UM PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO DE DOIS
PONTOS: BIFURCAÇÃO LOCAL E UM PROBLEMA
INVERSO

Maria Ângela de Pace Almeida Prado Giongo

Orientador: Prof.Dr. Plácido Zoéga Táboas

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1989

Aos meus pais.

Ao José Samuel e aos meus filhos:

Renata, Samuel e Gabriel.

AGRADECIMENTOS

No desenvolvimento deste tive o incentivo dos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos e do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - Universidade de São Paulo, aos quais expresso meus agradecimentos. Em particular:

- ao Prof. Dr. Brasil Terra Leme (UFSCar) pela leitura de algumas partes e, pelas várias e úteis sugestões, que enriqueceram este trabalho;
- à Profª Drª Yolanda Kioko Saito Furuya (UFSCar) pela colaboração nos desenhos, via computador, de algumas curvas aqui analisadas.

Ao Prof. Dr. Jorge Sotomayor (IMPA) pelas sugestões, que deram origem ao apêndice do capítulo II.

Como último agradecimento, mas o primeiro e de modo especial, ao Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas por ter me confiado este trabalho, pelo apoio e incentivo constantes e orientação precisa e segura.

**A TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM: LOCAL BIFURCATION AND
AN INVERSE PROBLEM.**

Maria Ângela de Pace Almeida Prado Giongo

Adviser: Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas

A B S T R A C T

Consider the two-point boundary value problem

$$\begin{aligned} x'' + g(t, x, x', \lambda, \mu) &= 0 \\ (1; \lambda, \mu) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) &= K \end{aligned}$$

where $\tilde{x} = (x, x')^t$; M, N are 2×2 matrices such that the $\text{rank}(M, N) = 2$; $K = (K_1, K_2)^t$ is constant; λ, μ are real parameters and g is a sufficiently smooth function of its five variables. If $x_0 = x_0(t)$ is a solution of $(1; 0, 0)$, we study the local bifurcation of solutions of $(1; \lambda, \mu)$ near x_0 .

There is a special emphasis on the case where $g(t, x, x', 0, 0) = \hat{g}(x, x')$ is autonomous under b -periodic boundary conditions, i.e., $M = -N = I, K = 0$.

The case $g(t, x, x', \lambda, \mu) = \hat{g}(x, x') + \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$, with $f_j(t+b) = f_j(t)$, $j = 1, 2$, is studied together with similar versions which include a forced Lotka-Volterra predator-prey model for two species.

Generally, the bifurcation diagram of these problems are determined by curves through the origin, whose tangent lines are a pairwise transversal pencil.

Our main task is the following inverse problem: "Given such a diagram, how should be the perturbation in order that the periodic solutions, near x_0 , of the perturbed equation bifurcate according to it".

This is precisely stated in the chapter III, where we give a partial, but fairly general, answer to the question.

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO	I
CAPÍTULO I - FATOS BÁSICOS	
1.1. Equações Lineares	1
1.2. O Teorema da Função Implícita e Alguns Fatos da Teoria de Bifurcação	15
1.3. O Método de Liapunov - Schmidt	18
CAPÍTULO II - BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES DE CERTOS PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO NÃO LINEARES	
2.1. O Espaço das Soluções do Problema Variacio nal Linear: Caso Unidimensional	25
2.2. Alguns Exemplos	48
2.3. Intervalo de Comprimento Variável	51
2.4. Apêndice: Uma Análise Alternativa da Equ <u>a</u> ção de Bifurcação	56
CAPÍTULO III - PROBLEMAS INVERSOS PARA A CONDIÇÃO DE PERIODICIDADE	
3.1. Problemas Diretos: Bifurcação de Soluções Harmônicas	63

	Página
3.2. Alguns tipos de Problemas Inversos	84
3.3. Alguns Resultados Mais Gerais	97
APÊNDICE - O ESPAÇO DAS SOLUÇÕES DO PROBLEMA VA RIACIONAL LINEAR: CASO BIDIMENSIONAL	113
BIBLIOGRAFIA	126

INTRODUÇÃO

Consideremos a equação do oscilador não linear:

$$(1) \quad \ddot{x} + g(x) = 0,$$

onde $' = \frac{d}{dt}$ e tal que:

(i) g é o termo restaurador, isto é, $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$

(ii) g é suficientemente regular de modo que os problemas de valor inicial para (1) tenham soluções únicas.

Dessa forma, a origem do plano xx' é um centro. Seja C a órbita de uma solução fixada de (1).

Levando em conta o efeito de um amortecimento e de um termo forçante, ambos pequenos e periódicos, a equação (1) assume a forma:

$$(2) \quad \ddot{x} + g(x) = -\lambda h(t)x' + \mu f(t)$$

A existência e a variação do número de soluções periódicas da equação perturbada em torno da órbita C , quando (λ, μ) percorre uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$ foram estudadas em [14].

O capítulo II de nosso trabalho é uma extensão desse resultado, que se constitui na análise do seguinte problema de valor de contorno:

$$(3) \quad \ddot{x} + g(t, x, x', \lambda, \mu) = 0$$

$$(4) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) = K,$$

onde $\tilde{x} = (x, x')^t$; M e N são matrizes constantes 2×2 , tal que $r((M \ N)) = 2$; $K = (K_1, K_2)^t$ é constante; g é uma função real suficientemente regular de cinco variáveis reais; λ e μ são parâmetros. Problemas desse tipo ocorrem em conexão com diversos fenômenos tais como oscilações mecânicas, reatores químicos, modelos populacionais e econômicos, flambagem de estruturas [10], [19], [31].

Para investigar (3), (4) assumimos a seguinte hipótese:

(H) O problema degenerado obtido de (3), (4) fazendo $\lambda = \mu = 0$ tem uma solução $x_0 = x_0(t)$, a qual chamaremos de solução básica.

Dado um problema de contorno, embora não seja possível, de um modo geral, obter soluções para o problema degenerado correspondente, a hipótese assumida é

viável no sentido que existem muitas referências sobre a existência de soluções de problemas da forma (3), (4) com $\lambda = \mu = 0$, conforme podemos ver em [2], [4], [16], [21], [28], [29], [36].

Inicialmente, analisamos o problema da existência e variação do número de soluções de (3), (4), próximas de x_0 , com os parâmetros λ e μ numa vizinhança da origem em R^2 . Para este propósito, linearizamos o problema em torno de x_0 e o escrevemos na forma

$$Lx = N(x, \lambda, \mu)$$

onde L e $N(., \lambda, \mu)$ são operadores definidos num certo espaço de Banach X , com L linear. Daí, aplicamos o método de redução de Liapunov-Schmidt. O caso em que o núcleo de L , $N(L)$, tem dimensão um é estudado no capítulo II. O caso excepcional $\dim N(L) = 2$ é tratado no apêndice.

Convém observar que Loud em [24] estudou o problema de valor de contorno (3), (4) sob outro enfoque. Seu estudo se baseia numa análise direta do problema levando à consideração de vários casos e extensos cálculos.

Preferimos o método de Liapunov-Schmidt. O seu uso simplifica bastante a análise do problema (3), (4), subdividindo-o naturalmente, como já salientamos, conforme a dimensão do espaço das soluções do problema linearizado.

A parte central deste trabalho, capítulo III, está relacionado ao problema (3), (4), com $M = -N = I$ (I : matriz identidade de ordem 2), $K = 0$ ($0 = (0,0)^t$) e a equação degenerada é autônoma. Observe que esta situação inclui o caso do oscilador não linear considerado como motivação inicial.

A hipótese (H) garante a existência de uma família a um parâmetro de soluções b -periódicas, obtidas de x_0 por uma translação no tempo. Assim, a ocorrência de bifurcação de soluções de (3), (4) é analisada não em torno da solução básica e sim, em torno de uma órbita gerada por ela. Isto em relação ao caso geral (capítulo II) requer certas adaptações técnicas.

Apresentamos um tratamento desse problema, que chamamos "direto", de modo a incluir também os casos do modelo de Lotka-Volterra, estudado em [33] e da equação

$$(5) \quad \ddot{x} + \tilde{g}(x, x') + \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) = 0$$

onde f_1 e f_2 são funções reais b -periódicas.

Os problemas diretos sempre levam a diagramas de bifurcação dados por curvas no plano $\lambda\mu$, concorrentes na origem, definindo "regiões setoriais", onde o número de soluções é constante. Além disso, esses diagramas sugerem o seguinte problema inverso:

"Dado um diagrama desse tipo, como deve ser a perturbação de modo que as soluções periódicas da equação correspondente se bifurquem de acordo com esse diagrama?"

Esse problema é colocado de forma precisa na secção 3.2.

Apresentamos nos teoremas 3.4, 3.5 e 3.6 alguns resultados parciais nessa direção. Resultados relativamente gerais são apresentados nos teoremas 3.7, 3.9 e 3.11 que dependem de fatos elementares da geometria projetiva. Os teoremas 3.8 e 3.10 são versões dos teoremas 3.7 e 3.9, respectivamente.

CAPÍTULO I

FATOS BÁSICOS

1.1. EQUAÇÕES LINEARES

Nesta secção serão colocados alguns resultados contidos em [15, cap XII] e [12, cap III,VI] essenciais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores deste trabalho. Dentre estes resultados daremos uma descrição mais detalhada de alguns deles por uma questão de clareza e para melhor compreensão dos fatos.

Sejam $C = C([0,b],E)$ o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[0,b]$ e com valores em E , onde $E = C^n$ ou $E = R^n$, com a norma

$$x \in C \rightarrow \|x\| = \sup_{t \in [0,b]} |x(t)|$$

e seu subespaço vetorial $C^1 = C^1([0,b],E)$, constituído das funções com derivadas primeiras contínuas, munido com a norma

$$x \in C^1 \rightarrow \|x\|_1 = \sup_{t \in [0,b]} \{ |x(t)| + |x'(t)| \},$$

onde $|\cdot|$ indica uma norma fixada em E .

Consideremos o operador linear dado por:

$$T: C^1 \rightarrow C$$

$$x \rightarrow Tx = x' - Ax,$$

onde $' = \frac{d}{dt}$ e A é uma matriz $n \times n$, cujas colunas estão em C .

O sistema não homogêneo de equações lineares a ser considerado é:

$$(1.1) \quad x' = Ax + g, \quad g \in C,$$

com o correspondente sistema homogêneo

$$(1.2) \quad x' = Ax,$$

que é equivalente à equação $Tx = 0$. Em adição, consideremos as seguintes condições de contorno:

$$(1.3) \quad Mx(0) + Nx(b) = 0,$$

onde M, N são elementos de $M(n)$, sendo que por $M(n)$ estamos denotando o conjunto das matrizes $n \times n$, cujos elementos são ou reais ou complexos; b é um número

real positivo fixado. Por exemplo, se $M = -N = I$ (I : matriz identidade de ordem n) e $A(t)$, $g(t)$ estão definidas para todo t real e são periódicas de período b , então toda solução de (1.1) ou (1.2) satisfazendo (1.3) pode ser identificada com uma solução periódica de período b .

Entenderemos que um **problema de valor de contorno** consiste em uma equação diferencial definida num intervalo e sujeita a condições de contorno, relativas à função incógnita e suas derivadas, em cada extremo do intervalo. (1.1), (1.3) e (1.2), (1.3) são exemplos de problemas de valor de contorno.

A existência de soluções dos problemas de valor de contorno (1.2), (1.3) e (1.1), (1.3) é dada através dos próximos resultados.

Lema 1.1

Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de (1.2) então uma condição necessária e suficiente para que (1.2), (1.3) tenha uma solução não trivial é que $MX(0) + NX(b)$ seja singular.

Observação

Desde que a solução geral de (1.2) é da forma $x(t) = X(t)c$, com $c \in S$, $S = \{c \in \mathbb{R}^n : [MX(0) + NX(b)]c = 0\}$, temos que $\dim S = n - k$, onde k é o posto de $MX(0) + NX(b)$.

Quando escrevermos $r(M) = n$, queremos dizer que n é o posto da matriz M . Ainda, $(M \ N)$ denota a matriz $n \times 2n$ obtida por adjunção de M e N , nesta ordem.

Teorema 1.1

(i) Se (1.2), (1.3) só tem a solução trivial então, para cada $g(t)$ contínua, (1.1), (1.3) tem uma única solução $x(t)$ satisfazendo $|x(t)| \leq k \int_0^b |g(s)| ds$, $0 \leq t \leq b$, para alguma constante k , onde k independe de $g(t)$.

(ii) Se $r(M \ N) = n$ e (1.1), (1.3) tem uma solução $x(t)$ para cada $g(t)$ contínua então (1.2), (1.3) só tem a solução trivial.

□

A prova do teorema 1.1 decorre da fórmula

da variação das constantes, do lema 1.1 e do teorema 1.2, que será enunciado posteriormente.

Vamos introduzir a equação adjunta de (1.2) em conexão com o problema de encontrar fatores integran-tes para o operador T , do mesmo modo que foi feito ori-ginalmente por Lagrange. Suponhamos então o problema de encontrar $z \in C^1$ tal que o produto interno $\langle x, z \rangle = z^*Tx$ é uma "derivada exata", onde z^* indica o vetor trans-posto conjugado de z . Temos:

$$\begin{aligned}
 z^*Tx &= z^*(x' - Ax) \\
 &= z^*x' + z^{*'}x - z^{*'}x - z^*Ax \\
 &= (z^*x)' + (-z^{*'} - z^*A)x \\
 (1.4) \quad &= (z^*x)' + (T^*z)^*x,
 \end{aligned}$$

onde

$$T^*z = -z^{*'} - A^*z,$$

sendo A^* a transposta conjugada da matriz A .

Podemos concluir que z^*Tx é uma "derivada exata" se

$$(1.5) \quad T^*z = 0.$$

Assim, z pode ser olhado como um fator integrante pa-ra Tx se satisfizer a equação (1.5) ou, a equação equi-valente

$$(1.6) \quad z' + A^*z = 0$$

O operador T^* é o adjunto do operador T e a equação (1.6) é a adjunta da equação (1.2).

A identidade (1.4) pode ser reescrita na forma:

$$(1.7) \quad z^*Tx - (T^*z)^*x = (z^*x)',$$

que é conhecida como a identidade de Lagrange. Integrando ambos os membros de (1.7), obtemos a fórmula de Green dada por:

$$\int_0^b [z^*Tx - (T^*z)^*x](t)dt = z^*(b)x(b) - z^*(0)x(0).$$

Nosso objetivo agora é determinar que condições poderiam ser consideradas como adjuntas de (1.3), isto é, que condições deveriam ser agregadas à equação adjunta (1.6), para se definir o problema de contorno adjunto de (1.2), (1.3).

Considerando no espaço C o produto interno do L^2 , isto é,

$$(x, z) = \int_0^b z^*x,$$

para x, z em C , nosso procedimento será motivado pela relação

$$(Tx, z) = (x, T^*z).$$

Reescrevendo a fórmula de Green, temos:

$$(Tx, z) - (x, T^*z) = z^*(b)x(b) - z^*(0)x(0).$$

Assim, uma condição que deve ser requerida na definição de condição de contorno adjunta é:

$$(1.8) \quad z^*(b)x(b) - z^*(0)x(0) = 0.$$

As outras condições vão ser fornecidas pelo lema dado a seguir, que é um resultado puramente algébrico e, portanto, independente de qualquer problema de equação diferencial.

Lema 1.2

Sejam M, N em $M(n)$, sendo $r((M \ N)) = n$, $E = C^n$ ou $E = R^n$ e $S(M, N) = \{(x_1, x_2) \in E \times E : Mx_1 + Nx_2 = 0\}$. Então, existem P, Q em $M(n)$, sendo $r((P \ Q)) = n$, satisfazendo:

$$(i) \quad MP^* + NQ^* = 0$$

$$(ii) \quad S(P, Q) = S(M, N)^\perp$$

Prova

Como $r((M \ N)) = n$, existem matrizes M_1 , N_1 , em $M(n)$ tais que a matriz, em $M(2n)$,

$$W = \begin{pmatrix} M & N \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix}$$

é não singular.

Escrevendo a inversa de W como

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^* & P^* \\ Q_1^* & Q^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad W^{*-1} = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P & Q \end{pmatrix}$$

temos que (i) ocorre e $r((P \ Q)) = n$.

Indicando por $\cdot$ o produto interno em $E \times E$, temos que para $\forall (x_1, x_2) \in S(M, N)$ e $\forall (y_1, y_2) \in S(P, Q)$,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= W^{-1}[W(x_1, x_2)] \cdot (y_1, y_2) = \\ &= [W(x_1, x_2)] \cdot [W^{*-1}(y_1, y_2)] = 0. \quad \text{Como } \dim S(M, N) = \\ &= \dim S(P, Q) = n, \quad \text{segue (ii).} \quad \square \end{aligned}$$

Consideremos as seguintes condições de contorno:

$$(1.9) \quad Pz(0) - Qz(b) = 0,$$

com P e Q obtidas pelo lema 1.2. Observemos que as relações (1.3) e (1.9) implicam (1.8). De fato, basta fazermos na prova do lema 1.2, $x_1 = x(0)$, $x_2 = x(b)$, $y_1 = z(0)$ e $y_2 = -z(b)$. Assim, podemos afirmar que as **condições de contorno adjuntas** de (1.3) são as condições de contorno (1.9), com P e Q obtidas pelo lema 1.2. Em correspondência, os problemas (1.2), (1.3) e (1.6), (1.9) serão chamados **problemas adjuntos**. É interessante notar que dada uma "condição de contorno periódica" $x(0) = x(b)$, isto é, $M = -N = I$, teremos no problema de contorno adjunto a "condição periódica" $z(0) = z(b)$, isto é, $P = Q = I$ e, reciprocamente.

Como a escolha de P e Q para a definição de (1.9) não é única, convém observar que o significado de (ii) do lema 1.2, no nosso contexto, é que pares de vetores $(z(0), -z(b))$ satisfazendo (1.9) são independentes da escolha de P e Q .

A relação entre um subespaço vetorial e seu complemento ortogonal é simétrica. Isto garante,

através do lema 1.2, que a relação entre as condições de contorno (1.3) e as condições de contorno adjuntas (1.9) é simétrica. Daí segue, portanto, que o adjunto do problema de valor de contorno (1.6), (1.9) é o problema original (1.2), (1.3).

O próximo lema estabelece a relação existente entre as soluções de um problema de valor de contorno e as de seu adjunto.

Lema 1.3

Sejam M, N em $M(n)$, sendo $r(M \ N) = n$. Então a dimensão de cada espaço-solução do problema de valor de contorno (1.2), (1.3) e de seu adjunto (1.6), (1.9) é a mesma.

Prova

Inicialmente mostremos que se o problema de valor de contorno adjunto tem $k, k \geq 1$, soluções linearmente independentes então o problema original também tem k soluções linearmente independentes.

Como na prova do lema 1.2, designemos por W , a matriz não singular, da forma $W = \begin{pmatrix} M & N \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix}$ e

sua inversa por:

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^* & P^* \\ Q_1^* & Q^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad W^{*-1} = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P & Q \end{pmatrix}$$

Seja

$$(1.10) \quad U = W \operatorname{diag}[X(0), X(b)] = \begin{pmatrix} MX(0) & NX(b) \\ M_1X(0) & N_1X(b) \end{pmatrix},$$

onde $X(t)$ é uma matriz fundamental de (1.2). U é não singular e

$$U^{*-1} = W^{*-1} \operatorname{diag}[X^{*-1}(0), X^{*-1}(b)] = \begin{pmatrix} P_1 X^{*-1}(0) & Q_1 X^{*-1}(b) \\ P X^{*-1}(0) & Q X^{*-1}(b) \end{pmatrix},$$

Seja $z(t) = X^{*-1}(t) c_0$ uma solução de (1.6), (1.9). Então, $U^{*-1}(c_0, -c_0) = (d, 0)$ para algum vetor d , n -dimensional. Suponhamos que (1.6), (1.9) tem k , $k \geq 1$, soluções linearmente independentes. Assim, podemos fazer c_0 variar sobre um conjunto de k vetores linearmente independentes. O mesmo vai ocorrer com o vetor d , uma vez que U^{*-1} é não singular. Como $U^*(d, 0) = (c_0, -c_0)$ segue de (1.10) que

$$(1.11) \quad c_0 = X^*(0)M^*d = -X^*(b)N^*d,$$

ou seja,

$$(1.12) \quad [X^*(0)M^* + X^*(b)N^*]d = 0.$$

Portanto, a matriz $X^*(0)M^* + X^*(b)N^*$ a nula k vetores linearmente independentes d . O mesmo vai ocorrer com a sua transposta conjugada. Do lema 1.1 segue que o problema original (1.2), (1.3) tem $k, k \geq 1$, soluções linearmente independentes.

Assim, se $k_1, k_1 \geq 1$, é a dimensão do espaço solução do problema de valor de contorno adjunto (1.6), (1.9) então, pelo que acabamos de demonstrar, $k_2 \geq k_1$, se k_2 é a dimensão do espaço solução de (1.2), (1.3). E, se $k_2, k_2 \geq 1$, é a dimensão do espaço solução de (1.2), (1.3) então pela condição de simetria existente entre os problemas adjuntos e pelo que demonstramos no início, $k_1 \geq k_2$. Destes resultados segue que $k_1 = k_2$.

No caso de $k_1 = 0$, k_2 não pode ser diferente de zero, por simetria e pelo mesmo raciocínio do parágrafo anterior. $\square$

A prova deste último lema mostrou que se a solução de (1.6), $z = X^{*-1}(t)c_0$, com $c_0 = X^*(0)M^*d = -X^*(b)N^*d$, satisfaz a condição de contorno (1.9) então

ocorre que $[X^*(0)M^* + X^*(b)N^*]d = 0$. Mostremos que a recíproca também é verdadeira. De fato, se $z = X^{*-1}(t)c_0$, com c_0 dado acima, então:

$$Pz(0) - Qz(b) = PM^*d + QN^*d = (PM^* + QN^*)d = (MP^* + NQ^*)d = 0,$$

pelo lema 1.2. Esta observação será usada na prova do próximo teorema.

