(\int_s^t T(\varepsilon+h, t-\sigma) B(\sigma) v_h(\sigma, s) d\sigma \right) x$$

Fazendo uso da desigualdade de Gronwall, decorre diretamente da expressão acima que $v_h(t, s) = o(h)$.

□

Observação:

A hipótese $A(\varepsilon, t) = A(\varepsilon) + B(t)$ não é essencial. Poder-se-ia ter tratado o caso $A(\varepsilon, t) = A(\varepsilon) + B(\varepsilon, t)$ impondo certas condições sobre $B(\varepsilon, t)$, como por exemplo $B(\varepsilon, t)$ fortemente continuamente diferencialmente em ε .

Lema 5.5.4

Supomos satisfeitas as hipóteses $H.A.1$, $H.A.2$, $H.T.3$, $H.T.4$, $H.B.1$, $H.B.2$, $H.B.3$ e, além disso, que a função $g(\varepsilon, t)$ é tal que, g , g_t , g_ε e $g_{\varepsilon t}$ pertencem à classe F . Assumimos ainda que:

$$\int_R |B(t)| dt < \infty, \text{ e que } \int_R |\dot{B}(t)| dt < \infty$$

Então, para cada $t \in R$ existe a derivada da aplicação

$$\varepsilon \mapsto \psi(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t, s) g(\varepsilon, s) ds : \Lambda \rightarrow W, \text{ e}$$

$t \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t)$ é limitada.

0.

Do Lema 4.2.1 ou Lema 3.1.7 decorre que existe $\lambda_0 > 0$, (independente de t e ε), tal que $R(\varepsilon, \lambda_0, s) = (\lambda_0 - A(\varepsilon, s))^{-1}$: $W \rightarrow D$ é um operador linear limitado.

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon, t) &= \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t, s) (\lambda_0 - A(\varepsilon, s)) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) ds \\ &= \lambda_0 \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t, s) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) ds - \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t, s) \cdot \\ &\quad \cdot A(\varepsilon, s) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) ds. \end{aligned}$$

Do Teorema 3.1.2 decorre que para $u \in D$, $\frac{\partial}{\partial s} T(t, s)u = -T(t, s)A(s)u$, e portanto;

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon, t) &= \lambda_0 \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t, s) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) ds + \\ &+ \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial}{\partial s} T(\varepsilon, t, s) \right) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) ds \stackrel{def}{=} \lambda_0 \psi_2(\varepsilon, t) + \\ &+ \psi_1(\varepsilon, t). \end{aligned}$$

Como no Lema 5.5.1, analisaremos isoladamente cada uma das parcelas $\psi_j(\varepsilon, t)$, $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\psi_1(\varepsilon, t) &= \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial}{\partial s} T(\varepsilon, t, s) \right) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) ds = \\ &= T(\varepsilon, t, s) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \{ T(\varepsilon, t, s) \cdot \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial s} (R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s)) \} ds.\end{aligned}$$

Portanto, fazendo uso do Teorema 3.1.4 e da hipótese H.T.4 obtemos

$$\begin{aligned}\psi_1(\varepsilon, t) &= R(\varepsilon, \lambda_0, t) g(\varepsilon, t) - \int_{-\infty}^t \{ T(\varepsilon, t, s) [R(\varepsilon, \lambda_0, s) \cdot \\ &\cdot \dot{B}(s) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) + R(\varepsilon, \lambda_0, s) g_s(\varepsilon, s)] \} ds.\end{aligned}$$

O Teorema 3.1.4 e a hipótese H.A.1 asseguram que a função $\varepsilon \rightarrow R(\varepsilon, \lambda_0, t) g(\varepsilon, t)$ é derivável com derivada dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} R(\varepsilon, \lambda_0, t) g(\varepsilon, t) &= R(\varepsilon, \lambda_0, t) A'(\varepsilon) R(\varepsilon, \lambda_0, t) g(\varepsilon, t) - \\ &- R(\varepsilon, \lambda_0, t) g_\varepsilon(\varepsilon, t).\end{aligned}$$

Esta derivada é limitada em $t \in R$ pelos Lemas 4.2.1 e 4.2.2.

Do Teorema 3.1.4 e do Teorema 5.5.3, segue que

$$\begin{aligned}\varepsilon \rightarrow \int_{-\infty}^t \{ T(\varepsilon, t, s) [R(\varepsilon, \lambda_0, s) \dot{B}(s) R(\varepsilon, \lambda_0, s) g(\varepsilon, s) + \\ + R(\varepsilon, \lambda_0, s) g_s(\varepsilon, s)] \} ds \text{ é derivável e assim}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_1}{\partial \epsilon}(\epsilon, t) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} (R(\epsilon, \lambda_0, t)g(\epsilon, t)) + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\int_{-\infty}^t \{T(\epsilon, t, s). \right. \\
 &\quad \cdot [R(\epsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\epsilon, \lambda_0, s)g(\epsilon, s) + R(\epsilon, \lambda_0, s)(g_s(\epsilon, s))]\} ds) \\
 &= R(\epsilon, \lambda_0, t)A'(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, t)g(\epsilon, t) - R(\epsilon, \lambda_0, t)g_{\epsilon}(\epsilon, t) + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^t \left(\int_s^t T(\epsilon, t, u)A'(\epsilon)T(\epsilon, u, s)du \right) [R(\epsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s). \\
 &\quad \cdot R(\epsilon, \lambda_0, s)g(\epsilon, s) + R(\epsilon, \lambda_0, s)g_s(\epsilon, s)] ds + \int_{-\infty}^t \{T(\epsilon, t, s). \\
 &\quad \cdot [R(\epsilon, \lambda_0, s)A'(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\epsilon, \lambda_0, s)g(\epsilon, s) + \\
 &\quad + R(\epsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\epsilon, \lambda_0, s)A'(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, s)g(\epsilon, s) + \\
 &\quad + R(\epsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\epsilon, \lambda_0, s)g_{\epsilon}(\epsilon, s) + R(\epsilon, \lambda_0, s)A'(\epsilon). \\
 &\quad \cdot R(\epsilon, \lambda_0, s)g_s(\epsilon, s) + R(\epsilon, \lambda_0, s)g_{\epsilon s}(\epsilon, s)]\} ds \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

Estimamos estas integrais fazendo uso das hipóteses so
bre g e suas derivadas, H.T.4, H.B.3 e do lema 4.2.2.

A título de ilustração, analisamos a convergência so
mente de duas integrais.

$$\begin{aligned}
 \triangle \quad & \left| \int_{-\infty}^t \left(\int_s^t T(\epsilon, t, u)A'(\epsilon)T(\epsilon, u, s)R(\epsilon, \lambda_0, s)du \right) [\dot{B}(s). \right. \\
 & \quad \cdot R(\epsilon, \lambda_0, s)g(\epsilon, s)] ds \left| \leq (cte) \int_{-\infty}^t \left(\int_s^t e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha(u-s)} du \right) \cdot [
 \end{aligned}$$

$$\cdot \|\dot{B}(s)\| R(\epsilon, \lambda_0, s) \| ds \leq (cte) \|R(\epsilon, \lambda_0, \cdot)\|_{\infty} \cdot \|\dot{B}\|_{\infty}.$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \{\sigma e^{-\alpha\sigma} d\sigma = (cte) \|R(\epsilon, \lambda_0, \cdot)\|_{\infty} \|\dot{B}\|_{\infty}$$

$$\triangle \left| \int_{-\infty}^t \{T(\epsilon; t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0, s) \dot{B}(s) R(\epsilon, \lambda_0, s) \cdot \right.$$

$$\left. g(\epsilon, s)\} ds \right| \leq (cte) \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \|R(\epsilon, \lambda_0, s)\| A'(\epsilon).$$

$$\cdot \|R(\epsilon, \lambda_0, s)\|_{L(W)} \|\dot{B}(s) R(\epsilon, \lambda_0, s)\| \|g(\epsilon, s)\| ds \leq (cte)$$

$$\cdot \|R(\epsilon, \lambda_0, \cdot)\|_{\infty}^2 \sup_{s \in R} \|A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0, s)\|_{L(W)} \|\dot{B}\|_{\infty} \cdot \|g\|$$

Isto completa a análise de $\psi_1(\epsilon, t)$.

Da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \psi_2(\epsilon, t) &= \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} T(\epsilon, t, s) \right) R(\epsilon, \lambda_0, s) g(\epsilon, s) ds \\ &+ \int_{-\infty}^t \{T(\epsilon, t, s) [R(\epsilon, \lambda_0, s) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0, s) g(\epsilon, s) + \\ &+ R(\epsilon, \lambda_0, s) g_{\epsilon}(\epsilon, s)]\} ds = \int_{-\infty}^t \left\{ \left(\int_s^t T(\epsilon, t, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) \cdot \right. \right. \\ &\cdot du) R(\epsilon, \lambda_0, s) g(\epsilon, s) \} ds + \int_{-\infty}^t \{T(\epsilon, t, s) [R(\epsilon, \lambda_0, s) A'(\epsilon) \cdot \\ &\cdot R(\epsilon, \lambda_0, s) g(\epsilon, s) + R(\epsilon, \lambda_0, s) g_{\epsilon}(\epsilon, s)]\} ds \end{aligned} \quad (5.41)$$

As integrais acima são estimadas de modo análogo ao que foi feito para $\psi_1(\epsilon, t)$.

Reunindo os resultados obtidos em (5.40) e (5.41), obtemos que,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi_1(\varepsilon, t) + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi_2(\varepsilon, t) = R(\varepsilon, \lambda_0, t).$$

$$.A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0, t)g(\varepsilon, t) + R(\varepsilon, \lambda_0, t)g_{\varepsilon}(\varepsilon, t) +$$

$$\int_{-\infty}^t \left(\int_s^t T(\varepsilon, t, u) A'(\varepsilon) T(\varepsilon, u, s) du \right) [R(\varepsilon, \lambda_0, s) \dot{B}(s).$$

$$.R(\varepsilon, \lambda_0, s)g(\varepsilon, s) + R(\varepsilon, \lambda_0, s)g_{\varepsilon}(\varepsilon, s)] ds + \int_{-\infty}^t \{T(\varepsilon, t, s).$$

$$.[R(\varepsilon, \lambda_0, s)A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\varepsilon, \lambda_0, s)g(\varepsilon, s) +$$

$$+ R(\varepsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\varepsilon, \lambda_0, s)A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0, s)g(\varepsilon, s) +$$

$$+ R(\varepsilon, \lambda_0, s)\dot{B}(s)R(\varepsilon, \lambda_0, s)g_{\varepsilon}(\varepsilon, s) + R(\varepsilon, \lambda_0, s)A'(\varepsilon).$$

$$.R(\varepsilon, \lambda_0, s)g_s(\varepsilon, s) + R(\varepsilon, \lambda_0, s)g_{\varepsilon s}(\varepsilon, s)]\}ds +$$

$$+ \lambda_0 \int_{-\infty}^t \left(\int_s^t T(\varepsilon, t, u) A'(\varepsilon) T(\varepsilon, u, s) du \right) R(\varepsilon, \lambda_0, s)g(\varepsilon, s) ds +$$

$$+ \lambda_0 \int_{-\infty}^t \{T(\varepsilon, t, s)[R(\varepsilon, \lambda_0, s)A'(\varepsilon)R(\varepsilon, \lambda_0, s)g(\varepsilon, s) +$$

$$+ R(\varepsilon, \lambda_0, s)g_{\varepsilon}(\varepsilon, s)]\}ds \stackrel{def}{=} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \lambda_0 I_5 +$$

$$+ \lambda_0 I_6$$

(5.42)

Os símbolos $I_j, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$, foram introduzidos para futura referência.

Além disso, a função $t \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t)$, é limitada em R para cada $\varepsilon \in \Lambda$ fixado.

□

Teorema 5.5.5

Supomos satisfeitas as hipóteses do Lema 5.5.4, e além disso que, $|B(t)| \rightarrow 0$ e $|\dot{B}(t)| \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Então, para cada $\varepsilon \in \Lambda = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ a aplicação $\varepsilon \rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} \{T(\varepsilon, \cdot, s) \cdot g(\varepsilon, s)\} ds: \Lambda \rightarrow \beta(R)$ é C^1 .

D.

No Lema 5.5.4 foi obtida para cada $t \in R$, a derivada da aplicação $\varepsilon \rightarrow \psi(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t, s) g(\varepsilon, s) ds$.

Especificamente, de (5.42), decorre que $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \lambda_0 I_5 + \lambda_0 I_6$, onde os símbolos $I_j, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ já se encontram definidos.

Como no Teorema 5.5.2, passamos a analisar a continuidade em ε , uniforme com relação a $t \in R$, para cada uma das integrais $I_j, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ que compoem $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\varepsilon, t)$.

A continuidade em ε , uniforme em $t \in R$ de I_2 , decorre da hipótese sobre $g_\varepsilon(\varepsilon, t)$, do Lema 4.2.1, e do fato que a derivada $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} R(\varepsilon, \lambda_0, t)$ é limitada em $t \in R$.

A continuidade uniforme de I_1 está contida na análise posterior que faremos.

Podemos classificar as integrais $I_j, j \in \{3, 4, 5, 6\}$ em

3 tipos de integrais, a saber:

$$I_7) \quad \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) A'(\epsilon) R(\epsilon, \lambda_0, s) \alpha(\epsilon, s) ds$$

$$I_8) \quad \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) \beta(\epsilon, s) ds$$

$$I_9) \quad \int_{-\infty}^t \left(\int_s^t T(\epsilon, t, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, s) du \right) R(\epsilon, \lambda_0, s) \gamma(\epsilon, s) ds$$

onde α , β e γ pertencem a classe F .

Análise de I_9

Introduzimos a mudança de variável $\sigma = t-s$. Então

$$I_9 = \int_0^\infty \int_{t-\sigma}^t \{T(\epsilon, t, u) A'(\epsilon) T(\epsilon, u, t-\sigma) R(\epsilon, t-\sigma) \gamma(\epsilon, t-\sigma).$$

$\cdot d\sigma$

Novamente fazemos a mudança de variável $\xi = t - u$.

Portanto, I_9 reduz-se a :

$$I_9 = \int_0^\infty \int_0^\sigma T(\epsilon, t, t-\xi) A'(\epsilon) T(\epsilon, t-\xi, t-\sigma) R(\epsilon, t-\sigma) \gamma(\epsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma.$$

Agora pelo Lema 4.2.2, dado $\eta > 0$ suficientemente pequeno, é possível escolher $T = T(\eta)$ suficientemente grande tal que,

$$\left| \int_T^\infty \int_0^\sigma \{T(\varepsilon, t, t-\xi) A'(\varepsilon) T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma) R(\varepsilon, t-\sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma)\} \cdot d\xi d\sigma \right| < \frac{\eta}{4} \quad (5.43)$$

Definimos os operadores $D(\varepsilon) = A'(\varepsilon)A^{-1}(\varepsilon)$ e $M(\varepsilon, \xi, \sigma) = A(\varepsilon)T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma)R(\varepsilon, t-\sigma)$, e observamos que, $D(\varepsilon) \in L(W)$ é uniformemente limitado pelo Lema 4.2.2, e,

$$|M(\varepsilon, \xi, \sigma)| \leq K e^{-\alpha(\sigma-\xi)} \quad \sigma \geq \xi \quad (5.44)$$

Observamos que a notação acima não é muito rigorosa pois, $M(\varepsilon, \xi, \sigma)$ também depende de t , mas as estimativas de $M(\varepsilon, \xi, \sigma)$ são obtidas independentes de $t \in R$.

