I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMCC-USP
PÓS-GRADUADO

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO NO INFINITO
ENTRE AS SOLUÇÕES DE DOIS SISTEMAS DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Herminio Cassago Junior

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO NO INFINITO
ENTRE AS SOLUÇÕES DE DOIS SISTEMAS DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Herminio Cassago Junior

Orientador: Prof. Dr. Nelson Onuchic

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1981

Aos meus pais

A minha esposa Maria Rita

e aos meus filhos

Ana Paula e Alexandre

ASYMPTOTIC BEHAVIOR AT INFINITY BETWEEN THE SOLUTIONS OF TWO
SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Herminio Cassago Junior

Adviser: Prof. Dr. Nelson Onuchic

Consider the Ordinary Differential Equations:

$$(1) \quad \dot{y} = A(t)y + f_1(t,y)$$

$$(2) \quad \dot{x} = A(t)x + f_2(t,x)$$

where $x, y, f_1(t,y)$ and $f_2(t,x)$ belong to X ($\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$), and $A(t)$ is an $n \times n$ matrix with t in $J = [0, \infty)$.

Our objective in this work is given as follows:

First, we introduce a generalization of the concept of asymptotic equivalence dealing with Banach spaces stronger than $L(J, X)$. In addition, we give information about the number of parameters involved in the problem.

Secondly, under suitable conditions, we establish, in a natural way, homeomorphisms between a family F of D -asymptotic solution of (1), its section $F(T)$ and a subspace of the phase space. The above diagram, suggested by the mentioned homeomorphisms, is essentially the one given by Táboas [18].

The main tool used here are the theorem of Corduneanu [6 - a, Th. I] and results of Massera-Schäffer Theory [12 - a, c].

Several applications of the theory under consideration are done here.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, pela constante dedicação, segurança e objetividade na orientação deste trabalho, bem como pela compreensão e amizade que sempre nos proporcionou.

Ao Prof. Dr. Plácido Zoëga Táboas, pela boa vontade que sempre demonstrou, em discutir conosco assuntos relacionados com este trabalho, formulando assim valiosas sugestões.

A todos os amigos do ICMSC-USP pelo bom ambiente de trabalho e pelos incentivos dados aos nossos estudos.

À Senhorita Maria Helena Derigi, que com dedicação, realizou um ótimo trabalho de datilografia.

A todos aqueles que direta ou indiretamente nos auxiliaram.

Este trabalho dependeu parcialmente das seguintes instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

I N D I C E

INTRODUÇÃO I

CAPÍTULO I

PRELIMINARES 1

CAPÍTULO II

RELAÇÕES ASSINTÓTICAS 13

CAPÍTULO III

PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DE UMA FAMÍLIA DE SOLUÇÕES D-AS-
SINTÓTICAS 53

BIBLIOGRAFIA 59

INTRODUÇÃO

O conceito usual de Equivalência Assintótica entre sistemas de equações diferenciais ordinárias

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + f_1(t, x)$$

$$(2) \quad \dot{y} = A(t)y + f_2(t, y)$$

onde $x, y \in X = \mathbb{R}^n$, $A(t)$ é $n \times n$, $t \in J = [0, \infty)$, $f_1(t, x)$ e $f_2(t, y)$, definidas em $J \times X$ com valores em X , diz que a cada solução limitada $x = x(t)$ de (1) corresponde uma solução limitada $y = y(t)$ de (2) tal que

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - y(t)] = 0$$

e reciprocamente.

A definição acima pode ser também formulada como segue:

A cada solução $x(t) \in L^\infty$ de (1) corresponde uma solução $y(t) \in L^\infty$ de (2) tal que $x(t) - y(t) \in L_0^\infty$ e reciprocamente.

O conceito de equivalência assintótica é em geral pouco informativo a menos que se introduzam hipóteses mais exigentes.

Neste trabalho visamos o seguinte:

(a) introduzir uma generalização do conceito de equivalência assintótica operando com espaços de Banach B e D mais fortes que $L(J, X)$ sem que sejam necessariamente coincidentes com L^∞ e L_0^∞ . Ainda mais, procuramos encontrar o número de parâmetros envolvidos nesta relação;

(b) estudar propriedades topológicas de famílias F de soluções de (1) e relacioná-las com sua secção $F(T) = \{x(T) \in X; x(t) \in F\}$.

Estes problemas se situam na linha de resultados da teoria desenvolvida por Massera e Schäffer [12-a] e [12-c]. Em especial os conceitos de espaços de Banach mais fortes que $L(J, X)$, bem como o de admissibilidade, desempenham um papel fundamental para os propósitos visados.

Em 1930, Perron [15], estabeleceu condições suficientes para a existência de uma família F uniformemente limitada de soluções de (1), determinando também o número de parâmetros de que depende F . Ver Massera e Schäffer [12-a, Th. A].

Em 1958, Massera e Schäffer [12-a, Th. 7.1] generalizam esse resultado situando o problema de modo a incluir espaços de Banach X de dimensão infinita. Além disso, demonstraram que o conjunto $F(0)$ dos valores iniciais $x(0) \in X$, das soluções $x(t) \in F$ é homeomorfo a um subespaço vetorial de X .

Em 1960, Corduneanu [6-a, Th. I] (Teorema 1.2, neste trabalho), estendeu parcialmente os resultados de Massera e Schäffer, estabelecendo a existência da família F , interpretando a propriedade de limitação uniforme como a de ser F uma família limitada em um espaço de Banach D de funções de J em X . Assim, Corduneanu estabeleceu estes resultados num contexto que inclui uma classe de espaços de Banach na qual está $L^\infty(J, X)$, implicitamente considerado por Perron. O teorema de Corduneanu depende basicamente da teoria desenvolvida por Massera e Schäffer em [12-a] e do princípio da contração de Banach.

Em 1963, motivados por um teorema de Corduneanu [6-a, Th. II], Hartman e Onuchic [11, Th. 1.1] (Teorema 1.3, neste tra

balho) estabeleceram a existência da família F baseados na teoria de Massera e Schäffer, envolvendo o teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff.

Observamos que o teorema de Hartman-Onuchic é bastante profundo e muito próximo do teorema de Corduneanu, pois ambos tem objetivos similares e dependem essencialmente dos resultados de Massera e Schäffer.

Em 1973, inspirados no teorema de Hartman e Onuchic [11, Th. 1.1], Hallam e Onuchic [9] introduzem o conceito de solução D-assintótica e fazem uma generalização do conceito de equivalência assintótica que permite obter resultados bem mais gerais de comportamento assintótico, num sentido que será claramente exposto.

Corduneanu, Hartman-Onuchic e Hallam-Onuchic não se ocuparam de uma análise da distribuição no espaço de fase dos valores iniciais $x(0)$ das soluções $x(t) \in F$.

Em 1975, Táboas [18] fez interessantes aplicações do teorema de Corduneanu, investigando propriedades topológicas da família F relacionando-a com sua secção $F(0) = \{x(0) \in X; x(t) \in F\}$.

Este trabalho foi desenvolvido da seguinte maneira:

No Capítulo I estão os resultados básicos, definições e notações. Destacam-se um resultado de Massera-Schäffer, o teorema de Hartman-Onuchic, o teorema de Corduneanu e condições suficientes para a condição tipo-Lipschitz do teorema de Corduneanu.

No Capítulo II damos a definição de solução D-assintótica, a generalização do conceito de equivalência assintótica e são obtidos resultados sobre comportamento assintótico similares aos obtidos por Hallam-Onuchic [9]. Destacamos o Teore-

ma 2.19 que é o resultado central deste capítulo, no qual está todo o alcance do nosso conceito de relacionamento assintótico. Damos também alguns exemplos para esclarecimento das definições e teoremas dos quais destacamos a equação $\ddot{u} - u - \phi(t)u^n = 0$, que com $n = 1$ foi estudada por Bellman [2] e com o uso do Teorema 2.19 conseguimos obter de uma só vez a mesma conclusão de Bellman para $n \geq 1$.

No Capítulo III, usando o Lema 2.6 que é basicamente o teorema de Corduneanu adaptado para os nossos propósitos, estabelecemos homeomorfismos entre os conjuntos das soluções $x(t) \in F$ (munido com a topologia induzida por D/N), sua secção $F(T)$ no espaço de fase e uma bola aberta de um subespaço vetorial de X .

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste capítulo estabelecemos definições, notações e resumimos alguns resultados básicos. Destacamos alguns resultados da teoria de Massera-Schäffer, a qual é apresentada com detalhes por Onuchic [13-a, cap. I] e por Hartman [10, cap. XII - p. III], ver também [13-b] e [13-c].

Denotamos por J o intervalo $[0, \infty)$. O espaço R^n (ou C^n), $n \geq 1$, será denotado por X e $||\cdot||$ representará uma conveniente norma sobre X . Se A é uma matriz $n \times n$, sua norma $||A||$ será sempre considerada como qualquer norma matricial compatível com $||\cdot||$, isto é, $||Ax|| \leq ||A|| ||x||$, ($x \in X$). $L(J, X)$ será o espaço das funções definidas em quase toda parte (q.t.p.) de J , com valores em X , que são localmente Lebesgue-integráveis. Identificamos funções que coincidem em q.t.p. de J e consideramos $L(J, X)$ com a topologia da convergência em média de ordem um, nos intervalos compactos de J . Tal topologia pode ser dada, por exemplo, pela família de semi-normas $\{P_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), onde

$$P_n(f) = \int_0^n ||f(t)|| dt, \quad f \in L(J, X)$$

$L(J, X)$ se torna então um espaço vetorial topológico localmente convexo.

Se B é um espaço de Banach, sua norma será denotada por $||\cdot||_B$, ou por alguma outra notação usual, quando conveniente.

Dizemos que um espaço de Banach B de funções de J em X é *mais forte* que $L(J,X)$, se B está contido algebricamente em $L(J,X)$ e se convergência em B implica convergência em $L(J,X)$.

O termo *contido algebricamente* deve ser entendido *isomorfo a um subespaço*.

Se B é um espaço de Banach contido algebricamente em $L(J,X)$, uma condição equivalente à de B ser mais forte que $L(J,X)$ é a seguinte:

Existe uma sequência numérica $k_n = k_n(B) > 0$ tal que

$$\int_0^n ||f(t)|| dt \leq k_n |f|_B \quad (n = 1, 2, \dots; f \in B)$$

Daremos agora alguns exemplos de espaços de Banach mais fortes que $L(J,X)$.

M : espaço das funções $f \in L(J,X)$ tais que

$$\int_t^{t+1} ||f(\tau)|| d\tau \text{ é limitada para } t \in J, \text{ com a norma } |f|_M = \sup_{t \in J} \int_t^{t+1} ||f(\tau)|| d\tau$$

M_0 : subespaço de M das funções f tais que

$$\int_t^{t+1} ||f(\tau)|| d\tau \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ com a norma induzida por } M$$

M^p ($1 < p < \infty$) : espaço das funções $f \in L(J,X)$ tais

$$\text{que } \int_t^{t+1} ||f(\tau)||^p d\tau \text{ é limitada para } t \in J, \text{ com a norma } |f|_{M^p} = \sup_{t \in J} \left[\int_t^{t+1} ||f(\tau)||^p d\tau \right]^{1/p}. \text{ Ver Corduneanu [6-b, p. 6].}$$

L^∞ : espaço das funções $f \in L(J, X)$ essencialmente limitadas, com a norma $|f|_\infty = \sup_{t \in J} \text{ess} ||f(t)||$

L_0^∞ : subespaço de L^∞ das funções f que tendem essencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$ (isto é, $f(t)$ coincide (q.t.p.) com alguma função que tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$), com a norma induzida por L^∞

L^p ($1 \leq p < \infty$) : espaço das funções $f \in L(J, X)$ tais que $\int_0^\infty ||f(t)||^p dt < \infty$, com a norma $|f|_p = [\int_0^\infty ||f(t)||^p dt]^{1/p}$

Seja $\psi(t) > 0$ uma função contínua em J .

L_ψ : espaço das funções $f \in L(J, X)$ tais que $\frac{f}{\psi} \in L^\infty$, com a norma $|f|_{L_\psi} = |\frac{f}{\psi}|_\infty$

$L_{\psi,0}$: subespaço de L_ψ das funções f tais que $\frac{f}{\psi} \in L_0^\infty$, com a norma induzida por L_ψ .

OBSERVAÇÕES:

(1) Na linha dos dois últimos exemplos, se B é um espaço de Banach mais forte que $L(J, X)$ e se $\psi(t) > 0$ é uma função contínua em J , então podemos garantir que o espaço $B(\psi)$ das funções $f \in L(J, X)$ tais que $\frac{f}{\psi} \in B$, com a norma $|f|_{B(\psi)} = |\frac{f}{\psi}|_B$, é um espaço de Banach mais forte que $L(J, X)$.

