COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UMA CLASSE
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS RETARDADAS COM
APLICAÇÕES EM BIOLOGIA

Geraldo Garcia Duarte Junior

Orientador

Prof.Dr. José Geraldo dos Reis

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universida
de de São Paulo, para obtenção do Título
de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS

1987

Este trabalho dependeu
parcialmente de auxílio
concedido pelo CNPq,
através de uma bolsa
de Doutorado.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos de um modo muito especial ao amigo e orientador Prof.Dr. José Geraldo dos Reis, pela forma segura e amiga que sempre nos orientou.

Aos colegas do Departamento de Geologia, Física e Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto e do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos.

À Sonia Aparecida Nali pelo esmero e dedicação com a qual datilografou este trabalho.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO.....	01
CAPÍTULO I.....	04
CAPÍTULO II.....	36
CAPÍTULO III.....	49

S U M M A R Y

In the first chapter of this work, the retarded functional differential equations

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1))$$

are studied. We show the existence of an unbounded continuum of slowly oscillating periodic solutions that bifurcates from a non zero equilibrium.

In Chapter II, we apply the results of the first chapter in three mathematical models used in Biology.

In the last part we study the stability of the equations

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + f(x(t-R_1), x(t-R_2), \dots, x(t-R_k))$$

where $x \in \mathbb{R}$ and $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Some results that are independent of the size of the delays are established.

INTRODUÇÃO

Motivados pelo trabalho de Mallet-Paret, Nussbaum [12], fomos levados ao estudo de equações da forma

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-\eta))$$

que são equivalentes a equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1))$$

Pudemos, com o estudo da função f , obter resultados sobre o comportamento das soluções, observando o comportamento das iteradas da f .

Com a associação desta técnica e a das equações características obtivemos informações sobre o comportamento da solução de

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f_{\lambda, \mu}(x(t-1))$$

quando os parâmetros λ e μ estão em determinadas regiões. Desta forma, pudemos analisar o problema de bifurcação de Hopff com o aparecimento de um ramo contínuo ilimitado de soluções periódicas.

Esta parte foi desenvolvida no Capítulo I e tem por objetivo imediato a sua aplicação em certos modelos matemáticos usados em Medicina e Biologia, onde aparecem Equações Diferenciais Retardadas que são ou podem ser transformadas em equações desta classe.

No Capítulo II são analisados então três modelos que passamos a enunciar. A interpretação dos modelos e o significado das constantes encontram-se no corpo do trabalho.

O primeiro modelo é o usado pela "Comissão Internacional de Pesca a Baleia" dado por

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\mu N(t) + \nu N(t-\tau) [1-N^2(t-\tau)]_+$$

Três regiões, A_1 , A_2 e A_3 contidas em $\mathbb{R}^2$ para (ν, μ) são obtidas tais que:

Para $(\nu, \mu) \in A_1$ a solução nula é estável.

Para $(\nu, \mu) \in A_2$ existe uma solução não nula constante x^* estável.

Para $(\nu, \mu) \in A_3$ existem soluções periódicas que variam lentamente.

O segundo modelo é usado em Hematologia e é dado por

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\gamma x(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tilde{\tau})}{\theta^n + x^n(t-\tilde{\tau})}$$

Para este modelo também foram determinadas três regiões com as mesmas características das anteriores.

Na terceira equação também obtivemos as mesmas regiões como anteriormente. Esta equação é usada na modelagem de populações da mosca azul (Lucilia Cuprina) e é dada por

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\delta N(t) + PN(t-T_D) \exp\left\{-\frac{N(t-T_D)}{N_D}\right\}$$

Nota-se que as conclusões são bastante semelhantes apesar das funções f serem completamente diferentes em cada modelo. Gostaríamos de lembrar que os resultados existentes sobre estes modelos eram na sua maior parte, derivados de simulação em computador.

O método desenvolvido no Capítulo I é apenas para o caso em que f está aplicada na solução $x(t)$ calculada num único re-

tardo. Isto levou-nos a estudar o caso em que f pode estar aplicado em $x(t)$ calculado em vários instantes anteriores, ou seja, na equação aparece

$$f(x(t-T_1), x(t-T_2), \dots, x(t-T_n))$$

em lugar de $f(x(t-T))$.

Neste sentido fomos levados a definir de uma forma não canônica as iteradas da f num conjunto I .

Para definir a $f_*^2(I^n)$ tomamos o cubo de dimensão n com aresta $f(I^n)$ e definimos $f_*^2(I^n) = f(f(I^n)x \dots xf(I^n))$. Desta forma, definimos $f_*^m(I^n)$ por $f_*^m(I^n) = f(f_*^{m-1}(I^n)x \dots xf_*^{m-1}(I^n))$ e I_∞^* por

$$I_\infty^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_*^n(I)$$

e mostramos que para uma condição inicial bem comportada temos que a solução da equação converge para I_∞^* quando o tempo cresce. Este fato implica em estabilidade de solução quando I_∞^* é um conjunto unitário. Desta forma, obtivemos informações sobre o comportamento das soluções.

O importante deste fato é que os resultados acima obtidos, independem dos retardamentos e temos então, quando for o caso, estabilidade global nos retardos.

CAPÍTULO I

Varios resultados importantes sobre a equação:

$$(1.1) \quad \xi \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-\eta)) \quad (\xi, \eta > 0)$$

no que diz respeito a comportamento de soluções foram apresentadas por Mallet-Paret, Nussbaum [12].

Podemos, primeiramente, notar que a equação (1.1) é equivalente a:

$$(1.2) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) \quad (\lambda > 0)$$

De fato, tomemos

$$t = s\eta \quad \text{e} \quad \bar{x}(s) = x(s\eta)$$

temos, por (1.1)

$$\frac{d}{ds} \bar{x}(s) = \frac{d}{dt} x(s\eta) \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} x(s\eta) \eta = -\eta \xi^{-1} x(s\eta) +$$

$$\eta \xi^{-1} f(x(\eta s - \eta)) = +\eta \xi^{-1} f(\bar{x}(s-1)) - \eta \xi^{-1} \bar{x}(s) + \eta \xi^{-1} f(\bar{x}(s-1))$$

Fazendo $\lambda = \eta \xi^{-1}$ obtemos a equação (1.2)

Sendo (1.1) equivalente a (1.2), nos limitaremos, daqui para frente, ao estudo para $\lambda > 0$ da equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1))$$

Dada uma condição inicial $\psi: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, determinamos a solução $x(t)$ integrando passo a passo em intervalos de tamanho unitário da seguinte forma:

Para $0 \leq t \leq 1$, a solução que denotaremos por $x_1(t)$

satisfaz

$$\dot{x}_1(t) = -\lambda x_1(t) + \lambda f(x_1(t-1)) = -\lambda x_1(t) + \lambda f(\psi(t-1))$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} x_1(t) = \lambda e^{\lambda t} f(\psi(t-1))$$

Desta forma obtemos

$$x_1(t) = e^{-\lambda t} \psi(0) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(\psi(s-1)) ds.$$

Supondo conhecida a solução em $[n-1, n]$, que denotamos por $x_n(t)$, determinamos a solução em $[n, n+1]$ por

$$x_{n+1}(t) = e^{-\lambda(t-n)} x_n(n) + \lambda e^{-\lambda t} \int_n^t e^{\lambda s} f(x_n(s-1)) ds$$

Assim a solução do problema fica determinada para $t \geq 0$ e é dada por

$$x|_{[n, n+1]} = x_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$$

As proposições 1 e 2 e corolário 1 foram demonstradas por Mallet-Paret, Nussbaum. [12]

Proposição 1

(i) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\lambda > 0$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado tal que $f(I) \subset I$. Se $\psi \in C([-1, 0])$ satisfaz $\psi(t) \in I$ para $t \in [-1, 0]$, então a solução $x(t; \lambda, \psi)$ de (1.2) satisfaz $x(t; \lambda, \psi) \in I$ para todo $t \in I$. Se, em adição, $\psi(0) \in \text{Int}(I)$, então $x(t; \lambda, \psi) \in \text{Int}(I)$ para $t \geq 0$.

(ii) Definimos o conjunto

$$I_{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I) ; \quad \text{onde } f^n(I) = f(f^{n-1}(I))$$

Necessariamente I_{∞} é um subconjunto fechado e conexo de I . Se $I_{\infty} \neq \emptyset$ então as soluções de (1.2) com $\psi(t) \in I$ para $t \in [-1,0]$ satisfazem

$$\text{dist}(x(t;\lambda,\psi), I_{\infty}) \rightarrow 0 \quad \text{com } t \rightarrow \infty$$

Vejamos agora um caso onde f tem um ponto fixo e que é um "atrator", isto é, para todo $x \in I$, $f^n(x) \rightarrow a$ com $n \rightarrow \infty$.

Proposição 2

Suponhamos $f:I \rightarrow I$ contínua quando I é um intervalo compacto. Suponhamos que exista $a \in I$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

para qualquer $x_0 \in I$ e $x_n = f^n(x_0)$ é a n -ésima iterada de x_0 pela f . Então o conjunto:

$$I_{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I), \text{ reduz-se ao conjunto unitário } \{a\}.$$

Nas condições destas duas proposições, podemos fazer a seguinte afirmação, sobre o comportamento assintótico das soluções de (1.2).

Corolário 1

Seja $f, I = [D,C]$ como na proposição 2.

Se $\psi \in C([-1,0])$ satisfaz

$$D \leq \psi(t) \leq C \text{ para todo } t \in [-1, 0]$$

e $\lambda > 0$, então temos para a solução de (1.2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; \lambda, \psi) = a$$

Nos resultados apresentados vemos uma maneira de estudar o comportamento futuro da solução através do estudo da função f , ou seja, procurando o conjunto I_∞ .

No caso em que todo x converge para "a" temos estabilidade. Quando $\text{dist}(x_n, K) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ e $K \subset I$ um subintervalo compacto, não podemos garantir que $\text{dist}(x(t; \lambda, \psi), K) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$ como nos mostra Mallet-Paret, Nussbaum [12] no seguinte exemplo:

Seja $f: I \rightarrow I$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gráfico da f

Podemos notar que $f^n(x)$ converge para 0 (zero) ou $1/2$ (meio) ou seja

$$f^n(x) \rightarrow K, \quad \forall x \in I \quad \text{onde } K = [0, \frac{1}{2}]$$

Como $f^n(I) = I$ temos $I_\infty = I$. Desta forma vemos que não podemos garantir que

$$\text{dist}(x(t; \lambda, \psi), K) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

Um fato fundamental para esta afirmação ser verdadeira é a invariância de K pela f , como nos mostra a seguinte proposição estabelecida por nós.

Proposição 3:

Suponhamos $f: I \rightarrow I$ contínua, quando I é um intervalo compacto. Suponhamos também que exista $K = [k_1, k_2]$ tal que $f^n(x) \rightarrow K$ para todo $x \in I$, quando $n \rightarrow \infty$, ou seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n(x), K) = 0 \quad \text{para todo } x \in I$$

e também que $f(K) \subset K$ ($f(K) = K$).