Teorema 1.2

Sejam M, N em $M(n)$ sendo $r((M \ N)) = n$. Suponhamos que (1.2), (1.3) e (1.6), (1.9) são problemas adjuntos. Suponhamos que (1.2), (1.3) tem exatamente k , $k \geq 1$, soluções linearmente independentes $x_1(t), \dots, x_k(t)$ e sejam $z_1(t), \dots, z_k(t)$ as soluções linearmente independentes de (1.6), (1.9). Então (1.1), (1.3) tem solução se, e somente se, para $j=1, 2, \dots, k$,

$$(1.13) \quad (g, z_j) = 0,$$

onde $(\ , \)$ indica o produto interno do L_2 . Neste caso, se $x_0(t)$ é uma solução de (1.1), (1.3), a expressão da solução geral de (1.1), (1.3) é

$$x_0(t) + \alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_k x_k(t),$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são escalares arbitrários.

Prova

A solução geral de (1.1) é dada por

$$x(t) = X(t) \left[c + \int_0^t X^{-1}(s) g(s) ds \right],$$

onde $X(t)$ é matriz fundamental de (1.2).

Esta solução satisfaz a condição de contorno (1.3) se, e somente se,

$$(1.14) \quad [MX(0) + NX(b)]c = -NX(b) \int_0^b X^{-1}(s) g(s) ds.$$

Assim, (1.1), (1.3) tem uma solução se, e somente se, (1.14) tem uma solução c . E isto ocorre se, e somente se,

$$(1.15) \quad (-NX(b) \int_0^b X^{-1}(s) g(s) ds) \cdot d = 0,$$

para todas as soluções d de (1.12). Considerando $c_0 = -X^*(b)N^*d$ e lembrando da observação anterior a este

teorema, (1.15) é equivalente a

$$\int_0^b [g(s) \cdot (-X^{*-1}(s)X^*(b)N^*d)] ds = \int_0^b g(s)z^*(s) ds = 0$$

para todas as soluções $z = X^{*-1}(s)c_0$ de (1.6), (1.9), isto é, tal que satisfaça (1.13). $\square$

1.2. O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA E ALGUNS FATOS DA TEORIA DE BIFURCAÇÃO

2.1. Uma ferramenta muito utilizada no transcorrer deste trabalho é o teorema da função implícita, que ora enunciaremos. Sejam X , Y e Z espaços de Banach e U um subconjunto aberto de $X \times Y$. Suponhamos $F: U \rightarrow Z$ contínua tal que $F(x_0, y_0) = 0$ para $(x_0, y_0) \in U$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ contínua em U , onde o símbolo $\frac{\partial}{\partial y}$ denota a derivada de Fréchet em relação a y . Se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ for um isomorfismo de Y sobre Z então

i) existem $r > 0$ e uma única função contínua $f: B_r(x_0) \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in B_r(x_0)$.

ii) Se F for de classe C^1 então f é de classe C^1 e

$$\frac{df}{dx}(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

iii) f é de classe C^p se F for de classe C^p , $p \geq 1$. $\square$

Para uma prova deste teorema ver [27].

2.2. Entenderemos a teoria de bifurcação no sentido de Chow-Hale [7] ou Stakgold [31], isto é, como um dos ramos da análise não linear, que estuda o comportamento local de soluções de uma equação. Daremos, nesta secção, uma definição precisa de ponto de bifurcação de acordo com Chow-Hale [7]. Para maiores detalhes e exemplos ver as referências citadas.

Sejam X , Y e Z espaços de Banach, Γ um subconjunto aberto de Y , chamado conjunto de parâmetros e $F: X \times \Gamma \rightarrow Z$ uma aplicação continuamente diferenciável.

Consideremos a equação

$$(2.1) \quad F(x, \gamma) = 0$$

Por definição, uma solução de (2.1) é um par (x, γ) em $X \times \Gamma$, que satisfaz (2.1).

Designaremos por S o conjunto de todas as soluções de (2.1) e para cada $\gamma \in \Gamma$, seja o conjunto

$$S_\gamma = \{x \in X: (x, \gamma) \in S\}.$$

Seja U um subconjunto aberto de X . Se $S_{\gamma_1} \cap U$ é homomorfo a $S_{\gamma_2} \cap U$, dizemos que S_{γ_1} é equivalente a S_{γ_2} em U e denotaremos por $S_{\gamma_1} \sim S_{\gamma_2}(U)$.

Definição 2.1: γ_0 é um ponto de bifurcação para (2.1) se existe um x_0 em S_{γ_0} de modo que para cada vizinhança V de γ_0 , existem γ_1 e γ_2 em V tais que $S_{\gamma_1} \not\sim S_{\gamma_2}$ em U , onde U é uma vizinhança qualquer de x_0 .

Observação: Em particular, se γ_0 é um ponto de bifurcação para (2.1), segundo a definição 2.1, e se S_{γ_1} e S_{γ_2} forem não vazios então para cada vizinhança W de (x_0, γ_0) existem, em W , pelo menos duas soluções distintas de (2.1): (x_1, γ) e (x_2, γ) , para algum $\gamma \in \Gamma$.

A figura a seguir dá uma representação gráfica do conjunto solução de (2.1), destacando um ponto de bifurcação.

O objetivo principal da teoria de bifurcação é determinar uma completa caracterização do conjunto S_γ , para γ numa vizinhança de um ponto de bifurcação. Esta caracterização está intimamente ligada a parte linear de F . De fato, se a derivada de Fréchet de F com relação a x , em $(x_0, \gamma_0) \in S$, tem inversa limitada, o teorema da função implícita garante unicidade da função, de classe C^1 , $x = x^*(\gamma)$ definida numa vizinhança de $\gamma = \gamma_0$ e satisfazendo $F(x^*(\gamma), \gamma) = 0$, $x^*(\gamma_0) = x_0$. Neste caso, γ_0 não é ponto de bifurcação para a equação (2.1). Assim, os únicos pontos, que requerem discussões adicionais são aqueles para os quais $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \gamma_0)$ é singular.

1.3. O MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT

O estudo em matemática aplicada de certos fenômenos da natureza pode ser levado a modelos matemáticos da seguinte forma geral

$$(3.1) \quad F(x, \gamma) = 0,$$

onde x representa a solução desejada num determinado espaço, em geral de dimensão infinita e γ um parâmetro, possivelmente vetorial. Na verdade, uma solução de (3.1) é

um par ordenado (x, γ) , que satisfaz a equação (3.1), mas frequentemente iremos nos referir apenas a x como a solução de (3.1) (para γ fixado ou x como função de γ). A equação (3.1) pode envolver não apenas uma equação diferencial ordinária ou uma equação a derivadas parciais, pode ser, por exemplo, uma equação integral.

Com o objetivo de caracterizar o número de soluções x , de (3.1) para cada γ , o emprego do método de Liapunov-Schmidt é muito frequente na literatura. Damos a seguir uma descrição do método.

O método alternativo para um caso especial.

Sejam X, Y espaços de Banach e $L, N: X \rightarrow Y$ operadores contínuos, sendo L linear. Consideremos em X , a equação

$$(3.2) \quad Lx = Nx$$

Lembremos que uma projeção P , em um espaço de Banach X , é um operador linear contínuo de X em X , tal que $P^2 = P$.

Denotando por $N(L)$ o espaço nulo de L e $R(L)$ a imagem de L , a hipótese seguinte é básica na investigação das soluções da equação (3.2).

(H) Existem projeções $U: X \rightarrow X$ e $V: Y \rightarrow Y$ tais que
 $U(X) = N(L)$ e $V(Y) = R(L)$.

Designando por I , o operador identidade (de acordo com o contexto não haverá dúvidas quanto ao seu domínio), cada x de X pode ser decomposto na forma $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in U(X)$ e $x_2 \in (I-U)X$. Disso segue que $Lx = Lx_2$ e assim, a imagem de $(I-U)X$, sob L , é $R(L)$. Mais ainda, $L|_{(I-U)X}$ é um isomorfismo algébrico entre $(I-U)X$ e $R(L)$. Isto implica na existência do operador linear limitado $K: R(L) \rightarrow (I-U)X$, chamado *inversa à direita de L* , tal que $LK = I$ em $R(L)$ e $KL = I-U$ em X , pois $KLx = KL(x_1+x_2) = KLx_2 = x_2 = (I-U)x$, para $x \in X$.

Lema 3.1

Sob (H), a equação (3.2) é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$(3.3) \quad \begin{cases} (a) & x = Ux + KVNx \\ (b) & (I-V)Nx = 0 \end{cases}$$

Prova

Para $x \in X$, (3.2) é equivalente ao sistema

$$(3.4) \quad \begin{cases} VLx = VNx \\ (I-V)Lx = (I-V)Nx \end{cases}$$

que, sob (H), é equivalente a

$$(3.5) \quad \begin{cases} Lx = VNx \\ (I-V)Nx = 0, \end{cases}$$

pois $V|_{R(V)}$ é identidade de $R(V)$ e $R(I-V) = N(V)$.

Aplicando K na primeira equação de (3.5) obtemos $(I-U)x = KVNx$, ou ainda, $x = Ux + KVNx$. Portanto, (3.5) é equivalente a

$$\begin{cases} x = Ux + KVNx \\ (I-V)Nx = 0 \end{cases} \quad \square$$

As equações (3.3) (a) e (3.3) (b) são chamadas equação auxiliar e equação de bifurcação, respec-

tivamente. Observemos que (3.3) (b) diz que Nx deve pertencer a $R(L)$, pois $Y = R(L) \oplus (I-V)Y$ e, nestas condições (3.3) (a) garante que uma solução de (3.2) é a soma de um elemento do espaço nulo de L com uma solução particular de (3.2), $KVNx$.

Observação

Se o operador N satisfizer condições apropriadas, por exemplo, se N for de classe C^1 , numa vizinhança da origem, com $N(0) = 0$ e $\frac{d}{dx} N(0) = 0$ então, fazendo $y = Ux$ na equação (3.3) (a) e aí aplicando o teorema da função implícita obtemos uma solução desta equação, $x = x^*(y)$, de classe C^1 , definida numa vizinhança de $y = 0$, de modo que esta solução será também uma solução de (3.2) se, e somente se,

$$(3.6) \quad (I-V)Nx^*(y) = 0.$$

Neste caso, obter uma solução de (3.2), num espaço de dimensão infinita, é equivalente a resolver (3.6) em relação a y , sendo y um elemento do espaço nulo de L . Assim, mesmo que $N(L)$ seja de dimensão infinita, existe uma expectativa de vantagem nesta troca, desde que $N(L)$ é um subespaço próprio de X . Este método

do, que reduz o problema original a um problema que, em princípio, é mais simples que o anterior é chamado método alternativo aplicado ao espaço nulo de L .

O método alternativo para um caso geral.

Nas aplicações, a equação (3.1) assume a forma

$$(3.7) \quad Lx - W(x, \gamma) = 0,$$

para (x, γ) numa vizinhança da origem, onde X, Y, Γ são espaços de Banach, $L: X \rightarrow Y$ um operador linear limitado e $N: X \times \Gamma \rightarrow Y$ um operador contínuo, com derivada de Fréchet contínua em X , $N(0,0) = 0$, $\frac{\partial N}{\partial x}(0,0) = 0$.

Assumindo a hipótese (H) pois, as projeções U e V dependem apenas de L e utilizando a notação anterior, a equação (3.7) é equivalente a

$$x = Ux + KV N(x, \gamma)$$

$$(I-V)N(x, \gamma) = 0$$

ou, ao sistema

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (a) \quad x_2 &= K V N(x_1 + x_2, \gamma) \\ (b) \quad (I-V)W(x_1 + x_2, \gamma) &= 0, \end{aligned}$$

se escrevermos $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in U(X)$ e $x_2 \in (I-U)X$.

Aplicando o teorema das funções implícitas à equação (3.8) (a), existe uma vizinhança W de $(0,0) \in U(X) \times \Gamma$ e uma única função $x_2^*: W \rightarrow (I-U)X$ tal que $x_2^*(0,0) = 0$, $x_2^*(x_1, \gamma)$ satisfaz (3.8) (a), $x_2^*(x_1, \gamma)$ é contínua em W , com derivada parcial relativa a x_1 contínua. Portanto, a equação (3.7) tem uma solução em uma vizinhança suficientemente pequena de $(x, \gamma) = (0,0)$ se, e somente se, $(x_1, \gamma) \in W$ satisfaz a equação de bifurcação

$$(I-V)N(x_1+x_2^*(x_1, \gamma), \gamma) = 0.$$

Quando o método alternativo é aplicado ao núcleo de L para equações da forma (3.7), cujas soluções estão numa vizinhança da origem, é chamado **método de Liapunov-Schmidt** para a equação (3.7).

Se L é um operador de Fredholm, isto é, a dimensão do $N(L)$ bem como a codimensão de $R(L)$ são finitas, existe uma vantagem sensível em aplicar o método de Liapunov-Schmidt, pois ele reduz o problema dado, na investigação da solução de um sistema de n equações, $n = \text{codim } R(L)$, com m incógnitas, $m = \dim N(L)$.

CAPÍTULO II

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES DE CERTOS PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO NÃO LINEARES

Suponhamos que o problema de valor de con
torno

$$(1) \quad x'' + g(t, x, x', \lambda, \mu) = 0$$

$$(2) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) = K$$

tenha uma solução x_0 , para $\lambda = \mu = 0$. O objetivo da sec
ção 2.1 é estudar a existência e a variação do número de
soluções de (1), (2) próximas de x_0 , para λ e μ pe
quenos, quando o espaço das soluções do problema varia-
cional linear de (1), (2), em torno de x_0 , é unidimen-
sional. Com este mesmo propósito, analisaremos na secção
2.3, um problema de valor de contorno, que se transforma
num caso particular de (1), (2), mediante uma mudança de
variável conveniente. Neste problema, o parâmetro é o
comprimento do intervalo, b .

2.1. O ESPAÇO DAS SOLUÇÕES DO PROBLEMA VARIACIONAL LI- NEAR: CASO UNIDIMENSIONAL

Consideremos o seguinte problema de valor

de contorno

$$(2.1) \quad x'' + g(t, x, x'; \lambda, \mu) = 0$$

$$(2.2) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) = K,$$

onde $\tilde{x} = (x, x')^t$; M e N são matrizes constantes 2×2 , tal que $r((M \ N)) = 2$; $K = (K_1, K_2)^t$ é constante; λ e μ são parâmetros reais; b é um número real positivo fixado; g é uma função real suficientemente regular de cinco variáveis reais de modo que todas as derivadas parciais de g necessárias daqui em diante, existem e são contínuas.

Assumiremos a hipótese:

(H) O problema degenerado obtido de (2.1), (2.2), fazendo $\lambda = \mu = 0$ tem uma solução $x_0 = x_0(t)$, que chamaremos solução básica.

A verificação da hipótese (H) é admitidamente não trivial. No entanto, existem muitas referências sobre a existência de soluções de problemas da forma (2.1), (2.2) com $\lambda = \mu = 0$, conforme podemos ver em [2], [4], [16], [21], [28], [29], [36].

Assim, é em torno desta solução básica que se coloca o problema de existência e variação do número de soluções de (2.1), (2.2), com os parâmetros λ e μ numa vizinhança da origem em R^2 . Para este propósito in-

introduzimos a variável y pela relação $x = x_0 + y$.

Desenvolvendo g em torno de $(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)$ o problema (2.1), (2.2) é escrito equivalentemente na forma

$$(2.3) \quad y'' + g_{x''}(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)y' + g_{x'}(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)y + \\ + H(t, y, y', \lambda, \mu) = 0$$

$$(2.4) \quad M\tilde{y}(0) + N\tilde{y}(b) = 0,$$

onde $H(t, y, y', \lambda, \mu) = O(y^2 + y'^2 + |\lambda| + |\mu|)$, uniformemente em $t \in [0, b]$, quando $y, y', \lambda, \mu \rightarrow 0$. Deste modo, o nosso objetivo passa a ser o de caracterizar as soluções "pequenas" y de (2.3), (2.4), para (λ, μ) numa vizinhança de $(0, 0)$.

Consideremos também o problema variacional relacionado

$$(2.5) \quad y'' + g_{x''}(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)y' + g_{x'}(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)y = 0$$

$$(2.6) \quad M\tilde{y}(0) + N\tilde{y}(b) = 0$$

Os espaços convenientes para o nosso estudo são o espaço $Y = C([0, b], R)$ das funções contínuas de $[0, b]$ em R , com a norma do supremo, e seu subespaço vetorial $X = \{x \in C^2([0, b], R) : M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) = 0\}$, munido com a topologia C^2 .

Definindo os operadores $L: X \rightarrow Y$ e $N: X \times \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ de modo que $N(y, \lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} H(t, y, y', \lambda, \mu)$ representa a parte não linear de (2.3) e $Ly \stackrel{\text{def}}{=} y'' + F(t)y' + G(t)y$, com $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_{x_1}(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)$, $G(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_x(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)$, o problema (2.3), (2.4) pode ser escrito numa forma mais compacta:

$$(2.7) \quad Ly = N(y, \lambda, \mu),$$

envolvendo um operador linear e outro não linear.

Vamos aplicar o método de Liapunov-Schmidt para estudar a equação (2.7).

Neste capítulo analisaremos apenas o caso em que o espaço das soluções do problema variacional (2.5), (2.6) é unidimensional. Dessa forma, como o núcleo de L , $N(L)$, é o espaço das soluções de (2.5), (2.6), podemos considerar $\phi_0 \in X$, $\phi_0 \neq 0$, tal que $N(L) = [\phi_0]$. Além disso, podemos garantir que o espaço das soluções do problema adjunto de (2.5), (2.6) tem dimensão 1. Por outro lado, se $S = [w_0]$, $w_0 \neq 0$, a equação em y , $Ly = w$, $w \in Y$, tem solução se, e somente se, $\int_0^b ww_0 = 0$, conforme foi visto no capítulo 1 [Teorema 1.2]. Em outras palavras, a imagem $R(L) = L(X)$ é dada por

e tem, portanto, codimensão igual a 1.

Seja $U: X \rightarrow X$ a projeção definida por

$$Ux = \left[c^{-1} \int_0^b x \phi_0 \right] \phi_0,$$

onde $c = \int_0^b \phi_0^2$. Assim, $U(X) = N(L)$.

Definamos em Y a projeção V por

$$Vy = \left[d^{-1} \int_0^b y w_0 \right] w_0,$$

onde $d = \int_0^b w_0^2$. Assim, se $E = I - V$ temos $E(Y) = R(L)$.

A aplicação L restrita a $(I-U)(X)$ é um a um. Assim, para cada $y \in R(L)$ existe um único $x \in (I-U)(X)$ tal que $Lx = y$. Se $\tilde{x}(.;y)$ é uma solução fixada de $Lx = y$, a expressão geral das soluções desta equação é $x = k\phi_0 + \tilde{x}(.;y)$, $k \in \mathbb{R}$. Esta solução, x , pertence a $(I-U)(X)$ se, e somente se, $k \int_0^b \phi_0^2 + \int_0^b \tilde{x}(.;y)\phi_0 = 0$. Disto segue que $k = k(y) = -c^{-1} \int_0^b \tilde{x}(.;y)\phi_0$. Com isto, está bem definido o operador linear contínuo $K: E(Y) \rightarrow (I-U)(X)$ dado por

$$Ky = k(y)\phi_0 + \tilde{x}(.;y)$$

satisfazendo $LK = I$ em $E(Y)$ e $KL = (I-U)(X)$ em X .

Denotando $y = y_1 + y_2$, com $y_1 \in U(X)$ e $y_2 \in (I-U)(X)$ e decompondo a equação (2.7) nas duas seguintes

$$(I-E) L(y_1+y_2) = (I-E) N(y_1+y_2, \lambda, \mu)$$

$$EL(y_1+y_2) = EN(y_1+y_2, \lambda, \mu)$$

obtemos, observando que $EL = L$ e $KL(y_1+y_2) = y_2$, o sistema equivalente à (2.7)

$$(2.8) \quad \begin{aligned} a) \quad y_2 &= KEN(y_1+y_2, \lambda, \mu) \\ b) \quad (I-E) N(y_1+y_2, \lambda, \mu) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da função implícita à equação (2.8) (a) obtemos a existência de uma vizinhança W de $(0,0) \in U(X) \times \mathbb{R}^2$ e de uma única função contínua $y_2^*: W \rightarrow (I-U)(X)$ tal que $y_2^*(0,0) = 0$, y_2^* satisfaz (2.8) (a). Na análise que faremos a seguir, usaremos a continuidade da derivada parcial de y_2^* com relação a algumas variáveis. Isto naturalmente impõe condições de regularidade para g .