(2) De acordo com Massera e Schäffer [12-c, p. 35] uma relação de ordem $\leq$ entre espaços normados B e D , a

qual depende de suas normas $|\cdot|_B$ e $|\cdot|_D$, pode ser definida pondo: $B \leq D$ se e somente se $B \subset D$ e $|f|_D \leq |f|_B$ ($f \in B$). É claro que se B e D são espaços de Banach, com $B \leq D$ e D mais forte que $L(J,X)$, então B é mais forte que $L(J,X)$.

(3) Se B e D são espaços de Banach mais fortes que $L(J,X)$, consideramos o espaço $B \cap D$, a menos que se mencione o contrário, munido com a norma $|f|_B + |f|_D$ (ou $\max\{|f|_B, |f|_D\}$), $f \in B \cap D$. Como $B \cap D \leq D$, segue da observação (2) que $B \cap D$ é mais forte que $L(J,X)$.

(4) Os espaços M e M_0 estão relacionados com os espaços L^p da seguinte forma: $L^p \leq M$ ($1 \leq p \leq \infty$) e $L^p \leq M_0$ ($1 \leq p < \infty$). Ver Massera e Schäffer [12-a, Lemma 3.2].

Uma classe importante de espaços de Banach é a classe $H(R)$ dos espaços $\beta = \beta(J,R)$, $\beta \subset L(J,R)$, que satisfazem às seguintes condições:

- (1) β é mais forte que $L(J,R)$
- (2) Se $\psi \in \beta$ e ϕ é mensurável, com $|\phi(t)| \leq |\psi(t)|$ em q.t.p. de J , então $\phi \in \beta$ e $|\phi|_\beta \leq |\psi|_\beta$
- (3) Se $\chi_{[0,T]}$ indica a função característica do intervalo $[0,T]$, então $\chi_{[0,T]} \in \beta$, para todo $T > 0$
- (4) β é "lean" no infinito, isto é, se $\psi \in \beta$ então $\chi_{[0,T]}\psi \rightarrow \psi$ quando $T \rightarrow \infty$ em β .

Os espaços L^p ($1 \leq p < \infty$), L_0^∞ , $L_{\psi,0}$ de funções reais são todos elementos de $H(R)$.

Por $B = \beta(J,X)$ representamos o espaço das funções $f \in L(J,X)$ tais que $||f|| \in \beta(J,R)$, com a norma $|f|_B = |||f|||_\beta$.

De agora em diante, todos os espaços de Banach considerados serão supostos mais fortes que $L(J, X)$.

Consideremos os sistemas

$$(H) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(NH) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em J e $b(t) \in L(J, X)$.

Um par (B, D) de espaços de Banach é dito *admissível* relativamente a $A(t)$ ou *$A(t)$ -admissível*, se para todo $b(t) \in B$, existe pelo menos uma solução $x(t) \in D$ da equação (NH).

Se D é um espaço de Banach, dizemos que $x(t)$ é uma *D-solução* de alguma equação quando $x(t) \in D$ e é solução.

Dado um espaço de Banach D , denotaremos com X_{0D} o subespaço vetorial de X formado pelos valores iniciais $y(0)$ das *D-soluções* $y(t)$ da equação (H). Indicamos com X_{1D} algum subespaço complementar de X_{0D} , isto é, $X = X_{0D} \oplus X_{1D}$. P_{0D} é a projeção de X sobre X_{0D} anulando X_{1D} .

O teorema seguinte, devido a Massera e Schäffer, é de grande importância neste trabalho. Sua prova pode ser encontrada em Hartman [10, Lemma 6.3, p. 438], ou em Onuchic [13-a, Teorema 1.3].

TEOREMA 1.1. [Massera-Schäffer]

Seja (B, D) um par de espaços de Banach *$A(t)$ -admissível* e seja $\xi_0 \in X_{0D}$. Então para cada $b(t) \in B$ a equação (NH) tem uma única *D-solução* $x(t)$ tal que $P_{0D}x(0) = \xi_0$. Além disso, existem constantes positivas C_0 e K independentes de

$b(t)$ ou de ξ_0 , mas dependendo de X_{1D} , tais que

$$\|x(t)\|_D \leq C_0 \|\xi_0\| + K \|b(t)\|_B$$

A partir de agora, sempre que tivermos um par (B, D) $A(t)$ -admissível, denotaremos por C_0 e K as constantes dadas no Teorema 1.1.

Se ρ é uma constante positiva, seja $S_{D,\rho}$ a bola fechada de raio ρ no espaço D ,

$$S_{D,\rho} = \{f \in D : \|f\|_D \leq \rho\}$$

O próximo teorema, devido a Corduneanu [6-a, Th. I], é de fundamental importância para este trabalho. Pode ser encontrado em Hartman [10, Th. 8.1, p. 441] e em Táboas [18, Teorema 3.1, p. 23]. Achamos conveniente colocar sua demonstração, por não ser bem conhecida e por ser um teorema central dentro de nossos objetivos.

Consideremos o sistema

$$(P) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t, x)$$

TEOREMA 1.2. [Corduneanu]

Admitamos que as seguintes hipóteses estejam satisfeitas relativamente à equação (P):

- (a) O par (B, D) é $A(t)$ -admissível.
- (b) Existe $\rho > 0$ tal que $f(t, x(t)) \in B$, se $x(t) \in S_{D,\rho}$.
- (c) Existe λ , $0 < \lambda < K^{-1}$, de modo que

$$(1.1) \quad \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\|_B \leq \lambda \|x(t) - y(t)\|_D$$

desde que $x(t), y(t) \in S_{D,\rho}$.

Seja $\xi_0 \in X_{0D}$ e pomos $\alpha = |f(t,0)|_B$.

Então, se $||\xi_0||$ e α são suficientemente pequenos de modo que

$$(1.2) \quad C_0 ||\xi_0|| + K\alpha \leq (1 - \lambda K)\rho,$$

existe uma única D-solução $x(t) \in S_{D,\rho}$ da equação (P) com $P_{0D}x(0) = \xi_0$.

PROVA:

Para cada $u(t) \in S_{D,\rho}$, o Teorema 1.1 assegura a existência de uma única D-solução $x(t)$ da equação

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, u(t)),$$

de modo que $P_{0D}x(0) = \xi_0$ e $|x(t)|_D \leq C_0 ||\xi_0|| + K|f(t, u(t))|_B$.

Definamos o operador F , de $S_{D,\rho}$ em D , colocando $[Fu](t) = x(t)$.

Sejam $u_1, u_2 \in S_{D,\rho}$ e $x_1 = Fu_1, x_2 = Fu_2$. Então $x_1(t) - x_2(t)$ é a D-solução da equação

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)),$$

satisfazendo

$$P_{0D}[x_1(0) - x_2(0)] = 0$$

e

$$|x_1(t) - x_2(t)|_D \leq K|f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))|_B$$

Decorre da hipótese (c) que

$$|x_1(t) - x_2(t)|_D \leq \lambda K|u_1(t) - u_2(t)|_D$$

e como $\lambda < K^{-1}$, segue que F é uma contração.

Provemos que $FS_{D,\rho} \subset S_{D,\rho}$.

Se $u \in S_{D,\rho}$, decorre de (1.1) e (1.2) e da definição do operador F que:

$$\begin{aligned} |Fu|_D &\leq C_0 ||\xi_0|| + K|f(t, u(t))|_B \leq \\ &\leq C_0 ||\xi_0|| + K|f(t, u(t)) - f(t, 0)|_B + \\ &+ K|f(t, 0)|_B \leq C_0 ||\xi_0|| + \lambda K|u(t)|_D + K\alpha \leq \\ &\leq C_0 ||\xi_0|| + \lambda K\rho + K\alpha \leq \rho \end{aligned}$$

Assim, pelo princípio da contração de Banach, o operador F tem um *único* ponto fixo e o Teorema 1.2 fica provado.

Enunciaremos em seguida um teorema bastante profundo devido a Hartman e Onuchic [11, Th. 1.1], o qual está intimamente relacionado com o teorema anterior e com o nosso problema. Não daremos aqui sua demonstração porque as técnicas que vamos usar são principalmente as de Corduneanu. A mesma pode também ser encontrada em [10, Th. 8.2, p. 442] e [13-a, T. 2.3, p. 12]. Indicaremos por $C(J, X)$ o conjunto das funções contínuas de J em X , e por $C_c(J, X)$ esse conjunto munido da topologia da convergência uniforme nas partes compactas de J . Seja $S = S_{D,\rho} \cap C(J, X)$ e seja $\bar{S}$ a aderência de S em $C_c(J, X)$.

TEOREMA 1.3. [Hartman-Onuchic]

Suponhamos que as seguintes hipóteses estejam satisfeitas com relação à equação (P):

- (a) O par (B, D) é $A(t)$ -admissível

- (b) Para cada $x(t) \in \bar{S}$, $f(t, x(t)) \in B$ e a aplicação $x(t) \in \bar{S} \rightarrow f(t, x(t)) \in B$ é contínua, onde em $\bar{S}$ consideramos a topologia induzida por $C_c(J, X)$
- (c) Existe constante $r > 0$ tal que $\|f(t, x(t))\|_B \leq r$, para todo $x(t) \in \bar{S}$
- (d) Existe $\lambda(t) \in L(J, \mathbb{R})$ tal que $\|f(t, x(t))\| \leq \lambda(t)$, para todo $x(t) \in \bar{S}$

Seja $\xi_0 \in X_{0D}$ e suponhamos que $C_0 \|\xi_0\| + Kr \leq \rho$.

Então, existe pelo menos uma D-solução $x(t) \in S$ da equação (P), com $P_{0D}x(0) = \xi_0$.

Condições suficientes para a hipótese (c) do Teorema 1.2:

LEMA 1.4.

Suponhamos que o par (B, D) satisfaça as seguintes condições:

- (1) Se $\phi \in D$, $\psi : J \rightarrow X$ é mensurável e $\|\psi(t)\| \leq \|\phi(t)\|$ em J , então $\psi \in D$ e $\|\psi\|_D \leq \|\phi\|_D$
- (2) $D \leq B$

Então uma condição suficiente para que a hipótese (c) do Teorema 1.2 esteja satisfeita é que

$$(1.3) \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad (t \in J; x, y \in X)$$

onde $\lambda < K^{-1}$.

A prova é dada em [18, Lema 3.2, p. 25].

Exemplos de pares (B, D) que satisfazem as condições do Lema 1.4: (M, L^p) ($1 \leq p \leq \infty$); (M_0, L^p) ($1 \leq p < \infty$), (M, M_0) ; (M, L_0^∞) ; (M_0, L_0^∞) ; (L^∞, L_0^∞) .

OBSERVAÇÕES:

(1) Suponhamos que estejam satisfeitas as hipóteses do Lema 1.4 relativamente ao par (B, D) . Se D_1 é um espaço de Banach tal que $D_1 \leq D$, então a hipótese (c) do Teorema 1.2 está satisfeita relativamente ao par (B, D_1) .

(2) Suponhamos que o espaço D tenha a seguinte propriedade: Dado $\rho > 0$, existe $\sigma = \sigma(\rho) > 0$ tal que $|\phi|_D < \rho$ implica $||\phi(t)|| \leq \sigma$ em J . Então a desigualdade de (1.3) pode ser assumida apenas para $||x||, ||y|| \leq \sigma$.

LEMA 1.5.

Suponhamos que o par (B, D) satisfaça as seguintes condições:

(1) Se $\phi \in B$, $\psi : J \rightarrow X$ é mensurável e $||\psi(t)|| \leq ||\phi(t)||$ em J , então $\psi \in B$ e $|\psi|_B \leq |\phi|_B$.

(2) $D \leq L^\infty$.

Então uma condição suficiente para que a hipótese (c) do Teorema 1.2 esteja satisfeita é que

$$(1.4) \quad ||f(t, x) - f(t, y)|| \leq \lambda(t) ||x - y|| \quad (t \in J; ||x||, ||y|| \leq \rho)$$

com $\lambda(t) \in B$ e $|\lambda(t)|_B < K^{-1}$.

A prova é dada em [18, Lema 3.3, p. 26].

OBSERVAÇÃO:

Se $\psi(t)$ é contínua, com $0 < \psi(t) \leq 1$ em J , então $L_{\psi,0} \leq L_{\psi} \leq L^{\infty}$.

LEMA 1.6.

Seja $(B,D) = (L^1, L^p)$ ($1 \leq p \leq \infty$) e suponhamos que:

$$(1.5) \quad ||f(t,x) - f(t,y)|| < \lambda(t) ||x-y|| \quad (t \in J; x, y \in X)$$

com $\lambda(t) \in L^q$ e $|\lambda(t)|_q < K^{-1}$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Então, a hipótese (c) do Teorema 1.2 está satisfeita.

A prova é dada em [18, Lema 3.4, p. 27].