Então:

$$I_\infty \subset K \quad (I_\infty = K)$$

Demonstração:

$$\text{Seja } f^n(I) = [D_n, C_n], \quad I = [a, b]$$

Se $x < k_1$, como $f^n(x) \rightarrow K$ quando $n \rightarrow \infty$ o teorema de ponto fixo garante que $f(x) > x$ ou $f(x) < x$ (ou exclusivo).

Como $f(a) > a$, teremos

$$f(x) > x \quad x \in [a, k_1]$$

De maneira análoga, vemos que

$$f(x) < x \quad \text{para } x \in (k_2, b)$$

Como as mesmas hipóteses sobre f valem para f^2 , temos também:

$$f^2(x) > x, \quad x \in [a, k_1]$$

$$f^2(x) < x, \quad x \in [k_2, b]$$

Suponhamos $I_\infty = [D_\infty, C_\infty] \not\subset K$

Caso isto não ocorra, nada teremos a demonstrar.

Caso ocorra, temos três casos a estudar:

$$(i) \quad D_\infty < k_1 \leq C_\infty \leq k_2$$

$$(ii) \quad k_1 \leq D_\infty \leq k_2 < C_\infty$$

$$(iii) \quad D_\infty \leq k_1 < k_2 < C_\infty$$

Analisemos cada um dos casos:

$$(i) \text{ Sendo } f(I_\infty) = I_\infty$$

$$f(K) \subset K$$

$$f(x) > x \quad \text{para } D_\infty \leq x \leq k_1$$

Vemos que $\exists x \in I_\infty$ tal que $f(x) = D_\infty$, o que é absurdo.

(ii) Análogo a (i)

$$(iii) \text{ Já que } f(I_\infty) = I_\infty, \quad f(x) < x \text{ para } x \in (k_2, C_\infty],$$

$f(K) \subset K$ terá que existir $\xi \in [D_\infty, k_1)$ tal que $f(\xi) = C_\infty$.

Já que $f(I_\infty) = I_\infty$, $f(x) > x$ para $x \in [D_\infty, k_1)$ e $f(K) \subset K$

terá que existir $\eta \in (k_2, C_\infty]$ tal que $f(\eta) = D_\infty$.

Como $f(k_2) \in K$, $f(k_1) \leq k_2$ temos $[k_2, C_\infty] \subset f([\xi, k_1])$.

Sendo que $\eta \in [k_2, C_\infty]$, $\exists \zeta \in [\xi, k_1]$ tal que $f(\xi) = \eta$
logo $f(f(\zeta)) = D_\infty < \zeta$ ou seja $f(\zeta) < \zeta$ que implica $\zeta \in [k_2, C_\infty]$,
temos então,

$$\zeta \in [\xi, k_1] \cap [k_2, C_\infty]$$

Sendo $k_1 < k_2$ temos um absurdo.

Desta forma vemos que não pode ocorrer nenhum dos três casos, ou seja, teremos que ter $I_\infty \subset K$. É óbvio que se $f(K) = K$, então $K \subset I_\infty$ e então $I_\infty = K$.

Devemos observar que com esta demonstração a proposição 2 torna-se um caso particular da proposição 3. Basta colocar $\{a\} = K$.

Corolário 2:

Seja A o conjunto dos pontos fixos de f . Suponhamos que A seja atrator para f , então I_∞ satisfaz

$$I_\infty \subset K(A) \quad \text{sempre que } f(K(A)) \subset K(A)$$

onde

$$a = \min A, \quad b = \max A$$

$$K(A) = [a, b]$$

Demonstração:

Basta notar que o conjunto dos pontos fixos de f é fechado já que este conjunto é a imagem inversa do zero pela função

$$h(x) = f(x) - I(x)$$

onde $I(x)$ é a função identidade.

Este resultado não vale em $\mathbb{R}^2$, como mostra o seguinte exemplo:

Seja S^1 denotado o círculo unitário no plano complexo. Definimos $f:S^1 \rightarrow S^1$ por

$$f(e^{2\pi i \theta}) = e^{2\pi i \sqrt{\theta}} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq 1$$

Então,

$$f^n(x_0) \rightarrow a = 1 \quad \text{para qualquer } x_0 \in S \text{ e}$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(S^1) = S^1 \quad \text{já que } f \text{ transforma } S^1 \text{ em } S^1.$$

Estes resultados levaram-nos à motivação do seguinte teorema, que embora bastante simples e intuitivo, mostra-se muito útil nas aplicações, facilitando sobre maneira o estudo de certas equações como veremos no capítulo II.

Teorema 1:

Consideremos a equação

$$(1.3) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-T))$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivada primeira contínua. Então podemos afirmar:

- a) $x^* \equiv x^*(t)$ é ponto de equilíbrio de (1.3) se e somente se x^* for ponto fixo de f .
- b) Se x^* é ponto fixo atrator de f , i.e., $|f'(x^*)| < 1$ então, $x^* \equiv x(t)$ é ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação dada.

(Daqui para frente não faremos distinção entre a função constan-

te $x^*(t) \equiv x^*$ e o numero real x^* , pois o sentido é sempre claro e não causa confusão).

Demonstração:

a) Óbvio, por simples verificação.

b) Suponhamos que $|f'(x^*)| < 1$. Isto implica que existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* , tal que para todo $x \in V(x^*)$ temos

$$|x - x^*| > |f(x) - f(x^*)|$$

Como $x^* = f(x^*)$, temos

$$|x - x^*| > |f(x) - x^*| \text{ ou seja } f(x) \in V(x^*), \text{ i.e., } f(V(x^*)) \subset V(x^*)$$

Sendo f contínua, temos

$$f(\overline{V(x^*)}) \subset \overline{V(x^*)}$$

É fácil ver também, que f é uma contração em $V(x^*)$.

Sendo $I_\infty = \{x^*\}$, já que x^* é ponto fixo atrator, estamos em condições de aplicar a proposição 1, (ii).

Logo,

$$\text{dist}(x(t; \lambda, \psi), x^*) \rightarrow 0 \quad \text{com } t \rightarrow \infty$$

ou seja, x^* é ponto de equilibrio assintoticamente estável.

Outra demonstração deste fato pode ser feito através da função característica. Observamos que a equação linearizada em torno de x^* é dada por

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda k x(t-T) \quad \text{onde } k = f'(x^*)$$

o que nos leva a seguinte equação característica:

$$\eta = -\lambda + \lambda k e^{-\eta T} \quad \text{ou} \quad \eta + \lambda = \lambda k e^{-\eta T}$$

Suponhamos que exista solução $\mu + iv$ com $\mu > 0$, ou seja $\mu + iv + \lambda = \lambda k e^{-T(\mu + iv)}$. Tomando normas dos dois lados temos

$$\lambda \leq \sqrt{(\mu + \lambda)^2 + v^2} = \lambda |k| e^{-\mu T} \leq \lambda$$

pois $|k| e^{-\mu T} < 1$ logo as desigualdades são igualdades e $(\mu + iv) = 0$ mas zero não é solução para $|k| < 1$ pois isto leva a $\lambda = \lambda |k|$.

Passamos agora a estudar a equação (2) no caso em que

$$k = f'(x^*) \text{ é tal que } |k| > 1.$$

Usaremos para tanto a equação característica desta equação que é

$$\zeta + \lambda - \lambda k e^{-\zeta} = 0$$

Os principais resultados neste sentido estão contidos no seguinte Lema.

Lema 1:

Considere a seguinte equação característica

$$\zeta + \lambda - \lambda k e^{-\zeta} = 0 \quad \text{onde} \quad |k| > 1, \quad \lambda > 0.$$

Então:

- a) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que a equação característica admite uma raiz imaginária pura.
- b) Existe uma sequência $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ tal que para cada λ_m existe

$R_m \in \mathbb{R}$ com iR_m solução da equação. Mais ainda, se $k < -1$ a equação tem precisamente m raízes com parte real e parte imaginária positivas no intervalo $(\lambda_{m-1}, \lambda_m)$.

Demonstração:

Consideremos primeiro $k > 1$. Procuramos soluções da equação característica da forma iR o que nos levará a

$$iR + \lambda - \lambda k e^{-iR} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + \lambda k \operatorname{sen} R = 0 \\ \cos R = \frac{1}{k} \end{cases}$$

Sendo $k > 1$ teremos $R_0 \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$. Para $R_0 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ obtemos

$$\lambda_0 = \frac{R_0}{\sqrt{k^2 - 1}} > 0$$

Para $R_0 \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$ obtemos

$$\lambda_0 = \frac{-R_0}{\sqrt{k^2 - 1}} < 0$$

Sendo que λ terá que ser maior que zero, tomaremos R_0 em $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Desta forma, vemos então que temos uma sequência de raízes da forma

$$R_m = R_0 + 2m\pi \quad (R_0 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi))$$

$$\lambda_m = \frac{R_m}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Seja $\Delta(\zeta, \lambda) = \zeta + \lambda - \lambda k e^{-\zeta}$. Vejamos que $\Delta(\zeta, \lambda) = 0$ implica em $\zeta = \zeta(\lambda)$ e que ζ cruza o eixo imaginário no sentido do real negativo para o real positivo quando λ passa por λ_m .

É fácil ver que

$$\Delta(\zeta_m, \lambda_m) = 0 \quad m \in \mathbb{N}$$

onde $\zeta_m = iR_m$.

Calculemos as derivadas parciais de Δ no ponto (ζ_m, λ_m) .

Temos

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Delta(\zeta, \lambda) = 1 + \lambda k e^{-\zeta} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\zeta, \lambda) = 1 - k e^{-\zeta}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Delta(\zeta_m, \lambda_m) &= 1 - k e^{-iR_m} = 1 + \lambda_m k \frac{1}{k} + i \lambda_m k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} = \\ &= 1 + \lambda_m + i \lambda_m \sqrt{k^2 - 1} \neq 0 \end{aligned}$$

E também

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\zeta_m, \lambda_m) = 1 - k e^{-iR_m} = i \sqrt{k^2 - 1}$$

Pelo teorema da função implícita temos $\zeta_m = \zeta_m(\lambda)$ para λ próximo de λ_m . Sendo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \zeta_m(\lambda_m) &= - \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\zeta_m, \lambda_m) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \Delta(\zeta_m, \lambda_m) \right)^{-1} = \\ &= \frac{i \sqrt{k^2 - 1}}{1 + \lambda_m + i \lambda_m \sqrt{k^2 - 1}} = \frac{\lambda_m (k^2 - 1) + i (1 + \lambda_m) \sqrt{k^2 - 1}}{(1 + \lambda_m)^2 + \lambda_m^2 (k^2 - 1)} \end{aligned}$$

temos então

$$\frac{d}{d\lambda} \operatorname{Re} \zeta_m(\lambda_m) = \frac{\lambda_m(k^2-1)}{(1+\lambda_m) + \lambda_m^2(k^2-1)} > 0$$

ou seja $\operatorname{Re} \zeta_m(\lambda)$ é uma função crescente. Desta forma teremos obrigatoriamente que as raízes da equação passam do real negativo para o real positivo quando λ passa por λ_m .

