UMA NOVA EXTENSÃO
DA
SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII

Venício Veloso Borges

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Vieira de Carvalho

Tese apresentada ao Institudo de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

São Carlos - SP

1 9 8 8

Aos meus pais

DOMÍCIO E VENITA,

que perderam a vida prematuramente, enquanto eu me preparava para escrever esta tese. Este fato é triste, mas estou convencido de que foram bons exemplos de respeito ao próximo e dedicação ao trabalho.

A G R A D E C I M E N T O S

Em primeiro lugar, quero expressar o meu agradecimento ao Prof. Dr. Luiz Antonio Vieira de Carvalho, meu orientador, pela orientação segura e objetiva que recebi.

Também desejo agradecer aos(às) professores(as) e funcionários(as) tanto da Pós-Graduação do ICMSC-USP quanto do Departamento de Matemática do IMF-UFG, que de alguma forma contribuíram para que eu realizasse este trabalho.

Finalmente, agradeço à UFG e à CAPES-PICD pelo apoio financeiro recebido.

A B S T R A C T

In the Šarkovskii's sequence

$$1 \lessdot 2 \lessdot 4 \lessdot \ldots \lessdot 2^2.5 \lessdot 2^2.3 \lessdot \ldots \lessdot 2.5 \lessdot 2.3 \lessdot \ldots \lessdot 7 \lessdot 5 \lessdot 3,$$

$\lessdot$ is a special order defined upon the positive integers, which represent periods of orbits. This sequence has been recently extended to

$$1 \lessdot 2 \lessdot 4 \lessdot \ldots \lessdot 7 \lessdot 5 \lessdot 3 \lessdot 4_e \lessdot 5_e \lessdot \ldots \lessdot n_e \lessdot \ldots,$$

where n_e represents the period of one typical and different n-periodic orbit.

Our principal result is an extension of this new sequence, in which we inserted, between any two of its periods, except among the harmonics

$$1 \lessdot 2 \lessdot 4 \lessdot \ldots \lessdot 2^k \lessdot \ldots,$$

infinitely many sequences of new orbit's periods.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I - A SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII 01

1. Introdução 01
2. Definições e Idéias Básicas 02
3. A Ordem $(\mathbb{N}^*, \prec)$ de Šarkovskii 04

CAPÍTULO II - OS MINI-MAX E A SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII 07

1. Itinerários de Aplicações Unimodais 07
2. Relação entre Mini-Max, Órbita Minimaximal e Órbita Simples 18

CAPÍTULO III - ALGUNS ASPECTOS DE FAMÍLIAS UNIMODAIS 24

1. Sobre o Número de Órbitas Periódicas Estáveis de uma Aplicação Unimodal 24
2. O Harmônico e o Anti-Harmônico 31

CAPÍTULO IV - EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII (ANTES DO 3) 40

1. Alguns Resultados 40
2. Um teorema que Estende S (Antes do 3) 45

CAPÍTULO V - EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII (APÓS 3) ... 62

1. Alguns Resultados Preliminares 62
2. Extensão entre as Órbitas n-Escada 67
3. A Extensão Acumulada por LJ-Translações ... 79

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES 83

1. A Eficiência da Extensão Cumulativa 83
2. Adaptação Contínua da Extensão Unimodal 86
3. Comportamento Assintótico dos Números F(n) .. 92

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 95

I N T R O D U Ç Ã O

Em 1964, Šarkovskii - [24] estabeleceu a sequência

$$S = (1,2,4,\ldots, 2^2.5, 2^2.3,\ldots, 2.5, 2.3,\ldots,7,5,3),$$

onde todos os inteiros positivos estão especialmente ordenados e representam períodos de órbitas periódicas que surgem, na mesma ordem, em decorrência do comportamento dinâmico de uma família de aplicações contínuas $f_\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f_\lambda: I \to I$, onde I é qualquer intervalo não degenerado da reta.

Este resultado representou um marco importante no desenvolvimento da moderna teoria do caos [8,14,24] e serviu para esclarecer várias questões referentes ao comportamento de certos sistemas dinâmicos discretos e contínuos [8,16,23]. Foi Stefan - [27] quem divulgou o teorema de Šarkovskii no ocidente, apresentando uma versão modificada do trabalho original, mas Guckenheimer - [11] já havia feito uma prova considerando aplicações unimodais. Depois Guckenheimer [12] e Collet-Eckmann - [8] apresentaram novas e semelhantes provas, independentemente. A prova mais recente foi dada por B,G,M,Y - [3], com generalização para aplicações da circunferência em si mesma. Esta última prova foi reapresentada de forma semelhante por Nitecki - [23].

Recentemente, em 1984, numa versão anterior de [6], Carvalho estendeu a sequência de Šarkovskii S para a sequência

$$S_e = S, (4_e, 5_e, 6_e, \ldots) = (1,2,\ldots,5,3,4_e,5_e,\ldots),$$

onde n_e representa, para todo inteiro $n \geq 4$, o período de um tipo especial de órbita n-periódica chamada n-escada, que é diferente daquela órbita que corresponde ao período $n \in S$. Esta extensão, segundo a mesma ordem de S, foi obtida inici-

almente para funções fracamente unimodais, mas em [6] foi adaptada para funções contínuas de I em I. Naturalmente, podemos extrair de S_e a subsequência $1,2,3,4_e,5_e,\ldots,n_e,\ldots$, onde a ordem dos períodos coincide com a ordem usual dos números naturais.

Neste trabalho obtivemos uma extensão mais ampla, inserindo entre dois períodos quaisquer (exceto quando o segundo é um harmônico do primeiro) de S_e, e ainda com a mesma ordem de S, infinitas sequências de períodos. Conseguimos este resultado para aplicações unimodais $f: I \to I$, usando o teorema III.2.6 devido a M,S,S - [21], em combinação com o teorema II.1.4, cuja parte recíproca obtivemos aqui, enquanto a outra parte foi estabelecida por C,E - [8]. Depois, adaptamos a nossa extensão para aplicações contínuas de I em I, adotando em $C^0(I,I)$ a topologia da convergência uniforme.

Dos diversos resultados obtidos, destacamos os teoremas II.1.4, IV.1.3, V.1.1, IV.2.1, V.2.1 e V.3.1, dos quais os três últimos garantem a nossa extensão de S_e.

Na seção 1 do capítulo VI, procuramos mostrar a eficiência da extensão feita, apresentando o número de períodos $p \geq 5$ que são inseridos entre os períodos de S_e. E na seção 3, mostramos que a razão $r_n = F(n+1)/F(n)$, onde $F(n)$ (que é calculado pela fórmula de Fine - [10]), dá o número de órbitas unimodais de período $n \geq 1$, tende assintoticamente para 2.

C A P I T U L O I

A SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII

1. INTRODUÇÃO.

É de grande importância o estudo do comportamento assintótico, sob iteração, de aplicações do intervalo nele próprio. No estudo de fenômenos físicos, biológicos, econômicos ou sociais pode-se adaptar modelos matemáticos que possibilitem medir uma determinada quantidade em intervalos regulares (ano, mês, minuto, etc.) de tempo.

Em biologia populacional, por exemplo, usa-se tais aplicações para entender o comportamento dinâmico de populações que têm gerações discretas e periódicas. Assim, se $f:[0,1] \to [0,1]$ é uma função conveniente, a relação funoional

$$(1) \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

permite estimar o tamanho da população em um período quando se conhece o seu tamanho no período anterior. Esta relação não depende do tempo $n \geq 0$. A equação (1) é uma equação diferença não linear de primeira ordem.

Os exemplos de modelos contínuos do sistema dinâmico discreto (1) mais frequentemente usados em biologia populacional, são as famílias de funções a um parâmetro

$$f_\lambda,\ g_\lambda : [0,1] \to [0,1]$$

definidas respectivamente por

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad 0 \leq \lambda \leq 4$$

e

$$g_\lambda(x) = x \exp(\lambda(1-x)), \quad \lambda \geq 0.$$

Uma abordagem detalhada do primeiro exemplo pode ser encontrada em [16] ou [20]. Um farto catálogo destes modelos é fornecido por [19]. Principalmente no contexto do comportamento dinâmico do crescimento de populações, existe uma tendência a que de uma geração para a próxima, a variável cresça quando é pequena e decresça quando é grande. Isto é, os modelos $y = f(x)$ usados têm frequentemente as seguintes propriedades: $f(0) = 0$, e existe $c \in (0,1)$ tal que f cresce em $[0,c]$ e decresce em $[c,1]$, monotonamente, atingindo o valor máximo $f(c)$.

2. DEFINIÇÕES E IDÉIAS BÁSICAS

O objetivo desta seção é fazer com que este trabalho fique autosuficiente.

Seja $C^0(I,I)$ o conjunto das aplicações contínuas do intervalo fechado não degenerado $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, nele próprio. Se $f \in C^0(I,I)$ definimos para todo $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$, a função iterada $f^n \in C^0(I,I)$, indutivamente, por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)),$$

para todo $x \in I$. A órbita de qualquer $x \in I$ é então a sequência $O_f(x) = (f^n(x);\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ consistindo de x e de suas sucessivas iterações sob a ação de f. Fazendo $x = x_1$, obtemos $x_{i+1} = f(x_i) = f^i(x)$ onde $i \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$ e podemos escrever $O_f(x_1) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Um ponto $x \in I$ é um ponto periódico de f se $f^n(x) = x$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Neste caso, o menor destes n é o período de x, a órbita $O_f(x)$ é também periódica e seu período é o período de x. Se x é n-periódico então cada um dos n pontos de $O_f(x)$ é também

um ponto n-periódico de f, e $O_f(x)$ é ainda chamado um ciclo de período n.

Seja $P(n,f)$ o conjunto de todos os pontos n-periódicos de f, isto é,

$$P(n,f) = \{x \in I;\ f^n(x)=x,\ f^k(x) \neq x \text{ se } k=1,2,\ldots,n-1\}.$$

Indicando por $F(f)$ o conjunto dos pontos fixos de f, temos claramente:

(a) $P(1,f) = F(f)$;

(b) $P(n,f) = F(f^n)$ para todo $n \geq 1$;

(c) Se $x, y \in P(n,f)$, então $O_f(x) = O_f(y)$ se e somente se $y = f^k(x)$ para algum $0 \leq k < n$.

(d) $x \in F(f^k)$ se e somente se $O_f(x)$ é periódica e seu período divide k.

É fácil ver que um ponto periódico de f é sempre um ponto periódico de f^n, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, embora os períodos possam ser diferentes. Por exemplo, se $f \in C^0(I,I)$ contém uma órbita 6-periódica do tipo

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_6),\ a < x_1 < x_5 < x_2 < x_4 < x_3 < x_6 < b$$

então

$x \in P(6,f)$, $P(3,f^2)$, $P(6,f^5)$, $P(2,f^9)$, $P(1,f^{12})$, etc, para todo $x \in P$.

Seja $x \in P(n,f)$. Então, considerando a órbita n-periódica

$$O_f(x) = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$$

pode-se obter, pela regra da cadeia de derivação, a fórmula

$$(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)).$$

É claro que $(f^n)'(y) = (f^n)'(x)$, para todo $y \in O_f(x)$. Assim,

uma condição necessária para que x (e por extensão $O_f(x)$) seja estável (instável) é que $|(f^n)'(x)| \leq 1$ $(|(f^n)'(x)| \geq 1)$. Uma condição suficiente para garantir a estabilidade (instabilidade) de x (e portanto de $O_f(x)$) é que $|(f^n)'(x)| < 1$ $(|(f^n)'(x)| > 1)$. O caso $|(f^n)'(x)| = 1$ exige um estudo especial. Uma consequência da condição suficiente para a estabilidade da órbita n-periódica $O_f(x)$ é que existe para cada $y \in O_f(x)$ uma vizinhança atrativa $V(y)$ tal que para todo $z \in V(y)$ a sequência de iterados $f^{kn}(z)$ converge para y quando $k \to \infty$. Para maiores detalhes, pode-se consultar [8,17,24].

Uma questão básica da teoria dos sistemas dinâmicos é descrever o comportamento da órbita $O_f(x)$, sob o ponto de vista de determinar o conjunto dos pontos limites do ponto inicial $x \in I$, que é o conjunto dos pontos limites da órbita. As órbitas mais comuns (e talvez as mais importantes) são as periódicas e as assintoticamente periódicas. Um ponto $x \in I$ é ([17], p. 987) assintoticamente periódico se existe um ponto periódico p para o qual $f^n(x) - f^n(p) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Além das órbitas periódicas (estáveis ou instáveis) e assintoticamente periódicas, existem aquelas que possuem um comportamento "caótico" ou pontos qualificados como "atratores estranhos". Novamente, veja [8,14, 17, 24]. Em [16, 17, 18] podem ser encontrados vários exemplos de modelos físicos exibindo uma rica estrutura de comportamento caótico.

3. A ORDEM $(\mathbb{N}^*, \preccurlyeq)$ DE ŠARKOVSKII

Seja $P(f)$ o subconjunto de $\mathbb{N}^*$ tal que $n \in P(f)$ se f tem uma órbita periódica de período n. Consideremos em

$\mathbb{N}^*$ a relação "$\lessdot$" assim definida: dados $m, n \in \mathbb{N}^*$ dizemos que $m \lessdot n$ (m precede n ou n segue m) se, e somente se, para cada $f \in C^0(I,I)$, a existência de uma órbita n-periódica de f implica a existência para ela de uma órbita m-periódica [6]. Claramente, esta relação é reflexiva e transitiva. A simetria é satisfeita por vacuidade.

A relação de ordem "$\lessdot$" ordena $\mathbb{N}^*$ segundo a sequência (ou ordem) de Šarkovskii:

$$1 \lessdot 2 \lessdot 4 \lessdot 8 \lessdot \ldots \lessdot 4.7 \lessdot 4.5 \lessdot 4.3 \lessdot \ldots \lessdot 2.7 \lessdot 2.5 \lessdot 2.3 \lessdot \ldots$$
$$\ldots \lessdot 7 \lessdot 5 \lessdot 3.$$

Stefan [27] descreveu formalmente esta ordenação dos períodos $p \in \mathbb{N}^*$ como segue: $\mathbb{N}^* = A \cup B$ onde

$A = \{p = 2^m;\ m \geq 0\}$, ordenado com m crescente, precede

$B = \{p = 2^n \ell;\ n \geq 0,\ \ell \geq 3$ ímpar$\}$ ordenado lexicograficamente com n e ℓ decrescentes.

A sequência de Šarkovskii, muito diferente da ordenação natural de $\mathbb{N}^*$, fundamenta-se no

Teorema 1 (Šarkovskii - [25]). Seja $f \in C^0(I,I)$ tal que $n \in P(f)$. Então $m \in P(f)$, para todo $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $m \lessdot n$.

À luz do teorema (e da sequência) de Šarkovskii temos que $m \lessdot n$ ou $n \lessdot m$, para todos $m, n \in \mathbb{N}^*$. Neste sentido, o par $(\mathbb{N}^*, \lessdot)$ é uma estrutura totalmente ordenada. É a Š-ordenação de $\mathbb{N}^*$.

No estudo das órbitas periódicas de aplicações $f \in C^0(I,I)$, o famoso teorema de Šarkovskii ocupa um lugar de destaque. Resultado fundamental na moderna teoria de caos [8,14,24], ele foi muito útil para esclarecer várias questões referentes ao comportamento complexo de certos siste-

mas dinâmicos discretos e contínuos [8, 16, 23].

Este teorema foi demonstrado originalmente por Šarkovskii (1964) - [25] para qualquer $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mas continua válido, naturalmente, quando se restringe f a qualquer intervalo não degenerado da reta. Stefan (1977) - [27] fez uma versão análoga. Também Guckenheimer (1977) - [11] fez uma prova para aplicações unimodais. Depois, Guckenheimer (1978) - [12] e Collet-Eckmann (1980) - [8] apresentaram novas (e semelhantes entre si) provas. A prova mais recente foi dada por Block-Guckenheimer-Misiurewicz-Young (1980) - [3], com generalização para aplicações da circunferência em si mesma. Esta última prova foi reapresentada por Nitecki (1982) - [23].

O teorema de Šarkovskii nada assegura sobre a estabilidade das órbitas periódicas. Mas Block - [4] provou que a sequência de Šarkovskii é estruturalmente estável para perturbações de $f \in C^0(I,I)$ através do seguinte

Teorema 2. Seja $f \in C^0(I,I)$ e suponhamos que $n \in P(f)$. Existe uma vizinhança N de f em $C^0(I,I)$ tal que para toda $g \in N$ e todo inteiro positivo k com $k < n$, $k \in P(g)$.

Este teorema nos permite observar que embora $n \in P(f)$ pode acontecer que $n \notin P(g)$, onde g é uma perturbação de f.

Voltando à sequência de Šarkovskii, podemos interpretar que para todos $m; n \in \mathbb{N}^*$ tais que $m < n$, existe uma aplicação $f \in C^0(I,I)$ tal que $m \in P(f)$ e $n \notin P(f)$. Em Li-Yorke - [17] é exibido um exemplo de aplicação $f \in C^0(I,I)$, onde $5 \in P(f)$ e $3 \notin P(f)$. É fácil obter outros exemplos. Do teorema (ou da sequência) de Šarkovskii pode-se concluir diretamente que se $3 \in P(f)$, onde $f \in C^0(I,I)$, então $P(f) = \mathbb{N}^*$. Li-Yorke - [16] também obteve este resultado em "Período três

C A P Í T U L O II

OS MINI-MAX E A SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII

1. ITINERÁRIOS DE APLICAÇÕES UNIMODAIS

Grande parte dos resultados desta e da próxima seção são cópias, variações ou adaptações de resultados descritos em II. 2,3 de Collet-Eckmann - [8], que por sua vez são combinações de idéias de outras referências especializadas tais como Milnor-Thurston - [22], Metrópolis-Stein-Stein - [21], Stefan - [27], Guckenheimer - [11], etc. Esta seção é de importância fundamental para o nosso trabalho.

Dizemos que uma aplicação $f : I = [0,1] \to [0,1]$ é unimodal se:

(a) f é contínua;

(b) Existe $c \in [0,1]$ tal que f é estritamente crescente em $[0,c]$ e estritamente decrescente em $[c,1]$.

Dizemos que f é C^1-unimodal se, além disso, satisfaz a condição

(c) $f \in C^1(I,I)$

e c é o seu único ponto crítico. Neste caso, se $c=0$ ou $c=1$, tomamos a derivada lateral respectiva.

Nas definições acima, tomamos o intervalo $I = [0,1]$ por conveniência mesmo porque esta escolha não envolve perda de generalidade. De fato, se f é uma função unimodal de $[a,b] = J$ em $[a,b]$, isto é, tal que $f \in C^0(J,J)$, $f|[a,c]$ é estritamente crescente e $f|[c,b]$ é estritamen

te decrescente para algum $c \in [a,b]$, podemos definir uma função unimodal g de $[0,1]$ em $[0,1]$ por

$$g(x) = \frac{f(z)-a}{b-a}, \quad \text{onde} \quad z = (1-x)a + xb \in J, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Esta transformação de variáveis é linear e realiza uma deformação contínua, preservando as propriedades de f.

Seja f uma aplicação unimodal fixa. Se $x \in [0,1]$, dizemos que um iterado particular $f^j(x)$ $(j = 0,1,2,\ldots)$ é do "tipo L (left)" ou do "tipo C (center)" ou do "tipo R (right)" se $f^j(x) < c$ ou $f^j(x) = c$ ou $f^j(x) > c$, respectivamente.

Para a função unimodal fixa f, o itinerário de $x \in I$ é a sequência $\underline{I}_f(x)$ de símbolos L, C, R associados aos f-iterados de x e definida assim: $\underline{I}_f(x)$ é uma sequência infinita de L's e R's ou é uma sequência finita (possivelmente vazia) de L's e R's seguida de C. Formalmente, esta sequência é da forma

$$\underline{I}_f(x) = I_0(x)\, I_1(x)\, I_2(x) \ldots ,$$

onde o j-ésimo elemento $I_j(x)$ $(j \in \mathbb{N})$ é representado pela letra L ou C ou R, segundo a posição relativa do iterado $f^j(x)$ com relação ao ponto de máximo c, já descrita. Escrevemos $\underline{I}(x)$ no lugar de $\underline{I}_f(x)$ quando não é necessário especificar a função envolvida.

Uma sequência $\underline{I}$ de símbolos L, C, R é chamada admissível se ou é uma sequência infinita de L's e R's ou é uma sequência finita (ou vazia) de L's e R's seguida de C. Então todo itinerário representa uma órbita unimodal e é uma sequência admissível. Entretanto, uma sequência admissível nem sempre representa uma órbita unimodal. Como exemplos citemos LLC e RLRLC. Representamos por $\underline{I}\,\underline{J}$ a concatenação das sequências $\underline{I}$ e $\underline{J}$. Assim, podemos ter as concatenações

$$\underline{I}^n = \underline{I}\,\underline{I} \ldots \underline{I} \quad e \quad \underline{I}^\infty = \underline{I}\,\underline{I} \ldots$$

de $\underline{I}$ com $\underline{I}$ n vezes e infinitas vezes, respectivamente. A cardinalidade (ou o comprimento) da sequência $\underline{I}$ é representada por $|\underline{I}|$.

Dado o itinerário $\underline{I}(x)$, o itinerário estendido $\underline{I}_E(x)$ é:

(a) $\underline{I}(x)$ se $\underline{I}(x)$ é infinito;

(b) $\underline{I}(x)\,\underline{I}(f(c))$ se $\underline{I}(x)$ é finito e $\underline{I}(f(c))$ é infinito;

(c) $\underline{I}(x)(\underline{I}(f(c)))^\infty$ se $\underline{I}(x)$ e $\underline{I}(f(c))$ são finitos.

O itinerário $\underline{I}(f(c))$ é chamado sequência costurante.

Indicando por Λ o conjunto de todas as sequências formadas pelos símbolos L, C, R, a operação "shift"

$\psi : \Lambda - \{C\} \to \Lambda$ é definida por

$\psi(\underline{I}) = I_1\, I_2\, I_3 \ldots$, se $\underline{I} = I_0\, I_1\, I_2 \ldots$,

Aplicando ψ^k (a k-iterada de ψ) à sequência

$$\underline{I} = I_0\, I_1\, I_2 \ldots I_{k-1}\, I_k\, I_{k+1} \ldots$$

obtemos

$$\psi^k(\underline{I}) = I_k\, I_{k+1} \ldots .$$

No caso de itinerários, temos então

$$\psi(\underline{I}(x)) = \underline{I}(f(x)) \quad se \quad x \neq c$$

e

$$\psi(\underline{I}_E(x)) = \underline{I}_E(f(x)), \quad \forall\, x \in I.$$

Com o objetivo de definir uma ordem " $\dot{<}$ " no conjunto Λ' das sequências admissíveis, é natural estabelecer inicialmente que $L \dot{<} C \dot{<} R$. Se $\underline{A}, \underline{B} \in \Lambda'$ são distintas, seja i o primeiro índice para o qual $A_i \neq B_i$. A existência deste índice é clara em qualquer um dos casos $|\underline{A}| < |\underline{B}|$ ($|\underline{A}|$ finito) ou $|\underline{A}| = |\underline{B}|$. Dizemos que

$\underline{A} \dot{<} \underline{B}$ se ocorrer um dos casos:

(a) Existe um número par de R's em

$$A_0A_1 \ldots A_{i-1} = B_0B_1 \ldots B_{i-1} \quad e \quad A_i \dot{<} B_i$$

(b) Existe um número ímpar de R's em

$$A_0A_1 \ldots A_{i-1} = B_0B_1 \ldots B_{i-1} \quad e \quad B_i \dot{<} A_i .$$

Dizemos que $\underline{B} \dot{<} \underline{A}$ se nenhum destes casos ocorre. Naturalmente, podemos também usar as notações $\underline{A} \dot{\leq} \underline{B}$ ou $\underline{A} \dot{\geq} \underline{B}$ ou $\underline{A} \dot{>} \underline{B}$ ou $\underline{B} \dot{>} \underline{A}$ nos casos apropriados. É claro que o par $(\Lambda', \dot{\leq})$ define então uma estrutura de ordem total. Uma sequência finita de L's, R's e C é par se possui um número par de R's, e é ímpar em caso contrário.

Como o itinerário $\underline{I}(x)$ está associado ao ponto $x \in [0,1]$, é natural que a ordem usual $<$ em $[0,1]$ reflita na ordem "$\dot{<}$" em Λ'. De fato, para uma aplicação unimodal f, tem-se (Collet-Eckmann - [8] estes dois importantes resultados:

Teorema 1. Se $\underline{I}(x) \dot{<} \underline{I}(y)$ então $x < y$.

Teorema 2. Se $x < y$ então $\underline{I}(x) \dot{\leq} I(y)$.

Sob determinadas condições, a saber que f seja S-unimodal e não tenha órbita periódica estável, tem-se (Collet-Eckmann - [8], pág. 69): $x < y$ implica que $\underline{I}(x) \dot{<} \underline{I}(y)$.

Consideremos uma órbita n-periódica $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ de uma aplicação unimodal fixa f. Cada um dos pontos $f^j(x)$ $(j = 0,1, \ldots, n-1)$ tem um itinerário periódico estendido $\underline{I}_E(f^j(x))$. Num certo sentido, todos estes itinerários são equivalentes, pois representam a mesma órbita periódica. Pelo teorema 2, podemos escolher o maior deles segundo a ordem "$\dot{\leq}$". Ele é $\underline{I}_E(y)$, onde

$y = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{f^j(x)\}$ será a sua coordenada (ou da órbita). Todos os "shifts" $\psi^k(\underline{I}_E(y))$ satisfazem $\psi^k(\underline{I}_E(y)) \dot{\leq} \underline{I}_E(y)$.

Isto motiva a seguinte definição: uma sequência $\underline{I}$ é maximal se é admissível e se $\psi^k(\underline{I}) \dot{\leq} \underline{I}$ para $k = 1,2,\ldots,|\underline{I}| - 1$ ou para $k = 1,2,\ldots$ quando $\underline{I}$ é respectivamente finita ou infinita. É claro que se f é unimodal, então $\underline{I}_f(1)$ é sempre maximal. Quando $\underline{I}$ é finita e maximal então $\psi^k(\underline{I}) \dot{<} \underline{I}$ para $k = 1,2,\ldots,$ $|\underline{I}| - 1$.

O seguinte resultado (Collet-Eckmann - [8], pág. 71) é óbvio.

Teorema 3. As únicas sequências maximais que não começam com RL... são L^∞, R^∞, RC e C.