OBSERVAÇÃO:

Se $f(t,0) \equiv 0$ em J , os Lemas 1.3 - 1.5 garantem também a validade da hipótese (b) do Teorema 1.2.

CAPÍTULO 11

RELAÇÕES ASSINTÓTICAS

Consideremos os sistemas

$$(2.1) \quad \dot{y} = A(t)y + f_1(t, y)$$

$$(2.2) \quad \dot{x} = A(t)x + f_2(t, x)$$

onde $x, y \in X$, $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável definida em $J = [0, \infty)$ e $f_1, f_2 : J \times X \rightarrow X$.

DEFINIÇÃO 2.1.

Uma função $x = x(t)$ de A em X , com $[T, \infty) \subset A \subset \mathbb{R}$, $T \geq 0$ está assintoticamente em um espaço de Banach D , se existe uma função $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ de J em X que está em D e tal que $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $t \geq T$.

DEFINIÇÃO 2.2.

Sempre que x está assintoticamente em D e x é também uma solução de uma equação diferencial, dizemos que x é uma solução D -assintótica da equação diferencial.

DEFINIÇÃO 2.3.

Dizemos que uma família F depende de pelo menos p parâmetros se possuir uma sub-família que possa ser indexada bijetoramente com índices numa bola aberta do $\mathbb{R}^p$.

OBSERVAÇÕES 2.4:

- (i) Adotamos a convenção que se $p = 0$ então a família consiste de pelo menos um elemento.
- (ii) Veremos que, aplicando o Teorema de Corduneanu, obtemos a existência de uma família de soluções de (2.1) que depende precisamente de p parâmetros, no sentido de que a sub-família da definição 2.3 pode ser tomada como sendo a própria família.

DEFINIÇÃO 2.5.

Sejam p e q números inteiros tais que $0 \leq p \leq n$ e $0 \leq q \leq n$. Dizemos que as equações (2.1) e (2.2) são (p,q) -assintoticamente relacionadas relativamente ao par ordenado $\{D_1, D_2\}$ de espaços de Banach (denotaremos por $\{p,q; D_1, D_2\}$), se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- (i) Existe uma família F_p de soluções D_1 -assintóticas de (2.1) que depende de pelo menos p parâmetros.
- (ii) Para cada solução $y = y(t)$ de (2.1) em F_p , corresponde uma família G_q de soluções $x = x(t)$ de (2.2), que depende de pelo menos q parâmetros tal que a família das diferenças $y - x$ é assintoticamente limitada em D_2 .

Os exemplos a seguir têm por objetivo ilustrar as definições acima:

EXEMPLO 1:

Seja $X = \mathbb{R}^2$, $D_1 = L^1$ ou L^∞ , $D_2 = L_0^\infty$, e consideremos os sistemas:

$$(I) \begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{solução geral} \quad \begin{cases} y_1 = ae^{-t} \\ y_2 = b \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = e^{-2t} \end{cases} \quad \text{solução geral} \quad \begin{cases} x_1 = ce^{-t} \\ x_2 = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \alpha \end{cases}$$

As equações (I) e (II) são $\{1,1;L^1,L_0^\infty\}$, pois existe a família

$$F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções L^1 -assintóticas de (I) dependendo de 1 parâmetro. Para cada solução

$$y = \begin{bmatrix} a_0 e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \in F_1$$

corresponde uma família

$$G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} ce^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções de (II) dependendo de 1 parâmetro tal que

$$y-x = \begin{bmatrix} (a_0-c)e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

está assintoticamente em L_0^∞ .

Ainda, (I) e (II) são $\{2,1;L^\infty,L_0^\infty\}$, pois existe a família

$$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções L^∞ -assintóticas de (I) dependendo de 2 parâmetros. Para cada solução

$$y = \begin{bmatrix} a_0 e^{-t} \\ b_0 \end{bmatrix} \in F_2$$

corresponde uma família

$$G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} ce^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + b_0 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções de (II) dependendo de 1 parâmetro tal que

$$y-x = \begin{bmatrix} (a_0 - c)e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

está assintoticamente em L_0^∞ .

Mas as equações (I) e (II) não são $\{1,2;L^\infty,L_0^\infty\}$ e não são $\{1,2;L^1,L_0^\infty\}$.

Observamos neste exemplo que $\{p,q;D_1,D_2\}$ e $\{q,p;D_1,D_2\}$ não são necessariamente equivalentes.

Notamos ainda que (I) e (II) são $\{2,2;L^\infty,L_0^\infty\}$ e são $\{1,2;L^1,L_0^\infty\}$.

EXEMPLO 2:

Sejam $X = \mathbb{R}$, $h(t)$ e $g(t) \in C^1$.

$$(a) D_1 = L^1, D_2 = L_0^\infty, h(t) \in L^1, h(t) \notin L_0^\infty \text{ e } g(t) \in L_0^\infty.$$

Consideremos as equações

$$(I) \quad \dot{y} = \dot{h}(t), \quad \text{solução geral: } y = h(t) + a$$

$$(II) \quad \dot{x} = \dot{h}(t) + \dot{g}(t), \quad \text{solução geral: } x = h(t) + g(t) + b$$

As equações (I) e (II) são $\{0, 0; L^1, L_0^\infty\}$, pois existe a família $F_0 = \{y = h(t)\}$ de solução L^1 -assintótica de (I) dependendo de 0 parâmetro. A solução $y = h(t) \in F_0$ corresponde a família $G_0 = \{x = h(t) + g(t)\}$ de solução de (II) dependendo de 0 parâmetro, tal que $y - x = -g(t)$ esta assintoticamente em L_0^∞ .

$$(b) D_1 = L^\infty, D_2 = L_0^\infty, h(t) \in L^\infty, h(t) \notin L_0^\infty \text{ e } g(t) \in L_0^\infty.$$

Então as equações (I) e (II) são $\{1, 0; L^\infty, L_0^\infty\}$, pois existe a família $F_1 = \{y = h(t) + a, a \in \mathbb{R}\}$ de soluções L^∞ -assintóticas de (I) dependendo de 1 parâmetro. Para cada solução $y(t) = h(t) + a_0 \in F_0$ corresponde a família $G_0 = \{x = h(t) + g(t) + a_0\}$ de solução de (II) dependendo de 0 parâmetro, tal que $y - x = g(t)$ esta assintoticamente em L_0^∞ .

EXEMPLO 3:

Sejam $X = \mathbb{R}^2$, $h(t)$ e $g(t) \in C^1$.

Consideremos as equações

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 \\ \dot{y}_2 = \dot{h}(t) \end{cases} \quad \text{solução geral} \quad \begin{cases} y_1 = ae^{-t} \\ y_2 = h(t) + b \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{h}(t) + \dot{g}(t) \end{cases} \quad \text{solução geral} \quad \begin{cases} x_1 = ae^{-t} \\ x_2 = h(t) + g(t) + \beta \end{cases}$$

$$(a) \quad D_1 = L^1, \quad D_2 = L_0^\infty, \quad h(t) \in L^1, \quad h(t) \notin L_0^\infty \text{ e } g(t) \in L_0^\infty.$$

As equações (I) e (II) são $\{1,1;L^1,L_0^\infty\}$, pois existe a família

$$F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ h(t) \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções L^1 -assintóticas de (I) dependendo de 1 parâmetro. Para cada solução

$$y(t) = \begin{bmatrix} a_0 e^{-t} \\ h(t) \end{bmatrix} \in F_1$$

corresponde uma família

$$G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} \\ h(t) + g(t) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções de (II) dependendo de 1 parâmetro tal que

$$y-x = \begin{bmatrix} (a_0 - \alpha)e^{-t} \\ -g(t) \end{bmatrix}$$

está assintoticamente em L_0^∞ .

$$(b) D_1 = L^\infty, D_2 = L_0^\infty, h(t) \in L^\infty, h(t) \notin L_0^\infty \text{ e } g(t) \in L_0^\infty.$$

As equações (I) e (II) são $\{2,1;L^\infty,L_0^\infty\}$, pois existe a família

$$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ h(t)+b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções L^∞ -assintóticas de (I) dependendo de 2 parâmetros. Para cada solução

$$y(t) = \begin{bmatrix} a_0 e^{-t} \\ h(t)+b_0 \end{bmatrix} \in F_2$$

corresponde uma família

$$G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} \\ h(t)+g(t)+b_0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções de (II) dependendo de 1 parâmetro tal que

$$y-x = \begin{bmatrix} (a_0 - \alpha)e^{-t} \\ -g(t) \end{bmatrix}$$

está assintoticamente em L_0^∞ .

EXEMPLO 4:

A idéia aqui desenvolvida é essencialmente a do Exemplo 3, mostrando o envolvimento de um número maior de parâmetros num caso não linear.

Sejam $X = \mathbb{R}^4$, $h(t) \in C^1$, $g(t,y)$ e $f(t,x)$ são contínuas.

Consideremos as equações

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 \\ \dot{y}_2 = \dot{h}(t) \\ \dot{y}_3 = -y_3 \\ \dot{y}_4 = g(t, y_1) \end{cases} \quad \text{solução geral} \quad \begin{cases} y_1 = ae^{-t} \\ y_2 = h(t) + b \\ y_3 = ce^{-t} \\ y_4 = \int_0^t g(s, y_1(s)) ds + d \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{h}(t) \\ \dot{x}_3 = -x_3 \\ \dot{x}_4 = g(t, y_1) + f(t, x_1) \end{cases} \quad \text{solução geral} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha e^{-t} \\ x_2 = h(t) + \beta \\ x_3 = \gamma e^{-t} \\ x_4 = \int_0^t g(s, y_1(s)) ds + \\ + \int_0^t f(s, x_1(s)) ds \end{cases}$$

(a) Se $D_1 = L^1$, $D_2 = L_0^\infty$, $h(t) \in L^1$, $\int_0^t g(s, \alpha e^{-s}) ds \in L^1$,

$\alpha \in \mathbb{R}$, mas não pertence a L_0^∞ e $\int_0^t f(s, \alpha e^{-s}) ds \in L_0^\infty$,

$\alpha \in \mathbb{R}$, então as equações (I) e (II) são $\{2, 2, L^1, L_0^\infty\}$.

De fato: existe a família

$$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ h(t) \\ ce^{-t} \\ \int_0^t g(s, y_1(s)) ds \end{bmatrix}, a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções L^1 -assintóticas de (I) dependendo de 2 parâmetros.
Para cada

$$y(t) = \begin{bmatrix} a_0 e^{-t} \\ h(t) \\ c_0 e^{-t} \\ \int_0^t g(s, y_1(s)) ds \end{bmatrix} \in F_2$$

corresponde uma família

$$G_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} \\ h(t) \\ \gamma e^{-t} \\ \int_0^t g(s, y_1(s)) ds + \int_0^t f(s, x_1(s)) ds \end{bmatrix}, \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

de soluções de (II) dependendo de 2 parâmetros tal que

$$y(t)-x(t) = \begin{bmatrix} (a_0 - \alpha)e^{-t} \\ 0 \\ (c_0 - \gamma)e^{-t} \\ -\int_0^t f(s, x_1(s))ds \end{bmatrix}$$

está assintoticamente em L_0^∞ .

(b) Se $D_1 = L^\infty$, $D_2 = L_0^\infty$, $h(t) \in L^\infty$, $\int_0^t g(s, ae^{-s})ds \in L^\infty$,

$a \in \mathbb{R}$, mas não pertence a L_0^∞ e $\int_0^t f(s, \alpha e^{-s})ds \in L_0^\infty$,

$\alpha \in \mathbb{R}$, analogamente mostra-se que as equações (I) e

(II) são $\{4, 2; L^\infty, L_0^\infty\}$.

Outras aplicações da Definição 1.5 são dadas por Hallam-Onuchic em [9] os quais usam o Teorema de Hartman-Onuchic.

Agora passaremos a estudar este caso de relação assintótica usando como ferramenta principal o Teorema de Corduneanu.

O próximo lema é essencialmente uma reformulação do Teorema de Corduneanu numa forma conveniente para atacar os problemas de relacionamento assintótico.

LEMA 2.6.

Suponhamos que a equação (2.1) satisfaça as seguintes condições:

- (i) (B, D) é $A(t)$ -admissível e $B = \beta(J, X) \in H(X)$.
- (ii) Existe $\rho > 0$ tal que $f_1(t, y(t)) \in B$, se $y(t) \in S_{D, \rho}$.
- (iii) Existem uma função $\lambda(t) \in \beta = \beta(J, R)$ e um número T suficientemente grande de modo que

$$\begin{aligned} & \| \chi_{[T, \infty)}(t) [f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))] \|_B \\ & \leq \| \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) \|_\beta \| x(t) - y(t) \|_D \end{aligned}$$

para todo $x(t), y(t) \in S_{D, \rho}$ e $\lambda = \| \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) \|_\beta < K^{-1}$.