Fazendo $y_1 = a\phi_0$ e definindo $p(a, \lambda, \mu)$ por $p(a, \lambda, \mu)w_0 = (I-E) N(a\phi_0 + y^*(a\phi_0, \lambda, \mu), \lambda, \mu)$, o problema (2.8) fica reduzido à equação

$$(2.9) \quad p(a, \lambda, \mu) = 0.$$

Para aliviar a notação, omitiremos o argumento $(t, x(t), x'(t), 0, 0)$ de todas as derivadas parciais de g indicadas no decorrer deste capítulo. Ainda, se g é suficientemente regular de modo que levando em conta a definição da projeção E e calculando os termos de ordem mais baixa da não linearidade da equação (2.3), o coeficiente de a na expansão de p em torno de $(0, 0, 0)$ é igual a zero e, assim (2.9) pode ser escrita na forma:

$$(2.10) \quad p(a, \lambda, \mu) = Aa^2 + B\lambda + C\mu + O(|a|^3 + \lambda^2 + \mu^2 + |a\lambda| + |a\mu| + |\lambda\mu|) = 0,$$

quando $a, \lambda, \mu \rightarrow 0$, onde

$$A = -\frac{1}{2} \{ d^{-1} \int_0^b [g_{xx} \phi_0^2 + 2g_{xx', \phi_0 \phi_0'} + g_{x', x', \phi_0'^2}] w_0 \},$$

$$B = -d^{-1} \int_0^b g_{\lambda} w_0,$$

$$C = -d^{-1} \int_0^b g_{\mu} w_0,$$

$$\text{com } d = \int_0^b w_0^2.$$

Assumimos a seguinte hipótese:

$$(H1) \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad B^2 + C^2 > 0$$

Vamos estudar a equação (2.9) numa vizinhança de $(a, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$. Observemos que $p(0, 0, 0) = 0$,

$p_a(0,0,0) = 0$ e $p_{aa}(0,0,0) = 2A \neq 0$, onde os índices indicam derivação parcial. O teorema da função implícita garante que existem um número real r positivo, uma vizinhança V de $(\lambda, \mu) = (0,0)$ e uma única função contínua $a^*: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p_a(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = 0$, $a^*(0,0) = 0$ e $|a^*(\lambda, \mu)| < r$. No que segue, usaremos a continuidade da derivada parcial de a^* com relação a λ se B for não nulo, caso contrário, consideraremos a derivada parcial de a^* com relação a μ .

Não há perda de generalidade em supor $A > 0$. Assim, podemos escolher o número r de modo que $p(\pm r, 0, 0) > 0$. Por continuidade da função p e, se necessário, reduzindo V , podemos garantir que $p(\pm r, \lambda, \mu) > 0$, para $(\lambda, \mu) \in V$. Por outro lado, lembrando que $p_{aa}(0,0,0) = 2A > 0$ e diminuindo ainda mais, se necessário, o tamanho da vizinhança V , podemos afirmar que $p_{aa}(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) > 0$, quando $(\lambda, \mu) \in V$. Assim $a^*(\lambda, \mu)$ é o único ponto de mínimo local de $p(\cdot, \lambda, \mu)$, com $(\lambda, \mu) \in V$.

O próximo lema localiza a região no $\mathbb{R}^3$, que contém as soluções pequenas de $p_a(a, \lambda, \mu) = 0$.

Lema 2.1

Existem uma constante $\alpha > 0$ e uma vizinhança de $(a, \lambda, \mu) = (0,0,0)$ tais que toda solução

de $p_a(a, \lambda, \mu) = 0$ nesta vizinhança satisfaz necessariamente à estimativa:

$$(2.11) \quad |a| \leq \alpha(|\lambda| + |\mu|)$$

Prova

Suponhamos que a estimativa (2.11) não seja verdadeira. Então existe uma sequência (a_n, λ_n, μ_n) de soluções de $p_a(a, \lambda, \mu) = 0$, com $(a_n, \lambda_n, \mu_n) \rightarrow (0, 0, 0)$ quando $n \rightarrow \infty$, de modo que

$$\frac{\lambda_n}{a_n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\mu_n}{a_n} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

Substituindo (a_n, λ_n, μ_n) em $p_a(a, \lambda, \mu) = 0$, obtemos

$$(2.12) \quad 2Aa_n + O(a_n^2 + |\lambda_n| + |\mu_n|) = 0$$

Dividindo (2.12) por $|a_n|$ e, em seguida, fazendo $n \rightarrow \infty$ chegamos a uma contradição da hipótese (H1). Isto prova o lema. $\square$

Seja $q(\lambda, \mu) = p(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu)$. A estimativa dada pelo lema (2.1) e o fato de

$$p(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) - [Aa^{*2}(\lambda, \mu) + B\lambda + C\mu] = O((|\lambda| + |\mu|)^2),$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$, implicam que

$$q(\lambda, \mu) = B\lambda + C\mu + O(|\lambda| + |\mu|)^2,$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$.

A equação $q(\lambda, \mu) = 0$ define uma curva tangente à reta $B\lambda + C\mu = 0$ em $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, que é o lugar geométrico dos pontos (λ, μ) correspondentes ao caso em que a equação (2.9) tem uma única solução (a, λ, μ) , com $a \in [-r, r]$. A vizinhança V fica dividida em dois conjuntos:

$V_+ = \{(\lambda, \mu) \in V: q(\lambda, \mu) > 0\}$, onde (2.9) não tem soluções.

$V_- = \{(\lambda, \mu) \in V: q(\lambda, \mu) < 0\}$, onde (2.9) tem precisamente duas soluções.

De fato, como $B^2 + C^2 > 0$, não há perda de generalidade em supor $B \neq 0$. Sendo $q_\lambda(0, 0) = B$ então $q_\lambda(\lambda, \mu)$ tem o mesmo sinal de B para (λ, μ) numa vizinhança de $(0, 0)$. Assim, nesta vizinhança de $(0, 0)$, $q(., \mu)$ é uma função estritamente monótona para cada μ

fixado. Por outro lado, o teorema da função implícita garante que existem uma vizinhança de $\mu = 0$ e uma única função $\lambda^*(\mu)$, solução de $q(\lambda, \mu) = 0$ para μ pequeno e tal que $\lambda^*(0) = 0$. Disso segue, reduzindo a vizinhança V , se necessário, que a curva $\lambda = \lambda^*(\mu)$, em V , é tangente na origem à reta $B\lambda + C\mu = 0$ e, além disso, para (λ, μ) em um lado desta curva correspondem dois valores de a , isto é, existem duas soluções de (2.9), enquanto que para (λ, μ) no outro lado, não existe solução de (2.9). Portanto, $\lambda = \lambda^*(\mu)$ é a curva de bifurcação para a equação (2.9), ou seja, os pontos de bifurcação são aqueles (λ, μ) para os quais $q(\lambda, \mu) = 0$. As figuras 2.1, 2.2 e 2.3, dão um esboço do gráfico da função $p(., \lambda, \mu)$, para λ e μ fixados numa vizinhança da origem, com B positivo.

$\lambda < \lambda^*(\mu)$
figura 2.1

$\lambda = \lambda^*(\mu)$
figura 2.2

$\lambda > \lambda^*(\mu)$
figura 2.3

O próximo teorema resume a análise, que acabamos de fazer. Lembremos ainda, que todas as derivadas parciais de g , que aparecem neste teorema são avaliadas em $(t, x_0(t), x'_0(t), 0, 0)$.

Teorema 2.1

Suponhamos que A e $B^2 + C^2$ sejam não nulos, onde

$$2A = -d^{-1} \int_0^b [g_{xx} \phi_0^2 + 2g_{xx', \phi_0} \phi_0' + g_{x', x', \phi_0'^2}] w_0$$

$$B = -d^{-1} \int_0^b g_\lambda w_0$$

$$C = -d^{-1} \int_0^b g_\mu w_0,$$

com $d = \int_0^b w_0^2$. Então existem uma vizinhança W_0 de x_0 em X , uma vizinhança V de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e uma curva Γ no plano $\lambda\mu$, tangente à reta $B\lambda + C\mu = 0$ na origem que divide V em duas regiões conexas V_1 e V_2 tais que:

- a) se $(\lambda, \mu) \in V_1$, o problema (2.1), (2.2) tem precisamente duas soluções em W_0 ,
- b) se $(\lambda, \mu) \in V_2$, o problema (2.1), (2.2) não tem solução em W_0 ,

c) se $(\lambda, \mu) \in \Gamma$, o problema (2.1), (2.2) tem uma única solução em W_0 .

Além disso, denotando as soluções de (2.1), (2.2) por $x(t, \lambda, \mu)$, para cada $(\lambda, \mu) \in V \setminus V_2$, segue que, quando $(\lambda, \mu) \rightarrow (0, 0)$, $x(t, \lambda, \mu)$ tende para $x_0(t)$ uniformemente em $[0, b]$. $\square$

Observação: A continuidade das soluções $x(t; \lambda, \mu)$ com relação aos parâmetros λ e μ , mencionada no teorema acima, decorre da equação de bifurcação (2.9), observando que toda solução (a, λ, μ) , numa vizinhança de $(0, 0, 0)$, de (2.9) satisfaz $a = a(\lambda, \mu) = O((|\lambda| + |\mu|)^{1/2})$.

Dentro das condições do teorema 2.1, com $B > 0$ e $C < 0$, o diagrama de bifurcação das soluções de (2.1), (2.2) é dado qualitativamente pela figura 2.4, onde o número entre parênteses indica o número de soluções de (2.1), (2.2) na correspondente região.

Suponhamos agora que a função g é suficientemente regular de modo que o polinômio de grau 3 na série de Taylor da equação de bifurcação (2.8) (b) seja da forma: $\bar{A} a^3 + B\lambda + C\mu + Da\lambda + Ea\mu$. Além disso, como $p(a, \lambda, \mu)$ é definida por:

$$p(a, \lambda, \mu)w_0 = (I-E)N(a\phi_0 + Y_2^*(a\phi_0, \lambda, \mu), \lambda, \mu),$$

estudaremos então, o caso em que o problema (2.8) se reduz à equação:

$$(2.13) \quad p(a, \lambda, \mu) = \bar{A}a^3 + B\lambda + C\mu + Da\lambda + Ea\mu + R(a, \lambda, \mu) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} 6\bar{A} = & -d^{-1} \left\{ \int_0^b [g_{xxx}\phi_0^3 + 3g_{xxx,\phi_0^2}\phi_0' + 3g_{xx,x,\phi_0}\phi_0'^2 + \right. \\ & + g_{x,x,x}\phi_0'^3 - 3g_{xx}\phi_0 KE(g_{xx}\phi_0^2 + 2g_{xx,\phi_0}\phi_0' + g_{x,x,\phi_0'}\phi_0'^2) - \\ & - 6g_{xx,\phi_0} \frac{d}{dt} KE(g_{xx}\phi_0^2 + 2g_{xx,\phi_0}\phi_0' + g_{x,x,\phi_0'}\phi_0'^2) - \\ & \left. - 3g_{x,x,\phi_0'} \frac{d}{dt} KE(g_{xx}\phi_0^2 + 2g_{xx,\phi_0}\phi_0' + g_{x,x,\phi_0'}\phi_0'^2) \right] w_0 \}, \end{aligned}$$

$$B = -d^{-1} \int_0^b g_\lambda w_0,$$

$$C = -d^{-1} \int_0^b g_\mu w_0,$$

$$D = d^{-1} \int_0^b [2g_{xx}\phi_0(KEg_\lambda) + 3g_{xx,\phi_0} \frac{d}{dt}(KEg_\lambda) + 2g_{x',x'}\phi_0' \frac{d}{dt}(KEg_\lambda) + g_{xx,\phi_0'}(KEg_\lambda) - g_{x\lambda}\phi_0 - g_{x',\lambda}\phi_0'] w_0$$

$$E = d^{-1} \int_0^b [2g_{xx}\phi_0(KEg_\mu) + 3g_{xx,\phi_0} \frac{d}{dt}(KEg_\mu) + 2g_{x',x'}\phi_0' \frac{d}{dt}(KEg_\mu) + g_{xx,\phi_0'}(KEg_\mu) - g_{x\mu}\phi_0 - g_{x',\mu}\phi_0'] w_0,$$

$$\text{com } d = \int_0^b w_0^2 \quad e$$

$R(a, \lambda, \mu) = 0 (a^4 + \lambda^2 + \mu^2 + |\lambda\mu| + a^2|\mu| + a^2|\lambda|)$, quando $a, \lambda, \mu \rightarrow 0$; sob a seguinte hipótese:

$$(H2) \quad \bar{A} \neq 0 \quad e \quad BE \neq DC$$

Pelo fato de $p_{aa}(0,0,0) = 0$ e $p_{aaa}(0,0,0) = 6\bar{A} \neq 0$ segue, via o teorema da função implícita, que existem um número real $r > 0$ e uma única função contínua $a^*(\lambda, \mu)$ definida numa vizinhança V da origem, satisfazendo:

$p_{aa}(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = 0$ para $(\lambda, \mu) \in V$, $a^*(0,0) = 0$ e $|a^*(\lambda, \mu)| < r$. Usaremos a continuidade da derivada parcial de a^* com relação a λ se D for não nulo, caso contrário, em virtude de (H2), consideraremos contínua apenas a derivada parcial de a^* com relação a μ .

Supondo $\bar{A} > 0$, podemos escolher o número r de modo que tenhamos

$$p(r,0,0) > 0, \quad p(-r,0,0) < 0 \quad \text{e} \quad p_a(\pm r,0,0) > 0.$$

Ainda mais, por continuidade dessas funções e, se necessário, reduzindo V , podemos garantir que, para $(\lambda, \mu) \in V$:

$$(2.14) \quad p(r, \lambda, \mu) > 0, \quad p(-r, \lambda, \mu) < 0 \quad \text{e} \quad p_a(\pm r, \lambda, \mu) > 0$$

Dessas relações temos, pelo teorema do valor intermediário, que para cada $(\lambda, \mu) \in V$, a equação

$$(2.15) \quad p(a, \lambda, \mu) = 0$$

tem pelo menos uma solução, dependendo de λ e μ , em $[-r, r]$.

Por outro lado, o fato de

$p_{aa}(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = 0$ e $p_{aaa}(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) > 0$, para $(\lambda, \mu) \in V$ implica que $a^*(\lambda, \mu)$ é o único ponto de mínimo local da função $p_a(., \lambda, \mu)$, com $(\lambda, \mu) \in V$. Ainda, podemos mostrar de modo análogo ao que foi feito no lema 2.1 (página 32), que toda solução da equação

$$(2.16) \quad p_{aa}(a, \lambda, \mu) = 6\bar{A}a + O(a^2 + |\lambda| + |\mu|) = 0,$$

numa vizinhança de $(a, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$ satisfaz necessariamente à estimativa $|a| \leq \alpha(|\lambda| + |\mu|)$, para alguma constante $\alpha > 0$. Em vista desta estimativa segue que $R_a(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = O(|\lambda| + |\mu|^2)$, quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$. Disto e do fato de

$$p_a(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu) - [3\bar{A}a^{*2}(\lambda, \mu) + D\lambda + E\mu] = O((|\lambda| + |\mu|)^2),$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$, segue que

$$q(\lambda, \mu) = D\lambda + E\mu + O((|\lambda| + |\mu|)^2),$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$, onde $q(\lambda, \mu) = p_a(a^*(\lambda, \mu), \lambda, \mu)$.

O conjunto $\{(\lambda, \mu) \in V: q(\lambda, \mu) = 0\}$ corresponde ao caso em que (2.15) tem uma única solução em $[-r, r]$, para cada $(\lambda, \mu) \in V$, uma vez que $p_a(a, \lambda, \mu) > 0$ para todo $a \neq a^*(\lambda, \mu)$, ou seja, $p(., \lambda, \mu)$ é estritamente crescente em $[-r, r]$. Ainda, a equação $q(\lambda, \mu) = 0$ define uma curva tangente à reta $D\lambda + E\mu = 0$, na origem, que divide V em dois conjuntos:

$V_+ = \{(\lambda, \mu) \in V: q(\lambda, \mu) > 0\}$, onde (2.15) tem uma única solução em $[-r, r]$, para cada $(\lambda, \mu) \in V$, pois $p(., \lambda, \mu)$ é estritamente crescente neste intervalo e

$V_- = \{(\lambda, \mu) \in V: q(\lambda, \mu) < 0\}$, onde (2.15) pode ter uma, duas ou três soluções em $[-r, r]$, para cada $(\lambda, \mu) \in V$, conforme veremos a seguir.

O fato de $q(\lambda, \mu) < 0$ em V_- implica na existência de dois pontos $a_M(\lambda, \mu)$ e $a_m(\lambda, \mu)$ satisfazendo: $p_a(a, \lambda, \mu) = 0$ e $-r < a_M(\lambda, \mu) < a^*(\lambda, \mu) < a_m(\lambda, \mu) < r$

Disso segue que a função $p(\cdot, \lambda, \mu)$ assume o valor máximo local em $a_M(\lambda, \mu)$, que denotaremos por $\gamma_M(\lambda, \mu)$ e o valor mínimo local em $a_m(\lambda, \mu)$, denotado por $\gamma_m(\lambda, \mu)$.

Seja $\gamma(\lambda, \mu) = \gamma_M(\lambda, \mu) \cdot \gamma_m(\lambda, \mu)$.

Se $\gamma(\lambda, \mu) > 0$ então $\gamma_M(\lambda, \mu)$ e $\gamma_m(\lambda, \mu)$ tem o mesmo sinal implicando numa única solução de (2.15) em $[-r, r]$, para cada $(\lambda, \mu) \in V$.

Se $\gamma(\lambda, \mu) = 0$ então $\gamma_M(\lambda, \mu) = 0$ ou $\gamma_m(\lambda, \mu) = 0$. Assim, para cada $(\lambda, \mu) \in V$, (2.15) tem duas soluções em $[-r, r]$: uma simples e uma dupla.

Se $\gamma(\lambda, \mu) < 0$ temos três soluções de (2.15) em $[-r, r]$, para cada $(\lambda, \mu) \in V$. Isto pode ser visto através das relações (2.14) e do teorema do valor intermediário.

Dessas observações concluímos que o conjunto $\{(\lambda, \mu) \in V: \gamma(\lambda, \mu) = 0\}$ dará a forma da curva de

bifurcação das soluções de (2.15), no plano dos parâmetros λ e μ . A fim de determiná-la, comecemos por encontrar os pontos de máximo e mínimo locais, respectivamente $a_M(\lambda, \mu)$ e $a_m(\lambda, \mu)$, da função $p(., \lambda, \mu)$.

Afirmamos que toda solução da equação $p_a(a, \lambda, \mu) = 0$, numa vizinhança de $(a, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$, satisfaz a estimativa $a^2 \leq \beta(|\lambda| + |\mu|)$, para alguma constante $\beta > 0$. A prova desta afirmação é análoga aquela feita para a equação (2.16).

Disso segue que:

$$a_M(\lambda, \mu) = -\left(-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu\right)^{1/2} + O(|\lambda| + |\mu|),$$

$$a_m(\lambda, \mu) = \left(-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu\right)^{1/2} + O(|\lambda| + |\mu|),$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$. Ainda, $R(a_i(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = O((|\lambda| + |\mu|)^2)$, $i = M, m$ e assim:

$$\begin{aligned} \gamma_M(\lambda, \mu) &= B\lambda + C\mu + 2\bar{A}\left(-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu\right)^{3/2} + \\ (2.17) \quad &+ O((|\lambda| + |\mu|)^2), \\ \gamma_m(\lambda, \mu) &= B\lambda + C\mu - 2\bar{A}\left(-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu\right)^{3/2} + \\ &+ O((|\lambda| + |\mu|)^2), \end{aligned}$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$. Podemos estender as funções $\gamma_i(\lambda, \mu)$, $i = M, m$, numa vizinhança de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ definindo:

$$\begin{aligned} \gamma_M(\lambda, \mu) &= B\lambda + C\mu + 2\bar{A}\left|-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu\right|^{3/2} + O((|\lambda| + |\mu|)^2), \\ \gamma_m(\lambda, \mu) &= B\lambda + C\mu - 2\bar{A}\left|-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu\right|^{3/2} + O((|\lambda| + |\mu|)^2). \end{aligned}$$

Observemos que:

i) Introduzindo a notação $Z(\gamma)$ para indicar os zeros da função γ , temos que

$$Z(\gamma(\lambda, \mu)) = Z(\gamma_M(\lambda, \mu)) \cup Z(\gamma_m(\lambda, \mu)).$$

Por outro lado, $\gamma_M(0,0) = 0$ e $\gamma_{M\mu}(0,0) = C \neq 0$, pois em virtude da hipótese (H2) podemos, sem perda de generalidade, supor $C \neq 0$. Decorre do teorema da função implícita que existem uma vizinhança de $\lambda = 0$ e uma única função contínua $\mu^*(\lambda)$ tal que

$(\lambda, \mu^*(\lambda)) \in Z(\gamma_M(\lambda, \mu))$. Ainda, $\mu^*_{\lambda}(0) = -\frac{B}{C}$ e, se B e C tiverem sinais contrários, isto é, $-\frac{B}{C} > 0$, podemos garantir que $\mu^*_{\lambda}(\lambda) > 0$ para λ pequeno implicando que $\mu^*(\lambda)$ é uma função monótona estritamente crescente nesta região. O mesmo argumento se aplica a equação $\gamma_m(\lambda, \mu) = 0$. Desta forma, $Z(\gamma_M(\lambda, \mu))$ e $Z(\gamma_m(\lambda, \mu))$ definem duas curvas no plano $\lambda\mu$, que são tangentes, em $(\lambda, \mu) = (0,0)$, à reta $B\lambda + C\mu = 0$.

ii) A menos de t.o.s., a perturbação de $B\lambda + C\mu$ pela parcela $2\bar{A}(-\frac{D}{3\bar{A}}\lambda - \frac{E}{3\bar{A}}\mu)^{3/2}$, que aparece com sinal positivo em γ_M e negativo em γ_m , garante que as duas curvas obtidas em i), com exceção de $(\lambda, \mu) = (0,0)$, tangentes à reta $B\lambda + C\mu = 0$ na origem, estão em lados distintos desta reta tangente.

Estas observações nos permitem fazer esboços de algumas possibilidades de $Z(\gamma(\lambda, \mu))$, onde

$Z(\gamma(\lambda, \mu)) = Z(\gamma_M(\lambda, \mu)) \cup Z(\gamma_m(\lambda, \mu))$. Primeiramente, suponhamos que $B < 0$, $C > 0$, $D < 0$, $E > 0$, $\bar{A} > 0$.