Desta forma, calculando a variação incremental na integral I_g , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, t, t-\xi) D(\varepsilon+h) M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma \\ & - \int_0^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon, t, t-\xi) D(\varepsilon) M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma = \\ & = \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, t, t-\xi) D(\varepsilon+h) M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma \\ & - \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon, t, t-\xi) D(\varepsilon) M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma + \\ & + \int_T^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, t, t-\xi) D(\varepsilon+h) M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma \\ & - \int_T^\infty \int_0^\sigma T(\varepsilon, t, t-\xi) D(\varepsilon) M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma \end{aligned}$$

Da estimativa (5.43), decorre que as duas últimas integrais impróprias acima são majoradas em norma por ...

$$\frac{\eta}{4} \quad (5.45)$$

Por outro lado, temos que,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, t, t-\xi) D(\varepsilon+h) M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) d\xi d\sigma \\ & - \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon, t, t-\xi) D(\varepsilon) M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma = \\ & = \int_0^T \int_0^\sigma T(\varepsilon+h, t, t-\xi) (D(\varepsilon+h) - D(\varepsilon)) M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) d\xi d\sigma \\ & + \int_0^T \int_0^\sigma \{ T(\varepsilon+h, t, t-\xi) D(\varepsilon+h) (M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - \\ & - M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma)) \} d\xi d\sigma + \int_0^T \int_0^\sigma \{ (T(\varepsilon+h, t, t-\xi) - \\ & - T(\varepsilon, t, t-\xi)) D(\varepsilon) M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma) \} d\xi d\sigma \stackrel{def}{=} I_{10} + I_{11} + \\ & + I_{12}. \end{aligned}$$

Dado que $\gamma \in F$, pode-se provar a seguinte:

Afirmacão A

"Para cada $\varepsilon \in \Lambda$, o conjunto $\{M(\varepsilon, \xi, \sigma) \gamma(\varepsilon, t-\sigma), 0 \leq \xi \leq \sigma \leq T, t \in R\}$ é relativamente compacto. Dai segue-se que $\{D(\varepsilon) M(\varepsilon, \xi, \sigma), 0 \leq \xi \leq \sigma \leq T, t \in R\}$ é relativamente compacto."

Do Teorema 3.1.5 decorre a

Afirmção B

" $T(\varepsilon+h, t-\xi, t-\sigma)w \rightarrow T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma)w$ quando $h \rightarrow 0$, uniformemente para $w \in K$ compacto de W , $0 \leq \xi \leq \sigma \leq T$ e $t \in R$."

Dado que $T(\varepsilon+h, t, t-\xi)$ é uniformemente limitado, fazendo uso da Afirmção A, da Afirmção (5.25) do Teorema 5.5.2, concluímos que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que, $|I_{10}| < \frac{\eta}{6}$, para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$.

Também das Afirmções A e B, decorre que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que, $|I_{12}| < \frac{\eta}{6}$ para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$. Resta portanto, analisar a integral $I_{11} = \int_0^T \int_0^\sigma \{T(\varepsilon+h, t, t-\xi)D(\varepsilon+h) \cdot (M(\varepsilon+h, \xi, \sigma)\gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - M(\varepsilon, \xi, \sigma)\gamma(\varepsilon, t-\sigma))\} d\xi d\sigma$.

Temos

$$\begin{aligned} & M(\varepsilon+h, \xi, \sigma)\gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - M(\varepsilon, \xi, \sigma)\gamma(\varepsilon, t-\sigma) = \\ & = M(\varepsilon+h, \xi, \sigma)(\gamma(\varepsilon+h, t-\sigma) - \gamma(\varepsilon, t-\sigma)) + (M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) - \\ & - M(\varepsilon, \xi, \sigma))\gamma(\varepsilon, t-\sigma) \stackrel{def}{=} M(\varepsilon+h, \xi, \sigma)(I_{13}) + I_{14}. \end{aligned}$$

A limitação uniforme de $M(\varepsilon, \xi, \sigma)$ dada em (5.44) e o fato de que $\gamma \in$ classe F , implicam que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$ tal que, $|I_{13}| < \frac{\eta}{6K_1 T^2}$ para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$, onde $K_1 > 0$ satisfaz $|T(\varepsilon+h, t, t-\xi)D(\varepsilon+h)M(\varepsilon+h, \xi, \sigma)|_{L(W)} < K_1$, $0 \leq \xi \leq \sigma \leq T$, $\varepsilon \in \Lambda$, $\forall t \in R$.

Agora, na representação (4.1) do Lema 4.2.2 obtida para $AT(t,s)R(\lambda,A(s))$, colocando $t - \xi$ em lugar de t e $t - \sigma$ em lugar de s , obtemos para $M(\varepsilon, \xi, \sigma)$ a expressão

$$\begin{aligned} M(\varepsilon, \xi, \sigma) &= A(\varepsilon)T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma)R(\varepsilon, t-\sigma) = -T(\varepsilon, \sigma-\xi) - \\ &- B(t-\xi)T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma)R(\varepsilon, t-\sigma) + \lambda_0 T(\varepsilon, \sigma-\xi)R(\varepsilon, t-\sigma) + \\ &+ \int_{\xi}^{\sigma} T(\varepsilon, v-\xi)(B(t-v) + C(t-v)A^{-1}(\varepsilon))A(\varepsilon)T(\varepsilon, t-v, t-\sigma) \cdot \\ &\cdot R(\varepsilon, t-\sigma)dv, \text{ onde } C(u) = \dot{B}(u) + B^2(u). \end{aligned}$$

Seja $K_2 > 0$ tal que, $|T(\varepsilon+h, t, t-\xi)D(\varepsilon+h)|_{L(W)} < K_2$
O nosso objetivo agora é provar que $|I_{14}| < \frac{\eta}{6K_2T^2}$ para $|h| < h_0$. Para $w = \gamma(\varepsilon, t-\sigma)$ temos que

$$\begin{aligned} I_{14} &= (M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) - M(\varepsilon, \xi, \sigma))w = \\ &= -(T(\varepsilon+h, \sigma-\xi) - T(\varepsilon, \sigma-\xi))w - B(t-\xi) \cdot \\ &\cdot (T(\varepsilon+h, t-\xi, t-\sigma)R(\varepsilon+h, t-\sigma) - T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma) \cdot \\ &\cdot R(\varepsilon, t-\sigma))w + \lambda_0 (T(\varepsilon+h, \sigma-\xi)R(\varepsilon+h, t-\sigma) - \\ &- T(\varepsilon, \sigma-\xi)R(\varepsilon, t-\sigma))w + \int_{\xi}^{\sigma} [T(\varepsilon+h, v-\xi)(B(t-v) + \\ &+ C(t-v)A^{-1}(\varepsilon+h))A(\varepsilon+h)T(\varepsilon+h, t-v, t-\sigma)R(\varepsilon+h, t-\sigma) - \end{aligned}$$

$$- T(\varepsilon, v-\xi)(B(t-v) + C(t-v)A^{-1}(\varepsilon))A(\varepsilon)T(\varepsilon, t-v, t-\sigma) \cdot R(\varepsilon, t-\sigma)dv]w \stackrel{def}{=} I_{15} + I_{16} + \lambda_0 I_{17} + I_{18}$$

$$\text{Seja } K_3 \stackrel{def}{=} e^K \int_R (|B(t)| + |C(t)| |A^{-1}(\varepsilon)|)_{L(W)} dt \quad \text{com}$$

$\varepsilon \in \Lambda$,

Do Teorema 3.1.5 decorre que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$ tal que $|I_{15}| < \frac{\eta}{24K_2K_3T^2}$ para $|h| < h_0, \forall t \in R$ (5.46)

Como a aplicação $\varepsilon \rightarrow T(\varepsilon, t-\xi, t-\sigma)R(\varepsilon, t-\sigma)x$ tem derivada limitada uniformemente para $x \in \text{compacto}$, $t \in R$, $0 \leq \xi \leq \sigma \leq T$, decorre que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que, $|I_{16}| < \frac{\eta}{24K_2K_3T^2}$ para $|h| < h_0 \forall t \in R$. (5.47)

O mesmo argumento anterior justifica que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que, $|\lambda_0 I_{17}| < \frac{\eta}{24K_2K_3T^2}$ para $|h| < h_0$, pois, para $B(t) \equiv 0$, é válida a igualdade :

$$T(\varepsilon, t, s) = T(\varepsilon, t-s) . \quad (5.48)$$

Definindo $I_{19} \stackrel{def}{=} I_{15} + I_{16} + \lambda_0 I_{17}$ de (5.46), (5.47) e (5.48), decorre que $|I_{19}| < \frac{\eta}{8K_2K_3T^2}$ $|h| < h_0, \forall t \in R$.

Logo

$$(M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) - M(\varepsilon, \xi, \sigma))w = I_{19} + \int_{\xi}^{\sigma} \{T(\varepsilon+h, v-\xi) \cdot$$

$$\cdot (B(t-v) + C(t-v)A^{-1}(\varepsilon+h))(A(\varepsilon+h)T(\varepsilon+h, t-v, t-\sigma)R(\varepsilon+h, t-\sigma) -$$

$$\begin{aligned}
 & -A(\epsilon)T(\epsilon, t-v, t-\sigma)R(\epsilon, t-\sigma))\}dv]w + \left\{ \int_{\xi}^{\sigma} \{ [T(\epsilon+h, v-\xi) \cdot \right. \\
 & \cdot (B(t-v) + C(t-v)A^{-1}(\epsilon+h)) - T(\epsilon, v-\xi)(B(t-v) + C(t-v) \cdot \\
 & \cdot A^{-1}(\epsilon))] A(\epsilon)T(\epsilon, t-v, t-\sigma)R(\epsilon, t-\sigma)\}dv\}w \stackrel{def}{=} I_{19} + \\
 & + \left[\int_{\xi}^{\sigma} \{ T(\epsilon+h, v-\xi)(B(t-v) + C(t-v)A^{-1}(\epsilon+h))(M(\epsilon+h, v, \sigma) - \right. \\
 & \left. - M(\epsilon, v, \sigma))\}dv\}w + I_{20} \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

A expressão I_{20} pode ser escrita na forma :

$$\begin{aligned}
 I_{20} = & \left[\int_{\xi}^{\sigma} \{ (T(\epsilon+h, v-\xi) - T(\epsilon, v-\xi))B(t-v)A(\epsilon) \cdot \right. \\
 & \cdot T(\epsilon, t-v, t-\sigma)R(\epsilon, t-\sigma)\}dv\}w + \left\{ \int_{\xi}^{\sigma} \{ [T(\epsilon+h, v-\xi)C(t-v) \cdot \right. \\
 & \cdot A^{-1}(\epsilon+h) - T(\epsilon, v-\xi)C(t-v)A^{-1}(\epsilon)]A(\epsilon)T(\epsilon, t-v, t-\sigma) \cdot \\
 & \cdot R(\epsilon, t-\sigma)\}dv\}w \stackrel{def}{=} I_{21} + I_{22} \tag{5.50}
 \end{aligned}$$

Dado que $B(t) \in L(W)$ satisfaz $B(t) \rightarrow 0$, quando $|t| \rightarrow \infty$, pela Afirmação A e o Teorema 3.1.5, concluimos que existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que, $|I_{21}| < \frac{\eta}{48K_2K_3T^2}$ para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 & [T(\varepsilon+h, v-\xi)C(t-v)A^{-1}(\varepsilon+h) - T(\varepsilon, v-\xi)C(t-v)A^{-1}(\varepsilon)]w_1 \\
 & = T(\varepsilon+h, v-\xi)C(t-v)(A^{-1}(\varepsilon+h) - A^{-1}(\varepsilon))w_1 + \\
 & + (T(\varepsilon+h, v-\xi) - T(\varepsilon, v-\xi))C(t-v)A^{-1}(\varepsilon)w_1 \stackrel{\text{def}}{=} I_{23} + I_{24},
 \end{aligned}$$

com $w_1 = A(\varepsilon)T(\varepsilon, t-v, t-\sigma)R(\varepsilon, t-\sigma)w$.

Como w_1 permanece num compacto, como a aplicação $\varepsilon \rightarrow A^{-1}(\varepsilon) : \Lambda \rightarrow L(W)$ é contínua, e, como os demais termos que aparecem em I_{23} são uniformemente limitados, existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que

$$\left| \int_{\xi}^{\sigma} I_{23} \right| < \frac{\eta}{96K_2K_3T^2} \text{ para } |h| < h_0, \forall t \in R \quad (5.51)$$

Para analisar I_{24} procedemos da seguinte maneira:

Do fato que $A^{-1}(\varepsilon) \in L(W)$ e como $C(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$ decorre que $\{C(t-v)A^{-1}(\varepsilon)w_1, 0 \leq v \leq \sigma \leq T, t \in R\}$ é relativamente compacto e, portanto, existe $h_0 = h_0(\eta) > 0$, tal que

$$\left| \int_{\xi}^{\sigma} I_{24} \right| < \frac{\eta}{96K_2K_3T^2} \text{ para } |h| < h_0, \forall t \in R \text{ pelo Teorema 3.1.5.} \quad (5.52)$$

Desta forma, temos que os resultados (5.51) e (5.52) asseguram que $|I_{22}| < \frac{\eta}{48K_2K_3T^2}$, e portanto, $|I_{20}| < \frac{\eta}{24K_2K_3T^2}$

para $|h| < h_0, \forall t \in R$ por (5.50).

Retornando a (5.49) obtemos

$$(M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) - M(\varepsilon, \xi, \sigma))w = I_{19} + I_{20} + \left\{ \int_{\xi}^{\sigma} \{T(\varepsilon+h, v-\xi) \cdot \right.$$

$$\cdot (B(t-v) + C(t-v) \cdot A^{-1}(\varepsilon+h))(M(\varepsilon+h, v, \sigma) - M(\varepsilon, v, \sigma)) \} dv \} w$$

$$\text{com } |I_{19}| + |I_{20}| < \frac{\eta}{6K_2 K_3 T^2}$$

Definindo $v_h(\xi, \sigma) = |(M(\varepsilon+h, \xi, \sigma) - M(\varepsilon, \xi, \sigma))w|$, fazendo uso das hipóteses H.T.2, H.B.1 e H.T.3, a desigualdade de Gronwall aplicada à expressão I_{14} permite concluir que existe $h_0 = h(\eta)$, tal que, $v_h(\xi, \sigma) = |I_{14}| < \frac{\eta}{6K_2 T^2}$ para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$.

Desta forma, a integral $|I_{11}| < \frac{\eta}{6}$ para $|h| < h_0$, $\forall t \in R$, o que completa a análise de I_9 .

Análise de I_7 e I_8

Antes de analisarmos I_7 e I_8 , vamos proceder algumas simplificações nas mesmas.

É possível provar que:

Afirmção C

"Para cada $\varepsilon \in \Lambda$, se $\{\alpha(\varepsilon, s), s \in R\}$ é relativamente compacto, então $\{R(\varepsilon, \lambda_0, s)\alpha(\varepsilon, s), s \in R\}$ também é relativamente compacto."

Afirmção D

" $\{\alpha(\epsilon, s), s \in R\}$ relativamente compacto implica que $\{A(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, s)\alpha(\epsilon, s), s \in R\}$ é relativamente compacto pelo Teorema 3.1.2 e, portanto, $\{D(\epsilon)A(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, s)\alpha(\epsilon, s), s \in R\}$ é relativamente compacto."

Seja $\bar{\alpha} : \Lambda \times R \rightarrow W$ uma função da classe F e seja

$$\psi(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) \bar{\alpha}(\epsilon, s) ds$$

Fazendo uso do Lema 5.4.1 concluímos que $\psi(\epsilon, t)$ é contínua em ϵ , uniformemente em $t \in R$. (5.53)

A conclusão anterior também pode ser obtida do fato de que $\bar{\alpha} \in F$, da hipótese H.T.4 e da Afirmção B.

Tomando $\bar{\alpha}(\epsilon, t) = R(\epsilon, \lambda_0, t)D(\epsilon)A(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, t)\alpha(\epsilon, t)$ em I_7 , a continuidade em ϵ , uniforme com relação a $t \in R$, decorre da limitação de $R(\epsilon, \lambda_0, t)$, do fato de que $D(\epsilon)$ é fortemente contínuo, da hipótese sobre α , e da Afirmção 5.25 do Teorema 5.5.2. (5.54)

Definindo $N(\epsilon, t) = A(\epsilon)R(\epsilon, \lambda_0, t)\alpha(\epsilon, t)$, prova-se com a argumentação acima que $\frac{\partial N}{\partial \epsilon}(\epsilon, t)$ é limitada uniformemente para $\epsilon \in \Lambda$ e $t \in R$.

