**SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS PARCIAIS HIPERBÓLICAS
VIA TEOREMA DE NASH**

IVO MACHADO DA COSTA

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

DEDALUS - Acervo - ICMSC

30300027433

Tese apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de
São Carlos, da Universidade de
São Paulo, para obtenção do
título de Doutor em Ciências
(Matemática).

SÃO CARLOS
1988

Class. -	T
Out. -	C837.3
Tombo -	1 T400

A minha esposa Irene,
minha sogra Lucila, meus fi
lhos Vinícius, Marcus, Lucia
na e aos meus pais Ana e
Eloy.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, pelo amor, pela persistência e pela fé.

Ao professor Dr. Orlando Francisco Lopes pela orientação segura e paciente, pela honra concedida e pela oportunidade de uma convivência matemática bastante proveitosa sem o que este trabalho não se realizaria.

Ao professor Dr. Geraldo Sekine pelo apoio desde o vestibular e pela sua grande generosidade.

Ao professor Dr. Domingos Pisanelli, prematuramente falecido, pela orientação de Mestrado.

Aos colegas do Departamento de Matemática que além do apoio constante, muitas vezes assumiram maior carga didática permitindo-me um tempo maior para a realização deste trabalho.

Ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos pelo apoio e pela formação.

A Neube E.D.G. Stabili pelos trabalhos datilográficos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente ajudaram-me na realização deste trabalho.

Finalmente desejo salientar que estes agradecimentos não são de praxe, mas um sincero reconhecimento por tudo que fora mencionado.

Muito obrigado.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidade:

CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP - através de auxílios concedidos ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, para bibliografia e contratação de docentes de cursos de Pós-Graduação.

ABSTRACT

In this work we study the existence and uniqueness of periodic solutions for some classes of nonlinear hyperbolic partial differential equations using the Nash implicit functional theorem.

Adviser: Prof. Dr. Orlando F. Lopes

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 0 - PRELIMINARES	1
0.1 - Alguns Resultados sobre a Teoria das Equações de Evolução em Espaços de Banach	1
0.2 - Espaços de Sobolev de Funções Periódicas	6
0.3 - Desigualdade de Garding	9
0.4 - Regularização de Solução Fraca	10
0.5 - Desigualdade de Gagliardo Nirenberg.....	11
0.6 - Imersões de Sobolev.....	12
0.7 - Mollifiers na Classe das Funções Periódicas....	13
0.8 - Relação entre Derivada de Gateaux e Frechet.....	14
0.9 - Teorema de Composição de Moser	14
CAPÍTULO I - TEORIA LINEAR	16
O TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS DE NASH.....	37
APLICAÇÃO 1	39
APLICAÇÃO 2	73
APLICAÇÃO 3	105
APLICAÇÃO 4	130
UM EXEMPLO PARA JUSTIFICAR A NECESSIDADE DE DIMINUIR ε NOS TEOREMAS I.1.3 e I.1.4.....	161
COMENTÁRIO SOBRE UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO TEOREMA DE NASH.....	166

UMA EQUAÇÃO LINEAR HIPERBÓLICA SEM SOLUÇÃO	170
APÊNDICE	172
BIBLIOGRAFIA	187

INTRODUÇÃO

Quando o objetivo é provar existência de soluções (periódicas) de equações integrais, diferenciais ordinárias, parciais, etc; é comum, às vezes, utilizar-se do teorema das aproximações sucessivas de Banach Cacciopoli.

Por exemplo, pelo processo iterativo de Picard podemos mostrar que considerando-se a equação:

$$(I) \quad u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + u + \varepsilon f(t, x, u, u_t, u_x) = 0$$

onde f é uma função τ -periódica em t , 2π -periódica em x , suficientemente suave, $\alpha > 0$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe um $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ existe uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ τ -periódica em t , 2π -periódica em x , da equação (I), bastando para isso definirmos:

$$u_0 = 0$$

$$u_{n+1} = \varepsilon E^{-1} \cdot F(u_n) \quad \text{onde}$$

$Eu = u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + u$ e $F(u) = -f(t, x, u, u_t, u_x)$ em algum espaço conveniente (por exemplo $H_{\tau, 2\pi}^4(\mathbb{R}^2)$).

Porém, se a equação (I) envolver termos com derivadas mais altas na parte perturbada; por exemplo:

$$(II) \quad u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + u + \epsilon f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{tt}) = 0$$

com f de classe finita de diferenciabilidade; então $E^{-1} \circ F$ relacionará espaços diferentes; pois a imagem de u por meio de F perde duas derivadas (em t e x) enquanto E^{-1} recupera apenas uma (em t e em x) resultando numa perda líquida de uma derivada (em t e em x); o que consequentemente acarreta que a sequência de iterados para II é finita. Mesmo que f seja de classe C^∞ a convergência da sequência de iterados não é assegurada.

Uma vez que esse problema (II) e outros citados logo abaixo; envolvem "perda de derivadas" tornam-se necessários outros métodos iterativos mais eficientes. É nesse contexto que o nosso trabalho está inserido.

Neste nosso trabalho nós resolvemos os seguintes problemas:

Problema 1

Consideremos a equação:

$$(II) \quad u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + u + \epsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u) = 0$$

onde:

$\alpha > 0$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$; f τ -periódica em t , 2π -periódica em $x_1, x_2, \dots, x_n$ separadamente.

Mostramos que se f é suficientemente suave, então existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, a equação (II) tem uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

Problema 2

Consideremos a equação:

$$(III) \quad u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + u + \Delta[(1 + \varepsilon a(t, x, u)) \Delta u] + \varepsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u) = 0$$

onde

$\alpha > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, a e f τ -periódicas em t e 2π periódicas em $x_1, x_2, \dots, x_n$, separadamente.

Mostramos que se a e f são suficientemente suaves então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ a equação III tem uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

Problema 3

Consideremos a equação:

$$(IV) \quad u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + u + \varepsilon [\Delta \{ (1 + \varepsilon a(t, x, u)) \Delta u \} + f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u)] = 0$$

Mostramos que se a e f são suficientemente suaves então existe um $\varepsilon_0 > 0$; tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ a equação (IV) tem uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

Problema 4

Consideremos a equação:

$$(V) \quad u_t + u + \varepsilon [u_{tt} - \Delta u + f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla \nabla u)] = 0$$

Mostramos que se f é suficientemente suave então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ a equação (V) tem uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

O Problema (1) está relacionado com o seguinte problema de P. Rabinowitz [11].

Considerando-se a equação:

$$(VI) \quad u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + \varepsilon f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{tt}) = 0$$

onde:

$\alpha > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 1]$, f τ -periódica em t sob as condições:

$$1) \quad u(t+\tau, x) = u(t, x) \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0, 1] \quad \tau > 0$$

$$2) \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Rabinowitz mostrou que se f é suficientemente suave então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, VI tem solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$, pequena.

O problema (2) está relacionado com o seguinte problema de M. Stedry [13];

Considerando-se a equação

$$(VII) \quad u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u_t + \varepsilon g(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}) = 0$$

ou

$$(VIII) \quad u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u_t + \varepsilon g(t, x, u, u_t, u_x, u_{xxxx}) = 0$$

onde:

$\alpha > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 1]$ g τ -periódica em t e sob as condições (1) e (2) acima.

Stedry mostrou que se g é suficientemente suave então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ VII ou VIII tem solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ pequena.

Em 1983 H. Petzeltova [9] considerou um problema semelhante aos de Rabinowitz e Stedry, cuja diferença básica está no fato que a parte não perturbada e a perturbada envolvem derivadas (em x) de ordem $2p$.

Em 1984, H. Petzeltova e M. Stedry [10] estenderam para o caso de n -variáveis espaciais o mesmo resultado de Rabinowitz.

Tanto os nossos problemas quanto os problemas dos outros autores citados envolvem "perda de derivadas" e portanto foi necessário buscar-se métodos iterativos que levassem em consideração tais perdas.

Resolvemos os nossos problemas via o teorema de Nash [12] enquanto os outros usaram o teorema de Nash Moser [7].

A dificuldade principal encontrada na apli

cação do teorema de Nash consiste em exibir a inversa da derivada da aplicação relevante (dificuldade esta que nos pareceu não ter sido ultrapassada pelos outros autores) e o teorema de Nash-Moser trabalha com inversa a proximada.

Embora o teorema de Nash-Moser seja uma ferramenta de grande alcance e de difícil aplicação, vimos que nas aplicações feitas a parte perturbada envolve derivadas de ordem, no máximo igual, à ordem das derivadas envolvidas na parte não perturbada, enquanto pelo nosso método a parte perturbada pode envolver derivadas de ordem mais alta que as derivadas envolvidas na parte não perturbada.

Nosso problemas (3) e (4) evidenciam essa diferença, em (4) inclusive u_{tt} faz parte da perturbação.

Como dissemos, usamos o teorema de Nash, mas para isso foi necessário construir uma teoria linear para que pudéssemos obter a inversa da aplicação relevante, bem como propriedades de regularidade desta e isto foi possível graças à teoria das equações de evolução[5].

Utilizamos também um pouco da teoria das equações elíticas, existência de solução fraca, desigualdade de Garding, etc, teorema de imersão de Sobolev e

desigualdade de Gagliardo Nirenberg.

No Capítulo 0 apresentamos um breve resumo das noções e dos resultados que julgamos úteis para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo I desenvolvemos a teoria linear necessária à aplicação do teorema de Nash.

Nas aplicações 1 e 2 resolvemos problemas semelhantes aos de Rabinowitz [11] e Stedry [13] pelo nosso método.

Na aplicação (3) destacamos o fato que a parte perturbada é de ordem 4 enquanto a parte não perturbada é de ordem 2.

Na aplicação (4) destacamos o fato que u_{tt} está na parte perturbada.

Em seguida, construímos um contra-exemplo, para mostrarmos que a diminuição de ϵ (veja Teoremas I.1.3 e I.1.4) é uma condição necessária além de ser suficiente.

Queremos também registrar que um exemplo citado em [12] pode ser resolvido via o teorema clássico das funções implícitas.

Finalmente, demos um exemplo de uma equação hiperbólica linear com perturbação de terceira ordem que nem sempre admite solução quando se diminui o parâmetro ϵ .

Tudo o que fazemos vale para problemas de Dirichlet faltando, apenas, demonstrar a existência de operadores de regularização para espaços $H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Gostaríamos de esclarecer que durante o trabalho em muitas estimativas sucessivas aparece uma mesma constante de majoração, cabe dizer que isto é para evitar o trabalho de escolhermos o máximo entre elas.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

0.1. Alguns resultados sobre a Teoria das Equações de Evo lução em Espaços de Banach.

Definição 0.1.1

Sejam, X um espaço de Banach e $0 < T \in \mathbb{R}$. Denominamos de sistema de evolução à toda família à dois parâmetros, $0 \leq s \leq t \leq T$ de operadores lineares limitados $U(t,s) \in L(X)$; satisfazendo às seguintes condições:

$$(SE1) \quad U(s,s) = I \quad 0 \leq s \leq T$$

$$(SE2) \quad U(t,r) \circ U(r,s) = U(t,s) \quad 0 \leq s \leq r \leq t \leq T$$

(SE3) Para cada $x \in X$, a função:

$$(s,t) \in \Delta \rightarrow U(t,s)x \in X$$

é contínua; onde $\Delta = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$

Obs.: O operador $U(t,s)$ será chamado de operador de evo
lução.

Sejam, X um espaço de Banach, $0 < T \in \mathbb{R}$, $A(t): D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ um operador linear (não necessariame
nte contínuo); $0 \leq t \leq T$, $D(A(t)) \equiv D(A)$ independente de

t ; $D(A)$ denso em X e $A(t)$ fechado para cada $t \in [0, T]$.

Consideremos a equação:

$$(I) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x$$

Definição 0.1.2

Denominamos de solução de (I) sobre o segmento $[s, T]$; $0 \leq s < T$; à toda função $x: [s, T] \rightarrow D(A)$ derivável e tal que:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad s \leq t \leq T$$

Obs.: Uma solução de (I) sobre o segmento $[s, T]$ será indicada por $x(t, s)$.

Definição 0.1.3

Consideremos o problema de Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

(II)

$$x(s) = x_0 \in D(A)$$

Dizemos que o problema de Cauchy, acima; é bem posto, se e somente se, as seguintes condições estiveu

rem verificadas:

1) Para cada $s \in [0, T)$ e para cada $x_0 \in D(A)$, existe uma única solução $x(t, s)$ de (I) sobre o segmento $[s, T]$ satisfazendo: $x(s, s) = x_0$.

2) x e $\frac{\partial x}{\partial t} \in C^0(\Delta, X)$

3) A solução depende continuamente da condição inicial no seguinte sentido:

Se $(x_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ converge para zero quando $n \rightarrow \infty$ então a correspondente solução $x_n(t, s)$ converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em Δ .

Afirmção 0.1.1

Se o problema de Cauchy (II) é bem posto então existe um único sistema de evolução $U(t, s)$ associado a (II) satisfazendo $x(t, s) = U(t, s)x_0$ para todo $x_0 \in D(A)$.

Consideremos a equação não homogênea:

$$(III) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

onde $f: [0, T] \rightarrow X$

Obs.: A definição de solução de III é análoga à definição 0.1.2

Teorema 0.1.1

Se o problema de Cauchy (II) é bem posto, $f \in C^0([0,T],X)$ e $(A(t))_{0 \leq t \leq T}$ é fortemente contínua então toda solução de (III) sobre o segmento $[s,T]$ admite a seguinte representação:

$$x(t,s) = U(t,s)x(s,s) + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

Definição 0.1.4

Se o problema de Cauchy (II) é bem posto e $f \in L^1([0,T],X)$ então para todo $s \in [0,T]$ e para todo $x_0 \in X$ a função contínua $x: [s,T] \rightarrow X$ definida por:

$$x(t,s) = U(t,s)x_0 + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

é denominada solução mild da equação III com condição inicial x_0 .

Consideremos a equação perturbada:

$$(IV) \quad \frac{dx}{dt} = [A(t)+B(t)]x$$

Teorema 0.1.2

Suponhamos que as seguintes condições estejam verificadas:

- (1) O problema de Cauchy (II) é bem posto.
- (2) $0 \in \rho(A(t))$ para $0 \leq t \leq T$ e $\|A(0)A^{-1}(t)\| \leq M$ independentemente de t , onde $M > 0$ é uma cte.
- (3) $B(t).D(A) \subset D(A)$.
- (4) $B(t) \in L(X)$; $A(t)B(t)A^{-1}(t) \in L(X)$ e são fortemente contínuas.

Nestas condições o problema de Cauchy associado à equação IV é bem posto.

Teorema 0.1.3 (Kato)

Sejam, X espaço de Banach, $0 < T \in \mathbb{R}$, $A(t): D(A) \subset X \rightarrow X$ uma família de operadores lineares fechados densamente definidos sobre um conjunto $D(A)$; independente de t , $0 \leq t \leq T$. Suponhamos que as seguintes condições estejam verificadas:

- (1) $[0, \infty) \subset \rho(A(t))$ $0 \leq t \leq T$
- (2) $\|R(\lambda, A(t))\| \leq \frac{1}{1+\lambda} \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \quad 0 \leq t \leq T$
- (3) $(A(t))_{0 \leq t \leq T}$ é fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$.

Nestas condições, o problema de Cauchy(II) é bem posto.

Obs: Caso X seja espaço de Hilbert, para verificar (2) é suficiente mostrar que:

$$\operatorname{Re} \langle A(t)u, u \rangle \leq - \|u\|^2 \quad \forall u \in D(A)$$

Teorema 0.1.4

Suponhamos que o operador $A(t)$ seja fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$, tenha inversa limitada e seja estavelmente aproximado por operadores $A_n(t)$ os quais para cada $t \in [0, T]$ comuta com $A(t)$ sobre $D(A)$. Suponhamos que $B(t)$ seja limitado, fortemente contínuo para $t \in [0, T]$ e fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$; então o problema de Cauchy associado a $A(t) + B(t)$ é bem posto.

Referência: Todos os resultados e definições desta seção estão no livro Krein [5].

0.2. Espaços de Sobolev de Funções Periódicas

Sejam; $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$; $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$,
 $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ $R_1 = [0, \tau] \times [0, 2\pi]^n$; $R = [0, 2\pi]^n$.

Indicaremos por:

$L_{\tau, 2\pi}^p(\mathbb{R}^{n+1}) = \{\phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}/\phi = \phi(t, x) \text{ seja mensurável, } \tau\text{-periódica em } t, 2\pi\text{-periódica em } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ e que } \int_{R_1} |\phi(t, x)|^p dt dx < \infty\}.$

$W_{\tau, 2\pi}^{m,p}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{\phi \in L_{\tau, 2\pi}^p(\mathbb{R}^{n+1}) / \text{ para todo } \alpha \in N^{n+1}; |\alpha| \leq m, \text{ a derivada } D^\alpha \phi, \text{ no sentido das distribuições, pertença a } L_{\tau, 2\pi}^p(\mathbb{R}^{n+1})\}$

$$H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) = W_{\tau, 2\pi}^{m,2}(\mathbb{R}^{n+1})$$

$L_{2\pi}^p(\mathbb{R}^n) = \{\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/\phi = \phi(x) \text{ seja mensurável, } 2\pi\text{-periódica em } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ e que } \int_R |\phi(x)|^p dx < \infty\}$

$W_{2\pi}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in L_{2\pi}^p(\mathbb{R}^n) / \text{ para todo } \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m; \text{ a derivada } D^\alpha \phi; \text{ no sentido das distribuições; pertença a } L_{2\pi}^p(\mathbb{R}^n)\}.$

$$H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) = W_{2\pi}^{m,2}(\mathbb{R}^n)$$

0.3. Desigualdade de Garding

Consideremos o operador diferencial de ordem $2m$:

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha u \quad a_\alpha \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R}^n)$$

Se os coeficientes $a_\alpha \in C_{2\pi}^{|\alpha|-m}(\mathbb{R}^n)$ para $m < |\alpha| \leq 2m$ então podemos escrever L na forma divergente:

$$Lu = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} \cdot D^\rho (a^{\rho\sigma}(x) D^\sigma u)$$

Definição 0.3.1

Dizemos que L é uniformemente fortemente elítico, se e somente se, vale:

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \xi^\rho \cdot a^{\rho\sigma}(x) \cdot \xi^\sigma \geq c_0 \cdot |\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$; onde $c_0 > 0$ é uma constante independente de x .

Se L é um operador diferencial na forma divergente; podemos associar a L a seguinte forma bilinear:

$$B: H_{2\pi}^m \times H_{2\pi}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por:}$$

$$B[v, u] = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} \langle D^\rho v, a^{\rho\sigma}(\cdot) D^\sigma u \rangle \quad \text{onde}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: L_{2\pi}^2 \times L_{2\pi}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por:}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$$

Teorema 0.3.1 (Desigualdade de Garding)

Seja L um operador diferencial linear de ordem $2m$ escrito na forma divergente. Suponhamos que as seguintes condições estejam verificadas:

(1) Os coeficientes $a^{\rho\sigma} \in L_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e são uniformemente limitados por uma constante c_1 .

(2) L é uniformemente fortemente elítico com módulo de eliticidade c_0 .

(3) A parte principal de L tem módulo de continuidade $c_2(t)$; isto é;

$|a^{\rho\sigma}(x) - a^{\rho\sigma}(y)| \leq c_2(|x-y|) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
e $\forall (\rho, \sigma) \in N^n \times N^n$ tal que $|\rho| = |\sigma| = m$ onde
 $0 \leq c_2(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Nestas condições se B é a forma bilinear associada a L então existem constantes $C > 0$ e $k_0 \in \mathbb{R}$; dependentes de c_0, c_1 e c_2 tais que:

$$B[u, u] \geq C \|u\|_m^2 - k_0 \|u\|_0^2 \quad \forall u \in H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n)$$

Referência: Friedman [3]

0.4. Regularização de solução fraca

Teorema 0.4.1

Seja L um operador diferencial linear de ordem $2m$ satisfazendo as condições (1), (2) e (3) do teorema 0.3.1 e suponhamos que $a^{\rho\sigma} \in C_{2\pi}^{|\rho|+k}(\mathbb{R}^n)$ para algum $k \geq 0$. Seja $f \in H_{2\pi}^k(\mathbb{R}^n)$.

Se $u \in H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n)$ é tal que:

$B[\phi, u] = \langle \phi, f \rangle; \forall \phi \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ então:

$$(1) \quad u \in H_{2\pi}^{2m+k}(\mathbb{R}^n) \quad e$$

$$(2) \quad \|u\|_{2m+k} \leq M(\|f\|_k + \|u\|_0) \quad 0 < M \quad e$$

onde M é uma constante dependente de c_0, c_1, c_2 e k .

Obs.: É importante notar que M é inversamente proporcional a c_0 , além disso é conveniente salientar que se L é injetora então podemos eliminar $\|u\|_0$ em (2).

Teorema 0.4.2

Sejam L_1 e L_2 dois operadores diferenciais lineares de ordem $2m_1$ e $2m_2$, respectivamente, com $m_1 \geq m_2$.

Suponhamos que ambos satisfaçam as hipóteses do teorema 0.4.1. Seja $f \in H_{2\pi}^k(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Se $u \in H_{2\pi}^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ é tal que:

$B[\phi, u] = \langle \phi, f \rangle \quad \forall \phi \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ onde B é a forma bilinear associada a $\varepsilon L_1 + L_2$ então:

$$(1) \quad u \in H_{2\pi}^{2m_1+k}(\mathbb{R}^n)$$

$$(2) \quad \|u\|_{2m_1+k} \leq \frac{M}{\varepsilon} (\|f\|_k + \|u\|_0)$$

$$(3) \quad \|u\|_{2m_2+k} \leq M (\|f\|_k + \|u\|_0) \quad 0 < M \quad e$$

onde M é uma constante dependendo apenas de c_0, c_1, c_2 e k .

Referência: Friedman [3]

0.5. Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Teorema 0.5.1

Seja $u \in W_{2\pi}^{m,r}(\mathbb{R}^n) \cap L_{2\pi}^q(\mathbb{R}^n)$ onde $1 \leq r, q \leq \infty$. Para qualquer inteiro j ; $0 \leq j < m$ e para qualquer $a \in [j/m; 1]$ defina p por:

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}$$

Se $m - j - n/r \notin \mathbb{N}$ então:

$$(I) \quad |D^j u|_p \leq C \cdot \|u\|_{m,r}^a \cdot \|u\|_{0,q}^{1-a}$$

Se $m - j - \frac{n}{r} \in \mathbb{N}$ então (I) é válida a penas para $a = \frac{j}{m}$.

A constante C depende de r, q, m, j, a ;
e onde $C > 0$.

Referência: Friedman [3]

0.6. Imersões de Sobolev

Teorema 0.6.1

Seja $(j, m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Temos:

(I) Se $m.p < n$ então:

$$W_{2\pi}^{j+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{2\pi}^{j,q}(\mathbb{R}^n) \text{ para } 1 \leq p \leq q \leq \frac{n.p}{n-m.p}$$

(II) Se $m.p = n$ então:

$$W_{2\pi}^{j+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{2\pi}^{j,q}(\mathbb{R}^n) \text{ para } p \leq q < \infty$$

(III) Se $m.p < n$, então:

$$W_{2\pi}^{j+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_{2\pi}^j(\mathbb{R}^n)$$

Referências: Friedman [3].

Adams [1]

0.7. Mollifiers na classe das funções periódicas

Seja $\hat{a} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{a} \equiv 1$ em uma vizinhança de zero e seja a sua transformada de Fourier.

Consideremos a família de operadores lineares $S(t): L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n); t \geq 1;$ definido por:

$$[S(t)u](x) = t^n \int_{\mathbb{R}^n} a[t(x-y)]u(y)dy$$

Teorema 0.7.1

Seja $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ tal que $m_1 < m_2$. Então existe $M > 0;$ dependendo de m_1 e m_2 tal que a família $(S(t))_{t \geq 1}$ acima definida satisfaz às seguintes propriedades:

$$(S1) \quad \|S(t)u\|_\rho \leq M.t^{\rho-r} \|u\|_r \quad \forall u \in H_{2\pi}^r(\mathbb{R}^n)$$

$$(S2) \quad \|(I-S(t))u\|_r \leq M.t^{r-\rho} \|u\|_\rho \quad \forall u \in H_{2\pi}^\rho(\mathbb{R}^n)$$

onde $m_1 \leq r \leq \rho \leq m_2$.

Referência: Schwartz [12]

0.8. Relação entre derivada de Gateaux e de Frechet

Teorema 0.8.1

Sejam X e Y espaços de Banach; $U \subset X$ aberto e $F: U \rightarrow Y$ uma função. Suponhamos que F seja diferenciável segundo Gateaux em U . Indiquemos por $F'(x, h)$ a diferencial segundo Gateaux no ponto x e na direção h . Se $F'(x, \cdot)$ é linear para cada $x \in U$, $F'(x, \cdot) \in L(X, Y)$ e se $x \in U \rightarrow F'(x, \cdot) \in L(X, Y)$ é contínua então F é diferenciável em U segundo Frechet.

Referência: Schwartz [12]

0.9. Teorema de Composição de Moser

Teorema 0.9.1

Sejam $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ $s \leq r$; $n \in \mathbb{N}^*$;
 $\mu = \sum_{i=0}^s n^i$ e $\phi \in C^{r-s}(R^n \times (-\delta, \delta)^\mu; R)$; $\delta > 1$, 2π -periódica em $x_1 \dots x_n$. Nestas condições a função:

$$F: H_{2\pi}^r(R^n) \cap \underset{C_{2\pi}^s(R^n)}{B(0,1)} \longrightarrow H_{2\pi}^{r-s}(R^n)$$

definida por:

$$[F(u)](x) = \phi(x, u(x), (\nabla u)(x), \dots, (\nabla^s u)(x))$$

está bem definida e vale a estimativa:

$$\|F(u)\|_{H_{2\pi}^{r-s}} \leq M. (1 + \|u\|_{H_{2\pi}^r})$$

para todo $u \in H_{2\pi}^r(\mathbb{R}^n) \cap B(0,1)_{C_{2\pi}^s(\mathbb{R}^n)}$ e onde M depende, ape

nas, da norma de ϕ na classe $C_B^{r-s}(\mathbb{R}^n \times [-1,1]^\mu, \mathbb{R})$

Referência: Moser [7]

CAPÍTULO I

1.1. Teoria Linear

É nosso objetivo, neste capítulo; desenvolvermos a teoria linear a qual será usada para provarmos a existência, unicidade e propriedades (principalmente de regularidade) da "inversa" da derivada da função mais importante em cada uma das aplicações do Teorema de Nash que faremos mais tarde.

Teorema I.1.1

Sejam, X um espaço de Banach, $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\epsilon_1 > 0$ e $A(t, \epsilon)$, $t \in \mathbb{R}$; $|\epsilon| \leq \epsilon_1$ uma família de operadores lineares fechados, densamente definidos sobre um conjunto $D(A)$ independente de t e ϵ . Suponhamos que as seguintes condições estejam verificadas:

- (1) A família $A(t, \epsilon)$; $t \in \mathbb{R}$, $|\epsilon| \leq \epsilon_1$ é fortemente continuamente diferenciável em t sobre $D(A)$ para cada ϵ .
- (2) $0 \in \rho(A(t, \epsilon))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $|\epsilon| \leq \epsilon_1$

(3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A'(t, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} = 0$
uniformemente em t

(4) O problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \overset{0}{Z} &= A(t, \varepsilon) Z \\ \text{(I)} \quad Z(s) &= Z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é bem posto.

(5) O problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \overset{0}{Z} &= A(t, \varepsilon) Z + A'(t, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon) \cdot Z \\ \text{(II)} \quad Z(s) &= Z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é bem posto.

(6) Existem constantes positivas M e β independentes de ε tais que:

$$\|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M \cdot e^{-\beta(t-s)}$$

onde $U(t, s, \varepsilon)$ é o operador de evolução associado a (I).

Então, nestas condições, existem $\alpha > 0$

$0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ tais que:

$$\|V(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M \cdot e^{-\alpha(t-s)}; \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_2, \quad s \leq t$$

onde $V(t, s, \varepsilon)$ é o operador de evolução associado a (II).

Prova:

Seja $x \in X$, então:

$$V(t,s,\varepsilon)x = U(t,s,\varepsilon)x + \int_s^t U(t,\tau,\varepsilon)A'(\tau,\varepsilon)A^{-1}(\tau,\varepsilon)V(\tau,s,\varepsilon)x d\tau$$

logo:

$$\begin{aligned} \|V(t,s,\varepsilon)x\| &\leq Me^{-\beta(t-s)}\|x\| + \\ &+ \int_s^t Me^{-\beta(t-\tau)} \|A'(\tau,\varepsilon) \cdot A^{-1}(\tau,\varepsilon)\| \cdot \|V(\tau,s,\varepsilon)x\| d\tau \end{aligned}$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ tal que $\alpha = \beta - \delta \cdot M > 0$.

Segue da condição (3) que existe $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ tal que

$$\|A'(\tau,\varepsilon)A^{-1}(\tau,\varepsilon)\| \leq \delta \text{ para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_2 \text{ e } \tau \in \mathbb{R}.$$

Portanto, segue da desigualdade de Gronwall que:

$$\|V(t,s,\varepsilon)\|_{L(X,X)} \leq M e^{-\alpha(t-s)} \text{ para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_2.$$

Teorema I.1.2

Sejam, X um espaço de Banach; $A(t,\varepsilon)$; $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ $\varepsilon_1 > 0$, $\tau > 0$; uma família τ -periódica em t de operadores lineares fechados, densamente definidos sobre um conjunto $D(A)$ independente de t e ε . Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

(1) O problema de Cauchy

$$(I) \quad \begin{aligned} \dot{Z} &= A(t, \varepsilon) Z \\ Z(s) &= Z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é bem posto.