Se $B > 0$, $C < 0$, $D > 0$, $E < 0$, $\bar{A} > 0$, temos:

Do exposto acima, concluimos o seguinte:

Teorema 2.2

Suponhamos que $\bar{A} \neq 0$ e $BE \neq DC$. Então existem uma vizinhança W_0 de x_0 em X , uma vizinhança V de $(\lambda, \mu) = (0,0)$ em R^2 e uma curva Γ_0 tangente à reta $D\lambda + E\mu = 0$, na origem, que divide V em duas regiões conexas V_1 e V_2 de modo que se $(\lambda, \mu) \in \Gamma_0 \cup V_1$ existe uma única solução de (2.1), (2.2) (ver, por exemplo, figura 2.5). Se $(\lambda, \mu) \in V_2$ existem duas curvas Γ_1 e Γ_2 tangentes à reta $B\lambda + C\mu = 0$, na origem de modo que Γ_1 divide V_2 em duas regiões conexas: V_{21} e $\bar{V}_{21}$. Γ_2 , por sua vez, divide $\bar{V}_{21}$ em mais duas regiões conexas: V_{22} e $\bar{V}_{22}$, sendo V_{22} limitada pelas curvas Γ_1 , Γ_2 e pela vizinhança V . (ver, por exemplo, figura 2.6). Assim, i) se $(\lambda, \mu) \in V_{22}$ existem exatamente três soluções de (2.1), (2.2), ii) se $(\lambda, \mu) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, existem exatamente duas soluções de (2.1), (2.2), iii) se $(\lambda, \mu) = (0,0)$ ou $(\lambda, \mu) \in V \setminus (V_{22} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ existe uma única solução de (2.1), (2.2).

Além disso, denotando por $x(t; \lambda, \mu)$, para cada $(\lambda, \mu) \in V$, as soluções de (2.1), (2.2) temos que quando $(\lambda, \mu) \rightarrow (0,0)$, $x(t; \lambda, \mu)$ tende para $x_0(t)$ uniformemente em $[0, b]$.

□

Fig. 2.5

Fig. 2.6

2.2. ALGUNS EXEMPLOS.

A fim de ilustrar a utilização dos teoremas 2.1 e 2.2, consideremos o seguinte problema de valor de contorno

$$(2.18) \quad x'' + 3xx' + x^3 + \lambda x + \mu x^3 = 0$$

$$(2.19) \quad \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 1 & 1/\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1) \\ \dot{x}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sigma/2 & - & 5/2 \\ 2 & - & 2/\sigma \end{pmatrix}; \quad \sigma \in R_{++}$$

Para $\sigma \in R_{++} \setminus \{2, 3\}$, o problema é não crítico, isto é, $N(L) = \{0\}$, onde L é o operador linear definido na página 28. Portanto, para (λ, μ) uma vizinhança de $(0, 0)$, o teorema da função implícita garante que existe uma única solução de (2.18), (2.19). Sendo assim, resta-nos analisar apenas os casos $\sigma = 2$ e $\sigma = 3$.

Consideraremos cada um separadamente.

$\sigma = 3$. Neste caso, $x_0(t) = \frac{2}{t+1}$ é solução do problema degenerado obtido de (2.18), (2.19) fazendo $\lambda = \mu = 0$.

O problema variacional linear relacionado a (2.18), (2.19) é dado por

$$y'' + \frac{6}{t+1} y' + \frac{6}{(t+1)^2} y = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução é $\phi_0(t) = \frac{1}{2(t+1)^3}$.

O problema adjunto de (2.18), (2.19) é dado por

$$w'' - \frac{6}{t+1} w' + \frac{12}{(t+1)^2} w = 0$$

$$P\tilde{w}(0) + Q\tilde{w}(1) = 0,$$

onde a existência de P e Q são asseguradas pelo lema 1.2 do capítulo I. Sua solução é $w_0(t) = -\frac{(t+1)^3}{2}$.

Alguns cálculos mostram que os coeficientes da equação (2.10) são:

$$A = -\frac{7}{64} d^{-1}, B = \frac{7}{3} d^{-1}, C = 4d^{-1}, \text{ onde } d^{-1} = \frac{28}{127}$$

Logo, pelo teorema 2.1 podemos fazer o seguinte esboço do diagrama de bifurcação para as soluções de (2.18), (2.19):

$\sigma = 2$. Aqui, $x_0(t) = \frac{2}{t+1}$ também é solução do problema de gerado obtido de (2.18), (2.19) fazendo $\lambda = \mu = 0$. Mas, $\phi_0(t) = -\frac{2}{(t+1)^2}$ é solução do problema variacional linear e $w_0(t) = -2(t+1)^4$ é solução do problema adjunto de (2.18), (2.19).

Nesse caso, $A = 0$ e os coeficientes da equação (2.13) são:

$$\bar{A} = -8d^{-1}, \quad B = 15d^{-1}, \quad C = 24d^{-1}, \quad D = \left(\frac{71}{3} - 3765d^{-1}\right)d^{-1}$$

$$E = -24d^{-1}(1+251d^{-1}), \quad \text{onde } d^{-1} = \frac{9}{2044}$$

Pelo teorema 2.2 um esboço do diagrama de bifurcação é dado pela figura a seguir:

2.3. INTERVALO DE COMPRIMENTO VARIÁVEL

Um problema relacionado ao da secção 2.1 ocorre quando o parâmetro é comprimento do intervalo, b . Neste caso, através de uma mudança de variável conveniente introduzimos o parâmetro na equação diferencial. A análise a partir daí é basicamente a mesma da secção mencionada acima, com as devidas adaptações pois o problema em questão passa a ter um único parâmetro. Por esta razão, apresentamos o procedimento de redução ao problema da secção 2.1 e nos limitaremos a enunciar o resultado central para o problema reduzido.

Seja o problema de valor de contorno:

$$(2.20) \quad \ddot{x} + g(t, x, \dot{x}) = 0$$

$$(2.21) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) = K$$

onde $\tilde{x} = (x, x')^t$; M e N são matrizes constantes 2×2 , tal que $r((M \ N)) = 2$; $K = (K_1, K_2)^t$ é constante; b é um parâmetro real positivo; g é uma função real suficientemente regular de modo que todas as derivadas parciais de g necessárias daqui por diante existam e sejam contínuas.

Assumiremos a hipótese:

(H₃) (2.20), (2.21) tem uma solução $x_0 = x_0(t)$ quando $b = b_0$.

O objetivo é estudar a variação do número de soluções de (2.20), (2.21) próximas de x_0 , definidas em intervalos $0 \leq t \leq b$, com b variando próximo de b_0 .

Através da mudança de variável $t = b\sigma$, (2.20), (2.21) é equivalente a:

$$(2.22) \quad \ddot{x} + g(t, x, x', b) = 0$$

$$(2.23) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(1) = K$$

sendo que por uma questão de comodidade estamos denotando também por g a função que aparece em (2.22). Na realidade, (2.22) é da forma:

$$\ddot{x} + G(t, x, x', b) = 0$$

onde $G(t, x, x', b) = b^2 g(bt, x, \frac{1}{b} x')$.

De acordo com (H_3) o problema (2.22),
 (2.23) tem uma solução $\xi_0(t) = x_0(bt)$, quando $b = b_0$.
 Assim, o nosso objetivo passa a ser o de caracterizar as
 soluções de (2.22), (2.23) próximas de $\xi_0(t)$, para b
 próximo de b_0 .

Se o espaço das soluções de problema variaci
 cional linear relacionado a (2.22), (2.23) for unidimen-
 sional e gerado por ϕ_0 , obtemos o seguinte

Teorema 2.3

Suponhamos $AB \neq 0$, onde

$$2A = -d^{-1} \int_0^1 [g_{xx} \phi_0^2 + 2g_{xx', \phi_0} \phi_0' + g_{xx''} \phi_0'^2] w_0,$$

$$B = -d^{-1} \int_0^1 g_b w_0,$$

com $d = \int_0^1 w_0^2$, sendo que w_0 gera o espaço das solu-
 ções do problema de contorno adjunto associado ao proble-
 ma variacional linear de (2.22), (2.23). Nestas condi-
 ções, existem uma vizinhança W_0 de $\xi_0(t)$ em X , uma
 vizinhança V de $b_0 \in \mathbb{R}$ de modo que se $b \in V$ e sgn
 $(AB) < 0$ ($\text{sgn}(AB) > 0$), o problema (2.22), (2.23) tem
 duas soluções, quando $b > b_0$ ($b < b_0$) e nenhuma solu-
 ção, quando $b < b_0$ ($b > b_0$). Além disso, estas soluções,
 quando existem, tendem a $\xi_0(t)$, quando b tende a b_0 ,
 uniformemente em $[0,1]$. $\square$

Observação: Todas as derivadas parciais de g citadas no teorema 2.3 são calculadas em $(t, \xi_0(t), \xi'_0(t), b_0)$.

As figuras a seguir dão os possíveis diagramas de bifurcação do espaço dos parâmetros com o número de soluções de (2.22), (2.23) colocado entre parênteses.

$$\begin{array}{c} (0) \quad (1) \quad (2) \\ \hline \quad b_0 \end{array} \rightarrow b$$

$$\operatorname{sgn}(AB) < 0$$

$$\begin{array}{c} (2) \quad (1) \quad (0) \\ \hline \quad b_0 \end{array} \rightarrow b$$

$$\operatorname{sgn}(AB) > 0$$

O próximo exemplo, Loud [24], provém do cálculo das variações e surge quando se deseja encontrar uma superfície de revolução de área mínima. Ele é traduzido pelo seguinte problema de valor de contorno

$$x'' x' = 1 + x'^2$$

$$x'(0) = 0$$

$$x(b) = h \quad (h > 0)$$

com o comprimento do intervalo b variando, que se transforma através da mudança de variável $t = b_0$ em:

$$(2.24) \quad x'' x' = b^2 + x'^2$$

$$(2.25) \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ x(1) = h \end{cases}$$

Se u_0 é a raiz positiva $\coth u = u$, tomemos $b_0 = h \operatorname{cosech} u_0$. Então a solução de (2.24), (2.25), quando $b = b_0$, é $\xi_0(t) = h \operatorname{sech} u_0 \cosh(tu_0)$. Com estes valores,

$$\phi_0(t) = \frac{1}{h \operatorname{cosech} u_0} \left[-\frac{\cosh(tu_0)}{u_0} + t \sinh(tu_0) \right]$$

é uma solução do problema variacional linear relacionado a (2.24), (2.25), que é dado por:

$$y'' - 2u_0 \operatorname{tgh}(tu_0) y' + u_0^2 y = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Ainda, $w_0(t) = \frac{\operatorname{sech}(tu_0)}{h \operatorname{cosech} u_0} \left[\frac{1}{u_0} - t \operatorname{tgh}(tu_0) \right]$ é uma solução do problema adjunto de (2.24), (2.25). Daí,

$$A = \frac{d^{-1}}{2} \frac{\sinh^2 u_0 \cosh^2 u_0}{h^4}$$

$$B = d^{-1} \frac{\sinh u_0}{h}$$

onde $d = \frac{2}{3u_0 h^2 \operatorname{cosech}^2 u_0} \left[\frac{1}{u_0} - \int_0^1 t \operatorname{tgh}(tu_0) dt \right]$. Como A

e B têm o mesmo sinal, existem duas soluções para $b < b_0$ e nenhuma para $b > b_0$.

Neste caso, o resultado pode ser verificado diretamente. A solução da equação diferencial $x x'' = 1 + x'^2$ satisfazendo $x'(0) = 0$ é $x = \frac{1}{c} \cosh ct$. Para satisfazer $x(b) = h$ precisamos que $ch = \cosh cb$ ou $\frac{b}{h} = cb \operatorname{sech} cb$. Agora, $f(z) = z \operatorname{sech} z$ assume valor máximo, $\operatorname{cosech} u_0$, para $z = u_0$. Portanto, c existe se, e somente se, $\frac{b}{h} \leq \operatorname{cosech} u_0$, isto é, c existe para $b \leq b_0$.

2.4. APÊNDICE: UMA ANÁLISE ALTERNATIVA DA EQUAÇÃO DE BIFURCAÇÃO.

Na secção 2.1 encontramos a curva de bifurcação para a equação (2.13),

$$p(a, \lambda, \mu) = \bar{A}a^3 + B\lambda + C\mu + Da\lambda + Ea\mu + R(a, \lambda, \mu),$$

onde $R(a, \lambda, \mu) = O(a^4 + \lambda^2 + \mu^2 + |\lambda\mu| + a^2|\mu| + a^2|\lambda|)$, quando $a, \lambda, \mu \rightarrow 0$, sob a hipótese

$$(H_2) \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad BE \neq DC,$$

através de sucessivas aplicações do teorema da função implícita. Com este mesmo objetivo, analisaremos agora a equação (2.13), utilizando uma outra técnica, dada por um teorema de Lassale [22]. Para tal, vamos introduzir a notação $E^S(W)$ para designar o espaço vetorial das funções com valores complexos definidas e s vezes continuamente diferenciáveis sobre W , onde W é um aberto do $\mathbb{R}^n$, munido da topologia da convergência uniforme

de todas as derivadas sobre todo compacto de W . Prosseguindo, consideremos U um aberto de R^n e designemos por $a_1, \dots, a_d$ uma d -upla de funções de $E^\infty(U)$ (que é o limite projetivo de $E^s(U)$), limitados em U assim como suas derivadas parciais de primeira ordem. Estamos, agora, em condições de enunciar o teorema citado acima.

Teorema 2.4

Existe uma aplicação linear contínua r_s de $E^s(U \times R)$ em $[E^k(U)]^d$ ($s \geq d$) e uma aplicação linear contínua Q_s de $E^s(U \times R)$ em $E^h(U \times R)$ tais que, para toda f de $E^s(U \times R)$ temos sobre $U \times R$ a igualdade:

$$f(x, t) = \left[t^d + \sum_{i=1}^d a_i(x) t^{d-i} \right] Q_s(f)(x, t) + \sum_{i=1}^d r_i(x) t^{d-i},$$

com $r_s(f) = (r_1, \dots, r_d)$ para $K = \left[\frac{s+1}{d} \right] - 1$ e $h = \left[\frac{s-d}{d} \right]$

($[n]$ = parte inteira de n) .

□

O resultado contido no teorema 2.4, segundo Lassale, é o melhor possível para toda função de $E^s(U \times R)$, sem hipóteses suplementares. Observemos porém, que no nosso caso, a função $p(a, \lambda, \mu)$ também satisfaz às condições $p(0, 0, 0) = 0, p_a(0, 0, 0) = p_{aa}(0, 0, 0) = 0$ e $p_{aaa}(0, 0, 0) \neq 0$, isto é, p é homogênea de grau 3 com

relação a primeira variável, no ponto zero. Deste modo, usando o teorema 2.3 com parâmetros extras no quociente e no resto conseguiremos numa conveniente vizinhança da origem, eliminar o resto obtendo assim, uma formulação mais simplificada para a função $p(a, \lambda, \mu)$. Isto poderia ser generalizado para uma função de $E^s(U \times R)$ homogênea de grau r com relação a primeira variável, r inteiro, positivo, qualquer. No entanto, não nos preocuparemos com este tipo de generalização, por fugir ao escopo deste nosso trabalho.

Vamos então, preparar a função $p(a, \lambda, \mu)$ para o estudo de seus zeros. Sejam $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ variáveis auxiliares. Seja $U = \{(\lambda, \mu, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in R^5: \gamma_i = h_i(\lambda, \mu, \gamma), i = 0, 1, 2, \text{ onde } \gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)\}$. Aplicando o teorema 2.3, com $d = 3$ e s no mínimo igual a 12, a função $p(a, \lambda, \mu)$ se transforma em

$$(2.26) \quad p(a, \lambda, \mu) = (a^3 + \sum_{i=0}^2 \gamma_i a^i) Q(p(a, \lambda, \mu))(a, \lambda, \mu, \gamma) + \\ + \sum_{i=0}^2 r_i(\lambda, \mu, \gamma) a^i,$$

onde h e k do teorema 2.3 são iguais a 3, se $s=12$.

A equação (2.26), no ponto $a = \lambda = \mu = 0$ e $\gamma = 0$, implica que $Q(p(a, \lambda, \mu))(0, 0, 0, 0) \neq 0$ e $r_i(0, 0, 0) = 0, i = 0, 1, 2$, pelo fato de $p(a, \lambda, \mu)$ ser homogênea de grau 3 com relação à primeira variável, no ponto zero.

Aplicando o operador $\frac{\partial^{j+1}}{\partial a^j \partial \gamma_i}$, $0 \leq i, j \leq 2$,

a ambos os membros de (2.26) e avaliando o resultado na origem de R^6 , obtemos:

$$0 = \frac{\partial^j}{\partial a^j} [a^i Q(p(a, \lambda, \mu)(a, \lambda, \mu, \gamma))] \Big|_{(0,0,0,0)} + j! \frac{\partial r_j}{\partial \gamma_i}(0,0,0), \text{ pois}$$

$$\frac{\partial^j}{\partial a^j} [(a^3 + \sum_{i=0}^2 \gamma_i a^i) \frac{\partial Q(p(a, \lambda, \mu)(a, \lambda, \mu, \gamma))}{\partial \gamma_i}] \Big|_{(0,0,0,0)} = 0 \quad (j < 3)$$

Além disso,

$$\frac{\partial^j}{\partial a^j} [a^i Q(p(a, \lambda, \mu)(a, \lambda, \mu, \gamma))] \Big|_{(0,0,0,0)} \begin{cases} = 0 & \text{se } j < i \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Então a matriz

$$\left(\frac{\partial r_j}{\partial \gamma_i} \right) \Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_0}{\partial \gamma_0}(0,0,0) & 0 & 0 \\ \frac{\partial r_1}{\partial \gamma_0}(0,0,0) & \frac{\partial r_1}{\partial \gamma_1}(0,0,0) & 0 \\ \frac{\partial r_2}{\partial \gamma_0}(0,0,0) & \frac{\partial r_2}{\partial \gamma_1}(0,0,0) & \frac{\partial r_2}{\partial \gamma_2}(0,0,0) \end{pmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Disso e do fato de $r_i(0,0,0) = 0$, $i = 0,1,2$ decorre, via o teorema das funções implícitas, que existe uma única aplicação de classe C^3 , $\gamma^*: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $\gamma^*(0,0) = 0$ e $r_i(\lambda, \mu, \gamma^*(\lambda, \mu)) = 0$, para (λ, μ) numa conveniente vi-

zinhança da origem em R^2 , $i = 0, 1, 2$. Assim, numa vizinhança da origem em $R \times R^2$, (2.26) fica:

$$p(a, \lambda, \mu) = [a^3 + \sum_{i=0}^2 h_i(\lambda, \mu, \gamma^*(\lambda, \mu)) a^i] Q(p(a, \lambda, \mu)(a, \lambda, \mu, \gamma^*(\lambda, \mu))).$$

Ainda, fazendo $h_i(\lambda, \mu, \gamma^*(\lambda, \mu)) = p_i(\lambda, \mu)$ e $Q(p(a, \lambda, \mu)(a, \lambda, \mu, \gamma^*(\lambda, \mu))) = q(a, \lambda, \mu)$ obtemos na vizinhança da origem em $R \times R^2$

$$p(a, \lambda, \mu) = [a^3 + \sum_{i=0}^2 p_i(\lambda, \mu) a^i] q(a, \lambda, \mu)$$

com $q(0, 0, 0) \neq 0$ e $p_i(0, 0) = 0$, $i = 0, 1, 2$. Desta forma, estudar os zeros de $p(a, \lambda, \mu)$ é equivalente a estudar a equação

$$a^3 + \sum_{i=0}^2 p_i(\lambda, \mu) a^i = 0$$

Através da mudança de variável

$a = b - \frac{1}{3} p_2(\lambda, \mu)$, conseguimos eliminar o termo quadrático desta última equação obtendo

$$(2.27) \quad b^3 - \lambda_1 b - \lambda_2 = 0,$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} p_2^2(\lambda, \mu) - p_1(\lambda, \mu) \quad (2.28)$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{27} p_2^3(\lambda, \mu) + \frac{1}{3} p_1(\lambda, \mu) p_2(\lambda, \mu) - p_0(\lambda, \mu).$$

A fim de encontrar a curva de bifurcação para a equação (2.13), vamos procurar as soluções múltiplas da equação polinomial (2.27). Isto significa resolver o sistema
$$\begin{cases} b^3 - \lambda_1 b - \lambda_2 = 0. \\ 3b^2 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$$
 Sua solução, no pla

no $\lambda_1 \lambda_2$ é $\lambda_1 = 3b^2$ e $\lambda_2 = -2b^3$, que é a representação paramétrica da cúspide $4\lambda_1^3 - 27\lambda_2^2 = 0$

O gráfico a seguir mostra a curva de bifurcação para (2.13), no plano $\lambda_1 \lambda_2$ com o número de soluções indicado entre parênteses, nas respectivas regiões:

CAPÍTULO III

PROBLEMAS INVERSOS PARA A CONDIÇÃO DE PERIODICIDADE

No capítulo anterior, analisamos certos problemas de valor de contorno não lineares com o objetivo de descrever a variação do número de soluções próximas de uma solução fixada, x_0 . Na secção 3.1, discutiremos uma situação análoga para o caso em que a condição de contorno é periódica e a equação degenerada é autônoma. Com isto, estaremos lidando com uma família de soluções a um parâmetro, obtidas de x_0 por translações no tempo. A motivação para o presente estudo coincide com o recente interesse de vários autores em problemas desta natureza. As referências [7], [13], [14], [33], [35] são alguns exemplos em que o problema de bifurcação local a partir de famílias de soluções é estudado.