Pelo que vimos acima, é sempre possível obter em correspondência a uma órbita n-periódica de uma função unimodal fixa f, o itinerário periódico maximal estendido $\underline{I}_E(y)$. Devido às características de f e ao modo como o y foi escolhido, temos (quando $n \geq 3$ e $0 < c < 1$) que $y > c$ e $f(y) < c$ são os pontos da órbita mais afastados de c para a direita e para a esquerda, respectivamente. No itinerário $\underline{I}_E(y)$, ao y corresponde um R enquanto ao f(y) está associado um L. Assim, todo itinerário n-periódico maximal tem a forma

$$\begin{aligned}\underline{I}_E(y) &= I_0(y)I_1(y)I_2(y)\ \ldots\ I_{n-1}(y)I_n(y)I_{n+1}(y)I_{n+2}(y)\ \ldots \\ &= RLI_2(y)\ \ldots\ I_{n-1}(y)\,RLI_2(y)\ \ldots\ I_{n-1}(y)\ \ldots \\ &= (RLI_2(y)\ \ldots\ I_{n-1}(y))^\infty\end{aligned}$$

Pelo teorema 2, $\underline{I}_E(f^j(y)) \dot{\leq} \underline{I}_E(y)$ para $j = 0,1,\ldots,$ n-1. Em particular, se ocorrer $f^{n-1}(y) = c$ então $I_{n-1}(y) = C$, e o itinerário periódico maximal associado à órbita de y, que chamaremos de palavra, toma a forma finita

$I_C(y) = R\,L\,I_2(y) \ldots I_{n-2}(y)\,C$. Temos também os casos particulares $\underline{I}_C(y) = C$ (se $y = c$) e $\underline{I}_C(y) = RC$ (se $y > c$, $f(y) = c$). Quando $f^{n-1}(y) \neq c$, só pode ocorrer um dos casos $I_{n-1}(y) = L$ (se $f^{n-1}(y) < c$) ou $I_{n-1}(y) = R$ (se $f^{n-1}(y) > c$), e o itinerário periódico estendido correspondente é

$$\underline{I}_L(y) = (R\,L\,I_2(y) \ldots I_{n-2}(y)\,L)^{\infty}$$

ou

$$\underline{I}_R(y) = (R\,L\,I_2(y) \ldots I_{n-2}(y)\,R)^{\infty}.$$

Analisando $\underline{I}_L(y)$, $\underline{I}_C(y)$ e $\underline{I}_R(y)$ como sequências admissíveis (lembrando que só uma delas representa o itinerário de y), temos que

$$\underline{I}_L(y) \dot{<} I_C(y) \dot{<} \underline{I}_R(y) \quad \text{se } \underline{I}_C(y) \text{ é par e}$$

$$\underline{I}_R(y) \dot{<} \underline{I}_C(y) \dot{<} \underline{I}_L(y) \quad \text{se } \underline{I}_C(y) \text{ é ímpar.}$$

Por outro lado, vamos mostrar que uma palavra (sequência maximal finita da forma $\underline{I} = R\,L\,I_2 \ldots I_{n-2}\,C$) representa uma órbita unimodal de período $n \geq 3$. Para começar, podemos distribuir entre $L \dot{<} C$ e entre $C \dot{<} R$ as letras

$$I_j \in \{L,R\} \quad (j = 2,3, \ldots, n-2),$$

ordenando-as através da ordem $\dot{<}$ aplicada ao conjunto dos "shifts"

$$\psi^0(\underline{I}) = I = R\,L\,I_2 I_3 \ldots I_{n-2}\,C$$
$$\psi^1(\underline{I}) = L\,I_2 I_3 \ldots I_{n-2}\,C$$
$$\psi^2(\underline{I}) = I_2 I_3 \ldots I_{n-2}\,C$$
$$\vdots$$
$$\psi^{n-2}(\underline{I}) = I_{n-2}\,C$$
$$\psi^{n-1}(I) = C,$$

identificados respectivamente com a sua primeira letra, isto é, $\psi^k(\underline{I}) \equiv I_k$ (L, R ou C) onde $k = 0,1,2,\ldots,n-1$. De fato, como a palavra $\underline{I} = R\,L\,I_2 I_3 \ldots I_{n-2} C$ possui i L's, 1 C e j R's, onde $1 \leq i,j \leq n-2$ e $i+j = n-1$, é sempre possível (com as identificações acima) $\dot{<}$-ordenar as suas letras segundo a cadeia

$$L \dot{<} L_1 \dot{<} L_2 \dot{<} \ldots \dot{<} L_{i-1} \dot{<} C \dot{<} R_1 \dot{<} R_2 \dot{<} \ldots \dot{<} R_{j-1} \dot{<} R$$

Em geral, como

$$\underline{I} = R\,L\,I_2 \ldots I_{n-2}\,C \equiv \psi^0(\underline{I})\ \psi^1(\underline{I})\ \psi^2(\underline{I}) \ldots \psi^{n-2}(\underline{I})\ \psi^{n-1}(\underline{I}),$$

a cadeia acima é equivalente à cadeia

$$(*)\quad \psi^1(\underline{I}) \dot{<} (\psi^2(\underline{I}))' \dot{<} (\psi^3(\underline{I}))' \dot{<} \ldots \dot{<} (\psi^i(\underline{I}))' \dot{<} \psi^{n-1}(\underline{I})$$
$$\dot{<} (\psi^1(\underline{I}))'' \dot{<} (\psi^2(\underline{I}))'' \dot{<} \ldots \dot{<} (\psi^{j-1}(\underline{I}))'' \dot{<} \psi^0(\underline{I})$$

onde a $\dot{<}$-ordenação dos shifts ψ' e ψ'' (em relação aos shifts $\psi^1(\underline{I}) \equiv L$, $\psi^{n-1}(\underline{I}) \equiv C$ e $\psi^0(\underline{I}) \equiv R$) depende da palavra considerada. Esta cadeia permite escrever (e desenhar) a órbita periódica

$$(\psi^0(\underline{I}),\ \psi^1(\underline{I}),\ \psi^2(\underline{I}), \ldots,\ \psi^{n-1}(\underline{I})) \equiv (R, L, I_2, \ldots, I_{n-2}, C),$$

a qual vamos em seguida mostrar que é unimodal. Basta mostrar que ψ é $\dot{<}$-estritamente crescente em

$$(*')\quad \psi^1(\underline{I}) \dot{<} (\psi^2(\underline{I}))' \dot{<} \ldots \dot{<} (\psi^i(\underline{I}))' \dot{<} \psi^{n-1}(\underline{I})$$

e $\dot{<}$-estritamente decrescente em

$$(*'')\quad \psi^{n-1}(\underline{I}) \dot{<} (\psi^1(\underline{I}))'' \dot{<} \ldots \dot{<} (\psi^{j-1}(\underline{I}))'' \dot{<} \psi^0(\underline{I}).$$

De fato, se $\psi_1'(\underline{I})$ e $\psi_2'(\underline{I})$ estão em $(*')$ e são tais que $\psi_1' \dot{<} \psi_2'$, então $\psi(\psi_1') \dot{<} \psi(\psi_2')$ porque a retirada de um L em ψ_1' e em ψ_2' não altera as suas R-paridades. Por outro lado, se $\psi_1''(\underline{I}) \dot{<} \psi_2''(\underline{I})$ estão em $(*'')$, então $\psi(\psi_2'') \dot{<} \psi(\psi_1'')$ devido a inversão da R-paridade dos shifts ψ_1'' e ψ_2'' quando um R é retirado de cada um deles.

Para ver que a palavra $\underline{I}$ vista como a órbita periódica $(R, L, I_2, \ldots, I_{n-2}, C)$ realmente representa uma órbita unimodal, é so considerá-la sob a forma da ψ-permutacão dos shifts $\psi^i(\underline{I})$ $(i=0,1,2,\ldots,n-1)$ definida por

$$\begin{bmatrix} L, & L_1, & L_2, \ldots, & L_{i-1}, & C, & R_1, & R_2, \ldots, & R_{j-1}, & R \\ \psi(L), & \psi(L_1), & \psi(L_2), \ldots, & \psi(L_{i-1}), & \psi(C)=R, & \psi(R_1), & \psi(R_2), \ldots, & \psi(R_{j-1}), & \psi(R)=L \end{bmatrix}$$

A unimodalidade desta órbita pode ser vista pelo aspecto de crescer e depois decrescer em

$$\psi(L) \dot{<} \psi(L_1) \dot{<} \ldots \dot{<} \psi(L_{i-1}) \dot{<} \psi(C) \dot{>} \psi(R_1) \dot{>} \ldots \dot{>} \psi(R_{j-1}) \dot{>} \psi(R).$$

A nossa argumentação é baseada formalmente na seguinte definição.

Definição 1: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I = [0,1]$ tais que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ e seja $f : I \to I$ uma aplicação contínua. Os pontos x_i formam uma órbita unimodal de período n segundo f se, e somente se, a f-permutação

$$\begin{bmatrix} x_1, & x_2, \ldots, & x_{k-1}, & x_k, & x_{k+1}, \ldots, & x_{n-1}, & x_n \\ f(x_1), & f(x_2), \ldots, & f(x_{k-1}), & f(x_k)=x_n, & f(x_{k+1}), \ldots, & f(x_{n-1}), & f(x_n) = x_1 \end{bmatrix},$$

onde $x_2 \leq x_k \leq x_{n-1}$ e $f^j(x_i) \neq x_i$ (para $1 \leq j \leq n-1$ e $i = 1,2,\ldots,n$) satisfaz a dupla cadeia

$$f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_{k-1}) < f(x_k) > f(x_{k+1}) > \ldots > f(x_{n-1}) > f(x_n).$$

Podemos então obter uma função unimodal que serve de suporte para a órbita unimodal $\underline{I} = R\,L\,I_2 \ldots I_{n-2}\,C$. Primeiramente, associemos a R um ponto $x_n \in (0,1)$ suficientemente perto de 1 que será a coordenada da órbita. À L associemos um ponto $x_1 \in (0,1)$, suficientemente perto de 0, que será o pon

to da órbita mais afastado pela esquerda, e a C associemos o ponto $c \in (x_1, x_n)$. Logo $x_1 < c < x_n$ corresponde a $L \dot{<} C \dot{<} R$. E assim sucessivamente, associemos x_i a $\psi^i(\underline{I})$ para $i = 2, 3, \ldots, n-2$. Temos portanto a órbita numérica $(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, c)$ identificada com a órbita literal $(R, L, I_2, \ldots, I_{n-2}, C)$ que por sua vez se identifica com $(\psi^0(\underline{I}), \psi^1(\underline{I}), \ldots, \psi^{n-1}(I))$. Considerando a cadeia (*) e a órbita $(x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, c)$ podemos obter a sequência de pontos $((x_1, x_2), \ldots, (c, x_n), \ldots, (x_n, x_1))$ cuja ordem usual das abscissas satisfaz (*). Em seguida liguemos estes pontos sucessivamente por arcos contínuos, de "forma unimodal". Igualmente de forma unimodal, liguemos os pontos $(0, r)$ a (x_1, x_2) e (x_n, x_1) a $(1, s)$ onde $0 \leq r < x_2$ e $0 \leq s < x_1$. Portanto encontramos uma função unimodal que serve de suporte à órbita unimodal $(R, L, I_2, \ldots, I_{n-2}, C)$ representada pela palavra $RLI_2, I_3, \ldots, I_{n-2}C$.

Vamos dar um exemplo de aplicação. Consideremos a palavra $\underline{I} = RLLRRRLC$. Para maior comodidade, vamos ainda escrevê-la sob a forma indexada $\underline{I} = RLL_aR_bR_cR_dL_eC$. Ordenando os os shifts $\psi^0(\underline{I}), \psi^1(\underline{I}), \ldots, \psi^7(\underline{I})$ pela ordem $\dot{<}$ obtemos a cadeia

$$\psi^1 \dot{<} \psi^6 \dot{<} \psi^2 \dot{<} \psi^7 \dot{<} \psi^4 \dot{<} \psi^3 \dot{<} \psi^5 \dot{<} \psi^0$$

ou seja

$$LL_aR_bR_cR_dL_eC \dot{<} L_eC \dot{<} L_aR_bR_cR_dL_eC \dot{<} C \dot{<} R_cR_dL_eC \dot{<}$$
$$R_bR_cR_dL_eC \dot{<} R_dL_eC \dot{<} RLL_aR_bR_cR_dL_eC,$$

que se identifica com

$$L \dot{<} L_e \dot{<} L_a \dot{<} C \dot{<} R_c \dot{<} R_b \dot{<} R_d \dot{<} R.$$

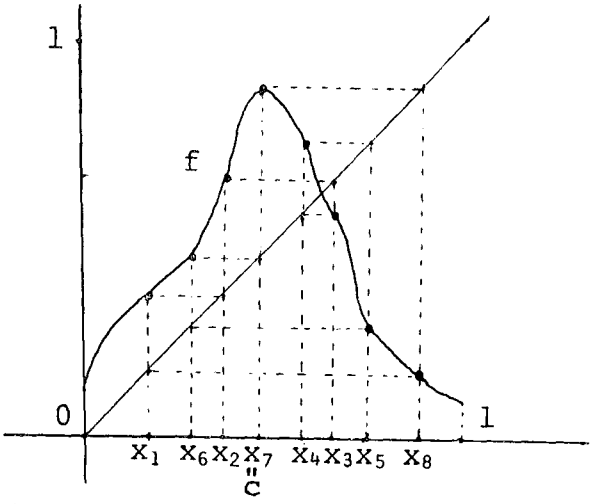
Fazendo $a = b = 2$, $c = e = 1$ e $d = 3$, temos a cadeia

$$L \dot{<} L_1 \dot{<} L_2 \dot{<} C \dot{<} R_1 \dot{<} R_2 \dot{<} R_3 \dot{<} R.$$

Portanto, a palavra $\underline{I}$ representa a órbita unimodal de período 8

$$(R,L,L_2,R_2,R_1,R_3,L_1,\ C) \equiv (x_8,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\ c),$$

cujo gráfico é



Consideremos agora a sequência maximal periódica (de comprimento infinito)

$$\underline{I} = (RLI_2I_3\ \ldots\ I_{n-1})^{\infty} = RLI_2\ \ldots\ I_{n-1}RLI_2\ \ldots\ I_{n-1}\ \ldots$$

onde $I_j \in \{L,R\}$, $j = 2,3,\ldots,n-1$. Para mostrar que ela representa uma órbita unimodal n-periódica, vamos considerar "o período" $\underline{J} = R\,L\,I_2I_3\ldots I_{n-1}$ de $\underline{I}$. Basta ordenar as letras R, L e I_j do período $\underline{J}$, em correspondência à $\dot{<}$-ordenação dos shifts $\psi^0(\underline{J})$, $\psi^1(\underline{J})$, ... , $\psi^{n-1}(\underline{J})$ e proceder como no caso finito. Só que, neste caso, temos $x < c < x_{n-1}$ se $I_{n-1} = R$ ou $x_{n-1} < c < x'$ se $I_{n-1} = L$, onde $x = \max\{x_i : i = 2,3,\ \ldots\ ,\ n-2 \text{ e } x_i < x_{n-1}\}$ e $x' = \min\{x_i > x_{n-1} : i = 2,3,\ \ldots\ ,\ n-2\}$. Como exemplo consideremos a sequência maximal periódica

$$\underline{I} = (RLLRRLR)^{\infty} = RLLRRLR\ RLLRRLR\ \ldots\ .$$

Ordenando as letras do período

$$\underline{J} = RLLRRLR = RLL_aR_bR_cL_dR_e\ ,$$

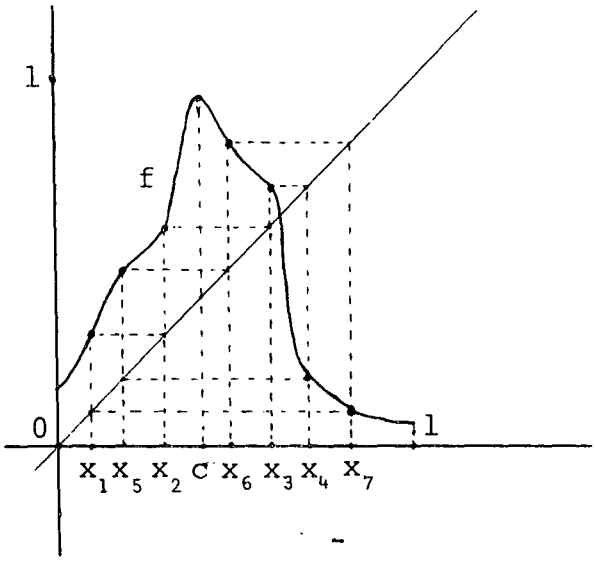
obtemos

$$L \dot{<} L_d \dot{<} L_a \dot{<} R_e \dot{<} R_b \dot{<} R_c \dot{<} R$$

Fazendo $d = e = 1$, $a = b = 2$, e $c = 3$ conseguimos a cadeia $L \dot{<} L_1 \dot{<} L_2 \dot{<} R_1 \dot{<} R_2 \dot{<} R_3 \dot{<} R$. Então temos $L_2 \dot{<} C \dot{<} R_1$ o que equivale a $x_2 < c < x_6$, porque

$$\underline{J} = (R, L, L_2, R_2, R_3, L_1, R_1) \equiv (x_7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).$$

O gráfico de $\underline{J}$ é



Reunindo as considerações feitas e os resultados obtidos nesta seção, podemos estabelecer o seguinte

Teorema 4. Toda órbita unimodal periódica contendo c pode ser representada por uma palavra e, reciprocamente, toda palavra representa uma órbita unimodal periódica contendo c.

A primeira parte do teorema acima é uma consequência direta da definição de sequência periódica maximal. A parte recíproca é um resultado novo.

2. RELAÇÃO ENTRE MINI-MAX, ÓRBITA MINI-MAXIMAL E ÓRBITA SIMPLES.

Dada uma sequência $\underline{A}$ (finita e não vazia) de L's e R's e uma sequência admissível $\underline{B}$, definimos $\underline{A} * \underline{B}$ (o produto $*$ de $\underline{A}$ por $\underline{B}$) como segue:

(a) Se $\underline{A}$ é par e $\underline{B} = B_0 B_1 B_2$ é infinita, então $\underline{A} * \underline{B} = \underline{A} B_0 \underline{A} B_1 \underline{A} B_2 \ldots$

(b) Se $\underline{A}$ é par e $\underline{B} = B_0 B_1 \ldots B_{n-1} C$ é finita, então $\underline{A} * \underline{B} = \underline{A} B_0 \underline{A} B_1 \underline{A} B_2 \ldots \underline{A} B_{n-1} \underline{A} C$

(c) Se $\underline{A}$ é ímpar e $\underline{B}$ é infinita, então $\underline{A} * \underline{B} = \underline{A} \breve{B}_0 \underline{A} \breve{B}_1 \underline{A} \breve{B}_2 \ldots$, onde $\breve{L} = R$, $\breve{R} = L$ e $\breve{C} = C$

(d) Se $\underline{A}$ é ímpar e $\underline{B}$ é finita, então $\underline{A} * \underline{B} = \underline{A} \breve{B}_0 \underline{A} \breve{B}_1 \underline{A} \ldots$
$\ldots \underline{A} \breve{B}_{n-1} \underline{A} C.$

O produto $*$ serve para descrever relações entre itinerários de funções unimodais. Destacamos três importantes resultados (pág. 75 - [8]) sobre o produto $*$, que são empregados na ordenação de itinerários, que são:

Teorema 1. Se $\underline{A}$ é ímpar e $I_i \neq C$, $i \leq n$, então $\underline{A} \breve{I}_0 \underline{A} \breve{I}_1 \cdots \underline{A} \breve{I}_n$ é par se, e somente se, $I_0 I_1 \ldots I_n$ é par.

Teorema 2. Se $\underline{A}C$ e $\underline{B}$ são maximais, então $\underline{A} * \underline{B}$ é maximal.

É fácil extrair destes teoremas a seguinte consequência especial: se P é uma palavra, então $R_* P$ é uma palavra que tem R-paridade contrária à de P.

Teorema 3. Se $\underline{A}C$ é maximal então a aplicação $\underline{A} * : \underline{B} \to \underline{A} * \underline{B}$ do conjunto dos itinerários maximais em si mesmo, preserva a ordem $\dot{<}$.

Observamos que $\underline{A} * C = \underline{A}C$, $\emptyset * \underline{B} = \underline{B}$ e $\underline{A}^{*n}$ é a n-iteração de $\underline{A}$ via produto $*$.

Vamos ordenar as sequências maximais infinitas de período $p \geq 2$ segundo a ordem $\dot{<}$. Para p fixo, existem no máximo 2^p delas (nº de arranjos com repetição de dois elementos tomados p a p). Seja $r \leq 2^p$ o número destas sequências que têm período p. Então

$$\underline{B}_{1,p}^{\infty} \dot{<} B_{2,p}^{\infty} \dot{<} \ldots \dot{<} \underline{B}_{r,p}^{\infty}$$

é a $\dot{<}$-ordenação destas sequências, onde $|\underline{B}_{i,p}| = p$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

O mini-max de período p é definido por $\underline{P}_p = \underline{B}_{1,p}$.

O teorema seguinte (pág. 78 - [8]) fornece o "tipo" de mini-max para cada período.

Teorema 4. Os mini-max $\underline{P}_p$ são da seguinte forma:

(a) Se $p \geq 3$ é ímpar, $\underline{P}_p = R L R^{p-2}$

(b) Se $p = 2^n k$, onde $k \geq 3$ é ímpar então $\underline{P}_p = R^{*n} * R L R^{k-2}$

(c) Se $p = 2^n$, $n > 0$, então $\underline{P}_p = R^{*n} * R$ e $\underline{P}_1 = L$.

Pelo teorema 1, $\underline{P}_p$ é par para todo p da forma $2^n k$, $k \geq 3$ ímpar, e é ímpar para $p = 2^n$, $n \geq 1$.

Do teorema 4 segue (pág. 78 - [8]) o chamado teorema Pré-Šarkovskii, que é

Teorema 5. Sejam s, t dois inteiros. Se $s \lessdot t$ no sentido da ordem de Šarkovskii

$$1 \lessdot 2 \lessdot 4 \lessdot \ldots \lessdot 2^2 . 5 \lessdot 2^2 . 3 \lessdot \ldots \lessdot 2 . 5 \lessdot 2 . 3 \lessdot \ldots \lessdot 7 \lessdot 5 \lessdot 3,$$

então $\underline{P}_s \dot{<} \underline{P}_t$ (ou $\underline{P}_s^{\infty} \dot{<} \underline{P}_t^{\infty}$).

Os dois teoremas acima, permitem escrever a ordem de Šarkovskii em termos dos mini-max correspondentes aos períodos que nela aparecem. De fato, podemos escrever

$$L^{\infty} \dot{<} (R^{*1} * R)^{\infty} \dot{<} (R^{*2} * R)^{\infty} \dot{<} (R^{*3} * R)^{\infty} \dot{<} \ldots$$

$$\vdots$$

$$\dot{<} (R^{*2} * RLR^{5})^{\infty} \dot{<} (R^{*2} * RLR^{3})^{\infty} \dot{<} (R^{*2} * RLR)^{\infty} \dot{<} \ldots$$

$$\dot{<} (R^{*1} * RLR^{5})^{\infty} \dot{<} (R^{*1} * RLR^{3})^{\infty} \dot{<} (R^{*1} * RLR)^{\infty} \dot{<} \ldots$$

$$\dot{<} (RLR^{5})^{\infty} \dot{<} (RLR^{3})^{\infty} \dot{<} (RLR)^{\infty} .$$

Adaptamos de Coppel - [9] a seguinte definição.

Definição 1. Uma órbita n-periódica de $f \in C^0(I,I)$ é Šarkovskii-maximal, ou S-maximal, se não existe $m \in P(f)$ tal que $n < m$ e $1 < m < n$.

A sequência de Šarkovskii contém cada período $n \in \mathbb{N}^*$ só uma vez, não considerando os diversos tipos de órbitas n-periódicas existentes. Mesmo para funções unimodais, existem, conforme [8,11,20,21], vários tipos. Ainda de acordo estas referências e para funções unimodais, existe um só tipo (é óbvio) de órbita de período 1, 2 e 3, existem dois tipos de período 4, três de período 5, cinco de período 6, etc. . O número de órbitas unimodais n-periódicas pode ser calculado através da fórmula de Fine - [10]

$$F(n) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ímpar}}} \mu(d)\, 2^{n|d} ,$$

onde $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ é a função de Möbius que é definida assim: $\mu(1) = 1$, $\mu(x) = (-1)^r$ se x é um produto de r primos distintos e $\mu(x) = 0$ nos outros casos.

No caso de funções unimodais, a órbita n-periódica maximal a que se refere a definição acima, é a menor (segundo a ordem $\dot{<}$) órbita n-periódica, como veremos adiante. Esta órbita é chamada de mini-maximal.

Em [1], Alsedà, Llibre e Serra demonstraram que para funções unimodais, os mini-max essencialmente descrevem o comportamento das órbitas periódicas mini-maximais.

Vejamos quando uma órbita n-periódica de $f \in C^0(I,I)$ é uma órbita simples. Se $n = 2^s$, $s \geq 0$ temos a seguinte

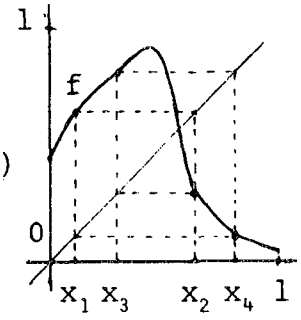
Definição 2. (Block - [2,5]. Todo ponto fixo é uma órbita simples, e uma órbita de f com período 2^s, onde $s > 0$, é simples se suas metades esquerda e direita são órbitas simples de f^2 com período 2^{s-1}.

Por exemplo, as órbitas unimodais de período 4

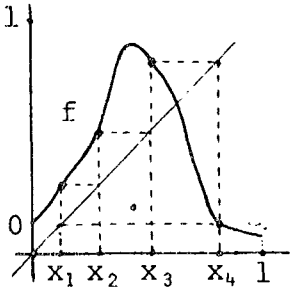
$g \equiv (1,3,2,4)$

$g^2 \equiv (1,2) \cup (3,4)$

$g^4 \equiv 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4$



e



$g \equiv (1,2,3,4)$

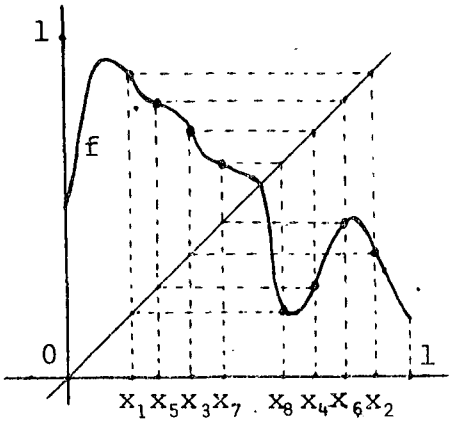
$g^2 \equiv (1,3) \cup (2,4)$

$g^4 \equiv 1 \cup 3 \cup 2 \cup 4$

$g = f|$órbita

são tais que a primeira é simples mas a segunda não o é. Um exemplo de órbita simples de período 8, não unimodal, é

$g = f \mid$ órbita



$g \equiv (1,8,3,6,2,7,4,5)$

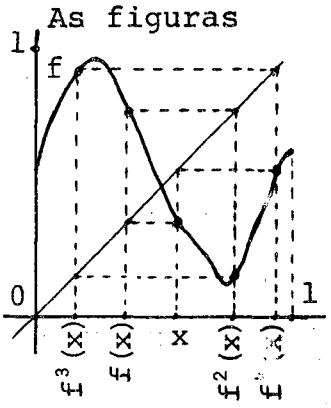
$g^2 \equiv (1,3,2,4) \cup (5,8,6,7)$

$g^4 \equiv (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6) \cup (7,8)$

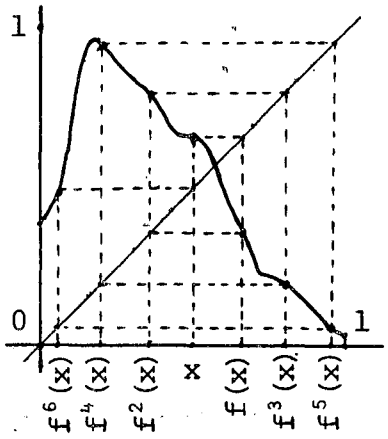
$g^8 \equiv 1 \cup 2 \cup 3 \cup \ldots \cup 8$

Definição 3. (Stefan - [27]). Uma órbita de período $n \geq 3$ ímpar com ponto médio x é simples se seus pontos têm a ordem $f^{n-1}(x) < f^{n-3}(x) < \ldots < f^2(x) < x < f(x) < \ldots < f^{n-2}(x)$, ou a ordem oposta.