(2) Existem constantes positivas M e α , independentes de ε tais que:

$$\|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M \cdot e^{-\alpha(t-s)}$$

Nestas condições, para cada $h \in L^1_\tau(\mathbb{R}, X)$ e para cada ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, existe uma única solução mild τ -periódica e contínua da equação:

$$(II) \quad \dot{Z} = A(t, \varepsilon) Z + h(t)$$

Prova

Basta determinarmos $Z_0 = Z_0(\varepsilon) \in X$ tal que:

$$Z(t, \varepsilon) = U(t, 0, \varepsilon) z_0 + \int_0^t U(t, \xi, \varepsilon) h(\xi) d\xi$$

seja τ -periódica em t .

Se Z_0 existir ele satisfará a equação:

$$(I - U(\tau, 0, \varepsilon)) Z_0 = \int_0^\tau U(\tau, \xi, \varepsilon) h(\xi) d\xi$$

Mas $1 \in \rho(U(\tau, 0, \varepsilon))$; pois o raio espectral de $U(t, 0, \varepsilon)$ é menor que 1, pois:

$$\begin{aligned} r(U(\tau, 0, \varepsilon)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n(\tau, 0, \varepsilon)\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U(n\tau, 0, \varepsilon)\|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M e^{-\alpha n \tau}} = e^{-\alpha \tau} < 1 \end{aligned}$$

donde Z_0 é determinado de modo único por:

$$Z_0(\varepsilon) = (I - U(\tau, 0, \varepsilon))^{-1} \int_0^\tau U(\tau, \xi, \varepsilon) h(\xi) d\xi.$$

□

Teorema I.1.3

Sejam, X um espaço de Banach; $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$, $A(t, \varepsilon)$ $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ uma família τ -periódica em t , de operadores lineares fechados, densamente definidos sobre um domínio $D(A) \subset X$, independente de t e ε . Suponhamos que as seguintes condições estejam verificadas:

- (1) A família $A(t, \varepsilon)$; $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ é fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$.

$$(2) \quad 0 \in \rho(A(t, \varepsilon)); \quad t \in \mathbb{R}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$$

(3) O problema de Cauchy:

$$(I) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= A(t, \varepsilon) z \\ z(s) &= z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é bem posto e $\|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M e^{-\alpha(t-s)}$; onde $s \leq t$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, $\alpha > 0$, $M > 0$ independentes de t e ε e $U(t, s, \varepsilon)$ é o operador de evolução associado a I.

(4) O problema de Cauchy:

$$(II) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= (A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)) z \\ z(s) &= z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é bem posto e $\|V(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M e^{-\beta(t-s)}$, onde $s \leq t$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 > 0$, $M > 0$, $\beta > 0$ (independentes de t e ε) e $V(t, s, \varepsilon)$ é o operador de evolução associado a II.

Nestas condições, para cada ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_2$ e para cada $h \in H^1_\tau(\mathbb{R}, X)$ a única solução mild τ -periódica de:

$$(III) \quad \dot{z} = A(t, \varepsilon) z + h(t)$$

é de fato solução de (III) e $z \in C^1_\tau(\mathbb{R}, X)$.

$$\int_0^{\tau} w(\sigma) d\sigma = \int_0^{\tau} V(t, 0) w_0 dt + \int_0^{\tau} \left(\int_0^t V(t, \sigma) h_1(\sigma) d\sigma \right) dt$$

$$\int_0^{\tau} V(t, 0) w_0 dt = \int_0^{\tau} A(t) U(t, 0) A^{-1}(0) w_0 dt = \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} U(t, 0) A^{-1}(0) w_0 dt$$

∴

$$(1) \int_0^{\tau} V(t, 0) w_0 dt = (U(\tau, 0) - I) \cdot A^{-1}(0) w_0$$

$$(2) \int_0^{\tau} \int_0^t V(t, \sigma) h_1(\sigma) d\sigma dt = \int_0^{\tau} \int_0^t A(t) U(t, \sigma) A^{-1}(\sigma) h'(\sigma) d\sigma dt -$$

$$\int_0^{\tau} \int_0^t A(t) U(t, \sigma) A^{-1}(\sigma) A'(\sigma) A^{-1}(\sigma) h(\sigma) d\sigma dt$$

$$(2.1) \int_0^{\tau} \int_0^t A(t) U(t, \sigma) A^{-1}(\sigma) h'(\sigma) d\sigma dt =$$

$$= \int_0^{\tau} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(t, \sigma) A^{-1}(\sigma) h'(\sigma) d\sigma dt =$$

$$= \int_0^{\tau} (U(\tau, \sigma) - I) A^{-1}(\sigma) h'(\sigma) d\sigma$$

Mas:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} [U(\tau, \sigma) - I] A^{-1}(\sigma) h(\sigma) = -U(\tau, \sigma) h(\sigma) - [U(\tau, \sigma) - I] \cdot$$

$$A^{-1}(\sigma) A'(\sigma) A^{-1}(\sigma) h(\sigma) + [U(\tau, \sigma) - I] A^{-1}(\sigma) h'(\sigma).$$

∴

$$\int_0^{\tau} \int_0^t A(t) U(t, \sigma) A^{-1}(\sigma) h'(\sigma) d\sigma = [I - U(\tau, 0)] A^{-1}(0) h(0) +$$

$$+ \int_0^T U(\tau, \sigma) h(\sigma) d\sigma + \int_0^T [U(\tau, \sigma) - I] g(\sigma) d\sigma \quad \text{onde}$$

$$g(t) = A^{-1}(t) A'(t) A^{-1}(t) h(t)$$

$$(2.2) \quad \int_0^T \int_0^t A(t) U(t, \sigma) g(\sigma) d\sigma dt =$$

$$\int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(t, \sigma) g(\sigma) d\sigma \right) dt =$$

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t U(t, \sigma) g(\sigma) d\sigma \right] dt - \int_0^T g(\sigma) d\sigma =$$

$$\int_0^T [U(\tau, \sigma) - I] g(\sigma) d\sigma$$

donde:

$$\int_0^T \int_0^t V(t, \sigma) h_1(\sigma) d\sigma = [I - U(\tau, 0)] A^{-1}(0) h(0) +$$

$$\int_0^T U(\tau, \sigma) h(\sigma) d\sigma$$

e assim:

$$\int_0^T w(\sigma) d\sigma = [U(\tau, 0) - I] A^{-1}(0) \cdot w_0 + [I - U(\tau, 0)] A^{-1}(0) h(0)$$

$$+ \int_0^T U(\tau, \sigma) h(\sigma) d\sigma = [I - U(\tau, 0)] \cdot [A^{-1}(0) (h(0) - w_0) + z_0]$$

mas:

$$w_0 = [I - V(\tau, 0)]^{-1} \int_0^T V(\tau, \sigma) h_1(\sigma) d\sigma = A(0) [I - U(\tau, 0)]^{-1}.$$

$$\int_0^{\tau} U(\tau, \sigma) A^{-1}(\sigma) h_1(\sigma) d\sigma.$$

Portanto,

$$[I - U(\tau, 0)] A^{-1}(0) w_0 = \int_0^{\tau} U(\tau, \sigma) A^{-1}(\sigma) h_1(\sigma) d\sigma =$$

$$\int_0^{\tau} U(\tau, \sigma) A^{-1}(\sigma) h'(\sigma) d\sigma - \int_0^{\tau} U(\tau, \sigma) g(\sigma) d\sigma =$$

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \sigma} (U(\tau, \sigma) \cdot A^{-1}(\sigma) h(\sigma)) d\sigma + \int_0^{\tau} U(\tau, \sigma) h(\tau) d\tau =$$

$$= A^{-1}(\tau) h(\tau) - U(\tau, 0) A^{-1}(0) h(0) + (I - U(\tau, 0)) \dot{z}_0 =$$

$$= [I - U(\tau, 0)] [A^{-1}(0) h(0) + z_0]$$

Portanto:

$$\int_0^{\tau} w(\sigma) d\sigma = [I - U(\tau, 0)] [A^{-1}(0) h(0) + z_0] - [I - U(\tau, 0)] \cdot A^{-1}(0) w_0 = 0$$

Como $(I - U(\tau, 0))$ é injetiva segue-se que:

$$z_0 = A^{-1}(0) [w(0) - h(0)] \in D(A)$$

Finalmente:

$$\text{Indicando-se por } y(t) \equiv \int_0^t U(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma \text{ te-}$$

mos:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t U(t, \sigma) A(\sigma) A^{-1}(\sigma) h(\sigma) d\sigma = \\
 &= - \int_0^t \frac{\partial U(t, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot A^{-1}(\sigma) h(\sigma) d\sigma = U(t, 0) A^{-1}(0) h(0) - A^{-1}(t) h(t) + \\
 &+ \int_0^t U(t, \sigma) \cdot \frac{d}{d\sigma} [A^{-1}(\sigma) h(\sigma)] d\sigma
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &= A(t) U(t, 0) A^{-1}(0) h(0) + A(t) \int_0^t U(t, \sigma) \frac{d}{d\sigma} [A^{-1}(\sigma) h(\sigma)] d\sigma \\
 &= A(t) y(t) + h(t)
 \end{aligned}$$

Como $z(t) = U(t, 0) z_0 + y(t)$ e $z_0 \in D(A)$

segue-se que:

$$\dot{z} = A(t) z(t) + h(t) \quad \text{donde} \quad z \in C^1_\tau(R, X)$$

Agora, se $h \in H^1_\tau(R, X)$ então existe uma sequência $h_n \in C^1_\tau(R, X)$ tal que $h_n \rightarrow h$ em $H^1_\tau(R, X)$.

Seja:

$$\dot{z}(t) = U(t, 0) z_n + \int_0^t U(t, \sigma) h_n(\sigma) d\sigma$$

a solução mild τ -periódica da equação:

$$\dot{z} = A(t, \varepsilon) z + h_n(t)$$

Analogamente; seja:

$$w_n(t) = V(t,0) w_n + \int_0^t V(t,\sigma) h_n^1(\sigma) d\sigma$$

a solução mild τ -periódica da equação:

$$\overset{0}{z} = [A(t,\varepsilon) + A'(t,\varepsilon)A^{-1}(t,\varepsilon)]z + h_n^1(t)$$

$$\text{onde } h_n^1(t) = h'_n(t) - A'(t,\varepsilon)A^{-1}(t,\varepsilon)h_n(t)$$

mas:

$$\left\| \int_0^t U(t,\sigma) (h_n(\sigma) - h(\sigma)) d\sigma \right\| \leq M_1 \cdot \|h_n - h\|_{L^2_\tau(R,X)} \rightarrow 0$$

Portanto torna-se claro que:

$$1) z_n \rightarrow z \text{ uniformemente em } [0,\tau] \quad (\text{em } R)$$

$$2) w_n \rightarrow w \text{ uniformemente em } [0,\tau] \quad (\text{em } R)$$

$$3) w_n = \overset{0}{z}_n$$

donde concluímos que $z \in C^1_\tau(R,X)$ e $\overset{0}{z} = w$.

□

Teorema I.1.4

Sejam, X um espaço de Banach, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$
 $\varepsilon_1 > 0$; $m \in \mathbb{N}^*$, $A(t, \varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$; uma família
 τ -periódica em t de operadores lineares fechados densa-
mente definidos sobre um conjunto $D(A)$ independente de
 t e ε . Suponhamos que as seguintes condições estejam
verificadas:

1) A família $A(t, \varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ é m -vezes for-
temente continuamente diferenciável sobre $D(A)$ em re-
lação a t para todo ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$.

2) $0 \in \rho(A(t, \varepsilon))$ $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$
 $\|A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq a$; $t \in \mathbb{R}$ $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$
 $0 < a = \text{cte}$

3) O problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \overset{0}{Z} &= A(t, \varepsilon)Z \\ Z(s) &= Z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é bem posto.

4) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A^{(j)}(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} = 0$ (uniformemente
em t) $1 \leq j \leq m$

5) $0 \in \rho(A_j(t, \varepsilon))$; $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$;
 $A_j^{(1)}(t, \varepsilon)A_j^{-1}(t, \varepsilon) \in A_j(t, \varepsilon)A_j^{(1)}(t, \varepsilon)A_j^{-1}(t, \varepsilon) \cdot A_j^{-1}(t, \varepsilon)$

estejam bem definidas, pertençam a $L(X, X)$ e sejam fortemente contínuas, onde:

$$A_0(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) \quad \text{e} \quad A_j(t, \varepsilon) = A_{j-1}(t, \varepsilon) + A'_{j-1}(t, \varepsilon).$$

$$A_{j-1}^{-1}(t, \varepsilon) \quad t \in \mathbb{R}; \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_1 \quad 1 \leq j \leq m$$

$$6) \quad \|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M \cdot e^{-\alpha(t-s)}, \quad s \leq t, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$$

onde $M > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes independentes de t e ε e $U(t, s, \varepsilon)$ é o operador de evolução associado a (I).

Nestas condições, existe um $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) \leq \varepsilon_1$ tal que para todo $\varepsilon; |\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ e para todo $h \in H_\tau^m(\mathbb{R}, X)$, a única solução mild τ -periódica da equação:

$$(II) \quad \overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + h$$

é solução de (II) e pertence a $C_\tau^m(\mathbb{R}, X)$.

Afirmamos ainda que este $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$ é tomado de forma que o problema de Cauchy:

$$\overset{0}{Z} = A_m(t, \varepsilon)Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

é bem posto, possui decaimento exponencial e Z_m é a solução mild de:

$$\overset{0}{Z} = A_m(t, \varepsilon)Z + h_m \quad \text{onde:}$$

$$h_0 = h \quad h_j = h_{j-1}^{(1)} - A_{j-1}^{(1)}(t, \varepsilon) A_{j-1}^{-1}(t, \varepsilon) h_{j-1} \quad z_j = \frac{d^j Z}{dt^j}$$

$$1 \leq j \leq m.$$

Além disso:

$$\|z_m\|_Y \leq K[\|h^{(m)}\|_Y + \sum_{j=1}^{m-1} [1+d(1+j)] \|h^{(m-j)}\|_Y +$$

$$[1+d(m)] \|h\|_Y] \quad \text{onde:}$$

$$K = K(m, M, \alpha, d(1), \varepsilon_1, a) > 0 \quad Y = L_T^2(R, X) \quad e$$

$$d(j) = \sup_{\substack{t \in R \\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_1 \\ 0 \leq s \leq j}} \|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon)\|_{L(X, X)}$$

Prova (por indução sobre m)

Para $m = 1$ o teorema é verdadeiro. Isto decorre das hipóteses do teorema e teoremas 0.1.2 e I.1.3

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $m - 1$ com $m \geq 2$.

Seja $h \in H_T^m(R, X)$, então pela hipótese da indução existe $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(m-1) \leq \varepsilon_1$ tal que a solução mild de (II) é de fato solução de II, está em $C_T^{m-1}(R, X)$, z_{m-1} é a solução mild de:

$$(III) \quad \overset{0}{z} = A_{m-1}(t, \varepsilon) z + h_{m-1}$$

$h_{m-1} \in H_T^1(R, X)$ e onde $U_{m-1}(t, s, \varepsilon)$ -operador de evolução do problema de Cauchy associado a III tem decaimento exponencial.

Consideremos a equação:

$$(IV) \quad \overset{0}{z} = A_m(t, \varepsilon) z + h_m$$

Novamente; por causa das hipóteses do teoma e da hipótese da indução; o problema de Cauchy associado a IV é bem posto; existe um $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) \leq \varepsilon_0(m-1) \leq \varepsilon_1$ tal que $U_m(t, s, \varepsilon)$ -operador de evolução associado ao P.C

de IV tenha decaimento exponencial, a solução mild de III é solução de III e sua derivada coincide com a solução mild de IV (Teorema I.1.3), donde $z \in C^m(R, X)$.

Indiquemos por: $z_k = \frac{d^k z}{dt^k}$; então:

$$z_m = [A + \binom{m}{1} A^{(1)} \cdot A^{-1}] z_m + \sum_{j=1}^{m-1} \left[\sum_{s=1}^{j+1} (-1)^{s+1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_s=j+1 \\ i_k \geq 1, 1 \leq k \leq s}} \right]$$

$$\binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} \dots \binom{m-i_1-\dots-i_{s-1}}{i_s} A^{(i_1)} \cdot A^{-1} \dots A^{(i_s)} A^{-1} z_{m-j} +$$

$$\sum_{j=0}^m B_j h^{(m-j)} \quad \text{onde:}$$

$$B = I \quad B_j = - \sum_{s=1}^j (-1)^{s+1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_s=j \\ 1 \leq i_k}} \binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} \dots$$

$$\binom{m-i_1-\dots-i_{s-1}}{i_s} \cdot A^{(i_1)} A^{-1} \dots A^{(i_s)} A^{-1} \quad 1 \leq j \leq m$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} z_m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^{(k)} \cdot z_{m-k} + h^{(m)} = A z_m + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} A^{(k)} \cdot z_{m-k} + h^{(m)} \\ &= A z_m + \binom{m}{1} A^{(1)} \cdot A^{-1} [z_m - \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} A^{(k)} \cdot z_{m-1-k} - h^{(m-1)}] + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} \cdot \\ &A^{(k)} z_{m-k} + h^{(m)} = [A + \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1}] z_m + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\binom{m}{k+1} A^{(k+1)} - \right. \\ &\left. \binom{m}{1} \binom{m-1}{k} A^{(1)} A^{(-1)} A^{(k)} \right] z_{m-1-k} + h^{(m)} - \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1} h^{(m-1)} = \\ &= [A + \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1}] z_m + \left[\binom{m}{2} A^{(2)} A^{-1} - \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} (A^{(1)} A^{-1})^2 \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [Z_{m-1} - \sum_{k=1}^{m-2} \binom{m-2}{k} A^{(k)} Z_{m-2-k} - h^{(m-2)}] + \sum_{k=2}^{m-1} [\binom{m}{k+1} A^{(k+1)} - \\
 & \binom{m}{1} \binom{m-1}{k} A^{(1)} A^{-1} \cdot A^{(k)}] Z_{m-1-k} + h^{(m)} - \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1} \cdot h^{(m-1)} = \\
 & = [A + \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1}] Z_m + [\binom{m}{2} A^{(2)} A^{-1} - \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} (A^{(1)} A^{-1})^2] Z_{m-1} \\
 & + \sum_{k=1}^{m-2} [\binom{m}{k+2} A^{(k+2)} - \binom{m}{1} \binom{m-1}{k+1} A^{(1)} A^{-1} \cdot A^{(k+1)} - \binom{m}{2} \binom{m-2}{k} \cdot \\
 & A^{(2)} A^{-1} \cdot A^{(k)} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} \binom{m-2}{k} (A^{(1)} A^{-1})^2 \cdot A^{(k)}] Z_{m-2-k} + \\
 & h^{(m)} - \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1} \cdot h^{(m-1)} + [\binom{m}{2} A^{(2)} A^{-1} - \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} (A^{(1)} A^{-1})^2] h^{(m-2)} \\
 & = \dots = [A + \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1}] Z_m + \\
 & + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{S=1}^{j+1} (-1)^{S+1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_S=j+1 \\ 1 \leq i_k \leq S}} \binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} \dots \binom{m-i_1-\dots-i_{S-1}}{i_S} A^{(i_1)} A^{-1} \dots A^{(i_S)} A^{-1}] Z_{m-j} + \\
 & + \sum_{j=0}^m B_j h^{(m-j)}
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= I \quad e \quad B_j = - \sum_{S=1}^j (-1)^{S+1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_S=j \\ 1 \leq i_k \leq S}} \binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} \dots \\
 & \dots \binom{m-i_1-\dots-i_{S-1}}{i_S} \cdot A^{(i_1)} A^{-1} \dots A^{(i_S)} A^{-1}.
 \end{aligned}$$

Vamos, agora, à estimativa.

Notemos que:

$$Z_m^0 = [A + \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1}] Z_m + g_m(t) \quad \text{onde}$$

$$g_m(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{s=1}^{j+1} (-1)^{s+1} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_s = j+1 \\ 1 \leq i_k}} \binom{m}{i_1} \dots \binom{m-i_1 \dots i_{s-1}}{i_s} \right) \cdot$$

$$A^{(i_1)} A^{-1} \dots A^{(i_s)} A^{-1} Z_{m-j} + \sum_{j=0}^m B_j h^{(m-j)}$$

Consideremos o problema de Cauchy:

$$Z^0 = [A + \binom{m}{1} A^{(1)} A^{-1}] Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

Segue das condições de nosso teorema e do teorema 0.1.2 que esse problema é bem posto; ainda do teorema I.1.1 podemos afirmar que existem $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) > 0$; $M > 0$, $\alpha > 0$, independentes de t e ε tal que:

$$\|U_m(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M e^{-\alpha(t-s)}, \quad s \leq t, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$$

onde $U_m(t, s, \varepsilon)$ é o operador de evolução associado ao problema acima.

Logo:

$$\|Z_m\|_Y \leq M \|g_m\|_Y \quad (M\text{-genérico})$$

Porém:

$$\left\| \sum_{s=1}^{j+1} (-1)^{s+1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_s=j+1 \\ 1 \leq i_k}} \binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} \dots \binom{m-i_1-i_{s-1}}{i_s} \right\|$$

$$A^{(i_1)} A^{-1} \dots A^{(i_s)} A^{-1} \Big|_{L(X,X)} \leq \sum_{s=1}^{j+1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_s=j+1 \\ 1 \leq i_k}} \binom{m}{j+1}$$

$$\frac{(j+1)!}{i_1! i_2! \dots i_s!} d(i_1) d(i_2) \dots d(i_s) \cdot a^s \leq$$

$$M \cdot \sum_{s=1}^{j+1} \sum_{i_1+\dots+i_s=j+1} \binom{m}{j+1} \frac{(j+1)!}{i_1! \dots i_s!} \cdot d(j+1)^{1-\frac{s-1}{j}}$$

$$\cdot d(1)^{\frac{s-1}{j}} \cdot d(1)^{s-1} \cdot a^s \leq [M \cdot (1+d(1)) \cdot \sum_{s=1}^{j+1} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_s=j+1 \\ \prod_{k=1}^s i_k \leq 1}} \binom{m}{j+1}]$$

$$\frac{(j+1)!}{i_s! \dots i_1!} \cdot d(1)^{s-1} \cdot a^1 [1+d(1+j)] =$$

$$= K(m, j, a, d(1), \varepsilon_0(m)) [1+d(1+j)]$$

onde:

$$a = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_0}} \|A(0, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X,X)} \quad 1 \leq j \leq m-1$$

usamos a desigualdade de Gagliardo Nirenberg Teorema 0.5.1

$$1 \leq i_k \leq j+1 \quad 1 \leq k \leq s$$

$$d(i_k) \leq C_{ik} d(j+1)^{a_{ik}} d(1)^{1-a_{ik}} \quad a_{ik} = \frac{i_k-1}{j}$$

$$\sum_{k=1}^s a_{ik} = 1 - \frac{s-1}{j} \leq 1 \quad \text{pois} \quad 1 \leq s \leq j+1$$

$$\sum_{k=1}^s (1-a_{ik}) = (s-1) + \frac{s-1}{j}$$

Portanto:

$$\|z_m\|_Y \leq K(m, a, d(1), \varepsilon_0(m)) \left[\sum_{j=1}^{m-1} (1+d(1+j)) \cdot \|z_{m-j}\|_Y + \right.$$

$$\left. \|h^{(m)}\|_Y + \sum_{j=1}^m (1+d(j)) \cdot \|h^{(m-j)}\|_Y \right]$$

$$\text{onde } K(m; a, d(1), \varepsilon_0(m)) = \sup_{1 \leq j \leq m} \{1, MK(m, j, a, d(1), \varepsilon_0(m))\}$$

Analogamente:

$$\|z_{m-1}\|_Y \leq K(m-1, a, d(1), (m-1)) \cdot \left[\sum_{j=1}^{m-2} (1+d(1+j)) \cdot \|z_{m-1-j}\|_Y \right.$$

$$\left. + \|h^{(m-1)}\|_Y + \sum_{j=1}^{m-1} (1+d(j)) \cdot \|h^{(m-1-j)}\|_Y \right]$$

Novamente, segue do teorema 0.5.1 que:

$$d(i) \cdot d(j) \leq C \cdot (1+d(i+j-1)) \quad 1 \leq i, j \leq i+j-1 \leq m$$

donde:

$$(1+d(2)) \cdot \|z_{m-1}\|_Y \leq K \left[\sum_{j=2}^{m-1} (1+d(1+j)) \cdot \|z_{m-j}\|_Y + \right. \\ \left. + (1+d(2)) \|h^{(m-1)}\|_Y + (1+d(3)) \|h^{(m-2)}\|_Y + \dots + (1+d(m)) \|h\|_Y \right]$$

Logo:

$$\|z_m\|_Y \leq M_1 \left[\sum_{j=2}^{m-1} (1+d(j+1)) \|z_{m-j}\| + \|h^{(m)}\|_Y + \right. \\ \left. + (1+d(1)+d(2)) \|h^{(m-1)}\|_Y + (1+d(2)) \|h^{(m-2)}\|_Y + \right. \\ \left. + \dots + (1+d(m)) \|h\|_Y \right]$$

Prosseguindo chegaremos a:

$$\|z_m\|_Y \leq K \left[\|h^{(m)}\|_Y + (1+d(1)+d(2)) \|h^{(m-1)}\|_Y + \right. \\ \left. + (1+d(2)+d(3)) \|h^{(m-2)}\|_Y + \dots + (1+d(m-1)+d(m)) \|h^{(1)}\|_Y + \right. \\ \left. + (1+d(m)) \|h\|_Y \right]$$

ou ainda:

$$\|z_m\|_Y \leq K \left[\|h^{(m)}\|_Y + \sum_{j=1}^{m-1} [1+d(1+j)] \|h^{(m-j)}\|_Y + \right. \\ \left. + [(1+d(m))] \|h\|_Y \right]$$

□

O TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS DE NASH

Sejam $(m, \alpha, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^4$; $m \geq \max\{r + \alpha, 2r\}$,
 $p \geq 10r$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 540$, $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 2$, $F: \Omega \subset H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow$
 $\rightarrow H_{2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ onde $\Omega = \{u \in H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_m < 1\}$ e supo-
 nhamos que as seguintes hipóteses estejam verificadas:

$$(H1) \quad F \in C^2(\Omega, H_{2\pi}^{m-\alpha}), \quad \|F'(u)h\|_{m-\alpha} \leq M \cdot \|h\|_m \quad e$$

$$\|F''(u) \cdot h \cdot k\|_{m-\alpha} \leq M \cdot \|h\|_m \cdot \|k\|_m; \quad \text{para todo}$$

$$(u, h, k) \text{ pertencente a } \Omega \times H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n).$$

(H2) Existe $L: \Omega \subset H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(H_{2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^n), H_{2\pi}^{m-r}(\mathbb{R}^n))$ sa-
 tisfazendo às seguintes condições:

$$(H2)i \quad \|L(u)h\|_{m-r} \leq M \cdot \|h\|_{m-\alpha} \quad \forall (u, h) \in \Omega \times H_{2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

$$(H2)ii \quad F'(u) \cdot L(u) \cdot h = h \quad \text{para todo}$$

$$(u, h) \text{ pertencente a } (\Omega \cap H_{2\pi}^{m+p+r}(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^{m+r-\alpha}(\mathbb{R}^n))$$

$$(H2)iii \quad L(\cdot)F(\cdot): \Omega \cap H_{2\pi}^{m+p+r}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{2\pi}^{m+p}(\mathbb{R}^n) \quad e$$

$$\|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M(1 + \|u\|_{m+p+r})$$

$$(H3) \quad \|F(0)\|_{m-\alpha} \leq M^{-\rho}$$

Nestas condições, existe $u_0 \in \Omega$ tal que $F(u_0) = 0$, além disso existem constantes $K > 0$ e $\eta \geq 0$ tais que $\|u_0\|_m \leq K \cdot \|F(0)\|_{m-\alpha}^\eta$.

Ainda se $F: \Omega_1 \subset H_{2\pi}^{m-r}(R^n) \rightarrow H_{2\pi}^{m-r-\alpha}(R^n)$ onde $\Omega_1 = \{u \in H_{2\pi}^{m-r} / \|u\|_{m-r} < 1\}$ é uma função de classe C^2 , $\|F''(u) \cdot h \cdot k\|_{m-r-\alpha} \leq M \cdot \|h\|_{m-r} \|k\|_{m-r}$; se $L: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H_{2\pi}^{m-r-\alpha}, H_{2\pi}^{m-2r})$ e $\|L(u)h\|_{m-2r} \leq M \cdot \|h\|_{m-r-\alpha}$,

$\forall (u, h) \in \Omega \times H_{2\pi}^{m-r-\alpha}(R^n)$, se $\rho \gg 1$ e se $L(u) \cdot F'(u) \cdot h = h$ $\forall h \in H_{2\pi}^m(R^n)$ então u_0 é a única solução de $F(u) = 0$ em uma conveniente vizinhança de zero.

Demonstração (Veja apêndice)

APLICAÇÃO 1

Essa aplicação consiste em mostrarmos que a equação que P.H. Rabinowitz [11] estudou, pode ser resolvida via o Teorema de Nash.

Consideremos a equação:

$$(I) \quad u_{tt} - \Delta u + \theta u_t + u + \varepsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u) = 0$$

onde:

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \times (-\delta, \delta)^\mu \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta > 1; \quad \mu = 1 + (1+n)^2 \quad n \in \mathbb{N}^*;$$

f é τ -periódica na variável t e 2π -periódica em $x_1, x_2, \dots, x_n$ (separadamente); $\theta > 0$.