Fazendo uso do Teorema 3.1.2 prova-se com os argumentos anteriores que a função $(\epsilon, t) \rightarrow \bar{\alpha}(\epsilon, t) : \Lambda \times R \rightarrow W$ é contínua e limitada (5.55)

Reunindo os argumentos usados em 5.54 e 5.55 e as Afirmções C e D obtemos que $\bar{\alpha} \in F$.

Desta forma a integral I_7 satisfaz a conclusão obtida em 5.53.

Conclusão análoga é estabelecida para a integral I_8 .

□

CAPÍTULO 6

A EQUAÇÃO DA VIGA

6.1 - ANÁLISE INICIAL DA EQUAÇÃO

Neste capítulo nos concentraremos em estudar a existência e algumas propriedades de regularidade de determinadas soluções da equação da viga.

Consideremos um modelo similar ao proposto em [23], de uma viga, que na sua posição normal está flambada pela ação normal de uma carga externa proporcional a Γ_1 .

Em [1] pode ser encontrada uma dedução do modelo acima, onde $u(t, z)$ é a flecha transversal da linha central da viga unindo suas extremidades.

Para maiores informações ver [1] e [23].

Figura 15

A equação para u é dada por:

$$\ddot{u} + u'''' + \Gamma_1 u'' + \varepsilon \Gamma_1 u'''' - k \left(\int_0^1 |u'|^2 dz \right) u'' =$$

$$- \delta \varepsilon \dot{u} + \varepsilon f(t) \operatorname{sen} \pi z + g(t, z, \varepsilon) \quad (6.1)$$

onde $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}$, $(') = \frac{\partial}{\partial z}$, Γ_1 é a carga normal, atuando na viga, k é uma rigidez devida a efeito de membrana, δ e ε são parâmetros reais próximos do zero, e, vamos assumir as hipóteses:

$$H.f.1 \quad f \in P_1, \quad f \in C^\infty(R)$$

$$H.g.1 \quad g(\cdot, z, \varepsilon) \in P_1, \quad g \text{ suficientemente diferenciável,}$$

$$\int_0^1 g(t, z, \varepsilon) \operatorname{sen} \pi z dz = 0, \quad g(t, z, 0) = 0$$

Vamos procurar soluções limitadas de (6.1) com as condições de contorno $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$, $u''(t, 0) = u''(t, 1) = 0$, $\forall t \in R$, o que corresponde à condição da viga estar simplesmente suportada nas suas extremidades.

Com estas condições de contorno, os auto-valores da equação não forçada, são valores complexos λ , tais que, $u'''' + \Gamma_1 u'' + \lambda^2 u = 0$ para $u \neq 0$ satisfazendo $u = u'' = 0$ para $z = 0, 1$.

Os valores de λ formam uma coleção enumerável $\lambda_n = \pm i \pi n \sqrt{\Gamma_1 - n^2 \pi^2}$ $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Se $\Gamma_1 < \pi^2$ e $\varepsilon > 0$, pode-se provar que a solução nula da equação 6.1 não forçada é assintoticamente estável.

Assumimos que $\pi^2 < \Gamma_1 < 4\pi^2$, e, neste caso a solução $u = 0$ do linearizado é instável e a equação não linear 6.1 para $\varepsilon = 0$ e $k > 0$ admite dois estados estáveis flambados de equilíbrio. Essas informações estão essencialmente contidas em [23].

Introduzimos a mudança de variável $u(t, z) = x(t) \sin \pi z + v(t, z)$ com $\int_0^1 v(t, z) \sin \pi z \, dz = 0$.

Desta forma, a equação (6.1) é transformada no sistema

$$\left[\begin{aligned} \ddot{v} + (1 + \varepsilon \gamma_1) v'''' + \Gamma_1 v'' - k \left(\int_0^1 |v'|^2 \right) v'' &= -\delta \varepsilon \dot{v} + \\ + g(t, z, \varepsilon) + \frac{k \pi^2}{2} x^2 v'' & \\ \ddot{x} + \pi^2 (\pi^2 - \Gamma_1) x + \frac{k \pi^4}{2} x^3 &= -\delta \varepsilon \dot{x} + \varepsilon f(t) - \pi^2 k x \left(\int_0^1 |v'|^2 \right) - \\ - \varepsilon \gamma_1 \pi^4 x & \end{aligned} \right. \quad (6.2)$$

Definindo $a = \pi^2 (\pi^2 - \Gamma_1)$, $b = \pi^2 k$, $c = \frac{k}{2} \pi^2$, $d = \frac{k \pi^4}{2}$, $e = \gamma_1 \pi^4$, e transformando a primeira equação de (6.2) em sistema obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = w \\ \dot{w} = -v''' - \epsilon \gamma_1 v''' - \Gamma_1 v'' - \delta \epsilon w + g(t, \cdot, \epsilon) + \\ k \left(\int_0^1 |v'|^2 \right) v'' + c x^2 v'' \\ \ddot{x} - ax + dx^3 = -\delta \epsilon \dot{x} + \epsilon f(t) - bx \int_0^1 |v'|^2 - \epsilon ex \end{array} \right. \quad (6.3)$$

$$\text{Sejam } u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad A(\epsilon)u = \begin{pmatrix} w \\ -(1+\epsilon\gamma_1)v''' - \Gamma_1 v'' - \delta\epsilon w \end{pmatrix}$$

$$A_1 u = \begin{pmatrix} 0 \\ cv'' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \left(\int_0^1 |v'|^2 \right) v'' \end{pmatrix}$$

Vamos escolher como espaço base, o espaço de Banach $Z = (H^2 \cap H_0^1) \times L^2$ com a norma da energia dada por $|u|^2 = |(v, w)|^2 = |v''|^2 + |w|^2$ onde $|w|^2 = \int_0^1 w^2 dz$.

Seja $Y = \{u \in Z : \int_0^1 v(t, z) \operatorname{sen} \pi z \, dz = \int_0^1 w(t, z) \operatorname{sen} \pi z \, dz = 0\}$ e $D = D(A(\epsilon)) = \{ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in Y, v \in H^4, v'' \in H_0^1, w \in H_0^1 \cap H^2 \} = \text{domínio de } A(\epsilon)$.

Como em [26], pode-se provar que $A(\epsilon)$ é gerador infinitesimal de um C_0 semi-grupo de operadores lineares limitados $T(\epsilon, t)$ $t \geq 0$.

O Lema 6.2.1 abaixo provará que para $\epsilon \in \Lambda = (0, \epsilon_0]$, ϵ_0 um real positivo a ser escolhido de forma conveniente, o semi-grupo $T(\epsilon, t)$ possui uma dicotomia exponencial trivial na reta.

Observamos também que A_1 é um operador linear limitado em Y e a segunda componente de A_2 é um polinômio cúbico contínuo sobre Y .

Com as notações anteriores, o sistema (6.3) é transformado em

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - ax + dx^3 = -\delta \epsilon \dot{x} + \epsilon f(t) - bx \int_0^1 |v'|^2 - \epsilon \epsilon x \\ \dot{u} = A(\epsilon)u + x^2 A_1 u + A_2(u) + G(\epsilon, t) \end{array} \right. \quad (6.4)$$

com $G(\epsilon, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, \cdot, \epsilon) \end{pmatrix}$

6.2 - DICOTOMIA EXPONENCIAL TRIVIAL

Lema 6.2.1

Consideremos a equação diferencial homogênea $\dot{u} = A(\epsilon)u$. Então, se $T(\epsilon, t)$ é o C_0 semi-grupo associado a $A(\epsilon)$, existem $\epsilon_0 > 0$, constantes K e $\delta > 0$, tais que $|T(\epsilon, t)| \leq Ke^{-\alpha \epsilon t}$, $t \geq 0$, $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$.

D.

Vamos construir um funcional de Liapunov associado à equação acima.

Para $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ seja $V(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}|w|^2 + \frac{1}{2}(1 + \epsilon \gamma_1)$.

$$|v''|^2 - \frac{\Gamma_1}{2} |v'|^2 + \epsilon \beta \int_0^1 v w dz.$$

Pode-se provar que para qualquer $u \in H^2 \cap H_0^1$, existem constantes reais $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, tais que, $|u|^2 \leq k_1 |u'|^2 \leq k_2 |u''|^2$; aliás $k_1 = \frac{1}{4\pi^2}$, $k_2 = \frac{1}{16\pi^4}$ (ver [43]).

Fazendo uso destas relações, provamos que o funcional V satisfaz.

a) Existe $c_1 > 0$: $V(u) \leq c_1 |u|^2$

b) , Existe $c_2 > 0$: $V(u) \geq c_2 |u|^2$

c) Se $u(t) = T(\epsilon, t)u_0$, $u_0 \in D(A(\epsilon))$, existe c_3 :

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) \leq -\epsilon c_3 V(u(t)), \text{ com } c_3 \text{ independente de } \epsilon, \delta \text{ e } u_0.$$

De fato, impondo a condição a) recaímos no sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - c_1 + \frac{\epsilon\beta}{2} \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\epsilon\gamma_1}{2} - c_1 + \frac{\epsilon\beta}{32\pi^4} \leq 0 \end{cases}$$

Supondo β já determinado, (o que será feito ao final), tomando $c_1 = 1$, e, levando em conta que $\lambda_1(\epsilon) = \frac{\epsilon\beta}{2}$ e $\lambda_2(\epsilon) = \epsilon(\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\beta}{32\pi^4})$ tendem a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, é possível escolher $\epsilon_1 > 0$, tal que, $\lambda_1(\epsilon) < \frac{1}{2}$ e $\lambda_2(\epsilon) < \frac{1}{2}$ para $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$, o que resolve o sistema acima e o item a).

Impondo a condição b) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - c_2 - \frac{\epsilon\beta}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{2} + \epsilon\gamma_1 - c_2 - \frac{\Gamma_1}{8\pi^2} - \frac{\epsilon\beta}{32\pi^4} \geq 0 \end{array} \right.$$

Basta então procurar $c_2 > 0$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - c_2 > 0 \\ \frac{1}{2} - c_2 - \frac{\Gamma_1}{8\pi^2} > 0 \end{array} \right.$$

o que implica em $c_2 < \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2})\} = \frac{1}{2}(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2})$ e por exemplo, podemos tomar $c_2 = \frac{1}{4}(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2})$.

Argumento semelhante ao anterior, permite concluir que existe $\epsilon_2 > 0$, tal que, o sistema inicial tem solução para $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, o que resolve o item b).

Da mesma forma, impondo a condição c) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\delta + \beta + \frac{c_3}{2} + \frac{\delta\epsilon\beta}{2} + \frac{\epsilon c_3\beta}{2} \leq 0 \\ -\beta(1+\epsilon\gamma_1) + \frac{\beta\Gamma_1}{4\pi^2} + \frac{c_3}{2}(1+\epsilon\gamma_1) + \frac{\delta\epsilon\beta}{32\pi^4} + \frac{\epsilon c_3\beta}{32\pi^4} \leq 0 \end{array} \right.$$

Tentamos resolver primeiro o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\delta + \beta + \frac{c_3}{2} < 0 \\ -\beta(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2}) + \frac{c_3}{2} < 0 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Sejam δ_0 e δ_1 reais positivos fixos e $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$.

Fixemos, por exemplo, $\beta = \frac{\delta_0}{2}$. Portanto, impondo $0 < c_3 < \delta_0$ a primeira desigualdade de (6.5) está verificada.

Agora, a segunda desigualdade de (6.5) equivale a $c_3 < \delta_0(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2})$, portanto $c_3 = \frac{\delta_0}{2}(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2})$ é uma solução.

Reunindo as duas informações acima, temos $c_3 = \frac{\delta_0}{2}(1 - \frac{\Gamma_1}{4\pi^2})$ e $\beta = \frac{\delta_0}{2}$ resolve o sistema (6.5).

Com argumento semelhante ao anterior, provamos que existe $\varepsilon_3 > 0$, tal que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ o sistema inicial tem solução.

Portanto, se $\varepsilon_0 = \min_{j=1,2,3} \varepsilon_j$, as condições a), b) e c) do Lema estão verificadas para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Seja $u(t) = T(\varepsilon, t)u_0$ a solução da equação $\dot{u} = A(\varepsilon)u$, $u(0) = u_0 \in D$ e seja $V_0 = V(u_0)$.

Logo

$$|u(t)|^2 \leq \frac{1}{c_2} V(u(t)) \leq \frac{1}{c_2} e^{-\varepsilon c_3 t} V_0 \leq \frac{1}{a)}$$

$$\leq \frac{c_1}{c_2} e^{-\varepsilon c_3 t} |u_0|^2.$$

Portanto, existem $K > 0$ e $\alpha > 0$: $|T(\varepsilon, t)u_0| \leq$

$\leq Ke^{-\varepsilon \alpha t} |u_0| \quad \forall u_0 \in D \quad t \geq 0$ o que implica em:

$$|T(\varepsilon, t)u_0| \leq Ke^{-\varepsilon \alpha t} |u_0| \quad \forall u_0 \in Y, \quad t \geq 0$$

Podemos ressaltar que as estimativas obtidas no Lema acima são válidas inclusive para $\varepsilon = 0$.

□

6.3 - EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PERIÓDICA

Na forma de sistema a equação (6.4) se transforma em

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \ddot{x} + g(x) = -\delta \varepsilon \dot{x} + \varepsilon f(t) - bx \int_0^1 (u_1')^2 - \varepsilon ex \\ b) \dot{u} = A(\varepsilon)u + x^2 A_1 u + A_2(u) + G(\varepsilon, t) \end{array} \right. \quad (6.6)$$

com $x \in R$, $g(x) = -ax + dx^3$, $a > 0$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in Y$ e

$$A_2(u) = O(|u|^3).$$

Vamos assumir sobre G as hipóteses adicionais:

H.g.2 $(\varepsilon, t) \rightarrow G(\varepsilon, t) : \Lambda \times R \rightarrow Y$ é C^∞ .

Agora, seja $\bar{u} = \bar{u}(\varepsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t T(\varepsilon, t-s) G(\varepsilon, s) ds$

Da hipótese sobre G , dos Lemas 4.2.3 e 5.4.1 segue-se que $\bar{u} \in F$.

Consideremos as hipóteses:

$$H.g.3 \left\{ \begin{array}{l} a) \bar{u} = o(\epsilon) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0 \\ b) \frac{\bar{u}}{\epsilon} \text{ tem limite quando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ para cada } t \in R. \end{array} \right.$$

Na parte final do parágrafo 6.3 é construída uma solução $\bar{u}$ satisfazendo a hipótese $H.g.3$ num caso particular. Consideremos inicialmente a equação

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Sabemos que existe projeção $P : R^2 \rightarrow R^2$, tal que, $|e^{At}P| \leq Ke^{-\alpha t}, t \geq 0$, e $|e^{At}(I-P)| \leq Ke^{\alpha t}, t \leq 0$.

Assumimos que $f \in P_1$. Logo, existe uma única solução 1-periódica $\bar{X} = \bar{X}(\epsilon, t)$ da equação $\dot{X} = AX + \epsilon F(t)$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ dada por $\bar{X}(t) = \epsilon \left[\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} P F(s) ds + \int_{\infty}^t e^{A(t-s)} (I-P) F(s) ds \right]$.

A solução $\bar{X}$ é C^1 em $t \in R$ e $\epsilon \in \Lambda$, é $O(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ e, além disso, $\bar{X}_{\epsilon t} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial}{\partial t} \bar{X}$ é contínua em t e 1-periódica.

De forma análoga, dado que G é continuamente diferenciável e 1-periódica em t , do Lema 4.2.4 decorre que $t \rightarrow \bar{u}(\epsilon, t) \in C^1$, e $\bar{u}$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{u} = A(\epsilon)u + G(\epsilon, t) \quad (6.8)$$

Das observações acima decorre do Teorema 5.5.2 que $\epsilon \rightarrow \bar{u}(\epsilon, \cdot)$ é C^1 e, portanto, $\bar{u}_{\epsilon} \in F$.

Como $\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s) G_s(\epsilon, s) ds$ dos Lemas 4.2.3 e 5.4.1 segue que $\bar{u}_t \in F$.

Do Teorema 5.5.2 segue que $\epsilon \rightarrow \bar{u}_t(\epsilon, \cdot)$ é C^1 e, portanto, $\bar{u}_{\epsilon t} \in F$.