As figuras



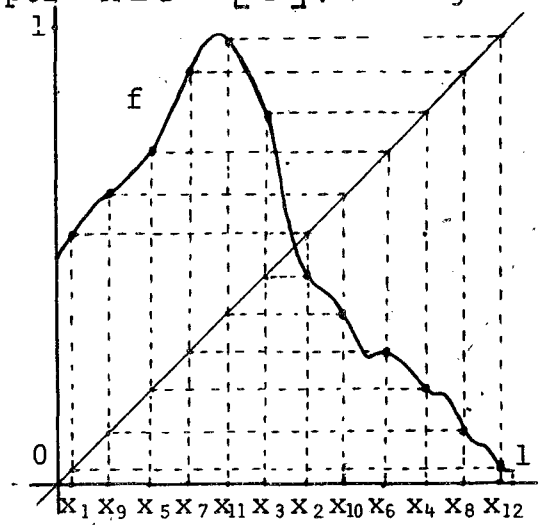
e



exemplificam órbitas simples de períodos 5 e 7 respectivamente. Notamos que a segunda órbita é unimodal e a primeira é "unimodal invertida".

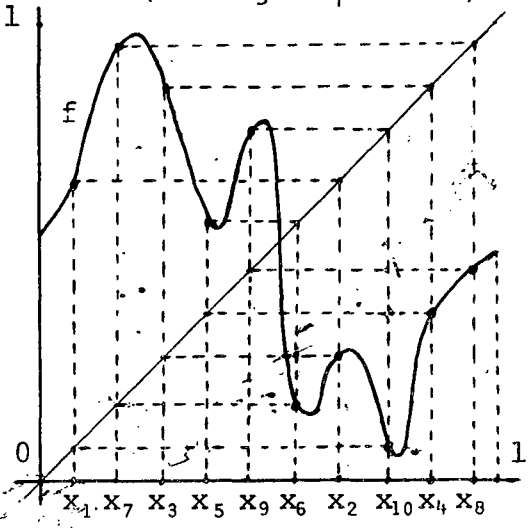
Definição 4. (Block - [5]). Uma órbita de período $n = 2^s q$, onde $q \geq 3$ é ímpar e $s \geq 1$, é simples se consiste de 2^s blocos de q pontos consecutivos, cada bloco formando uma órbita simples de f^{2^s} (com período q), e os blocos são eles próprios permutados por f como uma órbita simples de período 2^s.

Esta definição é análoga à que foi dada anteriormente por ALS - [1]. As figuras seguintes (onde $g = f|$órbita)



$g \equiv (1,7,6,10,3,9,4,11,2,8,5,12)$

e



$g \equiv (1,7,3,9,4,6,2,10,5,8)$

mostram, respectivamente, uma órbita simples (unimodal) de período 12 e uma órbita simples (não unimodal) de período 10.

Alsedà-Llibre-Serra - [1] provaram a equivalência, para funções unimodais, entre órbita n-periódica mini-maximal, itinerário mini-max de período n e órbita simples n-periódica. Uma importante consequência disto é que os períodos n em S referem-se às menores (no sentido da $\dot{<}$-ordenação) órbitas de períodos n.

Isto mostra a compatibilidade entre a ordem $<$ de Sarkovskii e a ordem $<$ dos itinerários. Então, de agora em diante, adotaremos o símbolo $<$ em ambos os casos. Ou o símbolo $>$ para representar o sentido oposto.

CAPÍTULO III

ALGUNS ASPECTOS DE FAMÍLIAS UNIMODAIS

1. SOBRE O NÚMERO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS ESTÁVEIS DE UMA APLICAÇÃO UNIMODAL.

O tipo de função unimodal $f : I \to I$ que analisaremos com mais detalhes tem as seguintes propriedades:

(1) $f \in C^{k \geq 3}(I,I)$

(2) $f(0) = f(1) = 0$

(3) f tem um único ponto crítico $c \in [0,1]$

(4) $f|\ [0,c]$ é estritamente crescente e $f|\ [c,1]$ é estritamente decrescente.

Uma das famílias de aplicações do intervalo em si próprio que têm sido mais frequentemente estudadas é a família de funções quadráticas

$$(1) \qquad f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad 0 \leq \lambda \leq 4.$$

Esta família só possui comportamento dinâmico não trivial se $1 < \lambda < 4$. Se $0 \leq \lambda < 1$ todas as órbitas de $x \in I$ são atraídas para $x = 0$. Se $\lambda = 1$, o único ponto fixo $x = 0$ é apenas unilateralmente estável. Se $\lambda = 4$, o ponto fixo $x = 0{,}75$ é instável. Além disso, conforme Preston - [24], a órbita de todo ponto $x \in (0,1)$ é completamente "caótica", no sentido de possuir sensibilidade com relação às condições iniciais. Uma definição precisa, devida a Guckenheimer [13] é:

uma função contínua $f : I \to I$ tem sensibilidade com relação às condições iniciais, se existe um conjunto $Y \subset I$ com medida de Lebesgue positiva e um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in Y$ e toda vizinhança U de x, existe um $y \in U$ e um inteiro $n \geq o$ tal que

$$| f^n(x) - f^n(y) | > \varepsilon.$$

Isto significa que a órbita de um ponto $y \in V(x)$ onde $V(x)$ é uma vizinhança de x arbitrariamente pequena, é muito diferente da órbita de x. Esta conceituação de sensibilidade é bastante informal. O termo "caos" inventado por Li-Yorke - [17], sugere uma imagem de trajetórias dinâmicas em verdadeira desordem. Sobre "caos" e "dependência sensível" existem os excelentes trabalhos de Kadanoff - [16] e Guckhenheimer - [13], respectivamente. O ponto fixo $x_* = (\lambda - 1) / \lambda$ é estável (atraindo todas as órbitas de $\bar{x} \in (0,1)$), se, e somente se, $1 < \lambda < 3$. Notamos assim que o comportamento dinâmico desta família é mais interessante quando $3 < \lambda < 4$. Para todo $\lambda \in (3,4)$, os dois pontos fixos 0 e x_* de f_λ são instáveis porque $f'_\lambda(o) = \lambda > 1$ e $f'_\lambda(x_*) = 2 - \lambda < -1$. Ainda conforme [17], para $\lambda < 4$ suficientemente perto de 4, existem ciclos (estáveis ou instáveis) com todo período inteiro ≥ 4, bem como um número incontável de órbitas que não são assintoticamente periódicas.

Se $f \in C^3(I,I)$, a derivada schwarziana de f em x, é definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 .$$

Julia - [15] provou que cada elemento da família logística (1) tem no máximo uma órbita periódica estável. Na literatura especializada, temos May - ([20]-pág. 462), sugerindo que é

plausível conjecturar que para todas as funções satisfazendo' as condições (1,2,3) e (4) $f''(x)<0$, $\forall\, x \in I$, o resultado de Julia é válido. Porém Singer-[26] provou que esta conjectura' só é verdadeira sob a hipótese da função satisfazer (1,2,3) e (5) $Sf(x) < 0$, $\forall\, x \in I$.

Também em [26], Singer exibiu a função

$$f(x) = 7,86\,x - 23,31\,x^2 + 28,75\,x^3 - 13,3\,x^4$$

que satisfaz as condições (1,2,3,5) dadas acima, mas possui duas órbitas periódicas estáveis. Neste caso temos, por exemplo, que $Sf(0,6) = 32,75 \ldots$.

Existem funções unimodais satisfazendo as condições (1, 2,3,6) que não têm órbitas periódicas estáveis. Temos o exemplo clássico $f(x) = 1-2x^2$ dado por Ulam e V. Newmann (1947), onde f é uma função unimodal de $[-1,1]$ em $[-1,1]$. Neste caso, temos $Sf(x) = (-3/2x^2) < 0$, se $x \neq 0$. Além disso f satisfaz as condições (1,3,4,5) (e também (2) se considerarmos $I = [-\sqrt{2}/2\ ,\ \sqrt{2}/2\,]$). Se f tiver uma órbita periódica estável, esta deverá atrair o único ponto crítico $c = 0$, pelo teorema de Singer, que enunciaremos abaixo. Mas a órbita de 0 é $(0,1,-1,-1,-1 \ldots)$ que converge para -1, e -1 é um ponto fixo instável, pois $f'(-1) = 4$.

Os teoremas abaixo, que apenas enunciaremos, são muito semelhantes.

Teorema 1. (Julia - [15]. Se $f_\lambda(x)$ é a restrição a $[0,1]$ de alguma função analítica no plano complexo tendo só um ponto crítico c_λ no intervalo, então a única órbita periódica estável possível é aquela que possui a propriedade J, isto é, que possui um ponto cuja vizinhança atrativa inclui o ponto $x = c_\lambda$.

Teorema 2. (Singer - [26]). Seja G o conjunto de todas as funções satisfazendo as condições (1,2,3) acima, tais que $S_f(x) < 0$, $\forall x \in I$. Então para toda $f \in G$ existe no máximo uma órbita periódica estável em (0,1). Se existir, ela é o ω-limite de c.

Cada função da família logística satisfaz a ambos os teoremas.

Em virtude dos teoremas de Julia e Singer, enunciados acima, podemos considerar as soluções λ da equação $f_\lambda^n(c_\lambda) = c_\lambda$. Então as órbitas periódicas correspondentes são estáveis (ou melhor, super-estáveis), porque $(f_\lambda^n)'(c_\lambda) = 0$. A estas órbitas associamos o itinerário maximal correspondente

$$\underline{I}(f(c_\lambda)) = I_0(f(c_\lambda))I_1(f(c_\lambda)) \ldots I_{n-2}(f(c_\lambda))I_{n-1}(f(c_\lambda)),$$

representado pela palavra

$$R\,L\,I_2\,I_3 \ldots I_{n-2}\,C$$

onde $I_j \in \{L,R\}$ para $j = 2,3, \ldots, n-2$.

Segundo C, E - ([8] - Seções I.4 e II.2), May [20] e M,S,S - [21], quando ocorre uma λ-bifurcação (tangente) para $\lambda = \lambda_1$, e "nasce" pela primeira vez uma órbita n-periódica estável, o seu tipo é dado pelo mini-max de período n. Já mostramos que se $R\,L\,I_2 \ldots I_{n-1}$ é o min-max de período n, então

$$R\,L\,I_2 \ldots I_{n-1} < R\,L\,I_2 \ldots I_{n-2}\,C < R\,L\,I_2 \ldots I_{n-2}\,\tilde{I}_{n-1}$$

onde $\tilde{I}_{n-1}$ é tal que $\tilde{R} = L$ e $\tilde{L} = R$. A sequência

$$R\,L\,I_2 \ldots I_{n-2}\,\tilde{I}_{n-1}$$

representa o mesmo tipo de órbita quando ela "morre" (perdendo a estabilidade), através de uma nova λ-bifurcação (harmônica) para $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$. A "janela" (termo introduzido por May [20])

correspondente a uma órbita periódica, é o intervalo (λ_1, λ_2) onde ela permanece estável. Após cada bifurcação tangente, segue (conforme [8, 20, 21]) uma infinidade de sucessivas bifurcações harmônicas, de modo que na janela de uma órbita, nenhum valor do parâmetro pode corresponder a outro tipo de órbita. As janelas ficam cada vez mais estreitas quando os períodos crescem. Por exemplo, para a família logística a janela do ponto fixo x_* é (1,3) e a da órbita de período 2 é (3,236 ... ; 3,498 ...). Portanto, de agora em diante usaremos sempre uma palavra do tipo $P = RLI_2 \ldots I_{n-2}\, C$, para representar uma órbita unimodal de período $n \geq 3$ em seu estágio super-estável. Lembramos que a recíproca também é verdadeira, pelo teorema II.1.4. Observemos ainda que $P = C$ se $n = 1$ e $P = RC$ se $n = 2$. Se f_λ é uma família bem comportada (por exemplo satisfazendo as condições (a,b,c)) de funções unimodais, sejam $\lambda_1 < \lambda_2$ soluções de $f^m_{\lambda_1}(c_{\lambda_1}) = c_{\lambda_1}$ e $f^n_{\lambda_2}(c_{\lambda_2}) = c_{\lambda_2}$ respectivamente, onde podemos ter $m = n \geq 4$ ou $m \neq n$ (com $m, n \geq 1$). Para esta família, podemos estabelecer o seguinte

Teorema 3. Sejam duas órbitas periódicas unimodais distintas, representadas pelas palavras

$$X_{\lambda_1} = RLX_1X_2 \ldots X_{m-3}\, C \quad \text{e} \quad Y_{\lambda_2} = RLY_1Y_2 \ldots Y_{n-3}\, C$$

tais que $X \lessdot Y$. Então, temos

$$X_L^\infty = (RLX_1X_2 \ldots X_{m-3}L)^\infty \lessdot Y \quad \text{e} \quad X_R^\infty = (RLX_1X_2 \ldots X_{m-3}R)^\infty \lessdot Y.$$

Prova. Quando X "nasce" (para $\lambda = \lambda'_1$) tem a forma X_L (ou X_R), e tem a forma X_R (ou X_L) quando "morre" (para $\lambda = \lambda''_1$), onde $\lambda'_1 < \lambda_1 < \lambda''_1$. Como $\lambda''_1 < \lambda_2$, isto é, λ_2 está à direita da janela $(\lambda'_1, \lambda''_1)$ da órbita X_{λ_1}, concluimos que X_L^∞, $X_R^\infty \lessdot Y$.

M,S,S - [21] realizaram estudos numéricos baseados em

várias famílias a um parâmetro de aplicações f_λ, e obtiveram para todas elas, a mesma sequência de períodos $n(\lambda)$ correspondentes às órbitas periódicas estáveis (quando existem) associadas a λ. A cada valor particular de λ (quando λ evolui em seu intervalo de definição) está associada no máximo uma órbita atratora de período $n(\lambda)$. Esta sequência de períodos $n(\lambda)$, que tem a mesma ordenação dos λ correspondentes, descreve a ordem de um conjunto de λ-bifurcações. Esta ordem comum de bifurcações com relação ao parâmetro descrita em [21], sugeriu um comportamento universal, isto é, o mesmo para todas as famílias de aplicações satisfazendo as condições (1,2,3,5). Por isso, em [21] a sequência λ-ordenada de períodos $n(\lambda)$ (ou das palavras correspondentes), foi chamada de U-sequência, que é formada apenas pelas órbitas unimodais n-periódicas estáveis que têm a propriedade J. Foi Guckenheimer - [11] quem provou que a ordem dos $n(\lambda)$ independe da família f_λ que satisfaz as condições (1, 2, 3) e (7) $f_{\lambda_{mín}} \equiv 0$ e $f_{\lambda_{máx}}(c_{\lambda_{máx}}) = 1$

As condições acima e $S_f(x) < 0$ são muito restritivas, mas servem para eliminar certas órbitas periódicas que embora estáveis, são anômalas, no sentido de que não possuem a propriedade J. Tais órbitas existem, conforme [21] - seção 6. A vantagem de se considerar famílias de funções que satisfazem as condições (1,2,3,6), é que neste caso todas as órbitas periódicas estáveis têm, conforme [21,26], a propriedade J. E a U-sequência é tão somente formada por elas.

Então as condições impostas (1,2,3,4) e $S_f(x) < 0$ não são estritamente necessárias, desde que admitamos certas transformações que possuam outras órbitas periódicas estáveis, além

das que compõem a U-sequência. A existência e estrutura das órbitas anômalas (que não têm a propriedade J) vai depender da particular família de aplicações considerada.

M,S,S - [21] obtiveram, por meio de computação eletrônica, a mesma U-sequência para as seguintes famílias de aplicações unimodais:

(a) $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$, $1 < \lambda < 4$

(b) $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen} \pi x$, $0{,}71 < \lambda < 1$

(c) $f_\lambda(x) = \lambda y(3-3y+y^2)$, $y = 3x(1-x)$, $0{,}872 < \lambda < 64/63$

(d) $$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x/a, & 0 \leq x \leq a \\ \lambda, & 0 \leq x \leq 1-a \\ \lambda(1-x)/a, & 1-a \leq x \leq 1, \end{cases}$$

com $1 - a < \lambda < 1$ e $0 < a < 0{,}5$. Aqui a permanece fixo enquanto λ varia, e diferentes escolhas de λ levam a transformações distintas.

É fácil mostrar que quando o parâmetro λ cresce, também cresce o valor máximo de f_λ, que é atingido no ponto crítico correspondente. Ou seja, se $\lambda_1 < \lambda_2$ então

$$f_{\lambda_1}(c_{\lambda_1}) < f_{\lambda_2}(c_{\lambda_2}),$$

onde c_{λ_1} e c_{λ_2} são os únicos pontos críticos de f_{λ_1} e f_{λ_2} respectivamente. Consideremos, por exemplo, as aplicações $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$. Neste caso, o único ponto crítico de f_λ é $c_\lambda = 1/2$ para todo $0 < \lambda \leq 4$, e temos

$$f_{\lambda_1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\lambda_1}{4} < \frac{\lambda_2}{4} = f_{\lambda_2}(\tfrac{1}{2}).$$

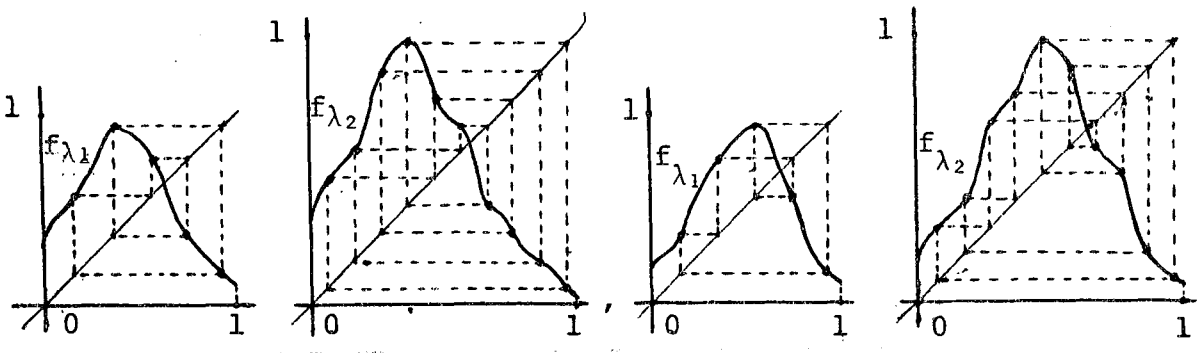
2. O HARMÔNICO E O ANTI-HARMÔNICO.

Extraímos de M,S,S - [21] as definições e o teorema 6 e 7 desta seção.

Definição 1. Seja P a palavra que corresponde a alguma solução de $f_\lambda^n(c_\lambda) = c_\lambda$, onde $\{f_\lambda\}$ é uma família de funções unimodais. Então o Harmônico de P é $H(P) = P'XP$, onde P' é P sem C, X = L se P é ímpar e X = R se P é par.

A construção do harmônico pode ser iterada, de modo que se pode falar do segundo, terceiro, ..., n-ésimo harmônico, etc. O j-ésimo harmônico de P, para $j \in \mathbb{N}^*$, será denotado por $H^j(P)$. Convencionemos que $H^0(P) = P$.

Os exemplos abaixo servem para visualizar o fato de que o primeiro harmônico de $P, H^1(P)$, representa a órbita proveniente de P por bifurcação harmônica. Aqui $\lambda_1 < \lambda_2 = bif(\lambda_1)$.



$P = RLR^2C \to H(P) = RLR^2L\ RLR^2C$, $P = RL^2RC \to H(P) = RL^2RRRL^2RC$

Quando o parâmetro em $f_\lambda(x)$ varia, e surge por bifurcação tangente um ciclo estável de período $k \geq 1$, então em seguida existe uma sequência infinita de ciclos estáveis de pe

ríodo $2^j k$ $(j \to \infty)$ que surgem sucessivamente por bifurcação harmônica. Uma simples e lúcida exposição deste fenômeno pode ser encontrada em May - [20]. Neste paper May mostra claramente que a "janela" dos valores do parâmetro na qual todo ciclo harmônico é estável diminui progressivamente, de modo que o processo inteiro é convergente, sendo limitado acima por um valor crítico do parâmetro. Se $k = 1$ e $f_\lambda(x)$ é a família logística, este valor crítico é 3,5700 ... . Além deste valor, nenhum ciclo de período 2^j é estável. É oportuno observar que no intervalo $(\lambda(k), \lambda_c)$ (onde $\lambda(k)$ é o valor do "nascimento do ciclo básico de período k e λ_c é o valor crítico de convergência), não existe região aperiódica. Entretanto, no paper consta a advertência de que aquele valor limite nem sempre existe, exemplificando com uma função $f : I \to I$, a dois parâmetros, definida por $f(x) = \lambda x(1 + x)^{-\beta}$.

Tendo em vista estas considerações, podemos destacar os dois seguintes resultados óbvios:

Teorema 1. Para qualquer palavra P, $P \lessdot H^1(P)$.

Prova. Podemos exibir uma prova direta. Se $P = C$ ou $P = RC$, temos respectivamente $H^1(P) = RC$ ou $H^1(P) = RLRC$. Também, se $P = RLC$ temos $P \lessdot H^1(P) = RLLRLC$. Suponhamos que $P = RLX_1X_2 \ldots X_kC = P'C$. Se P é par então $H^1(P) = RLX_1 \ldots X_k RRLX_1 \ldots X_kC = P'RP$, onde $P \lessdot H^1(P)$. Se P é ímpar temos que $P \lessdot H^1(P) = P'LP$.

Segue imediatamente deste resultado que $H^j(P) \lessdot H^{j+1}(P)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. Se P_1 e P_2 são palavras tais que $P_1 \lessdot P_2$ mas $P_2 \neq H^j(P_1)$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, então $H^j(P_1) \lessdot P_2$ para todo

$j \in \mathbb{N}$. Se $P_2 = H^k(P_1)$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$, então $H^j(P_1) \lessdot P_2$ para $j = 0, 1, \ldots, k-1$ mas $P_2 \lessdot H^j(P_1)$ para $j \geq k+1$.

Definição 2. O anti-harmônico $A(P)$ de uma palavra P é construído analogamente ao harmônico $H(P)$ exceto que agora $X = L$ se P é par e $X = R$ se P é ímpar.

É fácil ver que o anti-harmônico mantém a R-paridade de uma palavra P, enquanto o harmônico altera-a. A construção do anti-harmônico pode também ser iterada, de modo a obter-se o j-ésimo anti-harmônico de P, $A^j(P)$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Convencionemos que $A^0(P) = P$.

Os exemplos abaixo ilustram o fato de que o anti-harmônico é uma construção puramente formal e nunca corresponde a uma palavra que represente uma órbita unimodal periódica.

Seja $P = RLR^2C$. Então $A(P) = RLR^2RRLR^2C$, donde $\psi^5(A(P)) = RLR^2C \lessdot A(P)$ implica que $A(P)$ não é maximal. Pelo teorema II.1.4, não é unimodal. Se $P = RLRC$, temos que $A(P) = RLRLRLRC$ e $\psi^4(A(P)) = RLRC \lessdot A(P)$ também conduzem à não unimodalidade de $A(P)$. Em geral, seja $P = P'C$ uma palavra de comprimento $n \geq 1$ ($P = C$ se $n = 1$). Então, pela definição de anti-harmônico, temos que $A^1(P) = P'LP$ se P é par e que $A^1(P) = P'RP$ se P é ímpar. Em qualquer destes casos temos que $\psi^n(A^1(P)) = P = P'C \lessdot A^1(P)$, donde $A^1(P)$ não é maximal, e, pelo teorema II.1.4 também não é unimodal.

Definição 3. A H-extensão de uma palavra P é a sequência maximal gerada pela iteração da construção harmônica aplicada j vezes a P, onde j é arbitrariamente grande.

Definição 4. A A-extensão de uma palavra P é a sequência $A^j(P)$, onde j cresce indefinidamente. Na A-extensão temos $A^j(P) = A^{kj}(P)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Se P é uma palavra, sejam P_L e P_R as sequências obtidas de P pela substituição de C por L e R respectivamente. Então é fácil ver que

$$P_L \lessdot P \lessdot P_R \qquad \text{se } P \text{ é par}$$

e

$$P_R \lessdot P \lessdot P_L \qquad \text{se } P \text{ é ímpar.}$$

Por exemplo, se $P = RLLRC$, então

$$P_L = RLLRL \quad \text{e} \quad P_R = RLLRR.$$

Com estas representações de P_L e P_R, podemos estabelecer os dois seguintes teoremas:

Teorema 3. Seja P uma palavra. Então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que

$$H^n(P) = A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} P ,$$

onde os A_k's são dados sucessivamente por

$$A_{k+1} = A_{k-1}^2 A_k ,$$

sendo que

$$A_0 = P_R , \quad A_1 = P_L P_R \quad \text{se } P \text{ é par}$$

e

$$A_0 = P_L , \quad A_1 = P_R P_L \quad \text{se } P \text{ é ímpar.}$$

Prova. Suponhamos que a palavra P seja ímpar. Então temos, sucessivamente, que

$$H^1(P) = P_L P = A_0 P \qquad \text{é par,}$$

$$H^2(P) = P_L P_R P_L P = A_0 A_1 P \qquad \text{é ímpar,}$$

$$H^3(P) = P_L P_R P_L P_L P_L P_R P_L P = A_0 A_1 A_2 P \qquad \text{é par.}$$

$$\vdots$$

Isto deixa claro que $H^n(P)$ é par se $n \geq 1$ é ímpar e é ímpar se $n \geq 2$ é par. Suponhamos, por indução finita sobre n, que

$$H^n(P) = A_oA_1A_2 \ldots A_{n-1}P .$$

Então, se $n \geq 1$ é ímpar, temos

$$H^{n+1}(P) = H^1(H^n(P)) = (H^n(P))_R H^n(P) = A_oA_1 \ldots A_{n-1}P_RA_oA_1 \ldots A_{n-1}P.$$

Neste caso, se provarmos que $P_RA_oA_1 \ldots A_{n-1} = A_n$, teremos

$$H^{n+1}(P) = A_oA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nP = A_oA_1 \ldots A_{(n+1)-1}P .$$

Ora, se $n \geq 1$ é ímpar, então temos que

$$P_RA_o = A_1 \qquad \text{se} \qquad n = 1$$

e

$$P_RA_oA_1A_2 = A_1^2 A_2 = A_3 \qquad \text{se} \qquad n = 3,$$

donde, por indução (supondo $P_RA_oA_1 \ldots A_{n-1} = A_n$) obtemos

$$P_RA_oA_1 \ldots A_{n-1}A_nA_{n+1} = A_n^2A_{n+1} = A_{n+2} .$$

Agora provaremos por indução finita sobre $n \geq 2$ par, que $P_LA_oA_1 \ldots A_{n-1} = A_n$. De fato, temos que

$$P_LA_oA_1 = A_o^2 A_1 = A_2 \qquad \text{se} \qquad n = 2$$

e

$$P_LA_oA_1A_2A_3 = A_2^2 A_3 = A_4 \qquad \text{se} \qquad n = 4,$$

donde

$$P_LA_oA_1 \ldots A_{n-1}A_nA_{n+1} = A_n^2 A_{n+1} = A_{n+2}.$$

Logo, quando $n \geq 2$ é par temos

$$H^{n+1}(P) = H^1(H^n(P)) = (H^n(P))_L H^n(P) = A_oA_1 \ldots A_{n-1}P_LA_oA_1 \ldots A_{n-1}P =$$

$$= A_oA_1 \ldots A_{n-1}A_nP = A_oA_1A_2 \ldots A_{(n+1)-1}P .$$

Vamos omitir a prova para o caso onde P é uma palavra par, porque ela é, mutatis-mutandis, inteiramente análoga a esta, onde consideramos P ímpar.