Seja $\xi_0 \in X_{0D}$. Se $\alpha = \| f_1(t, 0) \|_B$ e $\| \xi_0 \|$ são suficientemente pequenos de modo que $C_0 \| \xi_0 \| + K\alpha \leq (1 - \lambda K)\rho$, então (2.1) tem uma *única* solução D-assintótica $y = y(t)$ definida em $[T, \infty)$ com as propriedades:

(iv) $P_{0D} Z^{-1}(T) y(T) = \xi_0$, onde $Z(t)$ é a matriz fundamental de $\dot{z} = A(t)z$ com $Z(0) = I_{(n)}$.

(v) A solução y tem uma extensão $\tilde{y}$ definida em J e que é solução de

$$(2.3) \quad \dot{y} = A(t)y + \chi_{[T, \infty)}(t) f_1(t, y)$$

tal que $\tilde{y}(T) = y(T)$ e $\| \tilde{y}(t) \|_D \leq \rho$.

PROVA:

Seja $\tilde{f}_1(t, y(t)) = \chi_{[T, \infty)}(t) f_1(t, y(t))$. Para (2.3) temos que (a) do Teorema 1.2 é dada por (i) e (c) por (iii).

Temos também que (ii) e o fato de $B \in H(X)$ implicam (b) do Teorema 1.2.

De fato: (ii) diz que $f_1(t, y(t)) \in B$ se $y(t) \in S_{D, \rho}$ como $B \in H(X)$ segue que $\| f_1(t, y(t)) \| \in \beta(J, R)$ e como $\chi_{[T, \infty)}(t) \| f_1(t, y(t)) \| \leq \| f_1(t, y(t)) \|$, vem que

$$\chi_{[T, \infty)}(t) \| f_1(t, y(t)) \| \in \beta(J, R),$$

logo $x_{[T,\infty)}(t)f_1(t,y(t)) = \tilde{f}_1(t,y(t)) \in B = \beta(J,X)$ se $y(t) \in S_{D,\rho}$.

Então o Teorema 1.2 implica que existe *uma única D-solução* $\tilde{y} = \tilde{y}(t) \in S_{D,\rho}$ de (2.3) tal que $P_{0D}\tilde{y}(0) = \xi_0$.

Como $\tilde{f}(t,y(t)) = 0$ para $0 \leq t < T$, segue que $\tilde{y}(t) = Z(t)\tilde{y}(0)$ e portanto

$$P_{0D}\tilde{y}(0) = P_{0D}Z^{-1}(T)\tilde{y}(T) = \xi_0$$

A função $y(t) = \tilde{y}(t)$, $t \geq T$ é a solução D-assintótica de (2.1) tal que

$$P_{0D}Z^{-1}(T)y(T) = \xi_0$$

Deste modo, o lema fica provado.

OBSERVAÇÃO 2.7.

Se $\dim X_{0D} = p$, o Lema 2.6 implica a existência de uma família F_p de soluções D-assintóticas de (2.1) que depende de p parâmetros.

O Lema 2.6 está intimamente relacionado com o Lema de Hallam-Onuchic [9, p. 190]. Ambos dão informações do mesmo tipo baseados no Teorema I de Corduneanu [6-a] e no Teorema 1.1 de Hartman-Onuchic [11], respectivamente. Por exemplo, ambos nos dão o número de parâmetros e no caso de Corduneanu, dado $\xi_0 \in X_{0D}$ garantimos unicidade de solução D-assintótica satisfazendo (iv), o que estabelece uma correspondência biunívoca entre a família de soluções D-assintóticas de (2.1) e uma vizinhança V_σ no conjunto das condições iniciais X_{0D} . Mostraremos no Capítulo III que esta correspondência é um homeomorfismo.

OBSERVAÇÃO 2.8.

Se $B \in H(X)$ e $D \leq L^\infty$, então uma condição suficiente para a hipótese (iii) do Lema 2.6 é dada por:

"existe função $\lambda(t) \in \beta(J, R)$ tal que

$$||f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))|| \leq \lambda(t) ||x(t) - y(t)||$$

para todo $t \in J$ e para todo $x(t), y(t) \in S_{D, \rho}$ ".

De fato: Se $x(t), y(t) \in S_{D, \rho}$, então para $T \geq 0$

$$\begin{aligned} & ||\chi_{[T, \infty)}(t) [f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))]| = \\ & = \chi_{[T, \infty)}(t) ||f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))|| \leq \\ & \leq \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) ||x(t) - y(t)|| \leq \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) |x(t) - y(t)|_\infty \leq \\ & \leq \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) |x(t) - y(t)|_D \end{aligned}$$

Como $B \in H(X)$, então pela segunda condição da classe $H(X)$, temos

$$\begin{aligned} & |\chi_{[T, \infty)}(t) [f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))]|_B \leq \\ & \leq |\chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t)|_B |x(t) - y(t)|_D \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 2.9.

Se $B \in H(X)$ e $D = L_\psi$, onde $\psi(t) > 0$ é contínua em J , então uma condição para a hipótese (iii) do Lema 2.6 é dada por:

"existe função $\lambda(t) \in \beta(J, R)$ tal que

$$||f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))|| \leq \frac{\lambda(t)}{\psi(t)} ||x(t) - y(t)||$$

para todo $t \in J$ e para todo $x(t), y(t) \in S_{D, \rho}$."

De fato: se $x(t), y(t) \in S_{D, \rho}$, então para $T \geq 0$

$$\begin{aligned} & ||\chi_{[T, \infty)}(t)[f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))]| = \\ & = \chi_{[T, \infty)}(t) ||f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))|| \leq \\ & \leq \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) \frac{||x(t) - y(t)||}{\psi(t)} \leq \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) \left| \frac{x(t) - y(t)}{\psi(t)} \right|_{\infty} = \\ & = \chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t) |x(t) - y(t)|_{L_{\psi}} \end{aligned}$$

Como $B \in H(X)$ temos

$$\begin{aligned} & |\chi_{[T, \infty)}(t)[f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))]|_B \leq \\ & \leq |\chi_{[T, \infty)}(t) \lambda(t)|_{\beta} |x(t) - y(t)|_{L_{\psi}} \end{aligned}$$

O próximo teorema nos dá uma condição suficiente para que as equações (2.1) e (2.2) sejam $\{p, q; D_1, D_1 \cap D_2\}$. O Teorema 1 de [9, p. 192] nos fornece um resultado semelhante. Uma diferença entre eles está principalmente na hipótese sobre $f_i(t, x)$; no Teorema 1 de [9], $f_i(t, x)$ é majorado por uma função mensurável pertencente a $\beta(J, R)$ e no Teorema 2.10 que veremos a seguir, colocamos sobre $f_i(t, x)$ uma hipótese tipo Lipschitz cuja constante é substituída por uma função mensurável pertencente a $\beta(J, R)$.

TEOREMA 2.10.

Suponhamos que as equações (2.1) e (2.2) satisfaçam as seguintes condições:

- (i) (B, D_i) é $A(t)$ -admissível, $i = 1, 2$ e $B = \beta(J, X) \in H(X)$.
- (ii) Existe $\rho_i > 0$ tal que $f_i(t, u_i(t)) \in B$ se $u_i(t) \in S_{D, \rho_i}$, $i = 1, 2$.
- (iii) Existem funções $\lambda_i(t) \in \beta(J, R)$ e um número T suficientemente grande de modo que

$$(2.4) \quad \|\chi_{[T, \infty)}(t)[f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))]\|_B \leq$$

$$\leq \|\chi_{[T, \infty)}(t)\lambda_1(t)\|_\beta \|x(t) - y(t)\|_{D_1}$$

para todo $x(t), y(t) \in S_{D_1, \rho_1}$;

$$(2.5) \quad \|\chi_{[T, \infty)}(t)[f_2(t, u(t)+y(t)) - f_2(t, w(t)+y(t))]\|_B \leq$$

$$\leq \|\chi_{[T, \infty)}(t)\lambda_2(t)\|_\beta \|u(t) - w(t)\|_{D_1 \cap D_2}$$

para todo $u(t), w(t) \in S_{D_1 \cap D_2, \rho_2}$, para todo

$y(t) \in S_{D_1, \rho_1}$; e $\lambda_i^0 = \|\chi_{[T, \infty)}(t)\lambda_i(t)\| < K^{-1}$.

- (iv) Sejam $\dim X_{0D_1} = p$ e $\dim X_{0D_2} = q$.

Se $\alpha_i = \|f_i(t, 0)\|_B$ e σ são suficientemente pequenos de modo que $C_0\sigma + K\alpha_i \leq (1 - \lambda_i^0 K)\rho_i$, então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p, q; D_1, D_1 \cap D_2\}$.

PROVA:

O Lema 2.6 implica a existência de uma família F_p de soluções D_1 -assintóticas de (2.1) que depende de p parâmetros. Seja $y = y(t)$ uma solução de (2.3), onde $y \in F_p$ é dada pelo Lema 2.6. Segue que $|y|_{D_1} \leq \rho_1$.

A mudança de variável $u = x - y(t)$ nos leva à equação diferencial

$$(2.6) \quad \dot{u} = A(t)u + F(t, u) \quad (t \geq T; u \in X)$$

onde $F(t, u) = f_2(t, u + y(t)) - f_1(t, y(t))$.

É conveniente considerar a equação (2.6) assim,

$$\dot{u} = A(t)u + \chi_{[T, \infty)}(t)F(t, u) \quad (t \in J)$$

Segue de (2.5) que para todo $u(t), w(t) \in S_{D_1 \cap D_2, \rho_2}$

$$\begin{aligned} & |\chi_{[T, \infty)}(t)[F(t, u(t)) - F(t, w(t))]|_B \leq \\ & \leq |\chi_{[T, \infty)}(t)\lambda_2(t)|_B |u(t) - w(t)|_{D_1 \cap D_2} \end{aligned}$$

O Lema 2.6 agora implica que existe uma família $\tilde{G}_q$ de soluções $D_1 \cap D_2$ -assintóticas de (2.6) que dependem de q parâmetros.

Para cada $u \in \tilde{G}_q$, $x(t) = u(t) + y(t)$ é solução de (2.2). Portanto existe uma família G_q de soluções de (2.2) que depende de q parâmetros, tal que $y - x$ está assintoticamente em $S_{D_1 \cap D_2, \rho_2}$, completando assim a prova do Teorema 2.10.

COROLÁRIO 2.11.

Suponhamos que as hipóteses (i), (ii) e (iv) do Teorema 2.10 estejam satisfeitas e que $D_i \leq L^\infty$.

(iii'). Suponhamos que existe uma função $\lambda(t) \in \beta(J, R)$ tal que

$$||f_i(t, x) - f_i(t, y)|| \leq \lambda(t) ||x - y||, \quad i = 1, 2$$

para todo $t \in J$ e para todo $x, y \in X$.

Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p, q; D_1, D_1 \cap D_2\}$ e as equações (2.2) e (2.1) são $\{q, p; D_1 \cap D_2, D_1\}$.

PROVA:

De acordo com a observação 2.8, temos que (2.4) e (2.5) estão satisfeitas com $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda(t)$. Devido a simetria das hipóteses para ambos os casos a conclusão segue do Teorema 2.10.

DEFINIÇÃO 2.12.

Dizemos que a matriz $A(t) = (a_{ij}(t))$ pertence à classe Δ se e somente se satisfizer as seguintes condições:

(Δ_1) $A(t)$ é uma matriz contínua e triangular inferior

$$(a_{ij}(t) = 0, \text{ se } i < j).$$

(Δ_2) $a_{ij}(t)$ é limitada em J , quando $i \neq j$.

(Δ_3) $(a_{ii}(t)) \geq \sigma > 0 \quad (t \in J, 1 \leq i \leq n).$

COROLÁRIO 2.13.

Suponhamos satisfeitas as hipóteses (ii) do Teorema 2.10 e (iii') do Corolário 2.11. Suponhamos ainda que $A(t) \in \Delta$ e quando $a_{ii}(t) < 0$, $a_{ii}(t) \in M$. Sejam $\dim X_{0L}^\infty = p$ e $\dim X_{0L_0}^\infty = q$. Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p, q; L^\infty, L_0^\infty\}$.

PROVA:

Táboas [18, Teorema 2.6, p. 11] mostra que se $A(t) \in \Delta$ e se $a_{ii}(t) \in M$ quando $a_{ii}(t) < 0$, então (M_0, L_0^∞) é $A(t)$ -admissível e, portanto (M_0, L^∞) é $A(t)$ -admissível.

Logo o corolário decorre do Teorema 2.10 com $B = M_0$, $D_1 = L^\infty$ e $D_2 = L_0^\infty$.

LEMA 2.14.

Seja $A(t) \in \Delta$, com $a_{ii}(t) \in M$, quando $a_{ii}(t) < 0$. Se existem precisamente p ($0 \leq p \leq n$) elementos diagonais $a_{ii}(t)$ negativos, então $\dim X_{0L_0}^\infty = \dim X_{0L}^\infty = p$.