Com as notações anteriores o sistema (6.6) se transforma em

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + \bar{F}(X, \epsilon, u) + \epsilon F(t) \\ \dot{u} = A(\epsilon)u + x^2 A_1 u + A_2(u) + G(\epsilon, t) \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\text{com } \bar{F}(X, \epsilon, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta \epsilon \dot{x} - dx^3 - bx \int_0^1 (u_1')^2 - \epsilon ex \end{pmatrix}$$

Utilizando as soluções $\bar{X}$ e $\bar{u}$ citadas acima, introduzimos a mudança de variável $Y = X - \bar{X}$, $v = u - \bar{u}$ recaindo no sistema

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY + \bar{F}(Y + \bar{X}, \epsilon, v + \bar{u}) \\ \dot{v} = A(\epsilon)v + (y + \bar{x})^2 A_1(v + \bar{u}) + A_2(v + \bar{u}) \end{cases} \quad (6.10)$$

Como o objetivo é procurar soluções 1-periódicas no par (Y, v) que são $O(\epsilon)$, introduzimos a mudança de escala $Y = \epsilon Z$, $v = \epsilon w$ e, portanto, devemos procurar soluções periódicas no par (Z, w) satisfazendo

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + \frac{1}{\epsilon} \bar{F}(\epsilon Z + \bar{X}, \epsilon, \epsilon w + \bar{u}) \\ \dot{w} = A(\epsilon)w + (\epsilon z + \bar{x})^2 A_1(w + \frac{\bar{u}}{\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon} A_2(\epsilon w + \bar{u}) \end{cases} \quad (6.11)$$

Definindo $H(\epsilon, Z, w, t) = (\epsilon z + \bar{x})^2 A_1(w + \frac{\bar{u}}{\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon} A_2(\epsilon w + \bar{u})$ e $N(\epsilon, Z, w, t) = \bar{F}(\epsilon Z + \bar{X}, \epsilon, \epsilon w + \bar{u})$ obtemos que $H(\epsilon, Z, w, t) = O(\epsilon^2)$ e $N(\epsilon, Z, w, t) = O(\epsilon^2)$, pois $A_2(u) = O(|u|^3)$. (6.12)

No caso específico da aplicação, $N(\epsilon, Z, w, t)$ é dada por

$$N(\epsilon, Z, w, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta \epsilon (\epsilon \dot{z} + \bar{x}) - \beta (\epsilon z + \bar{x})^3 - b(\epsilon z + \bar{x}) \int_0^1 ((\epsilon w_1 + \bar{u}_1)')^2 ds \\ -\epsilon e(\epsilon z + \bar{x}) \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

Seja $B = \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0) \subset P_1 \times P_1 = X$ e em X definimos a norma $\|(Z, w)\| = \|Z\|_{\infty} + \|w\|_{\infty}$.

Definimos $T_{\epsilon} : X \rightarrow X$ por $T_{\epsilon}(Z, w)(t) = \begin{pmatrix} T_1(Z, w)(t) \\ T_2(Z, w)(t) \end{pmatrix}$

com $T_1(Z, w)(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} P \frac{1}{\epsilon} N(\epsilon, Z(s), w(s), s) ds +$

$\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} (I-P) \frac{1}{\epsilon} N(\epsilon, Z(s), w(s), s) ds$, e $T_2(Z, w)(t) =$

$= \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s) H(\epsilon, Z(s), w(s), s) ds.$

Das estimativas feitas em (6.12) sobre H e N e da di cotomia estabelecida no Lema 6.2.1 decorre que existe $\varepsilon_0 > 0$, $L > 0$, tal que

$$|T_\varepsilon(U)| \leq \varepsilon L \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial T_\varepsilon(U)}{\partial U} \right| \leq \varepsilon L \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \text{e}$$

$$U = (Z, w) \in B.$$

Portanto, escolhendo $\varepsilon_0 > 0 : \varepsilon_0 L < \frac{1}{2}$ temos que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ vale que $|T_\varepsilon(U)| < \frac{1}{2}$ e $\left| \frac{\partial T_\varepsilon(U)}{\partial U} \right| < \frac{1}{2}$.

Portanto, do princípio da contração uniforme, decorre que existe $U^* = (Z^*, w^*)$ ponto fixo de T_ε em $B \subset X$.

Observação

O real $\varepsilon_0 > 0$ pode ser fixado anteriormente neste parágrafo, de modo que as estimativas do Lema 6.2.1, e as estimativas sobre o operador T_ε acima estejam satisfeitas.

Este procedimento será usado nos parágrafos posteriores 6.3.2, 6.3.3, 6.4 e 6.4.2, mas não o discutiremos mais na oportunidade.

6.3.1 - Diferenciabilidade com relação a t

No parágrafo anterior obtido foi um ponto fixo (Z^*, w^*) do operador T_ε , e o objetivo agora é provar que a aplicação $t \rightarrow (Z^*(t), w^*(t)) : R \rightarrow W$ é de classe C^1 , $W = R^2 \times Y$.

A continuidade da derivada de Z^* é imediata, pois

Z^* é solução de uma equação diferencial ordinária em dimensão finita.

Substituindo-se $Z^* = Z^*(t)$ na segunda componente do operador T_ϵ , obtemos que $w^*(t)$ deve satisfazer a equação integral

$$w^*(t) = \int_{-\infty}^t T_\epsilon(t-s)H(s, \epsilon, w^*(s))ds \quad \text{onde}$$

$$H(t, \epsilon, w) \stackrel{\text{def}}{=} H(\epsilon, Z^*(t), w, t)$$

Concentrar-nos-emos, agora, em verificar as hipóteses do Teorema 5.3.1 para a função $H(t, \epsilon, w)$.

A Hipótese H.T.1 decorre imediatamente do Lema 6.2.1.

A hipótese H.T.2 decorre de H.T.1, do fato que $H_w(t, \epsilon, w^*) = O(\epsilon^2)$, e da desigualdade de Gronwall dado que

$$T(t, s) = T(t-s) + \int_s^t T(t-\sigma)H_w(\sigma, \epsilon, w^*(\sigma))T(\sigma, s)d\sigma.$$

Neste caso, devido à periodicidade, a órbita $O = \{w^*(t), t \in R\} = \{w^*(t) : t \in [0, 1]\}$ é um subconjunto compacto, e portanto, o conjunto K da hipótese H.1 do Teorema 5.3.1 é compacto.

A verificação da hipótese H.2 é imediata para a primeira parcela de $H(t, \epsilon, w)$ pois $Z^*, w^*, \bar{X}, \bar{u}$ são 1-periódicas, e A_1 é um operador linear limitado.

Da definição do operador A_2 prova-se facilmente que se $B \subset Y$ é um subconjunto limitado, então $A_2(B) \subset Y$ também é limitado.

Logo, $(t, w) \rightarrow H(t, \epsilon, w) : R \times K \rightarrow Y$ é limitada

e portanto $H.2.i$ se verifica.

Agora, para verificar $H.2.ii$ vamos inicialmente analisar a continuidade uniforme da aplicação $(t, w) \rightarrow H_w(t, \varepsilon, w) : R \times K \rightarrow L(Y)$.

A parcela $(\varepsilon z^* + \bar{x})^2 A_1(w + \frac{\bar{u}}{\varepsilon})$ tem derivada com relação a w dada por $\frac{\partial}{\partial w}((\varepsilon z^* + \bar{x})^2 A_1(w + \frac{\bar{u}}{\varepsilon})) = h_1(t) A_1$ e a aplicação $(t, w) \rightarrow h_1(t) A_1 : R \times Y \rightarrow L(Y)$ é uniformemente contínua e limitada, pois $h_1 \in P_1$ e A_1 é linear limitado.

A análise da continuidade uniforme e limitação de $\frac{\partial}{\partial w} A_2(\varepsilon w + \bar{u})$ segue-se essencialmente do fato de que A_2 é suficientemente diferenciável e suas derivadas se mantêm limitadas numa vizinhança conveniente da origem.

Para completar $H.2$ resta analisar a continuidade uniforme da aplicação $(t, w) \rightarrow H_t(t, \varepsilon, w) : R \times K \rightarrow Y$ o que pode ser feito usando argumentos análogos ao anterior.

Portanto do Teorema 5.3.1 decorre que a aplicação $t \rightarrow w^*(t) : R \rightarrow Y$ é C^1 .

6.3.2 - Diferenciabilidade com relação a parâmetro

O Teorema a ser usado é o Teorema 3.1.6 de Diferenciabilidade com relação a parâmetro.

Nosso objetivo agora é obter a diferenciabilidade da aplicação $\varepsilon \rightarrow U^*(\varepsilon, .)$, onde U^* é o ponto fixo do operador T encontrado na introdução do parágrafo 6.3.

Para $\Lambda = (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, $B = \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0) \subset P_1$, $U = (Z, w)$

definimos $F : \Lambda \times X \rightarrow X$ com $X = P_1 \times P_1$ por

$$F(\epsilon, U)(t) = \left(\begin{array}{l} \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} P \frac{1}{\epsilon} N(\epsilon, U(s), s) ds + \int_{\infty}^t e^{A(t-s)} (I-P) \dots \\ N(\epsilon, U(s), s) ds \\ \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s) H(\epsilon, U(s), s) ds \end{array} \right)$$

Já sabemos do parágrafo 6.3 que a restrição $F(\epsilon, \cdot) : B \times B \rightarrow B \times B$ é C^0 , e para cada $\epsilon \in \Lambda$, existe um único ponto fixo $U^* = (Z^*, w^*)$ variando continuamente com o parâmetro ϵ , e portanto está verificada a hipótese H.2 do Teorema 3.1.6.

A hipótese H.1 do referido Teorema é óbvia para a primeira componente do operador F .

Para a segunda componente de F observemos que $\epsilon \rightarrow \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s) H(\epsilon, U(s), s) ds$ para U fixo, encontra-se nas condições Lema 5.4.1 com $B(t) = 0$.

Desta forma, fica verificada a hipótese H.1 do Teorema 3.1.6.

Sejam ϵ_1, ϵ_2 reais positivos tais que, $[\epsilon_1, \epsilon_2] \subset \Lambda$. Desta forma a dicotomia exponencial trivial provada no Lema 6.2.1 para o semi-grupo $T(\epsilon, t)$ é válida com o expoente α independente de ϵ , para $\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$.

Consideremos $U = (Z, w) \in F_1 =$ conjunto dos pontos fixos de $F(\epsilon, \cdot)$.

A hipótese H.3 do Teorema 3.1.6 é verificada trivialmente para a primeira componente de F .

Agora, para $(\epsilon, U) \in \Lambda \times F_1$ definindo $g(\epsilon, s) = H(\epsilon, U(s), s)$, devemos verificar que a aplicação $\epsilon \rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} T(\epsilon, \cdot - s)g(\epsilon, s) \, ds$ é C^1 .

As hipóteses do Teorema 5.5.2 são verificadas neste caso, pois g, g_t, g_ϵ e $g_{\epsilon t}$ pertencem à classe F .

Portanto, completamos a verificação da hipótese $H.3$ do Teorema 3.1.6.

A hipótese $H.4$ do mesmo Teorema já foi provada no parágrafo 6.3, pois existe $L > 0$, tal que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial U}(\epsilon, U) \right| = \left| \frac{\partial T_\epsilon(U)}{\partial U} \right| \leq \epsilon L$$

Portanto, diminuindo-se convenientemente ϵ_0 (por exemplo) $\epsilon L < 1$, fica assegurada a existência do $\delta_1 > 0$ exigido na hipótese $H.4$ do Teorema 3.1.6.

Portanto, $\epsilon \rightarrow U^*(\epsilon, \cdot) : \Lambda \rightarrow B \times B$ é C^1 com $U^*(\epsilon, \cdot)$ solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + \frac{1}{\epsilon} N(\epsilon, U(t), t) \\ \dot{w} = A(\epsilon)w + H(\epsilon, U(t), t) \end{cases} \quad (6.13)$$

6.3.3 - Diferenciação Mista

O objetivo agora é estabelecer, para futura utilização, a existência da derivada mista $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial w}{\partial t}$ do ponto fixo $w = w^*(\epsilon, t)$ construído no parágrafo 6.3.1.

Após substituirmos $Z = Z^*(\epsilon, t)$ solução da primeira

equação de (6.13) na segunda equação de (6.13), a solução periódica w deve satisfazer a representação integral $w(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s) f(s, w(\epsilon, s), \epsilon) ds$ onde $f(t, w, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} H(\epsilon, Z(t), w, t)$.

A função $f(t, u, \epsilon)$ satisfaz $f(t, u, \epsilon) = O(\epsilon^2)$ e $f(\cdot, u, \epsilon)$ é 1-periódica.

Do parágrafo 6.3.1 sabemos que a aplicação $t \rightarrow w(\epsilon, t)$ é de classe C^1 e, além disso, o Teorema 5.3.1 garante que $\dot{w}(\epsilon, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) f_s(s, w(s), \epsilon) ds$ onde $T(\epsilon, t, s)$ é o operador de evolução associado à equação $\dot{u} = (A(\epsilon) + B(\epsilon, t))u$ com $B(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(t, w^*(t), \epsilon)$.

A verificação da existência da derivada mista $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial}{\partial t} w$ segue os passos do Lema 5.5.4, como será visto a seguir.

Do Lema 3.1.7 existe $\lambda_0 > 0$, (independente de t e de $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$), tal que $R(\epsilon, \lambda_0, t): Y \rightarrow D(A(\epsilon))$ é um operador linear limitado em norma para $(\epsilon, t) \in (0, \epsilon_0] \times R$.

Logo

$$v(\epsilon, t) = \frac{\partial}{\partial t} w(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) (\lambda_0 - A(\epsilon, s)) R(\epsilon, \lambda_0, s) \cdot f_s(s, w(s), \epsilon) ds, \text{ onde } A(\epsilon, t) = A(\epsilon) + B(\epsilon, t)$$

O objetivo agora é obter a derivada da aplicação $\epsilon \rightarrow v(\epsilon, t)$.