Resultado Principal

Teorema 1.1

Suponhamos que f seja suficientemente suave. Então existe $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$; tal que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$; existe uma única solução clássica de I, $u = u(t, x, \varepsilon)$ em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$; para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

Como já dissemos, nós vamos demonstrar esse teorema via o Teorema de Nash; portanto vários lemas serão enunciados e demonstrados, com o objetivo de verificarmos as hipóteses do Teorema de Nash.

Consideremos a função:

$$F: \Omega \subset H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})$$

definida por:

$$F(u) = u_{tt} - \Delta u + \theta \cdot u_t + u + \varepsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u)$$

onde:

$$1) \quad \Omega = \{ u \in H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) / \|u\|_m < 1 \}; \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

$$2) \quad m = j + k \quad \text{com} \quad k = \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$3) \quad \alpha = k + 2$$

$$4) \quad j \geq k + 3$$

Lema 1.1 Se f é de classe $C^{m-\alpha}$ então F está bem definida.

Prova

Imediata; basta notar que $H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1}) \hookrightarrow C_{\tau, 2\pi}^j(R^{n+1})$ (teorema 0.6.1) e assim $F(u) \in C_{\tau, 2\pi}^{j-2}(R^{n+1}) \subset H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$

Lema 1.2 Se f é de classe C^j então

$F \in C^2(\Omega, H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}))$ e a hipótese (H1) do teorema de Nash está verificada.

Prova: Segue do teorema de Imersão de Sobolev (teorema 0.6.1) e do teorema (0.8.1) sobre condições suficientes para que uma função diferenciável segundo Gateaux seja diferenciável segundo Frechet.

Observação 1.1

$$\begin{aligned} F'(u) \cdot v &= v_{tt} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\delta_j^i - \frac{\epsilon}{2} (\frac{\partial f}{\partial u_{x_i x_j}} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j x_i}})] v_{x_i x_j} + \\ &\epsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_j}} \cdot v_{x_j} + (1 + \epsilon \frac{\partial f}{\partial u}) \cdot v + (0 + \epsilon \frac{\partial f}{\partial u_t}) \cdot v_t + \\ &\epsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{tx_j}} \cdot v_{tx_j} \end{aligned}$$

Observação 1.2

$\alpha = k + 2$; pois se $u \in H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$ então

$$F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m-2}(R^{n+1}) = H_{\tau, 2\pi}^{j-2+k}(R^{n+1}) \hookrightarrow C_{\tau, 2\pi}^{j-2}(R^{n+1}).$$

Mais tarde veremos que $r = \alpha - 1$; e como precisamos de $m \geq \max\{\alpha+r, 2r\}$ teremos $j \geq k + 3$.

Passemos, agora; à verificação da hipótese (H2) ((H2)i, (H2)ii, (H2)iii) do teorema de Nash.

Nosso problema é descobrir uma função

$L: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}), H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1}))$ satisfazendo a hipótese (H2); bem como que r escolher.

O procedimento será o seguinte:

Sejam $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$, $u \in \Omega$ e consideremos a equação:

$$F'(u) \cdot v = h.$$

Gostaríamos que essa equação (em v) tivesse solução única em algum sentido o qual nos permitisse que definindo-se $L(u) \cdot h = v$ a hipótese (H2) se verificasse.

Transformemos, formalmente; $F'(u)v = h$ no sistema de evolução:

$$\begin{aligned} v_t &= w \\ w_t &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \epsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\epsilon c)v \\ &\quad - (\theta + \epsilon d)w - \epsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + h \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_{ij}^1 - \epsilon \left(\frac{\partial f}{\partial u_{x_i x_j}} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j x_i}} \right) & b_i &= \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} & c &= \frac{\partial f}{\partial u} \\ d &= \frac{\partial f}{\partial u_t} & e_i &= \frac{\partial f}{\partial u_{tx_i}} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{matrix} 0 \\ Z \end{matrix} = A(t, \epsilon) \cdot Z + g \quad \text{onde} \quad Z = (v, w) \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Vamos, agora, mostrar que o sistema acima, formalmente considerado, se insere em um contexto de sistema evolutivo bem posto.

Lema 1.3

O problema de Cauchy:

$$\begin{matrix} 0 \\ Z \end{matrix} = A(t, \epsilon) Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

$$\text{onde} \quad X = H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n) \times L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \quad D(A) \equiv H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)$$

é um problema de Cauchy bem posto, se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Prova

Seguirá das observações e lemas abaixo:

Observação 1.3 $\overline{D(A)} = X$

Observação 1.4 Todos os coeficientes de $A(t, \varepsilon)$ estão em $C^1_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}, R)$ para todo $u \in \Omega$.

Lema 1.4

$\lambda I - A(t, \varepsilon)$ é sobrejetora para todo $\lambda \in [0, \infty)$ e $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$; para algum $\varepsilon_0 > 0$.

Prova

$$A(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{onde}$$

$$Q_1 v = Q_1(t, x, \varepsilon) v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$- (1 + \varepsilon c) v$$

$$Q_2 w = Q_2(t, x, \varepsilon) w = -(\theta + \varepsilon d) w - \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$\text{Seja } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X;$$

$$(\lambda I - A(t, \varepsilon)) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda v - f = w \quad e$$

$$\lambda w - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + (1 + \varepsilon c) v +$$

$$(\theta + \varepsilon d) w + \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial w}{\partial x_i} = g \quad \text{donde:}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n (b_i + \lambda e_i) \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1 + \varepsilon c + \lambda^2 + \lambda(\theta + d)) v$$

$$= -[\lambda + \theta + \varepsilon d] f - \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - g$$

Indicando-se por Sv o primeiro membro dessa última igualdade e observando-se que se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente, S é uniformemente fortemente elítico então usando a teoria dos operadores compactos S é so brejetivo se S for injetivo.

$$\langle -Sv, v \rangle = \int_R - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v + \varepsilon \sum_{i=1}^n (b_i + \lambda e_i) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v$$

$$+ [1 + \varepsilon c + \lambda^2 + \lambda(\theta + \varepsilon d)] v^2 dx =$$

$$\int_R \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i + \lambda e_i \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v$$

$$+ [1 + \varepsilon c + \lambda^2 + \lambda(\theta + \varepsilon d)] v^2 dx \geq K \cdot \|v\|_{H_{2\pi}^1(R^n)}^2 \text{ se } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ (con-}$$

veniente); $0 < k = \text{constante}$ $R = [0, 2\pi]^n$.

Logo S é injetora e portanto sobrejetora; assim terminamos o lema 1.4.

Observação 1.5 Afirmamos que existe um novo produto interno sobre X , dando origem a uma norma equivalente $\|\cdot\|_X$ à original tal que:

$$\langle\langle A(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \rangle\rangle \leq M_1 \left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_X^2$$

para algum $M_1 > 0$ e $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Com efeito se $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$, $\begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} \in X$ defina:

$$\langle\langle \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}; \frac{\partial z}{\partial x_j} \rangle + C \langle v, z \rangle + \langle w, \xi \rangle$$

onde:

$$1) \quad \langle v, z \rangle = \int_R v(x) z(x) dx$$

2) C é uma constante tal que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}; \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle + C \langle v, v \rangle \geq k_1 \|v\|_{H_{2\pi}^1(R^n)}^2$$

(Desigualdade de Garding Teorema 0.3.1)

onde $C \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 > 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle\langle A(t, \varepsilon) \left(\frac{v}{w}\right); \left(\frac{v}{w}\right) \rangle\rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}; \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}; \frac{\partial w}{\partial x_i} \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}; w \rangle \\ &+ C \langle w, v \rangle - \varepsilon \sum_{i=1}^n \langle b_i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}; w \rangle - \langle (1+\varepsilon c) v, w \rangle + \langle Q_2 w, w \rangle \end{aligned}$$

Mas

$$\langle Q_2 w, w \rangle = - \int_R (0 + \varepsilon d - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_i}{\partial x_i}) w^2 dx$$

assim:

$$\begin{aligned} \langle\langle A(t, \varepsilon) \left(\frac{v}{w}\right); \left(\frac{v}{w}\right) \rangle\rangle &= C \cdot \langle w, v \rangle - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}; w \rangle \\ &- \varepsilon \sum_{i=1}^n \langle b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}; w \rangle - \langle (1+\varepsilon c) v; w \rangle - \\ &\langle (0 + \varepsilon d + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_i}{\partial x_i}) w, w \rangle \end{aligned}$$

donde

$$\langle\langle A(t, \varepsilon) \left(\frac{v}{w}\right); \left(\frac{v}{w}\right) \rangle\rangle \leq M \cdot \left\| \left(\frac{v}{w}\right) \right\|_X^2 \leq M_1 \cdot \left| \left(\frac{v}{w}\right) \right|_X^2$$

Indicando-se por $B(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) - (M_1+1)I$

temos:

$$1) \overline{D(B)} = X$$

$$2) \quad \text{Im}(\lambda I - B(t, \varepsilon)) = X, \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad B(t, \varepsilon) \text{ é dissipativo}$$

Portanto pelo teorema de Lumer Phillips podemos afirmar que:

$$4) \quad B(t, \varepsilon) \text{ é o gerador infinitesimal de um Co-semigrupo de contrações para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como:

$$5) \quad \langle\langle B(t, \varepsilon) \left(\frac{V}{W}\right); \left(\frac{V}{W}\right) \rangle\rangle \leq - \left| \left(\frac{V}{W}\right) \right|_X^2$$

$$\forall \left(\frac{V}{W}\right) \in D(B) \equiv D(A); \quad t \in \mathbb{R}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \quad \text{temos:}$$

$$6) \quad |R(\lambda I, B(t, \varepsilon))| \leq \frac{1}{\lambda+1} \quad \forall \lambda \geq 0 \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Pelo teorema de Kato (0.1.3) podemos afirmar que o Problema de Cauchy

$$\frac{0}{Z} = B(t, \varepsilon) Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(B)$$

é um problema de Cauchy bem posto e assim pelo teorema 0.1.2 segue o lema 1.3.

□

Indiquemos por $U(t,s,\varepsilon)$; $s \leq t$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$
o operador de evolução associado à equação:

$$\dot{Z} = A(t,\varepsilon)Z$$

Recordemos que nossa intenção é determinar
mos uma solução $v \in H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ da equação $F'(u)v = h$,
em algum sentido, que seja τ -periódica em t .

Portanto:

Dado $k \in L^1_{\tau}(\mathbb{R}, X)$, será que existe um $Z_0 \in X$
tal que a solução mild:

$$Z(t) = U(t,0,\varepsilon)Z_0 + \int_0^t U(t,s,\varepsilon)k(s)ds$$

seja τ -periódica?

A resposta é afirmativa, uma vez que
 $U(t,s,\varepsilon)$ admite decaimento exponencial.

Lema 1.5

O sistema $\dot{Z} = A(t,\varepsilon)Z$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conve-
niente, admite um funcional de Liapunov V satisfazendo
 $\dot{V} + \beta V \leq 0$ para algum $\beta > 0$ (independente de ε) e pa-
ra toda solução do sistema considerado.

Prova

Consideremos o funcional:

$$V: X \longrightarrow R \text{ definido por:}$$

$$V(v, w) = \int_R \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 + \gamma v w dx$$

É imediato que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq M_1 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \text{ se } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ (con-}$$

veniente)

(observar a forma de a_{ij})

$$v^2 + 2\gamma vw + w^2 \geq (1-\gamma)(v^2+w^2) \geq 0 \quad (0 < \gamma < 1)$$

$$\dot{V} + \beta V = \int_R (w + \gamma \cdot v) w_t + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + v \cdot w + \gamma w^2 +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\beta}{2} a_{ij} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\beta}{2} \cdot v^2 + \frac{\beta}{2} w^2 + \beta \gamma v w dx =$$

$$\int_R - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \cdot w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} -$$

$$- \varepsilon \sum_{j=1}^n b_j \cdot w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - (1+\varepsilon c) v w - (\theta + \varepsilon d) w^2 - \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned}
 & - \gamma \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \\
 & \epsilon \gamma \sum_{j=1}^n b_j \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \gamma(1+\epsilon c) \cdot v^2 - \gamma(\theta+\epsilon d)vw - \\
 & \gamma \epsilon \sum_{j=1}^n e_j \cdot v \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + vw + \gamma w^2 + \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\beta}{2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\beta}{2} \cdot v^2 + \frac{\beta}{2} \cdot w^2 + \beta \gamma v w dx \\
 & = \int_R \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\gamma a_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{\beta}{2} a_{ij} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \\
 & - \left[\gamma(1+\epsilon c) - \frac{\beta}{2} \right] v^2 - \left[(\theta+\epsilon d) - \gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_i}{\partial x_i} \right] w^2 \\
 & - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) + \epsilon (b_j + \gamma e_j) \right] w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \\
 & \left[\gamma(\theta-\beta+\epsilon d) - \epsilon(c + \gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_i}{\partial x_i}) \right] vw \\
 & - \sum_{j=1}^n \left[\gamma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) + \epsilon \gamma b_j \right] v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} dx
 \end{aligned}$$

Portanto basta tomar $\epsilon_0 \ll 1$, $\beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \frac{\beta}{2} < \gamma < \min\{\frac{\theta}{2}, \frac{4\theta}{\theta^2+4}\}$ para que o lema 15 seja verdadeiro.

□

E assim podemos afirmar que;

$$\| U(t,s,\epsilon) \|_{L(X,X)} \leq M e^{-\beta(t-s)}, \quad M > 0 \quad \beta > 0 \quad (\text{genéricos})$$

$$|\epsilon| \leq \epsilon_0.$$

Os lemas 1.3; 1.5 e o teorema (I.1.2) garantem que dado $g \in L^1_\tau(R,X)$; existe uma única solução mild τ -periódica e contínua da equação:

$$\dot{Z} = A(t,\epsilon)Z + g$$

Agora, se $h \in L^2_{\tau,2\pi}(R^{n+1})$ então $g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in L^2_\tau(R,X)$ (Teorema de Fubini), e assim a única solução mild τ -periódica:

$$Z(t) = U(t,s,\epsilon)Z(s) + \int_s^t U(t,\sigma,\epsilon)g(\sigma)d\sigma$$

pertence a $C^0_\tau(R,X)$. Além disso:

$$\| Z \|_{L^2_\tau(R,X)} \leq M \cdot \| h \|_{L^2_{\tau,2\pi}(R^{n+1})}$$

ainda:

$$\begin{aligned} \| Z \|_{L^2_\tau(R,X)} &= \left(\int_0^\tau \| Z(t) \|^2_X dt \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int_0^\tau \left(\| v(t) \|^2_{H^1_2(R^n)} + \| w(t) \|^2_{L^2_2(R^n)} \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^\tau \int_R \left(v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \|v\|_{H^1_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})}$$

Observação 1.6

$Z = (v, w) \in C^0_{\tau}(R, X)$ logo $v \in C^0_{\tau}(R, H^1_{2\pi}(R^n))$ e

$w \in C^0_{\tau}(R, L^2_{2\pi}(R^n))$ donde $v \in C^1_{\tau}(R, L^2_{2\pi}(R^n))$ e

$$\overset{0}{v} = w$$

$$v \in C^0_{\tau}(R, L^2_{2\pi}(R^n)) \Rightarrow v \in L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$$

Estamos, portanto, em condições de definir a função L .

Definição 1.1

Dado $u \in \Omega$, seja $L(u): L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}) \rightarrow H^1_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ a aplicação linear e contínua definida por:

$$L(u).h = v$$

onde v é a primeira componente da solução mild τ -periódica da equação:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g \quad \text{com } g = (0, h)$$

Nosso próximo passo é aumentarmos a classe de regularidade de v em função da classe de h e de u .

Lema 1.6

Para todo $u \in \Omega$ e $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente temos: $\|A(0, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M$; para algum $M > 0$ independente de u e ε .

Prova:

Sejam $(h, k) \in X$ e $(v, w) \in X$ tais que:

$$A(0, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \Leftrightarrow h = K \text{ e}$$

$$k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1 + \varepsilon c) H -$$

$$(\theta + \varepsilon d) h - \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

Por causa da forma de a_{ii} se $|\varepsilon| \ll 1$ podemos afirmar que (teorema 0.4.1):

$$1) \quad H \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$$

2) $\exists M > 0$ tal que:

$$\|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq M \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_X$$

Agora:

$$A(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow v = K \quad e$$

$$w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)H -$$

$$(\theta + \varepsilon d)h - \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \|_X^2 = \|v\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)}^2 + \|w\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|h\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)}^2 + \|w\|_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$\leq M^2 \cdot \|(h, k)\|_X^2, \quad M \text{ genérico.}$$

donde:

$$\|A(0, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M.$$

□

Lema 1.7

Se $u \in \Omega$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente, $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que $A(t, \varepsilon)$ seja ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável então existe um $M > 0$ independente de ε ; mas eventualmente dependente de u , tal que:

$$\|A^{(\ell)}(t, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq \varepsilon M$$

Prova

Sejam $(h, k) \in X$ e $(v, w) \in X$ tais que:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$$

Análogo ao que fizemos no lema anterior; e
xiste $\varepsilon_0 \ll 1$ e $M > 0$ tal que:

$$1) H \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n); \text{ para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

$$2) \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq M \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_X; \quad \forall u \in \Omega, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

(Aqui ainda M não depende de u)

Agora;

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \overline{\ell \geq 1} \quad v = 0 \quad e$$

$$w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell b_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^\ell c}{\partial t^\ell} \cdot H \\ - \varepsilon \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} \cdot K - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell e_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_i}$$

Portanto

$$\|w\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot M \cdot (\|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \|K\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)}) \leq \\ \leq \varepsilon M \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_X$$

M é genérico, mas agora ele pode depender
eventualmente de u .

Lema 1.8

O problema de Cauchy

$$\dot{Z} = [A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)]Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

é um problema de Cauchy bem posto e o operador de evolução associado admite decaimento exponencial.

Prova

A primeira afirmação decorre dos lemas 1.3 - 1.6 e teorema 0.1.2.

A segunda afirmação decorre do lema 1.7- no caso $\ell = 1$ e teorema I.1.1.

Lema 1.9

Sejam $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k+2}(R^{n+1})$ $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0$ conveniente e $\ell \in N^*$.

Então existe um $M > 0$ independente de u , ε e ℓ tal que:

$$d(\ell) \leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

onde:

$$1) \quad d(\ell) = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ 0 \leq s \leq \ell}} \|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon)\|_{L(X, X)}$$

2) k é o número natural definido no início dessa aplicação.

Prova

$$\text{Sejam } (h, q) \in X \text{ e } (v, w) \in X \text{ tais que} \\ A^{(s)}(t, \varepsilon) \cdot A^{-1}(0, \varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \implies$$

$$h = K \text{ e}$$

$$q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)H - (\theta+\varepsilon d)h -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

Como vimos nos dois últimos lemas existem $\varepsilon_0 > 0$ $M > 0$ tais que:

$$1) \quad H \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \quad \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq M \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \right\|_X; \quad \forall u \in \Omega, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0.$$

Caso $s = 0$ (semelhante ao lema 1.6).

Suponhamos $1 \leq s \leq \ell$.

$$A^{(s)}(0, \epsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \implies v = 0 \quad e$$

$$\begin{aligned} w = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^s a_{ij}}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s b_i}{\partial t^s} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial^s c}{\partial t^s} \cdot H \\ & - \epsilon \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \cdot h - \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s e_i}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \end{aligned}$$

portanto,

$$\| A^{(s)}(t, \epsilon) A^{-1}(0, \epsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \|_X^2 = \| w \|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq$$

$$\begin{aligned} M \int_{\mathbb{R}} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^s a_{ij}}{\partial t^s} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^s b_i}{\partial t^s} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial^s c}{\partial t^s} \right)^2 \cdot H^2 + \left(\frac{\partial^s d}{\partial t^s} \right)^2 \cdot h^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^s e_i}{\partial t^s} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^s a_{ij}}{\partial t^s} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(\mathbb{R}^{n+1})} & \leq \| a_{ij} \|_{C_{\tau, 2\pi}^s(\mathbb{R}^{n+1})} \leq \| a_{ij} \|_{C_{\tau, 2\pi}^\ell(\mathbb{R}^{n+1})} \\ & \leq \| a_{ij} \|_{H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq M \cdot (1 + \| u \|_{\ell+k+2}) \end{aligned}$$

* **

* usamos aqui o teorema de imersão de Sobolev (0.6.1)

** usamos aqui o teorema de composição de Moser (0.9.1)

de modo análogo para os outros coeficientes e assim pode-

mos afirmar que:

$$d(\ell) \leq M. (1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \quad M \text{ genérico}$$

M depende de f.

Com o objetivo de aumentar a diferenciabilidade em x a igualdade seguinte será útil no próximo lema.

$$F'(u)v = h \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)v - (\theta+\varepsilon d)v_t \\ &- \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x_i} + h \end{aligned}$$

Indicando-se por $v_k = \frac{\partial^k v}{\partial t^k}$ teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n [b_i + k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial t}] \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \\ (1+\varepsilon c + \varepsilon k \frac{\partial d}{\partial t}) v_k = - \varepsilon \sum_{\ell=1}^{k-1} \{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{(k-\ell)}}{\partial x_i \partial x_j} - \\ \sum_{i=1}^n [\binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell b_i}{\partial t^\ell} + \binom{k}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} e_i}{\partial t^{\ell+1}}] \frac{\partial v_{(k-\ell)}}{\partial x_i} - \end{aligned}$$

$$[\binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell c}{\partial t^\ell} + \binom{k}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} d}{\partial t^{\ell+1}}] v_{k-\ell} \} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^k b_i}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial^k c}{\partial t^k} \cdot v + v_{k+2} + \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial v_{(k+1)}}{\partial x_i} \\ & + (\theta + \varepsilon d) v_{k+1} - \frac{\partial^k h}{\partial t^k} \end{aligned}$$

Lema 1.10

Se $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$; f suficientemente suave, $m_1 \in N$, $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\xi}(R^{n+1})$; $\xi \geq \max\{m, m_1 + \alpha\}$; $v = L(u)h$ então existe um $0 < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m_1) \ll 1$ tal que:

1) $v \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1+1}(R^{n+1})$

2) $M > 0$ dependente de f e ε_0 tal que:

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^{m_1+1}(R^{n+1})} & \leq M (\|h^{(m_1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4})). \\ \|h^{(m_1-1)}\|_Y & + (1 + \|u\|_{k+5}) \cdot \|h^{(m_1-2)}\|_Y + \dots + \\ & + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \cdot \|h^{(1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y \end{aligned}$$

onde $Y = L_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1})$ e $\|h^{(j)}\|_Y = \sup_{|\alpha|=j} \|D^\alpha h\|_Y$

$\alpha \in N^{n+1}$

$0 < M$ -genérico.

Prova (provemos por indução sobre m_1).

Para $m_1 = 0$ já verificamos.

Suponhamos que o lema seja verdadeiro para todo $0 \leq j \leq m_1 - 1$ com $m_1 \geq 1$.

Vamos mostrar que o mesmo é verdadeiro para m_1 .

Seja $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$; logo pela hipótese da indução segue-se que:

$$1) \quad v \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1}) \quad \text{para} \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m_1-1)$$

$$2) \quad \|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})} \leq M(\|h^{(m_1-1)}\|_Y + \dots + \\ + (1 + \|u\|_{m_1+k+1}) \|h\|_Y)$$

Agora, se $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$ então $Z \in C_{\tau}^{m_1}(R, X)$ (teorema 1.4 cap.I) onde Z é solução de:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g \quad g = (0, h) \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m_1)$$

além disso:

$$\left(\int_{R_1} \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1} \partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1+1}} \right)^2 dt dx \right)^{1/2} \leq$$

$$M. [\|h^{(m_1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4}) \|h^{(m_1-1)}\|_Y + \dots$$

$$(1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h^{(1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y]$$

$$R_1 = [0, \tau] \times R.$$

Porém

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v_{m_1-1}}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n [b_i + (m_1-1) \frac{\partial e_i}{\partial t}] \frac{\partial v_{(m_1-1)}}{\partial x_i} - \\ & - (1 + \varepsilon c + \varepsilon (m_1-1) \frac{\partial d}{\partial t}) \cdot v_{(m_1-1)} = \\ & = -\varepsilon \sum_{\ell=1}^{m_1-2} \{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \binom{m_1-1}{\ell} \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{(m_1-\ell-1)}}{\partial x_i \partial x_j} - \\ & \sum_{i=1}^n [\binom{m_1-1}{\ell} \frac{\partial^\ell b_i}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-1}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} e_i}{\partial t^{\ell+1}}] \frac{\partial v_{(m_1-\ell-1)}}{\partial x_i} - [\binom{m_1-1}{\ell} \frac{\partial^\ell c}{\partial t^\ell} \\ & + \binom{m_1-1}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} d}{\partial t^{\ell+1}}] \cdot v_{(m_1-\ell-1)} \} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m_1-1} a_{ij}}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{m_1-1} b_i}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial^{m_1-1} c}{\partial t^{m_1-1}} \cdot v + \frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1+1}} + \\ & + \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1+1} \partial x_i} + (0 + \varepsilon d) \frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} - \frac{\partial^{m_1-1} h}{\partial t^{m_1-1}} = g \end{aligned}$$

usando-se a hipótese da indução; a desigualdade acima; o

teorema de regularização fraca (teorema 0.4.1) e a desigualdade de Gagliardo Nirenberg (0.5.1) podemos afirmar que:

$$1) \quad g \in L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}) = Y$$

$$2) \quad \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \in H^2_{2\pi}(R^n) \quad \text{além disso}$$

$$\left(\int_{R_1} \left(\frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1-1} \partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1-1} \partial x_i \partial x_j} \right)^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$M \cdot (\|h^{(m_1)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y).$$

Pois

$$\left\| \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq \|a_{ij}\|_{C^\ell_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq \|a_{ij}\|_{H^{\ell+k}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})}$$

$$M(1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

(Teoremas 0.6.1 - 0.9.1)

$$\left\| \frac{\partial^{m_1-\ell+1} v}{\partial t^{m_1-\ell-1} \partial x_i \partial x_j} \right\| \leq \|v\|_{H^{m_1-\ell+1}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq M(\|h^{(m_1-\ell)}\|_Y +$$

$$(1 + \|u\|_{k+4}) \cdot \|h^{(m_1-\ell-1)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k-\ell+2}) \|h^{(1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{m_1+k-\ell+2}) \|h\|_Y)$$

portanto,

$$(1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \cdot \left\| \frac{\partial^{m_1-\ell+1} v}{\partial t^{m_1-\ell-1} \partial x_i \partial x_j} \right\|_Y \leq$$

$$M[(1 + \|u\|_{\ell+k+3}) \|h^{(m_1-\ell)}\|_Y + (1 +$$

$$(1 + \|u\|_{\ell+k+4}) \|h^{(m_1-\ell-1)}\|_Y + \dots +$$

$$(1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h^{(1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y]$$

A mesma análise vale para todos os outros termos.

Prosseguindo; precisamos estimar na norma de Y todos os termos da forma:

$$D_t^{m_1-2} D_x^\gamma v \quad \gamma \in N^n \quad |\gamma| = 3$$

Isto se fará da seguinte forma. Considere
mos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v_{(m_1-2)}}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n [b_i + (m_1-2) \frac{\partial e_i}{\partial t}] \frac{\partial v_{(m_1-2)}}{\partial x_i} - \\
 & [(1+\varepsilon c + \varepsilon (m_1-2) \frac{\partial d}{\partial t}) v_{(m_1-2)} = \\
 & = - \varepsilon \sum_{\ell=1}^{m_1-3} \{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \binom{m_1-2}{\ell} \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{(m_1-\ell-2)}}{\partial x_i \partial x_j} - \\
 & - \sum_{i=1}^n [\binom{m_1-2}{\ell} \frac{\partial^\ell b_i}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-2}{\ell+2} \frac{\partial^{\ell+1} e_i}{\partial t^{\ell+1}}] \frac{\partial v_{(m_1-\ell-2)}}{\partial x_i} \\
 & - [\binom{m_1-2}{\ell} \frac{\partial^\ell c}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-2}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} d}{\partial t^{\ell+1}}] v_{(m_1-\ell-2)} - \\
 & - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m_1-2} a_{ij}}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{m_1-2} b_i}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \\
 & + \varepsilon \frac{\partial^{m_1-2} c}{\partial t^{m_1-2}} \cdot v + \frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} + \varepsilon \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1-1} \partial x_i} \\
 & + (\Theta + \varepsilon d) \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} - \frac{\partial^{m_1-2} h}{\partial t^{m_1-2}}
 \end{aligned}$$

Segue da hipótese da indução que o segundo membro dessa igualdade está em $H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)$. Então, novamente, pelos teorema 0.4.1 - 0.5.1 e a própria hipótese da indução temos:

$$\|\partial_t^{m_1-2} \partial_x^\gamma v\|_Y \leq M. (\|h^{(m_1)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y)$$

A mesma estimativa vale para $D_t^{m_1-\delta} D_x^\gamma v$ onde $3 \leq \delta \leq m_1$ $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tais que $|\gamma| - \delta = 1$

Donde concluímos a demonstração do lema 1.10.

Nosso próximo lema permite-nos verificar a hipótese H2[(H2)i] do Teorema de Nash.

Lema 1.11

Se $u \in \Omega$ então $L(u)/H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})^\varepsilon \in \mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}); H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1}))$ onde $r = \alpha - 1$. Além disso:

$$\|L(u)h\|_{m-r} \leq M. \|h\|_{m-\alpha} \text{ para todo } u \in \Omega$$

e $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$; para algum $M > 0$ e para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Prova

Basta aplicar o lema 1.10 para o caso $m_1 = m - \alpha$ e notar que $m_1 + k + 2 = m$.