Agora vamos estudar o caso $k < -1$. De modo análogo ao caso $k > 1$, procuramos soluções da equação característica da forma iR que nos levará a

$$iR + \lambda - \lambda k e^{-iR} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R + \lambda k \operatorname{sen} R = 0 \\ \cos R = \frac{1}{k} \end{cases}$$

Sendo $k < -1$ teremos $R_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Para $R_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ obtemos

$$\lambda_0 = \frac{R_0}{\sqrt{k^2-1}} > 0$$

Para $R \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ obtemos

$$\lambda_0 = \frac{-R_0}{\sqrt{k^2-1}} < 0$$

Como λ terá que ser maior que zero tomaremos R_0 em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Desta maneira, vemos que temos uma sequência de raízes

da forma

$$R_m = R_0 + 2m\pi \quad \lambda_m = \frac{R_m}{\sqrt{k^2-1}}$$

Como anteriormente obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Delta(\zeta_m, \lambda_m) = 1 + \lambda_m + i\lambda_m \sqrt{k^2-1} \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\zeta_m, \lambda_m) = -i\lambda_m \sqrt{k^2-1}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \zeta_m(\lambda_m) &= \frac{i\sqrt{k^2-1}}{1+\lambda_m + i\lambda_m \sqrt{k^2-1}} = \\ &= \frac{\lambda_m(k^2-1) + i(1+\lambda_m)\sqrt{k^2-1}}{(1+\lambda_m)^2 + \lambda_m^2(k^2-1)} \end{aligned}$$

Sendo $\operatorname{Re} \frac{d}{d\lambda} \zeta_m(\lambda_m) > 0$ teremos também que as raízes ζ_m cruzam o eixo imaginário no sentido do real negativo para o real positivo.

Como para $\lambda = \lambda_1$ uma raiz característica cruza o eixo imaginário no sentido do real negativo para o real positivo, aliado ao fato dos zeros de uma função analítica serem isolados, juntamente com o teorema de Rouché, fica garantido que existem m raízes com parte real e parte imaginária positiva para $\lambda \in (\lambda_{m-1}, \lambda_m)$

Corolário:

Se x^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação (1.2), para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ então $|k| < 1$ onde $k = f'(x^*)$.

Como estaremos interessados no estudo de soluções periódicas da equação (1.2), precisamos mais alguns resultados.

Para isto, definimos os conjuntos:

$$k_{\lambda} = \{\psi \in C([-1,0], \mathbb{R}); \psi(-1) = 0, e^{\lambda t} \psi(t) \text{ crescente}\}$$

$$k_{\lambda}^* = \{\psi; \psi = \gamma + x^* \text{ com } \gamma \in k_{\lambda}, x^* \text{ constante}\}$$

O seguinte teorema é inspirado em Hadeller-Tomiuk [7] mas não é equivalente pois as condições e mesmo a equação são diferentes.

Teorema 2:

Consideremos a equação (2) satisfazendo $f(0) = 0$, $xf(x) < 0$ para $x \neq 0$, $\lambda > 0$, $f'(0) = k$, $k < -1$.
Então: se $\psi \in k_{\lambda}$ e $|\psi| < M$, $\lambda \in (a, \infty)$ para $a < \lambda_0$ suficientemente próximo de λ_0 (λ_0 do lema anterior), $x(t; \lambda, \psi)$ tem um número enumerável de zeros com $z_1 > 1$, $z_{n+1} - z_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\dot{x}(z_{2k}) > 0$ e $\dot{x}(z_{2k-1}) < 0$, $k \in \mathbb{N}$ e também $x_{z_2+1}(0, \psi)$ é crescente.

Demonstração:

Consideremos $|\psi| < M$ e $x(0) > 0$. Vamos inicialmente mostrar que $x(t, \psi)$ assume valores negativos. É fácil ver da equação que se $x(t) > 0$ para $t \in (0, t_0)$ então $\dot{x}(t) < 0$ para $t \in (0, t_0)$.

$$\text{Seja } 0 < \delta < M \text{ e } t_1 = \begin{cases} \inf\{t; t \geq 1, x(t) < \delta\}. & \text{Se } x(1) > \delta \\ 1 & \text{Se } x(1) \leq \delta \end{cases}$$

Vamos supor que $x(1) > \delta$

Seja $d = \sup\{f(x); \delta \leq x \leq M\} < 0$. Para $t \geq 1$, enquanto tivermos $x(t) > \delta$, teremos

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) < -\lambda \delta + \lambda f(x(t-1)) <$$

$$< -\lambda \delta + \lambda d < 0$$

Portanto

$$x(t) < M + [-\lambda\delta + \lambda d](t-1) < \delta$$

para t suficientemente grande, mostrando desta forma que t_1 é finito e

$$t_1 < 1 + (\delta - M)(-\lambda\delta + \lambda d)^{-1}$$

Definimos $z_1 = \inf\{t; t \geq 0 \text{ e } x(t) \leq 0\}$. Supomos que $z_1 \geq t_1 + 1$, então $x(t) > 0$ para $t \in (t_1, t_1 + 1)$ e também

$$x(t) = x(t_1+1)e^{-\lambda(t-t_1-1)} + e^{-\lambda(t-t_1-1)} \lambda \int_{t_1+1}^t e^{\lambda(s-t_1-1)} f(x(s-1)) ds$$

$$x(t_1+2) = x(t_1+1)e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda \int_{t_1+1}^{t_1+2} e^{\lambda(s-t_1-1)} f(x(s-1)) ds$$

Sendo $f'(0) < -1$, tomamos x numa vizinhança de zero de forma tal que $f'(x) < -1$. Tomamos C dado pelo Teorema do Valor Médio.

Logo

$$x(t_1+2) \leq x(t_1+1)e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda \int_{t_1+1}^{t_1+2} e^{\lambda(s-t_1-1)} Cx(s-1) ds \quad C < 0$$

O supremo de $Cx(s-1)$ é atingido para $s = t_1 + 2$ já que $Cx(s-1)$ é crescente.

Portanto

$$x(t_1+2) \leq x(t_1+1)e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda \int_{t_1+1}^{t_1+2} e^{\lambda(s-t_1-1)} Cx(t_1+1) ds =$$

$$= x(t_1+1)e^{-\lambda} + e^{-\lambda} Cx(t_1+1)(e^{\lambda}-1) =$$

$$= x(t_1+1)e^{-\lambda} + x(t_1+1)C(1-e^{-\lambda}) < 0 \quad \text{se} \quad C(e^{\lambda}-1) < -1$$

Isto implica

$$e^{\lambda} > 1 - \frac{1}{C}, \text{ i.e., } \lambda > \ln\left(\frac{C-1}{C}\right)$$

Precisamos mostrar que esta desigualdade vale para o "primeiro" λ isto é $\lambda = \lambda_0$ onde

$$\lambda_0 = \frac{R_0}{\sqrt{k^2-1}} \quad \left(\frac{\pi}{2} < R_0 < \pi\right)$$

O pior caso acontece quando $R_0 = \frac{\pi}{2}$ que nos leva a

$$(1) \quad \lambda_0 > \frac{\pi}{2\sqrt{k^2-1}}$$

Escrevendo $k = -1-2\varepsilon$ e tomando δ tal que

$$C = \sup\{f'(x); \quad 0 < x < \delta\} < -1-\varepsilon$$

Por (1)

$$\lambda_0 > \frac{\pi}{4\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon}} > \ln\left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}\right) > \ln \frac{C-1}{C}$$

Como $e^{\lambda_0} > 1 - \frac{1}{C}$ temos uma vizinhança a esquerda de λ_0 que permanece valendo a desigualdade.

Logo $e^{\lambda} > 1 - \frac{1}{C}$ para $\lambda \in (a, \infty)$. Portanto $z_1 < t_1 + 2$.

Mas sabemos que $z_1 > 0$. Temos então

$$\dot{x}(z_1) = -\lambda x(z_1) + \lambda f(x(z_1-1)) = \lambda f(x(z_1-1)) < 0$$

Observe que para $t \in (z_1, z_1 + 1)$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} x(t) = \lambda e^{\lambda t} x(t) + e^{\lambda t} \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} f(x(t-1)) < 0$$

Então $e^{\lambda t} x(t)$ é decrescente em (z_1, z_1+1) . Como também para $t = z_1$ temos

$$e^{\lambda z_1} x(z_1) = 0$$

devemos ter obrigatoriamente $x(t) < 0$ para $t \in (z_1, z_1+1)$ logo z_2 se existir satisfaz $z_2 > z_1+1$ ou seja $x(t)$ varia lentamente.

Seja $z_2 = \inf\{t \geq z_1; x(t) \geq 0\}$.

Como anteriormente seja $M > 0$ e $\delta < M$

Supomos $x(z_1+1) < -\delta$

Seja $d_1 = \inf\{f(x); -M < x < -\delta\}$

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) > \lambda \delta + \lambda d_1$$

Como no primeiro caso existe um t_2 tal que

$$-\delta < x(t_2) < 0$$

Temos então, enquanto $-\delta < x(t) < 0$

$$x(t) = x(t_2+1)e^{-\lambda(t-t_2-1)} + \lambda e^{-\lambda(t-t_2-1)} \int_{t_2+1}^t e^{\lambda(s-t_2-1)} f(x(s-1)) ds$$

Portanto

$$x(t_2+2) = x(t_2+1)e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \int_{t_2+1}^{t_2+2} e^{\lambda(s-t_2-1)} f(x(s-1)) ds$$

Pelo teorema do valor médio temos

$$f(x(s-1)) > Cx(s-1) \quad (C < -1)$$

Logo

$$\begin{aligned} x(t_2+2) &> x(t_2+1)e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \int_{t_2+1}^{t_2+2} e^{\lambda(s-t_2-1)} Cx(s-1) ds = \\ &= x(t_2+1)e^{-\lambda} + e^{-\lambda} Cx(t_2+1)(e^{\lambda}-1) \end{aligned}$$

Como anteriormente, temos $C(e^{\lambda}-1) < -1$, logo

$$x(t_2+2) > 0$$

Então $t_2+1 < z_2 < t_2+2$

$$\dot{x}(z_2) = -\lambda x(z_2) + \lambda f(x(z_2-1)) = \lambda f(x(z_2-1)) > 0$$

pois $z_1 < z_2 - 1$. Portanto $x(z_2-1) < 0$.

Mostremos agora que $e^{\lambda t} x(t)$ é crescente para $z_2 < t < z_2+1$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} x(t) = \lambda e^{\lambda t} x(t) + e^{\lambda t} \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} f(x(t-1)) > 0$$

já que neste intervalo temos $x(t-1) < 0$, logo $f(x(t-1)) > 0$.

Repetindo-se o processo obtemos a sequência de raízes da forma desejada.

A sequência de zeros definida no teorema anterior nos permite definir um operador T de k_{λ} em k_{λ} da seguinte forma:

Para cada $\psi \in k_{\lambda}$ seja $T\psi = x_{z_2+1}(0, \psi)$, $T(0)=0$. Esta função está bem definida já que $x_{z_2+1}(0, \psi)(t)e^{\lambda t}$ é crescente para

$t \in (-1, 0)$.