Temos

$$\begin{aligned}
 v(\epsilon, t) &= - \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) A(\epsilon, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) ds \\
 &+ \lambda_0 \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) ds = \\
 &= T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) \Big|_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t \{ T(\epsilon, t, s) \cdot \\
 &\cdot \frac{\partial}{\partial s} (R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon)) \} ds + \lambda_0 \int_{-\infty}^t \{ T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) \cdot \\
 &\cdot f_s(s, w(s), \epsilon) \} ds = R(\epsilon, \lambda_0, t) f_t(t, w(t), \epsilon) + \\
 &+ \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) [R(\epsilon, \lambda_0, s) (f_{sw}(s, w(s), \epsilon) + f_{ww}(s, w(s), \epsilon) \cdot \\
 &\cdot v(\epsilon, s)) R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) + R(\epsilon, \lambda_0, s) \cdot \\
 &\cdot (f_{ss}(s, w(s), \epsilon) + f_{ws}(s, w(s), \epsilon) v(\epsilon, s))] ds + \\
 &+ \lambda_0 \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) ds = R(\epsilon, \lambda_0, t) \cdot \\
 &\cdot f_t(t, w(t), \epsilon) + \int_{-\infty}^t \{ T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) ((f_{ww}(s, w(s), \epsilon) \cdot \\
 &\cdot v(\epsilon, s)) R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) + f_{ws}(s, w(s), \epsilon) v(\epsilon, s)) \} \cdot \\
 &\cdot ds + \int_{-\infty}^t \{ T(\epsilon, t, s) R(\epsilon, \lambda_0, s) [f_{sw}(s, w(s), \epsilon) R(\epsilon, \lambda_0, s) \cdot \\
 &\cdot f_s(s, w(s), \epsilon) + f_{ss}(s, w(s), \epsilon)] \} ds + \lambda_0 \int_{-\infty}^t \{ T(\epsilon, t, s) \cdot \\
 &\cdot R(\epsilon, \lambda_0, s) f_s(s, w(s), \epsilon) \} ds.
 \end{aligned}$$

Definindo $h(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} R(\epsilon, \lambda_0, t) f_t(t, w(t), \epsilon)$, $C(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} R(\epsilon, \lambda_0, t) (f_{ww}(t, w(t), \epsilon) v) R(\epsilon, \lambda_0, t) f_t(t, w(t), \epsilon) + f_{wt}(t, w(t), \epsilon) \cdot v$, $D(\epsilon, s) \stackrel{\text{def}}{=} R(\epsilon, \lambda_0, t) [f_{tw}(t, w(t), \epsilon) R(\epsilon, \lambda_0, t) \cdot f_t(t, w(t), \epsilon) + f_{tt}(t, w(t), \epsilon) + \lambda_0 f_t(t, w(t), \epsilon)]$, a função $v(\epsilon, t)$ dada acima verifica a igualdade:

$$v(\epsilon, t) = h(\epsilon, t) + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) C(\epsilon, s) v(\epsilon, s) ds + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) D(\epsilon, s) ds \quad (6.14)$$

onde $C(\epsilon, t) : Y \rightarrow D(A(\epsilon))$; $D(\epsilon, t) : Y \rightarrow D(A(\epsilon))$ satisfazem

$$C(\epsilon, t) = O(\epsilon^2) \text{ e } D(\epsilon, t) = O(\epsilon^2), \text{ para cada}$$

$$(\epsilon, t) \in \Lambda \times R \quad (6.15)$$

Daqui para a frente, a verificação da existência e continuidade da aplicação $\epsilon \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \epsilon}(\epsilon, t)$ pode ser analisada de dois modos, a saber:

a) Definimos o operador

$$T(\epsilon, v)(t) = h(\epsilon, t) + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) C(\epsilon, s) v(\epsilon, s) ds + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) D(\epsilon, s) ds$$

Fazendo uso do Lema 6.2.1, da desigualdade de Gronwall e do fato que $f(t, w, \epsilon) = O(\epsilon^2)$ concluimos que

$$|T(\epsilon, t, s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \epsilon(t-s)} \quad t \geq s, K_1 > 0, \alpha_1 > 0 \quad (6.16)$$

Dado que do parágrafo 6.3.2 a aplicação $\epsilon \rightarrow w(\epsilon, \cdot) : \Lambda \rightarrow \beta(R)$ é de classe C^1 , podemos aplicar o Teorema 3.1.6 para concluir que o ponto fixo v de $T(\epsilon, \cdot)$ é tal que $\epsilon \rightarrow v(\epsilon, \cdot) : \Lambda \rightarrow \beta(R)$ é de classe C^1 .

b) Da expressão (6.14) é possível explicitar a função $v(\epsilon, t)$, especificamente: fazemos a mudança de variável $u=v-h$ e portanto, de (6.14), decorre que

$$\begin{aligned} u(\epsilon, t) &= \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) C(\epsilon, s) (u(\epsilon, s) + h(\epsilon, s)) ds + \\ &+ \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) D(\epsilon, s) ds = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) C(\epsilon, s) u(\epsilon, s) ds + \\ &+ \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) (C(\epsilon, s) h(\epsilon, s) + D(\epsilon, s)) ds \end{aligned}$$

Dai segue-se que

$$u(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T_1(\epsilon, t, s) (C(\epsilon, s) h(\epsilon, s) + D(\epsilon, s)) ds$$

onde $T_1(\epsilon, t, s)$ é o operador de evolução associado a equação $\dot{w} = (A(\epsilon) + B(\epsilon, t) + C(\epsilon, t))w$.

De (6.15), (6.16) e da desigualdade de Gronwall decorre que $|T_1(\epsilon, t, s)| \leq k_2 e^{-\alpha_2 \epsilon(t-s)} \quad t \geq s, K_2 > 0, \alpha_2 > 0$.

Portanto

$$v(\epsilon, t) = h(\epsilon, t) + u(\epsilon, t) = h(\epsilon, t) + \int_{-\infty}^t T_1(\epsilon, t, s)(C(\epsilon, s)h(\epsilon, s) + D(\epsilon, s))ds$$

Como $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial \epsilon}$ pertencem a classe F , um cálculo semelhante ao realizado no Teorema 5.5.5 implica que $\frac{\partial v}{\partial \epsilon} = \frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon \partial t}$ pertence a F .

Uma análise semelhante a feita acima nos leva a provar que $\frac{\partial^3 w}{\partial \epsilon \partial t^2}$ pertence a F .

Observação

Observamos que o cálculo acima pode ser considerado de forma abstrata e o resultado é válido mediante condições convenientes sobre $A(\epsilon)$ e $f(t, w, \epsilon)$, podendo inclusive envolver casos mais gerais que o acima.

6.3.4 - Análise do Limite

Sabemos de 6.3.1 que a solução periódica $U^*(t) = (Z^*, w^*)$ satisfaz o sistema de Equações Diferenciais

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + \frac{1}{\epsilon} N(\epsilon, Z(t), w(t), t) \\ \dot{w} = A(\epsilon)w + H(\epsilon, Z(t), w(t), t) \end{cases} \quad (6.17)$$

Também do fato que U^* é ponto fixo do operador T_ϵ e $N(\epsilon, Z, w, t) = O(\epsilon^2)$ e $H(\epsilon, Z, w, t) = O(\epsilon^2)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, con

cluimos que $Z(t) = O(\epsilon)$ e $w(t) = O(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Como $Y = \epsilon Z$, e $v = \epsilon w$ concluimos que $Y = O(\epsilon^2)$ e $v = O(\epsilon^2)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Portanto, a solução (X, u) da equação (6.17) inicial satisfaz

$$X = Y + \bar{X} = O(\epsilon^2) + \bar{X} \quad \text{e} \quad u = v + \bar{u} = O(\epsilon^2) + \bar{u} \quad (6.18)$$

Portanto, estendemos a solução $U(\epsilon, t) = (X(\epsilon, t), u(\epsilon, t))$ por continuidade para $\epsilon = 0$, pondo $X(0, t) = 0$ e $u(0, t) = 0$.

Agora, de (6.18) decorre que:

$$\text{Existe } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X(\epsilon, t)}{\epsilon} \quad \text{se e somente se existe } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{X}(\epsilon, t)}{\epsilon}$$

e este último limite existe pela definição de $\bar{X}$.

$$\text{Existe } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(\epsilon, t)}{\epsilon} \quad \text{se e somente se existe } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(\epsilon, t)}{\epsilon}$$

o que decorre da hipótese H.g.3.

Resumimos os resultados obtidos no parágrafo 6.3 no seguinte

Lema 6.3.5

Dentro das hipóteses anteriormente resumidas neste parágrafo, o sistema (6.9) admite uma solução $(X^*, u^*) = (X^*(\epsilon, t), u^*(\epsilon, t))$ 1-periódica em t , que é $O(\epsilon)$. As funções $t \rightarrow (X^*, u^*)$ e $\epsilon \rightarrow (X^*(\epsilon, .), u^*(\epsilon, .))$ são de classe C^1

e além disso; se $Y^* = (X^*, u^*)$ então $Y^*, Y_t^*, Y_\varepsilon^*, Y_{\varepsilon t}^*, Y_{\varepsilon t t}^*$ pertencem à classe F e são 1-periódicas em t .

□

Observação

Nosso objetivo, agora, concentra-se em construir uma solução $u = u(\varepsilon, t)$ da equação diferencial forçada (6.19) $u = A(\varepsilon)u + G(\varepsilon, t)$ que seja $O(\varepsilon)$ para uma dada função $G = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ particular.

Seja $g(t, z, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon h(z) \cos 2\pi t$. Como em [23] vamos impor a condição de não ressonância $n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 - \Gamma_1) \neq 4\pi^2$ para $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Para $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ procuraremos soluções de (6.19) do tipo $v(t, z) = \sum_{n \geq 2} a_n(t) \sin n\pi z$, pois u deve pertencer ao espaço Y .

Portanto, decorre que os coeficientes $a_n(t)$ devem satisfazer a equação diferencial

$$\ddot{y} + \delta \varepsilon \dot{y} + n^2 \pi^2 (1 + \varepsilon \Gamma_1) (n^2 \pi^2 - \Gamma_1) y = \varepsilon \beta_n \cos 2\pi t \quad (6.20)$$

$$\text{com } \beta_n = 2 \int_0^1 h(z) \sin n\pi z \, dz, \quad n \geq 2.$$

O polinômio característico desta equação tem raízes

$$\lambda_n = \frac{1}{2} [-\varepsilon \delta \pm (\varepsilon^2 \delta^2 - 4n^2 \pi^2 (1 + \varepsilon \Gamma_1) (n^2 \pi^2 - \Gamma_1))^{\frac{1}{2}}]$$

Portanto, para cada $n \geq 2$ concluímos que os auto-

-valores $\lambda_n^1 = \lambda_1(\varepsilon)$ e $\lambda_n^2 = \lambda_2(\varepsilon)$ obtidos com os sinais + e - respectivamente em λ_n são negativos.

Para $c_n(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} n^2 \pi^2 (1 + \varepsilon \gamma_1) (n^2 \pi^2 - \Gamma_1)$ definindo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_n(\varepsilon) & -\delta\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{a equação (6.20) na forma}$$

de sistema é dada por

$$\dot{Y} = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \beta_n \cos 2\pi t \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

A solução periódica da equação (6.21) é

$$Y(t) = \frac{\varepsilon \beta_n}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} -\left[\frac{w}{w^2 + \lambda_1^2} \operatorname{sen} wt - \frac{\lambda_1}{w^2 + \lambda_1^2} \operatorname{cos} wt \right] + \left[\frac{w}{w^2 + \lambda_2^2} \operatorname{sen} wt - \frac{\lambda_2}{w^2 + \lambda_2^2} \operatorname{cos} wt \right] \\ -\lambda_1 \left[\frac{w}{w^2 + \lambda_1^2} \operatorname{sen} wt - \frac{\lambda_1}{w^2 + \lambda_1^2} \operatorname{cos} wt \right] + \lambda_2 \left[\frac{w}{w^2 + \lambda_2^2} \operatorname{sen} wt - \frac{\lambda_2}{w^2 + \lambda_2^2} \operatorname{cos} wt \right] \end{bmatrix}$$

onde $w = 2\pi$.

Pode-se provar que existem $K > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ tal que, $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$ temos que as expressões $\frac{1}{|\lambda_2 - \lambda_1|}$,

$$\frac{|\lambda|}{|w^2 + \lambda^2|}, \quad \frac{|\lambda w|}{|w^2 + \lambda^2|} \quad \text{são majoradas por} \quad \frac{K}{n^2}, \quad \frac{|\lambda^2|}{|w^2 + \lambda^2|} \leq K$$

$$\frac{|w|}{|w^2 + \lambda^2|} \leq \frac{K}{n^4}, \quad \text{para} \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2.$$

Utilizando estes fatos e a expressão de $v(t, z)$ um

cálculo natural mostra que $|v''| \leq (cte) \cdot \epsilon$ e $|w| = |\dot{v}| \leq (cte) \cdot \epsilon$, e portanto $|u| \leq (cte) \cdot \epsilon$, $\forall \epsilon \in [0, \epsilon_0]$, e para $\forall \delta \in [\delta_0, \delta_1]$.

□

6.4 - EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO LIMITADA

O interesse neste parágrafo é estudar a perturbação da órbita homoclínica $(\Gamma, 0)$ do sistema $\ddot{x} + g(x) = 0$ e $\dot{u} = A(\epsilon)u$.

Retomamos o sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} + g(x) = -\delta\epsilon\dot{x} + \epsilon f(t) + F(X, u) - \epsilon ex \\ \dot{u} = A(\epsilon)u + H(X)A_1u + A_2(u) + G(\epsilon, t) \end{cases} \quad (6.22)$$

com $X = (x, \dot{x})$, $u = (u_1, u_2)$, $F(X, u) = -bx \int_0^1 (u_1')^2 dz$, $H(X) = x^2 = O(|X|^2)$, $g(x) = -ax + h(x)$ onde $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} dx^3$ e portanto $h(0) = h'(0) = 0$.

Temos também $F(X, u) = O(|u|^2)$ para u próximo do zero.

O lema 6.3.5 garante a existência de uma solução $Y^* = (X^*, u^*)$ 1-periódica de (6.22) que é $O(\epsilon)$ e continuamente diferenciável em $t \in R$, e $\epsilon \in \Lambda$.

Além disso, as derivadas Y_t^* , Y_ϵ^* , $Y_{\epsilon t}^*$ e $Y_{\epsilon t t}^*$ existem, são 1-periódicas em t e pertencem a classe F . (6.23)

Introduzimos a mudança de variável $Y = X - X^*$, $v = u - u^*$ com $Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

O sistema (6.22) é transformado em

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} + g(y) = h(x^*) - h(y+x^*) + h(y) + F(Y+X^*, v+u^*) - F(X^*, u^*) \\ \quad - \delta \epsilon \dot{y} - \epsilon e y \\ \dot{v} = A(\epsilon)v + H(X^*+Y)A_1(v+u^*) - H(X^*)A_1u^* + A_2(v+u^*) - \\ \quad A_2u^* \end{array} \right. \quad (6.24)$$

com $h(x^*) - h(y+x^*) + h(y) = g(x^*) - g(y+x^*) + g(y)$.

Seja $P(t) = (p(t), \dot{p}(t))$ solução da equação $\ddot{x} + g(x) = 0$ que parametriza a órbita homoclínica satisfazendo $\dot{p}(0) = 0$.

Introduzimos desta forma a mudança $Y(t-\alpha) = P(t) + Z(t)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $Z = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Logo o sistema (6.24) é transformado em

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = A(t)Z + G(t, Z, v, \epsilon, \delta, \alpha) \\ \dot{v} = A(\epsilon)v + H(X^*+P+Z)A_1(v+u^*) - H(X^*)A_1u^* + \\ \quad + A_2(v+u^*) - A_2u^* \end{array} \right. \quad (6.25)$$

onde X^* e u^* no sistema acima indicam $X^*(t-\alpha)$ e $u^*(t-\alpha)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(p)z & 0 \end{pmatrix}, \quad G(t, Z, v, \epsilon, \delta, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad \text{com}$$

$$G_2 = g(p) - g(p+z) + g'(p)z + h(x^*) - h(p+z+x^*) + h(p+z) +$$

$$+ F(P+Z+X^*, v+u^*) - F(X^*, u^*) - \delta \epsilon \dot{p} - \delta \epsilon \dot{z} - \epsilon e p - \epsilon e z.$$

Observamos também que $h(x^*) = O(\epsilon^2)$ e $h_1(t, z)$
 $\stackrel{\text{def}}{=} g(p) - g(p+z) + g'(p)z = O(|z|^2).$

Fazendo uso do Método Alternativo, procurar soluções (z, v) de 6.25 de classe C^1 , é equivalente a procurar soluções C^1 de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = A(t)Z + (I-L)G \quad (a) \\ \dot{v} = A(\epsilon)v + H(P)A_1 v + (H(X^*+P+Z)-H(P))A_1(v+u^*) + \\ \quad + H(P)A_1 u^* - H(X^*)A_1 u^* + A_2(v+u^*) - A_2 u^* \quad (b) \end{array} \right. \quad (6.26)$$

com $LG = 0$, onde L é a projeção dada no Lema 1.3.1.

O sistema 6.26 é conhecido como equação auxiliar e será analisado inicialmente, enquanto que a equação $LG = 0$ é denominada equação de bifurcação e será analisada no parágrafo 6.4.5.

Com o objetivo de "retirar" da equação 6.26-a o termo $(I-L) \begin{pmatrix} 0 \\ -h'(p)x^* - \epsilon e p \end{pmatrix}$, vamos analisar inicialmente a equação

$$\dot{Z} = A(t)Z + (I-L) \begin{pmatrix} 0 \\ -h'(p)x^* - \epsilon e p \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Do Lema 1.3.1 decorre que existe uma única solução

$\bar{z} = \bar{z}(\epsilon, t)$, de 6.27 com $\bar{z} \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$.

Além disso, $\bar{z}$ é C^1 em $t \in R$, e $\epsilon \in \Lambda$, é $O(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, e $\bar{z}_t, \bar{z}_\epsilon$ e $\bar{z}_{\epsilon t}$ pertencem a classe F .