Teorema 4. Seja P uma palavra. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

que

$$A^n(P) = P_L^{2^n-1}P \qquad \text{se} \quad P \quad \text{é par}$$

e

$$A^n(P) = P_R^{2^n-1}P \qquad \text{se} \quad P \quad \text{é ímpar.}$$

Prova. Suponhamos que a palavra P seja par. Então temos que

$$A^1(P) = P_L P = P_L^{2^1-1} P$$

e

$$A^2(P) = P_L P_L P_L P = (P_L)^3 P = P_L^{2^2-1} P \quad ,$$

pela definição de anti-harmônico. Agora suponhamos por indução que a fórmula é verdadeira para $n = k \geq 1$, isto é, que

$$A^k(P) = P_L^{2^k-1} P \, .$$

Afirmamos que ela é válida também para $n = k + 1 \geq 2$. De fato, temos

$$A^{k+1}(P) = A^1(A^k(P)) = (A^k(P))_L A^k(P) = P_L^{2^k-1} P_L P_L^{2^k-1} P$$

$$= P_L^{2^{k+1}-1} P \, .$$

Portanto, a fórmula é verdadeira para todo $n \geq 1$. Em particular, notamos que $A^0(P) = P$. Quando P é ímpar, a prova é inteiramente análoga e por isso vamos omití-la.

Podemos relacionar os harmônicos e os anti-harmônicos na forma do seguinte teorema.

Teorema 5. Sejam P e Q palavras tais que $P \lessdot Q$, representando órbitas periódicas de funções unimodais bem comportadas (como por exemplo satisfazendo as condições (1,2,3,4). Então temos as cadeias

$$P \lessdot H^1(P) \lessdot H^2(P) \lessdot \ldots \lessdot A^2(Q) \lessdot A^1(Q) \lessdot Q$$

e

$$\ldots \lessdot A^2(P) \lessdot A^1(P) \lessdot P \lessdot Q \lessdot H^1(P) \lessdot H^2(P) \lessdot \ldots .$$

Prova. Já sabemos que a sequência de harmônicos

$$P \lessdot H^1(P) \lessdot H^2(P) \lessdot \dots$$

não admite a intercalação entre eles de outro tipo de órbitas, e que é convergente, no sentido de que as janelas tendem a zero quando $n \to \infty$ em $H^n(P)$. É fácil ver que $H^j(P) \lessdot A^k(Q)$, $\forall j,k \in \mathbb{N}$. Basta então mostrarmos que $A^{n+1}(Q) \lessdot A^n(Q)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, no caso da primeira cadeia do enunciado. Se Q é par, temos, em vista do teorema 4, que

$$A^n(Q) = Q_L^{2^n-1}Q = Q_LQ_L \dots Q_LQ$$

e

$$A^{n+1}(Q) = Q_L^{2^{n+1}-1}Q = Q_LQ_L \dots Q_LQ_L \dots Q_LQ ,$$

donde $A^{n+1}(Q) \lessdot A^n(Q)$, pois o anti-harmônico mantém a R-paridade sob sucessivas iterações. Se Q é ímpar, o raciocínio é análogo. Assim, os harmônicos progridem e os anti-harmônicos regridem, no sentido da ordenação $\lessdot$. Agora, a segunda cadeia enunciada fica óbvia.

Na prática, não é necessário que $j \to \infty$, mas apenas que j seja suficientemente grande em $H^j(P)$ e em $A^j(P)$. Isto fica claro com o seguinte teorema.

Teorema 6. Seja $k \geq 1$ um inteiro. Consideremos a sequência ordenada completa de soluções de $f_\lambda^n(c_\lambda) = c_\lambda$ e suas palavras associadas para $1 \leq n \leq k$. Seja λ_1 qualquer destas soluções, com palavra P_1 e comprimento n_1, e seja $\lambda_2 > \lambda_1$ a solução "adjacente" (isto é, a próxima na ordem usual de $\mathbb{R}$), com palavra P_2 e comprimento n_2. Formemos a H-extensão de P_1 e a A-extensão de P_2. Lendo da esquerda para a direita, as duas extensões $H^j(P_1)$ e $A^j(P_2)$ terão uma subsequência comum P^* de maior comprimento $n^* - 1 \geq 1$, de modo que podemos escrever

$$H^j(P_1) = P^*X_1 \dots , \quad A^j(P_2) = P^*X_2 \dots ,$$

onde $X_1 \neq X_2$ e X_1 é uma das letras L ou R.

Caso 1. $n^* \geq 2n_1$. Então a solução λ^* de menor ordem tal que

$\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ é o harmônico de P_1.

Caso 2. $n^* < 2n_1$. Então a solução λ^* de menor ordem tal que $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ corresponde à palavra P^*C de comprimento n^* ($n^* > k$ necessariamente).

Uma simples consequência deste teorema é o

Teorema 7. Seja $|n_1 - n_2| = 1$ no teorema 6. Então a solução de menor ordem λ^*, com $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$, tem comprimento

$$n^* = 1 + \max \{n_1 , n_2\}.$$

Damos em seguida alguns exemplos de aplicação do teorema 6 e 7 acima.

(1). Sejam as palavras $P_1 = RLC$ e $P_2 = RL^2RLR^2LC$, onde $P_1 \lessdot P_2$. Neste caso $k = 9$ e comparamos
$H^3(P_1) = RL^2RLR^2L^2RL^2RL\underline{L}RLR^2L^2RLC$ com
$A(P_2) = RL^2RLR^2L^2RL^2RL\underline{R}RLC$. Na posição de discordância $n^* = 15$, temos $X_1 = L$ e $X_2 = R$. Estamos no caso 1, pois $n^* > 2n_1$. Temos então
$P^*C = RL^2RLR^2L^2RL^2RLC$ e como
$P_1 \lessdot H(P_1) = RL^2RLC \lessdot P^*C \lessdot P_2$, a solução λ^* de menor ordem tal que $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ é representada por $H(P_1)$.

(2). Se $P_1 = RLR^3LRC \lessdot P_2 = RLR^3C$, temos $k = 8$ e comparando
$H(P_1) = RLR^3LRLR\underline{L}R^3LRC$ com
$A(P_2) = RLR^3LRLR\underline{R}RC$,
obtemos $n^* = 10$. Mas como $n^* < 2n_1$, então pelo caso 2, a solução λ^* corresponde à palavra
$P^*C = RLR^3LRLRC$ tal que $P_1 \lessdot P^*C \lessdot P_2$.

(3) Sejam $P_1 = R\,L\,R^5\,C$ e $P_2 = R\,L\,R^6\,C$, onde $n_1 = 8$, $n_2 = 9$ e $P_1 \lessdot P_2$. É a situação descrita pelo teorema 7. Comparando as sequências

$H(P_1) = R\,L\,R^5\;R\,R\,\underline{L}\;R^5\;C$

e

$A(P_2) = R\,L\,R^6\;R\,\underline{R}\,L\,R^6\;C$,

obtemos $n^* = 10$. Então a solução λ^* de menor ordem tal que $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$, corresponde à palavra $P^*C = R\,L\,R^7\,C$, que satisfaz $P_1 \lessdot P^*C \lessdot P_2$.

Devemos fazer uma observação. A definição 1 afirma que o harmônico da palavra $P = P'C$ é a palavra $H(P) = P'X\,P$, onde $X = L$ ou $X = R$ conforme P seja ímpar ou par respectivamente. De fato, é fácil ver que $H(P)$ é maximal pois P é maximal. Daí, $H^j(P)$ também o é, para todo $j \geq 1$, inteiro. Portanto, a sequência admissível P^*C construída pelo teorema 6 é maximal, donde, pelo teorema II.1.4, representa uma órbita unimodal.

CAPITULO IV

EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII (ANTES DO 3)

1. ALGUNS RESULTADOS

Para qualquer família a um parâmetro de funções unimodais, vamos indicar por n_r o r-ésimo período $n \geq 1$ segundo a ordenação

$$n_1 \lessdot n_2 \lessdot n_3 \lessdot \ldots \lessdot n_{F(n)} ,$$

onde

$$F(n) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ímpar}}} \mu(d)\ 2^{n|d}$$

é a fórmula de Fine -[10]. Desta, podemos facilmente extrair as fórmulas

$$F(n) = \frac{1}{n}\,(2^{n-1} - 1) \quad \text{e} \quad F(n = 2^k) = 2^{2^k - k - 1}$$

nos casos especiais onde $n \geq 3$ é primo e $n \geq 1$ é uma potência de 2, respectivamente.

Quando a ordem não for essencial, indicaremos n_r apenas por n.

À luz dos teoremas III.1.1 (Julia) e III.1.2 (Singer), podemos fazer a seguinte adaptação do teorema II.2.4.

Teorema 1. A órbita de período n_1, onde $n = 2^j.k$ ($k \geq 1$ é ímpar e $j \in \mathbb{N}$), é representada pela palavra:

(a) $R^{*j} * R\,L\,R^{k-3}\,C$ se $j \geq 0$ e $k \geq 3$;

(b) $R^{*j} * C$ se $j \geq 0$ e $k = 1$.

Frequentemente indicaremos por $P(n_r)$ a palavra que corresponde ao período n_r. Se não houver risco de confusão,

ela será denotada por $P(n)$ ou simplesmente por P.

De acordo com as considerações acima, podemos extrair do teorema II.2.5 (Šarkovskii) (que é uma consequência dos teoremas II.2.1,2,3,4) o seguinte

Teorema 2. Se $k \geq 3$ é ímpar e $j \in \mathbb{N}$, então temos:

(a) $(2^j)_1 \lessdot (2^{j+1})_1$ (ou $R^{*j} * C \lessdot R^{*j} * RC$)

(b) $(2^j(k+2))_1 \lessdot (2^j k)_1$ (ou $R^{*j} * RLR^{k-1}C \lessdot R^{*j} * RLR^{k-3}C$)

(c) $(2^j)_1 \lessdot (2^j k)_1$ (ou $R^{*j} * C \lessdot R^{*j} * RLR^{k-3}C$).

Como um corolário deste teorema, temos o

Teorema 3. Os períodos n_r onde $n \geq 4$ e $r \geq 2$, satisfazem:

(a) $(2^{j+1})_1 \lessdot (2^j)_r$, se $j \geq 2$;

(b) $(2^j k)_1 \lessdot (2^j(k+2))_r$, se $j = 0,1,2$ e $k \geq 3$ é ímpar;

(c) $(2^j 3)_1 \lessdot (2^j)_r$, se $j \geq 2$.

Prova. A parte (a) é óbvia, porque a palavra $R^{*j} * RC$ representa a órbita obtida de $R^{*j} * C$ por bifurcação harmônica, e nenhum outro tipo de órbita pode existir entre elas.

Para provar a parte (c), escrevemos

$$P_1((2^j)_1) = R^{*j} * C = P_1' C$$

e

$$P_2((2^j.3)_1) = R^{*j} * RLC = P_1' X_1 X_2 \ldots X_{2^{j+1}} C,$$

onde $X_i \in \{L,R\}$ para $i = 1,2,\ldots,2^{j+1}$. Como $P_1 \lessdot P_2$, então $X_1 = R$ se P_1 é par (para $j \geq 2$ par) e $X_1 = L$ se P_1 é ímpar (para $j \geq 3$ ímpar). É claro que $(2^j)_1 \lessdot (2^j)_r$. Qualquer palavra $P((2^j)_r)$ só pode estar entre P_1 e P_2 se pos

sui a parte comum P_1' de P_1 e P_2, o que não possível se $r \geq 2$.

Quanto à prova da parte (b), é suficiente mostrar que não existe órbita unimodal com palavra do tipo $P((2^j(k+2)_r)$ entre as órbitas cujas palavras são $P_1((2^j(k+2))_1)$ e $P_2((2^j.k)_1)$. Temos que

$$P_1 = R^{*j} * R\,L\,R^{k-3}\ R\ R\ C = P_2'\ X_1 X_2 \ldots X_{2j+1}\,C$$

e

$$P_2 = R^{*j} * R\,L\,R^{k-3}\,C = P_2'\,C\ ,$$

onde P_2' é P_2 sem C. Então P só poderá estar entre P_1 e P_2 se for do tipo $P_2'\,Y_1\,Y_2 \ldots Y_{2j+1}\,C$. É fácil ver que P_2 é ímpar se $j \geq 0$ é par e que P_2 é par se $j \geq 1$ é ímpar, pois conforme a observação feita após o teorema II.2.2, o $*$-produto de R por uma palavra, inverte a sua R-paridade. Nestes casos temos que $Y_1 = X_1 = R$ e $Y_1 = X_1 = L$, respectivamente.

Como $P \neq P_1$, então para cada $j \geq 0$ inteiro, $2^{2^{j+1}-1}-1$ é o número (menos 1) de arranjos com repetição das letras L e R tomadas $2^{j+1}-1$ a $2^{j+1}-1$, e dá o número de sequências admissíveis P a serem consideradas na comparação com P_1 e P_2.

Se $j = 0$, temos

$$P_1 = R\,L\,R^{k-3}\ R\,R\,C\ ,$$

$$P = R\,L\,R^{k-3}\ R\,Y_2\,C$$

e

$$P_2 = R\,L\,R^{k-3}\,C\ ,$$

onde só é preciso analisar o caso $Y_2 = L$, no qual $P < P_1$. E terminamos este caso.

Se $j=1$, temos

$$P_1 = RLR^2(RL)^{k-3}\,RLRLRC\ ,$$

$$P = RLR^2(RL)^{k-3}\,RLY_2Y_3Y_4\,C$$

e

$$P_2 = RLR^2(RL)^{k-3}\,RC\ ,$$

onde devemos considerar os casos $X_2X_3X_4 = LLL,\ LLR,\ LRL$, $RLL,\ LRR,\ RRL$ e RRR. Ora, se $X_2 = L$ então $P \lessdot P_1$ e daí só nos resta analisar os casos onde $X_2 = R$ que são RLL, RRL e RRR. Daí, se $X_3 = R$ também temos $P \lessdot P_1$, restando apenas o caso RLL. Agora temos $P_1 \lessdot P \lessdot P_2$, mas como $\psi^{2k}(P) = RLLC \gtrdot P$, então P não é maximal e pelo teorema II.1.4 não é unimodal. Logo não existe órbita unimodal do tipo $P((2(k+2))_r)$ cuja palavra P satisfaz $P_1 \lessdot P \lessdot P_2$.

Se $j=2$, então devemos comparar

$$P_1 = RLR^2(RL)^2(RLR^2)^{k-3}RLR\,\underline{R}RL\,RRR\,LR\,C\ ,$$

$$P = RLR^2(RL)^2(RLR^2)^{k-3}RLR\,\underline{R}\,Y_2Y_3Y_4Y_5Y_6Y_7Y_8\,C$$

e

$$P_2 = RLR^2(RL)^2(RLR^2)^{k-3}RLR\,\underline{C}\ .$$

É necessário que $Y_2Y_3 = RL$ porque $P \lessdot P_1$ se $Y_2 = L$ e se $Y_2Y_3 = RR$. Se agora $Y_4 = L$, então $\psi^{4k}(P) = RLL\ldots C \gtrdot P$, embora $P_1 \lessdot P \lessdot P_2$. Já temos $Y_2Y_3Y_4 = RLR$. Se $Y_5 = L$ então $P \lessdot P_1$ e não é o que buscamos. Logo $Y_5 = R$. Se $Y_6 = L$ temos $P_1 \lessdot P \lessdot P_2$ e devemos considerar os casos $Y_7Y_8 = LL,\ RL$ e RR, para decidir. Continuando, se $Y_7 = L$ então $\psi^{4k+3}(P) = RLL\,Y_8C \gtrdot P$ e se $Y_7Y_8 = RL$ temos $\psi^{4k+5}(P) = RLC \gtrdot P$. Também, se $Y_7Y_8 = RR$ então $\psi^{4k+3}(P) = RLRRC \gtrdot P$. Agora já temos $Y_2Y_3Y_4Y_5Y_6 = RLRRR$. Se $Y_7 = R$ temos $P_1 \lessdot P \lessdot P_2$, mas os casos $X_8 = R$ e $X_8 = L$ dão respectivamente $\psi^{4k}(P) = RLRRRRC \gtrdot P$ e $\psi^{4k+5}(P) = RLC \gtrdot P$. Logo $X_7 = L$. Finalmente, se

$Y_8 = L$ então $P \lessdot P_1$. Mostramos que não existe órbita unimodal do tipo $P((2^2(k+2))_r)$ cuja palavra P seja tal que $P_1 \lessdot P \lessdot P_2$.

Queremos observar que mesmo no caso do teorema 3.(b) continuar valendo para $j \geq 3$, a prova por este processo é muito exaustiva.

Teorema 4. Se $k \geq 7$ é ímpar, então a órbita unimodal de período k_2 é representada pela palavra

$$P(k_2) = R\,L\,R^{k-5}\,L\,R\,C\,.$$

Prova. Já sabemos que $P(k_1) = R\,L\,R^{k-3}\,C$. Está claro que a segunda órbita unimodal de período k, $P(k_2)$, é a órbita de período k mais próxima de $P(k_1)$ tal que $P(k_1) \lessdot P(k_2)$. Precisamente, isto significa que para toda órbita $P(k_r) \neq P(k_1)$, temos $P(k_1) \lessdot P(k_2) \leq P(k_r)$. Por causa do comportamento dinâmico de uma família de funções unimodais a um parâmetro, e da dependência contínua destas funções com relação às condições iniciais, aquela maior proximidade significa que a primeira letra em $P(k_2)$ que difere da correspondente letra em $P(k_1)$, está o mais próximo possível de C. Isto é, as palavras $P(k_1)$ e $P(k_2)$ devem ter o máximo possível de letras (L ou R) coincidentes a partir do início.

Seja $P(k) = R\,L\,R^{k-4}\,L\,C$ uma sequência admissível. Como $P(k) \lessdot P(k_1)$, então $P(k)$ não é uma palavra, isto é, não representa uma órbita unimodal de período k. Seja a sequência admissível dada por $P(k) = R\,L\,R^{k-5}\,L\,X\,C$, onde $X \in \{L,R\}$. Se $X = L$, temos que $P(k_1) \lessdot P(k)$, mas como

$$\psi^{k-4}(P(k)) = R\,L\,L\,C \gtrdot P(k)\,,$$

$P(k)$ não é unimodal pelo teorema II.1.4. Se $X = R$ temos ainda $P(k_1) \lessdot P(k)$, mas agora

$$\psi^{k-4}(P(k)) = RLRC \lessdot P(k).$$

Portanto, encontramos a órbita procurada $P(k_2)$, cuja palavra é $P(k_2) = RLR^{k-5}LRC$.

Se $k = 5$, então $P(5_2) = RLLRC$, pois as palavras das três órbitas unimodais de período 5 têm a ordenação

$$P(5_1) = RLR^2C \lessdot P(5_2) = RL^2RC \lessdot P(5_3) = RL^3C.$$

2. UM TEOREMA QUE ESTENDE S (ANTES DO 3).

Usaremos especialmente o teorema III.2.6 (combinado com o teorema II.1.4), para obter uma extensão (antes do 3 no sentido da $\lessdot$-ordenação) da sequência original de Sarkovskii S.

Cada elemento (período) $n \in S$ deve ser entendido como n_1, conforme ficou estabelecido no capítulo II e no teorema IV.1.3.

A nossa extensão de S consistirá em intercalar $n_r \notin S$ entre (no sentido de $\lessdot$) dois períodos adjacentes quaisquer (exceto em $1 \lessdot 2 \lessdot 4_1 \lessdot 8_1 \lessdot \ldots$) $m_1, n_1 \in S$ tais que $m_1 \lessdot n_1$. Então ficará $m_1 \lessdot n_r \lessdot n_1$. Da mesma forma, intercalaremos períodos $n_{r'}$ entre n_r e n_1, $n_{r''}$ entre $n_{r'}$ e n_1, etc., e em seguida intercalaremos outros períodos entre n_r e $n_{r'}$ entre $n_{r'}$ e $n_{r''}$, etc..

Vamos começar a extensão intercalando períodos $n_r \notin S$

entre 5_1 e 3_1, mantendo a ordem $\lessdot$ acima. Temos que

$$P(5_1) = R\,L\,R^2C$$

e

$$P(3_1) = R\,L\,C.$$

Comparando

$$H(P(5_1)) = R\,L\,R^2L\,R\,\underline{L}\,R^2\,C$$

com

$$A^2(P(3_1)) = R\,L\,R^2L\,R\,\underline{R}\,L\,R^2L\,R\,C\ ,$$

obtemos a sequência finita comum de maior comprimento

$$P^* = R\,L\,R^2L\,R\ ,$$

que compõe a palavra

$$P(7) = R\,L\,R^2L\,R\,C$$

tal que

$$H(P(5_1)) \lessdot P(7) < A^2(P(3_1)).$$

Como

$$P(5_1) \lessdot H(P(5_1)) \quad \text{e} \quad A^2(P(3_1)) \lessdot P(3_1)\ ,$$

então pelo teorema III.2.6 temos que

$$P(5_1) \lessdot P(7) \lessdot P(3_1).$$

Assim, obtivemos a palavra $P(7)$ que representa uma órbita de período $7_r (r > 1)$ tal que $5_1 \lessdot 7_r \lessdot 3_1$.

Em seguida, vamos $\lessdot$-intercalar um período entre 7_r e 3_1, que não está em S, comparando

$$H(P(7_r)) = R\,L\,R^2L\,R^2\,\underline{R}\,L\,R^2L\,R\,C$$

com

$$A^2(P(3_1)) = R\,L\,R^2L\,R^2\,\underline{L}\,R^2\,L\,R\,C.$$

Obtemos então a palavra $P(8) = R\,L\,R^2L\,R^2\,C$ tal que

$$H(P(7_r)) \lessdot P(8) \lessdot A^2(P(3_1)),$$

representando uma órbita de período $8_{r'}\,(r' > 1)$ que satisfaz $7_r \lessdot 8_{r'} \lessdot 3_1$, ou seja, uma órbita de período 8 tal que $7 \lessdot 8 \lessdot 3$.

Continuando desta forma, podemos obter as $\lessdot$-intercalações das palavras

$P(10) = RLR^2LR^2LRC = R(LR^2)^2LRC$ entre $P(8)$ e $P(3)$,

$P(11) = RLR^2LR^2LR^2C = R(LR^2)^3C$ entre $P(10)$ e $P(3)$,

$P(13) = RLR^2LR^2LR^2LRC = R(LR^2)^3LRC$ entre $P(11)$ e $P(3)$,

$P(14) = R(LR^2)^4C$ entre $P(13)$ e $P(3)$,

$P(16) = R(LR^2)^4LRC$ entre $P(14)$ e $P(3)$,

etc. Observemos que se $X_i \in \{L,R\}$, então

$(X_1 X_2 \ldots X_n)^r$ significa $X_1 X_2 \ldots X_n \; X_1 X_2 \ldots X_n \ldots X_1 X_2 \ldots X_n$ (r fatores $X_1X_2\ldots X_n$) e nunca $X_1^r X_2^r \ldots X_n^r$.

As palavras acima representam, respectivamente, órbitas unimodais de períodos 7,8,10,11,13,14,16, ... Temos portanto a sequência $\lessdot$-ordenada de períodos

$$5_1 \lessdot 7 \lessdot 8 \lessdot 10 \lessdot 11 \lessdot 13 \lessdot 14 \lessdot 16 \lessdot \ldots \lessdot 3_1 ,$$

correspondente à sequência de palavras

$$P(5_1) \lessdot P(7) \lessdot P(8) \lessdot P(10) \lessdot P(11) \lessdot P(13) \lessdot \ldots \lessdot P(3_1).$$

Claramente, podemos observar a regularidade dos pares

$$(7 + 3s \lessdot 8 + 3s)$$

onde $s \in \mathbb{N}$, na sequência

$$(7 \lessdot 8) \lessdot (10 \lessdot 11) \lessdot (13 \lessdot 14) \lessdot (16 \lessdot 17) \lessdot \ldots .$$

Prosseguindo com a extensão, vamos agora intercalar períodos $n \notin S$ entre 7 e 8. Sempre usando o método fornecido pelo teorema III.2.6, obtemos sucessivamente

$$7 \lessdot 9 \lessdot 8 \; ; \quad P(9) = RLR^2LR^3C ,$$

$$7 \lessdot 9 \lessdot 10 \lessdot 8 \; ; \quad P(10) = RLR^2LR^4C ,$$

$$7 \lessdot 9 \lessdot 11 \lessdot 10 \lessdot 8 \; ; \quad P(11) = RLR^2LR^5C ,$$

$$7 \lessdot 9 \lessdot 11 \lessdot 12 \lessdot 10 < 8 \;;\quad P(12) = R\,L\,R^2 L\,R^6\;C,$$

$$\vdots$$

$$7 \lessdot 9 \lessdot 11 \lessdot \ldots \lessdot 7+2(i-1) \lessdot \ldots \lessdot 8+2(i-1) \lessdot \ldots \lessdot 12 \lessdot 10 \lessdot 8 \;;$$

onde $i \in \mathbb{N}^*$,

$$P(7+2(i-1)) = R\,L\,R^2 L\,R^{2i-1}\,C\,,$$

e

$$P(8+2(i-1)) = R\,L\,R^2 L\,R^{2i}\,C = R(L\,R^2)^2\;R^{2(i-1)}\,C\,.$$

Convencionemos que quando ocorrer a expressão R^0, esta deverá ser ignorada.