A prova é dada em [18, Teorema 2.7, p. 13].

EXEMPLOS:

(1) Consideremos as equações

$$(I) \quad \dot{y} = A(t)y + F_1(t, y)$$

$$(II) \quad \dot{x} = A(t)x + F_2(t, x)$$

onde $A(t)$, $n \times n$, satisfaz o Lema 2.14,

$$F_1(t, y) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) f_1(y) \\ \vdots \\ \phi_n(t) f_n(y) \end{bmatrix}, \quad F_2(t, x) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) g_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) g_n(x) \end{bmatrix}$$

onde $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são localmente lipschitzianas;

$\phi_i, \gamma_i : J \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, n$, $\sup_{i=1, \dots, n} \phi_i(t) \in M_0$ e $\sup_{i=1, \dots, n} \gamma_i(t) \in M_0$.

Vamos mostrar que (I) e (II) são $\{p, p; L_0^\infty, L_0^\infty\}$ ($0 \leq p \leq n$).

Como $A(t)$ satisfaz o Lema 2.14, temos que (M_0, L_0^∞) é $A(t)$ -admissível e que $\dim X_{0L_0^\infty} = p$ ($0 \leq p \leq n$) e, portanto (i) e (iv) do Teorema 2.10 estão satisfeitas, com $B = M_0$ e $D_1 = D_2 = L_0^\infty$.

Se $x(t)$ e $y(t) \in S_{L_0^\infty, \rho}$, então

$$\begin{aligned} ||F_1(t, y(t))|| &\leq \sup_{i=1, \dots, n} |\phi_i(t)| [|f_1(y(t))| + \dots + \\ &+ |f_n(y(t))|] \leq N \sup_{i=1, \dots, n} |\phi_i(t)| \in M_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \quad ||F_2(t, x(t))|| &\leq \sup_{i=1, \dots, n} |\gamma_i(t)| [|g_1(x(t))| + \dots + \\ &+ |g_n(x(t))|] \leq \tilde{N} \sup_{i=1, \dots, n} |\gamma_i(t)| \in M_0 \end{aligned}$$

Logo (ii) do Teorema 2.10 está satisfeita.

Como

$$||F_1(t, y) - F_1(t, \tilde{y})|| \leq \sup_{i=1, \dots, n} |\phi_i(t)| N_1 ||y - \tilde{y}||$$

$$e \quad ||F_2(t, x) - F_2(t, \tilde{x})|| \leq \sup_{i=1, \dots, n} |\gamma_i(t)| N_2 ||x - \tilde{x}||$$

para todo $t \in J$ e para todo $x, \tilde{x}, y$ e $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ e $L_0^\infty \leq L^\infty$,

temos que (iii) do Teorema 2.10 está satisfeita com

$$\lambda_1(t) = N_1 \sup_{i=1, \dots, n} |\phi_i(t)| \text{ e } \lambda_2(t) = N_2 \sup_{i=1, \dots, n} |\gamma_i(t)|.$$

Então o Teorema 2.10 garante que (I) e (II) são $\{p, p; L_0^\infty, L_0^\infty\}$.

(2) Este exemplo foi inspirado num exemplo de LaSalle, no qual considerou-se perturbação autônoma e foi usada a teoria de invariança.

Consideremos a equação

$$(*) \quad \ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx = \phi(t)f(t, \dot{x})\ddot{x}$$

onde $a, b > 0$ e $c > b/a$.

Vamos procurar condições sobre a perturbação de modo que toda solução de (*) pertença a L_0^∞ .

Associados à equação (*) temos os sistemas:

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = -by_1 - ay_2 - cy_3 \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_1 - ax_2 - cx_3 + \phi(t)f(t, x_2)x_3 \end{cases}$$

logo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b & -a & -c \end{bmatrix}, \quad F(t, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi(t)f(t, x_2)x_3 \end{bmatrix},$$

onde $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

Então estamos interessados em estudar as perturbações $F(t, z)$ tais que toda solução de (II) vai para zero quando $t \rightarrow \infty$. Para estudarmos isto tomamos $B = M_0$ e $D_1 = D_2 = L_0^\infty$ e vamos aplicar o Teorema 2.10.

Como $a, b > 0$ e $ca > b$ o polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^3 + c\lambda^2 + a\lambda + b$ tem todas as raízes com parte real negativa (ver Coppel [4], p. 158) o que implica que (M_0, L_0^∞) é A-admissível.

De fato: Seja $\dot{z} = Az + b(t)$, $b \in M_0$.

Como $P(\lambda)$ tem todas as raízes com parte real negativa, temos que existem constantes $N > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$|Z(t)| = |e^{tA}| \leq Ne^{-\alpha t}$$

portanto

$$\begin{aligned} z(t) &= Z(t) \int_0^t Z^{-1}(s)b(s)ds = \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds \implies |z(t)| \leq \\ &\leq \int_0^t |e^{(t-s)A}| |b(s)|ds \leq N \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |b(s)|ds = \\ &= Ne^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} |b(s)|ds \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ver Strauss-Yorke [16].

Logo (M_0, L_0^∞) é A-admissível e, portanto (i) do Teorema 2.10 está satisfeita.

Dado $\rho > 0$, vamos verificar em que condições

$F(t, z(t)) \in M_0$ se $z(t) \in S_{L_0, \rho}^\infty$. Para isto, basta verificar quando $\phi(t)f(t, x_2(t))x_3(t) \in M_0$ se $z(t) \in S_{L_0, \rho}^\infty$.

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+1} |\phi(s)f(s, x_2(s))x_3(s)| ds = \\ &= \int_t^{t+1} |\phi(s)| |f(s, x_2(s))| |x_3(s)| ds \leq \\ &\leq \rho \int_t^{t+1} |\phi(s)| |f(s, x_2(s))| ds \leq \rho N_1 \int_t^{t+1} |\phi(s)| ds \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow \infty$, se $\phi \in M_0$

desde que $f(t, \xi)$ seja limitada em $J \times [-\rho, \rho]$.

Logo para que (ii) do Teorema 2.10 esteja satisfeita devemos ter:

$f(t, \xi)$ limitada em $J \times [-\rho, \rho]$ e $\phi \in M_0$.

Vamos agora verificar se existe $\lambda(t) \in M_0$ tal que

$$||F(t, z(t)) - F(t, w(t))|| \leq \lambda(t) ||z(t) - w(t)||,$$

onde

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & ||F(t, z(t)) - F(t, w(t))|| = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi(t) f(t, x_2(t))x_3(t) - f(t, y_2(t))y_3(t) \end{bmatrix} \right\| \\ &= |\phi(t)| |f(t, x_2(t))x_3(t) - f(t, y_2(t))y_3(t)| \leq N_2 |\phi(t)| ||z(t) - w(t)|| \end{aligned}$$

desde que $f(t, \xi)$ seja contínua em $J \times [-\rho, \rho]$, sendo a continuidade em ξ uniforme em J , e $f_\xi(t, \xi)$ seja limitada em $J \times [-\rho, \rho]$.

Logo, basta tomar $\lambda(t) = N_2 |\phi(t)|$ e, portanto $\lambda \in M_0$. Como $D_1 = D_2 = L_0^\infty \leq L^\infty$, temos que (iii) do Teorema 2.10 está satisfeita.

Como $P(\lambda)$ tem todas as raízes com parte real negativa, temos que $\dim X_{0L_0}^\infty = 3$.

Temos ainda que $\alpha = |F(t, 0)|_{M_0} = 0$.

Então se $F(t, z)$ é tal que

(a) $f(t, \xi)$ é contínua em $J \times [-\rho, \rho]$, sendo a continuidade em ξ uniforme em J .

(b) $f_\xi(t, \xi)$ limitada em $J \times [-\rho, \rho]$.

(c) $\phi(t) \in M_0$

o Teorema 2.10 implica que (I) e (II) são $\{3, 3; L_0^\infty, L_0^\infty\}$.

Logo se $\phi(t)$ e $f(t, x)$ satisfazem (a), (b) e (c), temos que toda solução (*) pertence a L_0^∞ .

OBSERVAÇÕES 2.15.

(i) Vemos que neste caso qualquer que seja $\phi \in M_0$ a condição (ii) do Teorema 2.10 estará satisfeita.

(ii) Como se vê facilmente podemos obter um resultado ligeiramente mais geral introduzindo uma perturbação conveniente do tipo $h(t, x)$ com $h(t, 0) = 0$, em vez de $f(t, x)\ddot{x}$

Uma generalização do exemplo acima pode ser dada pela equação de ordem n

$$\begin{aligned}
 & x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = \\
 & = \phi(t) \sum_{i=1}^{n-2} f_i(t, x^{(i)}) x^{(i+1)}, \quad \text{onde} \quad x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i}
 \end{aligned}$$

tal que o polinômio característico tenha todas as raízes com parte real negativa.

$$\text{Se} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{(a) } \phi \in M_0. \\
 \text{(b) } f_i(t, x^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \text{ são contínuas} \\
 \quad \text{em } J \times [-\rho, \rho], \text{ sendo a continuidade em} \\
 \quad x^{(i)} \text{ uniforme em } J. \\
 \text{(c) } \frac{\partial f_i(t, x^{(i)})}{\partial x^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \text{ limitadas} \\
 \quad \text{em } J \times [-\rho, \rho],
 \end{array} \right.$$

então toda solução da equação acima vai para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Ainda no caso particular no qual $D_1 = L^\infty$ e $D_2 = L_0^\infty$, obtemos os seguintes resultados.

TEOREMA 2.16.

Suponhamos que as equações (2.1) e (2.2) satisfaçam as seguintes condições:

- (a) (B, L_0^∞) é $A(t)$ -admissível, $B = \beta(J, X) \in H(X)$.
- (b) Existe $\rho_i > 0$ tal que $f_i(t, u_i(t)) \in B$ se $u_i(t) \in S_{D_i, \rho_i}$.
- (c) Existe função $V(t, r)$ não negativa para $(t, r) \in J \times J$, não decrescente em r para cada t fixo, e

$$(2.7) \quad ||f_i(t, x) - f_i(t, y)|| \leq V(t, ||x-y||) ||x-y||, \quad (t \in J; x, y \in X).$$

(d) $V(t, r) \in \beta(J, R)$ para cada $r > 0$ fixado.

(e) Sejam $\dim X_{0L}^\infty = p$ e $\dim X_{0L_0}^\infty = q$.

Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p, q; L^\infty, L_0^\infty\}$.

PROVA:

O Teorema 2.16 é consequência do Teorema 2.10, pois:

(B, L_0^∞) é $A(t)$ -admissível, logo (B, L^∞) também o é. Então (i) e (ii) do Teorema 2.10 estão satisfeitas.

Como $D_1 = L^\infty$ e $D_2 = L_0^\infty$ temos que (2.7) implica (2.4) e (2.5).

De fato: dados $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$. Para $x, y \in S_{L^\infty, \rho_1}$, temos que $\|x - y\| \leq 2\rho_1$ implica $V(t, \|x - y\|) \leq V(t, 2\rho_1)$ e pela Observação 2.8 temos que (2.4) está satisfeita com $\lambda_1(t) = V(t, 2\rho_1)$.

Analogamente para todo $u, w \in S_{L_0^\infty, \rho_2}$ e para todo $y \in S_{L^\infty, \rho_2}$ temos que (2.5) está satisfeita com $\lambda_2(t) = V(t, 2\rho_2)$.

Logo o Teorema 2.10 implica que (2.1) e (2.2) são $\{p, q; L^\infty, L_0^\infty\}$.

O Teorema 2 de Hallam-Onuchic [9] é análogo ao Teorema 2.16.

COROLÁRIO 2.17.

Suponhamos que as equações (2.1) e (2.2) satisfaçam as seguintes condições:

(i) Existem projeções suplementares P_1, P_2 e uma constante $N > 0$ tais que:

$$(2.8) \quad ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)|| \leq N, \quad 0 \leq s \leq t$$

$$||Z(t)P_2Z^{-1}(s)|| \leq N, \quad 0 \leq t \leq s$$

(ii) As funções $f_1 \equiv 0$ e f_2 satisfazem (b) e (c) do Teorema 2.16.

(iii) $\int_0^\infty V(t,r)dt < \infty$, para todo $r > 0$.

(iv) Sejam $\dim X_{0L}^\infty = p$ e $\dim X_{0L_0}^\infty = q$.

Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p,q;L^\infty,L_0^\infty\}$.

PROVA:

Massera-Schäffer [12-b, p. 331] mostram que (L^1, L^∞) é $A(t)$ -admissível se e somente se (L^1, L_0^∞) é $A(t)$ -admissível, mostram ainda que (2.8) é uma condição necessária e suficiente para que (L^1, L^∞) seja $A(t)$ -admissível.

O corolário segue então do Teorema 2.16, com $B = L^1$.