É fácil ver que, numa vizinhança do zero, T é um operador relativamente compacto (veja Hale [8]).

Vamos agora definir ponto atrator e ponto ejetivo de um operador.

Definição 1:

Se $x_0 \in F$, x_0 é dito um ponto fixo ejetivo de f se existe uma vizinhança U de x_0 tal que para qualquer $x \in U - \{x_0\}$ existe um inteiro positivo $k(x)$ tal que $f^{k(x)}(x) \notin U$. [8]

Definição 2:

Se $x_0 \in F$, x_0 é dito um ponto fixo atrator de f se existe uma vizinhança V de x_0 tal que para cada vizinhança U de x_0 e $x \in V$, existe um N tal que $f^n(x) \in U$ para $n \geq N$. [8]

Teorema 3:

Seja $f(x)$ tal que:

$$xf(x) < 0$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = k, \quad |k| > 1.$$

Então para $\lambda > \lambda_0$ a solução $x(t) \equiv 0$ da equação é um ponto fixo ejetivo do operador $T: k_\lambda \rightarrow k_\lambda$ anteriormente definido.

A demonstração deste teorema será uma consequência imediata do seguinte resultado.

Lema 2:

Suponhamos, f , λ e k como no teorema 2. Então existe uma constante $a > 0$ tal que para toda função inicial $\psi \in k_\lambda$ e todo zero z de $x(\cdot, \psi)$

$$\sup_{t \geq z} |x(t; \psi)| \geq a$$

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que o lema não seja verdadeiro.

Então existe um zero tal que

$$\sup_{t \geq z} |x(t; \psi)| = \delta < a \quad \text{para alguma } \psi \in k_\lambda$$

Então existe um extremo m com $z_n \leq m < z_{n+1}$ para algum n e $|x(m)| \geq \frac{\delta}{2}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que m é um máximo e n é par. Escrevemos a equação diferencial na forma

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + k\lambda x(t-1) + h(t)$$

onde

$$h(t) = \lambda f(x(t-1)) - k\lambda x(t-1).$$

Seja $T = z_n + 1$. Integrando obtemos

$$\int_T^\infty \dot{x}(t) e^{-\xi t} dt = \int_T^\infty (-\lambda x(t) + k\lambda x(t-1) + h(t)) e^{-\xi t} dt$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \dot{x}(t) e^{-\xi t} dt &= -\lambda \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt + \lambda \int_{T-1}^T x(t) e^{-\xi t} dt + \\ &+ k\lambda \int_T^\infty x(t-1) e^{-\xi t} dt + \int_T^\infty h(t) e^{-\xi t} dt \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável na 3ª integral do lado direito

da última igualdade obtemos

$$\int_T^\infty \dot{x}(t-1) e^{-\xi t} dt = \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi(t+1)} dt = e^{-\xi} \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \dot{x}(t) e^{-\xi t} dt &= -\lambda \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt + \lambda \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt + \\ &+ \lambda k e^{-\xi} \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt + \int_T^\infty h(t) e^{-\xi t} dt \end{aligned}$$

Olhando para a equação característica vemos que

$$\xi = -\lambda + \lambda k e^{-\xi}$$

Tomando ξ como solução da equação característica e substituindo na equação anterior obtemos

$$\int_T^\infty \dot{x}(t) e^{-\xi t} dt = \lambda \int_{T-1}^T x(t) e^{-\xi t} dt + \xi \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt + \int_T^\infty h(t) e^{-\xi t} dt$$

Usando a integração por partes no lado esquerdo da igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned} -x(T) e^{-\xi T} + \xi \int_T^\infty x(t) e^{-\xi t} dt &= \lambda \int_{T-1}^T x(t) e^{-\xi t} dt + \\ &+ \xi \int_{T-1}^\infty x(t) e^{-\xi t} dt + \int_T^\infty h(t) e^{-\xi t} dt \end{aligned}$$

Logo

$$-x(T)e^{-\xi T} - \xi \int_{T-1}^T x(t)e^{-\xi t} dt - \lambda \int_{T-1}^T x(t)e^{-\xi t} dt = \int_T^{\infty} h(t)e^{-\xi t} dt.$$

Fazendo $y(t) = e^{\lambda t} x(t)$ temos $x(t) = e^{-\lambda t} y(t)$ que substituindo na equação anterior obtemos

$$-x(T)e^{-\xi T} - (\xi + \lambda) \int_{T-1}^T y(t)e^{-(\xi + \lambda)t} dt = \int_T^{\infty} h(t)e^{-\xi t} dt.$$

Integrando por partes temos que

$$\begin{aligned} -x(T)e^{-\xi T} + [y(t)e^{-(\xi + \lambda)t}] \Big|_{T-1}^T - \int_{T-1}^T y(t)e^{-(\xi + \lambda)t} dt &= \\ = -\int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi + \lambda)t} dt - x(T)e^{-\xi T} + y(T)e^{-(\xi + \lambda)T} - y(T-1)e^{-(\xi + \lambda)(T-1)} &= \\ = \int_T^{\infty} h(t)e^{-\xi t} dt. \end{aligned}$$

Logo

$$-\int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi + \lambda)t} dt = \int_T^{\infty} h(t)e^{-\xi t} dt$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $e^{\xi(T - \frac{1}{2})}$ resulta

$$-\int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-\lambda t} e^{-\xi(t - T + \frac{1}{2})} dt = \int_T^{\infty} h(t)e^{-\xi(t - T + \frac{1}{2})} dt$$

Vemos que sendo $y(t) = e^{\lambda t} x(t)$ temos

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= e^{\lambda t} \dot{x}(t) + \lambda e^{\lambda t} x(t) = -e^{\lambda t} x(t) + \lambda e^{\lambda t} f(x(t-1)) + \\ &+ e^{\lambda t} x(t) = \lambda e^{\lambda t} f(x(t-1)).\end{aligned}$$

Para $t \in [T-1, T]$ temos que $x(T-1) = 0$ e $(T-1)$ é um zero par, ou seja, um zero onde $x(\cdot)$ é crescente e como a função f inverte seus valores (i.e, f aplica negativo em positivo e vice-versa) temos $\dot{y}(t) \geq 0$ já que para $t \in [T-1, T]$ temos $x(t-1) < 0$. Então

$$\left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\xi(t-T+\frac{1}{2}) - \lambda t} dt \right| \geq \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\lambda t} dt \right| e^{-R/2} \cos \frac{s}{2}$$

onde $\xi = R + is$

Isto é verdade já que $|e^{-(R+is)(t-T+\frac{1}{2})}|$ é decrescente, logo atinge seu mínimo em T , portanto

$$|e^{-(R+is)(t-T+\frac{1}{2})}| \geq |e^{-(\frac{R}{2}+i\frac{s}{2})}| \geq e^{-R/2} \cos \frac{s}{2}$$

Seguindo com a desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned}& \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\xi(t-T+\frac{1}{2}) - \lambda t} dt \right| \geq \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) dt \right| e^{-\lambda T} e^{-R/2} \cos \frac{s}{2} = \\ &= |y(T) - y(T-1)| e^{-\lambda T} e^{-R/2} \cos \frac{s}{2} = \\ &= |x(T) e^{\lambda T} - x(T-1) e^{\lambda(T-1)}| e^{-R/2} \cos \frac{s}{2} e^{-\lambda T} = \\ &= e^{-R/2} x(T) \cos \frac{s}{2}.\end{aligned}$$

Portanto

$$(1.4) \quad \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\xi(t-T+\frac{1}{2}) - \lambda t} dt \right| \geq e^{-R/2} x(T) \cos \frac{s}{2}$$

Sendo f de classe C' , dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tal que $|y| < \delta$ temos

$$\left| \frac{\lambda f(y) - \lambda f(0)}{y} - \lambda k \right| < \varepsilon$$

Logo

$$|\lambda f(y) - k\lambda y| < \varepsilon |y|$$

Então

$$\left| \int_T^\infty h(t) e^{-\xi(t-T+\frac{1}{2})} dt \right| < \varepsilon \delta \int_T^\infty e^{-R(t-T+\frac{1}{2})} dt$$

já que

$$|h(t)| = |\lambda f(x(t-1)) - \lambda kX(t-1)|$$

Então

$$(1.5) \quad \left| \int_T^\infty h(t) e^{-\xi(t-T+\frac{1}{2})} dt \right| < \varepsilon \delta e^{-R/2} \cdot R^{-1}$$

Estudemos $x(t)$ para comparar (1.4) e (1.5)

$$x(T) = x(m) e^{-\lambda(T-m)} + e^{-\lambda(T-m)} \int_m^{z+1} e^{-\lambda(T-s)} f(x(s-1)) ds$$

Sendo m o ponto de máximo para $x(\cdot)$ em $[z, z+1]$, então $f(x(s-1)) > 0$ para $s \in [m, z+1]$. Portanto

$$x(T) > x(m)e^{-\lambda(T-m)} \stackrel{(*)}{\geq} e^{-\lambda} \delta/2$$

(*) válido pela hipótese.

Portanto

$$\varepsilon \delta e^{-R/2} \cdot R^{-1} \geq e^{-R/2} \cos \frac{s}{2} x(T) \geq e^{-R/2} \cos \frac{s}{2} \cdot e^{-\lambda} \cdot \delta/2$$

Que é um absurdo.

Obs.: Veja que mostramos para um n que não sabemos se é par ou ímpar. Estamos interessados em mostrar que isto é válido para n par para mostrar que a aplicação de k_λ em k_λ definida é ejetiva.

Demonstração do Teorema 3:

Sabemos que $\sup_{t \geq z} \|x_t(0, \psi)\| > a$ para um número infinito de n e para $\psi \in k_\lambda$ com $\|\psi\| < M$. Mostremos que existe $b > 0$, tal que

$$\|x_{z_{2n}+1}(0, \psi)\| > b$$

o que implica a ejetividade da solução nula. Escolhemos b tal que

$$\inf\{f(y); 0 \leq y \leq b\} > -\frac{a}{2}$$

Suponhamos agora, por absurdo, que

$$\|x_{z_{2n}+1}(0, \psi)\| < b \quad \text{para todo } n$$

Isto implica

$$x(m_{2n+1}) = \lambda \int_{z_{2n+1}}^{m_{2n+1}} e^{-\lambda(m_{2n+1}-s)} f(x(s-1)) ds$$

como $s-1 \in (z_{2n}, z_{2n+1})$ para $s \in (z_{2n+1}, m_{2n+1})$ temos $x(s-1) < b$, logo

$$x(m_{2n+1}) > -\frac{a}{2} \int_{z_{2n+1}}^{m_{2n+1}} \lambda e^{-\lambda(m_{2n+1}-s)} ds \geq -\frac{a}{2} \text{ para todo } n$$

o que é um absurdo.

Estamos em condição de enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4:

Consideremos a equação

$$(1.6) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f_{\lambda, \mu}(x(t-1))$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, como no Lema 1, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. Além disso vale a seguinte condição

$$f_{\lambda, \mu}: I \rightarrow I, \quad f_{\lambda, \mu}(0) = 0, \quad f_{\lambda, \mu}(1) < 1$$

para quaisquer λ e μ .