Analogamente, entre $10, 11 \notin S$, podemos também intercalar períodos $n \notin S$ segundo a sequência

$$10 \lessdot 12 \lessdot 14 \lessdot \ldots \lessdot 10+2(i-1) \lessdot \ldots \lessdot 11+2(i-1) \lessdot \ldots \lessdot 15 \lessdot 13 \lessdot 11,$$

onde

$$P(10 + 2(i-1) = R(L\,R^2)^2\;L\,R^{2i-1}\;C$$

e

$$P(11 + 2(i-1) = R(L\,R^2)^3\;R^{2(i-1)}\;C.$$

E assim por diante, podemos $\lessdot$-intercalar entre 5_1, $3_1 \in S$, a sequência genérica $E_{3,k}$ dada por

$$3k-2 \lessdot 3k \lessdot 3k+2 \lessdot \ldots \lessdot 3k+2(i-2) \lessdot \ldots$$

$$\ldots \lessdot 3k+2i-3 \lessdot \ldots \lessdot 3k+3 \lessdot 3k+1 \lessdot 3k-1,$$

onde $k \geq 3$ é inteiro, na qual

$$P(3k+2(i-2) = R(L\,R^2)^{k-2}\;L\,R^{2i-1}\;C$$

e

$$P(3k+2i-3) = R(L\,R^2)^{k-1}\;R^{2(i-1)}\;C.$$

É notável o aspecto da sequência $E_{3,k}$ onde os períodos da forma $3k+2(i-2)$ (na metade esquerda) crescem quando i

cresce, enquanto os períodos da forma $3k + 2i - 3$ (na metade direita) decrescem quando i decresce. Assim, podemos representá-la mais cômodamente sob a forma

$$E_{3,k} = (3k + 2(i-2))_{i=1}^{\infty} \lessdot (3k + 2i - 3)_{i=\infty}^{1} ,$$

onde temos para $i' = i + 1$,

$$3k + 2(i-2) \lessdot 3k + 2(i'-2) \quad \text{e} \quad 3k + 2i' - 3 \lessdot 3k + 2i - 3.$$

Além disso, temos que $E_{3,k} \lessdot E_{3,k+1}$. Todas estas afirmações serão provadas no teorema 1 desta seção. Explicitamente, as sequências

$$E_{3,3} = 7 \lessdot 9 \lessdot 11 \lessdot \ldots \lessdot 12 \lessdot 10 \lessdot 8 ,$$

$$E_{3,4} = 10 \lessdot 12 \lessdot 14 \lessdot \ldots \lessdot 15 \lessdot 13 \lessdot 11 ,$$

$$E_{3,5} = 13 \lessdot 15 \lessdot 17 \lessdot \ldots \lessdot 18 \lessdot 16 \lessdot 14 ,$$

$$E_{3,6} = 16 \lessdot 18 \lessdot 20 \lessdot \ldots \lessdot 21 \lessdot 19 \lessdot 17 ,$$

$$\vdots$$

estão ordenadas do modo

$$5_1 \lessdot E_{3,3} \lessdot E_{3,4} \lessdot E_{3,5} \lessdot E_{3,6} \lessdot \ldots \lessdot E_{3,k} \lessdot \ldots \lessdot 3_1 ,$$

e descrevem uma extensão de S entre $5_1 \lessdot 3_1$.

Com um procedimento semelhante, podemos intercalar entre 7_1, $5_1 \in S$ a sequência genérica $E_{5,k}$ dada por

$$5k - 6 \lessdot 5k - 4 \lessdot 5k - 2 \lessdot \ldots \lessdot 5k + 2(i-4) \lessdot \ldots$$

$$\ldots \lessdot 5k + 2i - 5 \lessdot \ldots \lessdot 5k + 1 \lessdot 5k - 1 \lessdot 5k - 3,$$

ou por

$$E_{5,k} = (5k + 2(i-4))_{i=1}^{\infty} \lessdot (5k + 2i - 5)_{i=\infty}^{1}$$

na qual temos $E_{5,k} \lessdot E_{5,k+1}$ e, para $i' = i+1$,

$$5k+2(i-4) \lessdot 5k+2(i'-4) \quad \text{e} \quad 5k+2i'-5 \lessdot 5k+2i-5 .$$

As palavras referentes aos períodos em $E_{5,k}$ são

$$P(5k+2(i-4)) = R(LR^4)^{k-2}\, LR^{2i-1}\, C$$

e

$$P(5k+2i-5) = R(LR^4)^{k-1}\, R^{2(i-1)}\, C.$$

Agora, temos uma extensão de S entre 7_1 e 5_1 dada por

$$7_1 \lessdot E_{5,3} \lessdot E_{5,4} \lessdot E_{5,5} \lessdot \ldots \lessdot E_{5,k} \lessdot \ldots \lessdot 5_1 ,$$

onde

$$E_{5,3} = 9 \lessdot 11 \lessdot 13 \lessdot \ldots \lessdot 16 \lessdot 14 \lessdot 12 ,$$

$$E_{5,4} = 14 \lessdot 16 \lessdot 18 \lessdot \ldots \lessdot 21 \lessdot 19 \lessdot 17 ,$$

$$E_{5,5} = 19 \lessdot 21 \lessdot 23 \lessdot \ldots \lessdot 26 \lessdot 24 \lessdot 22 ,$$

$$\vdots$$

Para percebermos melhor o processo indutivo desta extensão de S, vamos repetir o método mais uma vez para intercalar a sequência de períodos

$$E_{7,k} = (7k+2(i-6))_{i=1}^{\infty} \lessdot (7k+2i-7)_{i=\infty}^{1} ,$$

cuja forma explícita é (para $k \geq 3$)

$$7k-10 \lessdot 7k-8 \lessdot \ldots \lessdot 7k+2(i-6) \lessdot \ldots$$

$$\ldots \lessdot 7k+2i-7 \lessdot \ldots \lessdot 7k-3 \lessdot 7k-5 ,$$

entre 9_1, $7_1 \in S$. Assim também temos que $E_{7,k} \lessdot E_{7,k+1}$ e, para $i' = i+1$,

$$7k+2(i-6) \lessdot 7k+2(i'-6) \quad \text{e} \quad 7k+2i'-7 \lessdot 7k+2i-7$$

As sequências $E_{7,k}$ são

$$E_{7,3} = 11 \lessdot 13 \lessdot 15 \lessdot \ldots \lessdot 20 \lessdot 18 \lessdot 16 ,$$

$$E_{7,4} = 18 \lessdot 20 \lessdot 22 \lessdot \ldots \lessdot 27 \lessdot 25 \lessdot 23 ,$$

$$E_{7,5} = 25 \lessdot 27 \lessdot 29 \lessdot \ldots \lessdot 34 \lessdot 32 \lessdot 30 ,$$

$$\vdots$$

Portanto, em geral, podemos intercalar entre os períodos $(2\ell+3)_1$, $(2\ell+1)_1 \in S$ da subsequência de S formada pelos períodos ímpares n_1 onde $n = 2\ell+1$ e $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\ldots \lessdot (2\ell+3)_1 \lessdot (2\ell+1)_1 \lessdot \ldots \lessdot 9_1 \lessdot 7_1 \lessdot 5_1 \lessdot 3_1 ,$$

a sequência genérica

$$(2\ell+1)k-2(2\ell-1) \lessdot (2\ell+1)k-2(2\ell-2) \lessdot \ldots \lessdot (2\ell+1)k-2(2\ell-i) \lessdot \ldots$$

$$\ldots \lessdot (2\ell+1)k+2i-(2\ell+1) \lessdot \ldots \lessdot (2\ell+1)k-(2\ell-3) \lessdot (2\ell+1)k-(2\ell-1),$$

ou

$$E_{2\ell+1,k} = \left[(2\ell+1)k-2(2\ell-i)\right]_{i=1}^{\infty} \lessdot \left[(2\ell+1)k+2i-(2\ell+1)\right]_{i=\infty}^{1}$$

$$= \left[2\ell(k-2)+k+2i\right]_{i=1}^{\infty} \lessdot \left[2\ell(k-1)+k+2i-1\right]_{i=\infty}^{1} ,$$

cujas palavras são

$$P(2\ell(k-2)+k+2i) = R(L R^{2\ell})^{k-2} L R^{2i-1} C .$$

e

$$P(2\ell(k-1)+k+2i-1) = R(L R^{2\ell})^{k-1} R^{2(i-1)} C .$$

As sequências $E_{2\ell+1,k}$ são tais que

$$E_{2\ell+1,k} \lessdot E_{2\ell+1,k+1} ,$$

e em cada uma delas (onde $2\ell+1$ é fixo) temos

$$2\ell(k-2)+k+2i \lessdot 2\ell(k-2)+k+2i' .$$

e

$$2\ell(k-1)+k+2i'-1 \lessdot 2\ell(k-1)+k+2i\ .$$

Escrevendo-as, uma por uma, fica

$$E_{2\ell+1,3} = 2\ell+5 \lessdot 2\ell+7 \lessdot 2\ell+9 \lessdot \ldots \lessdot 4\ell+8 \lessdot 4\ell+6 \lessdot 4\ell+4\ ,$$

$$E_{2\ell+1,4} = 4\ell+6 \lessdot 4\ell+8 \lessdot 4\ell+10 \lessdot \ldots \lessdot 6\ell+9 \lessdot 6\ell+7 \lessdot 6\ell+5\ ,$$

$$E_{2\ell+1,5} = 6\ell+7 \lessdot 6\ell+9 \lessdot 6\ell+11 \lessdot \ldots \lessdot 8\ell+10 \lessdot 8\ell+8 \lessdot 8\ell+6\ ,$$

$$\vdots$$

Está completa a extensão que pretendíamos fazer na subsequência de S formada pelos períodos ímpares n_1 tais que $n = 2^0(2\ell+1) \geq 3$.

Fazendo o mesmo com relação à subsequência dos $n_1 \in S$ tais que $n = 2^1(2\ell+1)$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, ou seja, em

$$\ldots \lessdot (2^1(2\ell+3))_1 \lessdot (2^1(2\ell+1))_1 \lessdot \ldots \lessdot (2^1 7)_1 \lessdot (2^1 5)_1 \lessdot (2^1 3)_1\ ,$$

obtemos a sequência genérica

$$2^1(2\ell+1)k-2^2(2\ell-1) \lessdot 2^1(2\ell+1)k-2^2(2\ell-2) \lessdot \ldots \lessdot 2^1(2\ell+1)k-2^2(2\ell-i) \lessdot \ldots$$

$$\ldots \lessdot 2^1(2\ell+1)k+2^2i-2^1(2\ell+1) \lessdot \ldots \lessdot 2^1(2\ell+1)k-2^1(2\ell+3) \lessdot 2^1(2\ell+1)k-2^1(2\ell-1),$$

ou

$$E_{2^1(2\ell+1),k} = 2^1\left[2\ell(k-2)+k+2i\right]_{i=1}^{\infty} \lessdot 2^1\left[2\ell(k-1)+k+2i-1\right]_{i=\infty}^{1}$$

entre $(2^1(2\ell+3))_1$, $(2^1(2\ell+1))_1 \in S$,

cujas palavras são

$$P(2^1(2\ell(k-2)+k+2i)) = A_0\, A_1 (A_2\, A_1^{2\ell-1})^{k-2}\, A_2\, A_1^{2(i-1)}\, C$$

e

$$P(2^1(2\ell(k-1)+k+2i-1)) = A_0\, A_1 (A_2\, A_1^{2\ell-1})^{k-1} A_1^{2(i-1)}\, C\ ,$$

onde

$$A_0 = R\ ,\quad A_1 = LR \quad \text{e} \quad A_2 = R^2 L R = A_0^2 A_1\ .$$

Convencionemos que A_1^0 deve ser ignorado.

Para as sequências $E_{2^1(2\ell+1),k}$ ($2^1(2\ell+1)$ é fixo)

$$E_{2^1(2\ell+1),3} = 2^1(2\ell+5) \lessdot 2^1(2\ell+7) \lessdot \ldots \lessdot 2^1(4\ell+6) \lessdot 2^1(4\ell+4) \quad ,$$

$$E_{2^1(2\ell+1),4} = 2^1(4\ell+6) \lessdot 2^1(4\ell+8) \lessdot \ldots \lessdot 2^1(6\ell+7) \lessdot 2^1(6\ell+5) \quad ,$$

$$E_{2^1(2\ell+1),5} = 2^1(6\ell+7) \lessdot 2^1(6\ell+9) \lessdot \ldots \lessdot 2^1(8\ell+8) \lessdot 2^1(8\ell+6) \quad ,$$

$$\vdots$$

valem as relações

$$E_{2^1(2\ell+1),k} \lessdot E_{2^1(2\ell+1),k+1},$$

$$2^1(2\ell(k-2)+k+2i) \lessdot 2^1(2\ell(k-2)+k+2i')$$

e

$$2^1(2\ell(k-1)+k+2i'-1) \lessdot 2^1(2\ell(k-1)+k+2i-1).$$

Analogamente, podemos intercalar entre os períodos

$$(2^2(2\ell+3))_1 \quad \text{e} \quad (2^2(2\ell+1))_1$$

da subsequência de S formada pelos períodos n_1 tais que $n = 2^2(2\ell+1)$, a sequência arbitrária

$$2^2(2\ell+1)k-2^3(2\ell-1) \lessdot 2^2(2\ell+1)k-2^3(2\ell-2) \lessdot \ldots \lessdot 2^2(2\ell+1)k-2^3(2\ell-i) \lessdot \ldots$$

$$\ldots \lessdot 2^2(2\ell+1)k+2^3i-2^2(2\ell+1) \lessdot \ldots \lessdot 2^2(2\ell+1)k-2^2(2\ell-3) \lessdot 2^2(2\ell+1)k-2^2(2\ell-1)$$

ou

$$E_{2^2(2\ell+1),k} = 2^2\left[2\ell(k-2)+k+2i\right]_{i=1}^{\infty} \lessdot 2^2\left[2\ell(k-1)+k+2i-1\right]_{i=\infty}^{1} \quad ,$$

tal que

$$E_{2^2(2\ell+1),k} \lessdot E_{2^2(2\ell+1),k+1}$$

e cujas palavras de seus períodos são.

$$P(2^2(2\ell(k-2)+k+2i)) = A_0\, A_1\, A_2\, (A_3\, A_2^{2\ell-1})^{k-2} A_3\, A_2^{2(i-1)}\, C$$

$$P(2^2(2\ell(k-1) + k+2i-1)) = A_0\, A_1\, A_2\, (A_3\, A_2^{2\ell-1})^{k-1}\, A_2^{2(i-1)}\, C$$

onde $A_0 = R$, $A_1 = LR$, $A_2 = A_0^2 A_1$ e $A_3 = A_1{}^2 A_2$.

Estas sequências $E_{2^2(2\ell+1),k}$, que estendem a subsequência dos períodos $n_1 = (2^2(2\ell+1))_1 \in S$,

$$\ldots < (2^2(2\ell+3))_1 < (2^2(2\ell+1))_1 < \ldots < (2^2.7)_1 < (2^2.5)_1 < (2^2.3)_1,$$

são

$$E_{2^2(2\ell+1),3} = 2^2(2\ell+5) < 2^2(2\ell+7) < \ldots < 2^2(4\ell+6) < 2^2(4\ell+4),$$

$$E_{2^2(2\ell+1),4} = 2^2(4\ell+6) < 2^2(4\ell+8) < \ldots < 2^2(6\ell+7) < 2^2(6\ell+5),$$

$$\vdots$$

e satisfazem

$$2^2(2\ell(k-2) + k+2i) < 2^2(2\ell(k-2) + k+2i')$$

e

$$2^2(2\ell(k-1) + k+2i'-1) < 2^2(2\ell(k-1) + k+2i-1).$$

Generalizando, podemos intercalar a sequência genérica

$$E_{2^j(2\ell+1),k} = 2^j[2\ell(k-2)+k+2i]_{i=1}^{\infty} < 2^j[2\ell(k-1)+k+2i-1]_{i=\infty}^{1}$$

dada por

$$2^j(2\ell+1)k-2^{j+1}(2\ell-1) < 2^j(2\ell+1)k-2^{j+1}(2\ell-2) < \ldots$$

$$< 2^j(2\ell+1)k-2^{j+1}(2\ell-1) < \ldots$$

$$\ldots < 2^j(2\ell+1)k-2^j(2\ell-(2i-1)) < \ldots < 2^j(2\ell+1)k-2^j(2\ell-3) < 2^j(2\ell+1)k-2^j(2\ell-1),$$

entre os períodos $(2^j(2\ell+3))_1$ e $(2^j(2\ell+1))_1$ da subsequência de S formada pelos períodos n_1 tais que $n = 2^j(2\ell+1)$, $j \in \mathbb{N}^*$. Esta subsequência de S é

$$\ldots < (2^j(2\ell+3))_1 < (2^j(2\ell+1))_1 < \ldots < (2^j.7)_1 < (2^j.5)_1 < (2^j.3)_1,$$

As palavras correspondentes aos períodos de $E_{2^j(2\ell+1),k}$ são

$$P(2^j(2\ell(k-2)+k+2i)) = A_0\, A_1 \ldots A_j (A_{j+1} A_j^{2\ell-1})^{k-2} A_{j+1} A_j^{2(i-1)}\, C$$

e

$$P(2^j(2\ell(k-1)+k+2i-1)) = A_0\, A_1 \ldots A_j (A_{j+1} A_j^{2\ell-1})^{k-1} A_j^{2(i-1)}\, C\,,$$

onde $A_0 = R$, $A_1 = LR$ e $A_{j+1} = A_{j-1}^2 A_j$, com a convenção de que A_j^0 deve ser ignorado. Temos ainda que

$$E_{2^j(2\ell+1),k} \lessdot E_{2^j(2\ell+1),k+1}\,,$$

$$2^j(2\ell(k-2)+k+2i) \lessdot 2^j(2\ell(k-2)+k+2i')\,,$$

$$2^j(2\ell(k-1)+k+2i'-1) \lessdot 2^j(2\ell(k-1)+k+2i-1)$$

e as sequências $E_{2^j(2\ell+1),k}$ são

$$E_{2^j(2\ell+1),3} = 2^j(2\ell+5) \lessdot 2^j(2\ell+7) \lessdot \ldots \lessdot 2^j(4\ell+6) \lessdot 2^j(4\ell+4)\,,$$

$$E_{2^j(2\ell+1),4} = 2^j(4\ell+6) \lessdot 2^j(4\ell+8) \lessdot \ldots \lessdot 2^j(6\ell+7) \lessdot 2^j(6\ell+5)\,,$$

$$\vdots$$

É fácil ver que esta generalização ainda vale quando $j=0$, isto é, o caso dos períodos ímpares $n = 2^0(2\ell+1)$ enquadra-se neste caso geral. De fato, temos que

$$P(2^0(2\ell(k-2)+k+2i)) = A_0(A_1\, A_0^{2\ell-1})^{k-2} A_1\, A_0^{2(i-1)}\, C =$$

$$= R(LRR^{2\ell-1})^{k-2} LRR^{2(i-1)}\, C$$

$$= R(LR^{2\ell})^{k-2} LR^{2i-1}\, C$$

e

$$P(2^0(2\ell(k-1)+k+2i-1)) = A_0(A_1\, A_0^{2\ell-1})^{k-1} A_0^{2(i-1)}\, C$$

$$= R(LR^{2\ell})^{k-1} R^{2(i-1)}\, C\,,$$

são as palavras relativas aos períodos de

$$E_{2^0(2\ell+1),k} = 2^0\left[(2\ell(k-2)+k+2i)\right]_{i=1}^{\infty} \lessdot 2^0\left[(2\ell(k-1)+k+2i-1\right]_{i=\infty}^{1}.$$

Portanto, em resumo, a nossa extensão de S antes do 3 fica assim: entre dois períodos (não incluídos os harmônicos 2^j) quaisquer $2^j(2\ell+3) \lessdot 2^j(2\ell+1)$ de S, onde $j \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \mathbb{N}^*$, intercalamos sucessivamente infinitas sequências do tipo cresce-decresce (em relação ao tamanho dos períodos)

$$\{1\}\ E_{2^j(2\ell+1),k} = 2^j\left[2\ell(k-2)+k+2i\right]_{i=1}^{\infty} \lessdot 2^j\left[2\ell(k-1)+k+2i-1\right]_{i=\infty}^{1}$$

onde $k = 3,4,5,\ldots$ e $i \in \mathbb{N}^*$,

cujas palavras são

$$\{2\}\ P(2^j(2\ell(k-2)+k+2i)) = A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-2} A_{j+1}A_j^{2(i-1)} C$$

e

$$\{3\}\ P(2^j(2\ell(k-1)+k+2i-1)) = A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-1} A_j^{2(i-1)} C,$$

com a convenção de que devemos ignorar a expressão A_j^0.

Para simplificar as notações adotadas nas expressões {1}, {2} e {3} acima, vamos representá-las, respectivamente, por

$$\{1\}'\ E_{j,\ell,k} = (E^e_{j,\ell,k,i})_{i=1}^{\infty} \lessdot (E^d_{j,\ell,k,i})_{i=\infty}^{1},$$

$$\{2\}'\ P(E^e_{j,\ell,k,i}) = A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-2} A_{j+1}A_j^{2(i-1)} C,$$

e

$$\{3\}'\ P(E^d_{j,\ell,k,i}) = A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-1} A_j^{2(i-1)} C,$$

onde o <u>e</u> significa esquerda e o <u>d</u> direita. Explicitamente, cada $E_{j,\ell,k}$ (ou $E_{j,\ell,k,i}$) tem a forma,

$$E^e_{j,\ell,k,1} \lessdot E^e_{j,\ell,k,2} \lessdot \ldots \lessdot E^d_{j,k,\ell,2} \lessdot E^d_{j,\ell,k,1} .$$

A nossa extensão de S antes do 3 pode agora ser representada pela matriz infinita

$$E_S = (E_{j,\ell,k}) ,$$

cujos índices $j \geq 0$, $\ell \geq 1$, $k \geq 3$ e $i \geq 1$ (implícito) estão ordenados lexicograficamente. Assim, temos

$$E_S = \begin{array}{r} 5_1 \lessdot \\ 7_1 \lessdot \\ \\ 10_1 \lessdot \\ 14_1 \lessdot \\ \\ 20_1 \lessdot \\ 28_1 \lessdot \\ \\ (2^j.5)_1 \lessdot \\ (2^j.7))_1 \lessdot \\ \\ (2^j(2\ell+3)_1 \lessdot \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{o,1,3} & \lessdot & E_{o,1,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{o,1,k} & \lessdot & \ldots \\ E_{o,2,3} & \lessdot & E_{o,2,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{o,2,k} & \lessdot & \ldots \\ & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_{1,1,3} & \lessdot & E_{1,1,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{1,1,k} & \lessdot & \ldots \\ E_{1,2,3} & \lessdot & E_{1,2,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{1,2,k} & \lessdot & \ldots \\ & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_{2,1,3} & \lessdot & E_{2,1,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{2,1,k} & \lessdot & \ldots \\ E_{2,2,3} & \lessdot & E_{2,2,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{2,2,k} & \lessdot & \ldots \\ & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{bmatrix} E_{j,1,3} & \lessdot & E_{j,1,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{j,1,k} & \lessdot & \ldots \\ E_{j,2,3} & \lessdot & E_{j,2,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{j,2,k} & \lessdot & \ldots \\ & & & \vdots & & & & \\ E_{j,\ell,3} & \lessdot & E_{j,\ell,4} & \lessdot \ldots & \lessdot & E_{j,\ell,k} & \lessdot & \ldots \\ & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \lessdot 3_1 \\ \lessdot 5_1 \\ \\ \lessdot 6_1 \\ \lessdot 10_1 \\ \\ \lessdot 12_1 \\ \lessdot 20_1 \\ \\ \lessdot (2^j.3)_1 \\ \lessdot (2^j.5)_1 \\ \\ \lessdot (2^j(2\ell+1))_1 \\ \\ \end{array}$$

Precisamos de um mecanismo para determinar a R-paridade das palavras $\{2\}'$ e $\{3\}'$. Mas isto é fácil. De fato, como os A_j's

$$A_o = R, \; A_1 = L\,R, \; A_2 = R^2(L\,R) = A_o^2 A_1, \ldots, A_{j+1} = A_{j-1}^2 \; A_j$$

são todos ímpares, então basta notar que a expressão $A_o\,A_1 \ldots A_j$

é par se $j \geq 1$ é ímpar e é ímpar se $j \geq 0$ é par. Isto porque é óbvia a R-paridade das expressões restantes em ambas as palavras. Além disso, notamos que A_j começa com R se j é par e começa com L se j é ímpar.

Agora vamos escrever as palavras de $2^j(2\ell + 3)_1$, $2^j(2\ell + 1)_1 \in S$ em função dos A_j's para obtermos maior comodidade na demonstração do teorema 1. Ora, já temos que

$$P((2^j(2\ell + 1))_1) = R^{*j} * R\,L\,R^{2(\ell-1)}\,C.$$

Neste caso, P é par se j é ímpar e é ímpar de j é par. Se $j = 0$, então

$$P((2\ell + 1)_1) = R\,L\,R^{2(\ell-1)}\,C = R(L\,R)^{2\ell-3}C = A_0 A_1 A_0^{2\ell-3}\,C\,.$$

Se $j = 1$, temos

$$P((2^1(2\ell + 1))_1) = R\,L\,R\,R\,(R\,L)^{2(\ell-1)}\,R\,C = R(LR)\,(R^2LR)\,(LR)^{2\ell-3}\,C$$
$$= A_0 A_1 A_2 A_1^{2\ell-3}\,C\,.$$

E em geral, podemos obter por indução

{4} $P((2^j(2\ell + 1))_1) = A_0\,A_1\,\ldots\,A_j\,A_{j+1}\,A_j^{2\ell-3}\,C$,

e daí, {5} $P((2^j(2\ell + 3))_1) = A_0\,A_1\,\ldots\,A_j\,A_{j+1}\,A_j^{2\ell-1}\,C$.

Finalmente, podemos estabelecer o seguinte teorema, que garante a extensão E_S de S.

Teorema 1. Sejam os períodos $(2^j(2\ell + 3))_1$, $(2^j(2\ell + 1))_1 \in S$, representados pelas palavras {5} e {4} respectivamente. Então, entre eles podemos intercalar períodos de E_S numa ordenação dada por :

(1) $(2^j(2\ell + 3))_1 \lessdot E^e_{j,\ell,3,1}$;

(2) $E^e_{j,\ell,k,i} \lessdot E^e_{j,\ell,k,i+1}$;

(3) $E^e_{j,\ell,k,i\to\infty} \lessdot E^d_{j,\ell,k,i\to\infty}$;

(4) $E^d_{j,\ell,k,i+1} \lessdot E^d_{j,\ell,k,i}$;

(5) $E^d_{j,\ell,k,1} \lessdot E^e_{j,\ell,k+1,1}$;

(6) $E^d_{j,\ell,k\to\infty,1} \lessdot (2^j(2\ell+1))_1$

Prova.

