SOLUÇÃO, POR ELEMENTOS FINITOS, DE EQUAÇÕES DE DIFUSÃO LINEARES, VIA PRINCÍPIOS EXTREMOS DUAIS

VERA LÚCIA DA ROCHA LOPES

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Doutor em Ciências(Matemáticas).

Orientador: Prof.Dr. José Vitório Zago

São Carlos - SP.
1988

AGRADECIMENTOS

Inicialmente gostaria de agradecer ao prof. JOSÉ VITÓRIO ZAGO pela orientação, compreensão e amizade. Ao prof. JOSÉ MÁRIO MARTÍNEZ, meus agradecimentos pelas inúmeras sugestões feitas e pela paciência com que sempre me atendeu.

Aos colegas ANTÔNIO CARLOS MORETTI, LÚCIO TUNES DOS SANTOS, MÁRCIA APARECIDA GOMES RUGGIERO, MARIA AP. DINIZ EHRHARDT, PETRÔNIO PULINO e VALÉRIA PODESTÁ GOMES que gastaram, às vezes horas de seu tempo me ajudando na programação dos métodos numéricos , meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ainda ao Departamento de Matemática Aplicada do IMECC-UNICAMP, do qual faço parte, pelo apoio que sempre me deu.

Ao meu marido e ao meu filho, pelo carinho, compreeensão e paciência que me dedicaram nestes anos, muito obrigada.

Finalmente, gostaria de agradecer à ELDA MORTARI que transferiu para mim os programas do VAX para o PC e ao LUIZ CLÁUDIO pelo trabalho de datilografia.

Abstract

In this work we develop numerical methods for approximate solutions of the heat equation, based on the dual extremum principles of Noble and Sewell, where we use the Finite Element Method for discretization. We exhibit a Hilbert Space X, a bilinear form S associated to it and we verify all the conditions of Lax-Milgram's lemma with which we get proof of existence and uniqueness of solution of our formulation. Furthermore we prove a convergence theorem.

We use piecewise linear functions both in time and in space. The resulting minimization and maximization problems are solved by a matricial form of the Conjugate Gradient method. For n large enough it was needed about n/20 iterations to achiev the precision of 10^{-5}; n is the size of the discretization.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos métodos numéricos para aproximação de solução da equação do calor, baseados nos princípios extremos dúais de Noble e Sewell, onde usamos o método dos Elementos Finitos para a discretização. Exibimos um espaço de Hilbert X, uma forma bilinear S a ele associada e verificamos todas as condições do lema de Max-Milgram com as quais temos prova de existência e unicidade de solução da nossa formulação. Além disso provamos um teorema de convergência.

Nós usamos funções lineares por partes no tempo e no espaço. Os problemas de minimização e maximização resultantes, são resolvidos por um método de Gradientes Conjugados matricial. Para uma precisão de 10^{-5}, são necessárias cerca de $n/20$ iterações para n grande, onde n é o tamanho da discretização.

ÍNDICE

Introdução..... i

Capítulo 1: Fundamentação Teórica..... 1

1.1 Introdução..... 1

1.2 A incorporação dos vínculos V2 nos funcionais..... 4

1.3 Existência e unicidade de solução..... 11

1.4 O caso não homogêneo..... 34

1.5 Convergência..... 37

1.6 Comentários Finais..... 40

Capítulo 2: Aproximação por Funções Suficientemente Regulares..... 41

2.1 Introdução..... 41

2.2 Aproximação usando polinômios por partes..... 43

2.3 A convergência..... 57

2.4 Resultados Numéricos..... 62

Capítulo 3: Aproximação por Funções "Chapéu"..... 65

3.1 Introdução..... 65

3.2 A formulação matricial dos vínculos V1..... 67

3.3 O funcional $K_\beta(w_1,w_2)$ na forma de soma de traços de produtos de matrizes..... 76

3.4 O método dos Gradientes Conjugados..... 85

3.5 O mínimo de $J_\alpha(w_1,w_2)$..... 92

3.6 Sobre a convergência do método..... 94

3.7 Resultados Numéricos..... 103

3.8 Comparação de resultados..... 112

Capítulo 4: O caso de Coeficientes Variáveis..... 116

4.1 Introdução..... 116

4.2 O Método..... 117

4.3 Resultados numéricos..... 134

Bibliografia..... 141

INTRODUÇÃO

Neste trabalho desenvolvemos métodos numéricos para a aproximação de solução da equação do calor:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b(t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad a(x,t)>0 \ \forall x \in (0,1] \ , \ \forall\, t \in (0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

onde $u_0 \in L_2\,[0,1]$.

Se $a(x,t)$, $b(t)$ e $q(x,t)$ são funções, digamos, suficientemente regulares, a teoria das Equações Diferenciais Parciais nos garante que o problema acima é bem posto.

Usaremos para aproximação da solução de (1) os princípios extremos duais estabelecidos por Noble e Sewell em 1972 [14] ,para problemas com uma estrutura Hamiltoniana generalizada:

$$(2)\quad \begin{cases} S^*v = \dfrac{\partial X}{\partial w} \\ Sw = \dfrac{2X}{\partial v} \end{cases}$$

onde S e S^* são operadores lineares fechados, adjuntos, $X(v,w)$, é funcional convexo em v e côncavo em w e v e w pertencem a espaços de Hilbert.

A primeira coisa a ser feita é colocar o problema (1) na forma (2).