Suponhamos o seguinte

S_1) Existe uma região $A_1 \subset \mathbb{R}^2$ tal que para $(\lambda, \mu) \in A_1$ $f(\cdot)$ tem apenas o zero como ponto fixo e além disso $f'_{\lambda, \mu}(0) = k$, $|k| < 1$.

S_2) Existe uma região $A_2 \subset \mathbb{R}^2$ tal que para $(\lambda, \mu) \in A_2$ na qual f tem um novo ponto fixo $x^* \neq 0$, $x^* = x^*(\lambda, \mu)$ com $f'_{\lambda, \mu}(0) > 1$ e $f'_{\lambda, \mu}(x^*) = k$, $|k| < 1$

S_3) Existe uma região $A_3 \subset \mathbb{R}^2$, tal que para $(\lambda, \mu) \in A_3$,

$f'_{\lambda, \mu}(0) > 1$ e $f'_{\lambda, \mu}(x^*) < -1$ e também $(\lambda, \mu) \in A_3 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$

Então valem as seguintes afirmações:

1º) Para $(\lambda, \mu) \in A_1$ a solução nula é estável e atrai toda solução com condição inicial ψ tal que $\psi(t) \in I$ para $-1 \leq t \leq 0$.

2º) Para $(\lambda, \mu) \in A_2$ a solução nula é ejetiva e x^* é estável.

3º) Para $(\lambda, \mu) \in A_3$ a solução nula e a solução x^* são ejetivas, ainda mais, para $\lambda = \frac{\lambda_0 + 2m\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}$ acontece uma bifurcação de Hopf da solução x^* , com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que variam lentamente.

Demonstração:

Para $(\lambda, \mu) \in A_1$ temos

$$f'(0) < 0 \quad \text{e} \quad f(x) \neq x \quad x \neq 0$$

Então para qualquer $x \neq 0$, $x \in I$,

$$f(x) < x \quad \text{e} \quad f^{n+1}(x) < f^n(x)$$

que implica que $f^n(x) \rightarrow 0$. Portanto $I_\infty = \{0\}$

Então pela proposição 1 temos demonstrado o 1º caso.

Na região A_2 , pelo teorema 1 temos x^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável já que $|f_{\lambda, \mu}(x^*)| < 1$.

Como $\lambda \geq \lambda_0$, pelo estudo das soluções da equação característica no Lema 1.b) podemos garantir que zero é instável já que existe raízes característica com parte real positiva.

Para $(\lambda, \mu) \in A_3$, observamos que em uma vizinhança de x^* ocorre o seguinte:

$$(I) \quad \begin{cases} f(x) > x & \text{para } x < x^* \\ f(x) < x & \text{para } x > x^* \end{cases}$$

Vamos mostrar que, nestas condições, existe uma conjugação topológica entre este sistema e um outro sistema na vizinhança de zero.

Isto será feito no seguinte Lema.

Lema 4:

Considere a equação do Teorema 3 com a condição (I) satisfeita. Então existe uma conjugação topológica H entre as soluções da equação (1.6) em uma vizinhança de x^* e as soluções de um sistema da forma

$$(1') \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda g_{\lambda, \mu}(x(t-1))$$

onde

$$(II) \quad \begin{cases} g: [A, B] \rightarrow [A, B] & 0 \in [A, B] \\ g'(0) < -1 & ; \quad xg(x) < 0, \quad x \neq 0, \quad g \in C' \end{cases}$$

Demonstração:

De fato, definimos

$$g_{\lambda, \mu}(x) = f_{\lambda, \mu}(x^* + x) - f_{\lambda, \mu}(x^*)$$

É obvio que se f satisfaz (I) g satisfaz (II). A solução de (1') é dado por

$$\bar{x}(t) = e^{-\lambda t} \psi(0) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} g_{\lambda, \mu}(\bar{x}(s-1)) ds =$$

$$e^{-\lambda t} \psi(0) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} [f_{\lambda, \mu}(x^* + \bar{x}(s-1)) - f_{\lambda, \mu}(x^*)] ds$$

Considere agora a seguinte função.

$$y_{\lambda}(t) = x^* e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f_{\lambda, \mu}(x^*) ds$$

Seja $Hx(t) = x(t) + y_{\lambda}(t)$ então

$$Hx(t) = (x^* + \psi(0)) e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f_{\lambda, \mu}(x^* + x(s-1)) ds$$

que é solução de (1.6) com condição inicial $x^* + \psi$. Observe que $y_{\lambda}(t) = x^*$. Portanto este homeomorfismo H nada mais é do que uma translação e então preserva estabilidade e periodicidade da solução, isto é, se $x(t)$ é uma solução periódica de (1.6) $Hx(t)$ também é uma solução periódica de (1')

Observamos que as soluções deste sistema (1.6) na vizinhança de x^* são topologicamente conjugada às soluções da vizinhança do zero do outro sistema mas não as soluções dele próprio na vizinhança do zero. Ainda mais, que na região A_2 o zero é instável enquanto x^* permanece estável. Isto conclui a demonstração do Lema. Podemos agora voltar a demonstração do Teorema.

Já sabemos que para o sistema da forma (1') com $k < -1$ e o operador $T: k_{\lambda} \rightarrow k_{\lambda}$ tem o zero como ponto ejetivo. Isto implica que o operador $T^* = T \circ H: k_{\lambda}^* \rightarrow k_{\lambda}^*$ tem x^* como ponto ejetivo. Portanto estamos em condição de aplicar o teorema Browder [2] que garante que T e consequentemente T^* deve ter um outro ponto fixo não ejetivo, pois ejetividade é uma propriedade topológica. É claro que pela construção do conjunto K_{λ} e Teorema 2 e pela definição de T que este ponto fixo não ejetivo deve ser uma solução periódica que varia lentamente.

Para demonstrar a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que variam lentamente precisaremos ainda dos seguintes resultados.

Lema 5: [12]

Com as hipótese do lema 4, seja ainda $J \in (0, \infty)$ qualquer conjunto compacto tal que $\lambda_0 \notin J$. Então existe um $\xi = \xi(J) > 0$ tal que se $x(t)$ é uma solução periódica que varia lentamente para algum $\lambda \in J$, então $\max_t \{|x(t)|\} > \xi$

Teorema 5: [8]

Suponha k um conjunto fechado e convexo num espaço de Banach X , com zero um ponto extremo de k , $\{0\} \neq k$ e $J = (a, \infty)$ para $a \in \mathbb{R}$. Suponha $A: k \times J \rightarrow k$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $A(0, \alpha) = 0$ para $\alpha \in J$
- (ii) A é completamente contínuo
- (iii) Existe um $\alpha_0 \in J$ tal que, para qualquer intervalo $J_0 \in J$, $\alpha_0 \notin J$, existe um $\varepsilon = \varepsilon(J_0) > 0$ tal que $A(x, \alpha) \neq x$ para $\alpha \in J_0$, $0 < |x| \leq \varepsilon$
- (iv) Existe um intervalo aberto I_0 contendo α_0 tal que zero é um ponto uniformemente atrativo de $A(\cdot, \alpha)$ para $\alpha \in I_0$, $\alpha < \alpha_0$, e zero é um ponto ejetivo de $A(\cdot, \alpha)$ para $\alpha \in I_0$, $\alpha > \alpha_0$. Se as hipóteses acima estão satisfeitas e $S \subset k \times J$ e $S_0 \subset k \times J$ estão definidos por

$$S = \bar{u} \text{ onde } u = \{(x, \alpha) \in k \times J ; x \neq 0, A(x, \alpha) = x\}$$

S_0 = Componente conexo, fechado, maximal de S que contém $(0, \alpha_0)$.

Então S_0 é não limitado.

Precisamos somente mostrar que estamos nas condições deste teorema.

Consideremos

$$k_\lambda = k \quad \text{e} \quad T_\lambda(\psi) = A(\psi, \lambda)$$

Temos

- (i) $T_\lambda(0) = 0$ para qualquer λ (imediato).
- (ii) T_λ é completamente contínuo. Este fato não é difícil de se demonstrar.
- (iii) É válido pelo lema 5.

Sabemos que para $\lambda < \lambda_0$ o zero é um ponto assintoticamente estável portanto uniformemente atrativo para $A(\cdot, \lambda)$ e ejetivo para $\lambda > \lambda_0$ conforme Teorema 3.

Sendo que as condições do Teorema 5, estão satisfeitas, fica garantido a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que variam lentamente para o sistema (1') que contém $(0, \lambda_0)$.

Através da conjugação H , é claro que $H(S_0)$ é um conjunto com as mesmas propriedades para (x^*, λ_0) .

CAPÍTULO II

Neste capítulo vamos aplicar as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior no estudo de alguns problemas.

Em biologia, no estudo de espécies com geração contínuas que se sobrepõe, o crescimento pode ser considerado contínuo, podendo então ser discutido por meio de uma equação diferencial.

Nestas populações o crescimento se origina do nascimento ou de algum outro processo de recrutamento, e o decréscimo populacional se dá por mortes naturais ou depredação e como estes processos levam algum tempo, o retardamento é levado em conta.

Um exemplo específico é a equação usada pelas "Comissão Internacional de Pesca à Baleia". Esta equação é apresentada e analisada em [13].

Vamos aqui, apresentar um resumo da análise feita em [15] para comparar com a quantidade de informação que podemos obter usando, no lugar da análise das raízes características o fato da derivada no ponto fixo ser em módulo menor do que um.

A equação estudada é:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} N(t) = -\mu N(t) + \nu N(t-T) [1-N^2(t-T)]_+$$

Vamos supor aqui que $0 < N(t) < 1$, $\forall t$. Isto será possível se trabalharmos com a proporção da população máxima possível. (Fatos biológicos podem nos dar estas informações).

May faz o seguinte estudo da equação:

Tomamos $\alpha = \frac{\nu}{\mu}$ onde ν é a taxa de nascimento e μ a taxa de mortalidade. Notamos que a equação acima tem um ponto de

equilíbrio para

$$N^* = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/z}$$

A equação em seguida é linearizada em torno de N^* o que leva à equação característica.

$$(1) \quad \lambda = -\mu - [(v-\mu)z - \mu]e^{-\lambda T}$$

Fazendo $\Delta = \frac{\lambda}{\mu}$, $\tau = \mu T$ e $b = (\alpha-1)z-1$, chegamos à equação

$$\Delta = -1 - be^{-\Delta \tau}$$

Passamos agora as suas conclusões:

Para $\tau = 0$ (sem retardamento) $\Delta = -(\alpha-1)z$ tem parte real negativa. Quando τ cresce os auto-valores movem-se através do eixo imaginário e uma bifurcação de Hopf aparece.

Substituindo $\Delta = iy$ na equação levará a

$$-1 = b \cos(y\tau)$$

$$y = b \sin(y\tau)$$

Após algumas manipulações, y pode ser eliminado para dar condição para a estabilidade local no ponto de equilíbrio

$$\tau < \frac{\pi - \cos^{-1}(1/b)}{(b^2 - 1)^2}$$

Esta análise nos parece bastante confusa pois necessitamos de criar variáveis novas como $\tau = \mu T$ a fim de estudar a

equação característica o que leva a perda de muitas informações. Nós vamos usar o método do ponto fixo atrativo e mostrar entre outras coisas, que parâmetros importantes na perda de estabilidade do ponto fixo são z , μ e v .