(1) Devemos comparar

$$P((2^j(2\ell+3))_1) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, A_{j+1}\, A_j^{2\ell-1}\, C$$

com

$$P(E^e_{j,\ell,3,1}) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, A_{j+1} A_j^{2\ell-1}\, A_{j+1}\, C .$$

Se $j \geq 0$ for par, $j+1$ será ímpar e então

$$P'((2^j(2\ell+3))_1) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, A_{j+1}\, A_j^{2\ell-1}$$

será ímpar e $A_{j+1} = L \ldots$. Neste caso, teremos $C \gtrdot L$ na $2^j(2\ell+3)$-ésima posição. Daí, $(2^j(2\ell+3))_1 \lessdot E^e_{j,\ell,3,1}$. Por outro lado, se $j \geq 1$ for ímpar, $j+1 \geq 2$ será par e então $P'((2^j(2\ell+3))_1)$ será par e $A_{j+1} = R \ldots$. Na $2^j(2\ell+3)$-ésima posição teremos $C \lessdot R$, donde $(2^j(2\ell+3))_1 \lessdot E^e_{j,\ell,3,1}$.

(2) Agora a comparação é entre as palavras

$$P(E^e_{j,\ell,k,i}) = A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1} A_j^{2\ell-1})^{k-2} A_{j+1} A_j^{2(i-1)}\, C$$

e

$$P(E^e_{j,\ell,k,i+1}) = A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1} A_j^{2\ell-1})^{k-2}\, A_{j+1} A_j^{2i}\, C =$$

$$= A_0 A_1 \ldots A_j (A_{j+1} A_j^{2\ell-1})^{k-2}\, A_{j+1} A_j^{2(i-1)}\, A_j^2\, C .$$

Ora, $(A_{j+1}\ A_j^{2\ell-1})^{k-2}$ é sempre par para toda terno (j,ℓ,k) admissível. Se j for par então $P'(E^e_{j,\ell,k,i})$ será par e $A_j = R \ldots$. Logo teremos $C \leftarrow R$ na $2^j(2\ell(k-2)+k+2i)$-posição. Por outro lado, se j for ímpar, $P'(E^e_{j,\ell,k,i})$ será ímpar e $A_j = L \ldots$. Daí teremos $C \rightarrow L$ na $2^j(2\ell(k-2)+k+2i)$-ésima posição. Em qualquer dos casos concluímos que (2) é uma asserção verdadeira.

(3) Temos

$$P(E^e_{j,\ell,k,i}) = A_0A_1 \ldots A_j(A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-2}\ A_{j+1}A_j^{2(i-1)}\ C$$

e

$$P(E^d_{j,\ell,k,i}) = A_0A_1 \ldots A_j(A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-1}\ A_j^{2(i-1)}\ C =$$

$$= A_0A_1 \ldots A_j(A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-2}\ A_{j+1}A_j^{2(i-1)}A_j^{2\ell-1}C.$$

Como $A_j^{2(i-1)}$ é sempre par quando $i \to \infty$ (isto é, quando i é arbitrariamente grande), segue pelas mesmas argumentações da parte (2), que $E^e_{j,\ell,k,i\to\infty} \leftarrow E^d_{j,\ell,k,i\to\infty}$.

(4) Vamos comparar

$$P(E^d_{j,\ell,k,i+1}) = A_0A_1 \ldots A_j(A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-1}\ A_j^{2i}\ C$$

$$= A_0A_1 \ldots A_j(A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-1}\ A_j^{2(i-1)}\ A_j^2\ C$$

com

$$P(E^d_{j,\ell,k,i}) = A_0A_1 \ldots A_j\ (A_{j+1}A_j^{2\ell-1})^{k-1}\ A_j^{2(i-1)}\ C.$$

Quando j é par temos que $P'(E^d_{j,\ell,k,i})$ é ímpar, $A_j = R \ldots$ e $R \rightarrow C$ na posição $2^j(2\ell(k-1)+k+2i-1))$-ésima. Se j é ímpar temos que $P'(E^d_{j,\ell,k,i})$ é par, $A_j = L \ldots$ e $L \leftarrow C$ na mesma posição acima.

Em qualquer dos casos,

$$E^d_{j,\ell,k,i+1} \lessdot E^d_{j,\ell,k,i} .$$

(5) Temos

$$P(E^d_{j,\ell,k,1}) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, (A_{j+1}\, A_j^{2\ell-1})^{k-1}\, C$$

e

$$P(E^e_{j,\ell,k+1,1}) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, (A_{j+1}\, A_j^{2\ell-1})^{k-1}\, A_{j+1}\, C .$$

Se j é par, então $P'(E^d_{j,\ell,k,1})$ é ímpar e temos $C \gtrdot L$ na $2^j(2\ell(k-1)+k+1)$-ésima posição. Por outro lado, se j é ímpar, temos que $P'(E^d_{j,\ell,k,1})$ é par e $C \lessdot R$ na mesma posição. Em ambos os casos,

$$E^d_{j,\ell,k,1} \lessdot E^d_{j,\ell,k+1,1} .$$

(6) Comparando

$$P(E^d_{j,\ell,k,1}) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, (A_{j+1}\, A_j^{2\ell-1})^{k-1}\, C =$$

$$= A_0\, A_1 \ldots A_j A_{j+1}\, A_j^{2\ell-3} A_j^2\, (A_{j+1} A_j^{2\ell-1})^{k-2}\, C$$

com

$$P((2^j(2\ell+1))_1) = A_0\, A_1 \ldots A_j\, A_{j+1}\, A_j^{2\ell-3}\, C ,$$

obtemos $R \gtrdot C$ na $2^j(2\ell+1)$-ésima posição se j é par e $L \lessdot C$ na mesma posição se j é ímpar. Como $P'((2^j(2\ell+1))_1)$ é ímpar quando j é par e é par quando j é ímpar, então em qualquer dos casos temos que

$$P(E^d_{j,\ell,k,1}) \lessdot P((2^j(2\ell+1))_1) .$$

Mas como este resultado permanece quando $k \to \infty$, então é verdade que

$$E^d_{j,\ell,k\to\infty,1} \lessdot (2^j(2\ell+1))_1 .$$

CAPÍTULO V

EXTENSÃO DA SEQUÊNCIA DE ŠARKOVSKII (APÓS 3)

1. ALGUNS RESULTADOS PRELIMINARES.

Em [6], Carvalho obteve uma extensão da sequência de Šarkovskii

$$S = (1_1 \lessdot 2_1 \lessdot 4_1 \lessdot \ldots \lessdot 20_1 \lessdot 12_1 \lessdot \ldots \lessdot 10_1 \lessdot 6_1 \lessdot \ldots \lessdot 7_1 \lessdot 5_1 \lessdot 3_1),$$

à qual acrescentou após 3_1 e em $\lessdot$-ordenação, os períodos $n_{F(n)}$ tais que $n \geq 4$. Adotando como modelo a equação logística

$$f_a(x) = ax(1-x), \quad 0 \leq a \leq 4,$$

Carvalho em [7] também demonstrou que as órbitas unimodais correspondentes aos períodos $n_{F(n)}$, por ele denominadas de órbitas n-escada, são as últimas órbitas estáveis para cada $n \geq 4$. Para maior comodidade, vamos indicar os períodos $n_{F(n)}$ por n_e. Com o acréscimo das órbitas (ou períodos) n-escada, n_e, a sequência de Šarkovskii ficou assim estendida

$$S \lessdot 4_e \lessdot 5_e \lessdot 6_e \lessdot \ldots \lessdot n_e \lessdot \ldots .$$

Esta sequência será indicada por S_e.

As órbitas n-escada são representadas pelas palavras

$$P(n_e) = RL^{n-2}C.$$

Sugerimos consultar Carvalho - [6,7] e M,S,S - [21] para obter maiores detalhes.

Podemos agora apresentar o seguinte teorema.

Teorema 1. As palavras das sete últimas órbitas unimodais de período $n \geq 7$ segundo a ordem $\lessdot$, são

$$RL^{n-5}RLRC \lessdot RL^{n-5}R^3C \lessdot RL^{n-5}R^2LC \lessdot$$

$$\lessdot RL^{n-4}RLC \lessdot RL^{n-4}R^2C \lessdot RL^{n-3}RC \lessdot RL^{n-2}C.$$

Prova. Para cada um dos casos abaixo, consideremos uma sequência admissível da forma

$$P = RLX_1X_2 \ldots X_{n-3}C, \quad \text{onde} \quad X_i \in \{L,R\}.$$

(1) $P_7 = P(n_{F(n)}) = RL^{n-2}C$ é a última.

Se $P \neq P_7$, seja j o primeiro índice tal que $X_j = R$. Então $P \lessdot P_7$, pois temos $R \gtrdot L$ na posição $j+2$, antes da qual só existe um R.

(2) $P_6 = P(n_{F(n)-1}) = RL^{n-3}RC$ é a penúltima.

Temos que $P_6 \lessdot P_7$. Se $P \neq P_6, P_7$ então $X_i = R$ para algum $i = 1,2, \ldots, n-4$. Neste caso, $P \lessdot P_6$ pela mesma razão exposta em (1).

(3) $P_5 = P(n_{F(n)-2}) = RL^{n-4}R^2C$ é a antepenúltima.

Temos que $P_5 \lessdot P_6$. Se $P \neq P_5, P_6, P_7$ então $X_i = R$ para algum $i = 1,2, \ldots, n-4$ ou $X_{n-4}X_{n-3} = RL$. De qualquer forma $P \lessdot P_5$. Os outros casos onde $X_{n-4}X_{n-3} = LL$, LR e RR já foram considerados em P_5, P_6 e P_7 respectivamente.

(4) $P_4 = P(n_{F(n)-3}) = RL^{n-4}RLC$ é a maior órbita menor que P_5.

É claro que $P_4 \lessdot P_5$. Se $P \neq P_4, P_5, P_6, P_7$ então $X_i = R$ para algum $i = 1,2, \ldots, n-5$. Neste caso, $P \lessdot P_4$.

(5) $P_3 = P(n_{F(n)-4}) = RL^{n-5}R^2LC$ é a maior órbita meror que P_4.

$P_3 \lessdot P_4$ e, se $P \neq P_3, P_4, \ldots, P_7$ então temos os seguintes casos: $X_i = R$ para algum $i = 1, 2, \ldots, n-6$ ou $X_{n-5}X_{n-4}X_{n-3} = RLL$ ou RLR ou RRR. Mas em qualuer deles, $P \lessdot P_3$.

(6) $P_2 = P(n_{F(n)-5}) = RL^{n-5}R^3C$ é a maior órbita menor que P_3.

Temos $P_2 \lessdot P_3$. Se $P \neq P_2, P_3, \ldots, P_7$ temos que considerar os casos onde $X_i = R$ para algum $i = 1, 2, \ldots, n-6$ ou $X_{n-5}X_{n-4}X_{n-3} = RLL$ ou RLR. Em todos eles, $P \lessdot P_2$.

(7) $P_1 = P(n_{F(n)-6}) = RL^{n-5}RLRC$ é a maior órbita menor que P_2.

De fato, $P_1 \lessdot P_2$ e se $P \neq P_1, P_2, \ldots P_7$ então $X_i = R$ para algum $i = 1, 2, \ldots, n-6$ ou $X_{n-5}X_{n-4}X_{n-3} = RLL$. Em ambos os casos, $P \lessdot P_1$.

É oportuno observar que a cadeia

$$P_1 \lessdot P_2 \lessdot \ldots \lessdot P_7$$

exibida neste teorema, inclui da direita para a esquerda, todas as órbitas unimodais nos casos particulares $n = 2, 3, 4, 5,$ e 6 onde temos, respectivamente,

$$P(2_1) = RC,$$

$$P(3_1) = RLC,$$

$$P(4_1) = RLRC \lessdot P(4_2) = RL^2C,$$

$$P(5_1) = RLR^2C \lessdot P(5_2) = RL^2RC \lessdot P(5_3) = RL^3C,$$

e

$$P(6_1) = RLR^3C \lessdot P(6_2) = RL^2RLC \lessdot P(6_3) = RL^2R^2C \lessdot$$

$$\lessdot P(6_4) = RL^3RC \lessdot P(6_5) = RL^4C.$$

Se $n=1$, então $P(l_1) = C$.

Teorema 2. Toda sequência admissível entre

$$P_1 = RL^k C \quad e \quad P_2 = RL^{k+1}C,$$

onde $k \geq 0$, é da forma

$$P = RL^{k+1}R \ldots C.$$

Prova. Basta ver que toda sequência admissível P da forma

$$RL^k R \ldots C \qquad ou \qquad RL^{k+2} \ldots C,$$

é tal que

$$P \lessdot P_1 \qquad ou \qquad P_2 \lessdot P,$$

respectivamente.

Seja $P = RL^k \ldots C$ uma sequência admissível, onde $k \geq 0$. Ao acrescentarmos (ou eliminarmos quando possível) j L's após o primeiro R, obtemos a nova sequência admissível

$$P\,(+)\,L^j = RL^{k+j} \ldots C,$$

onde $j \geq -k$. Isto permite-nos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 3. Se P_1 e P_2 são sequências admissíveis tais que $P_1 \lessdot P_2$, então

$$P_1(+)\,L^j \lessdot P_2\,(+)\,L^j.$$

Prova. Sejam as sequências

$$P_1 = RL^{k_1} \ldots C \qquad e \qquad P_2 = RL^{k_2} \ldots C$$

tais que $P_1 \lessdot P_2$, onde k_1 e k_2 são respectivamente o número máximo de L's logo após o primeiro R em P_1 e P_2. Então é claro que $0 \leq k_1 \leq k_2$. Se $j \geq -k_1$, o resultado segue claramente, pois o acréscimo (ou a eliminação quando possível) de j L's a

pós o primeiro R em cada uma das sequências P_1 e P_2, apenas translada de j posições para diante (ou para trás) a primeira letra que não coincide, sem afetar a R-paridade da parte comum que fica antes dela.

Os teoremas 2 e 3 acima valem para o caso de palavras, em particular.

Teorema 4. Quando $n \geq 2$, o menor período entre

$$n_{F(n)} \quad \text{e} \quad (n+1)_{F(n+1)}$$

é

$$(n+2)_{F(n+2)-1},$$

que também é o único período $n+2$ entre eles.

Prova. A existência e a localização do período $n+2$ é uma consequência imediata dos teoremas 2 e 1. Para uma prova direta, consideremos as palavras

$$P(n) = RL^{n-2}C \quad \text{e} \quad P(n+1) = RL^{n-1}C.$$

Temos respectivamente

$$H(P(n)) = RL^{n-2}LRL^{n-2}C = RL^{n-1}RLL^{n-3}C$$

e

$$A(P(n+1)) = RL^{n-1}RRL^{n-1}C = RL^{n-1}RRL^{n-1}C.$$

Então, pelos teoremas III.2.6 e 1, obtemos

$$P((n+2)_{F(n+2)-1}) = RL^{n-1}RC,$$

entre $P(n)$ e $P(n+1)$. Agora vamos provar a unicidade. Já sabemos que

$$n_{F(n)} < (n+2)_{F(n+2)-1} < (n+1)_{F(n+1)},$$

donde

$$RL^{n-2}C < RL^{n-1}RC < RL^{n-1}C$$

ou

$$RL^{n-2}C \lessdot RL^{n-2}LRC \lessdot RL^{n-2}LC.$$

Seja $P(n+2) = RL^{n-2}XYC$ onde $X, Y \in \{L,R\}$, tal que

$$P(n_{F(n)}) \lessdot P(n+2) \lessdot P((n+1)_{F(n+1)}).$$

Se $X = R$ então $RL^{n-2}RYC \lessdot RL^{n-2}C$. Logo, $X = L$. Daí, se $Y = L$, temos

$$RL^{n-2}LC \lessdot RL^{n-2}LLC. \quad \text{Logo} \quad Y = R.$$

Portanto,

$$P(n+2) = P((n+2)_{F(n+1)-1}).$$

2. EXTENSÃO ENTRE AS ÓRBITAS N-ESCADA.

Nesta seção também usaremos fortemente o teorema III. 2.6 combinado com o teorema II.1.4 para obter a extensão pretendida.

Vamos obter períodos $n_r \notin S_e$ entre $3_1 = 3_e$ e 4_e, segundo a ordem $\lessdot$. Sejam as órbitas unimodais periódicas representadas pelas palavras

$$P(3_e) = RLC \quad \text{e} \quad P(4_e) = RL^2C.$$

Comparando o harmônico de $P(3_e)$

$$H(P(3_e)) = RLL\ RLC,$$

com o anti-harmônico de $P(4_e)$

$$A(P(4_e)) = RL^2RRL^2C,$$

obtemos a palavra $P(5) = RL^2RC$ de período 5 tal que $P(3_e) \lessdot P(5) \lessdot P(4_e)$. Temos então $5 \notin S_e$ tal que $3_e \lessdot 5 \lessdot 4_e$.

Em seguida, comparando

$$H(P(5)) = RL^2RRRL^2RC \quad \text{com} \quad A(P(4_e)) = RL^2R^2L^2C$$

obtemos $P(6) = R L^2 R^2 C$ tal que $P(5) \lessdot P(6) \lessdot P(4_e)$, ou seja, obtemos $6 \notin S_e$ tal que $5 \lessdot 6 \lessdot 4_e$. E assim sucessivamente, obtemos

$P(7) = R L^2 R^2 L\ C$ entre $P(6)$ e $P(4_e)$,

$P(8) = R L^2 R^2 L R C$ entre $P(6)$ e $P(7)$,

$P(9) = R L^2 R^2 L^2 R C$ entre $P(7)$ e $P(4_e)$,

$P(10) = R L^2 R^2 L^2 R^2 C$ entre $P(9)$ e $P(4_e)$,

$P(11) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L\ C$ entre $P(10)$ e $P(4_e)$,

$P(12) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L\ R C$ entre $P(10)$ e $P(11)$,

$P(13) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L^2 R\ C$ entre $P(11)$ e $P(4_e)$,

$P(14) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L^2 R^2\ C$ entre $P(13)$ e $P(4_e)$,

$P(15) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L^2 R^2 L\ C$ entre $P(14)$ e $P(4_e)$,

$P(16) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L^2 R^2 L\ R C$ entre $P(14)$ e $P(15)$,

$P(17) = R L^2 R^2 L^2 R^2 L^2 R^2 L^2 R\ C$ entre $P(15)$ e $P(4_e)$,

etc. As palavras acima representam, respectivamente, órbitas unimodais de períodos

$$5,6,8,7,9,10,12,11,13,14,16,15,17 \ldots .$$

Então, temos a sequência de períodos

$$3_e \lessdot 5 \lessdot 6 \lessdot 8 \lessdot 7 \lessdot 9 \lessdot 10 \lessdot 12 \lessdot 11 \lessdot 13 \lessdot 14 \lessdot 16 \lessdot 15 \lessdot 17 \lessdot \ldots \lessdot 4_e ,$$

correspondente à sequência de palavras

$$P(3_e) \lessdot P(5) \lessdot P(6) \lessdot P(8) \lessdot P(7) \lessdot P(9) \lessdot P(10) \lessdot P(12) \lessdot P(11) \lessdot P(13) \lessdot$$
$$P(14) \lessdot P(16) \lessdot P(15) \lessdot P(17) \lessdot \ldots \lessdot P(4_e) .$$

Da sequência de períodos acima vamos eliminar 5,6 e 8 porque as palavras $P(5)$, $P(6)$ e $P(8)$ representam tipos de ór-

bitas que são obtidas por um simples acréscimo de um L após o primeiro R das palavras $P(4_1)$, $P(5_1)$ (correspondentes a $4_1, 5_1 \in S$) e $P(7_2)$ (correspondente a $7_2 \in E_S$). Ou seja

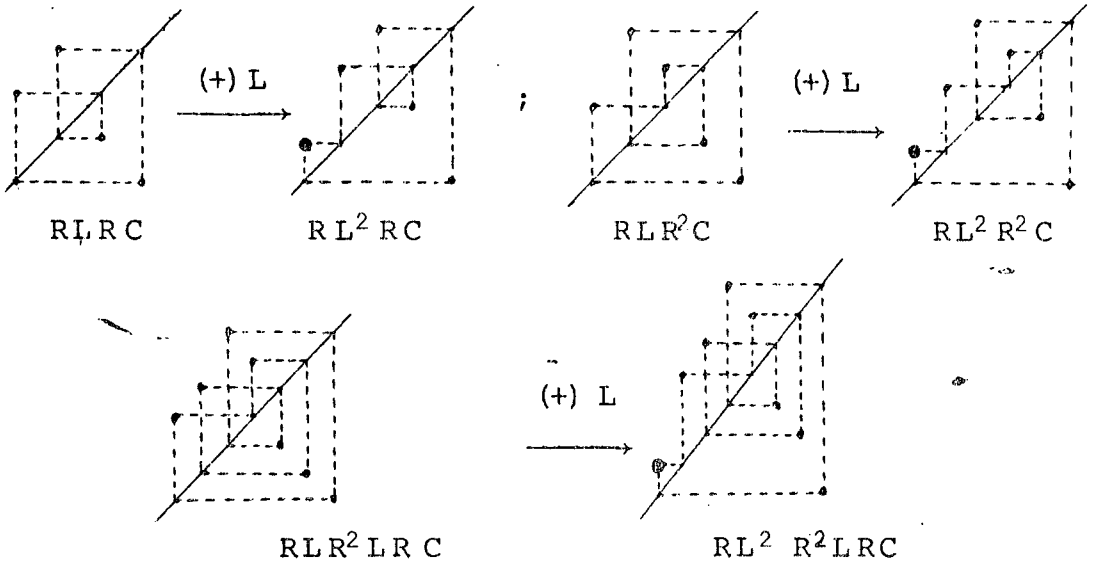
$$P(5) = RL^2RC = RLRC \ (+)\ L = P(4_1)\ (+)\ L,$$

$$P(6) = RL^2R^2C = RLR^2C \ (+)\ L = P(5_1)\ (+)\ L,$$

e

$$P(8) = RL^2R^2LRC = RLR^2LRC \ (+)\ L = P(7_2)\ (+)\ L.$$

As figuras seguintes podem esclarecer melhor esta situação.



Neste caso, dizemos que $P(5)$, $P(6)$ e $P(8)$ são L-herdadas ou L-transladadas de $P(4_1)$, $P(5_1)$ e $P(7_2)$ respectivamente. Todos os períodos provenientes de L-herança serão considerados na extensão, oportunamente. Então, aquela sequência de períodos entre 3_e e 4_e após a eliminação de 5, 6 e 8 fica

$$3_e \lessdot 7 \lessdot 9 \lessdot 10 \lessdot 12 \lessdot 11 \lessdot 13 \lessdot 14 \lessdot 16 \lessdot 15 \lessdot 17 \lessdot \ldots \lessdot 4_e,$$

onde é fácil observar a regularidade das quadras $\lessdot$-ordenadas

$$E(4_e, k) = (4k-5 \lessdot 4k-3 \lessdot 4k-2 \lessdot 4k),$$

onde $k \geq 3$ é um inteiro. Pelo teorema 1.1 e considerando que

$F(7) = 9$, o 7 que aparece na sequência acima refere-se no período 7_5. Este fato será usado na demonstração do teorema 3.1.

Da mesma forma, podemos $\lhd$-intercalar entre 4_e, $5_e \in S_e$, períodos $n \notin S_e$, sempre usando o método fornecido pelo teorema III.2.6. Neste caso, obtemos sucessivamente

$$4_e \lhd 6 \lhd 5_e, \quad P(6) = RL^3RC,$$

$$6 \lhd 7 \lhd 5_e, \quad P(7) = RL^3R^2C,$$

$$7 \lhd 8 \lhd 5_e, \quad P(8) = RL^3R^2LC,$$

$$8 \lhd 9 \lhd 5_e, \quad P(9) = RL^3R^2L^2C,$$

$$8 \lhd 10 \lhd 9 \lhd 5_e, \quad P(10) = RL^3R^2L^2RC,$$

$$9 \lhd 11 \lhd 5_e, \quad P(11) = RL^3R^2L^3RC,$$

$$11 \lhd 12 \lhd 5_e, \quad P(12) = RL^3R^2L^3R^2C,$$

$$12 \lhd 13 \lhd 5_e, \quad P(13) = RL^3R^2L^3R^2LC,$$

$$13 \lhd 14 \lhd 5_e, \quad P(14) = RL^3R^2L^3R^2L^2C,$$

$$13 \lhd 15 \lhd 14 \lhd 5_e, \quad P(15) = RL^3R^2L^3R^2L^2RC,$$

$$14 \lhd 16 \lhd 5_e, \quad P(16) = RL^3R^2L^3R^2L^3RC,$$

$$16 \lhd 17 \lhd 5_e, \quad P(17) = RL^3R^2L^3R^2L^3R^2C,$$

$$17 \lhd 18 \lhd 5_e, \quad P(18) = RL^3R^2L^3R^2L^3R^2LC,$$

$$18 \lhd 19 \lhd 5_e, \quad P(19) = RL^3R^2L^3R^2L^3R^2L^2C,$$

$$18 \lhd 20 \lhd 19 \lhd 5_e, \quad P(20) = RL^3R^2L^3R^2L^3R^2L^2RC,$$

etc. Agora, da sequência $\lhd$-ordenada de períodos

$$4_e \lhd 6 \lhd 7 \lhd 8 \lhd 10 \lhd 9 \lhd 11 \lhd 12 \lhd 13 \lhd 15 \lhd 14 \lhd 16 \lhd 17 \lhd 18 \lhd 20 \lhd 19 \lhd \ldots \lhd 5_e,$$

vamos eliminar 6,7,8 e 10 porque estes correspondem às palavras:

$P(6)$ que é L-herdada de $P(5) = RL^2RC$, $P(3_e) \lessdot P(5) \lessdot P(4_e)$ ou L^2-herdada de $P(4_1) = RLRC$, $P(2_1) \lessdot P(4_1) \lessdot P(3_1)$;

$P(7)$ que é L-herdada de $P(6) = RL^2R^2C$, $P(3_1) \lessdot P(6) \lessdot P(4_e)$ ou L^2-herdada de $P(5_1) = RLR^2C$, $P(2_1) \lessdot P(5_1) \lessdot P(3_1)$;

$P(8)$ que é L-herdada de $P(7) = RL^2R^2LC$, $P(3_1) \lessdot P(7) \lessdot P(4_e)$;

$P(10)$ que é L-herdada de $P(9) = RL^2R^2L^2RC$, $P(3_1) \lessdot P(9) \lessdot P(4_e)$.

Esta eliminação é provisória, pois os períodos serão ainda considerados na extensão que faremos. Então, a sequência de períodos fica

$$4_e \lessdot 9 \lessdot 11 \lessdot 12 \lessdot 13 \lessdot 15 \lessdot 14 \lessdot 16 \lessdot 17 \lessdot 18 \lessdot 20 \lessdot 19 \lessdot \ldots \lessdot 5_e ,$$

da qual extraímos a quina genérica

$$E(5_e,k) = (5k-6 \lessdot 5k-4 \lessdot 5k-3 \lessdot 5k-2 \lessdot 5k) ,$$

onde $k \geq 3$ é inteiro.