O Corolário 2 de Hallam-Onuchic [9] é análogo ao Corolário 2.17.

COROLÁRIO 2.18.

Suponhamos válidas as afirmações (ii) e (iv) do Corolário 2.17. Suponhamos ainda que existam projeções suplementares P_1 , P_2 e uma constante $N > 0$ tais que:

$$(2.9) \quad \rho(t) = \left(\int_0^t ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)||^\tau ds \right)^{1/\tau} + \left(\int_t^\infty ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)||^\tau ds \right)^{1/\tau} \leq N \quad (t \in J; 1 \leq \tau < \infty)$$

Seja $\int_0^\infty [V(t,r)]^\sigma dt < \infty$, para todo $r > 0$, onde $\sigma^{-1} + \tau^{-1} = 1$.

Então, as equações (2.1) e (2.2) são $\{p,q; L^\sigma, L^\infty\}$.

PROVA:

Conti [4, Theorem 1] mostra que a condição (2.9) é necessária e suficiente para que o par (L^σ, L^∞) seja $A(t)$ -admissível. Hallam-Onuchie [9, p. 194] mostram que (2.9) é equivalente ao resultado mais forte, (L^σ, L^∞) é $A(t)$ -admissível. Para verificar esta afirmação, observamos que (2.9), $b \in L^\sigma$ e a desigualdade de Hölder implicam que

$$(2.10) \quad w(t) = \int_0^t Z(t)P_1Z^{-1}(s)b(s)ds - \int_t^\infty Z(t)P_2Z^{-1}(s)b(s)ds$$

é uma solução de (NH) com $||w(t)|| \leq N||b||_{L^\sigma}$, $t \in J$.

De fato:

$$\begin{aligned} ||w(t)|| &\leq \int_0^t ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)b(s)|| ds + \\ &+ \int_t^\infty ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)b(s)|| ds \leq \\ &\leq \left[\int_0^t ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)||^\tau ds \right]^{1/\tau} \left[\int_0^t ||b(s)||^\sigma ds \right]^{1/\sigma} + \\ &+ \left[\int_t^\infty ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)||^\tau ds \right]^{1/\tau} \left[\int_t^\infty ||b(s)||^\sigma ds \right]^{1/\sigma} \leq \\ &\leq \left\{ \left[\int_0^t ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)||^\tau ds \right]^{1/\tau} + \right. \\ &+ \left. \left[\int_t^\infty ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)||^\tau ds \right]^{1/\tau} \right\} \left[\int_t^\infty ||b(s)||^\sigma ds \right]^{1/\sigma} \leq \\ &\leq N||b||_{L^\sigma} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, podemos escolher $T_1 = T_1(\varepsilon)$ tal que

$$(2.11) \quad \|\chi_{[T_1, \infty)}(t)b(t)\|_{L^\sigma} < \frac{\varepsilon}{2N}$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Z(t)P_1\| = 0$ (ver [8-a, p. 359]), podemos escolher $T_2 \geq T_1$ tal que

$$(2.12) \quad \|Z(t)P_1\| < \frac{\varepsilon}{2 \int_0^{T_1} \|Z^{-1}(s)b(s)\| ds}, \quad t \geq T_2$$

Portanto, para $t \geq T_2$ segue de (2.11) e (2.12) que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t Z(t)P_1 Z^{-1}(s)b(s) ds \right\| \leq \int_0^{T_1} \|Z(t)P_1\| \|Z^{-1}(s)b(s)\| ds + \\ & + \left(\int_{T_1}^t \|Z(t)P_1 Z^{-1}(s)\|^\tau ds \right)^{1/\tau} \left(\int_{T_1}^t \|b(s)\|^\sigma ds \right)^{1/\sigma} < \varepsilon \end{aligned}$$

o que mostra que o primeiro termo de $w(t)$ em (2.10) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. O último termo em (2.10) também tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, pois

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^\infty Z(t)P_2 Z^{-1}(s)b(s) ds \right\| \leq \\ & \leq \left[\int_t^\infty \|Z(t)P_2 Z^{-1}(s)\|^\tau ds \right]^{1/\tau} \left[\int_t^\infty \|b(s)\|^\sigma ds \right]^{1/\sigma} \leq \\ & \leq N \left[\int_t^\infty \|b(s)\|^\sigma ds \right]^{1/\sigma} \end{aligned}$$

Logo $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$.

O corolário agora segue do Teorema 2.16, com $B = L^\sigma$.

O Corolário 3 de Hallam-Onuchic [9] é análogo ao Corolário 2.18.

Um resultado análogo ao Corolário 2.18 é o Teorema 2 de [8-a], o qual fornece uma $\{p, 0; L^\infty, L_0^\infty\}$. Observamos que tomamos as funções pesos ψ e ϕ de [8-a] como sendo $\psi = \phi = 1$.

Vamos agora fazer uma aplicação muito importante do Teorema 2.10, a qual é o ponto central do nosso trabalho, onde usaremos o espaço $D = L^k \cap L_0^\infty$ ($k \geq 1$). Este próximo teorema é significativamente informativo do ponto de vista do nosso conceito de relacionamento assintótico.

TEOREMA 2.19.

Suponhamos que (2.1) e (2.2) satisfaçam as seguintes condições:

- (a) Existem projeções suplementares P_1, P_2 e constantes positivas α e N tais que

$$(2.13) \quad ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)|| \leq Ne^{-\alpha(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t$$

$$||Z(t)P_2Z^{-1}(s)|| \leq N, \quad 0 \leq t \leq s$$

- (b) Está satisfeita a condição (ii) do Teorema 2.10.

- (c) Existe uma função não negativa $\lambda = \lambda(t)$ mensurável em J tal que

$$(2.14) \quad ||f_i(t, x) - f_i(t, y)|| \leq \lambda(t) ||x - y|| \quad (i=1, 2; t \in J; x, y \in X).$$

e

$$(2.15) \quad \int_0^\infty t\lambda(t)dt < \infty.$$

(d) Sejam $\dim X_{0L}^\infty = p$ e $\dim X_{0D} = q$ ($D = L^k \cap L_0^\infty$, $k \geq 1$).

Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p, q; L^\infty, L^k \cap L_0^\infty\}$.

PROVA:

Vamos mostrar que (2.13) implica que o par

$(L^1(\psi), L^1 \cap L_0^\infty)$, $k \geq 1$ e $\psi(t) = \frac{1}{t+1}$, é $A(t)$ -admissível.

Sejam $b(t) \in L^1(\psi)$ e

$$w(t) = \int_0^t Z(t)P_1Z^{-1}(s)b(s)ds - \int_t^\infty Z(t)P_2Z^{-1}(s)b(s)ds$$

uma solução de (NH). Por (2.13), temos:

$$(2.16) \quad ||w(t)|| \leq N[e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ||b(s)|| ds + \int_t^\infty ||b(s)|| ds]$$

Como $b(t) \in L^1(\psi)$ (portanto $b(t) \in L^1$), temos que

$$\int_t^\infty ||b(s)|| ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{o que implica que}$$

$$\int_t^{t+1} ||b(s)|| ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

logo por Strauss-Yorke, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ||b(s)|| ds = 0$.

Portanto de (2.16), obtemos que $w \in L_0^\infty$.

Para mostrar que $w(t) \in L^k$, $k \geq 1$, é suficiente verificar que $w(t) \in L^1$, uma vez que $w(t) \in L_0^\infty$.

Integrando ambos os membros de (2.16), obtemos

$$(2.17) \quad \int_0^t ||w(\tau)|| d\tau \leq N \int_0^t e^{-\alpha \tau} \left[\int_0^\tau e^{\alpha s} ||b(s)|| ds \right] d\tau + \\ + N \int_0^t \left[\int_\tau^\infty ||b(s)|| ds \right] d\tau$$

Como $\int_0^\infty t ||b(t)|| dt \leq \int_0^\infty (t+1) ||b(t)|| dt < \infty$, temos que

$$\int_0^\infty \left[\int_\tau^\infty ||b(s)|| ds \right] d\tau < \infty \text{ de acordo com Szmydt [17, Lemma 3, p. 357].}$$

Uma integração por partes nos dá

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\alpha\tau} \left[\int_0^\tau e^{\alpha s} ||b(s)|| ds \right] d\tau = \\ (2.18) \quad & = - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \int_0^t e^{\alpha s} ||b(s)|| ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^t ||b(s)|| ds \end{aligned}$$

O lado direito de (2.18) é limitado o que implica que o lado direito de (2.17) converge, quando $t \rightarrow \infty$, logo $w \in L^1$. Esta prova pode ser encontrada em Táboas [18, p. 19].

Além disso, $\lambda(t) \in L^1(\psi)$.

De fato, por hipótese $\int_0^\infty t \lambda(t) dt < \infty$, o que implica

$$\int_0^\infty (t+1) \lambda(t) dt < \infty \quad \text{logo} \quad (t+1) \lambda(t) = \frac{\lambda(t)}{\psi(t)} \in L^1 \text{ e, portanto,}$$

$$\lambda(t) \in L^1(\psi).$$

Assim o teorema decorre do Teorema 2.10, com $B = L^1(\psi)$, $D_1 = L^\infty$ e $D_2 = L^k \cap L_0^\infty$.

OBSERVAÇÕES 2.20.

(i) Se $\psi(t) = \frac{1}{t+1}$ e $\phi(t) > 0$ é contínua com

$\int_0^\infty t \phi(t) dt < \infty$, então o teorema anterior decorre do Teorema 2.10 com $B = L_{\phi,0}$, $D_1 = L^\infty$ e $D_2 = L^k \cap L_0^\infty$, pois nestas condições o espaço $L^1(\psi)$ contém propriamente o espaço $L_{\phi,0}$. Mostremos que $L_{\phi,0} \subset L^1(\psi)$, propriamente. Se $b(t) \in L_{\phi,0}$ então existe constante $a > 0$ tal que $||b(t)|| \leq a \phi(t)$ em J . Assim $tb(t) \in L^1$, portanto $\int_0^\infty (t+1) ||b(t)|| dt < \infty$, ou seja,

$b(t) \in L^1(\psi)$. Por outro lado, tomando $b(t) \in L(J, X)$ tal que $||b(t)|| = \phi(t)$, temos $b(t) \in L^1(\psi)$, mas $b(t) \notin L_{\phi, 0}$.

(ii) Uma condição suficiente para (2.13) é que A seja uma matriz constante cujos autovalores com parte real nula tenha divisores elementares simples.

(iii) Outra condição suficiente para (2.13) é que $A(t)$ seja diagonal dominante nas linhas por blocos com parâmetro δ , isto é, que $A(t)$ possa ser escrita na forma:

$$A(t) = \begin{bmatrix} B(t) & Q(t) \\ R(t) & C(t) \end{bmatrix}$$

onde $B(t)$ é $k \times k$, $0 \leq k \leq n$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ e $C(t)$ são contínuas em $[0, \infty)$ e que exista $\delta > 0$ de modo que

$$\operatorname{Re} b_{ii}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k |b_{ij}(t)| + m(t) \leq -\delta < 0, \quad i=1, \dots, k \\ 0 \leq t < \infty$$

$$\operatorname{Re} c_{ii}(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-k} |c_{ij}(t)| - m(t) \geq \delta > 0, \quad i=1, \dots, n-k \\ 0 \leq t < \infty$$

onde $m(t) = \max\{||Q(t)||, ||R(t)||\}$ é limitada.

A prova deste fato é devido a Berkey [3, Th.3, p. 245].

EXEMPLO DO TEOREMA 2.19.

Consideremos a equação

$$(*) \quad \ddot{u} - u - \phi(t)u^n = 0, \quad n \geq 1, \quad \phi(t) \in L_0^\infty, \quad t\phi(t) \in L^1$$

Vamos mostrar que existe uma família de soluções de (*) dependendo de 1 parâmetro que está assintoticamente em $L^k \cap L_0^\infty$, $k \geq 1$.

Associados à equação (*) temos os sistemas:

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \phi(t)x_1^n \end{cases}$$

logo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(t)x_1^n \end{bmatrix} \quad \text{onde } z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz fundamental do homogêneo é:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Seja $D_1 = L_0^\infty$, $D_2 = L^k \cap L_0^\infty$ ($k \geq 1$) e $B = L^1(\psi)$,

$$\psi(t) = \frac{1}{t+1}.$$

Portanto $\dim X_{0L^k \cap L_0^\infty} = \dim X_{0L_0^\infty} = 1$.

Consideremos as projeções

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então $||Z(t)P_1Z^{-1}(s)|| \leq Ne^{-(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t$

e $||Z(t)P_2Z^{-1}(s)|| \leq N, \quad 0 \leq t \leq s$

logo (a) do Teorema 2.19 está satisfeita.