Estudaremos a equação equivalente a (2.1) dada por:

$$\frac{d}{dt} N(t) = -T\mu N(t) + \frac{v}{\mu} T\mu N(t-1) [1-N^z(t-1)]$$

lembramos que $0 < N < 1$ para todo t .

Esta equação tem dois pontos de equilíbrio; um em $N(t)=0$ e outro em $N(t) = (\frac{\alpha-1}{\alpha})^{1/z} = (1-\frac{1}{\alpha})^{1/z}$ que são pontos fixos de

$$f(x) = \frac{v}{\mu} x - \frac{v}{\mu} x^{z+1} = \frac{v}{\mu} x(1-x^z)$$

Notamos que

$$f'(x) = \frac{v}{\mu} - \frac{v}{\mu} (z+1)x^z$$

Portanto

$$f'(0) = \frac{v}{\mu}$$

e o zero será o único ponto fixo atrator quando $\frac{v}{\mu} < 1$ ou seja a taxa de mortalidade for maior que a taxa de nascimento, caminhando desta forma para a extinção.

Supomos agora $\frac{v}{\mu} > 1$. Vamos estudar a estabilidade do ponto $(1-\frac{\mu}{v})^{1/z}$ com a condição que ele deva ser um ponto fixo atrator. Para este ponto ser atrator devemos ter satisfeito a desigualdade

$$-1 < f'[(1-\frac{\mu}{v})^{1/z}] < 1$$

Sendo que $f'[(1 - \frac{\nu}{\mu})^{1/z}] = z(1 - \frac{\nu}{\mu}) + 1$ temos as seguintes desigualdades

$$z(1 - \frac{\nu}{\mu}) < 1 \quad (a)$$

$$z(1 - \frac{\nu}{\mu}) > -1 \quad (b)$$

De (a) obtemos $\frac{\nu}{\mu} > 1$ já exigido e de (b) obtemos $\frac{\nu}{\mu} < 1 + \frac{2}{z}$

Portanto o segundo ponto de equilíbrio permanece estável enquanto $\frac{\nu}{\mu} = \alpha$ satisfizer estas relações. Estas informações estão relacionadas na figura abaixo:

onde os Ais foram definidos anteriormente.

Ainda para $\frac{\nu}{\mu} > 1$, vamos estudar a equação no caso em que

$$k = f'[(1 - \frac{\nu}{\mu})^{1/z}] \quad \text{é tal que } |k| > 1$$

Vejamos primeiro o caso em que $k > 1$. Isto implicará em

$$z = (1 - \frac{\nu}{\mu}) > 0$$

que é um absurdo já que $\frac{\nu}{\mu} > 1$.

No caso $k < -1$, vamos estudar as soluções usando a equação característica dada por

$$\xi + \mu - \mu k e^{-\xi} = 0$$

Já sabemos, conforme estudo do capítulo anterior, que existe sequência $\{\mu_m\}$; $\mu_m \rightarrow \infty$ tal que para cada μ_m , existe um $R_m \in \mathbb{R}$ com iR_m solução da equação e também que a equação característica tem precisamente m raízes com parte real e parte imaginária positiva no intervalo (μ_{m-1}, μ_m) .

Sendo f de classe C' , com $k < -1$, existirá uma vizinhança de $x^* = (1 - \frac{\mu}{\nu})^{1/z}$ na qual f seja decrescente ou seja

$$\begin{cases} f(x) > x^* & \text{para } x < x^* \\ f(x) < x^* & \text{para } x > x^* \end{cases}$$

Para aplicarmos o teorema 4 do capítulo anterior, precisamos ainda mostrar que f é uma aplicação de I em I .

Observamos primeiro que:

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 0$$

e que f é positiva em I . Calculemos o máximo de f para $x \in I$

$$f(x) = \frac{\nu}{\mu} x(1-x^z)$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{\nu}{\mu} - (z+1) \frac{\nu}{\mu} x^z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{\max} = \frac{1}{(z+1)^{1/z}}$$

Portanto

$$f(x_{\max}) = \frac{\nu}{\mu} \frac{1}{(z+1)^{1/z}} \left[\frac{z}{z+1} \right] < 1$$

implica

$$v < \frac{(z+1)^{(z+1)/z}}{z} \mu \quad \text{ou seja} \quad \alpha < \frac{(z+1)}{z} (z+1)^{1/z}$$

Vemos então que podemos aplicar o Teorema 4 quando v e μ satisfazem a relação acima. Neste caso garantimos que para cada $\mu_m = \frac{\mu_0 + 2m\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}$ acontece uma bifurcação de Hopf da solução x^* , com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que variam lentamente.

Colocando estas informações no gráfico obtemos

onde

A_1 é a região em que $x = 0$ é atrator.

A_2 é a região em que x^* é atrator.

A_3 é a região onde temos soluções periódicas que variam lentamente.

B região onde não tem sentido tratar o problema por este método pois para α e z nesta região a aplicação f não observa a condição $f(I) \subset I$.

Uma outra aplicação deste método é um modelo matemático usado em Hematologia. Este modelo trata do controle exercido pelo número de células no sangue periférico.

Seja $x(t)$ a concentração de células circulantes (células/kilo) e suponha que as células são retiradas aleatoriamente da circulação a uma taxa $\gamma(\text{dia}^{-1})$ proporcional a sua concentração. Para reproduzir os efeitos do controle exercido pela população de células circulantes, através da poietina, no comportamento das células primordiais é assumido que o fluxo (células/kg/dia) depende de $x(t)$ no instante $(t-T)$. Isto leva à seguinte equação

$$\dot{x}(t) = \lambda(x(t-\tilde{\tau})) - \gamma x(t) \quad (a)$$

A forma da função $\lambda(x(t-\tilde{\tau}))$ é ainda discutível. Um dos modelos mais aceitos é

$$\lambda(x(t-\tilde{\tau})) = \frac{\lambda_0 \theta^n x(t-\tilde{\tau})}{\theta^n + x^n(t-\tilde{\tau})} \quad (b)$$

onde n é um parâmetro. Combinando (a) e (b) temos

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tilde{\tau})}{\theta^n + x^n(t-\tilde{\tau})}$$

Fazendo $y(t) = \frac{x(t\tau)}{\theta}$ temos

$$\dot{y}(t) = \frac{\tilde{\tau}}{\theta} \dot{x}(t\tilde{\tau}) = -\tilde{\tau}\gamma \frac{x(t\tilde{\tau})}{\theta} + \frac{\tilde{\tau}\beta \frac{x((t-1)\tilde{\tau})}{\theta}}{1 + \frac{x^n((t-1)\tilde{\tau})}{\theta^n}} =$$

$$= -\tilde{\tau}y(t) + \frac{\tilde{\tau}\beta_0 y(t-1)}{1 + y^n(t-1)}$$

Fazendo $\beta_0 = \beta\gamma$ e $\tau = \tilde{\tau}\gamma$ obtemos

$$\dot{y}(t) = -\tau y(t) + \frac{\tau\beta y(t-1)}{1 + y^n(t-1)}$$

Para usarmos o método de Malet-Paret, Nussbaum precisamos primeiramente achar um domínio D onde h aplique D em D para

$$h(y) = \frac{\beta y}{1 + y^n}$$

Vemos que esta função tem um único ponto crítico $\bar{y} = \frac{1}{(n-1)^{1/n}}$ que será um ponto de máximo e o máximo da função será

$$h\left(\frac{1}{(n-1)^{1/n}}\right) = \frac{\beta \frac{1}{(n-1)^{1/n}}}{1 + \frac{1}{n-1}} = \frac{\beta(n-1)}{n(n-1)^{1/n}}$$

Vemos que o máximo é menor que β . Como estudaremos a função variando β para $\beta \geq 1$, tomaremos um domínio suficientemente grande.

Vejamos se o ponto fixo está neste intervalo tomado

$$h(y) = y \Leftrightarrow y = (\beta - 1)^{1/n}$$

Como para $\beta > 1$ temos $\beta < \beta^n + 1$ então $(\beta-1)^{1/n} < \beta$

Desta forma sabemos que o ponto fixo está no intervalo tomado.

Notamos que $h'(0) = \beta$. Temos então para $0 < \beta \leq 1$ um único ponto fixo atrator que é o zero. Quando β passa pelo um, aparece um segundo ponto fixo

$$y^* = (\beta-1)^{1/n}$$

Para que este ponto seja atrator, devemos ter

$$-1 < h'(y^*) < 1$$

Pelo formato da função já sabemos que $h'(y^*) < 0$, portanto teremos problemas somente quando $h'(y^*) < -1$ que poderá ocorrer bifurcação de Hopf. Estudemos este caso

$$h'((\beta-1)^{1/n}) = \beta \frac{1+(\beta-1)-n(\beta-1)}{(1+(\beta-1))^2} = \frac{\beta(1-n)+n}{\beta} =$$

$$= 1 + \frac{n}{\beta} - n < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(1-n)+n < -\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta(2-n) < -n \quad \Leftrightarrow \quad \beta(n-2) > n \quad \Leftrightarrow \quad \beta > \frac{n}{n-2} = 1 + \frac{2}{n-2}$$

Linearizando a equação diferencial ontemos a seguinte equação característica

$$\zeta + \mu - \mu k e^{-\zeta} = 0$$

onde $k = h'(y^*)$ levando então a

$$\cos R = \frac{1}{k} \quad \mu = \frac{R}{\sqrt{k^2 - 1}} \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq R < \pi$$

como já vimos anteriormente $k = 1 + \frac{n}{\beta} - n$, $\tau = \tilde{\tau}\gamma$ e $\beta = \beta_0/\gamma$

Temos portanto as regiões A_1 , A_2 , A_3 do Teorema 4 valendo inclusive as observações análogas as do exemplo anterior com respeito aos ramos de soluções periódicas.

Nos dois exemplos anteriores, quando o zero deixa de ser uma solução estável, tornando-se instável, o novo ponto de equilíbrio surge deslocando-se continuamente do zero com o qual

se confundia anteriormente.

Este fato era previsto visto que a este sistema determina uma família contínua de semi-sistemas dinâmicos e foi estudado por Dos Reis em [4].

Observação: Este modelo é também estudado em Martelli et al [14] mas existem neste artigo, alguns equívocos. A equação original sugerida por Mackey e Glass em [11] ou Glass e Mackey [5] é dada em (b), e no entanto a estudada em [14], foi a seguinte:

$$P'(t) = -\gamma P(t) + \frac{\beta_0 \theta^n P(t-\tau)}{\theta^n + P^{2n}(t-\tau)}$$

Ve-se que houve uma troca de n por $2n$ no denominador do 2º membro. Se aplicarmos a mudança de variável indicada não chegaremos a equação B dada em Martelli [14] (pag.497), que é a seguinte

$$y'(t) = -\gamma y(t) + \frac{\gamma \beta y(t-1)}{1+y^{2n}(t-1)}$$

mas sim na equação

$$y'(t) = -\gamma y(t) + \frac{\gamma \beta y(t-1)}{1+\gamma^{2n} \theta^n y^{2n}(t-1)}$$

Portanto este modelo nada tem a ver ao contrário do que diz o artigo, com a equação original de Mackey e Glass [11].