Lema 1.12

O operador $L(u): H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1})$ é injetivo; para todo $u \in \Omega$.

Prova

Sejam $(h_1, h_2) \in (H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1}))^2$ tal que $L(u)h_1 = v = L(u)h_2$. Logo v é a primeira componente comum de Z_1 e Z_2 onde

$$\begin{matrix} \overset{0}{Z}_1 = (A(t, \varepsilon)Z_1 + g_1 & g_1 = (0, h_1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \overset{0}{Z}_2 = A(t, \varepsilon)Z_2 + g_2 & g_2 = (0, h_2) \end{matrix}$$

Segue do teorema I.1.3 que Z_i é solução forte, logo $Z_i = (v, w_i)$ com $w_i = \overset{0}{v}$, donde $w_1 = w_2$ e assim $Z_1 = Z_2$ consequentemente $h_1 = h_2$.

□

Verifiquemos, agora, a hipótese (H2ii) Teorema de Nash.

Lema 1.13

Se $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ então
 $F'(u)L(u)h = h$ para todo $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m+r-\alpha}(R^{n+1})$.

Prova

Se $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m+r-\alpha}(R^{n+1})$ então
 $g = (0, h) \in H_{\tau}^{m-1}(R, X)$.

A hipótese e o teorema 1.4 capítulo I garantem que $Z \in C_{\tau}^{m-1}(R, X)$ onde Z é a solução mild τ -periódica de $\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g$.

Seja $v = L(u)h$, logo (Lema 1.10)
 $v \in H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$.

Seja $h_1 = F'(u)v$, então $Z = (v, v_t)$ é solução de $\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g_1$ onde $g_1 = (0, h_1)$, conseqüentemente solução mild e portanto $v = L(u)h_1$ donde pelo lema 1.12 segue-se que $h_1 = h$ e consequentemente $F'(u)L(u)h = h_1 = h$.

□

Verifiquemos agora a hipótese (H2iii) teorema de Nash

Lema 1.14

$$L(.)F(.): \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1})$$

além disso:

$$\|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M \cdot (1 + \|u\|_{m+p+r})$$

para todo $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ onde $M > 0$

Prova

$u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$, logo $F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p-1}(R^{n+1})$;

$u \in C_{\tau, 2\pi}^{m+p+1}(R^{n+1})$ e $A(t, \varepsilon)$ é $m+p-1$ vezes fortemente continuamente diferenciável. Segue-se do lema 1.10 que se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m+p-1)$ então:

$$1) L(u)F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1}) \text{ e}$$

$$2) \|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M. [\|(F(u))^{(m+p-1)}\|_Y + (1+\|u\|_{k+4})\| \cdot$$

$$\|(F(u))^{(m+p-2)}\|_Y + \dots + (1+\|u\|_{m+p+k+1})\|F(u)\|^{(1)}_Y +$$

$$(1 + \|u\|_{m+p+k+1})\|F(u)\|_Y]$$

Porém:

$$\|(F(u))^{(i)}\|_Y \leq \|F(u)\|_{H_{\tau, 2\pi}^i(R^{n+1})} \leq M. (1+\|u\|_{i+2})$$

(teorema 0.9.1)

donde:

$$\|L(u)F(u)\|_Y \leq M. [(1+\|u\|_{m+p+1}) + (1+\|u\|_{k+4}) \cdot$$

$$(1 + \|u\|_{m+p}) + (1+\|u\|_{k+5})(1+\|u\|_{m+p-1}) + \dots +$$

$$(1 + \|u\|_{m+p+k+1})(1 + \|u\|_3) + (1 + \|u\|_{m+p+1}) \cdot$$

$$(1 + \|u\|_2) \leq M. (1 + \|u\|_{m+p+r})$$

Esta última desigualdade é consequência da desigualdade de Gagliardo Nirenberg, pois para os produtos da forma

$$\|u\|_s \cdot \|u\|_{m+p+k+4-s} \quad \begin{array}{l} m \leq s \leq m+p+k+1 \\ m \leq m-p+k+4-s \leq m+p+k+1 \end{array}$$

temos:

$$\|u\|_s \leq C \cdot \|u\|_{m+p+k+1}^a \cdot \|u\|_m^{1-a} \quad a = \frac{s-m}{p+k+1}$$

$$\|u\|_{m+p+k+4-s} \leq C \|u\|_{m+p+k+1}^b \cdot \|u\|_m^{1-b} \quad b = \frac{p+k+4-s}{p+k+1}$$

Agora:

$$a + b = \frac{p+k+4-m}{p+k+1} \leq 1 \quad \text{pois} \quad m \geq 3$$

donde concluimos o nosso lema.

Finalizando:

A condição (H3) estará satisfeita desde que $|\varepsilon| \ll 1$, portanto as hipóteses (H1) (H2) (H3) do Teorema de Nash estão satisfeitas desde que $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente e portanto para cada ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, existe uma solução $u = u(t, x, \varepsilon)$ da nossa equação inicial.

Finalizando:

A condição (H3) estará satisfeita desde que $|\varepsilon| \ll 1$, portanto as hipóteses (H1) (H2) (H3) do Teorema de Nash estão satisfeitas desde que $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente e portanto para cada ε $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, existe uma solução $u = u(t, x, \varepsilon)$ da nossa equação inicial.

Ainda $F: \Omega_1 = \{u \in H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1}) / \|u\|_{m-r} \leq 1\} \longrightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha}(R^{n+1})$ está bem definida; $F \in C^2(\Omega_1, H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha})$;

$$\|F'(u) \cdot h\|_{m-r-\alpha} \leq M \cdot \|h\|_{m-r} \|k\|_{m-r};$$

$L: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha}, H_{\tau, 2\pi}^{m-2r})$ se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente;

$$\|L(u)h\|_{m-2r} \leq M \cdot \|h\|_{m-r-\alpha}, \quad \text{para todo } h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha} \text{ e}$$

$u \in \Omega$. Além disso $L(u)F'(u)v = v$ para todo

$v \in H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$, $u \in \Omega$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Donde segue a unicidade de $u = u(t, x, \varepsilon)$ em alguma vizinhança conveniente de zero.

A última parte do nosso resultado principal é consequência do fato que $\|u(\varepsilon)\|_m \leq K \cdot \|F(0)\|_{m-\alpha}^\eta = \|\varepsilon f(\dots, 0, 0, \dots)\|_{m-\alpha}^\eta \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (teorema Nash).

APLICAÇÃO 2

Nesta aplicação nós resolvemos via o Teorema de Nash um problema semelhante ao de M. Stedry [13]

Consideremos a equação:

$$(I) \quad u_{tt} - \Delta u + \theta u_t + u + \Delta[(1 + \varepsilon a(t, x, u)) \Delta u] + \\ \varepsilon f(t, x, u, u_t; \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u) = 0$$

onde:

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \times (-\delta, \delta)^\mu \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu = (1+n)^2 + 1, \quad \delta > 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$a: \mathbb{R}^{n+1} \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta > 0$, ambas τ -periódicas em t e 2π -periódicas em $x_1 \dots x_n$ separadamente.

Resultado Principal

Teorema 2.1

Suponhamos f e a suficientemente suaves. Então existe um $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$; tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ existe uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$ de (I) em uma conveniente vizinhança de zero em

$H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

De modo bastante semelhante à demonstração do teorema 1.1 da aplicação anterior, vários lemas serão enunciados e demonstrados com o objetivo de verificarmos às hipóteses do Teorema de Nash.

Notemos que a parte não perturbada ($\varepsilon=0$) envolve derivadas até a ordem quatro enquanto (I) envolve derivadas também até a ordem quatro.

Consideremos a função:

$$F: \Omega \subset H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})$$

definida por:

$$F(u) = u_{tt} - \Delta u + \theta u_t + u + \Delta[(1+\varepsilon a(t, x, u))\Delta u] + \\ \varepsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u)$$

onde:

$$1) \quad \Omega = \{u \in H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) / \|u\|_m < 1\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad m = j + k \quad \text{com} \quad k = \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1$$

$$3) \alpha = k + 4$$

$$4) j \geq k + 7$$

Lema 2.1

Se f é de classe C^{j-4} e a de classe C^j então F está bem definida.

Prova

Imediata, basta notar que

$$H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow C_{\tau, 2\pi}^j(\mathbb{R}^{n+1}) \quad (\text{teorema 0.6.1}) \quad \text{e} \quad \text{assim}$$

$$F(u) \in C_{\tau, 2\pi}^{j-4}(\mathbb{R}^{n+1}) \subset H_{\tau, 2\pi}^{j-4}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Lema 2.2

Se f é de classe C^{j-2} e a é de classe C^j então $F \in C^2(\Omega, H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1}))$ e a hipótese (H1) do Teorema de Nash está verificada.

Prova

Análoga ao lema 1.2 da aplicação 1.

Observação 2.1

$$\begin{aligned}
 F'(u)v &= v_{tt} + \Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\delta_j^i (1-\varepsilon \frac{\partial a}{\partial u} \cdot \Delta u) \\
 &- \frac{\varepsilon}{2} (\frac{\partial f}{\partial u_{x_i x_j}} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j x_i}})] v_{x_i x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n [2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial a}{\partial u} \cdot \Delta u) + \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}] v_{x_i} + \\
 &+ [1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u} + \varepsilon \Delta (\frac{\partial a}{\partial u} \cdot \Delta u)] v + (\Theta + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u_t}) v_t + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{tx_i}} \cdot v_{tx_i}
 \end{aligned}$$

Observação 2.2

$\alpha = k + 4$; pois se $u \in H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ então $F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m-4}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow C_{\tau, 2\pi}^{j-4}(\mathbb{R}^{n+1})$

Mais tarde veremos que $r = \alpha - 1$ e como precisamos que $m \geq \max\{\alpha+r, 2r\}$, seguirá $j \geq k + 7$.

Passaremos, agora, à verificação da hipótese (H2) [(H2)i, (H2)ii, (H2)iii] do teorema de Nash.

Transformando-se $F'(u)v = h$ em um sistema de evolução, obtemos:

$$v_t = w$$

$$w_t = -\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\varepsilon d)v - (\theta+\varepsilon e)w -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} + h$$

ou ainda:

$$\frac{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g \quad \text{onde} \quad Z = (v, w) \quad g = (0, h)$$

Nosso próximo lema mostra que o sistema a cima formalmente considerado, se insere em um contexto de sistema evolutivo bem posto.

Lema 2.3

O problema de Cauchy

$$\frac{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

onde $X = H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \times L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$ e $D(A) = H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$

é um problema de Cauchy bem posto se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ $0 < \varepsilon_0 \ll 1$.

Prova

Seguirá das observações e lemas abaixo:

Observação 2.3

$$\overline{D(A)} = X$$

Observação 2.4

Todos os coeficientes de $A(t, \varepsilon)$ estão em $C^1_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ para todo $u \in \Omega$, $\varepsilon \in R$.

Lema 2.4

$\lambda I - A(t, \varepsilon)$ é sobrejetora para todo $\lambda \in [0, \infty)$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$; para algum ε_0 conveniente.

Prova

$$A(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{onde}$$

$$Q_1 v = -\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\varepsilon d)v$$

$$Q_2 v = -(\theta + \varepsilon e)w - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$\text{Seja } (f, g) \in X; \quad (\lambda I - A) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \implies$$

$$w = \lambda v - f \quad e$$

$$\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n (c_i + \lambda m_i) \frac{\partial v}{\partial x_i} +$$

$$[(1+\varepsilon d) + \lambda(\theta + \varepsilon e) + \lambda^2]v = g + (\lambda + \theta + \varepsilon e)f + \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Indicando-se por Sv o primeiro membro dessa última igualdade, e observando-se que se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente, S é uniformemente fortemente elítico, logo, S injetivo acarreta S sobrejetivo:

$$\langle Sv, v \rangle = \int_R \Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v]v - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \cdot v +$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n (c_i + \lambda m_i) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v + [(1+\varepsilon d) + \lambda(\theta + \varepsilon e) + \lambda^2]v^2 dx =$$

$$\int_R (1+\varepsilon a)(\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} + c_i + \lambda m_i \right] \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v + \\
 & + [(1+\varepsilon d) + \lambda(0+\varepsilon e) + \lambda^2] v^2 dx \geq K (\|\Delta v\|_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^n)}^2 + \|v\|_{H^1_{2\pi}(\mathbb{R}^n)}^2)
 \end{aligned}$$

para algum $K > 0$, logo S é injetora.

□

Observação 1.5

Afirmamos que existe um novo produto interno, $\langle\langle, \rangle\rangle$; sobre X , dando origem a uma norma $|\cdot|_X$, equivalente à original; tal que:

$$\langle\langle A(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \rangle\rangle \leq M_1 \left| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right|_X^2 \quad M_1 > 0$$

Com efeito, se $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$, $\begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} \in X$ defina:

$$\langle\langle \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} \rangle\rangle = \langle (1+\varepsilon a) \Delta v; \Delta z \rangle + C \langle v, z \rangle + \langle w, \xi \rangle$$

onde:

$$1) \langle v, z \rangle = \int_{\mathbb{R}} v(x) z(x) dx$$

2) C é tal que:

$$\langle (1+\varepsilon a)\Delta v, \Delta v \rangle + C\langle v, v \rangle \geq k_1 \|v\|_{H^2_{2\pi}(R^n)}^2 \quad \forall v \in H^2_{2\pi}(R^n)$$

(desigualdade de Garding-Teorema 0.3.1) $C \in R$, $0 < k_1 \in R$

$$\langle A(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} w \\ Q_1 v + Q_2 w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \rangle =$$

$$\langle (1+\varepsilon a)\Delta w, \Delta v \rangle - \langle (1+\varepsilon a)\Delta v, \Delta w \rangle + C\langle w, v \rangle +$$

$$\langle \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\varepsilon d)v, w \rangle +$$

$$+ \langle Q_2 w, w \rangle.$$

Notemos que:

$$\langle Q_2 w, w \rangle = \int_R -(\theta + \varepsilon e) w^2 - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial w}{\partial x_i} w dx$$

portanto,

$$\langle Q_2 w, w \rangle = - \int_R \left[\theta + \varepsilon \left(e - \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i}{\partial x_i} \right) \right] w^2 dx$$

donde:

$$\langle A(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \rangle = C. \langle w, v \rangle +$$

$$\langle \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i} -$$

$$(1+\varepsilon d)v, w \rangle + \langle Q_2 w, w \rangle \leq |C| \|w\|_{L^2_{2\pi}} \cdot \|v\|_{H^2_{2\pi}} +$$

$$+ C_1 \cdot \|v\|_{H_{2\pi}^2} \cdot \|w\|_{L_{2\pi}^2} + C_2 \|w\|_{L^2}^2 \leq$$

$$C_3 (\|(\frac{v}{w})\|_X^2) \leq M \cdot \|(\frac{v}{w})\|_X^2$$

□

Indicando-se por $B(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) - (M+1)I$

teremos:

$$1) \overline{D(B)} = X$$

$$2) \operatorname{Im}(\lambda I - B(t, \varepsilon)) = X \quad \forall \quad \lambda \geq 0 \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

$$3) B(t, \varepsilon) \text{ é dissipativo.}$$

Portanto pelo teorema de Lumer-Phillips podemos afirmar que:

$$4) B(t, \varepsilon) \text{ é o gerador infinitesimal de um } C_0\text{-semigrupo de contrações para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ e para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como:

$$5) \langle\langle B(t, \varepsilon) \left(\frac{v}{w}\right); \left(\frac{v}{w}\right) \rangle\rangle \leq - \left\| \left(\frac{v}{w}\right) \right\|_X^2$$

para todo $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \in D(A)$; $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, temos:

$$6) \|R(\lambda I - B)\|_{L(X, X)} \leq \frac{1}{\lambda + 1}; \quad \lambda \geq 0 \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pelo teorema de Kato (0.1.3) podemos afirmar que o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= B(t, \varepsilon) Z \\ Z(s) &= Z_0 \in D(B) = D(A) \end{aligned}$$

é um problema de Cauchy bem posto e assim do teorema 0.1.2 segue-se o lema 2.3.

Indiquemos por $U(t, s, \varepsilon)$ $s \leq t$ $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ o operador de evolução associado à equação:

$$\dot{Z} = A(t, \varepsilon) Z$$

Lema 2.5

O sistema $\dot{Z} = A(t, \varepsilon) Z$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, admite um funcional de Liapunov V satisfazendo; $\dot{V} + \beta V \leq 0$ para algum $\beta > 0$ (independente de ε) e para toda solução do sistema considerado, se $0 < \varepsilon_0 \ll 1$.

Prova

Consideremos o funcional:

$$V(v, w) = \int_R \frac{(1+\varepsilon a)}{2} \cdot (\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v^2 + \\ + \frac{1}{2} w^2 + \gamma v w dx.$$

Por causa da forma de b_{ij} ;

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq M_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \quad (\varepsilon_0 \ll 1)$$

$$v^2 + 2\gamma v w + w^2 \geq (1-\gamma)(v^2 + w^2) \geq 0 \quad \text{se } 0 < \gamma < 1$$

portanto é possível escolhermos $\varepsilon_0 \ll 1$ e $0 < \gamma < 1$

a fim de que V seja definida positiva.

Agora:

$$\dot{V} + \beta V = \int_R (w + \gamma v) w_t + (1+\varepsilon a) \Delta v \Delta w + \frac{\varepsilon}{2} a_t (\Delta v)^2 +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} b_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} \right)$$

$$+ v w + \gamma w^2 + \frac{\beta}{2} (1+\varepsilon a) (\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\beta}{2} \cdot b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} +$$

$$\frac{\beta}{2} v^2 + \frac{\beta}{2} w^2 + \beta \gamma v w dx =$$

$$\int_R -[(\gamma-\beta)(1+\varepsilon a) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot a_t](\Delta v)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(\gamma - \frac{\beta}{2})b_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} b_{ij}].$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - [(\gamma - \frac{\beta}{2}) + \varepsilon \gamma d]v^2 - [(\theta - \gamma - \frac{\beta}{2}) - \varepsilon(e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i}{\partial x_i})]w^2$$

$$-[\gamma(\theta - \beta) + \varepsilon(d + \gamma e - \gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i}{\partial x_i})]vw - \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^n (\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}) - \varepsilon(\gamma m_i -$$

$$c_i)]w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n [\gamma \cdot \sum_{j=1}^n (\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}) + \varepsilon \gamma c_i]v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \leq 0$$

se tomarmos $\varepsilon_0 \ll 1$, $0 < \beta < \gamma < \min\{\frac{\theta}{2}, \frac{4\theta}{\theta^2+4}\}$ $\beta \ll 1$

□

E assim podemos afirmar que:

$$\|U(t,s,\varepsilon)\|_{L(X,X)} \leq M \cdot e^{-\beta(t-s)} \quad M > 0, \quad \beta > 0 \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

(M e β são genéricos).

Os lemas 2.3, 2.5 e o teorema 1.2 capítulo I garantem que dado $g \in L^1_\tau(R,X)$; existe uma única solução mild τ -periódica e contínua da equação:

$$\frac{0}{Z} = A(t,\varepsilon)Z + g$$

Agora; se $h \in L^2_{\tau,2\pi}(R^{n+1})$ então

$g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in L^2_\tau(R,X)$ (Teorema de Fubini) e assim a única solução mild τ -periódica:

$$Z(t) = U(t, s, \varepsilon) Z(s) + \int_s^t U(t, \tau, \varepsilon) g(\tau) d\tau$$

pertence a $C_\tau^0(R, X)$; além disso;

$$\|Z\|_{L_\tau^2(R, X)} \leq M \cdot \|h\|_{L_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1})} \quad (M\text{-genérico})$$

$$\|Z\|_{L_\tau^2(R, X)} = \left(\int_0^\tau \|Z(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\tau (\|v(t)\|_{H_{2\pi}^2(R^n)}^2 + \right.$$

$$\|w(t)\|_{L_{2\pi}^2(R^n)}^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{R_1} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + v^2 \right] dt dx \Big)^{\frac{1}{2}} \geq \|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1})}$$

Observação 2.6 (idem à observação 1.6)

Definição 2.1

Dado $u \in \Omega$, seja $L(u): L_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1})$ a aplicação linear e contínua definida por:

$$L(u)h = v$$

onde v é a primeira componente da solução mild τ -periódica da equação:

$$\begin{matrix} 0 \\ Z \end{matrix} = A(t, \varepsilon) Z + g \quad \text{com} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Nosso próximo passo será aumentarmos a regularidade de v em função da regularidade de h e u .

Lema 2.6

Para todo $u \in \Omega$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, ε_0 conveniente temos: $\|A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq M$ para algum $M > 0$ independente de u e ε .

Prova

Sejam $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$ e $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$ tais que:

$$A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$h = K \quad e$$

$$-\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta H] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon d)H =$$

$$k + (0+\varepsilon e)h + \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

donde se $\varepsilon_0 \ll 1$ segue-se do teorema (0.4.1) que:

$$\|H\|_{H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)} \leq M \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_X$$

Agora:

$$A(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad v = K = h$$

$$w = -\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta H] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$- (1+\varepsilon d)H - (\theta+\varepsilon e)h - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

portanto,

$$\| A(0, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|_X = (\| v \|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \| w \|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$M(\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|_X ; \quad (M \text{ genérico}).$$

□

Lema 2.7

Se $u \in \Omega$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente; $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que $A(t, \varepsilon)$ seja ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável, então existe um $M > 0$ independente de ε ; mas eventualmente dependente de u , tal que

$$\| A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \|_{L(X, X)} \leq \varepsilon \cdot M.$$

Prova

Sejam $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$ e $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$ tais que:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$$

Análogo ao que fizemos no lema anterior, existe $\varepsilon_0 \ll 1$ e $M > 0$ tal que:

$$1) \ H \in H_{2\pi}^4(R^n) \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

$$2) \ \|H\|_{H_{2\pi}^4(R^n)} \leq M \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_X \quad u \in \Omega, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

(Aqui; M não depende de u)

Agora:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \overline{\ell \geq 1} \quad v = 0 \quad e$$

$$w = -\varepsilon \Delta \left[\frac{\partial^j a}{\partial t^j} \cdot \Delta H \right] + \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} \cdot H - \varepsilon \frac{\partial^\ell e}{\partial t^\ell} \cdot h$$

$$- \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell m_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

portanto,

$$\|A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\|_X = \|w\|_{L_2^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon M (\|H\|_{H_{2\pi}^4} + \|h\|_{H_{2\pi}^1})$$

$$\leq \varepsilon M \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_X \quad \text{donde segue o nosso lema.}$$

M (genérico) mas pode depender eventualmente de u.

□

Lema 2.8

O problema de Cauchy

$$\overset{0}{Z} = [A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)] Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

é um problema de Cauchy bem posto e o operador de evolução associado admite decaimento exponencial se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Prova

A primeira afirmação decorre dos lemas 2.3, 2.6 e teorema 0.1.2.

A segunda afirmação decorre do lema 2.7 no caso $\ell = 1$ e teorema I.1.1.

Lema 2.9

Sejam $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k+2}$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente e $(A(t, \varepsilon))_{t \in \mathbb{R}}$ ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$.

Então existe um $M > 0$ independente de u, ε, ℓ tal que:

$$d(\ell) \leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

onde:

$$1) \quad d(\ell) = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ 0 \leq s \leq \ell}} \|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon)\|_{L(X, X)}$$

2) k é o número natural definido no início dessa aplicação.

Prova

Sejam $(h, q) \in X$ e $(v, w) \in X$ tais que:

$$A^{(s)}(t, \varepsilon) \cdot A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$$

portanto,

$$h = K \quad e$$

$$q = -\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta H] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ - (1+\varepsilon d)H - (0+\varepsilon e)h - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

Como vimos nos lemas últimos, existem

$\varepsilon_0 > 0$ e $M > 0$ tais que:

$$1) \quad H \in H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \quad \|H\|_{H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)} \leq M \left\| \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \right\|_X; \quad \forall u \in \Omega; \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

Caso $s = 0$ (semelhante ao lema 2.6)

Suponhamos $1 \leq s \leq \ell$

$$A^{(s)}(0, \varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \langle \overline{s \geq 1} \rangle v = 0 \quad e$$

$$w = -\varepsilon \Delta \left[\frac{\partial^s a}{\partial t^s} \cdot \Delta H \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^s b_{ij}}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s c_i}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \cdot H -$$

$$\varepsilon \frac{\partial^s e}{\partial t^s} \cdot h - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s m_i}{\partial t^s} \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 & \| A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon) \left(\frac{h}{q} \right) \| = \| w \|_{L^2_{2\pi}(R^n)} \leq \\
 & \leq M \left[\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^{s+2} a}{\partial t^s \partial x_i^2} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^s b_{ij}}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^s c_i}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} + \left\| \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \Big] \cdot \\
 & \| H \|_{H^4_{2\pi}(R^n)} + \left(\left\| \frac{\partial^s e}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^s m_i}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^n)} \right) \cdot \\
 & \cdot \| h \|_{H^2_{2\pi}(R^n)}
 \end{aligned}$$

mas:

$$\left\| \frac{\partial^{s+2} a}{\partial t^s \partial x_i^2} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}} \leq_* \| a \|_{H^{s+k+2}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq_{**} M \cdot (1 + \| u \|_{s+k+2}) \quad e$$

* (Teorema Imersão de Sobolev 0.6.1)

** (Teorema Composição de Moser 0.9.1);

analogamente para os outros coeficientes; logo

$$\| A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon) \left(\frac{h}{q} \right) \|_X \leq M(1 + \| u \|_{s+k+2}) \| \left(\frac{h}{q} \right) \|_X$$

e assim

$$d(\ell) \leq M \cdot (1 + \| u \|_{\ell+k+2}) \quad (M \text{ genérico})$$

□

Com o objetivo de aumentarmos a diferenciabilidade em x a igualdade seguinte será útil no próximo lema.

$$F'(u)v = h \iff$$

$$\begin{aligned} v_{tt} = & -\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ & - (1+\varepsilon d)v - (\theta + \varepsilon e)v_t - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x_i} + h \end{aligned}$$

Indicando-se por $v_k = \frac{\partial^k v}{\partial t^k}$ teremos:

$$\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v_k] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n (c_i + k \frac{\partial m_i}{\partial t}) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} +$$

$$(1 + \varepsilon d + \varepsilon \cdot k \cdot \frac{\partial e}{\partial t}) v_k = - \sum_{\ell=1}^{k-1} \{ \varepsilon \Delta [\frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \cdot \Delta v_{k-\ell}] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$$

$$\frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{k-\ell}}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n [\binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} + \binom{k}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} m_i}{\partial t^{\ell+1}}] \cdot \frac{\partial v_{k-\ell}}{\partial x_i} -$$

$$\varepsilon [\binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} + \binom{k}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} e}{\partial t^{\ell+1}}] v_{k-\ell} \} - \varepsilon \Delta [\frac{\partial^k a}{\partial t^k} \cdot \Delta v]$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^k b_{ij}}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^k c_i}{\partial t^k} \cdot v - \varepsilon \frac{\partial^k d}{\partial t^k} \cdot v - v_{k+2}$$

$$- \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x_i} - (\theta + \varepsilon e) v_{k+1} - \frac{\partial^k h}{\partial t^k}$$

Lema 2.10

Se $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$, a e f suficientemente suaves $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente; $m_1 \in \mathbb{N}$, $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\xi}(R^{n+1})$; $\xi \geq \max \{m; m_1 + \alpha\}$ e $v = L(u)h$, então existe um $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m_1) \ll 1$ tal que:

$$1) \ v \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1+1}(R^{n+1}), \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

2) $\exists M > 0$ dependente de a, f e ε_0 tal que

$$\|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^{m_1+1}(R^{n+1})} \leq M[\|h^{(m_1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4})].$$

$$\|h^{m_1-1}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h^{(1)}\|_Y$$

$$+ (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y] \quad \text{onde } Y = L_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1})$$

Prova (por indução sobre m_1)

Para $m_1 = 0$ já verificamos

Suponhamos que o lema seja verdadeiro para todo $0 \leq j \leq m_1 - 1$ com $m_1 \geq 1$

Vamos mostrar que o mesmo é verdadeiro para m_1 .