Temos que

$$f_1 \equiv 0 \quad \text{e} \quad f_2(t, z(t)) = f(t, z(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(t)x_1^n(t) \end{bmatrix}$$

e que $f(t, z(t)) \in L^1(\psi)$ se $z(t) \in S_{L^k} \cap L_{0,\rho}^\infty$.

De fato: para mostrar que $f(t, z(t)) \in L^1(\psi)$, basta mostrar que $\phi(t)x_1^n(t) \in L^1(\psi)$

$$\int_0^\infty (t+1) |\phi(t)| |x_1^n(t)| dt \leq \rho^n \int_0^\infty (t+1) |\phi(t)| dt < \infty,$$

pois $t\phi(t) \in L^1$

portanto (b) do Teorema 2.19 está satisfeita.

Temos também que

$$\begin{aligned} & \|f(t, z(t)) - f(t, w(t))\| = \\ & = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(t)[x_1^n(t) - y_1^n(t)] \end{bmatrix} \right\| = \\ & = |\phi(t)| |x_1^n(t) - y_1^n(t)| \leq n\rho^{n-1} |\phi(t)| |x_1(t) - y_1(t)| \leq \\ & \leq n\rho^{n-1} |\phi(t)| \|z(t) - w(t)\| \end{aligned}$$

para todo $t \in J$ e para todo $z(t), w(t) \in S_{L^k} \cap L_{0,\rho}^\infty$

portanto (c) do Teorema 2.19 está satisfeita com $\lambda(t) = n\rho^{n-1} |\phi(t)|$.

Então o Teorema 2.19 garante que (I) e (II) são $\{1, 1; L_0^\infty, L^k \cap L_0^\infty\}$ ($k \geq 1$).

Como a família de soluções L_0^∞ -assintóticas de (I) é

$$F_1 = \{w(t) = c \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}\},$$

temos que esta família é $L^k \cap L_0^\infty$ -assintótica e depende de 1 parâmetro, e como acabamos de mostrar que para cada $w(t) \in F_1$ corresponde uma família $G_1 = \{z(t)\}$ de soluções de (II) dependendo de 1 parâmetro tal que $w(t) - z(t)$ está assintoticamente em $L^k \cap L_0^\infty$, temos que cada $z(t) \in G_1$ está assintoticamente em $L^k \cap L_0^\infty$, o que implica que a equação (*) possui uma família de soluções $L^k \cap L_0^\infty$ -assintóticas dependendo de 1 parâmetro.

Observamos que existem significativas relações entre resultados estudados por Bellman em [2, p. 132] e os obtidos em nosso trabalho.

Observamos ainda que este exemplo pode ser atacada usando o Teorema 3 de Hallam-Onuchic [9], o qual implica que (*) possui uma família de soluções $L^k \cap L_0^\infty$ -assintótica dependendo de pelo menos 1 parâmetro, mas temos que a família obtida pelo Teorema 2.19 é homeomorfa a um espaço de dimensão 1, o que é garantido pelo Teorema 3.3 deste trabalho.

O próximo teorema foi motivado pelo nosso Corolário 2.18 e pelo Teorema 2 de Hallam em [8-a, p. 357].

TEOREMA 2.21.

Sejam $\psi(t) > 0$, $0 < \phi(t) \leq 1$ contínuas em J e suponhamos que as equações (2.1) e (2.2) satisfaçam às seguintes condições:

(a) Está satisfeita a condição (ii) do Teorema 2.10.

(b) Existem projeções suplementares P_1 e P_2 de modo que as funções

$$(2.19) \quad \rho_1(t) = \begin{cases} \left[\int_0^t ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)\psi(s)||^\tau ds \right]^{1/\tau} & (\text{se } \tau < \infty), \\ \sup_{0 \leq s \leq t} ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)\psi(s)|| & (\text{se } \tau = \infty) \end{cases}$$

$$\rho_2(t) = \begin{cases} \left[\int_t^\infty ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)\psi(s)||^\tau ds \right]^{1/\tau} & (\text{se } \tau < \infty), \\ \sup_{s \geq t} ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)\psi(s)|| & (\text{se } \tau = \infty) \end{cases}$$

estejam definidas em J , com $\rho_1(t), \rho_2(t) \in L_{\phi,0}$.

(c) Existe função $\lambda(t)$ em $L^\sigma(\psi)$ ou $L_{\psi,0}$ conforme $\sigma < \infty$ ou $\sigma = \infty$ ($\sigma^{-1} + \tau^{-1} = 1$) tal que

$$||f_i(t,x) - f_i(t,y)|| \leq \lambda(t) ||x-y|| \quad (i=1,2; t \in J; x,y \in X).$$

(d) Sejam $\dim X_{0L^\infty} = p$ e $\dim X_{0L_{\phi,0}} = q$.

Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p,q; L^\infty, L_{\phi,0}\}$.

PROVA:

Vamos mostrar que (2.19) implica que $(L^\sigma(\psi), L_{\phi,0})$ é $A(t)$ -admissível. Esta prova é caso particular da dada por Taóbas [18, Teorema 2.14, p. 21].

Se $b(t) \in L^\sigma(\psi)$, segue da desigualdade de Hölder e do fato de $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$ existirem em J , que a solução de (NH)

$$w(t) = \int_0^t Z(t)P_1Z^{-1}(s)b(s)ds - \int_t^\infty Z(t)P_2Z^{-1}(s)b(s)ds$$

satisfaz a desigualdade

$$||w(t)|| \leq ||b(t)||_{L^\sigma(\psi)} [\rho_1(t) + \rho_2(t)]$$

e, portanto, $w(t) \in L_{\phi,0}$.

Então o teorema segue do Teorema 2.10, com $B = L^\sigma(\psi)$ ou $B = L_{\psi,0}$ conforme $\sigma < \infty$ ou $\sigma = \infty$, $D_1 = L^\infty$ e $D_2 = L_{\phi,0}$.

Vemos que o Teorema 2.21 inclui o seguinte caso:

Se $\phi(t) = t^{-\mu}e^{-\alpha t}$, $\mu, \alpha > 0$ então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\alpha t} ||y(t) - x(t)|| = 0.$$

TEOREMA 2.22.

Sejam $\psi(t)$, $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ funções positivas e contínuas em J e suponhamos que as equações (2.1) e (2.2) satisfaçam as seguintes condições:

(a) Está satisfeita a condição (ii) do Teorema 2.10.

(b) Existem projeções suplementares P_1 e P_2 de modo que as funções $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$ definidas no Teorema 2.21, pertençam a $L_{\phi_1} \cap L_{\phi_2}$.

(c) Existem funções $\lambda_i(t)$ em $L^\sigma(\psi)$ ou $L_{\psi,0}$ conforme $\sigma < \infty$ ou $\sigma = \infty$ ($\sigma^{-1} + \tau^{-1} = 1$) tais que

$$(2.20) \quad ||f_i(t,x) - f_i(t,y)|| \leq \frac{\lambda_i(t)}{\phi_i(t)} ||x-y|| \quad (i=1,2; t \in J; x,y \in X)$$

(d) Sejam $\dim X_{0L_{\phi_1}} = p$ e $\dim X_{0L_{\phi_1} \cap L_{\phi_2}} = q$.

Então as equações (2.1) e (2.2) são $\{p,q; L_{\phi_1} \cap L_{\phi_2}\}$.

PROVA:

De modo análogo ao feito no Teorema 2.21, mostra-se que $(L^\sigma(\psi), L_{\phi_1} \cap L_{\phi_2})$ é $A(t)$ -admissível.

Pela Observação 2.9, temos que (2.20) implica (2.4) e (2.5).

Logo o teorema segue do Teorema 2.10 com $B = L^\sigma(\psi)$ ou $B = L_{\psi,0}$ conforme $\sigma < \infty$ ou $\sigma = \infty$, $D_1 = L_{\phi_1}$ e $D_2 = L_{\phi_2}$.

O tratamento clássico do problema de relacionamento as sintótico envolve uma condição de proximidade uniforme das soluções das equações. Isto em nosso contexto se traduz em considerar apenas espaços $D_i \leq L^\infty$ ($i = 1,2$). O exemplo acima mostra uma situação mais geral, pois podemos tomar $D_i = \{f(t) \in L(J,X); \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} \in L^\infty, \alpha > 0\}$. Além disso, sugere a construção de outros exemplos.

EXEMPLO DO TEOREMA 2.22.

Consideremos as equações

$$(I) \quad \dot{y} = Ay$$

$$(II) \quad \dot{x} = Ax + f(t, x)$$

onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $f(t, x)$ satisfaz: $f(t, 0) = 0$ e

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq \frac{\lambda(t)}{e^{\alpha t}} ||x - y||.$$

Sejam

$$B = \{b(t); \frac{||b(t)||}{\lambda(t)\psi(t)} \in L_0^\infty, \int_0^\infty \lambda(t)\psi(t)dt < \infty\} \quad e$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty\} = L_{\psi, 0}, \quad \text{com } \psi = \lambda\psi$$

e $D_1 = D_2 = \{y(t); \frac{||y(t)||}{e^{2t}} \in L^\infty\} = L_\phi, \quad \text{com } \phi(t) = e^{2t}.$

A matriz fundamental do homogêneo é:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Portanto $\dim X_{0L_\phi} = 2.$

Consideremos as projeções:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui $\sigma = \infty \implies \tau = 1$, portanto,

$$\rho_1(t) = \int_0^t ||Z(t)P_1Z^{-1}(s)\psi(s)||ds \leq e^t \int_0^t e^{-s} \lambda(s) \psi(s) ds$$

$$\rho_2(t) = \int_t^\infty ||Z(t)P_2Z^{-1}(s)\psi(s)||ds \leq e^{2t} \int_t^\infty e^{-2s} \lambda(s) \psi(s) ds$$

pertencem a L_ϕ e, portanto (b) do Teorema 2.22 está satisfeita.

Temos que $f(t, x(t)) \in L_{\psi, 0}$ se $x(t) \in S_{L_\phi, \rho}$.

De fato, temos que $||f(t, x(t))|| \leq \frac{\lambda(t)}{e^{2t}} ||x(t)||$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{||f(t, x(t))||}{\psi(t)} &= \frac{||f(t, x(t))||}{\lambda(t)\psi(t)} \leq \frac{\lambda(t) ||x(t)||}{e^{2t} \lambda(t) \psi(t)} = \\ &= \frac{||x(t)||}{e^{2t} \psi(t)} \leq \frac{|x|_D}{\psi(t)} \leq \frac{\rho}{\psi(t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

logo $f(t, x(t)) \in L_{\psi, 0}$ se $x(t) \in S_{L_\phi, \rho}$.

$\therefore$ (a) do Teorema 2.22 está satisfeita, e por hipótese (c) também está satisfeita.

Logo o Teorema 2.22 garante que (I) e (II) são $\{2, 2; L_\phi, L_\phi\}$.

CAPÍTULO III

PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DE UMA FAMÍLIA DE SOLUÇÕES D-ASSINTÓTICAS

No Capítulo II, o Lema 2.6 mostrou que existe uma correspondência biunívoca entre uma família de soluções D-assintóticas de (2.1) e uma vizinhança V_σ no conjunto das condições iniciais X_{0D} . Mostraremos agora que esta correspondência é um homeomorfismo, e para isto adaptamos o raciocínio desenvolvido por Táboas [18] e por Onuchic-Táboas [14], para o nosso problema.

Antes faremos algumas considerações necessárias para o desenvolvimento da teoria.

Sejam D um espaço de Banach mais forte que $L(J, X)$ e $N = \{\phi \in D : \phi(t) = 0, t \geq T\}$, onde T é dado no Lema 2.6. Temos que N é um subespaço vetorial fechado de D . Definimos a relação de equivalência

$$f \stackrel{T}{\sim} g \iff f(t) - g(t) \in N, \text{ isto é, se } f(t) = g(t) \text{ (q.t.p.)}, \\ t \geq T.$$

Então D/N é um espaço de Banach com a norma quociente:

$$|f + N|_{D/N} = \inf_{g \in N} |f + g|_D$$

Nas condições do Lema 2.6, com $\alpha < (K^{-1} - \lambda)\rho$ e seja $\sigma > 0$ uma constante tal que $C_0\sigma + K\alpha \leq (1 - \lambda K)\rho$, temos que se $\xi_0 \in X_{0D}$, com $||\xi_0|| < \sigma$, então existe uma única D-solução $\tilde{y}(t)$, com $\tilde{y}(t) \in S_{D,\rho}$, de (2.3) tal que $P_{0D}\tilde{y}(0) = \xi_0$. Denotaremos tal solução por $\tilde{y}(\cdot; \xi_0)$.

Seja $V_\sigma = \{\xi \in X_{0D} : ||\xi|| < \sigma\}$ e consideremos a família de D-soluções de (2.3)

$$\tilde{F} = \{\tilde{y}(\cdot; \xi) : \xi \in V_\sigma\}$$

munida com a topologia induzida por D , a qual depende, portanto, de p parâmetros, onde $p = \dim X_{0D}$.