Um outro modelo, cujo estudo nos foi sugerido pelo Prof.Dr. K.L.Cooke, foi proposto por Gurney, Blytle, Nisbet em

[6] no estudo de populações da mosca azul (Lucilia Cuprina).

Esta equação é dada por

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\delta N(t) + PN(t-T_D) \exp\left\{-\frac{N(t-T_D)}{N_D}\right\}$$

onde

$N(t)$ = número de elementos da população no instante t .

T_D = tempo gasto para um ovo se transformar num elemento sexualmente adulto.

N_D = tamanho no qual a população atinge a capacidade máxima de reprodução.

Esta equação será equivalente a

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) + \lambda k N(t-1) \exp\{-N(t-1)\}$$

onde $\lambda = T_D \delta$, $k = \frac{P}{\delta}$

Para obtermos informações sobre o comportamento das soluções, estudaremos a função

$$f(x) = kxe^{-x}$$

É fácil ver que os pontos fixos desta função são o zero e o $x^* = \ln k$.

Desta forma vemos que para $0 < k \leq 1$, teremos apenas o zero como ponto fixo e que para $k > 1$, aparecerá um novo ponto fixo $x^* = \ln k$.

Sendo que

$$f'(0) = k \quad , \quad f'(x^*) = 1 - \ln k$$

Temos que o zero é ponto fixo atrator quando $k < 1$. O ponto x^* é ponto fixo atrator para $1 < k < e^2$.

Precisamos mostrar que para $k > e^2$ temos

$$f(x) > x^* \quad \text{para } x < x^*$$

$$f(x) < x^* \quad \text{para } x > x^*$$

que seria equivalente a mostrar que $f'(x) < 0$ já que $f \in C^\infty$. Isto é um fato imediato já que

$$f'(x^*) = 1 - \ln k$$

Portanto podemos aplicar o Teorema 4 e obtemos as regiões do gráfico abaixo

A_1 = zero ponto de equilíbrio atrator estável.

A_2 = x ponto de equilíbrio atrator estável.

A_3 = existência de soluções que variam lentamente.

CAPÍTULO III

No estudo da estabilidade das equações diferenciais retardadas ficou logo bem claro, como consequência principalmente dos trabalhos de Henry [10] e Melvin [16], que alterações nos retardos podem perturbar o comportamento assintótico com a ocorrência de perda de estabilidade da solução nula. Este fato levou a necessidade de estabelecer critérios e métodos que determinassem não apenas a estabilidade de uma solução, mas também a manutenção desta propriedade quando se variam os retardos. Temos assim a justificativa para a seguinte definição introduzida por Hale [8].

Definição 1:

A equação $\dot{x}(t) = f(t, x(t-R_1), \dots, x(t-R_k))$, $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é globalmente estável nos retardos se a solução nula for uniformemente assintoticamente estável para todas as famílias de retardo $(R_1, \dots, R_k)$, $R_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, k$.

Em nosso nível de conhecimento os principais resultados nesta área são de Hale [8], Henry [10], Melvin [16], Cooke e Ferreira [3], Hale et al [9] e Silkowskii [17].

De maneira geral, os resultados nesta linha são obtidos através do estudo das equações características associadas às equações, sendo importante nesta conduta distinguir os casos em que os retardos são racionalmente dependentes ou independentes. No caso de retardos racionalmente independente necessita-se, geralmente, hipóteses mais fortes nos coeficientes da equação a fim de que a estabilidade da solução nula seja garantida, mesmo com a variação dos retardos.

Na tentativa de obter informações em equações não lineares do tipo (2) do capítulo I mas levando-se em conta mais

retardos, ou seja, equações da forma

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-R_1), \dots, x(t-R_k))$$

estabelecemos um método que não depende dos retardos e consequentemente do fato dos mesmos serem racionalmente independentes ou não. Nesta linha obtivemos o teorema (1) que em seguida apresentamos.

Teorema 1:

Consideremos:

$$(3.1) \quad \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-T_1), \dots, x(t-T_k)) \quad \lambda > 0$$

com

$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $f(I^k) \subset I$ para $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado

$$f_*^1(I^k) = f(I^k)$$

$$f_*^n(I^k) = f(f_*^{n-1}(I^k) \times \dots \times f_*^{n-1}(I^k))$$

$$I_\infty^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_*^n(I^k)$$

Nestas condições valem

(i) Se $\psi \in C([0, T], \mathbb{R})$ é tal que $\psi(t) \in I \quad \forall t \in [0, T]$

$T = \max\{T_1, \dots, T_k\}$ então $x(t; \lambda, \psi) \in I \quad \forall t \geq T$

(ii) Se $I_\infty^* \neq \emptyset$ então $\text{dist}(x(t; \lambda, \psi), I_\infty^*) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$

Demonstração:

(i) Seja $t_0 = \sup\{t \in [T, \infty) : x(s) \in I, s \in [T, t]\}$

Vemos que existe t_0 já que $x(T) = \psi(T) \in I$. Suponhamos por absurdo que $t_0 < \infty$. Seja $I = [D, C]$. Caso $I = [D, \infty)$ ou $I = (-\infty, C]$ será um caso particular de $I = [D, C]$. Temos

$$(1) \quad \frac{d}{dt} e^{\lambda t} x(t) = \lambda e^{\lambda t} f(x(t-T_1), \dots, x(t-T_k)) \leq$$

$$\leq \lambda e^{\lambda t} C \quad \text{para todo } t \in [T, t_0 + \bar{T}] \text{ onde}$$

$$\bar{T} = \min\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$$

Integrando de T a t para $t \in [T, t_0 + \bar{T}]$ e sabendo que $x(T) = \psi(T) \leq C$ temos

$$e^{\lambda s} x(s) \Big|_T^t \leq e^{\lambda s} C \Big|_T^t$$

o que implica $x(t) \leq C$ para $t \in [T, t_0 + \bar{T}]$

De forma análoga mostramos que

$$x(t) \geq D \quad \text{para } t \in [T, t_0 + \bar{T}]$$

que contradiz a definição de t_0 .

Logo $t_0 = \infty$ ou seja, $x(t; \lambda, \psi) \in I$ para $t \geq T$.

(ii) Novamente consideramos $I = [D, C]$.

Sendo que $f(I^k) \subset I$ e f é contínua, temos que $f_*^n(I^k)$ é uma sequência de intervalos encaixantes. Sejam

$$f_*^n(I^k) = [D_n, C_n] \quad n \geq 0$$

$$D = D_0 \leq D_1 \leq \dots \leq C_1 \leq C_0 = C$$

$$I_\infty^* = [D_\infty, C_\infty]$$

Mostremos, por indução, que:

$$\text{dist}(x(t; \lambda, \psi); f^n(I^k)) \rightarrow 0 \quad \text{com } t \rightarrow \infty$$

Para isto, mostremos que $x(t) \in [D_n, C_n]$ para $t \in [nT, nT+T]$.
Mostremos que isto é válido para $n=1$. Para $t \in [T, T+\bar{T}]$ a invariância de f nos garante que

$$D_1 \leq f(x(t-T_1), \dots, x(t-T_k)) \leq C_1$$

Sendo esta afirmação verdadeira para $t \in [T, T+\bar{T}]$ temos também que a mesma afirmação é verdade para $t \in [T, T+p\bar{T}]$ ou $t \in [T, T+T]$ (integrar até um ponto $p\bar{T}$ para $p\bar{T} > T$).

De (1) temos, para $t \in [T, T+T]$,

$$\lambda e^{\lambda t} D_1 \leq \frac{d}{dt} e^{\lambda t} x(s) = \lambda e^{\lambda t} f(x(t-T_1), \dots, x(t-T_k)) \leq \lambda e^{\lambda t} C_1$$

Logo, integrando de $[T, 2T]$ temos

$$e^{\lambda s} D_1 \Big|_T^t \leq e^{\lambda s} x(s) \Big|_T^t \leq e^{\lambda s} C_1 \Big|_T^t$$

que implica $D_1 \leq x(t) \leq C_1$.

Supondo válido para n e usando a mesma desigualdade anterior obtemos

$$x(t) \in f_*^n(I^k) \quad \text{para } t \in [nT, nT + \bar{T}]$$

o que garante $x(t) \in f_*^n(I^k)$ para $t \geq nT$ por (i) deste teorema.

Portanto

$$\text{dist}(x(t; \lambda, \psi), f_*^n(I^k)) \rightarrow 0 \quad \text{com } t \rightarrow \infty$$

Sendo $I_\infty^* = \bigcap_{n \geq 0} f_*^n(I^k)$, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que para $n \geq N$ temos

$$\max \{ D_\infty - D_n, C_n - C_\infty \} < \varepsilon$$

como para $t \geq nT$ temos $D_n \leq x(t) \leq C_n$, então

$$\text{dist}(x(t; \lambda, \psi), I_\infty^*) < \varepsilon \quad \text{para } t \geq nT$$

$$\text{Portanto } \text{dist}(x(t; \lambda, \psi), I_\infty^*) \rightarrow 0 \quad \text{com } t \rightarrow \infty$$

Como já ressaltamos, este método é bastante diverso do usual, embora quando nos restringimos ao caso linear os resultados sejam os mesmos.

Para melhor ilustrar este aspecto, vamos considerar a seguinte equação

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + \sum_{i=1}^k a_i x(t-R_i)$$

Colocando-se $A = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ e $R = (R_1, R_2, \dots, R_k)$ temos por objetivo principal do problema colocar condições em A para termos estabilidade para todo $R \in \mathbb{R}_+^k$. O conjunto dos vetores A com esta propriedade é chamado um cone de estabilidade no sentido que se A pertence ao conjunto λA também pertence para $\lambda > 0$.

A primeira condição para estudar este problema é que $\sum_{i=1}^k a_i \neq 0$. Esta condição é muito natural pois não se pode falar em estabilidade assintótica da solução nula sem esta hipótese, já que qualquer função constante seria solução desta equação se não houvesse esta hipótese.

Zivotovskii [18] estabeleceu as seguintes condições necessárias e suficientes para que A pertença ao cone de estabilidade

$$\sum_{i=0}^k a_i < 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k |a_i| < |a_0|$$

O método de demonstração é baseado no estudo da parte real dos zeros da seguinte função

$$f(\lambda, R, A) = \lambda - a_0 - \sum_{i=1}^k a_i e^{-\lambda R}$$

Vamos estudar este problema usando o nosso método.

Inicialmente devemos observar que as condições de Zivotovskii implicam trivialmente que $a_0 < 0$ e que

$$\sum_{i=1}^k \frac{|a_i|}{|a_0|} < 1$$

Em seguida escrevemos a equação na forma

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_0 \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{a_0} x(t-R_i)$$

estamos portanto no caso $-\lambda = a_0$ e $f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{a_0} x_i$.