Se $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$ então $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1-1}(R^{n+1})$

donde:

$$1) \ v \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1}) \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m_1-1)$$

$$2) \ \|v\|_{m_1} \leq M. (\|h^{m_1-1}\|_Y + \dots + (1+\|u\|_{m_1+k+1}) \|h\|_Y)$$

Agora; se $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$ então

$z \in C_{\tau}^{m_1}(R, X)$ (teorema 1.4 capítulo I) onde z é solução mild; τ -periódica de:

$$\dot{z} = A(t, \varepsilon)z + g \quad g = (0, h) \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m_1)$$

além disso:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{R_1} \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1} \partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1+2} v}{\partial t^{m_1} \partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1+1}} \right)^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M. (\|h^{(m_1)}\|_Y + (1+\|u\|_{k+4}) \|h^{(m_1-1)}\|_Y \\ & + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h^{(1)}\|_Y + (1+\|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y) \end{aligned}$$

Porém:

$$\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v_{m_1-1}] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v_{m_1-1}}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n (c_i + (m_1-1) \frac{\partial m_i}{\partial t}).$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_{m_1-1}}{\partial x_i} + [1 + \varepsilon d + \varepsilon (m_1-1) \frac{\partial e}{\partial t}] v_{m_1-1} = \\ & - \sum_{\ell=1}^{m_1-2} \{ \varepsilon \Delta [\frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \cdot \Delta v_{m_1-\ell-1}] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{m_1-\ell-1}}{\partial x_i \partial x_j} - \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^n [(m_1-1) \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} + (m_1-1) \frac{\partial^{\ell+1} m_i}{\partial t^{\ell+1}}] \frac{\partial v_{m_1-\ell-1}}{\partial x_i} - \\ & \varepsilon [(m_1-1) \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} + (m_1-1) \frac{\partial^{\ell+1} e}{\partial t^{\ell+1}}] v_{(m_1-\ell-1)} \} - \\ & \varepsilon \Delta [\frac{\partial^{m_1-1} a}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m_1-1} b_{ij}}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \\ & - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{m_1-1} c_i}{\partial t^{m_1-1}} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^{m_1-1} d}{\partial t^{m_1-1}} \cdot v - v_{m_1+1} - \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial v_{m_1}}{\partial x_i} - (0+\varepsilon e) v_{m_1} + \frac{\partial^{m_1-1} h}{\partial t^{m_1-1}} = g \end{aligned}$$

usando-se a hipótese da indução; a desigualdade acima, o teorema de regularização fraca (teorema 0.4.1) a desigualdade de Gagliardo Nirenberg (teorema 0.5.1) podemos afirmar que:

$$1) \quad g \in Y = L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$$

2) $\frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \in H_{2\pi}^4(R^n)$, além disso;

$$\left(\int_0^\tau \left\| \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}}(\tau) \right\|_{H_{2\pi}^4(R^n)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M(\|h^{(m_1)}\|_Y + \dots +$$

$+ (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y)$; pois, notemos que:

$$\left\| \frac{\partial^{\ell+2} a}{\partial t^\ell \partial x_i \partial x_j} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} \leq \|a\|_{H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k+2}(R^{n+1})} \leq M(1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

para algum $M > 0$ (M genérico) (Teoremas 0.6.1. 0.9.1)

$$\left\| \frac{\partial^{m_1-\ell+1} v}{\partial t^{m_1-1} \partial x_i \partial x_j} \right\|_Y \leq M(\|h^{(m_1)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1-\ell+k+2}) \|h\|_Y)$$

portanto

$$(1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \left\| \frac{\partial^{m_1-\ell+2} v}{\partial t^{m_1-\ell-1} \partial x_i \partial x_j} \right\|_Y \leq M. [\|h^{(m_1)}\|_Y + \dots +$$

$$(1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y].$$

A mesma análise vale para todo os outros termos:

Prosseguindo; precisamos estimar a norma L_2 de todos os termos da forma:

$$D_t^{m_1-2} D_x^\gamma v \quad \gamma \in N^n; \quad |\gamma| = 5$$

Isto se fará da seguinte forma. Considere-
mos:

$$\Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v_{m_1-2}] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v_{m_1-2}}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n [c_i + (m_1-2) \frac{\partial m_i}{\partial t}].$$

$$\frac{\partial v_{m_1-2}}{\partial x_i} + [1+\varepsilon d + \varepsilon(m_1-2) \frac{\partial e}{\partial t}] v_{m_1-2} = - \sum_{\ell=1}^{m_1-3} \{ \varepsilon \Delta [\frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \cdot \Delta v_{m_1-\ell-2}]$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \frac{\partial^2 v_{m_1-\ell-2}}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n [\binom{m_1-2}{\ell} \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-2}{\ell+2} \frac{\partial^{\ell+1} m_i}{\partial t^{\ell+1}}] \}.$$

$$\frac{\partial v_{m_1-\ell-2}}{\partial x_i} + \varepsilon [\binom{m_1-2}{\ell} \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-2}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} e}{\partial t^{\ell+1}}] v_{m_1-\ell-2} \}$$

$$- [\varepsilon \Delta \frac{\partial^{m_1-2} a}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m_1-2} b_{ij}}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$- \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{m_1-2} c_i}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^{m_1-2} d}{\partial t^{m_1-2}} \cdot v - v_{m_1} - \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_{m_1-1}}{\partial x_i} -$$

$$(\theta + \varepsilon e) v_{m_1-1} + \frac{\partial^{m_1-2} h}{\partial t^{m_1-2}} = g$$

Segue-se da hipótese da indução que o se-
gundo membro dessa igualdade está em $H_{2\pi}^1(R^n)$. Então no-
vamente pelos teoremas 0.4.1, 0.5.1 e a própria hipótese
da indução temos:

$$\| \partial_t^{m_1-2} \partial_x^\gamma v \|_Y \leq M \cdot \| h^{(m_1)} \|_Y + \dots + (1 + \| u \|_{m_1+k+2}) \cdot \| h \|_Y.$$

A mesma estimativa vale para $\partial_t^{m_1-\delta} \partial_x^\gamma v$ onde $3 \leq \delta \leq m_1$, $\gamma \in N^n$, $|\gamma| - \delta = 3$, donde concluímos o nosso lema.

Nosso próximo passo, permite-nos verificar a hipótese H2 (H2i) do Teorema de Nash.

Lema 2.11

Se $u \in \Omega$ então

$$L(u) / H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}) \in \mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}), H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1})) \quad \text{onde}$$

$r = \alpha - 1$. Além disso:

$$\|L(u)h\|_{m-r} \leq M. \|h\|_{m-\alpha} \quad \text{para todo } u \in \Omega \text{ e}$$

$h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$, para algum $M > 0$ e para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente.

Prova

Basta aplicar o lema 2.10 para o caso $m_1 = m - \alpha$ e notar que $m_1 + k + 2 = m - 2$.

Lema 2.12

O operador $L(u): H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1})$ é injetivo, para todo $u \in \Omega$.

Prova A mesma do lema 1.12

Lema 2.13

Se $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ então
 $F'(u)L(u)h = h$ para todo $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m+r-\alpha}(R^{n+1})$.

Prova A mesma do lema 1.13.

Desse modo a hipótese (H2)ii do teorema de Nash está verificada.

Verifiquemos, agora, a hipótese (H2)iii.

Lema 2.14

$$L(.)F(.): \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1})$$

além disso:

$$\|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M.(1+\|u\|_{m+p+r})$$

para todo $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente
e para algum $M > 0$.

Prova

$u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ então $F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p-1}(R^{n+1})$
 $u \in C_{\tau, 2\pi}^{m+p+1}(R^{n+1})$ e $A(t, \varepsilon)$ é $m+p-1$ vezes fortemente con
 tinuamente diferenciável. Segue-se do lema 2.10 que se
 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ então:

$$1) L(u)F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1}) \text{ e}$$

$$2) \|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M[\|(F(u))^{(m+p-1)}\|_Y + (1+\|u\|_{k+4}) \cdot$$

$$\|(F(u))^{(m+p-2)}\|_Y + \dots + (1+\|u\|_{m+p-1})\|(F(u))^{(1)}\|_Y +$$

$$(1+\|u\|_{m+p-1})\|F(u)\|_Y]$$

Porém:

$$\|(F(u))^{(i)}\|_Y \leq \|F(u)\|_{H_{\tau, 2\pi}^i(R^{n+1})} \leq M(1+\|u\|_{i+4})$$

donde:

$$\|L(u)F(u)\|_Y \leq M[(1+\|u\|_{m+p+3}) + (1+\|u\|_{k+4}) \cdot (1+\|u\|_{m+p+2}) +$$

$$\dots + (1+\|u\|_{m+p+k+1})(1+\|u\|_5) + (1+\|u\|_{m+p+k+1}) \cdot$$

$$(1+\|u\|_4)] \leq M \cdot (1 + \|u\|_{m+p+r}) \quad 0 < M\text{-genérico.}$$

Esta última desigualdade é consequência do teorema 0.5.1 (Desigualdade de Gagliardo Nirenberg), pois para os produtos da forma:

$$\|u\|_s \cdot \|u\|_{m+p+k+6-s} \quad m \leq s \leq m+p+k+3$$

$$m \leq m+p+k+6-s \leq m+p+k+3$$

temos:

$$\|u\|_s \leq C \|u\|_{m+p+k+3}^a \cdot \|u\|_m^{1-a} \quad a = \frac{s-m}{p+k+3}$$

$$\|u\|_{m+p+k+6-s} \leq C \|u\|_{m+p+k+3}^b \cdot \|u\|_m^{1-b} \quad b = \frac{p+k+6-s}{p+k+3}$$

Agora

$$a + b = \frac{p+k+6-m}{p+k+3} \leq 1 \quad \text{pois} \quad m \geq 3$$

donde concluimos o nosso lema.

□

Finalizando:

A condição H3 estará satisfeita desde que $|\varepsilon| \ll 1$, portanto as hipóteses (H1) (H2) (H3) do Teorema de Nash estão verificadas desde que $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente e portanto se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ conveniente implica, pelo teorema de Nash que nossa equação inicial tem uma solução $u = u(t, x, \varepsilon) \in \Omega \subset H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$. Ainda;

$F: \Omega_1 = \{u \in H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1}) / \|u\|_{m-r} < 1\} \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha}(R^{n+1})$ está bem definida; $F \in C^2(\Omega_1, H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha}(R^{n+1}))$;

$$\|F''(u)h.k\|_{m-r-\alpha} \leq M. \|h\|_{m-r} \|k\|_{m-r}; L: \Omega \rightarrow$$

$$\mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha}(R^{n+1}); H_{\tau, 2\pi}^{m-2r}(R^{n+1})) \text{ se } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ conveniente,}$$

$$\|L(u)h\|_{m-2r} \leq M. \|h\|_{m-r-\alpha} \text{ para todo } h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-r-\alpha}(R^{n+1})$$

e $u \in \Omega$. Além disso $L(u)F'(u)v = v$ para todo $v \in H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$ $u \in \Omega$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Donde segue a unicidade de $u = u(t, x, \varepsilon)$ em alguma vizinhança conveniente de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$.

A última parte do nosso resultado principal é consequência do fato que $\|u(\varepsilon)\|_m \leq K. \|F(0)\|_{m-}^\eta = K\|\varepsilon f(., ., 0, 0, \dots)\|_{m-\alpha} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver teorema de Nash).

APLICAÇÃO 3

Nesta aplicação nós estudamos uma equação na qual a parte perturbada envolve derivadas de ordem mais alta que a parte não perturbada. Este é um facto relevante do nosso trabalho.

Consideremos a equação:

$$(I) \quad u_{tt} - \Delta u + \theta u_t + u + \varepsilon \Delta[(1 + \varepsilon a(t, x, u)) \Delta u] + \varepsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u) = 0$$

onde:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} \times (-\delta, \delta)^\mu &\longrightarrow \mathbb{R} & \mu &= (1+n)^2 + 1; \delta > 1, \\ a: \mathbb{R}^{n+1} \times (-\delta, \delta) &\longrightarrow \mathbb{R}; & \theta &> 0 \end{aligned}$$

ambas τ -periódicas em t e 2π -periódicas em $x_1, x_2, \dots, x_n$ separadamente.

Resultado Principal

Teorema 3.1

Suponhamos f e a suficientemente suaves. Então existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$; tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existe uma única solução clássica $u = u(t, x, \varepsilon)$

de (I) em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$ para algum $m \in N^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})} = 0$$

Consideremos a função:

$$F: \Omega \subset H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1}) \longrightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$$

definida por:

$$F(u) = u_{tt} - \Delta u + \theta u_t + u + \varepsilon \Delta [(1 + \varepsilon a(t, x, u)) \Delta u] + \\ \varepsilon f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla u_t, \nabla \nabla u)$$

onde:

$$1) \quad \Omega = \{u \in H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1}) / \|u\|_m < 1\}; \quad \varepsilon \geq 0$$

$$2) \quad m = j + k \quad \text{com} \quad k = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1; \quad n \in N^*; \quad \theta > 0$$

$$3) \quad \alpha = k + 4 \quad j \geq k + 7$$

Lema 3.1

Se $f \in C^{j-4}$ e $a \in C^j$ então F está bem definida.

Prova

A mesma do lema 2.1.

Lema 3.2

Se $f \in C^{j-2}$ e $a \in C^j$ então $F \in C^2(\Omega, H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}))$ e a hipótese (H1) do teorema de Nash está satisfeita.

Prova

A mesma do lema 2.2

Observação 3.1

$$\begin{aligned} F'(u)v &= v_{tt} + \epsilon \Delta[(1+\epsilon a)\Delta v] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\delta_j^i (1-\epsilon^2) \frac{\partial a}{\partial u} \Delta u] \\ &- \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{x_i x_j}} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_j x_i}} \right) v_{x_i x_j} + \epsilon \sum_{i=1}^n \left[2\epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial a}{\partial u} \cdot \Delta u \right) + \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} \right] v_{x_i} \\ &+ \left[1 + \epsilon \frac{\partial f}{\partial u} + \epsilon^2 \Delta \left(\frac{\partial a}{\partial u} \cdot \Delta u \right) \right] v + \left(\theta + \epsilon \frac{\partial f}{\partial u_t} \right) v_t + \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{tx_i}} \cdot v_{tx_i} \end{aligned}$$

Observação 3.2 Análoga à observação 2.2

Transformando-se $F'(u)v = h$ em um sistema de evolução; obtemos:

$$v_t = w$$

$$w_t = -\varepsilon \Delta[(1+\varepsilon a)\Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ -(1+\varepsilon d)v - (\theta+\varepsilon e)w - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + h$$

ou ainda:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g \quad \text{onde} \quad Z = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Nosso próximo lema mostra que o sistema a cima, formalmente considerado, se insere em um contexto de sistema evolutivo bem posto.

Lema 3.3

O problema de Cauchy:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

$$\text{onde: } X = H_{2\pi}^2(R^n) \times L_{2\pi}^2(R^n) \quad D(A) \equiv H_{2\pi}^4(R^n) \times H_{2\pi}^2(R^n)$$

é um problema de Cauchy bem posto se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 conveniente.

Prova: é essencialmente a mesma do lema 2.3

Indiquemos por $U(t, s, \varepsilon)$; $s \leq t, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ o operador de evolução associado à equação

$$\dot{Z} = A(t, \epsilon) Z$$

Lema 3.5

O sistema $\dot{Z} = A(t, \epsilon) Z$ $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ conveniente, admite um funcional de Liapunov V satisfazendo $\dot{V} + \beta V \leq 0$ para algum $\beta > 0$ (independente de ϵ) e para toda solução do sistema considerado.

Prova:

Consideremos o funcional:

$$V(v, w) = \int_R \frac{\epsilon(1+\epsilon a)}{2} (\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 + \gamma v w dx$$

É imediato que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq M_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 < 1$$

(observar a forma de b_{ij}). Ainda:

$$v^2 + 2\gamma vw + w^2 \geq (1-\gamma)(v^2 + w^2) \geq 0 \quad \text{se } 0 < \gamma < 1$$

portanto é possível escolhermos $\epsilon_0 < 1$ e $0 < \gamma < 1$ afim de que V seja definida positiva.

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{V} + \beta V &= \int_R -\varepsilon [(\gamma - \beta)(1 + \varepsilon a) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\partial a}{\partial t}] (\Delta v)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(\gamma - \frac{\beta}{2}) b_{ij} \\
 &- \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ij}}{\partial t}] \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - [(\gamma - \frac{\beta}{2}) + \varepsilon \gamma d] v^2 - [(\theta - \gamma - \frac{\beta}{2}) - \\
 &\varepsilon (e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i}{\partial x_i})] \cdot w^2 - [\gamma(\theta - \beta) + \varepsilon(d + \gamma e - \gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i}{\partial x_i})] vw - \\
 &\sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^n (\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}) - \varepsilon(\gamma m_i - c_i)] w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} - \\
 &\sum_{i=1}^n [\gamma \sum_{j=1}^n (\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}) + \varepsilon \gamma c_i] v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \leq 0
 \end{aligned}$$

se tomarmos $\varepsilon_0 \ll 1$ $0 < \beta < \gamma < \min\{\frac{\theta}{2}, \frac{4\theta}{\theta^2+4}\}$ $\beta \ll 1$

□

donde podemos afirmar que:

$$1) \varepsilon m_1 \|Z\|_X^2 \leq V(Z) \leq m_2 \|Z\|_X^2, \quad m_1 > 0; \quad m_2 > 0 \quad Z = (v, w)$$

$$2) V(U(t, s, \varepsilon)Z) \leq e^{-\beta(t-s)} V(Z) \quad \text{e assim}$$

$$\|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\beta(t-s)} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

para algum $M > 0$ (independente de ε).

Aqui está um ponto bastante delicado. Muito embora tenhamos, também, $\|A^{(j)}(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq \varepsilon \cdot M$ (para algum $M > 0$) e decaimento exponencial para o sistema evolutivo:

$$(II) \quad \overset{0}{Z} = (A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon))Z$$

o que conseqüentemente acarreta na existência de soluções τ -periódicas para:

$$\overset{0}{Z} = (A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon))Z + g(t)$$

com $g \in L^1_{\tau}(R, X)$,

temos o problema da limitação não uniforme em ε do operador $L(u)$ no teorema de Nash.

Contornamos essa dificuldade; definindo-se uma nova norma sobre X , o que facilitará a aplicação da teoria linear; bem como nos permitirá limitação uniforme (em ε) para $L(u)$.

Consideremos sobre X a norma:

$$\|(v, w)\|_{\varepsilon} = \sqrt{V(v, w)}$$

e indiquemos por $X_{\varepsilon} = (X, \|\cdot\|_{\varepsilon})$

Nestas condições $\|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X_{\varepsilon}, X_{\varepsilon})} \leq e^{-\beta(t-s)}$.

Os lemas 3.3; 3.5 e o teorema 1.3 capítulo I garantem que dado $g \in L^1_{\tau}(R, X)$; existe uma única solução mild τ -periódica e contínua da equação:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g$$

Agora se $h \in L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ então $g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in L^2_{\tau}(R, X_{\varepsilon})$ (Teorema Fubini); e assim a única solução mild

τ -periódica:

$$Z(t) = U(t, s, \varepsilon) Z(s) + \int_s^t U(t, \tau, \varepsilon) g(\tau) d\tau$$

pertence a $C_{\tau}^0(R, X_{\varepsilon})$; além disso:

$$\|Z\|_{L_{\tau}^2(R, X_{\varepsilon})} \leq M \cdot \|h\|_{L_{\tau, 2\pi}^2} \quad 0 < M$$

$$\begin{aligned} \|Z\|_{L_{\tau}^2(R, X_{\varepsilon})} &= \left(\int_0^{\tau} \|Z(t)\|_{X_{\varepsilon}}^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{\tau} V(v(t), w(t)) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{R_1} \left[\frac{\varepsilon(1+\varepsilon a)}{2} (\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma v \cdot w \right] dt dx \right)^{1/2} \geq M \cdot \|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1})} \quad \text{onde } M \text{ não de-} \\ &\quad \text{pende de } \varepsilon. \quad M\text{-genérico.} \end{aligned}$$

Observação 3.6 (idem à obs. 1.6)

Definição 3.1

Dado $u \in \Omega$; seja $L(u): L_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1})$ a aplicação linear e contínua definida por:

$$L(u)h = v$$

onde v é a primeira componente da solução mild τ -periódica da equação:

$$\frac{0}{Z} = A(t, \varepsilon) Z + g \quad \text{com } g = (0, h)$$

Nosso próximo passo será aumentarmos a regularidade de v em função da regularidade de h e u .

Lema 3.6

Para todo $u \in \Omega$; $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente temos: $\|A(0, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq M$ para algum $M > 0$ independente de u e ε .

Prova

Sejam $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$; $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$ tais que:

$$A(0, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \implies$$

$$h = K \quad e$$

$$k = -\varepsilon \Delta[(1+\varepsilon a)\Delta H] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ - (1+\varepsilon d)H - (\theta+\varepsilon e)h - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

donde se $\varepsilon_0 \ll 1$ segue-se do teorema 0.4.2 :

$$1) H \in H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \|H\|_{H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} (\|h\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

$$3) \|H\|_{H^2_{2\pi}(R^n)} \leq M. (\|h\|_{H^1_{2\pi}(R^n)} + \|k\|_{L^2_{2\pi}(R^n)})$$

Agora:

$$A(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \implies$$

$$v = K = h \quad e$$

$$w = -\varepsilon \Delta[(1+\varepsilon a)\Delta H] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ - (1+\varepsilon d)H - (\theta+\varepsilon e)h - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$\| (v, w) \|_{X_\varepsilon}^2 = \int_R \frac{\varepsilon(1+\varepsilon a)}{2} (\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} +$$

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 + \gamma v w dx \leq \int_R \frac{\varepsilon(1+\varepsilon a)}{2} (\Delta h)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{ij}}{2} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{1}{2} h^2 \cdot dx + M(\varepsilon^2 \|H\|_{H^4_{2\pi}}^2 + \|H\|_{H^2_{2\pi}}^2 + \|h\|_{H^1_{2\pi}}^2) \leq$$

$$M^2 \| (h, k) \|_{X_\varepsilon}^2 \quad \text{donde:}$$

$$\|A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq M \quad \forall u \in \Omega \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad \text{con-}$$

veniente.

□

Lema 3.7

Se $u \in \Omega$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente; $\ell \in \mathbb{N}^*$

tal que $A(t, \varepsilon)$ seja ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável, então existe um $M > 0$, independente de ε , mas eventualmente dependente de u , tal que

$$\| A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \varepsilon \cdot M \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Prova

Sejam $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$, $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$ tais que:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$$

Análogo ao que fizemos no lema anterior; existe um $\varepsilon_0 \ll 1$ e $M > 0$ (Teorema 0.4.2) tal que:

$$1) \quad H \in H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \quad \|H\|_{H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} (\|h\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

$$3) \quad \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq M (\|h\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

Agora:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \overline{\ell \geq 1}$$

$$v = 0$$

$$w = -\varepsilon^2 \cdot \Delta \left[\frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \cdot \Delta H \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} \cdot H - \epsilon \frac{\partial^\ell e}{\partial t^\ell} \cdot h - \\ & - \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell m_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \| (v, w) \|_{X_\epsilon}^2 &= \| w \|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq M^2 (\epsilon^4 \cdot \| H \|_{H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)}^2 + \\ &+ \epsilon^2 \| H \|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon^2 \| h \|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)}^2) \leq \\ &\leq M^2 \epsilon^2 \| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|_{X_\epsilon}^2 \end{aligned}$$

donde:

$$\| A^{(\ell)}(t, \epsilon) A^{-1}(t, \epsilon) \|_{L(X_\epsilon, X_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot M; \text{ para algum } M > 0$$

independente de ϵ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ϵ_0 conveniente.

Lema 3.8 O problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \overset{0}{Z} &= (A(t, \epsilon) + A'(t, \epsilon) A^{-1}(t, \epsilon)) Z \\ Z(s) &= Z_0 \in D(A) \end{aligned}$$

é um problema de Cauchy bem posto e o operador de evolução associado admite decaimento exponencial.

Prova A mesma do lema 1.8.

Lema 3.9

Sejam $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k+2}(R^{n+1})$; $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente, $\ell \in N^*$, $A(t, \varepsilon)$ ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$. Então existe um $M > 0$ independente de u, ε, ℓ tal que:

$$d(\ell) \leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

onde:

$$1) \quad d(\ell) = \sup_{\substack{t \in R \\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ 0 \leq s \leq \ell}} \|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)}$$

2) k é o número natural definido no início dessa aplicação.

Prova

Sejam $(h, q) \in X$, $(v, w) \in X$ tais que:

$$A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$h = K \quad e$$

$$q = -\varepsilon \Delta[(1+\varepsilon a)\Delta H] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon d)H - (\theta+\varepsilon e)h - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

Portanto, existem, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ e $M > 0$ tais que:

$$1) \ H \in H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \ \|H\|_{H_{2\pi}^4(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} [\|h\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)} + \|q\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}]$$

$$3) \ \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq M(\|h\|_{H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)} + \|q\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

$$\forall u \in \Omega, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad \varepsilon_0 \text{ conveniente.}$$

Caso $s = 0$ é semelhante ao lema 3.6.

Suponhamos $1 \leq s \leq \ell$

$$A^{(s)}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \iff$$

$$v = 0 \quad e$$

$$w = -\varepsilon^2 \Delta \left[\frac{\partial^s a}{\partial t^s} \cdot \Delta H \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^s b_{ij}}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s c_i}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \cdot H - \varepsilon \frac{\partial^s e}{\partial t^s} \cdot h -$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s m_i}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$\|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}\|_{\varepsilon} = \|w\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\begin{aligned}
 & M \left[\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^{s+2} a}{\partial t^s \partial x_i^2} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^s b_{ij}}{\partial t^s} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} \right. \\
 & + \left\| \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0} + \left\| \frac{\partial^s e}{\partial t^s} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^s c_i}{\partial t^s} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} + \\
 & \left. \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^s m_i}{\partial t^s} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} \right] \cdot (\epsilon^2 \|H\|_{H_{2\pi}^4(R^n)} + \epsilon \|H\|_{H_{2\pi}^2(R^n)} \\
 & + \epsilon \|h\|_{H_{2\pi}^1(R^n)}).
 \end{aligned}$$

Mas:

$$\left\| \frac{\partial^{s+2} a}{\partial t^s \partial x_i^2} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^n)} \leq \|a\|_{C_{\tau, 2\pi}^{s+2}(R^{n+1})} \leq \|a\|_{H_{\tau, 2\pi}^{k+s+2}(R^{n+1})} \leq$$

$$M(1 + \|u\|_{s+k+2})$$

(Teorema de Composição de Moser)

Analogamente para os outros coeficientes,

donde:

$$\|A^{(s)}(t, \epsilon) A^{-1}(t, \epsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}\|_{X_\epsilon} \leq M(1 + \|u\|_{s+k+2}) \cdot (\epsilon \|h\|_{H_{2\pi}^1(R^n)}$$

$$+ \epsilon \|q\|_{L_{2\pi}^2(R^n)}) \leq M(1 + \|u\|_{s+k+2}) \cdot \|(h, q)\|_{X_\epsilon}$$

(Lembre-se que M é genérico e nem todos são iguais!...)

$$\text{Portanto } d(\ell) \leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2}).$$

□

Com o objetivo de aumentarmos a diferenciabilidade em x a igualdade seguinte será útil no próximo lema.

$$F'(u)v = h \iff$$

$$\epsilon \cdot \Delta[(1+\epsilon a)\Delta v] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \epsilon \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$- (1+\epsilon d)v = -v_{tt} - (\theta+\epsilon e)v_t - \epsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x_i}$$

Indicando-se por $v_k = \frac{\partial^k v}{\partial t^k}$ teremos:

$$\epsilon \Delta[(1+\epsilon a)\Delta v_k] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} + \epsilon \sum_{i=1}^n (c_i + k \frac{\partial m_i}{\partial t}) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (1+\epsilon d + \epsilon k \frac{\partial e}{\partial t}) v_k = - \sum_{\ell=1}^{k-1} \{ \epsilon^2 \cdot \Delta[\frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \Delta v_{k-\ell}] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{k-\ell}}{\partial x_i \partial x_j} - \epsilon \sum_{i=1}^n [\binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} + \binom{k}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} m_i}{\partial t^{\ell+1}}] \frac{\partial v_{k-\ell}}{\partial x_i} - \epsilon [\binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} + \binom{k}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} e}{\partial t^{\ell+1}}] v_{k-\ell} \} - \epsilon^2 \Delta[\frac{\partial^k a}{\partial t^k} \cdot \Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^k b_{ij}}{\partial t^k} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^k c_i}{\partial t^k} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial^k d}{\partial t^k} \cdot v - v_{k+2} - \epsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x_i} - (\theta + \epsilon e) v_{k+1} - \frac{\partial^k h}{\partial t^k}$$

Lema 3.10

Se, $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1})$, a e f suficientemente suaves
 $m_1 \in \mathbb{N}$; $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\xi}(R^{n+1})$; $\xi \geq \{\max m, m_1 + \alpha\}$ e
 $v = L(u)h$; então existe um $\epsilon_0 = \epsilon_0(m_1) < 1$ tal que

$$1) \ v \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1+1}(R^{n+1}) \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

2) Existe um $M > 0$ dependente de a , f e ε_0 tal que:

$$\|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^{m_1+1}(R^{n+1})} \leq M[\|h^{(m_1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4}) \cdot$$

$$\|h^{(m_1-1)}\|_Y + \dots + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h^{(1)}\|_Y$$

$$+ (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y]; \text{ onde } Y = L_{\tau, 2\pi}^2(R^{n+1}) \text{ e } k \text{ está}$$

definido no início desta aplicação.

Prova (por indução sobre m_1)

Para $m_1 = 0$ o lema 3.10 é verdadeiro.

Suponhamos que o lema seja verdadeiro para todo $0 \leq j \leq m_1 - 1$; com $m_1 \geq 1$.