Logo, introduzimos em 6.26-a a mudança de variável $X = Z - \bar{z}$ recaindo na equação

$$\dot{X} = A(t)X + (I-L) \begin{pmatrix} 0 \\ G_3 \end{pmatrix} \quad \text{com}$$

$$G_3(t, X, v, \epsilon, \delta, \alpha) = -h_1(t, x+\bar{z}) + h(x^*) - (h(p+x+\bar{z}+x^*) -$$

(6.28)

$$- h(p+x+\bar{z}) - h'(p)x^*) + F(P+X+\bar{z}+X^*, v+u^*) - F(X^*, u^*) -$$

$$- \delta \epsilon (\dot{x} + \frac{\dot{z}}{z}) - \epsilon e(x + \bar{z}).$$

De forma análoga, vamos "retirar" da equação 6.26-b o termo $H(P)A_1 u^*$, ou seja, consideremos a equação (6.29) $\dot{v} = A(\epsilon)v + f(t, v)$ com $f(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} H(P)A_1 v + H(P)A_1 u^*$.

A representação integral $\bar{v}(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t \{T(\epsilon, t-s).$

$\cdot f(s, v(s))ds$, encontra-se nas condições do Teorema 5.3.1 e, portanto, $t \rightarrow \bar{v}(\epsilon, \cdot)$ é C^1 , e $\bar{v}(\epsilon, \cdot)$ satisfaz (6.29) para cada $\epsilon \in \Lambda$.

Além disso, se $T(\epsilon, t, s)$ é o operador de evolução associado a equação $\dot{v} = (A(\epsilon) + H(P)A_1)v$, decorre que $\bar{v}(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s)H(P(s))A_1 u^*(\epsilon, s)ds$ e, portanto, $\bar{v}(\epsilon, t) = O(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Dos Lemas 4.2.3 e 5.4.1 decorre que $\bar{v} \in F$.

Além disso, de (6.23) e do Teorema 5.5.5 obtemos que

$\epsilon \rightarrow \bar{v}(\epsilon, \cdot)$ é C^1 e, portanto, $\bar{v}_\epsilon \in F$.

Do Teorema 5.3.1 decorre que

$$\dot{\bar{v}}(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) f_s(s, v(\epsilon, s)) ds$$

Fazendo $g(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} f_t(\epsilon, v(\epsilon, t))$ e $B(t) \stackrel{\text{def}}{=} H(P)A_1$, temos $g(\epsilon, t) = \dot{B}v + \dot{B}u^* + B\dot{u}^*$ e, portanto, os Lemas 4.2.3 e 5.4.1 asseguram que $\bar{v}_t \in F$.

A análise da derivada $\bar{v}_{\epsilon t} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \epsilon \partial t}$ é feita como no parágrafo 6.3.3 e, portanto, introduzindo na expressão de $\dot{\bar{v}}$ o resolvente $R(\epsilon, t) = (\lambda_0 - A(\epsilon, t))^{-1}$ com $A(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} A(\epsilon) + B(t)$, se $f(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} B(t)u^*(\epsilon, t)$, $h(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} R(\epsilon, t)(\dot{B}(t)\bar{v}(\epsilon, t) + \dot{f}(\epsilon, t))$, $C(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} R(\epsilon, t)\dot{B}(t)$ e $D(\epsilon, t) = R(\epsilon, t)[\dot{B}(t)R(\epsilon, t) \cdot (\dot{B}(t)\bar{v}(\epsilon, t) + \dot{f}(\epsilon, t)) + \ddot{B}(t)\bar{v}(\epsilon, t) + \ddot{f}(\epsilon, t) + \lambda_0(\dot{B}(t)\bar{v}(\epsilon, t) + \dot{f}(\epsilon, t))]$, a expressão de $\dot{\bar{v}}$ transforma-se em

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}(\epsilon, t) = & h(\epsilon, t) + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) C(\epsilon, s) \dot{\bar{v}}(\epsilon, s) ds + \\ & + \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) D(\epsilon, s) ds \end{aligned}$$

onde $C(\epsilon, t) : Y \rightarrow D(A(\epsilon))$, $D(\epsilon, t) : Y \rightarrow D(A(\epsilon))$.

De forma análoga ao parágrafo 6.3.3 seja $T_1(\epsilon, t, s)$ o operador de evolução associado a equação $\dot{w} = (A(\epsilon) + B(t) + C(\epsilon, t))w$.

Como $|P(t)|$ decai exponencialmente quando $|t| \rightarrow \infty$, do Lema 6.2.1 e da desigualdade de Gronwall decorre que, $|T_1(\epsilon, t, s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \epsilon(t-s)}$, $t \geq s$, $K_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$.

Desta forma,obtemos que

$$\dot{\bar{v}}(\epsilon, t) = h(\epsilon, t) + \int_{-\infty}^t T_1(\epsilon, t, s)(C(\epsilon, s)h(\epsilon, s) + D(\epsilon, s))ds$$

A diferenciabilidade de $\dot{\bar{v}}$ com relação a ϵ depende essencialmente do fato que $\bar{v}$, $\bar{v}_\epsilon$, u^* , u_ϵ^* , u_t^* , $u_{\epsilon t}^*$, u_{tt}^* , $u_{\epsilon tt}^*$ pertencem à classe F e do Teorema 5.5.3. Concluimos, portanto, seguindo a linha do Teorema 5.5.5, que $\bar{v}_{\epsilon t} \in F$.

Assim, introduzindo a mudança de variável $u = v - \bar{v}$ e, juntando com o obtido em (6.28), obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{l} \dot{X} = A(t)X + (I-L) \begin{pmatrix} 0 \\ G_3 \end{pmatrix} ; \quad v = u + \bar{v} \\ \dot{u} = A(\epsilon)u + H(P)A_1u + (H(P+X+\bar{Z}+X^*) - H(P))A_1u + \\ + (H(P+X+\bar{Z}+X^*)-H(P))A_1(\bar{v}+u^*)-H(X^*)A_1u^* + \\ + A_2(u+\bar{v}+u^*) - A_2u^* \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Dado que pretendemos obter soluções limitadas de (6.30) que são $O(\epsilon)$, isto sugere a mudança de escalas $X = \epsilon Y$, $u = \epsilon w$ e, portanto, recaímos no sistema

$$\left[\begin{array}{l} \dot{Y} = A(t)Y + H_1(t, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) \\ \dot{w} = A(\epsilon)w + H(P)A_1w + H_2(t, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) \end{array} \right. \quad (6.31)$$

onde $H_1 = (I-L) \begin{pmatrix} 0 \\ G_4 \end{pmatrix}$ com $G_4(t, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) =$
 $= \frac{1}{\epsilon} G_3(t, \epsilon Y, \epsilon w + \bar{v}, \epsilon, \delta, \alpha)$ e $H_2 = [H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)] A_1 w +$
 $(H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)) A_1 \frac{(\bar{v} + u^*)}{\epsilon} - \frac{H(X^*) A_1 u^*}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} (A_2(\epsilon w + \bar{v} + u^*) -$
 $- A_2 u^*)].$

As funções H_1 e H_2 em termos das funções iniciais que aparecem na equação da viga são dadas por:

$$\begin{aligned} \vdash H_1 &= (I-L) \begin{pmatrix} 0 \\ G_4 \end{pmatrix} \text{ com } G_4(t, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) = -6d(y + \frac{\bar{z}}{\epsilon})x^* - \\ &- 3d(\epsilon y + \bar{z})^2 \frac{x^*}{\epsilon} - 3d(p + \epsilon y + \bar{z}) \frac{(x^*)^2}{\epsilon} - b(p + \epsilon y + \bar{z}) \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 [(\bar{v}_1 + \epsilon w_1)']^2 \\ &- 2b(p + \epsilon y + \bar{z}) \int_0^1 ((\bar{v}_1 + \epsilon w_1)') (\frac{u_1^*}{\epsilon})' - b(p + \epsilon y + \bar{z}) \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 ((u_1^*)')^2 - \\ &- b \frac{x^*}{\epsilon} \int_0^1 [(\bar{v}_1 + \epsilon w_1)']^2 - 2b \frac{x^*}{\epsilon} \int_0^1 ((\bar{v}_1 + \epsilon w_1)') (u_1^*)' + \\ &+ e(\epsilon y + \bar{z}) - \delta(\epsilon \dot{y} + \dot{\bar{z}}) - 3d \frac{p}{\epsilon} (\epsilon y + \bar{z})^2 - \frac{d}{\epsilon} (\epsilon y + \bar{z})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdash H_2 &= 2p(\epsilon y + \bar{z}) A_1 (\frac{\bar{v}}{\epsilon} + w) + (\epsilon y + \bar{z})^2 A_1 (\frac{\bar{v}}{\epsilon} + w) + \\ &+ 2px^* A_1 (\frac{\bar{v}}{\epsilon} + w) + 2x^*(\epsilon y + \bar{z}) A_1 (\frac{\bar{v}}{\epsilon} + w) + (x^*)^2 A_1 (\frac{\bar{v}}{\epsilon} + w) + \\ &+ 2p(\epsilon y + \bar{z}) A_1 \frac{u^*}{\epsilon} + (\epsilon y + \bar{z})^2 A_1 \frac{u^*}{\epsilon} + 2p \frac{x^*}{\epsilon} A_1 u^* + \\ &+ 2(\epsilon y + \bar{z}) \frac{x^*}{\epsilon} A_1 u^* + \frac{1}{\epsilon} (A_2(\epsilon w + \bar{v} + u^*) - A_2 u^*). \end{aligned}$$

De maneira natural podemos obter a estimativa $H_1 =$
 $= O(\epsilon)$ (6.32)

A título de ilustração, faremos alguma estimativa nas parcelas que compõem H_2 .

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} [H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)] &= \frac{1}{\epsilon} \left[\int_0^1 \frac{d}{d\theta} H(\theta(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) + \right. \\ &+ (1-\theta)P) d\theta = \frac{1}{\epsilon} \left[\int_0^1 H'(P + \theta(\epsilon Y + \bar{Z} + X^*)) (\epsilon Y + \bar{Z} + X^*) d\theta \right] = \frac{1}{\epsilon} [H'(P) + \\ &+ O(\epsilon Y + \bar{Z} + X^*) (\epsilon Y + \bar{Z} + X^*)] = \frac{H'(P)}{\epsilon} (\epsilon Y + \bar{Z} + X^*) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{\epsilon} (H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)) A_1 (\bar{v} + u^*) = H'(P) O(\epsilon) + O(\epsilon^2)$$

De forma análoga estimamos as demais parcelas obtendo

$$(H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)) A_1 w = H'(P) O(\epsilon) + O(\epsilon^2)$$

$$\frac{1}{\epsilon} A_2 (\epsilon w + \bar{v} + u^*) = O(\epsilon^2) \quad \text{e} \quad A_2 u^* = O(\epsilon^3)$$

Resumindo as estimativas acima afirmando que H_2 pode ser escrito na forma $H_2 = \mu(t) O(\epsilon) + O(\epsilon^2)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ com $\mu: R \rightarrow R$ continua e $\int_R \mu(t) dt < \infty$ (6.33)

Podemos agora fazer uso do Corolário 4.4.1 e, portanto

to, o sistema (6.31) admite solução C^1 no par (Y, w) se e so mente se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(\cdot) = K(I-L)H_1(\cdot, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) \\ w(\cdot) = \int_{-\infty}^{\cdot} T(\epsilon, \cdot, s)H_2(s, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha)ds \end{array} \right. \quad (6.34)$$

admite solução (Y, w) C^1 e limitada.

Vamos procurar inicialmente soluções (Y, w) de (6.34) continuas e limitadas.

Para $U = (Y, w) \in W = \beta_0(R) \times \beta_0(R)$ definimos a norma $|U| = |Y|_{\beta_0} + |w|_{\beta_0}$.

Seja $T: W \rightarrow W$ o operador definido por

$$T(U) = (T_1(U), T_2(U)) = (K(I-L)H_1(\cdot, U, \epsilon, \delta, \alpha), \int_{-\infty}^{\cdot} T(\epsilon, \cdot, s)H_2(\cdot, U, \epsilon, \delta, \alpha)ds)$$

O nosso objetivo é encontrar um ponto fixo $U^* = (Y^*, w^*)$ de T numa vizinhança do zero de W .

Considero $B = \bar{B}_{\frac{1}{2}} = \{U \in W : |U| \leq \frac{1}{2}\}$. Das estimati vas feitas em (6.32) e (6.33) sobre H_1 e H_2 , como K e L são operadores lineares limitados, e do fato que $T(\epsilon, t, s)$ sa tisfaz uma dicotomia exponencial trivial em R , decorre que existe $\epsilon_1 > 0$, $L > 0$, tal que, $|T(U)| \leq \epsilon L$ e $|\frac{\partial T}{\partial U}| \leq \epsilon L$ pa ra $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$ e $U \in B$.

Logo, escolhendo $\epsilon_1 > 0$, tal que, $\epsilon L < \frac{1}{2}$, decorre que

para cada $\epsilon \in \Lambda = (0, \epsilon_0]$ temos $T(B) \subset B$ e $|T(U) - T(V)| \leq \frac{1}{2}|U - V|$, $U, V \in B$.

Do princípio da contração uniforme, temos que existe $U^* = (Y^*, w^*)$ ponto fixo de T em B variando continuamente com o parâmetro $\epsilon \in \Lambda$.

6.4.1 - Diferenciabilidade com relação a t

No parágrafo anterior, obtivemos um ponto fixo (Y^*, w^*) em B do operador $T: W \rightarrow W$ e, agora, o nosso objetivo concentra-se em mostrar que a aplicação $t \mapsto (Y^*(t), w^*(t))$ é de classe C^1 .

A conclusão é simples para a aplicação $t \mapsto Y^*(t)$; com $Y = Y^*(t)$ e $\dot{Y}^*(t)$ limitadas, e portanto, substituindo-se $Y^*(t)$ na segunda componente de T obtemos para $w = w^*$ a representação

$$w(t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t-s)(H(P(s))A_1 w(s) + H_2(s, w(s))) ds$$

onde $H_2(t, w) = H_2(t, Y(t), w, \epsilon, \delta, \alpha)$.

Logo, para concluir que $t \mapsto w(t)$ é C^1 basta verificar as hipóteses do Teorema 5.3.1 para $f(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} H(P(t))A_1 w + H_2(t, w)$.

A hipótese H.T.1 decorre do Lema 6.2.1.

A hipótese H.T.2 decorre de H.T.1, do fato que a derivada com relação a w de $H_2(t, w) = [H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)]$.

$A_1 w + (H(P + \epsilon Y + \bar{Z} + X^*) - H(P)) A_1 \frac{(\bar{v} + u^*)}{\epsilon} - \frac{H(X^*)}{\epsilon} A_1 u^* + \frac{1}{\epsilon} [A_2(\epsilon w + \bar{v} + u^*) - A_2 u^*]$ satisfaz a uma estimativa do tipo de (6.33), e, portanto, $B(t) = f_w(t, w(t)) = p^2 A_1 + \frac{\partial H_2}{\partial w}(t, w(t)) = p^2 A_1 + p(t)O(\epsilon) + O(\epsilon^2)$, e da desigualdade de Gronwall.

Neste caso o conjunto $O = \{w(t), t \in R\} \subset \beta_0(R)$ é relativamente compacto, pois $w(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$, e portanto o conjunto K da hipótese H.1 do Teorema 5.3.1 é compacto.

A hipótese H.2.i do Teorema 5.3.1 é verificada num contexto um pouco mais geral; especificamente: se $B \subset Y$ é um subconjunto limitado então

a) $(t, w) \rightarrow p^2(t) A_1 w$ é limitada em $R \times B$

b) $A_2(B) \subset Y$ é limitado.

Portanto de a) e b) decorre que $(t, w) \rightarrow f(t, w): R \times B \rightarrow Y$ é limitada pois, H_2 é constituída de uma composição de funções limitadas.

Consideremos agora a afirmação :

Afirmação A $\left\{ \begin{array}{l} h: R \rightarrow R \text{ uniformemente contínua e limitada} \\ A_1: Y \rightarrow Y \text{ linear limitado} \end{array} \right.$

$(t, w) \rightarrow h(t) A_1 w: R \times Y \rightarrow Y$ é uniformemente contínua e limitada

da em $R \times$ limitado.