Mostremos agora que $I_\infty^* = \{0\}$. Para isto mostraremos que $f_*^n(I^k) \subset [-C^n, C^n]$ onde $C = \sum_{i=1}^k \frac{|a_i|}{|a_0|} < 1$ ou seja $|f(x)| < C^n$ para todo $x \in f_*^{n-1}(I) \times \dots \times f_*^{n-1}(I^k)$

Mostremos que a afirmação é válida para $n = 2$. Seja $x \in f(I^k) \times \dots \times f(I^k)$ então $x = (x_1, \dots, x_k)$ e

$$\begin{aligned} |f(x_1, \dots, x_k)| &= |f(f(x_1^1, \dots, x_1^k), \dots, f(x_k^1, \dots, x_k^k))| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{a_0} f(x_i^1, \dots, x_i^k) \right| = \left| \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{a_0} \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{a_0} x_i^j \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{a_i}{a_0} \right| \sum_{j=1}^k \left| \frac{a_j}{a_0} \right| |x_i^j| \leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{a_i}{a_0} \right| \sum_{j=1}^k \left| \frac{a_j}{a_0} \right| = \left(\sum_{i=1}^k \left| \frac{a_i}{a_0} \right| \right)^2 = C^2 \end{aligned}$$

Supomos válido para n , i.e., $|f(x)| \leq C^n$ para todo $x \in f_*^{n-1}(I^k) \times \dots \times f_*^{n-1}(I^k)$.

Seja $x \in f_*^n(I^k) \times \dots \times f_*^n(I^k)$. Teremos $x = (x_1, \dots, x_k)$ onde $x_1 = f(\bar{x}_1), \dots, x_k = f(\bar{x}_k)$ sendo que $\bar{x}_i \in f_*^{n-1}(I^k) \times \dots \times f_*^{n-1}(I^k)$.

No caso particular de $k = 2$.

Calculemos

$$|f(x)| = |f(x_1, \dots, x_k)| = |f(f(\bar{x}_1), \dots, f(\bar{x}_k))| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{a_0} f(\bar{x}_i) \right| \leq \sum_{i=1}^k \frac{|a_i|}{|a_0|} |f(\bar{x}_i)| \leq \sum_{i=1}^k \frac{|a_i|}{|a_0|} C^n = C^{n+1}$$

Desta forma vemos que $I_n^* \subset [-C^n, C^n]$. Logo

$$I_\infty^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^* = \{0\}$$

Temos portanto que A nestas condições pertence ao cone de estabilidade. Como isto vale para todo $\lambda > 0$, temos que λA também pertence ao cone.

Um outro exemplo pode ser dado usando o problema do corolário 3.5 dado por Hale em [9].

Consideremos a seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^5 \pi x(t-R_i) + \frac{3\lambda}{2} \sum_{i=1}^{10} \pi x(t-R_i) + \frac{1}{5} x^3(t-2)$$

Neste exemplo, devido a sua não linearidade, não podemos aplicar o método de Zivotovskii, mas pelo nosso método vê-se facilmente que qualquer solução com condição inicial com $\psi(t) \in I$ converge para zero. É claro que este resultado pode ser obtido por linearização mas não teríamos nenhuma informação da região de atração.

Acreditamos entretanto que a maior utilidade deste método esteja em estudar pontos críticos não nulos em equações não lineares. Para isto, apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 2:

Seja $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que exista $x = (x_0, \dots, x_0)$ tal que para este vetor f se comporta como uma projeção, isto é, $f(x_0, \dots, x_0) = x_0$. Então:

- (i) A função constante $x(t) = x_0$ é ponto de equilíbrio da equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-R_1), \dots, x(t-R_k)) \quad \lambda > 0$$

- (ii) Se f é de classe C_1 numa vizinhança de $(x_0, \dots, x_0)$ e $|Df(x_0, \dots, x_0)| < \frac{1}{\sqrt{k}}$, então a solução constante $x(t) = x_0$ é globalmente estável nos retardos.

Demonstração:

- (i) Imediato por simples verificação.

- (ii) Seja V uma bola de centro $\bar{x}_0 = (x_0, \dots, x_0)$ tal que $|Df(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k} + \epsilon}$ para ϵ suficientemente pequeno e $x \in V$. Isto é possível já que $f \in C^1$ e $|Df(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Consideremos um intervalo B centrado em x_0 tal que $B^k = Bx \dots xB \subset V$. Seja $\ell = \ell(B)$ o comprimento deste intervalo.

Mostremos primeiramente que $f(B^k) \subset B$. Para tanto, tomemos $x \in B^k$

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| = |Df(C)| |x - x_0| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{k} + \epsilon} \sqrt{k} \frac{\ell}{2} < \frac{\ell}{2}$$

o que implica $f(B^k) \subset B$.

Considerando $f: B^k \rightarrow B$ mostremos que $I_\infty^* = \{x_0\}$. Isto é equivalente a mostrar que $\ell(I_n) \leq \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \epsilon}\right)^n \ell$ o que demonstraremos

por indução.

Seja $x \in I_1^*$.

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| = |Df(x)| |\bar{x} - \bar{x}_0| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k} + \epsilon} \sqrt{k} \frac{\ell}{2} \end{aligned}$$

Portanto para $n = 1$ temos $\ell(I_1^*) \leq \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \epsilon}\right)^1 \ell$

Supomos a afirmação válida para n .

Seja $x \in I_{n+1}^*$. Então

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| = |Df(c)| |\bar{x} - \bar{x}_0| = \\ &= |Df(c)| |(x_1, x_2, \dots, x_k) - (x_0, x_0, \dots, x_0)| = \\ &= |Df(c)| |(f(\bar{x}_1), \dots, f(\bar{x}_k)) - (f(\bar{x}_0), \dots, f(\bar{x}_0))| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k} + \epsilon} \sqrt{k} \sup_{1 \leq i \leq k} |f(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_0)| \leq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \epsilon} \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \epsilon}\right)^n \frac{\ell}{2} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \epsilon}\right)^{n+1} \frac{\ell}{2}. \end{aligned}$$

Portanto a afirmação vale para $n+1$, i.e.,

$$\ell(I_n^*) \leq \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \epsilon}\right)^n \ell$$

Sendo que $x_0 \in I_n^*$ para todo n temos então

$$I_n^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^* = \{x_0\}.$$

Aplicando agora o teorema 1, temos que $x(t) \equiv x_0$ é

globalmente estável nos retardos.

Podemos notar que este resultado não sai diretamente de Zivotovskii como uma linearização da função f em torno do ponto do equilíbrio, já que a estabilidade da linear pode não implicar na estabilidade da não linear que depende de uma perturbação desprezada na linearização.

Consideremos a equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda \frac{x(t-R_1)}{1+x^3(t-R_1)} + \lambda \frac{x(t-R_2)}{1+x^3(t-R_2)}$$

Notamos que $x(t) = 1$ é ponto de equilíbrio da equação.

Fazendo

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^3} + \frac{y}{1+y^3}$$

temos $f(1,1) = 1$

$$Df(x,y) = \left(\frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}, \frac{1-2y^3}{(1+y^3)^2} \right)$$

Logo $Df(1,1) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$. Portanto

$$|Df(1,1)| = \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pelo teorema 2, podemos garantir que a solução $x(t) = 1$ é globalmente estável nos retardos.

Tomemos agora a equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \frac{\lambda}{2} x(t-R_1) \sin x(t-R_2) + \frac{\lambda}{2} x(t-R_1) \cos x(t-R_3)$$

Da mesma forma como anteriormente podemos notar que $x(t) = 0$ é estável globalmente nos retardos já que sendo

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2} x \text{sen} y + \frac{1}{2} x \cos z$$

satisfaz

$$Df(x,y,z) = \frac{1}{2}(\text{sen} y + \cos z), \frac{1}{2} x \cos y, -\frac{1}{2} x \text{sen} z$$

$$|Df(0,0,0)| = |(\frac{1}{2}, 0, 0)| = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Um outro exemplo que podemos considerar é a equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda e^{-\frac{1}{2}[x(t-1)-1]} e^{-\frac{1}{2}[x(t-\pi)-1]}$$

Vemos que $x(t) = 1$ é ponto de equilíbrio e que

$$Df(x,y) = (-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} e^{-\frac{1}{2}y} e, -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} e^{-\frac{1}{2}y} e)$$

O que implica

$$|Df(1,1)| = |(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})| = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto $x(t) = 1$ é estável globalmente nos retardos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Avellar, C.E. e Hale, J.K. - On the zeros of exponential polynomials. J.Math.Anal.Appl. 73(1980), 434-452.
- [2] Browder, F.E. - A further generalization of the Schauder fixed point theorem. Duke Math.J. 32(1965), 575-578.
- [3] Cooke, K.L. e Ferreira, J.M. - Stability conditions for linear retarded functional equations. J.Math.Anal.Appl. 96(1983), 480-504.
- [4] Dos Reis, J.G. - Bifurcação por perda de estabilidade em equações diferenciais retardadas autônomas. Tese de Livre Docência - FMRP-USP - Ribeirão Preto (1980).
- [5] Glass, L. e Mackey, M.O. - Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. In: Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines. Annals of the New York Academy of Sciences. 316(1979).
- [6] Gurney, W.S.C.; Blytle, S.P.; Nisbet, N.R. - Nicholson's blowflies revisited - Nature - 287(1980, 17-21.
- [7] Hadelar, K.P. e Tomiuk, J. - Periodic solutions of difference differential equations Arch.Rat.Mech.Anal. 65(1977) 87-95.
- [8] Hale, J.K. - Theory of functional differential equations. Springer-Verlag, New York, Berlim (1977).
- [9] Hale, J.K.; Infante, E.F.; Tsen, F.S.P. - Stability in linear delay equations. J.Math.Anal.Appl. 105(1985), 533-555.
- [10] Henry, D. - Linear autonomous neutral functional differential equations. J.Differ.Eq. 8(1970), 494-501.

- [11] Mackey, M.C. e Glass, L. - Oscillation and chaos in physiological control-systems. Science, 197(1977), 287-289.
- [12] Mallet-Paret, J. e Nussbaum, R.D. - Global continuation and asymptotic behavior for periodic solutions of a differential-delay equation. Lefschetz Center for Dynamical Systems. 85-15.
- [13] Markushevich, A. - Teoria de las funciones analíticas. Mir-Moscú, (1970).
- [14] Martelli, M.; Schmidt, Klaus; Smith, H. - Periodic solutions of some nonlinear delay-differential equations. J.Math.Anal.Appl. 74(1980), 494-503.
- [15] May, R.M. - Nonlinear phenomena in ecology and epidemiology. Nonlinear dynamics. Annals of the New York Academy of Science. 357(1980).
- [16] Melvin, W.R. - Stability properties of functional differential equations. J.Math.Anal.Appl. 48(1974), 749-763.
- [17] Silkowskii, R. - A star shaped condition for stability of linear retarded functional differential equations. Proc.Roy.Soc. Edinburgh Sei A. 83(1979), 189-198.
- [18] Zivotovskii, L.A. - Absolute stability for the solutions of differential equations with retarded arguments. Trudy Sem.Diff. Urav.Otkrly Arg. 7(1969), 82-91.