O Lema 2.6 implica ainda que para cada $\tilde{y}(\cdot; \xi)$ corresponde uma única solução D-assintótica $y(\cdot; \xi)$ de (2.1) tal que $P_{0D} Z^{-1}(T)y(T; \xi) = \xi$. Logo a família $\tilde{F}$ corresponde uma família

$$F = \{y(\cdot; \xi) : \xi \in V_\sigma\}$$

das soluções D-assintóticas de (2.1). Consideraremos o conjunto F munido da topologia induzida por D/N .

LEMA 3.1.

Nas condições do Lema 2.6, com $\alpha < (K^{-1} - \lambda)\rho$. Seja $\sigma > 0$ uma constante tal que $C_0\sigma + K\alpha \leq (1 - \lambda K)\rho$. Então, a aplicação

$$\tilde{U} : \xi \in V_\sigma \rightarrow \tilde{y}(\cdot; \xi) \in \tilde{F}$$

é contínua.

PROVA:

Para cada $\xi_0 \in V_\sigma$ e cada $u(\cdot) \in S_{D,\rho}$, o Teorema 1.1 assegura que a equação $\dot{y} = A(t)y + \tilde{f}(t, u(t))$, onde $\tilde{f}(t, u(t)) = \chi_{[T, \infty)}(t)f_1(t, u(t))$ e T é dado pelo Lema 2.6, tem uma única D-solução $\tilde{y}(t)$ tal que

$$P_{0D}\tilde{y}(0) = \xi_0 \text{ e } |\tilde{y}(\cdot)|_D \leq C_0||\xi_0|| + K|\tilde{f}(\cdot, u(\cdot))|_B.$$

Definamos um operador em $S_{D,\rho}$ por $\tilde{y}(\cdot) = M_{\xi_0} u(\cdot)$.
 Vamos mostrar que M_{ξ_0} é uma contração uniforme em ξ_0 .

Se $u_1, u_2 \in S_{D,\rho}$ e $\tilde{y}_1 = M_{\xi_0} u_1$, $\tilde{y}_2 = M_{\xi_0} u_2$, então
 $\tilde{y}_1(\cdot) - \tilde{y}_2(\cdot)$ é a D-solução de

$$\dot{y} = A(t)y + \tilde{f}(t, u_1(t)) - \tilde{f}(t, u_2(t))$$

tal que

$$P_{0D}[\tilde{y}_1(0) - \tilde{y}_2(0)] = 0$$

e

$$|\tilde{y}_1(\cdot) - \tilde{y}_2(\cdot)|_D \leq K |\tilde{f}(\cdot, u_1(\cdot)) - \tilde{f}(\cdot, u_2(\cdot))|_B$$

Da condição (iii) do Lema 2.6 vem que

$$|\tilde{y}_1(\cdot) - \tilde{y}_2(\cdot)|_D \leq K |\chi_{[T,\infty)}(\cdot) \lambda(\cdot)|_\beta |u_1(\cdot) - u_2(\cdot)|_D,$$

onde $|\chi_{[T,\infty)}(\cdot) \lambda(\cdot)|_\rho < K^{-1}$.

Logo M_{ξ_0} é uma contração uniforme em ξ_0 .

Além disso, M_{ξ_0} é contínua em ξ_0 para cada
 $u \in S_{D,\rho}$, fixo.

De fato:

Sejam ξ_0 e $\bar{\xi}_0 \in V_0$, logo pelo Teorema 1.1,
 $M_{\xi_0} u - M_{\bar{\xi}_0} u$ é a D-solução de $\dot{y} = A(t)y$ tal que

$$P_{0D} \tilde{y}(0) = \xi_0 - \bar{\xi}_0$$

e

$$|M_{\xi_0} u - M_{\bar{\xi}_0} u|_D \leq C_0 \|\xi_0 - \bar{\xi}_0\|$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ e arbitrário, basta tomar $\delta \leq \epsilon/C_0$.

Temos ainda que $|M_{\xi_0} u|_D \leq \rho$, se $u \in S_{D,\rho}$.

De fato:

$$|M_{\xi_0} u|_D \leq C_0 ||\xi_0|| + K|\tilde{f}(\cdot, u(\cdot))|_B$$

$$\text{mas } |\tilde{f}(\cdot, u(\cdot))|_B \leq |\tilde{f}(\cdot, u(\cdot)) - \tilde{f}(\cdot, 0)|_B + |\tilde{f}(\cdot, 0)|_B$$

$$\leq |\chi_{[T, \infty)}(t)\lambda(\cdot)|_B |u(\cdot)|_D + |\chi_{[T, \infty)}(\cdot)f_1(\cdot, 0)|_B$$

$$\leq \lambda |u(\cdot)|_B + \alpha$$

$$\text{logo, } |M_{\xi_0} u|_D \leq C_0 ||\xi_0|| + \lambda K |u(\cdot)|_B + K\alpha \leq \rho.$$

Então $M_{\xi_0} S_{D, \rho} \subset S_{D, \rho}$ e pelo princípio da contração uniforme, o ponto fixo $\tilde{y}(\cdot; \xi_0)$ de M_{ξ_0} depende continuamente de ξ_0 (ver Hale [6], Teorema 3.2, p. 7).

O próximo teorema relaciona V_σ com F e sua secção $F(T) = \{y(T, \xi) \in X : y(\cdot; \xi) \in F\}$, onde T é dado pelo Lema 2.6.

TEOREMA 3.2.

Nas condições do Lema 2.6, com $\alpha < (K^{-1} - \lambda)\rho$. Seja $\sigma > 0$ uma constante tal que $C_0\sigma + K\alpha \leq (1 - \lambda K)\rho$. Se a equação (2.1) satisfaz alguma condição de unicidade de soluções em $[0, \tau] \times X$, $\tau > T$, então as aplicações:

$$U : \xi \in V_\sigma \rightarrow y(\cdot; \xi) \in F$$

$$U_T : y(\cdot; \xi) \in F \rightarrow y(T; \xi) \in F(T)$$

$$H : y(T; \xi) \in F(T) \rightarrow \xi \in V_\sigma$$

são homeomorfismos.

PROVA:

Seja $\pi : D \rightarrow D/N$ a projeção canônica. Como $\tilde{F} \subset D$ e $F \subset D/N$, temos que U pode ser escrita do seguinte modo: $U = \pi \circ \tilde{U}$. Logo U é contínua como composta de funções contínuas.

H é contínua porque $H = P_{OD}|_{F(T)}$ é uma projeção.

Provaremos agora que U_T é contínua.

Suponhamos que U_T não seja contínua, então existem $y_0(\cdot) \in F$ e uma seqüência $y_n(\cdot) \in F$ ($n = 1, 2, \dots$) tal que $y_n \rightarrow y_0$ em D/N , quando $n \rightarrow \infty$ com $\|y_n(T) - y_0(T)\| \geq \delta > 0$, onde δ é uma constante. Como D/N é mais forte que $L(J, X)$, temos que $\int_0^\tau \|y_n(t) - y_0(t)\| dt \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e portanto y_n converge em medida para y_0 em $[0, \tau]$. Então existe uma subsequência y_{n_k} de y_n convergindo (q.t.p.) em $[0, \tau]$ para y_0 . Do teorema da continuidade em relação às condições iniciais, segue que $y_{n_k}(T) \rightarrow y_0(T)$, quando $n \rightarrow \infty$, o que é uma contradição. Logo U_T é contínua.

Analisando o diagrama

notamos que cada uma das aplicações é inversível, sendo a inversa de cada uma escrita como composição das duas restantes. Logo as inversas também são contínuas e o teorema está provado.

O próximo teorema nos garante a existência de famílias F_1 e F_2 de soluções D_1 -assintóticas e D_2 -assintóticas respectivamente de (2.1) e (2.2), homeomorfas.

TEOREMA 3.3.

Nas condições do Lema 2.6, com $\alpha_i = \|f_i(t, 0)\|_B < (K^{-1} - \lambda_i)\rho_i$, onde $\lambda_i = \|\chi_{[T, \infty)}(t)\lambda_i(t)\|_\beta$. Seja $\sigma > 0$ tal que $C_0\sigma + K\alpha_i \leq (1 - \lambda_i K)\rho_i$. Se vale alguma condição de unicidade para (2.1) e (2.2) em $[0, \tau] \times X$, $\tau > T$, então existem famílias F_1 e F_2 de soluções D_1 -assintóticas e D_2 -assintóticas respectivamente de (2.1) e (2.2), ambas homeomorfas a um subespaço p -dimensional de X , onde $p = \min(\dim X_{OD_i})$.

PROVA:

Sejam $p_1 = \dim X_{OD_1}$ e $p_2 = \dim X_{OD_2}$, com $p = p_1 \leq p_2$.

O Lema 2.6 garante a existência de uma família F_1 de soluções D_1 -assintóticas de (2.1) e de uma família F'_2 de soluções D_2 -assintóticas de (2.2).

O Teorema 3.2 assegura que F_1 é homeomorfa a uma bola aberta V_σ^1 de X_{OD_1} e F'_2 é homeomorfa a uma bola aberta $V_\sigma^{2'}$ de X_{OD_2} .

Seja $h : V_\sigma^{2'} \rightarrow F'_2$ um homeomorfismo.

Como $\dim X_{OD_1} \leq \dim X_{OD_2}$, existe $V_\sigma^2 \subset V_\sigma^{2'}$ de modo que V_σ^2 é homeomorfa a V_σ^1 .

A família $F_2 = h(V_\sigma^2)$ de soluções D_2 -assintóticas de (2.2) é homeomorfa a V_σ^2 e, portanto, homeomorfa a V_σ^1 .

Como V_σ^1 é homeomorfa a X_{OD_1} , temos que o teorema está provado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BACHMAN, G. & NARICI, L. - Functional Analysis. Academic Press, New York, (1966).
- [2] - BELLMAN, R. - Stability Theory of Differential Equations. MacGraw-Hill Book Company, Inc., (1953).
- [3] - BERKEY, D. - Block diagonal dominance and reducibility for linear differential systems. J. Math. Anal. Appl., 56, (1976), 233-251.
- [4] - CONTI, R. - On the boundedness of solutions of ordinary differential equations. Funkcialaj Ekvacioj, 9, (1966), 23-26.
- [5] - COPPEL, W.A. - Stability Asymptotic Behavior of Differential Equations. Heath, Boston, (1965).
- [6] - CORDUNEANU, C. - (a) Sur certains systèmes différentiels non-linéaires. An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza". Iasi, Sect. I, 6, (1960), 257-260.
(b) Integral Equations and Stability of Feedback Systems. Academic Press, New York, (1973).
- [7] - HALE, J.K. - Ordinary Differential Equations. Wiley, New York, (1969).
- [8] - HALLAM, T.G. - (a) On asymptotic equivalence of the bounded solutions of two systems differential equations. Michigan Math. J., 16, (1969), 353-363.
(b) On stability and L^p solutions of ordinary differential equations. Ann. Mat. Pura Appl., 85, (1970), 307-326.
- [9] - HALLAM, T.G. & ONUCHIC, N. - Asymptotic relations between perturbed linear systems of ordinary differential equations. Pacific J. Math., 45, (1973), 187-199.
- [10] - HARTMAN, P. - Ordinary Differential Equations. Wiley, New York, (1964).

- [11] - HARTMAN, P. & ONUCHIC, N. - On the asymptotic integration of ordinary differential equations. Pacific J. Math., 13, (1963), 1193-1207.
- [12] - MASSERA, J.L. & SCHÄFFER, J.J. - (a) Linear differential equations and functional analysis I. Math. Ann., 67, (1958), 517-573.
- (b) Linear differential equations and functional analysis IV. Math. Ann., 139, (1960), 282-342.
- (c) Linear Differential Equations and Functional Spaces. Academic Press, New York, (1966).
- [13] - ONUCHIC, N. - (a) Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias. Tese de Livre-Docência, FFCL-USP, (1965).
- (b) Asymptotic equivalence between two systems of ordinary differential equations. Portugaliae Math., 30, (1971), 97-105.
- (c) Asymptotic relationships at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations. J. Diff. Eqs., 3, (1967), 47-58.
- [14] - ONUCHIC, N. & TÁBOAS, P.Z. - Qualitative properties of nonlinear ordinary differential equations. Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, 79A, (1977), 79-85.
- [15] - PERRON, O. - Die stabilitätsfrage bei differentialgleichungen. Math. Ziet., 32, (1930), 703-728.
- [16] - STRAUSS, A. & YORKE, J.A. - Perturbation theorems for ordinary differential equations. J. Diff. Eqs., 3, (1967), 15-30.
- [17] - SZMYDT, Z. - Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non-linéaires. Ann. Pol. Math., (1955), 253-276.
- [18] - TÁBOAS, P.Z. - Admissibilidade e Aplicações em Equações Diferenciais Ordinárias. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, (1975).