O fato que $(t, w) \rightarrow f_t(t, w) : R \times K \rightarrow Y$ e $(t, w) \rightarrow f_w(t, w) : R \times K \rightarrow L(Y)$ são uniformemente contínuas e limitadas decorre essencialmente da Afirmação A, do fato que A_2 e suas derivadas ficam limitadas em um limitado conveniente que contem a origem, e que $\bar{v} + u^*$ e $\dot{\bar{v}} + \dot{u}^*$ são uniformemente contínuas e limitadas em $t \in R$, o que corresponde a hipótese H.2.ii.

Desta forma ficam verificadas as hipóteses do Teorema 5.3.1 e, portanto, $t \rightarrow w(t)$ é C^1 .

6.4.2 - Diferenciabilidade com relação a parâmetro

Como no caso periódico, usaremos o Teorema 3.1.6 para concluir a diferenciabilidade da aplicação $\epsilon \rightarrow U^*(\epsilon, \cdot) = (Y^*(\epsilon, \cdot), w^*(\epsilon, \cdot))$.

Para $\Lambda = (0, \epsilon_0)$, $\epsilon_0 > 0$, $B = \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0) \subset \beta_0(R)$, $U = (Y, w)$ definimos $F: \Lambda \times W \rightarrow W$ com $W = \beta_0(R) \times \beta_0(R)$ por

$$F(\epsilon, U)(t) = \begin{pmatrix} K(I-L)H_1(t, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) \\ \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s)H_2(s, Y, w, \epsilon, \delta, \alpha) ds \end{pmatrix}$$

Foi provada na introdução do parágrafo 6.4 que para $u \in B$ a restrição $F(\epsilon, \cdot) : \Lambda \times B \rightarrow B \times B$ é C^0 e, para cada $\epsilon \in \Lambda$, existe um único ponto fixo $U^* = (Y^*, w^*)$ de $F(\epsilon, \cdot)$ variando continuamente com o parâmetro ϵ e, portanto, a hipótese H.2 do Teorema 3.1.6 está verificada.

A hipótese $H.1$ do referido Teorema é óbvia para a primeira componente do operador F .

Para a segunda componente de F observamos que para cada U fixo em B a aplicação $\epsilon \rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} T(\epsilon, \dots, s) H_2(\epsilon, U, s) ds$ encontra-se nas condições do Lema 5.4.1.

Logo completa-se a verificação de $H.1$.

Seguindo a linha do caso periódico fixo, sejam ϵ_1, ϵ_2 reais positivos, tais que $\Lambda_1 = [\epsilon_1, \epsilon_2] \subset \Lambda$.

Para $U(\epsilon) = U^*(\epsilon)$ seja $F_1 = \{U(\epsilon)\}$ conjunto dos pontos fixos de $F(\epsilon, \dots)$.

Para $(\epsilon, U) \in \Lambda \times F_1$ a diferenciabilidade da primeira componente de F com relação a ϵ depende somente da linearidade e limitação dos operadores K e L , e do fato de H_1 ser uma soma algébrica de funções C^1 em ϵ .

Agora, para $(\epsilon, u) \in \Lambda \times F_1$ definindo $g(\epsilon, s) = H_2(s, U(s), \epsilon)$ devemos verificar que a aplicação $\epsilon \rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} T(\epsilon, \dots, s) g(\epsilon, s) ds$ é C^1 .

Para $\epsilon \in \Lambda_1$, as hipótese do Teorema 5.5.5 sobre g , dependem do fato que tais propriedades são válidas para a solução periódica (X^*, u^*) e para as soluções forçadas $(\bar{Z}, \bar{v})$ e da expressão que define H_2 .

Completamos desta forma a verificação de $H.3$ do Teorema 3.1.6.

A hipótese $H.4$. do mesmo Teorema já foi verificada na introdução do parágrafo 6.4 pois,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial U}(\epsilon, U) \right| = \left| \frac{\partial T}{\partial U}(\epsilon)(U) \right| \leq \epsilon L \quad \text{para algum } L > 0.$$

Portanto, diminuindo-se $\varepsilon_0 > 0$ de forma conveniente, fica assegurada a existência do $\delta_1 > 0$ da hipótese H.4.

Logo, pelo Teorema 3.1.6, a aplicação $\varepsilon \rightarrow U^*(., t) : \Lambda \rightarrow B \times B$ é C^1 com $U^*(\varepsilon, .) = (Y^*(\varepsilon, .), w^*(\varepsilon, .))$ solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + (I-L)H_1(t, U, \varepsilon, \sigma, \delta) \\ \dot{w}(t) = A(\varepsilon, t)w(t) + H_2(t, U, \varepsilon, \delta, \alpha) \end{cases}$$

Observação

1) As propriedades de regularidade com relação ao parâmetro ε estudadas nos parágrafos 6.3.2 e 6.4.2 podem ser tratadas sem modificações essenciais com relação ao parâmetro $(\varepsilon, \delta, \alpha)$.

Na verdade, o parâmetro δ só comparece na parte limitada do operador $A(\varepsilon, \delta)$, o que simplifica a análise.

2) No caso específico da equação da viga, com uma mudança de variável, pode-se dar um tratamento análogo para $\varepsilon < 0$.

6.4.3 - Análise do Limite

Sabemos, do parágrafo 6.4.2, que a solução limitada $U^* = (Y^*, w^*)$ de (6.34) é tal que, $\varepsilon \rightarrow U^*(\varepsilon, .)$ é de classe C^1 .

Portanto, a solução limitada (Z^*, v^*) de 6.26 com

$Z^* = \epsilon Y^* + \bar{Z}$ e $v^* = \epsilon w^* + \bar{v}$ satisfaz a mesma condição de diferenciabilidade com relação a ϵ , dado que tal propriedade é válida para as soluções $\bar{Z}(\epsilon, t)$ e $\bar{v}(\epsilon, t)$ de (6.27) e (6.29), respectivamente, que são $O(\epsilon)$.

Desta forma, como no parágrafo 6.3.4 podemos estender a solução (Z^*, v^*) de 6.26 por continuidade para $\epsilon = 0$, pondo $Z^*(0, t) = 0$ e $v^*(0, t) = 0$.

Além disso, temos

└ Existe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z^*(\epsilon, t)}{\epsilon}$ se e somente se existe

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{Z}(\epsilon, t)}{\epsilon}$. Este ultimo limite existe pela definição de $\bar{Z}$.

└ Existe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v^*(\epsilon, t)}{\epsilon}$ se e somente se existe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(\epsilon, t)}{\epsilon}$.

Este ultimo limite será analisado a seguir.

Do parágrafo 6.3.4 segue-se que para cada $t \in R$ a solução periódica $\frac{u^*}{\epsilon}(\epsilon, t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Do Lema 6.2.1 obtemos que $|T(0, t)| \leq k \quad \forall t \geq 0$, e, portanto, segue-se da desigualdade de Gronwall que $|T(0, t, s)| \leq K_1 \quad \forall t \geq s$.

Definimos $w(\epsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{v}}{\epsilon}(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^t T(\epsilon, t, s) H(P(s)) \cdot A_1 \frac{u^*(\epsilon, s)}{\epsilon} ds$ e $\bar{w}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t T(0, t, s) H(P(s)) A_1 \bar{u}(s) ds$.

Seguindo a linha do Lema 5.4.1, um cálculo natural, fazendo uso do Teorema 3.1.5 e do Lema 5.2.1, assegura que para cada $t \in R$ $w(\epsilon, t) \rightarrow \bar{w}(t)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Resumimos os resultados obtidos até aqui no seguinte

Lema 6.4.4

Dentro das hipóteses assumidas anteriormente neste parágrafo, o sistema (6.22) admite uma solução $(X^*, u^*) = (X^*(\epsilon, t), u^*(\epsilon, t))$ limitada para $t \in \mathbb{R}$ e que é $O(\epsilon)$. As funções $t \rightarrow (X^*, u^*)$ e $\epsilon \rightarrow (X^*, u^*)$ são de classe C^1 .

□

6.4.5 - A Equação de Bifurcação

Retomamos a equação 6.26a onde $G_2 = h_1(t, z) + g(x^*) - g(p+z+x^*) + g(p+z) + F(P+Z+X^*, v+u^*) - F(X^*, u^*) - \delta \in \dot{p} - \delta \in \dot{z} - \epsilon e p - \epsilon e z = h_1(t, Z) - ((g(p+z+x^*) - g(p+z) - g'(p+z)z^*) - (g'(p+z)x^* - g'(p)x^*) + g(x^*) - g'(p)x^* - \delta \in \dot{z} - \delta \in \dot{p} - \epsilon e z - \epsilon e p + F(P+Z+X^*, v+u^*) - F(X^*, u^*)$,

São válidas as seguintes estimativas:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(t, z) = O(|z|^2) \\ g(p+z+x^*) - g(p+z) - g'(p+z)X^* = O(\epsilon^2) \\ g'(p+z)x^* - g'(p)x^* = O(\epsilon|z|). \end{array} \right. \quad (6.35)$$

Do parágrafo 6.4 sabemos que a solução $Z^* = \epsilon Y^* + \bar{Z}$ e $v^* = \epsilon w^* + \bar{v}$ da equação auxiliar 6.26 satisfaz $Z^* = O(\epsilon)$ e $v^* = O(\epsilon)$, e a diferenciabilidade das aplicações $\epsilon \rightarrow Z^*(\epsilon, t)$ e $\epsilon \rightarrow v^*(\epsilon, t)$ está assegurada pelas propriedades

de $\bar{z}$ e $\bar{v}$ e do parágrafo 6.4.2.

Logo, fazendo uso destas estimativas sobre z^* e v^* , de 6.35, e da expressão inicial de G_2 , a equação de bifurcação $LG_2 = 0$ onde $(Lf)(t) = \frac{1}{\eta} \int_R \dot{p}(t)f(t)dt$, $\eta = \int_R \dot{p}^2$, fica reduzida a $L(g(x^*) - g'(p)x^* - \delta \epsilon \dot{p} + O(\epsilon^2))dt = 0$ ou equivalentemente, $\frac{1}{\eta} \int_R \dot{p}(t)(g(x^*(t-\alpha)) - g'(p(t))x^*(t-\alpha) - \delta \epsilon \dot{p} + O(\epsilon^2)) \cdot dt = 0$ (6.36)

Agora, efetuamos uma integração por partes:

$$\begin{aligned} & \int_R (\dot{p}(t)g(x^*(t-\alpha)) - \dot{p}(t)g'(p(t))x^*(t-\alpha))dt = \\ & \int_R \dot{p}(t)g(x^*(t-\alpha))dt - [g(p(t))x^*(t-\alpha)]_{-\infty}^{\infty} - \\ & - \int_R g(p(t))\dot{x}^*(t-\alpha)dt = \int_R \dot{p}(t)g(x^*(t-\alpha))dt - \\ & - \int_R \ddot{p}(t)x^*(t-\alpha)dt = \int_R \dot{p}(t)g(x^*(t-\alpha))dt + \\ & + [- \dot{p} x^*(t-\alpha)]_{-\infty}^{\infty} + \int_R \dot{p}(t)\dot{x}^*(t-\alpha)dt = \\ & = \int_R \dot{p}(t)g(x^*(t-\alpha))dt + \int_R \dot{p}(t)[-g(x^*(t-\alpha)) - \\ & - \delta \epsilon \dot{x}^*(t-\alpha) + \epsilon f(t-\alpha) + O(\epsilon^2)]dt = \\ & = \epsilon \int_R \dot{p}(t)f(t-\alpha)dt + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Substituindo (6.37) em (6.36), obtemos

$$-\frac{\delta}{\eta} \int_R \dot{p}^2 + \frac{1}{\eta} \int_R \dot{p}(t) f(t-\alpha) dt + O(\epsilon) = 0$$

ou seja,

$$-\delta + \frac{1}{\eta} \int_R \dot{p}(t) f(t-\alpha) dt + O(\epsilon) = 0$$

que é a equação de bifurcação analisada em [46] e [10].

Vamos considerar agora a hipótese adicional

H.f.2 A função $h(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\eta} \int_R \dot{p}(t) f(t-\alpha) dt$

tem um máximo absoluto α_1 , e um mínimo absoluto α_2 , $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, com $\delta_0 < h(\alpha_1) < \delta_1$, $h''(\alpha_1) < 0$, $h''(\alpha_2) > 0$, e $h'(\alpha) \neq 0$ para $\delta \in [0, 1] - \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (Ver figura 16).

Figura 16

Seja $\lambda = (\delta, \epsilon)$, $\gamma(\lambda) = \{(X^*(t), u^*(t)) \in R^2 \times Y, t \in R\}$, e sejam $\gamma_s(\lambda)$ e $\gamma_u(\lambda)$ as variedades estável e instável de $\gamma(\lambda)$. Seja U uma vizinhança de $\Gamma \times \{0\}$ em $R^2 \times Y$.

Desta forma, os resultados obtidos neste capítulo são sintetizados no seguinte:

Teorema 6.4.6

Assumimos as hipóteses $H.f.1$, $H.f.2$, $H.g.1$, $H.g.2$ e $H.g.3$. Logo, existe uma curva $\delta = \delta^*(\epsilon)$, tal que, $\delta(0) = h(\delta_1)$ e para $\delta_1 \geq \delta > \delta^*(\epsilon)$ não existem elementos de $\gamma_s(\lambda) \cap \gamma_u(\lambda) - \gamma(\lambda)$ em $U \times R$ que estão próximos uniformemente de algum $(P(t+\alpha), 0)$, e para $\delta_0 \leq \delta < \delta^*(\epsilon)$ existem pelo menos dois elementos.

A demonstração é análoga a do Lema 3.1 de [10].

□

Observação:

Observamos que a função $\frac{1}{\epsilon} \int_R \dot{p} G_2$ é de classe C^1 em $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$. Isto segue dos parágrafos 6.3.2, 6.4.2, da análise dos limites feita nos parágrafos 6.3.4 e 6.4.3, e do Teorema da Convergência Dominada.

COMENTÁRIOS FINAIS

Na elaboração deste trabalho nos deparamos com problemas mais gerais do que alguns aqui abordados.

Mesmo tendo obtido resposta parcial em parte deles, deixamos de destacá-la para não fugir dos objetivos iniciais aos quais o trabalho se propunha.

As observações a seguir, além desses pontos, abordam problemas com os quais nos preocuparemos no futuro.

1) Existência e bifurcação de soluções homoclínicas de

$$\ddot{x} + g(x) = -\delta\epsilon\dot{x} + \epsilon f(t) + F(X, u) - \epsilon ex \quad (6.22)$$

$$\dot{u} = A(\epsilon)u + H(X)A_1u + A_2(u) + G(\epsilon, t)$$

foram apresentadas de tal modo que a análise de um caso arbitrário como (6.22), com condições convenientes sobre $A(\epsilon)$, $A_2(u)$, $F(X, u)$, $G(\epsilon, t)$, $H(X)$, etc. como por exemplo, $A_2(u) = O(|u|^3)$, $F(X, u) = O(|u|^2)$, $h(X) = O(|X|^2)$, etc. funções suficientemente regulares, pode ser levada a bom termo sem modificações essenciais.

Nessa linha de idéias, tentaremos também, no futuro, obter as informações desenvolvidas no capítulo VI, para um modelo do tipo

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (1 + \epsilon\gamma_1)\dot{u}''' + \rho(\epsilon)u''' - k\left(\int_0^1 |u'|^2 dz\right)u'' = \\ - \delta\epsilon\dot{u} + \epsilon f(t) \sin \pi z + g(t, z, \epsilon) \end{aligned}$$

onde $\rho(\varepsilon)$ é pequeno em algum sentido, para ε pequeno.

2) Na linha dos resultados obtidos no Capítulo VI, tentaremos obter um resultado abstrato de regularidade com relação a parâmetro de solução limitada, e contínua em R , de um sistema de equações integrais.

Esse estudo deve, por exemplo, dar informações sobre regularidade de soluções "mild" de equações do tipo $\dot{u} = A(\lambda, t)u + f(t, u, \lambda)$, onde f é suficientemente regular, $A(\lambda, t)$ além de outras condições, pode ser não limitada e $\dot{u} = A(\lambda, t)u$ admite uma dicotomia exponencial em R . Um resultado desse tipo com enfoque diferente é apresentado em Hale, [17].