Vamos mostrar que o mesmo é verdadeiro para m_1 .

$$\text{Se } h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1}) \text{ então } h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1-1}(R^{n+1})$$

donde

$$1) \ v \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1}) \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0(m_1-1)$$

$$2) \ \|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^{m_1}} \leq M[\|h^{(m_1-1)}\| + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+1}) \|h\|_Y]$$

$$\text{Agora; se } h \in H_{\tau, 2\pi}^{m_1}(R^{n+1}) \text{ então}$$

$Z \in C_{\tau}^{m_1}(R, X_{\varepsilon})$ (teorema 1.4 capítulo I) onde Z é solução mild, τ -periódica de

$$\frac{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g; \quad g = (0, h) \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0(m_1)$$

$$\|Z^{(m_1)}\|_{L_{\tau}^2(R, X_{\varepsilon})} \leq M(\|h^{(m_1)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2})\|h\|_Y)$$

Agora:

$$\|Z^{(m_1)}\|_{L_{\tau}^2(R, X_{\varepsilon})} = \left(\int_0^{\tau} \|Z^{(m_1)}(t)\|_{X_{\varepsilon}}^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$\left(\int_0^{\tau} V(v^{(m_1)}(t), w^{(m_1)}(t)) dt \right)^{1/2} = \left(\int_{R_1} \frac{\varepsilon(1+\varepsilon a)}{2} (\Delta v^{(m_1)})^2 + \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial v^{(m_1)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(m_1)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (v^{(m_1)})^2 + \frac{1}{2} (w^{(m_1)})^2 + \right.$$

$$\left. \gamma \int v^{(m_1)} w^{(m_1)} dt dx \right)^{1/2} \geq M_1 \left(\int_{R_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1} \partial x_i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1+1}} \right)^2 dt dx \right)^{1/2}$$

Portanto:

$$\left(\int_{R_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1} \partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{m_1+1} v}{\partial t^{m_1+1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} \right)^2 dt dx \right)^{1/2} \leq$$

$$M. [\|h^{(m)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2})\|h\|_Y]$$

Porém

$$\varepsilon \Delta[(1+\varepsilon a) \Delta v_{m_1-1}] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v_{m_1-1}}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n (c_i + (m_1-1) \frac{\partial m_i}{\partial t}).$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{m_1-1}}{\partial x_i} + [1 + \varepsilon d + \varepsilon(m_1-1) \frac{\partial e}{\partial t}] v_{m_1-1} &= - \sum_{\ell=1}^{m_1-2} \{ \varepsilon^2 \Delta [\frac{\partial^\ell a}{\partial t^2} \cdot \Delta v_{m_1-\ell-1}] \\
 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{m_1-\ell-1}}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n [\binom{m_1-1}{\ell} \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-1}{\ell+1} \cdot \\
 \frac{\partial^{\ell+1} m_i}{\partial t^{\ell+1}}] \frac{\partial v_{m_1-\ell-1}}{\partial x_i} - \varepsilon [\binom{m_1-1}{\ell} \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} + \binom{m_1-1}{\ell+1} \frac{\partial^{\ell+1} e}{\partial t^{\ell+1}}] v_{(m_1-\ell-1)} \} \\
 - \varepsilon^2 \Delta [\frac{\partial^{m_1-1} a}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m_1-1} b_{ij}}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \\
 \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{m_1-1} c_i}{\partial t^{m_1-1}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^{m_1-1} d}{\partial t^{m_1-1}} \cdot v - v_{m_1+1} - \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_{m_1}}{\partial x_i} - \\
 (\theta + \varepsilon e) v_{m_1} + \frac{\partial^{m_1-1} h}{\partial t^{m_1-1}} = g
 \end{aligned}$$

Usando-se a hipótese da indução; a desigualdade acima; o teorema de regularização fraca (teorema 0.4.2) e a desigualdade de Gagliardo Nirenberg (teorema 0.5.1) podemos afirmar que:

$$1) \quad g \in Y = L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$$

$$2) \quad \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \in H^4_{2\pi}(R^n); \quad \left\| \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \right\|_{H^4_{2\pi}(R^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} (\|g\|_{L^2_{2\pi}(R^n)})$$

$$3) \quad \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \in H^2_{2\pi}(R^n); \quad \left\| \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \right\|_{H^2_{2\pi}(R^n)} \leq M \cdot (\|g\|_{L^2_{2\pi}(R^n)})$$

para algum $M > 0$ não dependente de ε . Além disso

$$\left(\int_0^T \left\| \frac{\partial^{m_1-1} v}{\partial t^{m_1-1}} \right\|_{H_{2\pi}^2(R^n)} dt \right)^{1/2} \leq M (\|h^{(m)}\|_Y + \dots +$$

$(1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y)$ pois notemos que:

$$\left\| \frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} \leq \|a\|_{H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k+2}(R^{n+1})} \leq M(1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

para algum $M > 0$ (M genérico). (Teoremas 0.6.1 e 0.9.1)

$$\|\Delta^2 v_{k-\ell}\|_Y \leq \frac{M}{\varepsilon} [\|h^{(m)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1-\ell+k+2}) \|h\|_Y]$$

portanto

$$(1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \varepsilon \cdot \|\Delta^2 v_{k-\ell}\|_Y \leq M [\|h^{(m)}\|_Y + \dots +$$

$$(1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y]$$

A mesma análise vale para todos os outros termos.

Prosseguindo; precisamos estimar na norma Y todos os termos da forma:

$$\partial_t^{m_1-2} \partial_x^\gamma v \quad \gamma \in N^n; \quad |\gamma| = 3$$

Isto se fará da seguinte forma. Consideremos:

$$\varepsilon \Delta [(1 + \varepsilon a) \Delta v_{m_1-2}] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v_{m_1-2}}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$\begin{aligned}
 & \epsilon \sum_{i=1}^n [c_i + (m_1-2) \frac{\partial m_i}{\partial t}] \frac{\partial v_{m_1-2}}{\partial x_i} + [1 + \epsilon d + \epsilon (m_1-2) \frac{\partial e}{\partial t}] v_{m_1-2} = \\
 & - \sum_{\ell=1}^{m_1-2} \{ \epsilon^2 \Delta \frac{\partial^\ell a}{\partial t^\ell} \cdot \Delta v_{m_1-\ell-2} \} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell b_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 v_{m_1-\ell-2}}{\partial x_i \partial x_j} + \\
 & \epsilon \sum_{i=1}^n [(m_1-2) \frac{\partial^\ell c_i}{\partial t^\ell} + (m_1-2) \frac{\partial^{\ell+1} m_i}{\partial t^{\ell+1}}] \cdot \frac{\partial v_{m_1-\ell-2}}{\partial x_i} + \\
 & \epsilon [(m_1-2) \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} + (m_1-2) \frac{\partial^{\ell+1} e}{\partial t^{\ell+1}}] v_{m_1-\ell-2} \} \\
 & \epsilon^2 \Delta [\frac{\partial^{m_1-2} a}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \Delta v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m_1-2} b_{ij}}{\partial t^{m_1-2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \\
 & \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{m_1-2} c_i}{\partial t^{m_1-2}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial^{m_1-2} d}{\partial t^{m_1-2}} - v_{m_1} - \epsilon \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_{m_1-1}}{\partial x_i} - \\
 & (\theta + \epsilon e) v_{m_1-1} + \frac{\partial^{m_1-2} h}{\partial t^{m_1-2}} = g
 \end{aligned}$$

Segue-se da hipótese da indução que g está em $H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)$. Então novamente pela hipótese da indução, teorema 1.4 capítulo I; teoremas 0.4.2 e 0.5.1 temos:

$$\| \partial_t^{m_1-2} \partial_x^\gamma v \|_Y \leq M (\| h^{(m_1)} \|_Y + \dots + (1 + \| u \|_{m_1+k+2}) \| h \|_Y).$$

A mesma estimativa para $\partial_t^{m_1-\delta} \partial_x^\gamma v$ onde $3 \leq \delta \leq m_1$; $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| - \delta = 1$. Donde concluímos o nosso lema.

□

Nosso próximo lema nos permitirá verificar mos a hipótese H2(H2i) do Teorema de Nash.

Lema 3.11

Se $u \in \Omega$ então $L(u) / H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})^\varepsilon$
 $\mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}, H_{\tau, 2\pi}^{m-r})$ onde $r = \alpha - 1$. Além disso:
 $\|L(u)h\|_{m-r} \leq M \|h\|_{m-\alpha}; \forall u \in \Omega, h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$
 conveniente e $M > 0$ independente de ε .

Prova

Lema 3.10 para o caso $m_1 = m - \alpha$ e notar que $m_1 + k + 2 = m - 2$.

Verifiquemos, agora; a hipótese (H2ii).

Lema 3.12

Se $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ então
 $F'(u)L(u)h = h$ para todo $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m+r-\alpha}(R^{n+1})$

Prova A mesma do lema 1.13

Verifiquemos a hipótese (H2iii).

Lema 3.13

$$L(.)F(.): \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1})$$

além disso:

$$\|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M(1+\|u\|_{m+p+r})$$

para todo $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente e para algum $M > 0$ independente de ε .

Prova

$u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ então
 $F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p-1}(R^{n+1})$ $u \in C_{\tau, 2\pi}^{m+p+1}(R^{n+1})$ (teorema imersão de Sobolev) e $A(t, \varepsilon)$ é $m + p - 1$ vezes fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$. Segue-se do lema 3.10 que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(m-p)$ tem-se:

$$1) L(u)F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1}) \text{ e}$$

$$2) \|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M[\|(F(u))^{(m+p-1)}\|_Y + (1+\|u\|_{k+4}) \cdot$$

$$\|(F(u))^{(m+p-2)}\|_Y + \dots + (1+\|u\|_{m+p+k+1}) \cdot \|(F(u))^{(1)}\|_Y]$$

$$(1+\|u\|_{m+p+k+1}) \|F(u)\|_Y]$$

Porém:

$$\| (F(u))^{(i)} \|_Y \leq \| F(u) \|_{H_{\tau, 2\pi}^i(R^{n+1})} \leq M(1 + \|u\|_{i+4})$$

donde:

$$\| L(u) F(u) \|_Y \leq M(1 + \|u\|_{m+p+3}) + (1 + \|u\|_{k+4}).$$

$$(1 + \|u\|_{m+p+2}) + \dots + (1 + \|u\|_{m+p+k+1})(1 + \|u\|_5) +$$

$$(1 + \|u\|_{m+p+k+1})(1 + \|u\|_4) \leq M \cdot (1 + \|u\|_{m+p+r}) \quad \text{onde}$$

$$r = \alpha - 1 = k + 3.$$

Esta última desigualdade é consequência da desigualdade de Gagliardo Nirenberg; pois para os produtos da forma:

$$\|u\|_s \cdot \|u\|_{m+p+k+6-s} \quad \begin{matrix} m \leq s \leq m+p+k+3 \\ m \leq m+p+k+6-s \leq m+p+k+3 \end{matrix}$$

temos:

$$\|u\|_s \leq C \|u\|_{m+p+k+3}^a \cdot \|u\|_m^{1-a} \quad a = \frac{s-m}{p+k+3}$$

$$\|u\|_{m+p+k+6-s} \leq C \|u\|_{m+p+k+3}^b \|u\|_m^{1-b} \quad b = \frac{p+k+6-s}{p+k+3}$$

Agora:

$$a + b = \frac{p+k+6-m}{p+k+3} \leq 1 \quad \text{pois } m \geq 3$$

donde concluimos o nosso lema.

Finalizando:

A condição H3 estará satisfeita desde que $0 \leq \varepsilon \ll 1$; portanto as condições do teorema de Nash estarão satisfeitas. Logo se $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente, a nossa equação inicial terá uma solução $u=u(t,x,\varepsilon) \in \Omega_{\tau,2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$.

Ainda; $F: \Omega_1 = \{u \in H_{\tau,2\pi}^{m-r}(\mathbb{R}^{n+1}) / \|u\|_{m-r} < 1\} \rightarrow H_{\tau,2\pi}^{m-r-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})$ está bem definida; $F \in C^2(\Omega_1, H_{\tau,2\pi}^{m-r-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1}))$

$\|F''(u)h.k\|_{m-r-\alpha} \leq M. \|h\|_{m-r} \|k\|_{m-r}$; $L: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H_{\tau,2\pi}^{m-r-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1}); H_{\tau,2\pi}^{m-2r}(\mathbb{R}^{n+1}))$ se $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente, $\|L(u)h\|_{m-2r} \leq M. \|h\|_{m-r-\alpha}$ para todo $h \in H_{\tau,2\pi}^{m-r-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $u \in \Omega$. Além disso; $L(u)F'(u)v = v \forall v \in H_{\tau,2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ $u \in \Omega$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Donde segue a unicidade de $u = u(t,x,\varepsilon)$ em alguma vizinhança conveniente de zero em $H_{\tau,2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$

A última parte do nosso resultado principal é consequência do fato que $\|u(\varepsilon)\|_m \leq K \|F(0)\|_{m,\alpha}^\eta = K \|\varepsilon f(\dots, 0, 0 \dots 0)\|_{m-\alpha}^\eta \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver teorema de Nash).

□

APLICAÇÃO 4

Além das considerações feitas no início da aplicação 3, nesta aplicação destacamos também o fato que u_{tt} pertence à parte perturbada.

Consideremos a equação:

$$(I) \quad u_t + u + \varepsilon(u_{tt} - \Delta u + f(t, x, u, u_t, \nabla u, \nabla \nabla u)) = 0$$

onde:

$f: \mathbb{R}^{n+1} \times (-\delta, \delta)^\mu \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função

τ -periódica em t , 2π -periódica em $x_1, x_2, \dots, x_n$ separadamente, $\delta > 1$, $\mu = 2 + n(1+n)$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Resultado Principal

Teorema 4.1

Suponhamos que f seja suficientemente suave e que $\frac{\partial f}{\partial u_{x_i x_j}}(t, x, 0, \dots, 0) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Então: existe um $\varepsilon_0 > 0$, tal que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existe uma única solução clássica de I, $u = u(t, x, \varepsilon)$ em uma conveniente vizinhança de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Além disso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\varepsilon)\|_{H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$$

Na verdade, tudo o que faremos daqui para frente é no sentido de demonstramos esse teorema dentro do contexto do teorema de Nash.

Vamos, inicialmente, fazer algumas mudanças de variáveis que nos facilitará a aplicação do teorema de Nash.

Seja: $u = \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$ logo:

$$(I) \quad \varepsilon v_t + \varepsilon v + \varepsilon [\varepsilon v_{tt} - \varepsilon \Delta v + f(t, x, \varepsilon v, \varepsilon v_t, \varepsilon \nabla v, \varepsilon \nabla \nabla v)] = 0$$

$$\iff v_t + v + \varepsilon v_{tt} - \varepsilon \Delta v + f(t, x, \varepsilon v, \varepsilon v_t, \varepsilon \nabla v, \varepsilon \nabla \nabla v) = 0$$

Como por hipótese f é suficientemente suave e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i x_j}(t, x, 0, \dots, 0) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{segue que:}$$

$$f(t, x, \varepsilon v, \varepsilon v_t, \varepsilon \nabla v, \varepsilon \nabla \nabla v) = f(t, x, 0, \dots, 0) +$$

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial u}(t, x, 0, \dots, 0) \cdot v + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u_t}(t, x, 0, \dots, 0) \cdot v_t + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}(t, x, 0, \dots, 0) \cdot v_{x_i} +$$

$$\varepsilon^2 g(t, x, v, v_t, \nabla v, \nabla \nabla v, \varepsilon).$$

Portanto:

$$(I) \quad \varepsilon v_{tt} - \varepsilon \Delta v + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}(t, x, 0, \dots, 0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u} \cdot v$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u_t} \cdot v_t + v_t + v + f(t, x, 0, \dots, 0) + \varepsilon^2 g(t, x, v, v_t,$$

$$\nabla v, \nabla \nabla v, \varepsilon) = 0$$

$$\text{Seja: } v = w + v_0 \quad \text{onde}$$

$$v_0(t, x) = e^{-t} v_1(x) - \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, x, 0, \dots, 0) ds$$

$$v_1(x) = \frac{1}{e^{-\tau} - 1} \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} f(s, x, 0, \dots, 0) ds$$

Logo:

$$(1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u}) w_t + (1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u}) \cdot w + \varepsilon [w_{tt} - \Delta w + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} +$$

$$\varepsilon g(t, x, w + v_0, \dots, \nabla \nabla (w + v_0), \varepsilon) + v_0_{tt} - \Delta v_0 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot v_0 +$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} \cdot v_0_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_i}]$$

Portanto, consideremos a função:

$$F: \Omega \subset H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$$

definida por:

$$F(u) = (1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u_t}(t, x, 0, \dots, 0)) \cdot u_t + (1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u}(t, x, 0, \dots, 0)) u$$

$$+ \varepsilon [u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \varepsilon g(t, x, u + v_0, \dots, \nabla \nabla (u + v_0), \varepsilon)$$

$$+ v_0_{tt} - \Delta v_0 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot v_0 + \frac{\partial f}{\partial u_t} \cdot v_0_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_i}]$$

onde:

$$1) \quad \Omega = \{u \in H_{\tau, 2\pi}^m(\mathbb{R}^{n+1}) / \|u\|_m < 1\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad m = j + k \quad \text{com} \quad k = \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$3) \quad \alpha = k + 2 \quad j \geq k + 4$$

Lema 4.1

Se $f \in C^j$ então F está bem definida.

Prova A mesma do lema 1.1. Observar a relação entre f e g .

Lema 4.2

Se $f \in C^{j+2}$ então $F \in C^2(\Omega, H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^{n+1}))$ e a hipótese (H1) do teorema de Nash está verificada.

Prova Comentário análogo ao comentário do lema 1.2.

Observação 4.1

$$\begin{aligned}
 F'(u)v &= \varepsilon v_{tt} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\delta_j^i - \frac{\varepsilon}{2} (\frac{\partial g}{\partial u_{x_i x_j}} + \frac{\partial g}{\partial u_{x_j x_i}})] \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}(t, x, 0, \dots, 0) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial u_{x_i}}) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \\
 &(1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u} + \varepsilon^2 \frac{\partial g}{\partial u}) \cdot v + (1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u_t} + \varepsilon^2 \frac{\partial g}{\partial u_t}) v_t
 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 F'(u)v &= \varepsilon v_{tt} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \\
 &(1 + \varepsilon c) v + (1 + \varepsilon d) v_t
 \end{aligned}$$

Observação 1.2

Mais tarde veremos que $r = \alpha$ e como precisamos que $m \geq \max\{\alpha + r, 2r\} = 2r$, teremos $j \geq k+4$.

Passemos, agora, à verificação da hipótese (H2) [(H2)i, (H2)ii, (H2)iii] do teorema de Nash.

Transformemos, $F'(u)v = h$ em um sistema de evolução:

$$v_t = \frac{1}{\varepsilon} w$$

$$w_t = \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)v -$$

$$\frac{(1+\varepsilon d)}{\varepsilon} w + h$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \frac{0}{Z} &= A(t, \varepsilon) Z + g & Z &= (v, w) & g &= (0, h) \end{aligned}$$

Nosso próximo lema mostrará que o sistema acima formalmente considerado, se insere em um contexto de sistema de evolução bem posto.

Lema 4.3

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{0}{Z} = A(t, \varepsilon) Z \\ Z(s) = Z_0 \in D(A) \end{cases}$$

$$\text{onde } X = H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n) \times L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \quad D(A) \equiv H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^1(\mathbb{R}^n)$$

é um problema de Cauchy bem posto se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Prova

Análoga à prova do lema 1.3.

Indiquemos por $U(t, s, \varepsilon)$ $s \leq t$ $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

o operador de evolução associado ao problema de Cauchy acima.

Lema 4.4

O sistema $\dot{Z} = A(t, \varepsilon)Z$ admite um funcional de Liapunov V satisfazendo $\dot{V} + \beta V \leq 0$ para algum $\beta > 0$ (independente de ε); para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente e para toda solução do sistema considerado.

Prova

Consideremos o funcional:

$V: X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$V(v, w) = \int_{\mathbb{R}} \alpha \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} v^2 + \frac{\alpha}{2} w^2 +$$

$$\delta v w dx$$

Segue-se da forma de a_{ij} que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq k \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \text{ para algum } k > 0$$

e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Ainda:

$$\delta^2 - \alpha\delta = \delta(\delta - \alpha) < 0 \quad \text{se} \quad 0 < \delta < \alpha.$$

Portanto V é definida positiva.

$$\begin{aligned} \frac{0}{V} + \beta V &= \int_R (\alpha w + \delta v) \left[\varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \right. \\ &\quad \left. (1 + \varepsilon c) v - \frac{(1 + \varepsilon d)}{\varepsilon} w \right] + \alpha \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \\ &\quad + \alpha \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\delta}{\varepsilon} vw + \frac{\delta}{\varepsilon} w^2 + \\ &\quad \alpha \beta \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\delta \beta}{2} v^2 + \frac{\alpha \beta}{2} w^2 + \delta \beta v w dx = \\ &= \int_R -\varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\delta - \frac{\alpha \beta \varepsilon}{2} \right) a_{ij} - \frac{\alpha \varepsilon}{2} \cdot \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right] \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \\ &\quad - \left[\delta (1 - \beta/2) + \varepsilon \delta c \right] v^2 - \left[\frac{\alpha - \delta}{\varepsilon} + \alpha (d - \beta/2) \right] w^2 - \\ &\quad \left[\delta (d - \beta) + \alpha + \varepsilon \alpha c \right] vw - \alpha \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot w \\ &\quad - \delta \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v dx \leq 0 \\ &\text{se } 0 < \frac{\delta \beta}{2} < \delta < \alpha \quad \text{e} \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

□

Ainda, existem, $m_1 > 0$ e $M_1 > 0$ tais

$$1) \quad m_1 \| (v, w) \|_{X_1}^2 \leq V(v, w) \leq M_1 \| (v, w) \|_{X_1}^2$$

onde:

$$X_1 = L^2_{2\pi}(R^n) \times L^2_{2\pi}(R^n) \quad e \quad X = H^1_{2\pi}(R^n) \times L^2_{2\pi}(R^n)$$

$$2) \quad m_1 \varepsilon^2 \|(v, w)\|_X^2 \leq V(v, w) \leq M_1 \|(v, w)\|_X^2$$

donde vemos que:

$$a) \quad \|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq \frac{M}{\varepsilon} \cdot e^{-\beta(t-s)} \quad s \leq t$$

$$b) \quad \|U(t, s, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq e^{-\beta(t-s)} \quad s \leq t$$

$$X_\varepsilon = (X, \|\cdot\|_\varepsilon) \quad \|(v, w)\|_\varepsilon = \sqrt{V(v, w)}$$

Aqui está um ponto delicado;

$\|A^{(1)}(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X, X)} \leq \sqrt{\varepsilon}M$ e portanto não temos mais a condição suficiente para que o sistema evolutivo:

$$(II) \quad \overset{0}{Z} = (A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon))Z$$

tenha decaimento exponencial o que nos impede de garantirmos a existência de soluções τ -periódica para:

$$\overset{0}{Z} = (A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon))Z + g(t)$$

para qualquer $g \in L^2_\tau(R, X)$.

Consequentemente temos problema com relação à regularidade da solução de:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \varepsilon)Z + g$$

em função da regularidade de u e g .

Contornamos essa dificuldade; definindo-se uma nova norma sobre X , o que facilitará a aplicação da teoria linear, além de nos permitir limitação uniforme (em ϵ) para $L(u)$.

Consideremos sobre X a norma:

$$\| (v, w) \|_{\epsilon} = \sqrt{V(v, w)}$$

e indiquemos por $X_{\epsilon} = (X, \| \cdot \|_{\epsilon})$.

Os lemas 4.3 e 4.4 e o teorema 1.3 capítulo I nos permitem afirmar que dado $g \in L^1_{\tau}(R, X_{\epsilon})$ existe uma única solução mild τ -periódica e contínua da equação:

$$\overset{0}{Z} = A(t, \epsilon)Z + g$$

Agora; se $h \in L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ então $g = (0, h) \in L^2_{\tau}(R, X_{\epsilon})$ (Teorema Fubini) e assim a única solução mild τ -periódica:

$$Z(t) = U(t, s, \epsilon)Z(s) + \int_s^t U(t, \tau, \epsilon)g(\tau)d\tau$$

pertence a $C^0_{\tau}(R, X_{\epsilon})$ além disso:

$$\| Z \|_{L^2_{\tau}(R, X_{\epsilon})} \leq M \cdot \| h \|_{L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \quad M > 0$$

mas

$$\| Z \|_{L^2_{\tau}(R, X_{\epsilon})} = \left(\int_0^{\tau} \| Z(t) \|_{X_{\epsilon}}^2 dt \right)^{1/2} \geq \left(\int_0^{\tau} \| Z(t) \|_{X_1}^2 dt \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{R_1} (v^2 + w^2) dt dx \right)^{1/2} \geq \|v\|_{L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})}$$

(Na verdade estamos desprezando uma derivada em t para v , porque em x nós não ganhamos nenhuma derivada!...)

Portanto:

$$\|v\|_{L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq M \cdot \|h\|_{L^2_{2\pi}(R^{n+1})}$$

Definição 4.1

Dado $u \in \Omega$; seja $L(u): L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}) \rightarrow L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ a aplicação linear e contínua definida por:

$$L(u)h = v$$

onde v é a primeira componente da solução mild τ -periódica da equação:

$$\frac{d}{dt} Z = A(t, \varepsilon) Z + g(t) \quad g = (0, h)$$

Nosso próximo passo será aumentarmos a regularidade de v em função da regularidade de h e u .

Lema 4.5

Para todo $u \in \Omega$, se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente então $\|A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq M$; para al gum $M > 0$ independente de ε .

Prova

Sejam $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$, $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$ tais que:
 $A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \implies$

$$h = \frac{1}{\varepsilon} K$$

$$k = \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)H - (1+\varepsilon d)h$$

Donde se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente então:

$$1) H \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} (\|h\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

(usamos aqui o teorema de regularização 0.4.2)

Agora:

$$A(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \implies$$

$$v = \frac{1}{\varepsilon} K = h \quad e$$

$$w = \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)H - (1+\varepsilon d)h$$

donde:

$$\|A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\|_{\varepsilon}^2 = \left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon}^2 = V(v, w) =$$

$$\int_R \alpha \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} v^2 + \frac{\alpha}{2} w^2 + \delta v w dx$$

$$= \int_R \alpha \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\delta}{2} h^2 + \frac{\alpha}{2} w^2 + \delta h w dx$$

$$\leq M^2 \cdot V(h, k) = M^2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon}^2 \text{ pois } \|w\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq$$

$$M_1 (\|h\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)}); \text{ portanto}$$

$$\|A(0, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\|_{\varepsilon} \leq M \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ M-genérico}$$

□

Lema 4.6

Se $u \in \Omega$; $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente e $\ell \in \mathbb{N}^*$ é tal que $A(t, \varepsilon)$ seja ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável, então existe um $M > 0$, independente de ε ; mas eventualmente dependente de u ; tal que

$$\|A^{(\ell)}(t, \varepsilon)A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X_{\varepsilon}, X_{\varepsilon})} \leq \sqrt{\varepsilon} M$$

Prova

Sejam $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$, $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in X$ tais que:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) \cdot A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$$

Análogo ao que fizemos no lema anterior;
se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente então existe $M > 0$ (independente de ε) tal que:

$$1) H \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)$$

$$2) \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} \cdot (\|h\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

Agora:

$$A^{(\ell)}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \overline{\ell \geq 1}$$

$$v = 0$$

$$w = \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\ell b_i}{\partial t^\ell} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^\ell c}{\partial t^\ell} \cdot H \\ - \varepsilon \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} \cdot h$$

$$\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \|_\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \|w\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^\ell a_{ij}}{\partial t^\ell} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(\mathbb{R}^{n+1})} \\ \cdot \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \varepsilon \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^\ell b_i}{\partial t^\ell} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(\mathbb{R}^{n+1})} \cdot \|H\|_{H_{\tau, 2\pi}^1(\mathbb{R}^{n+1})} \\ + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \varepsilon \left\| \frac{\partial^\ell c}{\partial t^\ell} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0} \cdot \|H\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \varepsilon \left\| \frac{\partial^\ell d}{\partial t^\ell} \right\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(\mathbb{R}^{n+1})} \|h\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{\varepsilon} M. (\|h\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \|k\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^{n+1})}) \leq \sqrt{\varepsilon} M \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon$$

Portanto:

$$\|A^{(\ell)}(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot M$$

□

Lema 4.7 O problema de Cauchy

$$\dot{Z} = (A(t, \varepsilon) + A'(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)) Z$$

$$Z(s) = Z_0 \in D(A)$$

é um problema de Cauchy bem posto e o operador de evolução associado admite decaimento exponencial. ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente).

Prova A mesma do lema 1.8.