As equações:

$$(1) \quad \ddot{x} + \hat{g}(x, x') + \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \ddot{x} + g(x) = -\lambda x' + \mu f(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad \dot{x} = g(x) + \gamma f(t, x), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

com a condição de x_0 ser, para cada uma delas, uma solução periódica para $\lambda = \mu = 0$ são o assunto da secção 3.2. Os problemas a serem tratados são: dado, no plano

λ, μ , um diagrama de bifurcação encontrar $f_1(t)$ e $f_2(t)$, $f(t)$ ou $f(t, x)$ de modo que as bifurcações de soluções periódicas de (1), (2) ou (3), respectivamente, com órbi-tas próximas da de x_0 , ocorram de acordo com o diagra-ma pré-fixado. Na verdade, os problemas em consideração são problemas inversos. O que é usualmente tratado em aplicações da teoria de bifurcação é o seguinte: dada uma equação dependendo de parâmetros, estudar a variação do número de suas soluções, quando os parâmetros variam próximos a valores críticos. Em nosso caso, este problema que chamaremos **direto**, é resolvido nos teoremas 3.1, 3.2, 3.3 e (3.1)_{LV} a seguir. Embora, estes teoremas não es-tejam contidos em nosso objetivo central, os apresentare-mos explicitamente por serem necessários para uma formu-lação precisa dos problemas inversos.

3.1. Problemas Diretos: Bifurcação de Soluções Harmônicas

3.1.1. Consideremos o seguinte problema de valor de contorno:

$$(3.1) \quad \ddot{x} + g(t, x, x', \lambda, \mu) = 0$$

$$(3.2) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(b), \quad (\tilde{x} = (x, x')^t)$$

onde g é suficientemente regular nas cinco variáveis reais, b -periódica em t para cada (x, x', λ, μ) fixado. De-notando $g(t, x, x', 0, 0)$ por $\hat{g}(x, x')$, suponhamos que:

(H₀) O problema de valor de contorno

$$(3.3) \quad \ddot{x} + \hat{g}(x, x') = 0$$

$$(3.4) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(b)$$

tem uma solução $x_0 = x_0(t)$, não constante.

A condição de ser $g(., x, x', \lambda, \mu)$ uma função periódica de mesmo período que a solução básica x_0 , é que sugere o título desta secção.

A hipótese (H₀) implica que a dimensão do espaço das soluções b-periódicas da equação variacional linear de (3.1), em torno de x_0 , é maior ou igual a um. Admitamos que seja um. Esta condição está satisfeita no caso particular de (3.1), (3.2), tratado em [14] e no caso análogo a (3.1), (3.2), tratado em [33]

Seja $C = \{(x_0(t), x'_0(t)) : 0 \leq t < b\}$, a órbita gerada por x_0 . Consideremos a hipótese:

$$(H_1) \quad x'_0(\tilde{t}) = 0, \quad 0 \leq \tilde{t} < b, \quad \text{implica} \quad \hat{g}(x_0(\tilde{t}), 0) \neq 0,$$

Seja $v(s)^\perp = (x''_0(s), -x'_0(s))$, vetor ortogonal a $v(s)$. A aplicação $h: [0, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$h(s, \beta) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ x'_0(s) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x''_0(s) \\ -x'_0(s) \end{pmatrix} \quad \text{é um homeomorfismo de uma}$$

vizinhança de $(s,0)$ sobre uma vizinhança de $(x_0(s), x'_0(s))$. Daí, usando a compacidade de C segue que existe $\beta_0 > 0$ tal que o conjunto

$$(3.5) \quad W_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0(s) + \beta x''_0(s), y = x'_0(s) - \beta x'_0(s), \\ 0 \leq s < b, |\beta| < \beta_0 \}$$

constitui uma vizinhança tubular da órbita C , ou seja os pares da forma (s,β) , com $0 \leq s < b$, $|\beta| < \beta_0$ constituem o domínio de uma parametrização das curvas vizinhas de C .

Assim, cada solução b -periódica $(x(t), y(t))$, com $y(t) = x'(t)$, do sistema de primeira ordem correspondente a (3.1), que está em W_0 , determina um único α , $0 \leq \alpha < b$, tal que

$$x(\alpha) = x_0(0) + \beta x''_0(0) \\ x'(\alpha) = x'_0(0) - \beta x'_0(0),$$

para $(s,\beta) = (0,\beta)$, $|\beta| < \beta_0$. Tal solução pode ser representada por

$$(3.6) \quad x(t) = x_0(t-\alpha) + z(t-\alpha) \\ x'(t) = x'_0(t-\alpha) + z'(t-\alpha)$$

onde $(z(0), z'(0)) = \beta v(0)^\perp$. O parâmetro α pode ser as-

sociado a fase da solução $(x(t), x'(t))$, que está próxima de $(x_0(t-\alpha), x'_0(t-\alpha))$.

Fazendo $x_\alpha(t) = x(t+\alpha)$, $t \in \mathbb{R}$, então $x(t)$ é solução de (3.1), (3.2) se, e somente se, $x_\alpha(t)$ é solução de

$$(3.7) \quad x'' + g(t+\alpha, x, x', \lambda, \mu) = 0$$

$$(3.8) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(b)$$

Assim, é suficiente considerar soluções de (3.7), (3.8) da forma

$$(3.9) \quad x(t) = x_0(t) + z(t),$$

com $(z(0), z'(0)) = \beta v(0)^\perp$ e $|\beta|, |\lambda|, |\mu|$ suficientemente pequenos. Disto segue que (3.1), (3.2) é equivalente a

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & z'' + \hat{g}_x(x_0(t), x'_0(t)) z' + \hat{g}_x(x_0(t), x'_0(t)) z = \\ & = g_1(t, \alpha) \lambda + g_2(t, \alpha) \mu + H(t+\alpha, z, z', \lambda, \mu) \end{aligned}$$

$$\tilde{z}(0) = \tilde{z}(b)$$

$$(z(0), z'(0)) = \beta v(0)^\perp,$$

onde $g_1(t, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} -g_\lambda(t+\alpha, x_0(t), x'_0(t), 0, 0);$

$g_2(t, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} -g_\mu(t+\alpha, x_0(t), x'_0(t), 0, 0);$

$H(t+\alpha, z, z', \lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} O(z^2 + z'^2 + \lambda^2 + \mu^2),$ quando $z, z', \lambda, \mu \rightarrow 0.$

Sejam $Y = \{\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \phi \text{ é contínua e } b\text{-periódica}\}$ com a norma $\|\phi\|_Y = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t)|$ e

$X = \{\phi \in Y, \phi \text{ é de classe } C^2\}$ com a norma

$$\|\phi\|_X = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{|\phi(t)| + |\phi'(t)| + |\phi''(t)|\}.$$

Definindo os operadores

$$L: X \rightarrow Y$$

$$\phi \rightarrow L\phi = \phi'' + F(t)\phi' + G(t)\phi'' \quad \text{e}$$

$$N: X \times \mathbb{R}^3 \rightarrow Y$$

$$(\phi, \lambda, \mu, \alpha) \rightarrow N(\phi, \lambda, \mu, \alpha) = g_1(t, \alpha)\lambda + g_2(t, \alpha)\mu + H(t+\alpha, \phi, \phi', \lambda, \mu),$$

onde $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}_x(x_0(t), x'_0(t))$ e $G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}_x(x_0(t), x'_0(t)),$

temos que (3.10) é equivalente a

$$\begin{aligned} (3.11) \quad L\phi &= N(\phi, \lambda, \mu, \alpha) \\ (\phi(0), \phi'(0)) &= \beta v(0)^\perp \end{aligned}$$

e o problema linear associado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (3.12) \quad L\phi &= 0 \\ (\phi(0), \phi'(0)) &= \beta v(0)^\perp \end{aligned}$$

A hipótese (H_0) implica que $\dim N(L) \geq 1$, $N(L)$ é o núcleo do operador L . Suponhamos que $N(L) = [x_0']$. Assim, a imagem de L , $R(L) = \{w \in Y: \int_0^b ww_0 = 0\}$, onde w_0 gera o espaço das soluções do problema de contorno adjunto associado a (3.12).

Seja $V: Y \rightarrow Y$ a projeção definida por

$$Vw = [d^{-1} \int_0^b ww_0] w_0, \quad w \in Y,$$

com $d = \int_0^b w_0^2$. Assim $E(Y) = R(L)$ se $E = I - V$.

Indicando por $\cdot$ o produto interno de R^2 , definimos a projeção $U: X \rightarrow X$, tal que $U(X) = N(L)$, por

$$U\phi = c^{-1} [(\phi(0), \phi'(0)) \cdot (x_0'(0), x_0''(0))] x_0', \phi \in X,$$

onde $c = |(x_0'(0), x_0''(0))|^2$.

Para cada $w \in R(L)$ existe um único $\phi \in (I-U)X$ tal que $L\phi = w$. Se $\phi_0(\cdot; w)$ é uma solução fixada de $L\phi = w$, a expressão geral das soluções desta equação é dada por

$$\phi = kx_0' + \phi_0(\cdot; w), \quad k \in R.$$

A condição $\phi \in (I-U)X$ é equivalente a

$$k[x_0'^2(0) + x_0''^2(0)] = -x_0'(0)\phi_0(0;w) - x_0''(0)\phi_0'(0;w),$$

que define univocamente k como função de w , isto é, $k = k(w)$. Assim, está bem definido o operador linear K dado por:

$$K: R(L) \rightarrow (I-U)X$$

$$w \rightarrow Kw = k(w)x_0' + \phi_0(.,w),$$

que é contínuo como consequência do teorema da inversa limitada.

Portanto, (3.11) pode ser escrito equivalentemente na forma

$$L\phi = N(\phi, \lambda, \mu, \alpha)$$

$$U\phi = 0,$$

ou ainda,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (a) \quad \phi &= KEN(\phi, \lambda, \mu, \alpha) \\ (b) \quad (I-E)N(\phi, \lambda, \mu, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Como o intervalo $[0, b]$ é compacto, podemos garantir depois de um número finito de aplicações do teorema das funções implícitas, que existem uma vizinhan-

ça V de $(0,0,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times [0,b]$ e uma única função $\phi^*: V \rightarrow (I-U)(X)$, contínua, satisfazendo (3.13)(a) e tal que $\phi^*(0,0,\alpha) = 0$, $0 \leq \alpha \leq b$. Portanto, para todo $(\lambda, \mu, \alpha) \in V$ existe uma única solução b -periódica de (3.1), representada por (3.6), com órbita em W_0 (dado em (3.5)) se, e somente se, (λ, μ, α) satisfaz a equação (3.13)(b), com $\phi = \phi^*(\lambda, \mu, \alpha)$. Em outras palavras, (λ, μ, α) deve satisfazer a equação de bifurcação:

$$(3.14) \quad \int_0^b [g_1(.,\alpha)\lambda + g_2(.,\alpha)\mu + H(.,\alpha, \phi^*, \phi^{*'}, \lambda, \mu)] w_0 = 0,$$

que pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$(3.15) \quad A(\alpha) \cdot \gamma + Q(\gamma, \alpha) = 0,$$

onde $A(\alpha) = (\int_0^b g_1(.,\alpha) w_0, \int_0^b g_2(.,\alpha) w_0)$; $\gamma = (\lambda, \mu)$; $Q(\gamma, \alpha) = O(\lambda^2 + \mu^2)$, quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$.

Observemos que $A(\alpha)$, $0 \leq \alpha < b$, é uma curva fechada em $\mathbb{R}^2$. Denotando também com ' a derivação com relação a α (isto não provoca confusão porque α representa uma translação no tempo), suponhamos que

(H_2) - $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ são linearmente independentes, exceto possivelmente para um número finito de valores $\alpha = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, de modo que nestes pontos $\alpha = \alpha_i$, $A(\alpha_i)$ e $A(\alpha_j)$ são linearmente independentes se $i \neq j$.

- Se $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ são linearmente dependentes então $A''(\alpha)$ é linearmente independente com $A(\alpha)$.

(H_3) $A(\alpha) \neq 0, \quad 0 \leq \alpha < b.$

As hipóteses (H_2) e (H_3) são assumidas com o objetivo de possibilitar um estudo sistemático da equação (3.15). Obviamente isto pode ser feito sob condições mais fracas que (H_2) , entretanto parece-nos que a ausência de (H_3) acarretaria dificuldades bastante significativas.

Antes de prosseguirmos convém definir o termo "atravessar uma curva C na direção crescente". Sob (H_2) e (H_3) consideremos $\alpha_0, 0 \leq \alpha_0 < b$ tal que $A(\alpha_0)$ e $A'(\alpha_0)$ são linearmente dependentes. Sejam ℓ a reta $\gamma.A(\alpha_0) = 0$ e γ_0 um elemento de ℓ , com $|\gamma_0| = r_0 \neq 0$. Consideremos a circunferência $C_{r_0}: |\gamma| = r_0$ e I um pequeno arco desta circunferência com $\gamma_0 \in I$. Temos que γ_0 divide I em dois arcos I_- e I_+ , de modo que $\gamma \in I_-$ se $[\gamma.A(\alpha)][\gamma_0.A(\alpha)] \geq 0$, para α numa conveniente vizinhança de α_0 , caso contrário $\gamma \in I_+$. Dizemos que ℓ é **cruzada na direção crescente**, quando ℓ é cruzada ao movimentarmos sobre C_{r_0} de I_- para I_+ . Desta forma também definimos o termo "atravessar uma curva C na direção crescente num ponto $\gamma_0 \in C$ ", com $|\gamma_0|$

suficientemente pequeno, quando C é tangente à ℓ em $\gamma = 0$. A figura a seguir indica a direção crescente de atravessar ℓ e C em γ_0 e $-\gamma_0$.

Definição 3.1

Sejam (H_2) e (H_3) satisfeitas e V uma vizinhança de $\gamma = 0$, suficientemente pequena. Chamaremos de Σ , $\Sigma \subset V$, o conjunto dado por:

$$\Sigma = \{\gamma \in V: \exists \alpha \in [0, b) \text{ com } \gamma.A(\alpha) = 0\}.$$

O conjunto Σ^* mencionado no próximo teorema é uma pequena deformação de Σ , no seguinte sentido: se a fronteira de Σ contiver um par de segmentos concorrentes em $\gamma = 0$ então a fronteira de Σ^* é um par de curvas tangentes a estes segmentos em $\gamma = 0$. Se $\Sigma = V$ então $\Sigma^* = \Sigma = V$.

Teorema 3.1

Sob as hipóteses (H_{0-3}) existem uma vizinhança W_0 de x_0 em X , uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ de $\gamma = 0$ e um conjunto $\Sigma^* \subset V$, de modo que:

(i) se $\gamma \in \text{int } \Sigma^*$ existem pelo menos duas soluções b-periódicas de (3.1) em W_0 .

(ii) se $\gamma \in V \setminus \Sigma^*$ não existem soluções b-periódicas de (3.1) em W_0 .

(iii) se $\gamma \in \text{fr } (\Sigma^*)$ existe uma única solução b-periódica de (3.1) em W_0 .

Ainda, para cada $\alpha_0, \alpha_0 \in [0, b)$, com $A(\alpha_0)$ e $A'(\alpha_0)$ linearmente dependentes existe uma única curva C tangente à reta $\gamma \cdot A(\alpha_0) = 0$, em $\gamma = 0$, que divide V em dois conjuntos conexos tais que o número de soluções b-periódicas de (3.1) em W_0 cresce ou decresce de dois, conforme γ cruza C na direção crescente ou decrescente, respectivamente.

□

Observação:

No caso em que $\Sigma^* = V$ existem pelo menos duas soluções b-periódicas de (3.1) em U_0 , para todo $\gamma \in V$.

Aspectos geométricos da curva $A(\alpha)$

Suponhamos que:

(A) existam $\alpha = \underline{\alpha}$ e $\alpha = \bar{\alpha}$ tais que $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ sejam linearmente dependentes. Neste caso, as retas $\underline{\ell}$ e $\bar{\ell}$ determinadas respectivamente por $\gamma.A(\underline{\alpha}) = 0$ e $\gamma.A(\bar{\alpha}) = 0$ determinam quatro setores no plano γ . Dentro destas condições, a curva $A(\alpha)$ se posiciona no plano γ , segundo uma das seguintes possibilidades:

(A.1) a curva $A(\alpha)$ está inteiramente contida num setor, cujo ângulo é menor que π (veja figura 3.1, por exemplo); ou

(A.2) a curva $A(\alpha)$ está contida no complementar do interior do setor referido em (A.1) (veja figura 3.2, por exemplo); ou

(A.3) a curva $A(\alpha)$ está contida na reunião dos quatro setores (veja figura 3.3, por exemplo).

Figura 3.1

Figura 3.2

Figura 3.3

No caso (A.1), as curvas $\underline{C}$ e $\overline{C}$ tangentes às retas $\underline{\ell}$ e $\overline{\ell}$, em $\gamma = 0$, respectivamente, constituem a fronteira do conjunto Σ^* , citado no teorema 3.1. Nos casos restantes ((A.2) e (A.3)), o conjunto Σ^* coincide com a vizinhança V .

(B) não existem $\alpha = \underline{\alpha}$ e $\alpha = \overline{\alpha}$ tais que $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ são linearmente dependentes (veja figura 3.4, por exemplo). Nestas condições, $A(\alpha)$ circunda necessariamente a origem e o conjunto Σ^* do teorema 3.1 coincide com a vizinhança V . O teorema 3.2 trata especificamente deste caso.

Figura 3.4

Teorema 3.2

Se as hipóteses (H_{0-2}) estão satisfeitas com $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ linearmente independentes para todo α , $0 \leq \alpha < b$, então existem uma vizinhança U_0 de x_0 em X , uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ de $\gamma = 0$ tais que para cada $\gamma \in V$, a equação (3.1) tem precisamente duas soluções b -periódicas em U_0 .

Observações:

(1) As provas dos teoremas 3.1 e 3.2 são apresentadas em [33, teorema 1, teorema 2] para o caso da equação de Lotka-Volterra. Com adaptações óbvias elas permanecem válidas em nosso contexto.

(2) A curva $A(\alpha)$, dada por (3.15), é que vai definir o diagrama de bifurcação das soluções de (3.1), (3.2).

3.1.1 Consideremos agora uma situação, que ocorre em oscilações não lineares, que é um caso especial de (3.1), (3.2). A equação do oscilador

$$(3.16)_0 \quad \ddot{x} + g(x) = -\lambda x' + \mu f(t),$$

onde g é um termo restaurador (isto é, $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$), suficientemente regular; f é uma função escalar T -periódica; λ e μ são pequenos parâmetros reais; foi estudada em [14] com $T = 2\pi$.

A solução geral de $(3.16)_0$ quando $\lambda = \mu = 0$, pode ser escrita na forma $x(t+\alpha; s) = \phi(w(s)(t+\alpha); s)$ e é periódica de período $1/w(s)$. Sua órbita no espaço (x, x') envolve a origem, onde $(s, 0)$, $s > 0$, é o ponto em que a órbita intercepta o eixo x . O número $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, que representa a fase de solução.

Em [14] a seguinte hipótese foi assumida:

(H₄) Existe um $s_0 > 0$ de modo que $\frac{dw(s_0)}{ds} \neq 0$.

Seja $p(.) = \phi(w(a_0)(. + \alpha); s_0)$ a solução T -periódica, $T = 1/w(s_0)$, correspondente a s_0 , com órbita $\Gamma = \{(p(t), p'(t)), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

A discussão das bifurcações de soluções do problema (3.16)₀ se baseia numa equação de bifurcação da forma:

$$(3.17) \quad (\lambda, \mu) \cdot A(\alpha) + O(|\lambda| + |\mu|)^2 = 0,$$

quando $\lambda, \mu \rightarrow 0$, onde $A(\alpha) = (-1, \tilde{h}(\alpha))$ e $\tilde{h}$ é a função T -periódica definida por:

$$\tilde{h}(\alpha) = \int_0^T p'(t) f(t+\alpha) dt / \int_0^T p'^2(t) dt,$$

satisfazendo:

(H₅) $\tilde{h}(\alpha)$, $0 \leq \alpha < T$, tem derivada contínua $\tilde{h}'(\alpha)$, que é não nula exceto em um número finito de pontos $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < T$ e $\tilde{h}''(\alpha_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ainda, $\tilde{h}(\alpha_j) \neq \tilde{h}(\alpha_k)$ para $j \neq k$; $1 \leq j, k \leq n$.

Sendo α_m, α_M os únicos valores de α tais que

$$(3.18) \quad \tilde{h}(\alpha_m) = \min \tilde{h}(\alpha), \quad \tilde{h}(\alpha_M) = \max \tilde{h}(\alpha),$$

consideremos os vetores $u_m = A(\alpha_m) / \|A(\alpha_m)\|$ e $u_M = A(\alpha_M) / \|A(\alpha_M)\|$.

Seja K o cone (completo) que contém o cone positivo determinado por u_m e u_M . O conjunto K^* mencionado no próximo teorema, é uma pequena deformação de K no seguinte sentido: as retas $r_m: \lambda = \tilde{h}(\alpha_m)\mu$ e $r_M: \lambda = \tilde{h}(\alpha_M)\mu$ são tangentes, na origem, às curvas $c_m: \lambda = c_m(\mu)\mu$ e $c_M: \lambda = c_M(\mu)\mu$, que determinam K^* .

Os autores citados anteriormente provam o seguinte

Teorema 3.3

Suponhamos as hipótese (H_{4-5}) satisfeitas e α_m, α_M definidas por (3.18). Então existem vizinhanças U de Γ , V de $(\lambda, \mu) = (0,0)$ e um conjunto $K^* \subset V$ de modo que:

- (i) se $(\lambda, \mu) \in \text{int}(K^*)$ existem pelo menos duas soluções T-periódicas de $(3.16)_0$ em U ,
- (ii) se $(\lambda, \mu) \in V \setminus K^*$ não existem soluções T-periódicas de $(3.16)_0$ em U ,
- (iii) se $(\lambda, \mu) \in \text{fr}(K^*)$ existe uma única solução T-periódica de $(3.16)_0$ em U .