Para perceber melhor o esquema iterativo desta extensão, vamos repetir mais uma vez o processo e obter novos períodos $n \notin S_e$ tais que $5_e \lessdot n \lessdot 6_e$. Aqui, temos sucessivamente

$5_e \lessdot 7 \lessdot 6_e$, $P(7) = RL^4RC$,

$7 \lessdot 8 \lessdot 6_e$, $P(8) = RL^4R^2C$,

$8 \lessdot 9 \lessdot 6_e$, $P(9) = RL^4R^2LC$,

$9 \lessdot 10 \lessdot 6_e$, $P(10) = RL^4R^2L^2C$,

$10 \lessdot 11 \lessdot 6_e$, $P(11) = RL^4R^2L^3C$,

$10 \lessdot 12 \lessdot 11$, $P(12) = RL^4R^2L^3RC$,

$11 \lessdot 13 \lessdot 6_e$, $P(13) = RL^4R^2L^4RC$,

$13 \lessdot 14 \lessdot 6_e$, $P(14) = RL^4R^2L^4R^2C$,

$14 \lessdot 15 \lessdot 6_e$, $\quad P(15) = R L^4 R^2 L^4 R^2 L\ C$,

$15 \lessdot 16 \lessdot 6_e$, $\quad P(16) = R L^4 R^2 L^4 R^2 L^2 C$,

$16 \lessdot 17 \lessdot 6_e$, $\quad P(17) = R L^4 R^2 L^4 R^2 L^3 C$,

$16 \lessdot 18 \lessdot 17$, $\quad P(18) = R L^4 R^2 L^4 R^2 L^3 R\ C$,

$17 \lessdot 19 \lessdot 6_e$, $\quad P(19) = R L^4 R^2 L^4 R^2 L^4 R\ C$,

$\vdots$

Da sequência ordenada

$$5_e \lessdot 7 \lessdot 8 \lessdot 9 \lessdot 10 \lessdot 12 \lessdot 11 \lessdot 13 \lessdot 14 \lessdot 15 \lessdot 16 \lessdot 18 \lessdot 17 \lessdot 19 \lessdot 20 \lessdot 21 \lessdot 22 \lessdot$$
$$\lessdot 24 \lessdot 23 \lessdot \ldots \lessdot 6_e ,$$

vamos eliminar provisoriamente os períodos 7,8,9,10 e 12 porque:

$P(7)$ é L-herdada de $P(6) = R L^3 R\ C$ que é L-herdada de $P(5) =$ $= R L^2 R C$ que é L-herdada de $P(4_1) = R L R C$;

$P(8)$ que é L-herdada de $P(7) = R L^3 R^2 C$ que é L-herdada de $P(6) = R L^2 R^2 C$ que é L-herdada de $P(5_1) = R L R^2 C$;

$P(9)$ que é L-herdada de $P(8) = R L^3 R^2 L\ C$ ou L^2-herdada de $P(7) = R L^2 R^2 L\ C$;

$P(10)$ que é L-herdada de $P(9) = R L^3 R^2 L^2 C$;

$P(12)$ que é L-herdada de $P(11) = R L^3 R^2 L^3 R C$.

Então a sequência $\lessdot$-ordenada de períodos entre 5_e, 6_e e S_e fica sendo

$$5_e \lessdot 11 \lessdot 13 \lessdot 14 \lessdot 15 \lessdot 16 \lessdot 18 \lessdot 17 \lessdot 19 \lessdot 20 \lessdot 21 \lessdot 22 \lessdot 24 \lessdot 23 \lessdot \ldots \lessdot 6_e ,$$

da qual extraímos as senas

$$E(6_e,k) = (6k-7 \lessdot 6k-5 \lessdot 6k-4 \lessdot 6k-3 \lessdot 6k-2 \lessdot 6k),$$

onde $k \geq 3$ é inteiro.

Em geral, se $n \geq 4$ e $k \geq 3$ são inteiros, podemos inserir entre $(n-1)_e$, $n_e \in S_e$ e segundo a ordem $\lessdot$, uma sequência infinita de cadeias finitas (cada uma com n períodos) também $\lessdot$-ordenadas da forma

$$E(n_e,k) = (nk-(n+1) \lessdot nk-(n-1) \lessdot nk-(n-2) \lessdot \ldots \lessdot nk-3 \lessdot nk-2 \lessdot \lessdot nk).$$

Preferimos escrevê-la sob a forma

$$E(n_e,k) = (n(k-1)-1 \lessdot n(k-1)+1 \lessdot n(k-1)+2 \lessdot \ldots \lessdot n(k-1)+n-3 \lessdot \lessdot n(k-1)+n-2 \lessdot nk),$$

que resumimos em

$$E(n_e,k) = (n(k-1)-1 \lessdot n(k-1)+1 \lessdot \left[n(k-1)+j\right]_{j=2}^{n-2} \lessdot nk).$$

Agora vamos obter as fórmulas das palavras correspondentes aos períodos de $E(n_e,k)$. Para facilitar as coisas, vamos inicialmente escrever de um modo mais cômodo as palavras já obtidas. Assim é que entre $P(3_e)$ e $P(4_e)$ temos

$P(7) = R(L^2R^2)\,L\,C$	$P(11) = R(L^2R^2)^2\,L\,C$
$P(9) = R(L^2R^2)\,L^2\,R\,C$	$P(13) = R(L^2R^2)^2\,L^2\,R\,C$, ...
$P(10) = R(L^2R^2)^2\,C$	$P(14) = R(L^2R^2)^3\,C$
$P(12) = R(L^2R^2)^2\,L\,R\,C$	$P(16) = R(L^2R^2)^3\,L\,R\,C$
$k = 3$	$k = 4$

Entre $P(4_e)$ e $P(5_e)$ temos

$P(9) = R(L^3R^2)L^2C$	$P(14) = R(L^3R^2)^2L^2C$
$P(11) = R(L^3R^2)L^3RC$	$P(16) = R(L^3R^2)^2L^3RC$

$P(12) = R(L^3R^2)^2C$ $\qquad$ $P(17) = R(L^3R^2)^3C$, ...

$P(13) = R(L^3R^2)^2LC$ $\qquad$ $P(18) = R(L^3R^2)^3LC$

$P(15) = R(L^3R^2)^2L^2RC$ $\qquad$ $P(20) = R(L^3R^2)^3L^2RC$

$k = 3$ $\qquad$ $k = 4$

Entre $P(5_e)$ e $P(6_e)$ temos

$P(11) = R(L^4R^2)L^3C$ $\qquad$ $P(17) = R(L^4R^2)^2L^3C$

$P(13) = R(L^4R^2)L^4RC$ $\qquad$ $P(19) = R(L^4R^2)^2L^4RC$

$P(14) = R(L^4R^2)^2C$, $\qquad$ $P(20) = R(L^4R^2)^3C$, ...

$P(15) = R(L^4R^2)^2LC$ $\qquad$ $P(21) = R(L^4R^2)^3LC$

$P(16) = R(L^4R^2)^2L^2C$ $\qquad$ $P(22) = R(L^4R^2)^3L^2C$

$P(18) = R(L^4R^2)^2L^3RC$ $\qquad$ $P(24) = R(L^4R^2)^3L^3RC$

$k = 3$ $\qquad$ $k = 4$

Em geral, entre $P((n-1)_e)$ e $P(n_e)$ temos

$P(2n-1) = R(L^{n-2}R^2)L^{n-3}C$ $\qquad$ $P(3n-1) = R(L^{n-2}R^2)^2L^{n-3}C$

$P(2n+1) = R(L^{n-2}R^2)L^{n-2}RC$ $\qquad$ $P(3n+1) = R(L^{n-2}R^2)^2L^{n-2}RC$

$P(2n+2) = R(L^{n-2}R^2)^2C$ $\qquad$ $P(3n+2) = R(L^{n-2}R^2)^3C$

$P(2n+3) = R(L^{n-2}R^2)^2LC$ $\qquad$ $P(3n+3) = R(L^{n-2}R^2)^3LC$

$P(2n+4) = R(L^{n-2}R^2)^2L^2C$, $\qquad$ $P(3n+4) = R(L^{n-2}R^2)^3L^2C$,

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$P(2n+j) = R(L^{n-2}R^2)^2L^{j-2}C$ $\qquad$ $P(3n+j) = R(L^{n-2}R^2)^3L^{j-2}C$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$P(2n+n-3) = R(L^{n-2}R^2)^2L^{n-5}C$ $\qquad$ $P(3n+n-3) = R(L^{n-2}R^2)^3L^{n-5}C$

$P(2n+n-2) = R(L^{n-2}R^2)^2L^{n-4}C$ $\qquad$ $P(3n+n-2) = R(L^{n-2}R^2)^3L^{n-4}C$

$P(3n) = R(L^{n-2}R^2)^2 L^{n-3} RC$ $\qquad$ $P(4n) = R(L^{n-2}R^2)^3 L^{n-3} RC$

$k = 3$ $\qquad$ $k = 4$

$$P(n(k-1)-1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2} L^{n-3} C$$

$$P(n(k-1)+1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2} L^{n-2} RC$$

$$P(n(k-1)+2) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} C$$

$$P(n(k-1)+3) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L C$$

$$P(n(k-1)+4) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^2 C$$

$$\vdots$$

$\ldots,$

$$P(n(k-1)+j) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^{j-2} C \ ,$$

$$\vdots$$

$$P(n(k-1)+n-3) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^{n-5} C$$

$$P(n(k-1)+n-2) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^{n-4} C$$

$$P(nk) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^{n-3} RC$$

$$k = k$$

$$\vdots$$

Em resumo, as palavras correspondentes aos períodos de $E(n_e,k)$ (ou $E(n_e,k,j)$) são :

$$P(n(k-1)-1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2} L^{n-3} C \ ;$$

$$P(n(k-1)+1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2} L^{n-2} RC \ ;$$

$$P(n(k-1)+j) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^{j-2} C \ , \ j=2,3,\ldots,n-2 \ ;$$

e

$$P(nk) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1} L^{n-3} RC \ .$$

Então, finalmente, a nossa extensão de S_e após o $3 \in S$ pode ser representada pela matriz infinita.

$$E_{S_e} = (E(n_e, k)) ,$$

cujos índices $n \geq 4$, $k \geq 3$ e $2 \leq j \leq n-2$ (j implícito) estão ordenados lexicograficamente. Portanto temos a matriz que estende S_e entre os períodos-escada $n \geq 3$:

$$E_{S_e} = \begin{array}{c} \\ (n-1)_e \lessdot \\ (n-2)_e \lessdot \\ \\ 4_e \lessdot \\ 3_e \lessdot \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ E(n,3) & \lessdot E(n,4) & \lessdot \ldots & \lessdot E(n,k) & \lessdot \ldots \\ E(n-1,3) & \lessdot E(n-1,4) & \lessdot \ldots & \lessdot E(n-1,k) & \lessdot \ldots \\ \vdots & & & & \\ E(5,3) & \lessdot E(5,4) & \lessdot \ldots & \lessdot E(5,k) & \lessdot \ldots \\ E(4,3) & \lessdot E(4,4) & \lessdot \ldots & \lessdot E(4,k) & \lessdot \ldots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \lessdot n_e \\ \lessdot (n-1)_e \\ \\ \lessdot 5_e \\ \lessdot 4_e \end{array}$$

Tudo que fizemos nesta seção pode ser reunido no teorema seguinte, que garante a extensão entre os períodos $n_e \in S_e$, $n \geq 3$.

Teorema 1. Sejam $(n-1)_e$ e n_e os períodos de S_e cujas órbitas unimodais escadas correspondentes são representadas pelas palavras

$$P((n-1)_e) = R\,L^{n-3}\,C \quad \text{e} \quad P(n_e) = R\,L^{n-2}\,C ,$$

onde $n \geq 4$. Então, se $k \geq 3$ e $j = 2,3,\ldots,n-2$ são inteiros, entre os períodos acima podemos intercalar períodos de E_{S_e} numa ordenação dada por:

(1) $(n-1)_e \lessdot n(3-1) - 1 = 2n - 1$;

(2) $n(k-1) - 1 \lessdot n(k-1) + 1$;

(3) $n(k-1) + 1 \lessdot n(k-1) + 2$;

(4) $n(k-1) + j \lessdot n(k-1) + j + 1$, $j = 2,3,\ldots,n-3$;

(5) $n(k-1) + n - 2 = nk - 2 \lessdot nk$;

(6) $nk \lessdot n(k+1-1)-1 = nk-1$;

(7) quando $k \to \infty$, $nk \lessdot n_e$.

Prova.

(1) Comparando

$$P((n-1)_e) = R\,L^{n-3}\,C$$

com

$$P(2n-1) = R\,L^{n-2}\,R^2\,L^{n-3}\,C = R\,L^{n-3}\,L\,R^2\,L^{n-3}\,C\ ,$$

notamos que $P((n-1)_e) \lessdot P(2n-1)$, pois $C \gtrdot L$ na $(n-2)$-ésima posição, que é precedida de um só R. Logo, $(n-1)_e \lessdot 2n-1$.

(2) Temos que

$$P(n(k-1)-1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2}L^{n-3}\,C$$

e

$$P(n(k-1)+1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2}L^{n-3}\,L\,R\,C\ .$$

Então $P(n(k-1)-1) \lessdot P(n(k-1)+1)$, porque existem $2k-3$ R's antes da $(n(k-1)-1)$-ésima posição, onde $C \gtrdot L$. Logo

$$n(k-1)-1 \lessdot n(k-1)+1\ .$$

(3) Temos que

$$P(n(k-1)+1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-2}L^{n-2}\,RC$$

e

$$P(n(k-1)+2) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}C = R(L^{n-2}R^2)^{k-2}L^{n-2}\,RRC\ .$$

Como existem $2(k-1)$ R's precedendo a posição $(n(k-1)-1)$-ésima, na qual $C \lessdot R$, então $P(n(k-1)+1) \lessdot P(n(k-1)+2)$. Logo, $n(k-1)+1 \lessdot n(k-1)+2$.

(4) Agora vamos comparar

$$P(n(k-1)+j) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{j-2}\,C$$

com

$$P(n(k-1)+j+1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{j-1}\,C = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{j-2}\,LC,$$

Então $P(n(k-1)+j) \lessdot P(n(k-1)+j+1)$, pois antes da $(n(k-1)+j)$-ésima posição na qual $C \gtrdot L$, existem $2k-1$ R's. Daí, $n(k-1)+j \lessdot n(k-1)+j+1$.

(5) Comparando

$$P(nk-2) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-4}C$$

com

$$P(nk) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-3}RC = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-4}LRC ,$$

concluímos que $P(nk-2) \lessdot P(nk)$, pois existem $2k-1$ R's antes da $(nk-2)$-ésima posição, na qual $C \gtrdot L$. Então $nk-2 \lessdot nk$.

(6) Temos que

$$P(nk) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-3}RC$$

e

$$P(nk-1) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-3}C .$$

Como existem $2k-1$ R's precedendo a $(nk-1)$-ésima posição, na qual $R \gtrdot C$, segue que $P(nk) \lessdot P(nk-1)$. Então $nk \lessdot nk-1$.

(7) Temos que

$$P(nk) = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-3}RC = RL^{n-2}RR(L^{n-2}R^2)^{k-2}L^{n-3}RC$$

e

$$P(n_e) = RL^{n-2}C .$$

Como existe só um R antes da n-ésima posição, na qual $R \gtrdot C$, segue que $P(nk) \lessdot P(n_e)$. É fácil notar que esta conclusão não se altera quando $k \to \infty$. Logo, quando $k \to \infty$ temos que $nk \lessdot n_e$.

Reunindo as matrizes de extensão antes do 3, E_S, e de extensão após o 3, E_{S_e}, temos a matriz

$$E = E_S \cup E_{S_e} ,$$

que explicitamente é

$$
E = \begin{array}{r c}
 & \left[\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
E(n,3) & \lessdot & E(n,4) & \lessdot & E(n,5) \quad \lessdot \ldots \\
E(n-1),3) & \lessdot & E(n-1,4) & \lessdot & E(n-1,5) \lessdot \ldots \\
 & & \vdots & & \\
E(5,3) & \lessdot & E(5,4) & \lessdot & E(5,5) \quad \lessdot \ldots \\
E(4,3) & \lessdot & E(4,4) & \lessdot & E(4,5) \quad \lessdot \ldots \\
E_{0,1,3} & \lessdot & E_{0,1,4} & \lessdot & E_{0,1,5} \quad \lessdot \ldots \\
E_{0,2,3} & \lessdot & E_{0,2,4} & \lessdot & E_{0,2,5} \quad \lessdot \ldots \\
 & & \vdots & & \\
E_{1,1,3} & \lessdot & E_{1,1,4} & \lessdot & E_{1,1,5} \quad \lessdot \ldots \\
E_{1,2,3} & \lessdot & E_{1,2,4} & \lessdot & E_{1,2,5} \quad \lessdot \ldots \\
 & & \vdots & & \\
E_{2,1,3} & \lessdot & E_{2,1,4} & \lessdot & E_{2,1,5} \quad \lessdot \ldots \\
E_{2,2,3} & \lessdot & E_{2,2,4} & \lessdot & E_{2,2,5} \quad \lessdot \ldots \\
 & & \vdots & &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
(n-1)_e \lessdot \\
(n-2)_e \lessdot \\
\\
4_e \lessdot \\
3_e \lessdot \\
5_1 \lessdot \\
7_1 \lessdot \\
\\
10_1 \lessdot \\
14_1 \lessdot \\
\\
20_1 \lessdot \\
28_1 \lessdot \\
\\
\end{array}
\begin{array}{l}
\lessdot n_e \\
\lessdot (n-1)_e \\
\\
\lessdot 5_e \\
\lessdot 4_e \\
\lessdot 3_1 \\
\lessdot 5_1 \\
\\
\lessdot 6_1 \\
\lessdot 10_1 \\
\\
\lessdot 12_1 \\
\lessdot 20_1 \\
\\
\end{array}
$$

Observemos que nesta matriz cada linha é menor, no sentido da ordem $\lessdot$, que a linha imediatamente superior a ela.

3. A EXTENSÃO ACUMULADA POR L^j-TRANSLAÇÕES.

Consideremos a sequência $\lessdot$-ordenada de Šarkovskii

$$S = [\, 1_1, 2_1, 4_1, 8_1, \ldots, 28_1, 20_1, 12_1, \ldots, 14_1, 10_1, 6_1, \ldots, 7_1, 5_1, 3_1 \,].$$

Desta, vamos extrair a sequência

$$S_1 = S - \{ 1_1, 2_1 \},$$

ou seja

$$S_1 = [4_1, 8_1, 16_1, \ldots, 28_1, 20_1, 12_1, \ldots, 14_1, 10_1, 6_1, \ldots, 7_1, 5_1, 3_e].$$

Aos períodos $n \geq 2$ correspondem palavras que representam órbitas unimodais n-periódicas, e a $<$-ordem destas palavras (que é a mesma dos períodos correspondentes) é preservada por L^j-translações, conforme o teorema 1.3. Por simplicidade na representação dos harmônicos de $P(n)$, $H^j(P(n))$, vamos escrevê-los sob a forma $H^j(n)$. Portanto, podemos obter sucessivamente as seguintes sequências:

$$S_2 = (3_e, 6, 12, 24, \ldots, 5, 9, 17; \ldots, 29, 21, 13, \ldots, 15, 11, 7, \ldots, 8, 6, 4_e]$$

com a identificação

$$S_2 \equiv (H^i(3_e))_{i=1}^{\infty}; \quad S_1 (+) L;$$

$$S_3 = (4_e, 8, 16, 32, \ldots, 7, 13, 25, \ldots, 6, 10, 18; \ldots, 30, 22, 14, \ldots, 16, 12, 8, \ldots, 9, 7, 5_e]$$

tal que

$$S_3 \equiv (H^i(4_e))_{i=1}^{\infty}, \ (H^i(3_e)(+) L)_{i=1}^{\infty}; \ S_1 (+) L^2;$$

$$S_4 = (5_e, 10, 20, 40, \ldots, 9, 17, 33, \ldots, 8, 14, 26, \ldots, 7, 11, 19; \ldots, 31, 23, 15, \ldots, 17, 13, 9, \ldots, 10, 8, 6_e]$$

tal que

$$S_4 \equiv (H^i(5_e))_{i=1}^{\infty}, \ (H^i(4_e)(+) L)_{i=1}^{\infty}; (H^i(3_e)(+) L^2)_{i=1}^{\infty}; S_1 (+) L^3;$$

$$\vdots$$

Em geral, para qualquer inteiro $k \geq 2$, temos

$$S_k = ((k+1)_e, 2(k+1), 4(k+1), \ldots, 2k+1, 4k+1, 8k+1, \ldots, 2(k-1)+2, 4(k-1)+2, 8(k-1)+2,$$

$\ldots,\ 2.3+k-2,\ 4.3+k-2,\ 8.3+k-2,\ldots,\ 2.2+k-1,\ 4.2+k-1\ ,$

$8.2+k-1\ ;$

$\ldots,\ 14+k-1,\ 10+k-1,\ 6+k-1,\ldots,7+k-1,\ 5+k-1,\ (3+k-1)_e],$

ou sob a forma mais simples

$$S_k = ((k+1)_e,\ 2(k+1),\ 4(k+1),\ldots,\ 2k+1,\ 4k+1,\ 8k+1,$$
$$\ldots,\ 2k,\ 4k-2,\ 8k-6,\ldots,\ k+4,\ k+10,\ k+22\ ,$$
$$\ldots,\ k+3,\ k+7,\ k+15;\ldots,k+13,\ k+9,\ k+5\ ,$$
$$\ldots,\ k+6,\ k+4,\ (k+2)_e].$$

Identificamos

$$S_k \equiv (H^i((k+1)_e))_{i=1}^{\infty},\ (H^i(k_e)(+)\ L)_{i=1}^{\infty},\ (H^i((k-1)_e)(+)\ L^2)_{i=1}^{\infty},$$
$$\ldots,\ (H^i(4_e)(+)\ L^{k-3})_{i=1}^{\infty},\ (H^i(3_e)(+)\ L^{k-2})_{i=1}^{\infty};\quad S_1(+)\ L^{k-1}$$

ou, de forma resumida,

$$S_k = \{\left[H^i((k+1-j)_e)(+)\ L^j\right]_{j=0}^{k-2}\}_{i=1}^{\infty}\ ;\quad S_1(+)\ L^{k-1}.$$

É fácil perceber, para todo inteiro $k \geq 1$, que

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ k,\ k+1 \notin S_k\ ,$$

isto é, os períodos de S_k são maiores ou iguais a $k+2$. Também é fácil perceber que todas as palavras correspondentes aos períodos de S_k começam por $RL^kR\ldots$, exceto a palavra de $(k+2)_e$, que é RL^kC.

Completamos a nossa extensão da sequência S de Šarkovskii, estabelecendo o seguinte teorema.

Teorema 1. Para todo inteiro $n \geq 4$, os períodos (só os novos acrescidos) da extensão entre $(n-1)_e$ e n_e, são maiores que os períodos L-herdados daqueles que formam a sequência es-

tendida entre $(n-2)_e$ e $(n-1)_e$.

Prova. Basta mostrar que:

(1) $E^d_{0,1,k\to\infty,1}(+)\,L \equiv 3k \lessdot 7_5$;

(2) Quando $k \to \infty$, $nk(+)\,L \equiv nk+1 \lessdot (n+1)(3-1)-1 = 2n+1$.

Para mostrar (1), devemos comparar as palavras

$$P(E^d_{0,1,k,1})(+)\,L = A_0(A_1A_0)^{k-1}A_0^0\;C(+)\;L =$$

$$= R(LRR)^{k-1}C(+)\,L = RL^2R^2LRR(LR^2)^{k-3}C$$

e

$$P(7_5) = RL^2R^2LC.$$

Como $R \gtrdot C$ na $7^{\underline{a}}$ posição, temos que $P(3k) \lessdot P(7_5)$, donde $3k \lessdot 7_5$. É claro que esta conclusão é mantida quando $k \to \infty$. Quanto à prova de (2), vamos comparar

$$P(nk)(+)\,L = R(L^{n-2}R^2)^{k-1}L^{n-3}RC\;(+)\;L =$$

$$= RL^{n-1}R^2L^{n-2}RR\,(L^{n-2}R^2)^{k-3}L^{n-3}\;RC.$$

com

$$P(2n+1) = RL^{n-1}R^2L^{n-2}C.$$

Temos que $P(nk+1) \lessdot P(2n+1)$ pois $R \gtrdot C$ na $(2n+1)$-ésima posição, que é precedida de 3 R's. Isto não se altera quando $k \to \infty$. Logo $nk+1 \lessdot 2n+1$, quando $k \to \infty$.

Este teorema juntamente com o teorema 1.3, garantem que a sequência estendida é cumulativa, via L^j-translações, da extensão entre $(n-2)_e$ e $(n-1)_e$ para a extensão entre $(n-1)_e$ e n_e, para todo inteiro $n \geq 4$.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

1. A EFICIÊNCIA DA EXTENSÃO CUMULATIVA.

Queremos saber quantos períodos $p \geq 5$ (correspondentes a órbitas unimodais p-periódicas) são incluídos na extensão acumulada de S, como foi descrita na seção 3 do capítulo anterior.

Os períodos $p \geq 7$ da extensão E_S são dados pelas fórmulas

$$((((2^j(2\ell(k-2)+k+2i))_{j=0}^{\infty})_{\ell=1}^{\infty})_{k=3}^{\infty})_{i=1}^{\infty} \qquad (1)$$

e

$$((((2^j(2\ell(k-1)+k+2i-1))_{j=0}^{\infty})_{\ell=1}^{\infty})_{k=3}^{\infty})_{i=\infty}^{1}, \qquad (2)$$

que fornecem, respectivamente, os períodos da parte crescente e da parte decrescente de cada sequência $E_{j,\ell,k,i}$, como ficou estabelecido na seção 2 do capítulo IV. Então, o número $E_S(p)$ de tais períodos que são através de sucessivas interrelações acrescentados à sequência S antes do 3, é dado pelo número de quadras (j,ℓ,k,i) que produzem p por meio das fórmulas (1) e (2). Logo, considerando $7 \leq p \leq 32$, temos a tabela

p	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$E_S(p)$	1	1	2	2	4	3	6	6	7	8	10	10	13	12

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
14	17	17	18	20	23	22	25	26	28	29	33

Por outro lado, os períodos $p \geq 7$ que são diretamente (sem translações por L's) acrescentados à sequência S_e após o 3, são dados pelas fórmulas (conforme seção 2 do capítulo V)

$$(n(k-1)_{n=4}^{\infty})_{k=3}^{\infty} - 1 \ , \tag{3}$$

$$(n(k-1)_{n=4}^{\infty})_{k=3}^{\infty} + 1 \ , \tag{4}$$

$$((n(k-1)_{n=4}^{\infty})_{k=3}^{\infty} + j)_{j=2}^{n-2} \tag{5}$$

e

$$((nk)_{n=4}^{\infty})_{k=3}^{\infty} \ . \tag{6}$$

O número $E_{S_e}(p)$ destes períodos é dado pelo número de pares (n,k) e de ternos (n,k,j) que produzem p através das fórmulas (3), (4), (5) e (6). Então, se $7 \leq p \leq 32$, temos a tabela

p	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$E_{S_e}(p)$	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
8	7	9	8	10	9	11	10	12	11	13	12

Neste caso, á fácil obter explicitamente o número $E_{S_e}(p)$, por meio da fórmula

$$E_{S_e}(p) = \begin{cases} (p-5)/2 & \text{se } p \geq 7 \text{ é ímpar} \\ (p-8)/2 & \text{se } p \geq 8 \text{ é par.} \end{cases}$$

Em resumo, toda a sistemática de obtenção dos períodos da nossa extensão cumulativa, pode ser descrita por meio da

tabela

p	D(p)	Lh(p)	B(p)	E(p)	$S_eH(p)$	T(p)
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	2	2
5	0	1	0	1	2	3
6	0	2	0	2	3	5
7	2	4	0	6	2	8
8	1	7	0	8	3	11
9	4	10	0	14	2	16
10	3	15	1	19	4	23
11	7	22	0	29	2	31
12	5	30	2	37	5	42
13	10	41	0	51	2	53
14	9	52	6	67	4	71
15	12	70	0	82	2	84
16	12	83	8	103	4	107
17	16	106	0	122	2	124
18	15	123	14	152	4	156
19	20	155	0	175	2	177
20	18	176	19	213	6	219
21	22	218	0	240	2	242
22	24	241	29	294	4	298
23	26	297	0	323	2	325
24	26	324	37	387	7	394
25	30	393	0	423	2	425
26	32	424	51	507	4	511
27	33	510	0	543	2	545
28	35	544	67	646	6	652
29	38	651	0	689	2	691
30	39	690	82	811	4	815
31	42	814	0	856	2	858
32	45	857	103	1.005	5	1.010

.....