3) Hipóteses de alguns resultados teóricos do Capítulo V, apareceram não só por necessidade teórica das demonstrações apresentadas, mas também motivadas pelas aplicações que tínhamos em mente.

Tentaremos no futuro, analisar se algumas delas podem ser suprimidas ou enfraquecidas.

4) É possível estender o Lema 4.3.3 para o caso em que o sistema $\dot{u} = A_1(t)u$ admite uma dicotomia exponencial em R_+ e R_- e, o sistema $\dot{v} = A_2(t)v$ admite uma dicotomia exponencial em R . (Ver pg. 68).

Neste caso, é necessário entender um pouco mais de que forma a dicotomia em R para a equação homogênea é transportada para a equação adjunta.

Um caso mais geral seria mostrar que, em dimensão in finita, se o sistema homogêneo (H) admite uma dicotomia expo nencial em R_+ e R_- , mostrar que vale a Alternativa de Fred holm para um sistema do tipo:

$$(N.H.) \quad \dot{u} = A(t)u + f(t)$$

onde $f \in \beta(R)$.

Apresentamos a seguir, um cálculo preliminar que tem muito boa chance de conduzir a esse resultado. Na verdade, ele já dá uma prova razoável para a Alternativa de Fredholm, no caso em que as projeções satisfazem uma dicotomia exponencial em R_+ e R_- , num certo sentido, vinculadas. Tentaremos no futuro, como feito no Teorema 1.A, retirar este vínculo.

Supomos assim, que existe uma família de projeções $P_j(s)$ em $L(W)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfazendo a

$$|T(t, s)(P_1(s) + P_2(s))| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s \geq 0$$

$$|T(t, s)(P_3(s) + P_4(s))| \leq K e^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t \geq 0$$

i)

$$|T(t, s)(P_1(s) + P_3(s))| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad t \leq s \leq 0$$

$$|T(t, s)(P_2(s) + P_4(s))| \leq K e^{\alpha(s-t)} \quad s \leq t \leq 0$$

$K > 0$ e $\alpha > 0$.

ii) As projeções $P_1(s) + P_2(s)$ e $P_1(s) + P_3(s)$ satisfazem as condições a e b da Definição 3.1.3 em R_+ e R_- respectivamente, e que $\bigoplus_{j=1}^4 P_j(s) = I \quad \forall s \in R$.

Como no Teorema 1.A, consideremos a solução "mild" de (N.H.) $u(t) = T(t,0)u(0) + \int_0^t T(t,s)f(s)ds$.

Então, afirmamos que:

" $u(t)$ é limitada em R se e somente se $\int_R T(0,s)P_4(s).f(s)ds = 0$ ".

$\Rightarrow$) De fato; se $u(t)$ dada acima é limitada em R então, para $t \geq 0$, temos:

$$u(t) = T(t,0)u(0) + \int_0^t T(t,s)f(s)ds = T(t,0)(u(0) + \int_0^\infty T(0,s)(P_3(s) + P_4(s))f(s)ds) + \int_0^t T(t,s)(P_1(s) + P_2(s))f(s).ds + \int_0^t T(t,s)(P_3(s) + P_4(s))f(s)ds. \quad (1)$$

As duas últimas integrais acima são limitadas em R_+ , pelas hipóteses de dicotomia.

Logo, $u(t)$ é limitada em R_+ se e somente se $(P_3(0) + P_4(0))(u(0) + \int_0^\infty T(0,s)(P_3(s) + P_4(s))f(s)ds) = 0$, o que implica em

$$\begin{aligned} P_3(0)u(0) &= - \int_0^\infty T(0,s)P_3(s)f(s)ds \\ P_4(0)u(0) &= - \int_0^\infty T(0,s)P_4(s)f(s)ds \end{aligned} \quad (2)$$

Para $t \leq 0$ temos:

$$\begin{aligned}
 u(0) &= T(0, t)u(t) + \int_t^0 T(0, t)f(s)ds \quad \text{e, portanto,} \\
 T(0, t)u(t) &= u(0) + \int_0^t T(0, s)f(s)ds = u(0) + \\
 &+ \int_0^{-\infty} T(0, s)(P_2(s)+P_4(s))f(s)ds + \int_0^t T(0, s)(P_1(s)+ \\
 &+ P_3(s))f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(0, s)(P_2(s)+P_4(s))f(s)ds.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (P_1(0)+P_3(0))T(0, t)u(t) &= (P_1(0)+P_3(0))u(0) + \\
 &+ \int_0^t T(0, s)(P_1(s)+P_3(s))f(s)ds \\
 T(0, t)(P_2(t)+P_4(t))u(t) &= (P_2(0)+P_4(0))u(0) + \\
 &+ \int_0^{-\infty} T(0, s)(P_2(s)+P_4(s))f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(0, s)(P_2(s)+ \\
 &+ P_4(s))f(s)ds.
 \end{aligned}$$

Dado que a última integral da expressão acima é limitada em R_- , se $u(t)$ é limitada em R , então, pelas hipóteses de dicotomia, $T(0, t)(P_2(t)+P_4(t))u(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow -\infty$, e, portanto a última igualdade conduz a

$$(P_2(0)+P_4(0))u(0) + \int_0^{-\infty} T(0, s)(P_2(s)+P_4(s))f(s)ds = 0$$

o que implica em

$$P_2(0)u(0) = - \int_0^{-\infty} T(0,s)P_2(s)f(s)ds$$

$$P_4(0)u(0) = - \int_0^{-\infty} T(0,s)P_4(s)f(s)ds \quad (3)$$

e daí, segue que $\int_R T(0,s)P_4(s)f(s)ds = 0$

$\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\int_R T(0,s)P_4(s)f(s)ds = 0$, definimos $u(0)$ por $P_1(0)u(0) = 0$, $P_2(0)u(0)$, $P_3(0)u(0)$ e $P_4(0)u(0)$ satisfazendo (2) e (3).

Tomamos $u(t)$ definida em R_+ por (1). Portanto, $u(t)$ é limitada em R_+ .

Para $t \in R_-$ definimos $u(t)$ por

$$u(t) = T(t,0)(P_1(0)+P_3(0))u(0) + \int_0^t T(t,s)(P_1(s)+P_3(s))f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t,s)(P_2(s)+P_4(s))f(s)ds$$

e $u(t)$ será limitada em R_- .

Pode-se provar que $u(t)$ é solução "mild" de (N.H.), o que conclui esta observação.

5) Nosso próximo objetivo é analisar uma hipótese utilizada no Teorema 5.3.1, que diz que $\{u(t), t \in R\}$ é relativamente compacto.

Consideremos $\beta(R,K)$ onde K é um subconjunto compacto de um espaço de Banach W , munido da norma do supremo.

Seja $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^t T(t-s)h(s)ds = \int_0^{\infty} T(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma$ onde

$h \in \beta(R, K)$. Seguiremos a idéia de Ceron [6].

Afirmamos que $\{u(t): t \in R\}$ é relativamente compacto. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $a > 0$ tal que $|\int_a^{\infty} T(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma| < \varepsilon$.

Como para qualquer $t \in R$, $\int_0^a T(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma$ pertence a um compacto fixo de W e como $|u(t) - \int_0^a T(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma| < \varepsilon$, concluimos que $\{u(t); t \in R\}$ é relativamente compacto.

Supomos agora que $u(t)$ é contínua em R e satisfaz $u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, u(s))ds$, para todo t em R onde $f: R \times W \rightarrow W$ é contínua. Supomos que existe compacto K de W tal que $f(t, u(t)) \in K$, para todo t em R . Então $\{u(t): t \in R\}$ é relativamente compacto.

Este fato segue da afirmação inicial tomando-se $h(s) = f(s, u(s))$.

Resultado análogo pode ser estabelecido, quando em vez de $|T(t)| \leq Ke^{-\alpha t}$, tivermos uma dicotomia exponencial em R , bastando neste caso incluir uma integral imprópria de t a $+\infty$.

Idem para o caso em que $u(t)$ satisfaz $u(t) = \int_{-\infty}^t T(t,s)f(s, u(s))ds$ com condições convenientes sobre $T(t,s)$ e sobre f .

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMES, W.F. (1965) *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. Academic Press, New Press.
- [2] ANDRONOV, A.A., VITT, A.A. and KHAIKIN, S.E. (1966) *Theory of Oscillators*. Pergamon Press Ltd., Massachusetts
- [3] BALL, J.M. MARSDEN, J.E. and SLEMROD, M. (1980) *Controllability for Distributed Bilinear Systems. Communications of Heriot Watt University*
- [4] BALL, J.M. (1977) Strongly Continuous Semigroups , Weak Solutions, and the Variation of Constants Formula, *Proc. of A.M.S.*, vol.63, nº 3, 370-373.
- [5] BARROS NETO, J. (1973) *An Introduction to the Theory of Distributions*. Marcel Dekker Inc. New York.
- [6] CERON, S.C.S. (1984) *Comportamento Assintótico de Equações e Sistemas Hiperbólicos; Soluções Periódicas Forçadas e Convergência para Equilíbrio*. Tese de Doutouramento ICMSC-USP, S.P.
- [7] COPPEL, W.A. (1965) *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. Heath Mathematical Monographs, Boston.
- [8] COPPEL, W.A. (1978) *Dichotomies in Stability Theory*. *Lectures Notes in Math.* nº 629 - Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg.

- [9] COPPEL, W.A. (1963) On the Stability of Differential Equations, *J. London Math. Society*, vol.38, 255-260.
- [10] CHOW, S.N., HALE, J. and MALLET-PARET, J. (1980) An example of Bifurcation to Homoclinic Orbits, *J. of Differential Equations*, vol.37, 351-373.
- [11] CHOW, S.N. and HALE, JAKE K. (1982) *Methods of Bifurcation Theory*. Springer Verlag, New York
- [12] DALECKII, J.L. and KREIN, S.G. (1974) *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. A.M.S. Providence.
- [13] FRIEDMAN, A. (1969) *Partial Differential Equations*. Holt, R. S. Winston Inc., New York.
- [14] GELF'AND, I.M. (1967) *Lectures on Linear Algebra*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [15] GOLDBERG, S. (1966) *Unbounded Linear Operators*. MacGraw-Hill Company, New York.
- [16] HALE, JACK K. (1969) *Ordinary Differential Equations*. Wiley Interscience, New York.
- [17] HALE, JAKE K. and SCHEURLE, J. (1985) Smoothness of Bounded Solutions of Nonlinear Evolution Equations, *J. of Differential Equations*, vol.56, no 1, 142-163.

- [18] HALE, JACK (1977) *Theory of Functional Differential Equations*. Applied Math. Series, vol 3 Springer-Verlag, New York .
- [19] HALLAM, THOMAS G. (1976) *Parametric Perturbation Problems in Ordinary Differential Equations*. *Transactions of A.M.S.*, vol. 224, nº 1, 43-59.
- [20] HENRY, DAN. (1981) *Evolution Equations in Banach Space*. Notas de um curso ministrado no IME-USP, S.P.
- [21] HENRY, DAN. (1981) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes - vol.840, Springer-Verlag, Berlin.
- [22] HILL, EINER and PHILLIPS, RALPH S. (1974) *Functional Analysis and Semigroups*. A.M.S. Colloquium Publications, New York.
- [23] HOLMES, P, and MARSDEN, J. (1981) *A Partial Differential Equations with Infinitely many Periodic orbits: Chaotic Oscillations of a Forced Beam*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol.76, nº 2, 134-164.
- [24] HÖNIG, C.S. (1977) *A Integral de Lebesgue e suas Aplicações*. 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas.
- [25] HÖNIG, C.S. (1970) *Análise Funcional e Aplicações*. Publicações do IME-USP, S.P.

- [26] ICHIKAWA, A. and PRITCHARD, A.J. (1979) Existence, Uniqueness, and Stability of Nonlinear Evolution Equations, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 68, nº 2, 454-476.
- [27] KRASNOLSEL'SKII, M.A. (1964) *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Pergamon Press, Oxford.
- [28] KREIN, S.G. (1971) *Linear Differential Equations in Banach Space*. A.M.S. Providence.
- [29] LANG, SERGE (1969) *Analysis (vol.2)*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- [30] LARSEN, RONALD (1973) *Functional Analysis*. Pure and Applied Mathematics, New York.
- [31] LIMA, ELON LAGES (1970) *Análise no R^n* . Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo.
- [32] LOVELADY, DAVID LOWELL (1972) Boundedness and Ordinary Differential Equations on the Real Line, *J. of London Math. Society*, vol.2, 597-603.
- [33] NACHBIN, LEOPOLDO (1967) *Introdução à Análise Funcional. Espaços de Banach e Cálculo Diferencial*. Publicações da UnB, Brasília.
- [34] NEVES, ALOISIO J.F. (1982) *Dicotomia para Sistemas de Equações Parciais Hiperbólicas e um Teorema Geral*

de Bifurcação de Hopf. Tese de Doutouramento, IMECC, Campinas.

- [35] PALIS, JR. J., e MELO, W. (1978) *Introdução a Teoria dos Sistemas Dinâmicos*. Editora Edgard Blücher Ltda., S. Paulo.
- [36] PALMER, K.J. (1984) Exponential Dichotomies and Transversal Homoclinic Orbits, *J. of Differential Eqs.*, vol. 55, nº 2, 225-256.
- [37] PAZY, A. (1975) A Class of Semi-Linear Equations of Evolution, *Israel J. of Math.* vol. 20, nº 1, 23-36.
- [38] PAZY, A. (1974) *Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Lecture Note nº 10, University of Maryland.
- [39] PHILLIPS, R.S. (1952) Perturbation Theory for Semi-Groups of Linear Operators, *Transactions of A.M.S.*, vol. 74 nº 2, 199-221.
- [40] RIBEIRO, H.S. (1980) *Teoria Espectral para um Sistema Hiperbólico e Bifurcação de Hopf*. Tese de Doutouramento, ICMSC-USP, São Carlos.
- [41] ROYDEN, H.L. (1968) *Real Analysis*. Macmillan Publishing Co., Inc., New York.
- [42] SILVEIRA, M. (1982) *Alternativa de Fredholm para Existên-*

-cia de Soluções Limitadas na Reta. Comunicações da
2ª Jornada Científica UFSCar, São Carlos, S.P.

- [43] RUAS, VITORIANO (1979) *Introdução aos Problemas Variacionais*. Editora Guanabara Dois S/A., R.J.
- [44] STAKGOLD, I. (1979) *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Jonh Wiley & Sons, New York.
- [45] STOKER, J.J. (1950) *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. New York Intersc. N.York.
- [46] TABOAS, P. Z., and HALE, JACK (1978) Interaction of damping and forcing in a second order equations, *J. of Nonlinear Analysis*, vol. 2, nº 1, 77-84.
- [47] TAYLOR, A.E. and LAY, D.C. (1980) *Introduction to Functional Analysis*. Jonh Wiley & Sons, New York.
- [48] TOLSTOV, G. P. (1976) *Fourier Series*. Dover Publications, Incorporation, New York.
- [49] TSENG, W.Y. and DUGUNDJI, J. (1971) Nonlinear Vibrations of a Bucckled Beam under Harmonic Excitation, *Journal of Applied Mechanics*, June, 467-475.

NOTAÇÃO

$W(x,y)$ = Wronskiano de x e y .

$\rho(L)$ = Resolvente de L .

$N(L)$ = Nucleo de L .

Se $J = R_+$, ou $J = R_-$, ou $J = R$, e W é um espaço de Banach,

$\beta(J) = \{ \phi : J \rightarrow W, \text{ continua e limitada} \}.$

$\beta_0(R) = \{ \phi \in \beta(R) : \phi(t) \rightarrow 0 \text{ quando } |t| \rightarrow \infty \}.$

$P_T = \{ \phi : R \rightarrow W, \text{ continua e T-periódica} \}.$

$L(W)$ = Algebra dos Operadores Lineares Limitados.

C_0 Semi-grupo = Semi-grupo de Operadores Lineares Limitados Fortemente Contínuo.