Ainda, para cada α_j , $j = 1, 2, \dots, n$ da hipótese (H_5) existe uma única curva $C_j \subset V$ tangente em $(\lambda, \mu) = (0,0)$, à reta $\lambda = h(\alpha_j)\mu$, que divide V em dois conjuntos conexos tais que o número de soluções T-periódicas de $(3.16)_0$ em U muda de dois quando $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ cruza cada C_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

□

A figura 3.5 a seguir, mostra o diagrama de bifurcação para o caso em que a função $\tilde{h}(\alpha)$ possui somente um ponto de mínimo e um ponto de máximo. Com isso, existem exatamente duas curvas de bifurcação C_m e C_M . Na figura 3.6 vemos um exemplo de $\tilde{h}(\alpha)$ com dois pontos de mínimo e dois de máximo.

Figura 3.5

Figura 3.6

Observação

Levando em conta o que fizemos para o caso do problema (3.1), (3.2), a curva $A(\alpha)$ deve ser dada por:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} A(\alpha) = & \left(- \int_0^T g_\lambda(t+\alpha, p(t), p'(t), 0, 0) p'(t) dt / \eta \right), \\ & - \int_0^T g_\mu(t+\alpha, p(t), p'(t), 0, 0) p'(t) dt / \eta \right), \end{aligned}$$

onde $\eta = \int_0^T p'^2$. Note que, como $g(t, x, x', \lambda, \mu) = g(x) + \lambda x' - \mu f(t)$ então $g_\lambda(t+\alpha, p(t), p'(t), 0, 0) = p'(t)$ e $g_\mu(t+\alpha, p(t), p'(t), 0, 0) = -f(t+\alpha)$. Portanto, (3.17) e (3.19) são compatíveis.

Além disso, se $\tilde{h}(\alpha)$ satisfaz (H_5) então $A(\alpha)$ satisfaz (H_2) e (H_3) . Com isso, podemos afirmar que para o caso especial de (3.1), (3.2) dado por (3.16)₀,

a curva $A(\alpha)$, que vai definir o diagrama de bifurcação das soluções T-periódicas de $(3.16)_0$, é da forma

$$(3.20) \quad A(\alpha) = (-1, \tilde{h}(\alpha)).$$

3.1.2. Há resultados nessa linha de problemas para equações planares de primeira ordem. Neste contexto, estamos particularmente interessados no modelo de Lotka-Volterra para duas espécies predador-presa, sujeito a uma perturbação periódica dependendo de dois parâmetros. Consideremos então, o seguinte sistema, que foi estudado por Táboas em [33].

$$(3.21)_{LV} \quad x' = g(x) + \tilde{\gamma}f(t, x),$$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, x_1 e x_2 representam as biomassas das presas e predadores, respectivamente;

$g(x) = (ax_1 - bx_1x_2, cx_1x_2 - dx_2)$, onde a, b, c, d são constantes positivas: a e d são a taxa de crescimento das presas e a taxa de mortalidade dos predadores, respectivamente, b e c são medidas do efeito da interação entre as duas espécies; $\tilde{\gamma}$ é uma matriz diagonal real 2×2 , $\tilde{\gamma} = \text{diag}(\lambda, \mu)$; $f = (f_1, f_2)$ é uma função de classe C^2 , T-periódica em t para cada x fixado.

Fazendo $\lambda = \mu = 0$ em $(3.21)_{LV}$ obtemos:

$$(3.22) \quad \dot{x}' = g(x),$$

cujo ponto crítico $(x_1, x_2) = (d/c, a/b)$ é um centro. Nesse caso, a solução geral de (3.22) pode ser escrita $x(t+\alpha; s) = \phi(w(s)(t+\alpha); s)$ com período $1/w(s)$, sendo $s > 0$, a amplitude e $\alpha \in R$, a fase da solução. Além disso, observemos que o primeiro quadrante do plano $\lambda\mu$ é invariante com relação a equação (3.22). Sendo assim, essa equação será entendida apenas nesse quadrante.

Seja $e(t) = \phi(w(s_0)(t, s_0)) = (e_1(t), e_2(t))$ uma solução T -periódica de (3.22), onde $T = [w(s_0)]^{-1}, s_0 > 0$.

A hipótese

$$(H6) \quad w'(s_0) \neq 0$$

implica que a dimensão do espaço das soluções T -periódicas da equação variacional linear de (3.22), em torno de $e(t)$, é igual a 1.

Hsu em [17] tem resultados, que implicam que o período T , da órbita periódica, é uma função estritamente crescente com a amplitude s , e $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = \infty$. Disto decorre que o conjunto dos s_0 's tais que (H6) está satisfeita é amplo.

Quanto a perturbação f , Táboas em [33] assumiu que:

$$(H7) \quad f(t, x) = h(t) + k(t, x),$$

onde h e k são funções vetoriais de classe C^2 , h é T -periódica, k é T -periódica em t , para cada $x \in \mathbb{R}^2$ fixado, satisfazendo

$$k(t, e(\tau)) = \frac{\partial k}{\partial x_j}(t, e(\tau)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < T, \quad j=1,2.$$

A análise da variação do número de soluções de $(3.21)_{LV}$ é baseada na equação de bifurcação

$$(3.23) \quad A(\alpha) \cdot \gamma + S(\gamma, \alpha) = 0,$$

onde $\gamma = (\lambda, \mu)$, $S(\gamma, \alpha) = O(|\gamma|^2)$, quando $\gamma \rightarrow 0$ e $A(\alpha) = (A_1(\alpha), A_2(\alpha))$, $0 \leq \alpha < T$ é dada por:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} A_1(\alpha) &= d \int_0^T h_1(t+\alpha) \frac{1}{e_1(t)} dt - cM_1 \\ A_2(\alpha) &= a \int_0^T h_2(t+\alpha) \frac{1}{e_2(t)} dt - bM_2, \end{aligned}$$

com $h = (h_1, h_2)$ e $M_j = \int_0^T h_j(t+\alpha) dt$, $j = 1, 2$.

Observemos a analogia entre a equação de bifurcação (3.23), relativa à equação $(3.21)_{LV}$ e a equação (3.15)

$$A(\alpha) \cdot \gamma + Q(\gamma, \alpha) = 0,$$

relativa ao problema (3.1), (3.2). As hipóteses sobre $A(\alpha)$ encontradas em [33] são as hipóteses (H_2) e (H_3) (pag 70,71) requeridas sobre $A(\alpha)$ de (3.15). Assim, assumidas essas hipóteses, (H_2) e (H_3) , vale para a equação (3.21)_{LV} as mesmas conclusões do teorema 3.1 [33, teorema 1]. Quando nos referirmos ao teorema 3.1 relativo à equação (3.21)_{LV} usaremos a notação: teorema (3.1)_{LV}.

3.2. ALGUNS TIPOS DE PROBLEMAS INVERSOS

Os teoremas da secção anterior sugerem problemas inversos do seguinte tipo:

Consideremos o problema (3.1), (3.2), assumindo que $g(t, x, x', \lambda, \mu)$ seja da forma

$$(H8) \quad g(t, x, x', \lambda, \mu) = \tilde{g}(x, x') + \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$$

com f_1 e f_2 , funções a valores reais de classe C^2 , b -periódicas; o problema inverso, em linhas gerais, é: "Dado um diagrama de bifurcação, no plano $\gamma = (\lambda, \mu)$, encontrar funções f_1 e f_2 de modo que para g definida por (H8), o número de soluções b -periódicas de (3.1) varie de acordo com o diagrama dado".

Analogamente, podemos formular problemas inversos para os casos da equação do oscilador (3.16)₀ e da equação (3.21)_{LV}, sendo que para esta última estabele-

ceremos uma perturbação dependente apenas de t . Notemos que a condição $k(t,x) \equiv 0$ está incluída na hipótese (H7) e, portanto, o teorema $(3.1)_{LV}$ permanece válido nesta situação.

As curvas de bifurcação $C(r)$ definidas pelos teoremas 3.1, 3.3 e $(3.1)_{LV}$ são tangentes a retas r passando pela origem. O diagrama de bifurcação fica determinado conhecendo-se a coleção das curvas $C(r_1), \dots, C(r_{2n})$ e o número constante de soluções para (λ, μ) pertencente a cada região setorial definida pelas curvas. Esse número obedece a condições de compatibilidade claramente definidas nos teoremas 3.1, 3.3 e $(3.1)_{LV}$. No que segue, consideraremos tais diagramas desvinculados de problemas de valor de contorno. Falando vagamente, o nosso problema é estabelecer esses vínculos.

Qualquer ordenação $C(r_j)$, $j=1,2,\dots,2n$ das curvas de um diagrama de bifurcação será sempre escolhida de acordo com o sentido crescente dos ângulos entre r_j e r_1 medidos no sentido anti-horário.

Nosso objetivo agora é definir uma relação de equivalência entre diagramas de bifurcação.

Dado um diagrama de bifurcação por $C(r_j)$, $j = 1,2,\dots,2n$, se θ_j é o ângulo entre r_j e $O\lambda$ medido no sentido anti-horário, consideraremos r_1 de modo que $\theta_1 < \theta_j$, $j = 2, \dots, 2n$.

Para isso eventualmente precisaremos re

indexar as retas. Veja figura 3.7, por exemplo.

Figura 3.7

A figura 3.7 mostra um diagrama de acordo com esse critério de ordenação. Para salientar essa escolha, um tal diagrama será denotado por $(2, C(r_1), 4, C(r_2), 6, C(r_3), 4, C(r_4))$.

Definição 3.2

Dois diagramas $(k_1, C(r_1), k_2, C(r_2), \dots, k_{2n}, C(r_{2n}))$ e $(\ell_1, S(s_1), \ell_2, S(s_2), \dots, \ell_{2n}, S(s_{2n}))$ são equivalentes se valem as seguintes igualdades:

$$(k_1, k_2, \dots, k_{2n}) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n})$$

$$(r_1, r_2, \dots, r_{2n}) = (s_1, s_2, \dots, s_{2n})$$

De acordo com a definição 3.2, a classe de equivalência de um diagrama $(k_1, C(r_1), \dots, k_{2n}, C(r_{2n}))$ tem sempre um representante que chamaremos **regrado**, em que $C(r_j) = r_j$, $j = 1, 2, \dots, 2n$. Esse representante será denotado por $(k_1, r_1, k_2, r_2, \dots, k_{2n}, r_{2n})$.

Agora o problema inverso para os três casos inicialmente colocados, pode ser formulado precisamente nos seguintes termos: "Dado um diagrama regrado de bifurcação $D = (k_1, r_1, k_2, r_2, \dots, k_{2n}, r_{2n})$ encontrar funções f_1, f_2 , ou f , ou $h = (h_1, h_2)$, de modo que o teorema 3.1, relativo a f_1, f_2 , ou o teorema 3.3, relativo a f , ou o teorema $(3.1)_{LV}$, relativo a h , forneça um diagrama de bifurcação equivalente a D ".

Mais uma definição se faz necessária.

Definição 3.3 Dizemos que um diagrama de bifurcação relativo ao problema (3.1), (3.2), sob (H8), ou $(3.16)_0$ ou, ainda, $(3.21)_{LV}$ pertence à classe S_4 se o feixe de retas tangentes pela origem estiver disposto como na figura 3.8

Figura 3.8

onde o eixo μ é a bissetriz dos ângulos β e $\tilde{\beta}$ e os números entre parênteses indicam o número de soluções na correspondente região.

Os teoremas a seguir tratam do problema

ma inverso para casos em que os diagramas de bifurcação pertencem a S_4 . Ainda, fornecem soluções do problema inverso quando o ângulo β , $0 < \beta < \pi$, é fixado a priori. Uma análise mais cuidadosa mostra que o mesmo se pode dizer do ângulo $\tilde{\beta}$.

Teorema 3.4

Suponhamos $v = \int_0^\pi w_0 \neq 0$, onde w_0 é a solução do problema adjunto associado a (3.12). Se $\hat{w}_n(j) = \int_0^\pi e^{inj t} w_0 \neq 0$, $j = -1, 1$; $n = 2, 4$, e se as funções

$$f_1(t) = v^{-1}$$

$$f_2(t) = -v[v_1^+ e^{4ti} + v_{-1}^+ e^{-4ti} + v_1^- e^{2ti} + v_{-1}^- e^{-2ti}],$$

$$\text{onde } v_j^+ = (-i)^j [4\hat{w}_4(j)]^{-1}; \quad v_j^- = i^j [4\hat{w}_2(j)]^{-1}; \quad j = -1, 1;$$

$v > 0$ é uma constante então o diagrama de bifurcação dado pelo teorema 3.1 pertence a S_4 e

$$\beta = 2 \arctan \left[\frac{\sqrt{30-2\sqrt{33}} + (3+\sqrt{33})v}{4^3} \right].$$

Prova

Por (H8), a primeira componente da curva

$A(\alpha)$ é dada por

$$A_1(\alpha) = - \int_0^\pi f_1(t+\alpha) w_0(t) dt = -v^{-1} \int_0^\pi w_0(t) dt = -1.$$

A segunda componente de $A(\alpha)$ fica:

$$\begin{aligned}
 A_2(\alpha) &= -\int_0^\pi f_2(t+\alpha) w_0(t) dt = v [v_1^+ e^{4ti} \int_0^\pi e^{4ti} w_0(t) dt + \\
 &+ v_{-1}^+ e^{-4\alpha i} \int_0^\pi e^{-4ti} w_0(t) dt + v_1^- e^{2\alpha i} \int_0^\pi e^{2ti} w_0(t) dt + \\
 &+ v_{-1}^- e^{-2\alpha i} \int_0^\pi e^{-2ti} w_0(t) dt] = \\
 &= v \left[-\frac{i}{4} e^{4\alpha i} + \frac{i}{4} e^{-4\alpha i} + \frac{i}{4} e^{-2\alpha i} - \frac{i}{4} e^{-2\alpha i} \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{v}{2} [\text{sen } 4\alpha - \text{sen } 2\alpha] = v \cos 3\alpha \text{ sen } \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi).$$

Assim, $A(\alpha) = (-1, v \cos 3\alpha \text{ sen } \alpha), \alpha \in [0, \pi)$.

Essa curva dá origem ao seguinte diagrama de bifurcação pertencente a S_4 :

$$\begin{aligned}
 \text{com } P_1 = -P_4 &= (0, \frac{1}{4^3} \sqrt{30+2\sqrt{33}} (3+\sqrt{33}) v); \quad P_2 = -P_3 = \\
 &= (0, \frac{1}{4^3} \sqrt{30-2\sqrt{33}} (-3+\sqrt{33}) v). \quad \square
 \end{aligned}$$

Observações:

- 1) $\pi \hat{w}_n(j)$ é o j -ésimo coeficiente da série de Fourier de $w_0(t)$ com respeito a $e^{inj t}$, $j \in \mathbb{Z}$, $n = 2, 4$.
- 2) As hipóteses, do teorema anterior, $v \neq 0$ e $\hat{w}_n(j) \neq 0$ são equivalentes, respectivamente, aos problemas

$$\begin{cases} L\phi = 1 \\ (\phi(0), \phi'(0)) = \beta v(0)^\perp \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} L\phi = \cos njt \\ (\phi(0), \phi'(0)) = \beta v(0)^\perp \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} L\phi = \sin njt \\ (\phi(0), \phi'(0)) = \beta v(0)^\perp, \end{cases}$$

$j = -1, 1$; $n = 2, 4$, não terem soluções.

Teorema 3.5

$$\text{Se } \hat{p}_n(j) = \int_0^\pi e^{inj t} p'(t) dt \neq 0, \quad j = -1, 1;$$

$n = 2, 4$ e se a função real f for dada por

$$f(t) = v[v_1^+ e^{4ti} + v_{-1}^+ e^{-4ti} + v_1^- e^{2ti} + v_{-1}^- e^{-2ti}],$$

$$\text{onde } v_j^+ = (-i)^j [4\hat{p}_4(j)]^{-1} \eta; \quad v_j^- = i^j [4\hat{p}_2(j)]^{-1} \eta;$$

$\eta = \int_0^\pi p'^2$; $v > 0$ é uma constante então o diagrama de bifurcação dado pelo teorema 3.3 pertence a S_4 e

$$\beta = 2 \arctg \left[\frac{\sqrt{30-2\sqrt{33}} (-3+\sqrt{33}) v}{4^3} \right].$$

Prova

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= (-1, \tilde{h}(\alpha)) = (-1, \int_0^\pi p'(t) f(t+\alpha) dt / \eta) = \\ &= (-1, -\frac{i}{4} v e^{4\alpha i} + \frac{i}{4} v e^{-4\alpha i} + \frac{i}{4} v e^{2\alpha i} - \frac{i}{4} v e^{-2\alpha i}) = \\ &= (-1, v \cos 3\alpha \operatorname{sen} \alpha), \quad \alpha \in [0, \pi) \end{aligned}$$

Observação:

Como g representa a força restauradora de um oscilador vê-se que g 's não ímpares dão origem a oscilações não simétricas. Assim, se para um particular g a condição $\hat{p}_n(j) \neq 0$ não estiver satisfeita, podemos alcançá-la por uma pequena perturbação de g .

Teorema 3.6

Se as funções reais h_1 e h_2 forem dadas por
$$h_1(t) = \frac{-1}{d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt - c\pi}$$

$$h_2(t) = v[v_1^+ e^{4ti} + v_{-1}^+ e^{-4ti} + v_1^- e^{2ti} + v_{-1}^- e^{-2ti}],$$

$$\text{onde } \hat{e}_n(j) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{inj t} \frac{1}{e_2(t)} dt,$$

$$v_j^+ = (-1)^j [4\pi a \hat{e}_4(j)]^{-1}; \quad v_j^- = i^j [4\pi a \hat{e}_2(j)]^{-1}; \quad j = -1, 1;$$

$n = 2, 4$; $v > 0$ é uma constante então o diagrama de bifurcação dado pelo teorema (3.1)_{LV} pertence a S_4 e

$$\beta = 2 \arctg \left[\frac{\sqrt{30-2\sqrt{33}} (3-\sqrt{33}) v}{4^3} \right].$$

Prova

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= d \int_0^\pi h_1(t+\alpha) \frac{1}{e_1(t)} dt - c \int_0^\pi h_1(t+\alpha) dt = \\ &= (d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt - c\pi)^{-1} (-d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt + c\pi) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(\alpha) &= a \int_0^\pi h_2(t+\alpha) \frac{1}{e_2(t)} dt - b \int_0^\pi h_2(t+\alpha) dt = \\ &= av \left[-\frac{i}{4a} e^{4\alpha i} + \frac{i}{4a} e^{-4\alpha i} + \frac{i}{4a} e^{2\alpha i} - \frac{i}{4a} e^{-2\alpha i} \right] = \end{aligned}$$

$$= v \cos 3\alpha \operatorname{sen} \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi). \quad \square$$

Observações

1) $\hat{e}_n(j) \neq 0$ pois $(e_1(t), e_2(t))$ é uma solução T -periódica de (3.22) situada no primeiro quadrante do plano $x_1 x_2$.

2) A função $h_1(t)$, mencionada no teorema anterior, está bem definida. De fato, seja S o conjunto das funções $f(t)$, contínuas, T -periódicas, positivas em $\mathbb{R}$ e satisfazendo $V(f) \cdot V(1/f) = 1$, onde $V(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Definamos o seguinte produto interno para $f, g \in E = C([0, T], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt$. Com isso,

$$T^2 = \left(\langle \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}} \rangle \right)^2 \leq \| \sqrt{f} \|^2 \| \frac{1}{\sqrt{f}} \|^2 = \int_0^T f(t) dt \int_0^T \frac{1}{f(t)} dt = T^2,$$

ou seja, a desigualdade de Cauchy-Schwarz se reduz a uma igualdade e, portanto, $\sqrt{f}$ e $1/\sqrt{f}$ são linearmente dependentes. Daí segue que, se $f \in S$ então f é uma função constante. Assim, como $(e_1(t), e_2(t))$ é uma solução de (3.22) não constante e $V(e_1(t)) = d/c$ então $V(1/e_1(t)) \neq c/d$, isto é, $d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt - c\pi \neq 0$.

3) Com base nesses resultados, outros problemas inversos poderão ser formulados. Por exemplo, em relação às equações vistas, se considerarmos os diagramas de bifurcação pertencentes à classe S_6 em que o feixe de retas tangentes pela origem está disposto conforme a figura 3.9,

Figura 3.9

onde o eixo μ é a bissetriz dos ângulos β , β' e β'' e os números entre parênteses indicam o número de soluções na correspondente região, a curva $A(\alpha)$ pode ser dada por:

$$A(\alpha) = (-1, v \cos 5\alpha \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

Neste caso, $A(\alpha)$ é a projeção ortogonal sobre a reta $\lambda = -1$ da rosácea de cinco pétalas definida pela equação (3.25), a seguir, com $q = 0$, $m = 5$ e $n = 1$.

Os teoremas anteriores, embora não representem uma solução geral para o problema inverso indicam um caminho de como atacar as classes S_{2n} . Além disso, fica evidente que as classes de equivalência de diagramas ficam definidas pelas curvas $A(\alpha)$. Assim, os problemas inversos podem ser formulados em termos dessas curvas. Damos, a seguir, vários exemplos que esclarecem essas considerações.