Lema 4.8

Sejam $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{\ell+k+2}(\mathbb{R}^{n+1})$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente, $\ell \in \mathbb{N}$; $A(t, \varepsilon)$ ℓ -vezes fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$. Então existe um $M > 0$ independente de u, ε, ℓ tal que:

$$d(\ell) \leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2})$$

onde:

$$1) \quad d(\ell) = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ 0 \leq s \leq \ell}} \|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)}$$

2) k é o número natural definido no início dessa aplicação

Prova

Sejam $(h, q) \in X_\varepsilon$, $(v, w) \in X_\varepsilon$ tais que:

$$A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \implies$$

$$h = \frac{1}{\varepsilon} K$$

$$q = \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - (1+\varepsilon c)H - (1+\varepsilon d)h$$

Portanto; existem, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ e $M > 0$

tais que:

$$1) \quad H \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n) \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad u \in \Omega$$

$$2) \quad \|H\|_{H_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\varepsilon} (\|h\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)} + \|q\|_{L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n)})$$

$$3) \|H\|_{L^2_{2\pi}(R^n)} \leq M(\|h\|_{L^2_{2\pi}(R^n)} + \|q\|_{L^2_{2\pi}(R^n)})$$

Caso $s = 0$ é semelhante ao lema 4.5

Suponhamos $1 \leq s \leq \ell$

$$A^{(s)}(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{s \geq 1}$$

$$v = 0$$

$$w = \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^s a_{ij}}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial^s b_i}{\partial t^s} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial^s c}{\partial t^s} \cdot H \\ - \varepsilon \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \cdot h$$

portanto,

$$\|A^{(s)}(t, \varepsilon) A^{-1}(0, \varepsilon) \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}\|_{\varepsilon} = \|w\|_{L^2_{2\pi}(R^n)} \leq$$

$$\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^s a_{ij}}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \cdot \|H\|_{H^2_{2\pi}(R^n)} +$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^s b_i}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \cdot \|H\|_{H^1_{2\pi}(R^n)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial^s c}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}} \cdot$$

$$\|H\|_{L^2_{2\pi}(R^n)} + \left\| \frac{\partial^s d}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \cdot \|h\|_{L^2_{2\pi}}$$

Mas:

$$\left\| \frac{\partial^s a_{ij}}{\partial t^s} \right\|_{C^0_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq \|a_{ij}\|_{C^{\ell}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq \|a_{ij}\|_{H^{\ell+k}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})}$$

$$\leq M(1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \quad (\text{analogamente para os outros termos})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2_{2\pi}(R^n)} &\leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \cdot (\|h\|_{L^2_{2\pi}(R^n)} + \|q\|_{L^2_{2\pi}(R^n)}) \\ &\leq M \cdot (1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \cdot \left\| \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \right\|_{\epsilon} \end{aligned}$$

donde

$$d(\ell) \leq M(1 + \|u\|_{\ell+k+2}) \quad (M\text{-genérico})$$

Lema 4.9

Se $h \in H^{m_1}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$; f suficientemente suave, $m_1 \in \mathbb{N}$, $u \in \Omega \cap H^{\xi}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$
 $\xi \geq \max\{m, m_1 + \alpha\}$ e $v = L(u)h$ então existe um $\epsilon_0 > 0$,
 $\epsilon_0 = \epsilon_0(m_1) \ll 1$ tal que:

$$1) \ v \in H^{m_1}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}) \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ e}$$

2) Existe um $M > 0$ dependente de f e ϵ_0 tal que:

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{m_1}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} &\leq M \cdot [\|h^{(m_1)}\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4}) \cdot \\ &\|h^{(m_1-1)}\|_Y + \dots + (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h^{(1)}\|_Y + \\ &+ (1 + \|u\|_{m_1+k+2}) \|h\|_Y] \end{aligned}$$

onde $Y = L^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ e k está definido no início desta aplicação.

Prova

Poderíamos considerar a mesma prova feita na aplicação 1, referente ao mesmo lema; não fosse o inconveniente que a constante M que aparece na estimativa depende, agora, de ϵ . Isto é o que justifica considerarmos $r = \alpha$, em outras palavras v , a imagem de h por meio de $L(u)$ não ganha um mesmo número de derivadas em $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ uniformemente (em ϵ) estimadas em função de h quando resolvemos a equação $F'(u)v = h$.

Os teoremas de regularização fraca (0.4.1 e 0.4.2) que muito nos ajudaram nas aplicações anteriores, agora, parece-nos que falha pelo fato de não conseguirmos estimativas uniformes (em ϵ) para o gradiente de v em relação a $x_1, x_2, \dots, x_n$.

O que faremos, a seguir, é esboçarmos um caminho de como obtermos a estimativa uniforme (em ϵ) afirmada nesse nosso lema, uma vez que sua formalização tornou-se difícil até o presente momento.

$$\dot{z} = A(t, \epsilon)z + g \qquad z = (v, w) \qquad g = (0, h)$$

$$A(t, \epsilon)z = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\epsilon} w \\ \epsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \epsilon \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - (1+\epsilon c) v - \\ \frac{(1+\epsilon d)}{\epsilon} w \end{array} \right]$$

Indiquemos por:

$$z_r \equiv \frac{\partial z}{\partial x_r} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_r} \quad \frac{\partial w}{\partial x_r} \right) \equiv (v_r, w_r) \quad 1 \leq r \leq n$$

Portanto:

$$\begin{aligned} z_r^0 &= \frac{\partial}{\partial x_r} A(t, \varepsilon) z = A(t, \varepsilon) z_r + \left[\begin{aligned} &0 \\ &\varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \\ &\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_r} \cdot v_i - \varepsilon \frac{\partial c}{\partial x_r} \cdot v - \frac{\partial d}{\partial x_r} \cdot w \end{aligned} \right] = [A(t, \varepsilon) + B_r^r] z_r + \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n B_i^r z_i + C^r \cdot z + \frac{\partial q}{\partial x_r}$$

onde os operadores B_i^r e C^r são definidos por:

$$\begin{aligned} B_i^r z &= \left[\begin{aligned} &0 \\ &\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \varepsilon \frac{\partial b_i}{\partial x_r} \cdot v \end{aligned} \right] \quad 1 \leq i, \quad r \leq n \\ C^r z &= \left[\begin{aligned} &0 \\ &-\varepsilon \frac{\partial c}{\partial x_r} \cdot v - \frac{\partial d}{\partial x_r} \cdot w \end{aligned} \right] \quad 1 \leq r \leq n \end{aligned}$$

$$B_i^r \in L(X_\varepsilon, X_\varepsilon); \quad \|B_i^r\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \varepsilon \cdot M \quad \text{para algum } M > 0$$

$$C^r \in L(X_\varepsilon, X_\varepsilon); \quad \|C^r\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq M \quad \text{para algum } M > 0$$

Consideremos o sistema:

$$(I) \begin{cases} \overset{0}{z}_1 = [A(t, \varepsilon) + B_1^1(t, \varepsilon)] z_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n B_i^1 z_i + C^1 z + \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ \overset{0}{z}_2 = [A(t, \varepsilon) + B_2^2(t, \varepsilon)] z_2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n B_i^2 z_i + C^2 z + \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \overset{0}{z}_n = [A(t, \varepsilon) + B_n^n(t, \varepsilon)] z_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n B_i^n z_i + C^n z + \frac{\partial q}{\partial x_n} \end{cases}$$

sobre X_ε^n .

Agora, o problema de Cauchy associado à equação $\overset{0}{z} = A(t, \varepsilon) z$ é bem posto (lema 4.3), o operador de evolução associado possui decaimento exponencial (lema 4.4). Como $A(t, \varepsilon) B_R^r(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)$ está bem definida; pertence a $L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)$ é fortemente contínua (em t) e $\|B_R^r\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \varepsilon.M$ segue-se do teorema 0.1.2 que o problema de Cauchy associado à equação: $\overset{0}{z} = [A(t, \varepsilon) + B_R^r(t, \varepsilon)] z$ é bem posto e segue da desigualdade de Gronwall que o operador de evolução também possui decaimento exponencial se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente.

Consideremos o sistema:

$$(II) \begin{cases} \overset{0}{z}_1 = [A(t, \varepsilon) + B_1^1(t, \varepsilon)] z_1 \\ \overset{0}{z}_2 = [A(t, \varepsilon) + B_2^2(t, \varepsilon)] z_2 \\ \vdots \\ \overset{0}{z}_n = [A(t, \varepsilon) + B_n^n(t, \varepsilon)] z_n \end{cases}$$

o qual denotaremos por:

$$\overset{0}{Z} = A_1(t, \varepsilon) Z$$

onde $D(A_1(t, \varepsilon)) = (D(A))^n \subset X_\varepsilon^n$ $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

O problema de Cauchy associado a II é bem posto e o operador de evolução associado possui decaimento exponencial uma vez que esse sistema é não acoplado e as mesmas afirmações são verdadeiras para cada equação.

Logo o sistema:

$$\overset{0}{z}_1 = [A(t, \varepsilon) + B_1^1(t, \varepsilon)] z_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n B_i^1 z_i$$

$$\overset{0}{z}_2 = [A(t, \varepsilon) + B_2^2(t, \varepsilon)] z_2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n B_i^2 z_i$$

$$\overset{0}{z}_n = [A(t, \varepsilon) + B_n^n(t, \varepsilon)] z_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n B_i^n z_i$$

também dá origem a um problema de Cauchy bem posto (teorema 0.1.4) e o operador de evolução também possui decaimento exponencial pois $\|B_i^r\|_{L(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \varepsilon \cdot M$ para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente, além de fortemente continuamente diferenciável.

Portanto, se $h \in H_{\tau, 2\pi}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ então o

$$z_1^0 = [A(t, \varepsilon) + B_1^1(t, \varepsilon)]z_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n B_i^1 z_i + C^1 z + \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

$$z_2^0 = [A(t, \varepsilon) + B_2^2(t, \varepsilon)]z_2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n B_i^2 z_i + C^2 z + \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

$$z_n^0 = [A(t, \varepsilon) + B_n^n(t, \varepsilon)]z_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n B_i^n z_i + C^n z + \frac{\partial g}{\partial x_n}$$

admite uma solução $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ mild τ -periódica e contínua. Além disso:

$$\|z\|_{L_\tau^2(R, X_\varepsilon^n)} \leq M \cdot \left(\sup_{\substack{t \in R \\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}} \|C(t, \varepsilon)\|_{L(X_\varepsilon^n, X_\varepsilon^n)} \cdot \|z\|_{L_\tau^2(R, X_\varepsilon)} + \right.$$

$$\left. \|\nabla g\|_{L_\tau^2(R, X_\varepsilon^n)} \right)$$

onde:

$$C(t, \varepsilon)z = (C^1(t, \varepsilon)z_1, \dots, C^n(t, \varepsilon)z_n)$$

$$g = ((0, h), \dots, (0, h))$$

$$\|z\|_{L_\tau^2(R, X_\varepsilon^n)}^2 = \left(\int_0^\tau \sum_{i=1}^n v(z_i(t)) dt \right)^{1/2} \geq \|\nabla v\|_Y$$

$$\|C^i(\frac{v}{w})\|_{X_\varepsilon} \leq [\varepsilon \|\frac{\partial c}{\partial x^i}\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})} + \|\frac{\partial d}{\partial x^i}\|_{C_{\tau, 2\pi}^0(R^{n+1})}] \cdot$$

$$(\|v\|_{L_{2\pi}^2(R^n)} + \|w\|_{L_{2\pi}^2(R^n)}) \leq M(1 + \|u\|_{k+3}) \|\frac{v}{w}\|_{X_\varepsilon} \quad (\text{Teo } \underline{0})$$

remas 0.6.1 e 0.9.1).

Portanto, se $h \in H_{\tau, 2\pi}^1(R^{n+1})$ então

$$1) \quad v \in H_{\tau, 2\pi}^1(\mathbb{R}^{n+1}) \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad e$$

$$2) \quad \|v\|_{H_{\tau, 2\pi}^1(\mathbb{R}^{n+1})} \leq M(\|\nabla h\|_Y + (1+\|u\|_{k+3})\|h\|_Y)$$

Suponhamos, agora, $h \in H_{\tau, 2\pi}^2(\mathbb{R}^{n+1})$

Indiquemos por:

$$z_{rs} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_r \partial x_s} ; \frac{\partial^2 w}{\partial x_r \partial x_s} \right) \equiv (v_{rs}, w_{rs}) \quad 1 \leq r, s \leq n$$

então:

$$\begin{aligned} z_{rs} = & (A+B_r^r+B_s^s)z_{rs} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n B_i^r z_{is} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n B_i^s z_{ri} + \\ & \sum_{i=1}^n B_i^{rs} z_i + C^r z_s + C^s z_r + C^{rs} z + \frac{\partial^2 g}{\partial x_r \partial x_s} \end{aligned}$$

onde:

$$B_i^{rs} z = \left(\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad \varepsilon \frac{\partial b_i}{\partial x_r \partial x_s} \cdot v \right)$$

e

$$C^{rs} z = \left(-\varepsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x_r \partial x_s} \cdot v - \frac{\partial^2 d}{\partial x_r \partial x_s} \cdot w \right)$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente chegaremos a:

$$\|\nabla^2 z\|_{L^2_\tau(R, X_\epsilon^{n^2})} \leq M[\|\nabla^2 g\|_{L^2_\tau(R, X_\epsilon^{n^2})} + (1 + \|u\|_{k+4}) \|\nabla z\|_{L^2_\tau(R, X_\epsilon^n)} (1 + \|u\|_{k+4}) \|z\|_{L^2_\tau(R, X_\epsilon)}]$$

Usamos aqui os teorema 0.6.1 - 0.9.1 -

I.1.4.

Donde (Teorema 0.5.1):

$$1) v \in H^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}) \text{ e}$$

$$2) \|v\|_{H^2_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})} \leq M(\|\nabla^2 h\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4}) \|\nabla h\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4}) \|h\|_Y)$$

Suponhamos, agora, que $h \in H^3_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$

Indiquemos por:

$$z_{rs\ell} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_r \partial x_s \partial x_\ell} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_r \partial x_s \partial x_\ell}; \frac{\partial^3 w}{\partial x_r \partial x_s \partial x_\ell} \right) = (v_{rs\ell}, w_{rs\ell})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} z^0_{rs\ell} &= (A + B^r_r + B^s_s + B^\ell_\ell) z_{rs\ell} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n B^r_i z_{is\ell} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n B^s_i z_{ri\ell} \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n B^\ell_i z_{rsi} + \sum_{i=1}^n B^{r\ell}_i z_{is} + \sum_{i=1}^n B^{s\ell}_i z_{ri} + \sum_{i=1}^n B^{rs}_i z_{i\ell} \\ &\quad + C^s z_{r\ell} + C^r z_{s\ell} + C^\ell z_{rs} + C^{rs} z_\ell + C^{s\ell} z_r + C^{r\ell} z_s + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n B^{rs\ell}_i z_i + C^{rs\ell} z + \frac{\partial^3 q}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\ell} \end{aligned}$$

De modo análogo chegaremos a:

$$\begin{aligned} \|\nabla^3 z\|_{L^2_\tau(R, X_\varepsilon^{n^3})} &\leq M(\|\nabla^3 g\|_{L^2_\tau(R, X_\varepsilon^{n^3})} + (1 + \|u\|_{k+1}) \\ \|\nabla^2 z\|_{L^2_\tau(R, X_\varepsilon^{n^2})} &+ (1 + \|u\|_{k+5}) \|\nabla z\|_{L^2_\tau(R, X_\varepsilon^n)} + \\ (1 + \|u\|_{k+5}) \|z\|_{L^2_\tau(R, X_\varepsilon)} \end{aligned}$$

Usamos aqui os teorema 0.6.1 - 0.9.1 -

I.1.4.

Donde (Teorema 0.5.1)

$$\begin{aligned} 1) \ v \in H^3_{\tau, 2\pi}(R^{n+1}) &\leq M[\|\nabla^3 h\|_Y + (1 + \|u\|_{k+4}) \|\nabla^2 h\|_Y + \\ (1 + \|u\|_{k+5}) \|\nabla h\|_Y &+ (1 + \|u\|_{k+5}) \|h\|_Y] \end{aligned}$$

Notemos que em cada passo nós diminuimos ε_0 , se necessário.

Prosseguindo por esse processo nós encontraremos uma estimativa (uniforme em ε) para $\nabla^{m_1} v$ em função de h , o que em resumo permite-nos afirmar que obtemos estimativas uniformes para $\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}}, \frac{\partial^{m_1} v}{\partial x_i^{m_1}} \quad 1 \leq i \leq n$; mas isto é suficiente para obtermos nossa estimativa uma vez que a norma de $H^{m_1}_{\tau, 2\pi}(R^{n+1})$ é equivalente à norma.

$$\|v\| = \left(\int_{R_1} \left[v^2 + \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial x_i^{m_1}} \right)^2 \right] dt dx \right)^{1/2}$$

A estimativa (uniforme em ε) para $\frac{\partial^{m_1} v}{\partial t^{m_1}}$ é obtida pelo teorema I.1.4.

Donde nós concluímos nosso lema.

Nosso próximo lema permite-nos verificar a hipótese (H2) (H2i) do Teorema de Nash.

Lema 4.10

Se $u \in \Omega$ então $L(u) / H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})^\varepsilon$
 $\in (H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1}); H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1}))$ onde $r = \alpha$. Além disso

$$\|L(u)v\|_{m-r} \leq M \cdot \|h\|_{m-\alpha} \text{ para todo } u \in \Omega \text{ e}$$

$h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-\alpha}(R^{n+1})$, para algum $M > 0$ e para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente.

Prova:

Basta aplicar o lema 4.9 para o caso $m_1 = m - \alpha$ e notar que $m_1 + k + 2 = m$

□

Verifiquemos a hipótese (H2)ii.

Lema 4.11

Se $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$ então

$F'(u)L(u)h = h$ para todo $h \in H_{\tau, 2\pi}^{m+r-\alpha}(R^{n+1})$

Prova

A mesma do lema 1.13

Verifiquemos a hipótese (H2 iii)

Lema 4.12

$$L(.)F(.): \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1}) \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1})$$

além disso:

$$\|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M \cdot (1 + \|u\|_{m+p+r})$$

para todo $u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1})$; $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ conveniente e para algum $M > 0$ independente de ε .

Prova

$$u \in \Omega \cap H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r}(R^{n+1}) \quad \text{logo} \quad F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1})$$

$$u \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p+r} \xrightarrow[r=k+2]{} C_{\tau, 2\pi}^{m+p+2}(R^{n+1}) \quad \text{e assim} \quad A(t, \varepsilon)$$

é $m + p$ vezes fortemente continuamente diferenciável sobre $D(A)$; segue-se do lema 4.9 que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $(m+p)$ temos:

$$1) \quad L(u)F(u) \in H_{\tau, 2\pi}^{m+p}(R^{n+1})$$

$$2) \|L(u)F(u)\| \leq M[\|(F(u))^{(m+p)}\|_Y + (1+\|u\|_{k+4})].$$

$$\|(F(u))^{(m+p-1)}\|_Y + \dots + (1+\|u\|_{m+p})\|(F(u))^{(1)}\|_Y + \\ (1 + \|u\|_{m+p})\|F(u)\|]$$

Porém:

$$\|(F(u))^{(i)}\|_Y \leq \|F(u)\|_{H_{\tau, 2\pi}^i(\mathbb{R}^{n+1})} \leq M(1 + \|u\|_{i+2})$$

(teorema 0.9.1)

donde

$$\|L(u)F(u)\| \leq M.[(1+\|u\|_{m+p+2}) + (1 + \|u\|_{k+4}).$$

$$(1 + \|u\|_{m+p+1}) + (1 + \|u\|_{k+5})(1 + \|u\|_{m+p}) +$$

$$\dots + (1 + \|u\|_{m+p+k+2})(1 + \|u\|_3) +$$

$$(1 + \|u\|_{m+p+k+2})(1 + \|u\|_2)] \leq M(1 + \|u\|_{m+p+r})$$

Esta última desigualdade é consequência da desigualdade de Gagliardo Nirenberg pois para os produtos da forma:

$$\|u\|_s \cdot \|u\|_{m+p+k+5-s} \quad m \leq s \leq m + p + k + 2$$

$$m \leq m + p + k + 5 - s \leq m + p + k + 2$$

temos:

$$\|u\|_s \leq C. \|u\|_{m+p+k+2}^a \cdot \|u\|_m^{1-a} \quad a = \frac{s-m}{p+k+2}$$

$$\|u\|_{m+p+k+5-s} \leq C \|u\|_{m+p+k+2}^b \|u\|_m^{1-b} \quad b = \frac{p+k+5-s}{p+k+2}$$

mas,

$$a + b = \frac{p+k+5-m}{p+k+2} \leq 1 \quad \text{pois} \quad m \geq 3$$

donde concluimos o nosso lema.

Finalizando:

A condição (H3) estará satisfeita desde que $|\varepsilon| \ll 1$ portanto, as hipóteses (H1) (H2) (H3) do Teorema de Nash estão satisfeitas desde que $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ conveniente e portanto para cada ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, existe uma solução $u = u(t, x, \varepsilon)$ da nossa equação inicial.

Ainda $F: \Omega_1 = \{u \in H_{\tau, 2\pi}^{m-r}(R^{n+1}) / \|u\|_{m-r} < 1\} \rightarrow H_{\tau, 2\pi}^{m-2r}(R^{n+1})$ está bem definida;

$$F \in C^2(\Omega_1, H_{\tau, 2\pi}^{m-2r}(R^{n+1})); \quad \|F'(u) \cdot h \cdot k\|_{m-2r} \leq M \|h\|_{m-r} \cdot$$

$$\|k\|_{m-r}$$

$$L: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H_{\tau, 2\pi}^{m-2r}, H^{m-2r}) \quad \text{se} \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \quad \text{conveniente};$$

$$\|L(u)h\|_{m-2r} \leq M \|h\|_{m-2r}, \quad h \in H_{\tau, 2\pi}^{m-2r}(R^{n+1}) \quad \text{e} \quad u \in \Omega.$$

Além disso $L(u)F'(u)v = v$ para todo $v \in H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$, $u \in \Omega$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Donde segue a unicidade de $u = u(t, x, \varepsilon)$ em alguma vizinhança conveniente de zero em $H_{\tau, 2\pi}^m(R^{n+1})$.

A última parte do nosso resultado principal é consequência do fato que $\|u(\epsilon)\|_m \leq K \|F(0)\|_{m-\alpha}^\eta =$

$$K \cdot \epsilon \left\| \epsilon g(t, x, v_0, \dots, \nabla \nabla v_0, \epsilon) + v_0_{tt} - \nabla v_0 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot v_0 + \frac{\partial f}{\partial u_t} \cdot \right.$$

$$\left. v_0_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right\|_{m-\alpha} \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ (ver teo-}$$

rema de Nash).

**UM EXEMPLO PARA JUSTIFICAR A NECESSIDADE DE DIMINUIR ϵ
NOS TEOREMAS I.1.3 e I.1.4**

Nos teoremas I.1.3 e I.1.4 nós afirmamos que existe um $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_0 \ll 1$ tal que se $\epsilon \in \mathbb{R}$, $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ e se $h \in H^1_\tau(\mathbb{R}, X)$ então a solução mild de:

$$(I) \quad \overset{0}{u} = A(t, \epsilon)u + h(t)$$

é solução e está em $C^1_\tau(\mathbb{R}, X)$.

Agora; através de um exemplo, mostraremos que considerar $\epsilon_0 \ll 1$ é também necessário.

Consideremos a equação linear:

$$(II) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x, \epsilon) \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u + h(t, x)$$

onde:

$$a(t, x, \epsilon) = 1 + \epsilon b(t, x) \quad \text{com } b \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$\epsilon \in \mathbb{R}$, $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ o suficiente para que $a(t, x, \epsilon) > 0$
 $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$.

$$0 < \alpha \in \mathbb{R}, \quad h \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

Transformando-se (II) em uma equação de evolução obtemos:

$$(III) \quad \overset{0}{u} = A(t, \epsilon)u + h(t)$$

onde:

$$X = C_{2\pi}^0(R, R), \quad D(A(t, \epsilon)) \equiv C_{2\pi}^1(R, R) \quad t \in R, \quad |\epsilon| \leq \epsilon_0$$

$A(t, \epsilon): D(A) \subset X \rightarrow X$ definida por:

$$A(t, \epsilon).u = a(t, \cdot, \epsilon) \frac{du}{dx} - \alpha u$$

O problema de Cauchy associado a (III) é bem posto e o operador de evolução $U(t, s, \epsilon)$ associado a esse problema de Cauchy é definido por:

$$[U(t, s, \epsilon)u](x) = e^{-\alpha(t-s)} \cdot u(\phi(s, t, x, \epsilon))$$

onde:

$$\phi: R^3 \rightarrow R$$

é o fluxo associado à equação ordinária:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t, x, \epsilon)$$

É fácil ver que $\|U(t, s, \epsilon)\|_{L(X, X)} \leq e^{-\alpha(t-s)}$ donde se $h \in C_{2\pi}^0(R, X)$ então a equação:

$$u' = A(t, \epsilon)u + h(t)$$

admite a solução mild 2π -periódica:

$$u(t, \varepsilon) = U(t, 0, \varepsilon) u_0(\varepsilon) + \int_0^t U(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau$$

onde:

$$u_0(\varepsilon) = (I - U(2\pi, 0, \varepsilon))^{-1} \int_0^{2\pi} U(2\pi, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau$$

Observação 1

$$\phi(t, s, x, \varepsilon) = x - (t-s) - \varepsilon \int_s^t b(\tau, x - \tau + s) d\tau + O(\varepsilon^2)$$

Observação 2

Sejam, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que x_0 é um ponto fixo (módulo 2π) de f se, e somente se, $f(x_0) = x_0 + 2\pi$.

Observação 3

$$b(t, x) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} b_{nm} e^{int} e^{imx} \quad \text{com} \quad b_{-n-m} = \overline{b_{nm}}$$

$$\int_0^{2\pi} b(\tau, x - \tau) d\tau = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (2\pi) b_{nn} e^{inx}$$

Observação 4

É possível escolhermos $b \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que $g \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definida por:

$$g(x) = \int_0^{2\pi} b(\tau, x - \tau) d\tau$$

tenha apenas dois zeros distintos x_1 e x_2 em $(0, 2\pi)$ e tal que $g'(x_1) = 1$ e $g'(x_2) = -1$.

Definamos $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x, \varepsilon) = \phi(0, 2\pi, x, \varepsilon) = x + 2\pi + \varepsilon g(x) + O(\varepsilon^2)$$

Seja $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$ tal que se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ então $f(\cdot, \varepsilon)$ tenha apenas dois pontos fixos (módulo 2π), $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ tais que $x_1(\varepsilon) \rightarrow x_1$ e $x_2(\varepsilon) \rightarrow x_2$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1(\varepsilon), \varepsilon) > 1$.

Agora:

$$u_0(x, \varepsilon) = U(2\pi, 0, \varepsilon) u_0(x, \varepsilon) + \int_0^{2\pi} U(2\pi, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau$$

ou seja:

$$u_0(x, \varepsilon) = e^{-2\pi\alpha} (f(x, \varepsilon), \varepsilon) + \int_0^{2\pi} e^{-\alpha(2\pi-\tau)} h(\tau, \phi(\tau, 2\pi, x, \varepsilon)) d\tau$$

Admitindo-se que $u_0(\cdot, \varepsilon) \in D(A)$ se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ teremos:

$$\begin{aligned} & [1 - e^{-2\pi\alpha} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1(\varepsilon), \varepsilon)] \frac{du_0}{dx}(x_1(\varepsilon), \varepsilon) = \\ & = \int_0^{2\pi} e^{-\alpha(2\pi-\tau)} \frac{\partial h}{\partial x}(\tau, \phi(\tau, 2\pi, x, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(\tau, 2\pi, x_1(\varepsilon), \varepsilon) d\tau \end{aligned}$$

Escolha $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tal que

$$1 - e^{-2\pi\alpha} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1(\varepsilon_3), \varepsilon_3) = 0 \quad \text{para algum } \varepsilon_3 \text{ tal que}$$

$$0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2. \quad \text{Logo:}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-\alpha(2\pi-\tau)} \frac{\partial h}{\partial x}(\tau, \phi(\tau, 2\pi, x_1(\varepsilon_3), \varepsilon_3)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(\tau, 2\pi, x_1(\varepsilon_3), \varepsilon_3) d\tau = 0$$

$$\text{para todo } h \in C_{2\pi}^1(R^2, R). \quad (\text{absurdo})$$

Nós escolhemos α de modo que para alguma $h \in C_{2\pi}^1(R^2, R)$ e para algum ε (no caso $\varepsilon = \varepsilon_3$), a equação:

$$(I) \quad \dot{u} = A(t, \varepsilon)u + h$$

não tenha solução $u = u(\varepsilon, h) \in C_{2\pi}^1(R^2, R)$.

Na verdade, se $\alpha > 0$ e $b \in C_{2\pi}^\infty(R^2, R)$ então dado $m \in \mathbb{N}^*$, existe um $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) > 0$ tal que se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(m)$ e se $h \in C_{2\pi}^m(R^2, R)$ então a solução mild de (I) é solução e está em $C_{2\pi}^m(R^2, R)$.

Acontece que $\varepsilon_0(m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ pois $\varepsilon_0(m)$ deve ser tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1(\varepsilon_0(m)), \varepsilon_0(m))$ seja estritamente menor que $e^{2\pi\alpha/m}$.

Este fato nos mostra que não existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $u(\varepsilon, h) \in C_{2\pi}^\infty(R^2, R)$ para qualquer $\varepsilon \in R$; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$; mesmo que $h \in C_{2\pi}^\infty(R^2, R)$ e $b \in C_{2\pi}^\infty(R^2, R)$.

COMENTÁRIO SOBRE UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO TEOREMA DE NASH.

Em [12] nós encontramos um exemplo de aplicação do teorema de Nash (na verdade de um corolário deste teorema) o qual pode ser provado via o teorema das funções implícitas clássico.

Consideremos o operador diferencial parcial linear:

$$\square = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + i \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Este operador nos leva a considerarmos sobre $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ o seguinte conjunto ortogonal completo:

$$S = \{e^{i.m.x} \mid m \in \mathbb{Z}^n; x \in \mathbb{R}^n\}$$

o qual é o conjunto das auto-funções de $\square$ cujos autovalores são inteiros Gaussianos.

Portanto o operador $\square + \frac{1}{2} I$ é invertível no seguinte sentido:

Se $v \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então existe $u \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $(\square + \frac{1}{2})u = v$ é válida no sentido L^2 .

O exemplo de aplicação tem como objetivo mostrar que a equação:

$$(I) \quad \square u + \frac{1}{2}u + u^3 \cdot e^{\square u} = v$$

admite uma solução $u \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cada $v \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ suficientemente pequena.

Mostraremos esse resultado via o teorema clássico das funções implícitas.

Inicialmente, consideremos a função:

$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$G(u, v, w) = w + \frac{1}{2}u + u^3 e^w - v$$

Existe $\varepsilon_0 > 0$ e $h: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^\infty$ de modo que $G(u, v, h(u, v)) = 0$ $|u| < \varepsilon_0$, $|v| < \varepsilon_0$.

Ainda; $h(u, v) = -\frac{1}{2}u + v + g(u, v)$ onde:
 $g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = 0$.