As expressões literais da tabela acima estão inter-relacionadas e têm os seguintes significados:

$D(p)$ — Número de períodos p que são obtidos diretamente das fórmulas (1), (2), ..., (6), e não por L-herança de períodos $p-1$ ou pelo 1º harmônico de $p/2$ (se p é par). Temos $D(p) = E_s(p) + E_{s_e}(p)$

$S_eH(p)$ — Número de períodos p obtidos de S_e ou pelos harmônicos (quando p é par e $2^j|P)$ $H^j(p/2^j)$, onde $(p/2^j) \in S_e$;

$Lh(p)$ — Número de períodos p, exceto p_e, que são obtidos por L-herança dos períodos $p-1$ de $T(p-1)$. É claro que $Lh(p) = T(p-1) - 1$;

$T(p)$ — Número total de períodos p que compõem a extensão acumulada, onde temos que $T(p) = E(p) + S_eH(p)$;

$E(p)$ — Número de períodos p obtidos de $D(p)$, $Lh(p)$ e do 1º harmônico dos períodos $p/2$ de $E(p/2)$ quando $p \geq 10$ é par. Então temos $E(p) = D(p) + Lh(p) + B(p)$;

$B(p)$ — Número de períodos p dados pelo 1º harmônico dos períodos $p/2$ obtidos de $E(p/2)$. Aqui, temos $B(p) = E(p/2)$ quando $p \geq 10$ é par e $B(p) = 0$ nos outros casos.

Observando a tabela acima, notamos que o número de novos períodos p dados pela coluna $D(p)$ ou pela coluna $E(p)$, tende a aumentar quando p cresce.

2. ADAPTAÇÃO CONTÍNUA DA EXTENSÃO UNIMODAL.

É claro que, dada uma órbita periódica unimodal, existem infinitas funções contínuas (não necessariamente unimodais)

cujos gráficos servem de suporte para aquela órbita. Por outro lado, se o gráfico de uma função contínua $f : I \to I$ contém uma órbita periódica unimodal, então esta também está contida no gráfico da "função companheira" $\hat{f} \in C^0(I,I)$ de f associada à órbita. A função $\hat{f}$ será definida adiante.

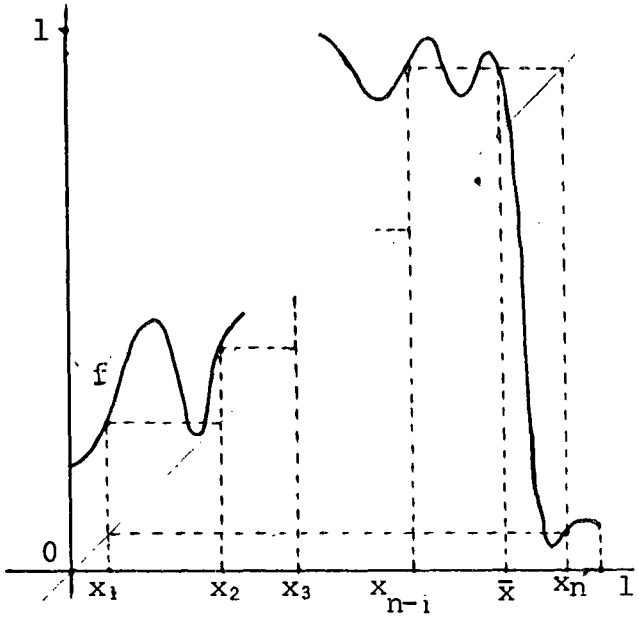
Seja $f \in C^0(I,I)$. Lembramos que $P(f) = \{n \in \mathbb{N}^*; f$ tem uma órbita de período $n\}$. Suponhamos que $n_e \in P(f)$, isto é, que o gráfico de f contém a órbita periódica unimodal n-escada

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n ,$$

com $n-1$ degraus, cuja palavra é

$$P(n_e) = R L^{n-2} C ,$$

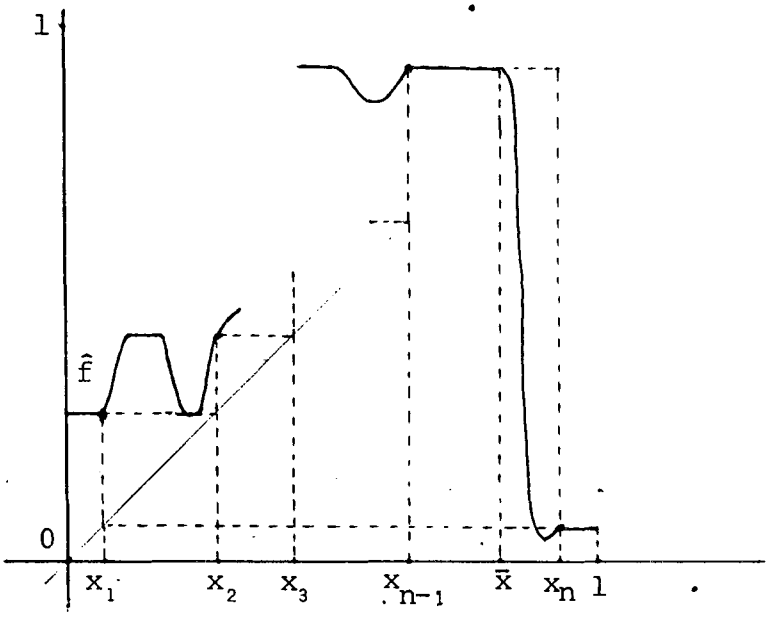
onde $n \geq 2$ é um inteiro. Se $n = 1$, então $P(n) = C$. O gráfico de f com a órbita n-escada é, por exemplo, dado por



Para facilitar a leitura, extraímos de Carvalho - [6] a definição da "função companheira" $\hat{f}$ de f, relativa à órbita de período n_e. Temos que

$$
\hat{f}(x) = \begin{cases}
x_2 & \text{se} \quad x \le x_1 \\
x_2 & \text{se} \quad x_1 \le x \le x_2 \quad \text{e} \quad f(x) \le x_2 \\
f(x) & \text{se} \quad x_1 \le x \le x_2 \quad \text{e} \quad x_2 \le f(x) \le x_3 \\
x_3 & \text{se} \quad x_1 \le x \le x_2 \quad \text{e} \quad f(x) \ge x_3 \\
x_3 & \text{se} \quad x_2 \le x \le x_3 \quad \text{e} \quad f(x) \le x_3 \\
f(x) & \text{se} \quad x_2 \le x \le x_3 \quad \text{e} \quad x_3 \le f(x) \le x_4 \\
x_4 & \text{se} \quad x_2 \le x \le x_3 \quad \text{e} \quad f(x) \ge x_4 \\
 & \vdots \\
x_{n-1} & \text{se} \quad x_{n-2} \le x \le x_{n-1} \quad \text{e} \quad f(x) \le x_{n-1} \\
f(x) & \text{se} \quad x_{n-2} \le x \le x_{n-1} \quad \text{e} \quad x_{n-1} \le f(x) \le x_n \\
x_n & \text{se} \quad x_{n-2} \le x \le x_{n-1} \quad \text{e} \quad f(x) \ge x_n \\
x_n & \text{se} \quad x_{n-1} \le x \le \bar{x}, \quad \text{onde} \\
 & \bar{x} = \max\{ x \ge x_{n-1} ; \ f(x) = x_n \} \\
f(x) & \text{se} \quad \bar{x} \le x \le x_n \\
x_1 & \text{se} \quad x \ge x_n ,
\end{cases}
$$

cujo gráfico é



Carvalho demonstrou em [6], para todo inteiro $n \ge 3$,

que

$$(n+1)_e \in P(f) \Rightarrow (n+1)_e \in P(\hat{f}) \Rightarrow n_e \in P(\hat{f}) \Rightarrow n_e \in P(f).$$

Este resultado pode ser aplicado, com as devidas adaptações é claro, à família de órbitas obtidas por L^j-translações, de um tipo básico qualquer de órbita periódica unimodal. Por exemplo, a órbita de período 4_1 dada por $P(4_1) = RLRC$, gera a família de órbitas

$$P(4_1(+)\ L^j) = RL^{j+1}RC$$

onde $j \geq 0$, tais que

$$P(4_1(+)\ L^j) \lessdot P(4_1(+)\ L^{j+1}).$$

Se $4+j \in P(f)$ para $j \geq 1$, podemos obter, imitando o método descrito em [6], um ponto fixo de f^{4+j-i} (via teorema do valor intermediário de Bolzano), onde $i = 1, 2, 3, \ldots, j$. Deste modo, obtemos

$$4_1(+)\ L^{j-i} \equiv 4+j-i \lessdot 4+j \equiv 4_1(+)\ L^j,$$

ou seja, a órbita

$$P(4_1(+)\ L^{j-i}) = RL^{j-i+1}RC$$

pode ser inscrita na órbita

$$P(4_1(+)\ L^j) = RL^{j+1}RC$$

no sentido de que têm o mesmo tipo desta, mas com i degraus' a menos. Neste caso, temos que

$$\max\{4_1(+)\ L^{j-i}\} < \max\{4_1(+)\ L^j\}.$$

e

$$\min\{4_1(+)\ L^j\} < \min\{4_1(+)\ L^{j-i}\}.$$

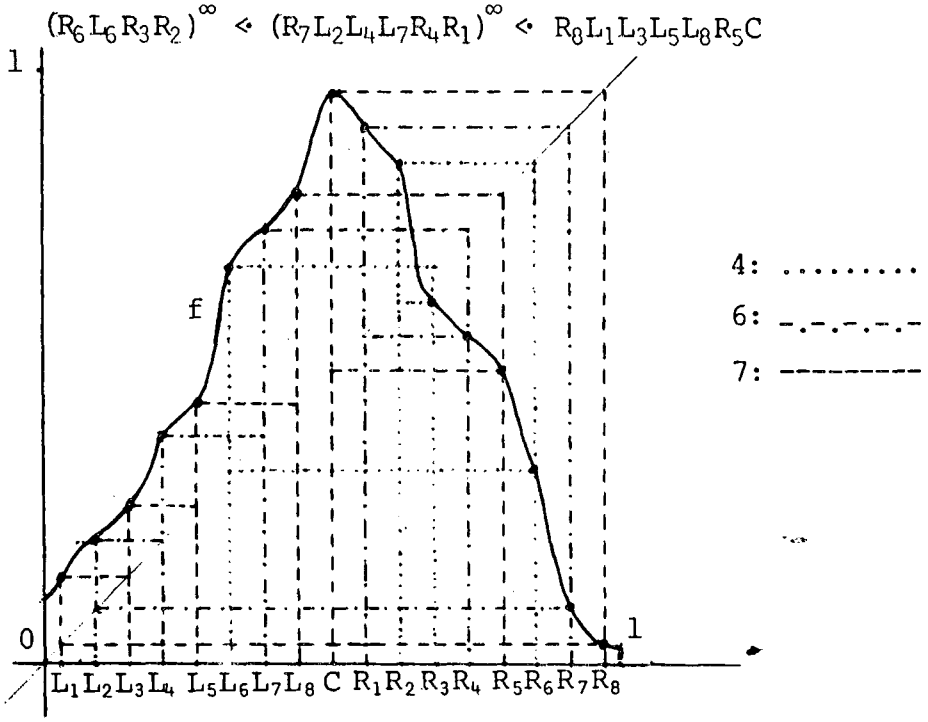
A figura seguinte ilustra os dois casos dados por $j = 3$ e $i = 1$

3 tais que

$$RLRC \lhd RL^3RC \lhd RL^4RC ,$$

ou, na forma dinâmica

$$(RLR^2)^\infty \lhd (RL^3R^2)^\infty \lhd RL^4RC .$$



Daí, segue que o teorema III.2.6 estabelecido apenas para funções unimodais, pode ser adaptado para funções $f \in C^0(I,I)$ restritas às órbitas periódicas unimodais $\lhd$-ordenadas. Podemos então enunciá-lo na seguinte forma

Teorema 1. Sejam $m, n \in P(f)$ tais que $m \neq n$.

Se p é tal que

$$P(m) \lhd P(p) \lhd P(n),$$

então

$$p \in P(f) \quad \text{e} \quad m \lhd p \lhd n.$$

É neste sentido que a nossa extensão de $\mathcal{S}$, considerando apenas funções unimodais, e portanto apenas órbitas unimodais, pode ser adaptada para funções contínuas.

Está claro que se o teorema 1 não fosse válido, então não poderíamos ter, por exemplo, a cadeia $7_1 \lessdot 5_1 \lessdot 3_1$, extraída da sequência de Šarkovskii. Ou seja, o próprio teorema de Šarkovskii estaria sendo contrariado, pois ele estabelece que para todos $m,n \in N^*$, tem-se

$$m \lessdot n \iff (n \in P(f) \Rightarrow m \in P(f)).$$

Podemos ilustrar a aplicação do teorema 1 com os seguintes exemplos.

Exemplo 1. A órbita de período 7 obtida na extensão E_S e representada pela palavra

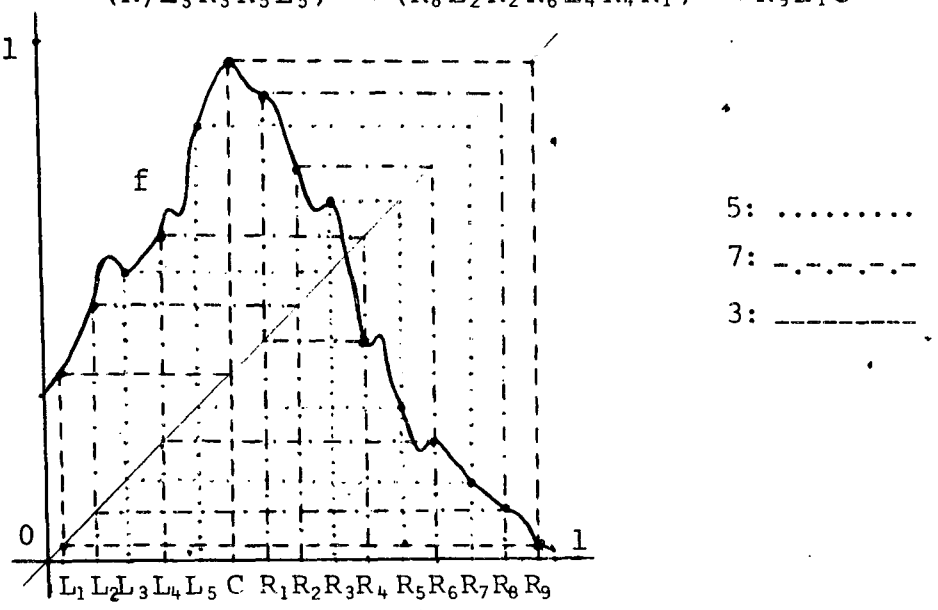
$$P(7) = R\,L\,R^2\,L\,R\,C\ ,$$

coexiste para uma função $f \in C^0(I,I)$ com as órbitas dadas por

$$P(5_1) = R\,L\,R^2\,C \quad \text{e} \quad P(3_1) = R\,L\,C\ ,$$

para $P(5_1) \lessdot P(7) \lessdot P(3_1)$. Temos que $m = 5_1$, $n = 3_1$ e $p = 7$. Então $7 \in P(f)$ e $5_1 \lessdot 7 \lessdot 3_1$. A figura abaixo esclarece esta situação.

$$(R_7L_3R_3R_5L_5)^\infty \lessdot (R_8L_2R_2R_6L_4R_4R_1)^\infty \lessdot R_9L_1C$$

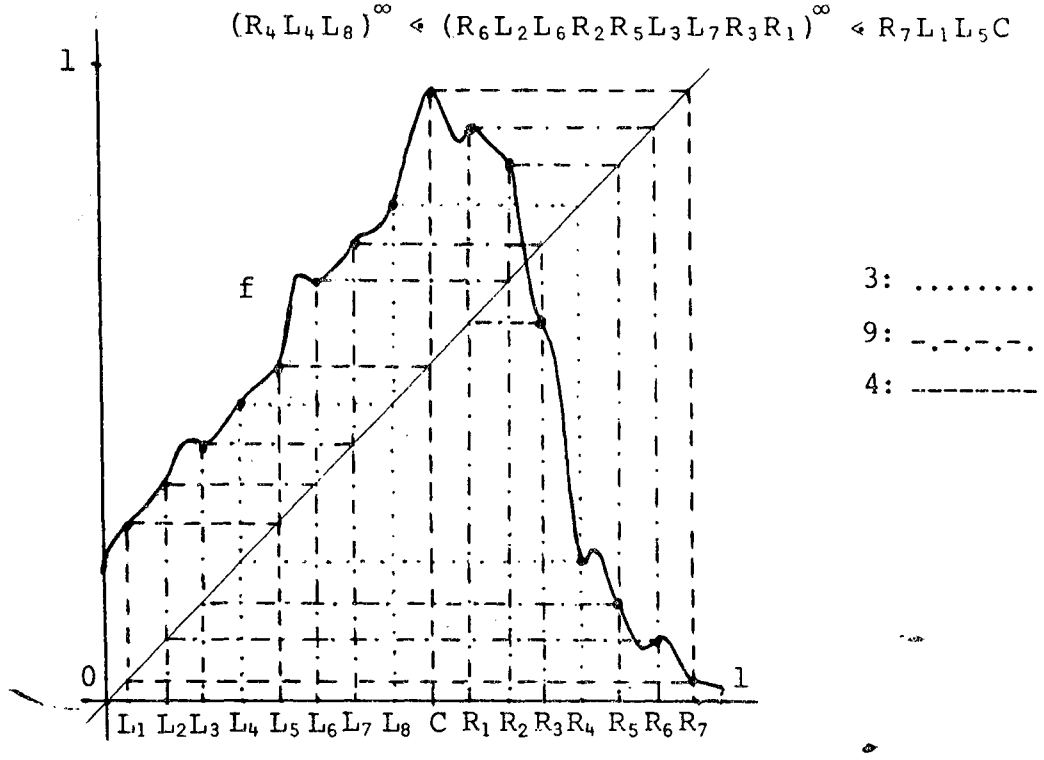


Exemplo 2. Na extensão E_{S_e} obtivemos a órbita de período 9 dada pela palavra

$$P(9) = R\,L^2\,R^2\,L^2\,R\,C\ ,$$

tal que $P(3_e) \lessdot P(9) \lessdot P(4_e)$. Temos que, $m = 3_e$, $n = 4_e$ e

$p = 9$. Logo, concluímos que $9 \in P(f)$ e $3_e \lessdot 9 \lessdot 4_e$. Ou seja, $P(3_e)$, $P(9)$ e $P(4_e)$ coexistem para uma mesma função $f \in C^0(I,I)$. A figura é esclarecedora.



3. COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DOS NÚMEROS F(n).

Vamos mostrar que a razão $r_n = F(n+1)/F(n)$ tende para 2 quando n cresce arbitrariamente, onde F(n) é o número de órbitas unimodais de período $n \geq 1$ dado pela fórmula de Fine - [10], exibita no início do capítulo IV.

Usando a fórmula de Fine, podemos estabelecer a seguinte tabela dos F(n)

F(1) = 1	F(10) = 51	F(19) = 13.797
F(2) = 1	F(11) = 93	F(20) = 26.214
F(3) = 1	F(12) = 170	F(21) = 49.929
F(4) = 2	F(13) = 315	F(22) = 95.325
F(5) = 3	F(14) = 585	F(23) = 182.361
F(6) = 5	F(15) = 1.091	F(24) = 349.520
F(7) = 9	F(16) = 2.048	F(25) = 671.088
F(8) = 16	F(17) = 3.855	F(26) = 1.290.555
F(9) = 28	F(18) = 7.280	F(27) = 2.485.504

$F(28) = 4.793.490$	$F(32) = 67.108.864$	$F(36) = 954.437.120$
$F(29) = 9.256.395$	$F(33) = 130.150.493$	$F(37) = 1.857.283.155$
$F(30) = 17.895.679$	$F(34) = 252.645.135$	$F(38) = 3.616.814.564$
$F(31) = 34.636.833$	$F(35) = 490.853.403$	$F(39) = 7.048.151.354,$

e desta a tabela com valores aproximados de r_n

$r_1 = 1$	$r_{14} \approx 1,8649$	$r_{27} \approx 1,9286$
$r_2 = 1$	$r_{15} \approx 1,8772$	$r_{28} \approx 1,9310$
$r_3 = 2$	$r_{16} \approx 1,8823$	$r_{29} \approx 1,9333$
$r_4 = 1,5$	$r_{17} \approx 1,8884$	$r_{30} \approx 1,9355$
$r_5 \approx 1,6666$	$r_{18} \approx 1,8952$	$r_{31} \approx 1,9375$
$r_6 = 1,8$	$r_{19} \approx 1,8999$	$r_{32} \approx 1,9394$
$r_7 \approx 1,7777$	$r_{20} \approx 1,9047$	$r_{33} \approx 1,9412$
$r_8 \approx 1,7500$	$r_{21} \approx 1,9092$	$r_{34} \approx 1,9428$
$r_9 \approx 1,8214$	$r_{22} \approx 1,9130$	$r_{35} \approx 1,9444$
$r_{10} \approx 1,8235$	$r_{23} \approx 1,9166$	$r_{36} \approx 1,9459$
$r_{11} \approx 1,8279$	$r_{24} \approx 1,9200$	$r_{37} \approx 1,9474$
$r_{12} \approx 1,8529$	$r_{25} \approx 1,9231$	$r_{38} \approx 1,9487$
$r_{13} \approx 1,8571$	$r_{26} \approx 1,9259$	

A última tabela sugere que $r_n \to 2$ quando $n \to \infty$. Para mostrar isto com maior precisão, consideremos a fórmula

$$(1) \qquad F(n) = (2^{n-1} - 1)/n, \quad n \geq 3 \quad \text{primo},$$

que foi extraída da fórmula geral de Fine. Se n é primo, seja $k \geq 2$ o menor inteiro tal que $n+k$ também é primo. Ou seja, $n+k$ é o menor primo maior que n, onde k é um dos pares $2, 4, \ldots$. Continuando, tomemos a razão

$$r'_n = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{F(n+k)}{F(n)},$$

onde a presença do fator 2^{1-k} é devida ao fato de que exis-

tem $k-1$ números inteiros entre n e $n+k$. Da expressão de r'_n e da fórmula (1) acima, obtemos sucessivamente

$$r'_n = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{(2^{n+k-1} - 1) / (n+k)}{(2^{n-1} - 1) / n}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{n}{n+k} \cdot \frac{2^k (2^{n-1} - 1) + 2^k - 1}{2^{n-1} - 1}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \left(1 - \frac{k}{n+k}\right) \left(2^k + \frac{2^k - 1}{2^{n-1} - 1}\right) .$$

Fazendo $n \to \infty$, chegamos ao resultado

$$\lim_{n\to\infty} r'_n = \frac{2^k}{2^{k-1}} = 2 .$$

Como uma consequência natural desta conclusão, podemos dizer que o número 2 é uma constante de unimodalidade, e escrever

$$F(n+1) \approx 2F(n)$$

quando n é arbitrariamente grande.

R E F E R Ê N C I A S

[1] Alseda, L.; Llibre, J. and Serra, R.: "Minimal periodic orbits for continuous maps of the interval"-Trans. Amer. Math. Soc., vol. 286 (1984), pp. 595-627.

[2] Block, L.: "Simple periodic orbits of mappings of the interval" - Trans. Amer. Math. Soc., vol. 254 (1979), pp. 391-398.

[3] Block, L.; Guckenheimer, J.; Misiurewicz, M. and Young, L.S.: "Periodic points and topological entropy of one dimensional maps"- Lecture Notes in Math., vol. 819 (1980), pp 18-34, Springer-Verlag.

[4] Block, L.: "Stability of periodic orbits in the theorem of Sarkovskii" - Proc. Amer. Math. Soc., vol. 81 (1981), pp 333 - 336.

[5] Block, L.: "Dynamical complexity of maps of the interval" - Preprint, Depart. of Math. - Univ. of Florida, Gainesville - FL, 1986.

[6] Carvalho, L.A.V.: "On an extension of Sarkovskii's order" - Preprint, Inst. de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, 1986.

[7] Carvalho, L.A.V.: "On the last (stable) periodic orbi

ts of the scalar discrete logistic equation" - Preprint, Inst. de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, 1987.

[8] Collet, P. and Eckmann, J.P.: "Interated maps on the interval as dynamical systems" - Progress in Physics, vol. 1 (1980), Birkhäuser-Boston.

[9] Coppel, W.A.: "Sarkovskii-minimal orbits" - Math. Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 93 (1983), 397-408.

[10] Fine, N.J.: "Classes of periodic sequences" - Illinois J. Math., vol. 2 (1958), pp. 285-302.

[11] Guckenkeimer, J.: "On the bifurcation of maps of interval" - Invent. Math., vol. 39 (1977), pp. 165 - 178.

[12] Guckenheimer, J.: "Bifurcation of dynamical systems" Progress in Mathematics, vol. 8 (1978), pp. 115 - 231, CIME, Lectures, Birkhäuser-Boston

[13] Guckenheimer, J.: "Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps" - Commun. Math. Phys., vol. 70 (1979), pp.133-160.

[14] Guckenheimer, J. and Holmes, P.: "Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields" - Appl. Math. Sci., vol. 42 (1983), Springer-Verlag.

[23] Nitecki, Z.: "Topological dynamics on the interval"- Progress in Math., vol. 21 (1982), pp. 1-73, Birkhäuser-Boston.

[24] Preston, C.: "Iterates of maps on an interval" - Lecture Notes in Math., vol. 999, Springer-Verlag , 1983.

[25] Šarkovskii, A.N.: "Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself" Ukranian Math. J., vol. 16 (I) (1964), pp. 61-71.

[26] Singer, D.: "Stable orbits and bifurcation of maps the interval" - SIAM J. Appl. Math., vol. 35 (1978), pp. 260-267.

[27] Štefan, P.: "A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line" - Commun. Math. Phys., vol. 54 (1977), pp. 237-248.