Exemplo 3.1

Seja $A(\alpha) = (2 + \cos \alpha \cos 3\alpha, 3 + \cos \alpha \sin 3\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi)$. $A(\alpha)$ satisfaz (H_2) e (H_3) e seu gráfico, com as retas r_j , $j = 1, \dots, 4$, tangentes a $A(\alpha)$ pela origem e as retas $\ell_j \perp r_j$, $j = 1, \dots, 4$, é dado na figura a seguir:

Exemplo 3.2

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha \sin \alpha \right),$$

$$\alpha \in [0, 2\pi).$$

Exemplo 3.3

$$A(\alpha) = \left(\frac{3}{2} + \cos 2\alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha \sin \alpha \right),$$

$\alpha \in [0, 2\pi)$, que é uma translação da curva dada no exemplo anterior.

Observemos que o gráfico da curva

$$(3.25) \quad A(\alpha) = (p + u \cos m \alpha \cos n \alpha, q + v \cos m \alpha \sin n \alpha)$$

para o caso em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n = 1$ é uma rosácea de m pétalas, se m é ímpar e uma rosácea de $2m$ pétalas, se m é par.

Exemplo 3.4

$$A(\alpha) = \left(-\frac{1}{2} + \cos^2 2\alpha, \cos 2\alpha \sin 2\alpha\right),$$

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

Notemos que no exemplo 3.4, $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ são linearmente independentes para todo α , $\alpha \in [0, \pi/2)$. Além disso, o problema inverso definido por esse exemplo foi estudado em [33], para o caso da equação de Lotka-Volterra. Na verdade, esse caso particular foi a motivação básica para a formulação do problema inverso.

3.3 - ALGUNS RESULTADOS MAIS GERAIS

Recordaremos, a seguir, alguns fatos da geometria projetiva, que serão utilizados nos teoremas centrais deste capítulo. Para maiores detalhes ver [1] ou [6].

No plano, um **referencial projetivo** em P é uma terna ordenada de retas distintas, r_i , concorrentes

em P . Notação: (r_1, r_2, r_3) .

Dados um referencial projetivo em P , (r_1, r_2, r_3) , e uma quarta reta r_4 , passando por P escolhemos $\vec{e}_i \in r_i$ (localizados em P), $i = 1, 2, 3$ tal que $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Dessa forma, existe um único escalar $\rho \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \rho \vec{e}_2$, com $\vec{e}_4 \in r_4$. Este escalar ρ é chamado a **coordenada projetiva** de r_4 no referencial (r_1, r_2, r_3) .

Observação:

No caso em que o referencial em P , tem a disposição geométrica conforme a figura abaixo, é imediato que $\rho \in (0, 1)$. Ainda, chamando de P_i , $1 \leq i \leq 4$, os pontos de intersecção das retas r_i com o eixo μ segue que esse número ρ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\rho = \frac{d(P_1, P_4)}{d(P_1, P_3)} \cdot \frac{d(P_2, P_3)}{d(P_2, P_4)}$$

Para alguns de nossos cálculos essa formulação é mais interessante. Convém ressaltar também que, a coordenada projetiva ρ é independente da reta transversal μ considerada.

Dadas quatro retas, no plano, concorrentes em P , escolhemos uma delas e chamamos de r_1 . Esta reta determina dois semi-planos, que denotaremos por π_+ e π_- . Em π_+ , consideramos as três semi-retas associadas às retas dadas contidas nesse semi-plano. Chamaremos de r_1^+ uma orientação de r_1 .

Ainda em π_+ , denotemos por r_4 a reta cuja semi-reta faz menor ângulo com r_1^+ e por r_3 a reta cuja semi-reta forma menor ângulo com r_1^+ , a menos de r_4 . A reta, que contém a semi-reta restante, chamemos de r_2 .

Usando o referencial projetivo (r_1, r_2, r_3) segue da definição que a coordenada projetiva de r_4 es tá entre 0 e 1. Concluimos então que, quatro retas r_i , $i = 1, 2, 3, 4$, no plano, concorrentes em P sempre admitem uma reordenação de modo que a coordenada projetiva de r_4 no referencial (r_1, r_2, r_3) está entre 0 e 1.

Lema 3.1

Consideremos um sistema cartesiano $O\lambda\mu$ no plano e quatro retas $r_1, \dots, r_4$ concorrentes em $P = (\beta, 0)$

com inclinações $m_1, \dots, m_4$, respectivamente, tais que $m_2 > m_3 > 0$ e $m_1 = -m_2$, $m_4 = -m_3$. Então a coordenada projetiva de r_4 no referencial (r_1, r_2, r_3) por P é dada pela função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow (0,1)$, $f(m_2, m_3) = \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)^2$

Prova

Os pontos $P_1 = (0, m_2 \beta)$, $P_2 = (0, -m_2 \beta)$, $P_3 = (0, -m_3 \beta)$ e $P_4 = (0, m_3 \beta)$ são as intersecções das retas r_1, r_2, r_3, r_4 com o eixo μ , respectivamente.

Da definição de coordenada projetiva segue o resultado. $\square$

Lema 3.2

Consideremos a rosácea

$$R_\delta: p_\delta(\alpha) = (\cos 3\alpha \cos \alpha + \delta, \cos 3\alpha \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha < \pi,$$

$\delta \in (0, 9|16) \cup (-9/8, -1)$. Se $\delta \in (0, 9|16)$ ($\delta \in (-9|8, -1)$) fixemos o feixe de retas, pela origem, r_1, r_2, r_3, r_4 (s_1, s_2, s_3, s_4), tangentes à R_δ , de acordo com a figura 3.10 (figura 3.11)

Figura 3.10

Figura 3.11

Então a coordenada projetiva ρ de r_2 relativamente ao referencial (r_1, r_4, r_3) (s_2 relativamente a (s_1, s_4, s_3)) é função contínua de δ . Ainda, ρ percorre o intervalo $(0, 1)$, quando δ varia em $(0, 9|16)$ $((-9|8, -1))$.

Prova

Suponhamos $\delta \in (0, 9/16)$. Pelo lema 3.1

$$(3.26) \quad \rho = \left(\frac{m_4 - m_3}{m_4 + m_3} \right)^2,$$

onde m_i é a inclinação da reta r_i , $i = 3, 4$.

Chamando de $p_{1\delta}(\alpha)$ e $p_{2\delta}(\alpha)$ as componentes de $p_\delta(\alpha)$ e indicando com ' a derivação com relação a α segue que

$$(3.27) \quad m_i = \frac{p'_{2\delta}(\alpha_i)}{p'_{1\delta}(\alpha_i)} = \frac{3 - 18\cos^2\alpha_i + 16\cos^4\alpha_i}{-2\sin\alpha_i \cos\alpha_i (-3 + 8\cos^2\alpha_i)},$$

$i = 3, 4$

onde α_i é tal que $p_\delta(\alpha_i)$ é ponto de tangência de r_i com R_δ .

$$\text{Por outro lado, } m_i = \frac{p_{2\delta}(\alpha_i)}{p_{1\delta}(\alpha_i)} = \frac{\cos 3\alpha_i \sin \alpha_i}{\cos 3\alpha_i \cos \alpha_i + \delta},$$

$i = 3, 4$. Substituindo em (3.27) segue que

$$(3.28) \quad \delta = - \frac{\cos^2 3\alpha_i}{16\cos^4\alpha_i - 18\cos^2\alpha_i + 3}, \quad i = 3, 4;$$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha_4 < \frac{53\pi}{180}; \quad \frac{4\pi}{45} < \alpha_3 < \frac{\pi}{6}.$$

Observemos que as funções em (3.28) são diferenciáveis e inversíveis em seus respectivos intervalos de definição. Com isto, $\alpha_i = \alpha_i(\delta)$, $i = 3, 4$. Substituin-

do em (3.27) segue que $m_i = m_i(\delta)$, $i = 3, 4$ e daí,
 $\rho = \rho(\delta)$.

Para provar a última parte do lema, façamos as seguintes afirmações:

Afirmção 1: $\rho(0_+) = 0$.

De fato, quando $\delta \rightarrow 0_+$, as retas r_j , $j = 1, \dots, 4$ tendem para a configuração $r_1 \equiv r_2$ e $r_3 \equiv r_4$. Assim $m_3 \equiv m_4$. Assim $m_3 \equiv m_4$, ou seja $\rho = 0$.

Afirmção 2: $\rho(\frac{9}{16}-) = 1$

De fato, quando $\delta \rightarrow \frac{9}{16}-$, as retas r_j tendem para a configuração $r_1 \equiv r_4$ e r_2, r_3 simétricas em relação ao eixo λ . Da definição de coordenada, dado $\varepsilon > 0$ temos que $1 - \varepsilon < \rho(\delta) < 1$ para $\frac{9}{16} - \delta > 0$ suficientemente pequeno.

A análise com δ no intervalos $(-9/8, -1)$ é completamente análoga a esta. Assim, de acordo com as observações, que antecedem o lema 3.1 fica provado este lema. $\square$

Teorema 3.7

Sejam D um diagrama regrado de bifurcação, $D = (4, \ell_1, 2, \ell_2, 4, \ell_3, 2, \ell_4)$ ou $D = (0, \ell_1, 2, \ell_2, 4, \ell_3, 2, \ell_4)$ e o feixe $r_1, \dots, r_4$ de retas pela origem tais que r_j é or

togonal a ℓ_j , para cada $j = 1, \dots, 4$. Então existem um isomorfismo $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma função $h = (h_1, h_2)$ de modo que o diagrama de bifurcação de

$$\dot{x} = g(x) + \widehat{E_Y} h$$

é equivalente a D . Ainda mais, $h = (h_1, h_2)$ é dada por:

$$h_1(t) = \frac{\delta}{d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt - c\pi} + u_1^+ e^{4ti} + u_{-1}^+ e^{-4ti} + u_1^- e^{2ti} + u_{-1}^- e^{-2ti}$$

$$h_2(t) = v_1^+ e^{4ti} + v_{-1}^+ e^{-4ti} + v_1^- e^{2ti} + v_{-1}^- e^{-2ti},$$

com

$$u_j^+ = [4\pi d \hat{e}_4^1(j)]^{-1}; \quad u_j^- = [4\pi d \hat{e}_2^1(j)]^{-1}; \quad v_j^+ = (-1)^j [4\pi a \hat{e}_4^2(j)]^{-1};$$

$$v_j^- = i^j [4\pi a \hat{e}_2^2(j)]^{-1}; \quad \hat{e}_n^k(j) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{inj t} \frac{1}{e_k(t)} dt; \quad j = -1, 1;$$

$$n = 2, 4; \quad k = 1, 2.$$

Prova

Faremos a prova apenas para o caso

$D = (4, \ell_1, 2, \ell_2, 4, \ell_3, 2, \ell_4)$. O outro é completamente análogo.

Seja ρ , $0 < \rho < 1$, a coordenada projetiva de r_2 em relação ao referencial (r_1, r_4, r_3) .

De acordo com o lema anterior existe

$\delta \in (0, 9/16)$ de modo que para a rosácea

$R_\delta: p_\delta(\alpha) = (\cos 3\alpha \cos \alpha + \delta, \cos 3\alpha \sin \alpha)$, $0 \leq \alpha < \pi$ as retas $r'_1, \dots, r'_4$ (figura 3.10 com $r'_j = r_j$) são tais que a coordenada projetiva de r'_2 relativamente a (r'_1, r'_4, r'_3) é precisamente ρ . Então existe um isomorfismo E (único a menos de homotetia) tal que $E(r_j) = r'_j$, $j = 1, \dots, 4$.

Provaremos agora que, se a perturbação h for escolhida como no enunciado então a curva $A(\alpha) = (A_1(\alpha), A_2(\alpha))$ do teorema (3.1)_{LV} é dada por $A(\alpha) = p_\delta(\alpha)$.

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} h_1(t+\alpha) dt - c \int_0^\pi h_1(t+\alpha) dt = \\ &= \delta \left(d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt - c\pi \right)^{-1} \left(d \int_0^\pi \frac{1}{e_1(t)} dt - c\pi \right) + \\ &+ \frac{1}{4} [e^{4\alpha i} + e^{-4\alpha i} + e^{2\alpha i} + e^{-2\alpha i}] = \\ &= \delta + \cos 3\alpha \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(\alpha) &= a \int_0^\pi \frac{1}{e_2(t)} h_2(t+\alpha) dt - b \int_0^\pi h_2(t+\alpha) dt = \\ &= \frac{1}{4} [-ie^{4\alpha i} + ie^{-4\alpha i} + ie^{2\alpha i} - ie^{-2\alpha i}] = \\ &= \cos 3\alpha \sin \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi). \quad \square \end{aligned}$$

Observações sobre o teorema 3.7

(1) A função h está bem definida. Veja observações 1 e 2 das páginas 92 e 93..

(2) Fica evidente na prova do teorema que o i somorfismo E pode ser construído a partir de D .

(3) Se o diagrama do teorema for da forma

$D = (2, l_1, 4, l_2, 2, l_3, 4, l_4)$ então, ainda assim, existem um isomorfismo E e uma perturbação h de modo que as conclusões do teorema continuam válidas. Para ver isso, basta permutar os índices de l_j de acordo com a permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Analogamente, permutações

podem ser feitas de modo a incluir diagramas dos tipos $(2, l_1, 4, l_2, 2, l_3, 0, l_4)$, $(4, l_1, 2, l_2, 0, l_3, 2, l_4)$ e $(2, l_1, 0, l_2, 2, l_3, 4, l_4)$.

Com pequenas adaptações do teorema 3.7 e utilizando a sua notação podemos enunciar o seguinte

Teorema 3.8

Suponhamos as hipóteses do teorema 3.7 satisfeitas. Então existe uma função $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ tal que o diagrama de bifurcação de

$$x' = g(x) + \tilde{\gamma} \tilde{h}$$

é equivalente a D . Além disso, $\tilde{h}$ é dada por:

$\tilde{h} = (e_{11}h_1 + e_{12}h_2, e_{21}h_1 + e_{22}h_2)$, onde e_{ij} , $1 \leq i$, $j \leq 2$ são os elementos da matriz, que definem o isomorfismo inverso E^{-1} .

□

Observação

Uma prova deste teorema pode ser dada seguindo os mesmos passos da do teorema 3.7 até a construção do isomorfismo E . Define-se então a curva $A(\alpha)$ como a imagem inversa da rosácea R_δ , isto é,

$$A(\alpha) = E^{-1} p_\delta(\alpha).$$

Teorema 3.9

Suponhamos as hipóteses do teorema anterior satisfeitas. Ainda, se $v = \int_0^\pi w_0 \neq 0$ e $\tilde{w}_n(j) = \int_0^\pi e^{inj t} w_0 \neq 0$, onde w_0 é a solução do problema adjunto associado a (3.12) então existem um isomorfismo $E: R^2 \rightarrow R^2$ e funções f_1, f_2 de modo que o diagrama de bifurcação de

$$\ddot{x} + \hat{g}(x, x') + E(\lambda, \mu) \cdot (f_1(t), f_2(t)) = 0$$

é equivalente a D . Além disso, as funções f_1 e f_2 são dadas por:

$$f_1(t) = -(\delta v^{-1} + u_1^+ e^{4ti} + u_{-1}^+ e^{-4ti} + u_1^- e^{2ti} + u_{-1}^- e^{-2ti})$$

$$f_2(t) = -(v_1^+ e^{4ti} + v_{-1}^+ e^{-4ti} + v_1^- e^{2ti} + v_{-1}^- e^{-2ti})$$

$$\text{com } u_j^+ = [4\hat{w}_4(j)]^{-1}; \quad u_j^- = [4\hat{w}_2(j)]^{-1}; \quad v_j^+ = (-i)^j [4\hat{w}_4(j)]^{-1}; \\ v_j^- = i^j [4\hat{w}_2(j)]^{-1}; \quad j = -1, 1 \quad \square$$

Utilizando a notação do teorema 3.9, temos o

Teorema 3.10

Sob as hipóteses do teorema 3.9 existem funções $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ de modo que o diagrama de bifurcação de

$$x'' + \hat{g}(x, x') + \lambda \tilde{f}_1(t) + \mu \tilde{f}_2(t) = 0$$

é equivalente a D . Além disso, as funções $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ são dadas por: $\tilde{f}_1 = e_{11}f_1 + e_{12}f_2$, $\tilde{f}_2 = e_{21}f_1 + e_{22}f_2$, onde e_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$ são os elementos da matriz, que definem o isomorfismo inverso E^{-1} . $\square$

Observação:

A prova do teorema 3.10 é óbvia em vista da do teorema 3.8.

Antes de formularmos um teorema para o caso da equação do oscilador $(3.16)_0$, nos mesmos moldes dos teoremas 3.7 e 3.9, notemos que a curva $A(\alpha)$ relativa a $(3.16)_0$ requer um tratamento mais específico

por ser da forma $(A_1(\alpha), A_2(\alpha)) = (-1, A_2(\alpha))$. Assim, consideremos, no plano $\lambda\mu$, a rosácea

$$R: p(\alpha) = (\cos 3\alpha \cos \alpha, \cos 3\alpha \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

Dado um número real $m \in (0, \sqrt{3}/3)$, as retas tangentes a R com inclinação m , têm equações

$$s_i: \mu = p_2(\alpha_i) + m(\lambda - p_1(\alpha_i)), \quad i = 1, \dots, 4,$$

Os pontos $P_i = (-1, \mu_i)$ de intersecção de s_i com a reta $\lambda = -1$ são tais que

$$(3.29) \quad \mu_i = p_2(\alpha_i) - m(1 + p_1(\alpha_i)), \quad i = 1, \dots, 4,$$

Tracemos por $P_1, \dots, P_4$ as retas, pela origem, $r_1, \dots, r_4$, respectivamente, de acordo com a figura 3.12

Figura 3.12

A coordenada projetiva de r_2 relativamente ao referencial (r_1, r_4, r_3) é dada por:

$$\rho = \frac{d(P_1, P_2) \cdot d(P_3, P_4)}{d(P_1, P_3) \cdot d(P_2, P_4)}$$

Em vista de (3.29), $\rho = \rho(m, \alpha_i)$, é uma função de m e α_i , $i = 1, \dots, 4$.

$$\text{Mas } m = \frac{p'_1(\alpha_i)}{p_1(\alpha_i)} = \frac{3 - 18\cos^2\alpha_i + 16\cos^4\alpha_i}{-2\sin\alpha_i \cos\alpha_i (-3 + 8\cos^2\alpha_i)},$$

$i = 1, \dots, 4$, que é diferenciável e inversível em cada um de seus intervalos de definição. Assim, $\alpha_i = \alpha_i(m)$, $i = 1, \dots, 4$ e, portanto, $\rho = \rho(m)$ é uma função exclusiva de m .

$$\text{Ainda } \rho\left(\frac{\sqrt{3}}{3^-}\right) = 0 \text{ pois, quando } m \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3^-}$$

a reta s_4 tende para s_3 , ou seja, $P_4 \rightarrow P_3$.

E $\rho(0_+) = \frac{69-16\sqrt{3}}{69+16\sqrt{3}}$, que retrata o caso em que as retas s_j , $j = 1, \dots, 4$ ficam paralelas e simétricas com relação ao eixo λ , com

$$P_1 = \left(-1, \frac{\sqrt{30+2\sqrt{33}} (3+\sqrt{33})}{4^3}\right) \text{ e } P_2 = \left(-1, \frac{\sqrt{30-2\sqrt{33}} (-3+\sqrt{33})}{4^3}\right)$$

(ver figura 3.13)

Figura 3.13

Teorema 3.11

Seja $\tilde{p}_n(j) = \int_0^\pi e^{inj t} p'(t) \neq 0$; $j = -1, 1$; $n = 2, 4$. Consideremos um diagrama regrado de bifurcação $D = (0, \ell_1, 2, \ell_2, 4, \ell_3, 2, \ell_4)$ e o feixe $r_1, \dots, r_4$ de retas, pela origem, tais que r_j é ortogonal a ℓ_j , para cada $j = 1, \dots, 4$. Se a coordenada projetiva ρ de r_2 relativamente ao referencial (r_1, r_4, r_3) for tal que $\rho \in (0, \frac{69-16\sqrt{3}}{69+16\sqrt{3}})$ então existem um isomorfismo $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma função f de modo que o diagrama de bifurcação de

$$\ddot{x} + g(x) = E(\lambda, \mu) \cdot (-\dot{x}, f(t))$$

é equivalente a D . Além disso, f é dada por:

$$f(t) = v_1^+ e^{4ti} + v_{-1}^+ e^{-4ti} + v_1^- e^{2ti} + v_{-1}^- e^{-2ti}$$

onde $v_j^+ = (-i)^j [4\tilde{p}_4(j)]^{-1} \eta$; $v_j^- = i^j [4\tilde{p}_2(j)]^{-1} \eta$;

$$\eta = \int_0^\pi p'^2. \quad \square$$

APÊNDICE

O ESPAÇO DAS SOLUÇÕES DO PROBLEMA VARIACIONAL LINEAR: CASO BIDIMENSIONAL

Vamos analisar o caso em que o espaço das soluções do problema variacional linear de

$$(4.1) \quad \ddot{x} + g(t, x, \dot{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$(4.2) \quad M\tilde{x}(0) + N\tilde{x}(b) = K$$

em torno de uma solução básica x_0 (x_0 é uma solução de (4.1), (4.2), quando $\lambda = \mu = 0$) é bidimensional. Observamos que a condição de contorno para a equação variacional linear é inócua, uma vez que $\dim N(L) = 2$.

Seguindo os passos da secção 2.1, do capítulo II, consideremos (ϕ_1, ϕ_2) uma base para $N(L)$, isto é, $N(L) = [\phi_1, \phi_2]$.