Seja $m \in \mathbb{N}$, $m = 2n_0$ $n_0 = [\frac{n}{2}] + 1$
 $n \geq 5$ e consideremos a função:

$F: \Omega \subset H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n)$ definida por:

$$F(u, v) = u - (\square + \frac{1}{2})^{-1} f(u, v)$$

onde:

$$1) \quad \Omega = \{(u, v) \in H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) / \|u\|_m < \varepsilon_0, \|v\|_m < \varepsilon_0\}$$

$$2) f(u,v) = v + g(u,v)$$

Novamente via o teorema das funções implícitas clássico, existe $0 < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_0) \leq \varepsilon_0$ e

$$u: B_{H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n)}(0, \varepsilon_1) \rightarrow H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \text{ tal que}$$

$$1) (u(v), v) \in \Omega \quad \forall v \in H_{2\pi}^m; \quad \|v\|_m < \varepsilon_1$$

$$2) F(u(v), v) = 0$$

Logo $u(v)$ satisfaz I.

Finalmente, afirmamos que se $v \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|v\|_m \ll 1 \text{ então } u = u(v) \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Basta notar que é possível escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $v \in H_{2\pi}^k(\mathbb{R}^n); \quad k \geq m, \quad \|v\|_m < \varepsilon_1$ então $u = u(v) \in H_{2\pi}^k(\mathbb{R}^n)$.

Escolha ε_0 de modo que:

$$\|(\square + \frac{1}{2})^{-1} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\|_{\mathcal{L}(L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n), L_{2\pi}^2(\mathbb{R}^n))} < 1 \quad \|u\|_m < \varepsilon_0$$

$$\|v\|_m < \varepsilon_0.$$

Provemos esta afirmação por indução sobre k .

Se $k = m$ nossa afirmação é verdadeira.

Suponhamos válida para $k \in \mathbb{N}, \quad k \geq m$.

Seja $v \in H_{2\pi}^{k+1}(R^n)$, $\|v\|_m \leq \epsilon_1$. Indiquemos por $U = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}}$; $1 \leq i \leq n$ (formalmente).

Derivando-se $u = (\square + \frac{1}{2})^{-1} f(u, v)$; $k+1$ -vezes com relação a x_i obtemos:

$$U = [I - (\square + \frac{1}{2})^{-1} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)]^{-1} \cdot m(u, v)$$

onde a hipótese de indução nos permite afirmar que

$$m(u, v) \in L_{2\pi}^2(R^n)$$

Logo, $U \in L_{2\pi}^2(R^n)$ e assim, por argumento de unicidade, concluimos que $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \in L_{2\pi}^2(R^n)$, $1 \leq i \leq n$,

donde $u \in H_{2\pi}^{k+1}(R^n)$.

UMA EQUAÇÃO LINEAR HIPERBÓLICA SEM SOLUÇÃO

Este exemplo mostra que se a parte perturbada envolve derivadas até a terceira ordem então a equação pode não ter solução.

Consideremos a equação:

$$(I) \quad [1 + \gamma(\epsilon)]^2 u_{tt} - \epsilon u_{xxx} - (1 + \epsilon) u_{xx} + (1 + \gamma(\epsilon)) u_t + u = \epsilon h(t, x)$$

onde:

$$\gamma(\epsilon) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-\epsilon}}{1 - \sqrt{-\epsilon}} & \text{se } -1 \leq \epsilon \leq 0 \\ \epsilon - \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4\epsilon}}{2} \right)^2 & \text{se } \epsilon \geq 0 \end{cases}$$

Afirmamos que (I) pode não ter solução mesmo que $|\epsilon|$ seja suficientemente pequeno, isto é, por menor que possa ser $|\epsilon|$, existe um $h \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que não existe $u \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo I.

Com efeito:

$$\text{Se } h \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \quad \text{então} \quad h(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{nm} e^{int} e^{imx}$$

$$u \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \quad \Rightarrow \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{nm} e^{int} e^{imx}$$

Se u satisfaz (I) então:

$$[-(1+\gamma(\epsilon))^2 \cdot n^2 + \epsilon m^3 i + (1+\epsilon)m^2 + (1+\gamma(\epsilon))ni + 1] a_{nm} = \epsilon h_{nm}$$

Consideremos o sistema:

$$(II) \quad \begin{cases} (1+\epsilon)m^2 - (1+\gamma(\epsilon))^2 n^2 + 1 = 0 \\ (1+\gamma(\epsilon))n + \epsilon m^3 = 0 \end{cases}$$

donde:

$$n = - \frac{\epsilon}{1+\gamma(\epsilon)} m^3$$

$$(1+\epsilon)m^2 - \epsilon^2 m^6 + 1 = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{-1}{m^2} \text{ ou } \epsilon = \frac{1+m^2}{m^4}$$

$$\text{Se } \epsilon = -\frac{1}{m^2} \text{ então } n = m-1$$

$$\text{Se } \epsilon = \frac{1+m^2}{m^4} \text{ então } n = -m$$

Isto mostra que (I) pode não ter solução qual
quer que seja $h \in L^2_{2\pi}(R^2)$ e $|\epsilon| \ll 1$.

APÊNDICE

O TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS DE NASH

Neste apêndice nós enunciamos e demonstramos uma versão do Teorema das Funções Implícitas de Nash [12].

Sejam $(m, \alpha, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^4$; $m \geq \max\{r + \alpha, 2r\}$, $p \geq 10r$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 540$, $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 2$, $F: \Omega \subset H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ onde $\Omega = \{u \in H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_m < 1\}$ e suponhamos que as seguintes hipóteses estejam verificadas:

$$(H1) \quad F \in C^2(\Omega, H_{2\pi}^{m-\alpha}), \quad \|F'(u)h\|_{m-\alpha} \leq M \cdot \|h\|_m \quad e$$

$$\|F''(u) \cdot h \cdot k\|_{m-\alpha} \leq M \cdot \|h\|_m \cdot \|k\|_m; \quad \text{para todo}$$

$$(u, h, k) \text{ pertencente a } \Omega \times H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \times H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n).$$

(H2) Existe $L: \Omega \subset H_{2\pi}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(H_{2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^n), H_{2\pi}^{m-r}(\mathbb{R}^n))$ satisfazendo às seguintes condições:

$$(H2)i \quad \|L(u)h\|_{m-r} \leq M \cdot \|h\|_{m-\alpha} \quad \forall (u, h) \in \Omega \times H_{2\pi}^{m-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

$$(H2)ii \quad F'(u) \cdot L(u) \cdot h = h \quad \text{para todo} \\ (u, h) \text{ pertencente a } (\Omega \cap H_{2\pi}^{m+p+r}(\mathbb{R}^n)) \times H_{2\pi}^{m+r-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

$$(H2)iii \quad L(\cdot)F(\cdot): \Omega \cap H_{2\pi}^{m+p+r}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{2\pi}^{m+p}(\mathbb{R}^n) \quad e$$

$$\|L(u)F(u)\|_{m+p} \leq M(1 + \|u\|_{m+p+r})$$

$$(H3) \quad ||F(0)||_{m-\alpha} \leq M^{-\rho}$$

Nestas condições, existe $u_0 \in \Omega$ tal que $F(u_0) = 0$, além disso existem constantes $K > 0$ e $\eta > 0$ tais que $||u_0||_m \leq K. ||F(0)||_{m-\alpha}^\eta$

Ainda se $F: \Omega_1 \subset H_{2\pi}^{m-r}(R^n) \rightarrow H_{2\pi}^{m-r-\alpha}(R^n)$ onde $\Omega_1 = \{u \in H_{2\pi}^{m-r} / ||u||_{m-r} < 1\}$, é uma função de classe C^2 , $||F''(u).h.k||_{m-r-\alpha} \leq M. ||h||_{m-r} ||k||_{m-r}$; se $L: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H_{2\pi}^{m-r-\alpha}, H_{2\pi}^{m-2r})$ e $||L(u)h||_{m-2r} \leq M. ||h||_{m-r-\alpha}$, $\forall (u,h) \in \Omega \times H_{2\pi}^{m-r-\alpha}$, se $\rho \gg 1$ e se $L(u).F'(u).h = h$ $\forall h \in H_{2\pi}^m$ então u_0 é a única solução de $F(u) = 0$ em uma conveniente vizinhança de zero.

Demonstração:

Sejam $1 < r_1 < 2$ e $z > 0$ números reais, os quais serão determinados mais tarde.

Indiquemos por S_n o mollifier definido por:

$$S_n = S(e^{zr_1^n}) \quad (\text{veja teorema 0.7.1})$$

Defina por recorrência:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - S_n L(u_n).F(u_n) \quad (p/ n \geq 0) \end{cases}$$

Então afirmamos que para todo $n \in N$; $n \geq 1$

tem-se:

$$(1.n) \quad ||u_{n-1}||_m \leq \frac{1}{2}$$

$$(2.n) \quad ||u_n - u_{n-1}||_m \leq e^{-\mu \cdot r \cdot z \cdot r_1^n}$$

$$(3.n) \quad u_n \in H_{2\pi}^{m+p+r} \quad (\text{na verdade } u_n \in C_{2\pi}^\infty(R^n))$$

$$(4.n) \quad (1 + ||u_n||_{m+p+r}) \leq e^{\nu \cdot r \cdot z \cdot r_1^n}$$

onde $\mu > 0$, $\nu > 0$, serão convenientemente escolhidos.

Suponhamos que (2.j) seja verdadeira para todo $1 \leq j \leq n$, então:

$$\begin{aligned} ||u_n||_m &= ||\sum_{j=1}^n (u_j - u_{j-1})||_m \leq \sum_{j=1}^n ||u_j - u_{j-1}||_m \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n e^{-\mu \cdot r \cdot z \cdot r_1^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\mu \cdot r \cdot z (r_1 - 1)j} = \\ &= \frac{e^{-\mu \cdot r \cdot z (r_1 - 1)}}{1 - e^{-\mu \cdot r \cdot z (r_1 - 1)}} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se μ , z e r , forem convenientemente escolhidos.

Suponhamos, agora, que (1.j) (2.j) (3.j) (4.j) sejam verdadeiras para $1 \leq j \leq n$. Então:

$$\begin{aligned}
 ||u_{n+1} - u_n||_m &= ||S_n L(u_n) \cdot F(u_n)||_m \leq \\
 M \cdot e^{r \cdot z \cdot r_1^n} \cdot ||L(u_n) F(u_n)||_{m-r} &\leq M^2 \cdot e^{r \cdot z \cdot r_1^n} \cdot ||F(u_n)||_{m-\alpha} = \\
 M^2 \cdot e^{r \cdot z \cdot r_1^n} \cdot ||F(u_{n-1}) + F'(u_{n-1}) \cdot (u_n - u_{n-1}) + \int_0^1 (1-t) \cdot \\
 F''(u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1})) (u_n - u_{n-1})^2 dt||_{m-\alpha} &= M^2 \cdot e^{r z r_1^n} ||F'(u_{n-1}) \cdot \\
 L(u_{n-1}) \cdot F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1}) S_{n-1} L(u_{n-1}) F(u_{n-1}) + \\
 + \int_0^1 (1-t) F''(u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1})) (u_n - u_{n-1})^2 dt||_{m-\alpha} &= \\
 M^2 e^{r z r_1^n} ||F'(u_{n-1}) (I - S_{n-1}) L(u_{n-1}) F(u_{n-1}) + \\
 \int_0^1 (1-t) F''(u_{n-1} + t(u_n - u_{n-1})) (u_n - u_{n-1})^2 dt||_{m-\alpha} &\leq \\
 M^2 e^{r z r_1^n} \cdot (M \cdot ||(I - S_{n-1}) L(u_{n-1}) F(u_{n-1})||_m + \\
 \frac{M}{2} \cdot ||u_n - u_{n-1}||_m^2) &\leq M^3 \cdot e^{r z r_1^n} \left[M \cdot e^{-p \cdot z \cdot r_1^{n-1}} \cdot \right. \\
 ||L(u_{n-1}) F(u_{n-1})||_{m+p} + ||u_n - u_{n-1}||_m^2 &\left. \right] \leq \\
 M^4 e^{r z r_1^n} \left[e^{-p \cdot z \cdot r_1^{n-1}} \cdot M \cdot e^{v \cdot r \cdot z \cdot r_1^{n-1}} + e^{-2\mu \cdot r \cdot z \cdot r_1^n} \right] &\leq \\
 M^5 \left[e^{r z r_1^{n-1}} \cdot (r_1 - p/r + v + \mu \cdot r_1^2) + e^{r z r_1^n (1 - 2\mu + \mu r_1)} \right] e^{-\mu \cdot r \cdot z \cdot r_1^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Imponhamos:

$$\mu r_1^2 + r_1 + v - \frac{p}{r} < 0 \quad e \quad 1 - 2\mu + \mu r_1 < 0$$

Indiquemos por:

$$\delta_1 = \min\{-(\mu r_1^2 + r_1 + v - \frac{p}{r}); -(1 - 2\mu + \mu r_1)\}$$

Logo:

$$r_1^{n-1} (r_1 - p/r + v + \mu r_1^2) \leq - r_1^{n-1} \cdot \delta_1 \leq - \frac{\delta_1 \cdot r_1}{2} \quad (\forall n \geq 1)$$

e

$$r_1^n (1 - 2\mu + \mu r_1) \leq - \delta_1 \cdot r_1 \leq - \frac{\delta_1 \cdot r_1}{2}$$

$$\text{Notemos que } 1 - 2\mu + \mu r_1 < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{2 - r_1}$$

Portanto:

$$||u_{n+1} - u_n||_m \leq M^5 (e^{-r \cdot z \frac{\delta_1 r_1}{2}} + e^{-r z \frac{\delta_1 r_1}{2}}) e^{-\mu r z r_1^{n+1}} \leq$$

$$\leq M^6 \cdot e^{-r z \frac{r_1 \delta_1}{2}} e^{-\mu r z r_1^{n+1}}$$

Portanto devemos impor:

$$M \leq e^{\frac{r \cdot z \cdot r_1 \cdot \delta_1}{12}}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
 1 + ||u_{n+1}||_{m+p+r} &= 1 + ||\sum_{j=0}^n (u_{j+1} - u_j)||_{m+p+r} = \\
 &= 1 + \sum_{j=0}^n ||S_j L(u_j) F(u_j)||_{m+p+r} \leq 1 + M \sum_{j=0}^n e^{r_z r_1^j} ||L(u_j) \cdot \\
 &\cdot F(u_j)||_{m+p} \leq 1 + M^2 \sum_{j=0}^n e^{r_z r_1^j} (1 + ||u_j||_{m+p+r}) \leq 1 + \\
 &+ M^2 \cdot \sum_{j=0}^n e^{r_z r_1^j} \cdot e^{v \cdot r \cdot z \cdot r_1^j} = 1 + M^2 \sum_{j=0}^n e^{r \cdot z \cdot (1+v) r_1^j} = \\
 &= (1 + M^2 \sum_{j=0}^n e^{r z (1+v) r_1^j}) e^{-v r z r_1^{n+1}} \cdot e^{v r z r_1^{n+1}} \leq \\
 &\leq \left[e^{-v \cdot r \cdot z \cdot r_1^{n+1}} + M^2 \sum_{j=0}^n e^{r z (1+v - r_1 v) \cdot r_1^j} \right] e^{v \cdot r \cdot z \cdot r_1^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Impondo-se:

$$1 + v - r_1 v = -\delta_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad v > \frac{1}{r_1 - 1}$$

donde:

$$e^{-v r z r_1^{n+1}} + M^2 \sum_{j=0}^n e^{-r z \delta_2 r_1^j} = e^{-v r z r_1^{n+1}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + M^2 (e^{-rz\delta_2} + \sum_{j=1}^n e^{-rz\delta_2 r_1^j}) \leq e^{-\nu r z r_1^{n+1}} + M^2 (e^{-rz\delta_2} + \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-rz\delta_2 (r_1-1)^j}) = \\
 & = e^{-\nu \cdot r \cdot z \cdot r_1^{n+1}} + M^2 (e^{-rz\delta_2} + \frac{e^{-rz\delta_2 (r_1-1)}}{1 - e^{-rz\delta_2 (r_1-1)}}) \leq 1
 \end{aligned}$$

se ν , z e r_1 forem convenientemente escolhidos.

Passemos à escolha de p/r ; μ e ν . Como já

sabemos; $\nu > \frac{1}{r_1-1}$ e $\mu > \frac{1}{2-r_1}$.

Vamos minimizar: $\mu r_1^2 + r_1 + \nu$ sob estas condições acima.

No limite temos:

$$\mu r_1^2 + r_1 + \nu = r_1 + \frac{1}{r_1-1} + \frac{r_1^2}{2-r_1} = -2 + \frac{1}{r_1-1} + \frac{4}{2-r_1}$$

Seja $g: (1,2) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(r_1) = -2 + \frac{1}{r_1-1} + \frac{4}{2-r_1}$$

Então temos:

$$g'(r_1) = -\frac{1}{(r_1-1)^2} + \frac{4}{(2-r_1)^2}$$

$$\therefore g'(r_1) = 0 \Leftrightarrow (2-r_1)^2 = 4(r_1-1)^2 \Leftrightarrow 2-r_1 = 2(r_1-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r_1 = 4 \Leftrightarrow r_1 = \frac{4}{3}$$

donde:

$$v > \frac{1}{r_1-1} = 3$$

$$\mu > \frac{1}{2-r_1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore p/r > \mu r_1^2 + r_1 + v > \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 3 = 7$$

Portanto se $p > 7r$ existem μ e v tais que as condições acima estejam verificadas.

Verifiquemos (1.1) (2.1) (3.1) (4.1).

$$||S_0 L(0) F(0)|| \leq e^{-\mu \cdot r \cdot z r_1}$$

$$1 + ||S_0 L(0) F(0)||_{m+p+r} \leq e^{v r z r_1}$$

Mas

$$||S_0 L(0) F(0)||_m \leq M(e^z)^r \cdot ||L(0) F(0)||_{m-r} \leq M^2 e^{r z r_1}.$$

$$||F(0)||_{m-\alpha}$$

e desejamos que:

$$M^2 e^{r \cdot z \cdot r_1} ||F(0)||_{m-\alpha} \leq e^{-\mu r z r_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M^2 e^{(1+\mu) r z r_1} \cdot ||F(0)||_{m-\alpha} \leq 1$$

Quanto à 2ª desigualdade:

$$1 + ||S_0 L(0) F(0)||_{m+p+r} \leq 1 + M e^{r z r_1} ||L(0) F(0)||_{m+p} \leq$$

$$1 + M^2 e^{r z r_1}$$

e desejamos que:

$$1 + M^2 \cdot e^{r z r_1} \leq e^{\nu r z r_1} \Leftrightarrow e^{-\nu r z r_1} + M^2 \cdot e^{(1-\nu) r z r_1} \leq 1$$

Escolha $z \in \mathbb{R}$ $z > 0$ tal que:

$$||F(0)||_{m-\alpha} = e^{-\epsilon \cdot r \cdot z \cdot r_1}$$

OBS.: Só não existe $z \in \mathbb{R}$ satisfazendo a condição acima se $F(0) = 0$, porém se este for o caso 0 é solução do nosso teorema.

$$||F(0)||_{m-\alpha} \leq M^{-\rho} \Leftrightarrow e^{\epsilon r z r_1} \geq M^{\rho}$$

Agora a desigualdade:

$$\frac{e^{-\mu \cdot r \cdot z(r_1-1)}}{1 - e^{-\mu r z(r_1-1)}} \leq \frac{1}{2}$$

estarã satisfeita se:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\mu r z(r_1-1)}}{1 - e^{-\mu r z(r_1-1)}} &= \frac{e^{-\frac{\mu \cdot (r_1-1)}{6r_1}}}{1 - (e^{\frac{\mu r z r_1}{6r_1}} - \frac{\mu(r_1-1)}{6r_1})} \leq \\ &\leq \frac{M^{-\frac{\mu(r_1-1)}{6r_1} \cdot \rho}}{1 - M^{-\frac{\mu(r_1-1)}{6r_1} \cdot \rho}} = \frac{M^{-\mu\rho/24}}{1 - M^{-\mu\rho/24}} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

OBS.: Como $M \geq 2$ bastarã tomar $\mu\rho > 48$.

A desigualdade:

$$M \leq e^{\frac{\delta_1 r z r_1}{12}}$$

estarã verificada se:

$$M \leq M^{\frac{\delta_1 \rho}{72}}$$

e basta tomar $\rho \geq \frac{72}{\delta_1}$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
 & e^{-v.r.z.r_1^{n+1}} + M^2 (e^{-\delta_2.r.z} + \frac{e^{-r.z\delta_2(r_1-1)}}{1 - e^{-rz\delta_2(r_1-1)}}) \leq \\
 & \leq e^{-v.r.z.r_1} + M^2 \left[(e^{6rzr_1})^{\frac{-\delta_2}{6r_1}} + \frac{(e^{6rzr_1})^{\frac{-\delta_2(r_1-1)}{6r_1}}}{1 - (e^{6rzr_1})^{\frac{-\delta_2(r_1-1)}{6r_1}}} \right] \leq \\
 & \leq (e^{6rzr_1})^{-v/6} + M^2 (M^{\frac{-\delta_2 \cdot \rho}{6r_1}} + \frac{M^{\frac{-\delta_2 \cdot \rho(r_1-1)}{6r_1}}}{1 - M^{\frac{-\delta_2 \cdot \rho(r_1-1)}{6r_1}}) \leq \\
 & \leq M^{-v\rho/6} + M^2 (M^{\frac{-\delta_2 \rho}{6r_1}} + 2.M^{\frac{-\delta_2 \cdot \rho(r_1-1)}{6r_1}}) \leq \\
 & \leq M^{-v\rho/6} + M^2 . (M^{\frac{-\delta_2 \rho}{8}} + 2M^{\frac{-\delta_2 \rho}{24}}) \leq M^{-v\rho/6} + 3M^2 . M^{\frac{-\delta_2 \rho}{24}} = \\
 & = M^{-v\rho/6} + M^{\frac{4 - \delta_2 \rho}{24}} \leq 1 \text{ para } \rho \text{ e } v \text{ convenientes.}
 \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
 & M^2 e^{(1+\mu)rzr_1} ||F(0)||_{m-\alpha} = M^2 (e^{6rzr_1})^{\frac{1+\mu}{6}} . ||F(0)||_{m-\alpha} = \\
 & = M^2 . ||F(0)||_{m-\alpha}^{\frac{5-\mu}{6}} \leq M^2 ||F(0)||_{m-\alpha}^{2/6} \leq \\
 & \text{supondo } \mu \leq 3
 \end{aligned}$$

$$\leq M^2 \cdot M^{-\rho/3} = M^{\frac{6-\rho}{3}} \leq 1 \quad \text{se} \quad \rho \geq 6$$

Ainda:

$$\begin{aligned} e^{-v \cdot r \cdot z \cdot r_1} + M^2 e^{(1-v) r z r_1} &\leq M^{-v\rho/6} + M^2 \cdot M^{\frac{(1-v)\rho}{6}} = \\ &= M^{-v\rho/6} + M^{\frac{12+(1-v)\rho}{6}} \leq 1 \quad \text{se } \rho \text{ e } v \text{ forem convenientemente escolhidos.} \end{aligned}$$

Escolhamos:

$$r_1 = \frac{4}{3} \quad v = \frac{32}{10} \quad \mu = \frac{17}{10} \quad p/r \geq 8$$

$$\delta_1 = \min\{-(\mu r_1^2 + r_1 + v - p/r); -(1 - 2\mu + \mu r_1)\}$$

$$= \min\{-(\frac{17}{10} \cdot \frac{16}{9} + \frac{4}{3} + \frac{32}{10} - p/r); -(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{10})\}$$

$$= \min\{p/r - (\frac{272}{90} + \frac{120}{90} + \frac{288}{90}); \frac{4}{30}\} = \min\{p/r - \frac{680}{90}; \frac{2}{15}\}$$

$$\cong \min\{p/r - 7,56; \frac{2}{15}\} = \frac{2}{15}$$

Portanto

$$\rho \geq \frac{72}{\delta_1} = \frac{72}{\frac{2}{15}} = 36 \cdot 15 = 540$$

$$-\delta_2 = 1+v-r_1 v = 1+(1-r_1)v = 1 - \frac{2}{3}v = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{32}{10} = 1 - \frac{32}{15}$$

$$\delta_2 = \frac{32}{15} - 1 = \frac{17}{15}$$

Ainda:

$$\|u_n\|_m \leq 2e^{-\mu r z (r_1-1)} = 2(e^{-6 r z r_1})^{\frac{\mu(r_1-1)}{6r_1}} = 2 \cdot \|F(0)\|_m^{\eta}$$

$$\therefore K=2 \quad e \quad \eta = \frac{\mu(r_1-1)}{6r_1} = \frac{17}{10} \cdot \frac{1}{24} = \frac{17}{240} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por causa de (2.n) é fácil ver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy; logo $u_n \rightarrow u$ e $\|u\| \leq \frac{1}{2}$. Como F é contínua $\Rightarrow F(u_n) \rightarrow F(u)$. Além disso:

$$\begin{aligned} \|F(u_n)\|_{m-\alpha} &= \|F'(u_n)L(u_n)F(u_n)\|_{m-\alpha} = \\ &= \|F'(u_n)(I-S_n)L(u_n)F(u_n) + F'(u_n)S_nL(u_n)F(u_n)\|_{m-\alpha} \leq \\ &\leq M\|(I-S_n)L(u_n)F(u_n)\|_m + M\|S_nL(u_n)F(u_n)\|_m = \\ &= M\|(I-S_n)L(u_n)F(u_n)\|_m + M\|u_{n+1}-u_n\|_m \end{aligned}$$

OBS1: É claro que $u_{n+1}-u_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 \text{OBS2: } ||(I-S_n)L(u_n)F(u_n)||_m &\leq M.e^{-pzr_1^n}.||L(u_n)F(u_n)||_{m+p} \leq \\
 &\leq M^2 e^{-pzr_1^n}.(1+||u_n||_{m+p+r}) \leq M^2 e^{-pzr_1^n}.e^{v.r.zr_1^n} = \\
 &= M^2 e^{-(p/r-v)r.zr_1^n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos u e $v \in H^m$, $||u||_m$ e $||v||_m < \frac{1}{C^2 M^2}$ tais que $F(u) = F(v) = 0$ então $u=v$.

Com efeito:

$$\begin{aligned}
 0 = F(u) &= F(v+u-v) = F(v) + F'(v).(u-v) + \\
 &+ \int_0^1 (1-t).F''(v+t(u-v))(u-v)^2 dt
 \end{aligned}$$

donde:

$$(1) \quad u-v = -L(v) \cdot \int_0^1 (1-t)F''(v+t(u-v))(u-v)^2 dt$$

$$(2) \quad ||u-v||_{m-2r} = ||L(v) \int_0^1 (1-t)F''(v+t(u-v))(u-v)^2 dt||_{m-2r} \leq$$

$$\leq M || \int_0^1 (1-t)F''(v+t(v-u))(u-v)^2 dt ||_{m-r-\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{M^2}{2} ||u-v||_{m-r}^2$$

$$(3) \quad ||u-v||_{m-r} \leq C \cdot ||u-v||_m^{1/2} \cdot ||u-v||_{m-2r}^{1/2} \quad (\text{use Teor. 0.5.1})$$

e assim

$$||u-v||_{m-2r} \leq \frac{C^2 M^2}{2} \cdot ||u-v||_m \cdot ||u-v||_{m-2r}$$

$$\text{Se } u \neq v \text{ então } ||u-v||_m \geq \frac{2}{C^2 M^2} \quad (\text{absurdo}).$$

Obs.: C é a constante dada pela desigualdade de Gagliardo Nirenberg.

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, R.A.; Sobolev Spaces; Academic Press; New York; 1975.
- [2] FIGUEIREDO, D.G.; Equações Elíticas não Lineares; 11º Colóquio Brasileiro de Matemática; 1977.
- [3] FRIEDMAN, A.; Partial Differential Equations. Robert E.K.P. Co. Huntington, New York; 1976.
- [4] GEEL, R.; Singular Perturbation of Hyperbolic Type; Mathematical Centre Tracts 98 - Mathematisch Centrum Amsterdam; 1978.
- [5] KREIN, S.G.; Linear Differential Equations in Banach Space; Translations of Mathematical Monographs, vol. 29, American Math. Soc., Providence, R.I.; 1971.
- [6] LOPES, O.; On the Structure of the Spectrum of a Linear Time Periodic Wave Equation; Journal D'Analyse Mathématique, vol. 47; 1986, pp. 55-68.
- [7] MOSER, J., A Rapidly Convergent Iteration Method and Nonlinear Partial Differential Equations I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3, vol. 20, 1966 pp. 265-315.

- [8] PAZY, A.; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations; Springer Verlag; 1983.
- [9] PETZELTOVÁ, H.; Application of Moser's Method to a Certain Types of Evolution Equations, Czechoslovak Math. J.33 (108); 1983. pp.427-434.
- [10] PETZELTOVÁ, H.; and STREDY, M.; Time Periodic Solutions of Telegraph Equations in n Spatial Variables; Casopis Pro Pestovani Matematiky Roc, 109; 1984. pp. 60-73
- [11] RABINOWITZ, P.H.; Periodic Solution of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations II Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXII, 1969;pp.15-39.
- [12] SCHWARTZ; J.; Nonlinear Functional Analysis, Gordon and Breach; 1969.
- [13] STEDRY, M.; Periodic Solutions of Nonlinear Equations of a Beam With Damping (Czech.) Thesis; Math. Inst.Czechoslovak Acad. Sci., Prague;1973.