Como $R(L) = \{\Psi \in Y: L\phi = \Psi, \text{ para algum } \phi \in X\}$ temos pela alternativa de Fredholm que:

$$R(L) = \{\Psi \in Y: \int_0^b \Psi \Psi_j = 0, j = 1, 2\},$$

onde (Ψ_1, Ψ_2) é uma base para o subespaço complementar de $R(L)$.

Sejam $U_j: X \rightarrow [\phi_j]$ definidas por:

$$U_j(x) = (c_j^{-1} \int_0^b \phi_j(x) \phi_j,$$

$$\text{com } c_j = \int_0^b \phi_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Podemos considerar que $\int_0^b \phi_1 \phi_2 = 0$ pois, tomando qualquer outra base caímos nesta condição utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Desta forma, $U = U_1 + U_2$ é uma projeção em X , satisfazendo $U(X) = N(L)$.

Por esse mesmo argumento, podemos tomar $\int_0^b \Psi_1 \Psi_2 = 0$ de modo que a projeção em Y , definida por

$$(I-E)y = (d_1^{-1} \int_0^b y \Psi_1) \Psi_1 + (d_2^{-1} \int_0^b y \Psi_2) \Psi_2,$$

com $d_j = \int_0^b \Psi_j^2$, $j = 1, 2$, satisfaça $E(Y) = R(L)$.

Tomando $y = y_1 + y_2$, com $y_1 \in U(X)$ e $y_2 \in (I-U)(X)$, e usando o mesmo procedimento anterior, determinamos a função bifurcação $p = (p_1, p_2)$, que pode ser escrita na forma:

$$p(a, \lambda, \mu) = M(a) + \lambda D + \mu E + R(a, \lambda, \mu)$$

onde i) $M: R^2 \rightarrow R^2$ é uma polinomial quadrática homogênea definida por $M(a) = (M_1(a_1, a_2), M_2(a_1, a_2)) = (a_1^2 A_1 + a_2^2 B_1 + a_1 a_2 C_1, a_1^2 A_2 + a_2^2 B_2 + a_1 a_2 C_2)$, $a = (a_1, a_2)$, sendo

$$A_j = -\frac{1}{2} d_j^{-1} \int_0^b [g_{xx} \phi_1^2 + 2g_{xx}' \phi_1 \dot{\phi}_1 + g_{xx}'' \dot{\phi}_1^2] \Psi_j$$

$$B_j = -\frac{1}{2} d_j^{-1} \int_0^b [g_{xx} \phi_2^2 + 2g_{xx}' \phi_2 \dot{\phi}_2 + g_{xx}'' \dot{\phi}_2^2] \Psi_j$$

$$C_j = -\frac{1}{2}d_j^{-1} \int_0^b [g_{xx}\phi_1\phi_2 + g_{xx}'(\phi_1\phi_2' + \phi_2'\phi_1) + g_{xx}''\phi_1'\phi_2'] \psi_j, \quad j=1,2.$$

ii) D e E são matrizes reais de ordem 1×2 , cujas componentes são respectivamente

$$D_j = -d_j^{-1} \int_0^b g_{\lambda} \psi_j$$

$$E_j = -d_j^{-1} \int_0^b g_{\mu} \psi_j, \quad j = 1,2.$$

Em cada integrando de i) e ii), as derivadas de g são calculadas em $(t, x_0(t), x_0'(t), 0, 0)$.

iii) $R(a, \lambda, \mu) = O(|a|^3 + \lambda^2 + \mu^2 + |\lambda\mu| + |a|(|\lambda| + |\mu|))$, quando $a, \lambda, \mu \rightarrow 0$.

Novamente, o nosso problema se reduz em analisar a equação $p(a, \lambda, \mu) = 0$, ou seja,

$$(4.3) \quad M(a) + \lambda D + \mu E + R(a, \lambda, \mu) = 0,$$

quando $a, \lambda, \mu \rightarrow 0$. Embora o problema considerado aqui seja semelhante aos tratados por Chow, Hale em [7] e Chow, Hale, Mallet-Paret em [9] apresenta características próprias e leva a um tipo de diagrama de bifurcação completamente diferente daqueles encontrados nas referências citadas.

O objetivo é dar uma completa caracterização do número de zeros de (4.3) próximos de $(a, \lambda, \mu) =$

$= (0,0,0)$. Para tal, observamos que os conjuntos

$$C_i(\lambda, \mu) = \{a \in \mathbb{R}^2: p_i(a, \lambda, \mu) = 0, i = 1, 2\}$$

definem, em geral, duas curvas planares para cada λ e μ fixados. Suponhamos que a função g , de (4.1), seja suficientemente diferenciável de modo que essas curvas variem suavemente com λ e μ . Assim, o nosso problema consiste em estudar o modo como $C_1(\lambda, \mu)$ e $C_2(\lambda, \mu)$ se interceptam no plano. Se para algum $(\lambda^0, 0)$ as curvas $C_1(\lambda^0, 0)$ e $C_2(\lambda^0, 0)$ se interceptam transversalmente isto também ocorre para $(\lambda, \mu) \sim (\lambda^0, 0)$. Com isto, (4.3) tem o mesmo número de soluções para $(\lambda, \mu) \sim (\lambda^0, 0)$, ou seja, não ocorre bifurcação nesta vizinhança. Procuraremos então os pontos $(\lambda^0, 0)$ de intersecção tangencial dessas curvas. Ainda, sob certas hipóteses esses pontos se transformam em pontos de intersecção transversal através de uma perturbação do parâmetro μ . Concluiremos então que os valores λ^0 para os quais as curvas $C_i(\lambda^0, 0)$ se interceptam tangencialmente são em número finito e correspondem a curvas de bifurcação no plano $\lambda\mu$.

O lema, que daremos a seguir, se baseia na seguinte hipótese sobre o termo quadrático $M(a)$, de (4,3):

(H1) Se $M(a) = 0$ então $a = 0$

Lema 4.1

Sob a hipótese (H1), todas as soluções de (4.3) para (a, λ, μ) numa vizinhança da origem, obedecem à seguinte estimativa "a priori":

$$|a| \leq c(|\lambda|^{1/2} + |\mu|^{1/2}),$$

para alguma constante c positiva.

□

Observação

A prova do lema 4.1 é análoga a do lema 2.1 (página 32).

Uma vizinhança de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ será dividida a seguir em convenientes regiões, em cada uma das quais definiremos "reescala" (scaling) de variáveis, inspirada no lema anterior, com o fim de simplificar a equação (4.3).

(4.4) $R_1^+ = \{(\lambda, \mu) : 0 \leq \lambda \leq \delta_1, |\mu| \leq \delta_2 |\lambda|\}, \quad \delta_1 \text{ e } \delta_2 \text{ constantes e}$

$$a = v\lambda$$

(4.5) $\lambda = v^2$

$$\mu = v^2 \beta$$

com $v \in \mathbb{R}^2$, v em alguma vizinhança limitada da origem, $|\beta| \leq \delta_2$ e v suficientemente pequeno.

R_1^- é a região definida por (4.4) com $-\lambda$ no lugar de λ .

(4.6) $R_2^+ = \{(\lambda, \mu) : 0 \leq \mu \leq \delta_1, |\lambda| \leq \frac{1}{\delta_2} |\mu|\}, \quad \delta_1, \delta_2 \text{ as}$

mesmas constantes de R_1^+ e

$$(4.7) \quad \begin{aligned} a &= \xi w \\ \lambda &= \xi^2 \alpha \\ \mu &= \xi^2 \end{aligned}$$

com $w \in R^2$, w em alguma vizinhança limitada da origem, $|\alpha| \leq \frac{1}{\delta_2}$ e ξ suficientemente pequeno.

R_2^- é a região definida por (4.6) com $-\mu$ no lugar de μ .

Analisaremos a equação (4.3) em cada uma dessas regiões.

R_1^+ . Substituindo (4.5) em (4.3) obtemos:

$$(4.8)_+ \quad p_+(v, \beta, v) = M(v) + D + \beta E + O(|v|) = 0.$$

Para que as curvas $M_j(v) + D_j = 0$, $j = 1, 2$ com $D = (D_1, D_2) \neq 0$, se interceptem transversal₁mente assumiremos a seguinte hipótese:

$$(H_2) \quad \text{Se } M(v) \neq 0 \text{ então } \det\left(\frac{\partial M(v)}{\partial v}\right) \neq 0$$

Assim, podemos garantir, via o teorema das funções implícitas, que todas as soluções de $(4.8)_+$ são simples para β e v suficientemente pequenos. Isto fixa δ_1 e δ_2 e, além disso, significa que nenhuma bifurcação ocorre para $(\lambda, \mu) \in R_1^+$.

Uma análise completamente análoga leva à mesma conclusão para a região R_1^- .

$$R_2^+ \quad \text{Substituindo (4.7) em (4.3) obtemos:}$$

$$(4.9)_+ \quad p_+(w, \alpha, \xi) = M(w) + \alpha D + E + O(|\xi|).$$

Antes de prosseguirmos com a análise da equação $(4.9)_+$ e da equação

$$(4.9)_- \quad p_-(w, \alpha, \xi) = M(w) + \alpha D - E + O(|\xi|),$$

obtida substituindo (4.7), com $\mu = -\xi^2$, em (4.3) vamos introduzir o

Teorema 4.1

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto e limitado. Consideremos uma função H , suficientemente diferenciável dada por:

$$H: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(w, \alpha) \mapsto H(w, \alpha)$$

Seja $Z(H) = \{(w, \alpha) : H(w, \alpha) = 0\}$. Admitamos que em $Z(H)$, a matriz jacobiana $\partial H(w, \alpha) / \partial (w, \alpha)$ tenha posto 2. Fazendo $\Delta = \det[\partial H(w, \alpha) / \partial w]$, suponhamos que para os pontos (w, α) em $Z((H, \Delta))$, $\partial(H, \Delta) / \partial (w, \alpha)$ seja inversível. Então $Z(H)$ é um conjunto de curvas diferenciáveis e tangencia os planos $\alpha = \text{constante}$ em pontos isolados. Além disso, tomando Ω menor se necessário, os pontos α_0 tais que o plano $\alpha = \alpha_0$ tangencia $Z(H)$ são isolados.

Prova

(1) $Z(H)$ é um conjunto de curvas diferenciáveis, pois $Z(H)$ é a imagem inversa de valores regulares de H (veja [30]).

(2) Seja (w, α) um ponto em $Z(H)$ tal que o vetor tangente à $Z(H)$ seja paralelo ao plano $w_1 w_2$. Disso segue que $(\frac{\partial H_1}{\partial w_1}, \frac{\partial H_1}{\partial w_2})(w, \alpha)$ e $(\frac{\partial H_2}{\partial w_1}, \frac{\partial H_2}{\partial w_2})(w, \alpha)$ são linearmente dependentes. Logo, $\Delta(w, \alpha) = 0$ e, portanto, $(w, \alpha) \in Z((H, \Delta))$. Assim, pelo teorema da função inversa (w, α) é único numa vizinhança dele.

(3) Consideremos $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R} : (w, \alpha) \in Z((H, \Delta))\} \subset \Omega'$, Ω' aberto tal que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Suponhamos, por absurdo, que exista uma

sequência não constante $\alpha_j, \alpha_j \in \Lambda; \alpha_j \rightarrow \alpha_0$ tal que $(w_j, \alpha_j) \in Z((H, \Delta))$. Então $(w_j, \alpha_j) \rightarrow (w_0, \alpha_0)$. Da regularidade de H , $(w_0, \alpha_0) \in Z((H, \Delta))$, contradizendo a parte (2).

□

Assumiremos a seguinte hipótese relativa às equações $(4.9)_{\pm}$ para $\xi = 0$.

(H_3) Se $p_{\pm}(w, \alpha, 0) = 0$ e

$$\Delta(w, \alpha, 0) = \det \frac{\partial p_{\pm}}{\partial w}(w, \alpha, 0) = 0 \text{ então } \det \frac{\partial (p_{\pm}, \Delta)}{\partial (w, \alpha)} \Big|_{(w, \alpha, 0)} \neq 0.$$

Sob (H_3) , podemos garantir a existência de um número finito de soluções de $(4.9)_{\pm}$, para $(w, \alpha, 0)$ numa vizinhança de $(0, 0, 0)$, que denotaremos por $(w^0, \alpha^0, 0)$. Ainda, os pontos w para os quais as curvas $p_{j\pm}(w, \alpha, 0) = 0, j = 1, 2$, se interceptam tangencialmente correspondem aos pontos α_0 tais que os vetores tangentes a estas curvas são paralelos ao plano $w_1 w_2$. De acordo com o teorema 4.1, estes pontos são isolados e assim, para uma pequena variação do parâmetro α , se transformam em pontos de intersecção transversal. Ver, por exemplo, as próximas figuras

A hipótese, a seguir, garante que as curvas de bifurcação serão transversais.

(H₄) A valores distintos de w^0 em (H₃) correspondem valores distintos de α^0 .

Observemos que as soluções de (4.9)_±, $(w^0, \alpha^0, 0)$, também satisfazem

$$(4.10) \quad \det \frac{\partial p_{\pm}}{\partial w} (w, \alpha, \xi) = 0$$

Em virtude do teorema das funções implícitas, existem $\varepsilon > 0$ e uma única solução, de classe C^1 , de (4.9)_± e (4.10), $\alpha^*(\xi)$, $w^*(\xi)$ para $|\xi| < \varepsilon$ satisfazendo $\alpha^*(0) = \alpha^0$ e $w^*(0) = w^0$.

De acordo com (H₃), podemos supor sem perda de generalidade que:

$$(4.11) \quad \frac{\partial p_{1\pm}}{\partial w_1}(w^0, \alpha^0, 0) \neq 0$$

em cada solução $(w^0, \alpha^0, 0)$ de $(4.9)_\pm$, (4.10) , onde $p_\pm = (p_{1\pm}, p_{2\pm})$ e $w = (w_1, w_2)$. Pelo teorema da função implícita, existe uma única função $w_1^*(w_2, \alpha, \xi)$ definida numa vizinhança W de $(w_2, \alpha, \xi) = (w_2^0, \alpha^0, 0)$, com $w_1^*(w_2^0, \alpha^0, 0) = w_1^0$ e $p_{1\pm}(w_1^*(w_2, \alpha, \xi), w_2, \alpha, \xi) = 0$, em W .

Desse modo, a equação $(4.9)_\pm$ é equivalente a

$$q_\pm(w_2, \alpha, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} p_{2\pm}(w_1^*(w_2, \alpha, \xi), w_2, \alpha, \xi) = 0,$$

em W , considerando a equação $p_{1\pm}(w_1^*(w_2, \alpha, \xi), \alpha, \xi) = 0$ como uma condição de vínculo para o problema. Precisaremos do lema a seguir que, embora utilize a notação de (H_3) , não exige que ela seja satisfeita.

Lema 4.1

Seja $(w^0, \alpha^0, 0)$ uma solução de $(4.9)_\pm$ e (4.10) . Suponhamos que (4.11) ocorra. Então, a função definida em W , $q_\pm(w_2, \alpha, \xi) = p_{2\pm}(w_1^*(w_2, \alpha, \xi), w_2, \alpha, \xi)$ é tal que $q_\pm(w_2^0, \alpha^0, 0) = 0$ e

$$\det \frac{\partial (p_1, \Delta)}{\partial (w, \alpha)} \Big|_{(w^0, \alpha^0, 0)} = - \left(\frac{\partial p_{1\pm}}{\partial w_1} \right)^2 \frac{\partial q_\pm}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 q_\pm}{\partial w_2^2} \Big|_{(w^0, \alpha^0, 0)}$$

Prova

Ver lema 3.4 [7 página 253].

□

Corolário 4.1

Sob as hipóteses do lema anterior, a condição (H_3) é equivalente a $\frac{\partial q_{\pm}}{\partial \alpha} \neq 0$ e $\frac{\partial^2 q_{\pm}}{\partial w_2^2} \neq 0$ em $(w_2^0, \alpha^0, 0)$.

□

Assim, a função $q_{\pm}$, definida em W satisfaz no ponto $(w_2^0, \alpha^0, 0)$

$$q_{\pm} = 0, \quad \frac{\partial q_{\pm}}{\partial w_2} = \left(\frac{\partial p_{1\pm}}{\partial w_1} \right)^{-1} \det \frac{\partial p_{\pm}}{\partial w} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 q_{\pm}}{\partial w_2^2} \neq 0.$$

Em resumo, colocando a equação $p_{1\pm} = 0$ como condição de vínculo para $(4.9)_{\pm}$, a hipótese (H_3) é equivalente a existência de um único ponto crítico de $p_{2\pm}(\cdot, \alpha, \xi) = q_{\pm}(\cdot, \alpha, \xi)$ numa certa vizinhança de (α, ξ) .

Omitiremos a parte subsequente pela semelhança com a da secção 2.1, capítulo II.

Antes de enunciar o teorema, que vai descrever o lugar geométrico dos pontos de bifurcação da equação $(4.9)_{\pm}$, vejamos a seguinte definição:

Dada a curva $C_{\pm}: \lambda = \alpha^*(\xi)\mu$, com $\mu = \xi^2 \neq 0$ suficientemente pequeno, como seus vetores tangentes sem

pre têm uma componente vertical (na direção do eixo μ) fica naturalmente entendido o significado do termo " C_+ é cruzada da esquerda para à direita". O mesmo vale para uma curva C_- : $\lambda = -\alpha^*(\xi)\mu$, com $\mu = -\xi^2 \neq 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 4.2

Sob as hipóteses (H_{1-4}) existem vizinhanças W_0 de $x_0(t)$ e V de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ tais que para $(w^0, \alpha^0, 0)$ satisfazendo (H_3) e $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ existe um número finito de curvas $C_+ \subset R_2^+ \subset V$, $C_- \subset R_2^- \subset V$, $C_\pm: \lambda = \pm\alpha^*(\xi)\mu$ dadas aproximadamente por:

$$\lambda \sim \alpha^0 \mu, \text{ quando } \mu \rightarrow 0^+ \text{ e } \lambda \sim -\alpha^0 \mu, \text{ quando } \mu \rightarrow 0^-$$

de modo que, quando uma das curvas é cruzada da esquerda para à direita, o número de soluções de (4.1), (4.2), em W_0 , cresce ou decresce de dois dependendo se $\det [\partial(p^\pm, \Delta)/\partial(w, \alpha)]$ é positivo ou negativo. Em cada região entre as curvas $C_\pm$, o número de soluções de (4.1), (4.2) é constante e quando $(\lambda, \mu) \rightarrow (0, 0)$ as referidas soluções tendem para $x_0(t)$ uniformemente em $[0, b]$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BADELUCCI, A.: Fundamentos da geometria projetiva, Série didática da sociedade de Matemática de São Paulo - nº 2 (1963).

- [2] - BAILEY, P., SHAMPINE, L. & WALTMAN, P.: The first and second boundary value problems for nonlinear second order differential equations, J. Differential Eqs., 2, 399-411 (1966).

- [3] - BANCROFT, S., HALE, J. & SWEET, D.: Alternative problems for nonlinear functional equations, J. Differential Eqs. 4, 40-56 (1968).

- [4] - BEBERNES, J. & GAINES, R.: Dependence on boundary data and a generalized boundary-value problem, J. Differential Eqs. 4, 359-368 (1968).

- [5] - BERGER, M. & BERGER, M.: Perspectives in non-linearity. W.A. Benjamin, New York (1968).

- [18] - KELLER, H.B.: Existence theory for two point boundary value problems, Bull. Am. Math. Soc. 72, 728-731 (1966).
- [19] - LANGFORD, W.F.: Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equations, Numer. Math., submitted.
- [20] - _____ : A shooting algorithm for the best least square solution of two-point boundary value problems, SIAM J. numer. Analysis 14, 3 (1977).
- [21] - LASOTA, A. & OPIAL, Z.: On the existence and uniqueness of solutions on a boundary value problem for an ordinary second-order differential equation, Colloquium Mathematicum, (1967).
- [22] - LASSALE, M.G.: Une demonstration du theorema de division pour les fonctions differentiables, Topology, Vol.12, 41-62, Pergamon Press (1973).

- [23] - LOUD, W.: Branching of solutions of two-parameters boundary value problems for second order differential equations, Ingenieur Archiv., 45, 347-359 (1976).
- [24] - _____ : Branching of boundary-value problems for second order equations, Pre-print.
- [25] - MAURER, P.M.: A rose is a rose..., American Mathematical Monthly, 94, 7 (1987).
- [26] - MINORSKY, N.: Nonlinear oscillations, Krieger, Huntington, New York (1974).
- [27] - NIREMBERG: Functional Analysis, N.Y. Univ. lecture notes (1960-1961).
- [28] - SCHMITT, K.: A nonlinear boundary value problem, J. Differential Eqs. 7, 527-537 (1970).
- [29] - SCHRADER, K.W.: Boundary-value problems for second-order ordinary differential equations, J. Differential Eqs. 3, 403-413 (1967).

- [30] - SPIVAK, M.: Cálculo en variedades, Editorial Reverté, S.A. (1970).
- [31] - STAKGOLD, I.: Branching of solutions of non-linear equations, Ibid. 13, 289-332 (1971).
- [32] - TÁBOAS, P.Z.: Um caso de bifurcação a partir de família de soluções em um problema de oscilações não lineares. Tese de Livre - Docência, ICMSC-USP (1979).
- [33] - _____ : Periodic solutions of a forced Lotka-Volterra equation, J. Math. Anal. Appl., 124, 1, 82-96 (1987).
- [34] - VAINBERG, M.M. & TRENIGIN, V.A.: Theory of branching of solutions of nonlinear equations. Noordhoff (1974).
- [35] - VANDERBAUWHEDE, A.: Alternative problems and invariant subspaces, J. Math. Anal. Appl. 63, 1-8 (1978).

- [36] - WALTMAN, P.: A nonlinear boundary value problem,
J. Differential Eqs. 4, 597-603 (1968).