Os princípios extremos duais de Noble e Sewell se resumem no seguinte:

<u>Teorema</u>:

Se $X(v,w)$ é convexo em v e côncavo em w, então qualquer solução $(\hat{v},\hat{w})$ de (2),

(i) resolve os seguintes problemas:

a)
$$\begin{cases} \min \; J_\alpha(v,w) = J_\alpha(\hat{v},\hat{w}) \\ \text{sujeito a} \quad S^*v = \dfrac{\partial X}{\partial w} \end{cases}$$

onde $J_\alpha(v,w) = (w, \frac{\partial X}{\partial w}) - X(v,w)$.

b)
$$\begin{cases} \max \; K_\beta(v,w) = K_\beta(\hat{v},\hat{w}) \\ \text{sujeito a} \quad S\,w = \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

onde $K_\beta(v,w) = \langle v, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle - X(v,w)$

(ii) é tal que $J_\alpha(\hat{v},\hat{w}) = K_\beta(\hat{v},\hat{w})$.

Em sua tese de doutoramento, Zago [18] colocou a equação (1) na forma de estrutura Hamiltoniana generalizada introduzindo a equação adjunta da equação (1):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t} - b(t)\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right] + r(x,t) \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T \\ v(x,T) = v_0(x) \quad a(x,t) > 0, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

onde $v_0(x)$ e $r(x,t)$ são quaisquer funções de quadrado integrável e introduzindo também

$w_1 = 0,5(u+v)$ $\qquad$ $w_2 = 0,5(u-v)$

$q_1 = 0,5(q+r)$ $\qquad$ $q_2 = 0,5(q-r)$.

Após várias manipulações algébricas, chegou à formulação dos princípios extremos duais para a equação do calor:

a) **princípio do mínimo:**

$$J_\alpha(w_1,w_2) = 0,5 \int_0^1 \int_0^T a(x,t) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx$$

$$- \int_0^1 \int_0^T q_1(x,t) w_1(x,t) dt\, dx +$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \left[w_1^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2v_0(x) w_1(x,T) \right] dx.$$

sujeito a:

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + b(t) \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t) \dfrac{\partial w_2}{\partial x} \right] + q_2(x,t) & (V_\alpha 1) \\ w_1(x,0) + w_2(x,0) = u_0(x) & (V_\alpha 2) \\ w_1(1,t) = w_1(0,t) = 0 & (V_\alpha 3) \end{array} \right.$$

b) **princípio do máximo:**

$$K_\beta(w_1,w_2) \doteq 0,5 \int_0^1 \int_0^T a(x,t)\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^T q_2(x,t) w_2(x,t)\, dt\, dx +$$

$$- 0,5 \int_0^1 \left[w_1^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x) w_2(x,0)\right] dx$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial t} + b(t)\dfrac{\partial w_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right] + q_1(x,t) & (V_\beta 1) \\ w_1(x,T) - w_2(x,T) = v_0(x) & (V_\beta 2) \\ w_2(1,t) = w_2(0,t) = 0 & (V_\beta 3) \end{cases}$$

Zago [18] desenvolveu um método numérico no qual ele usa Elementos Finitos com bases B-spline cúbicas em x e lineares por partes em t.

O método de Zago consiste em:

(i) fazer um "splitting" no problema original (1) com o qual ele transfere a condição inicial (V2) para o princípio do mínimo e vice-versa.

(ii) tomar as funções-base satisfazendo automaticamente as condi-

ções V3

(iii) impor que w_1 e w_2 satisfaçam as condições V1 na igualdade.

Neste trabalho nós vamos usar também funções base sempre satisfazendo as condições V3 e não vamos fazer o "splitting" feito por Zago. Vamos trabalhar com $v_0(x) \equiv 0$ e $r(x,t) \equiv 0$ e vamos substituir as condições V2 diretamente nos funcionais.

A seguir descrevemos a nossa contribuição em cada um dos capítulos.

No capítulo 1 nós demonstramos que é correta a introdução das restrições V2 nos funcionais, no teorema 1. A seguir exibimos o espaço X no qual vamos trabalhar, demonstramos que X é espaço de Hilbert e definimos uma forma bi-linear $S: X \times X \to \mathbb{R}$ que é tal que: achar $\max K_\beta(w_1,w_2)$ é equivalente a achar $\min \{\frac{1}{2} S(x,x) - \langle b,x \rangle\}$ onde $x = (w_1,w_2) \in X$ e $b \in X$ tem as condições iniciais do problema. Verificamos então que S satisfaz todas as hipóteses do lema de Lax-Milgram. Os cálculos feitos para obter as estimativas necessárias são razoavelmente elaborados mas mostramos também que é nesse espaço X que temos que trabalhar. A verificação das hipóteses do lema de Lax-Milgram,

(a) nos fornece prova de existência e unicidade de solução da nossa formulação;

(b) nos permite usar o método dos Gradientes Conjugados e

(c) nos fornece uma medida da solução em função das condições iniciais: $\|x\| \leq \frac{1}{c} \|b\|$.

Finalmente demonstramos o teorema 3, da convergência dos métodos, no qual obtemos

$\|u_N - u\| \leq \sqrt{\frac{M\varepsilon}{k}}$, independente da malha da discretização.

No <u>capítulo 2</u> trabalhamos com a mesma equação do calor que Zago [16] $(a(x,t) \equiv 1;\ b(t) \equiv 0;\ q(x,t) \equiv 0)$ e as mesmas funções

$$\begin{cases} w_1(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j'(t) \psi_i(x) \\ w_2(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(t) \psi_i''(x) \end{cases}$$

onde as $\psi_i(x)$ são também B-spline cúbicas e as $\phi_j(t)$ são funções lineares por partes com as quais temos as restrições V1 e V3 satisfeitas, para o princípio do máximo.

Para encontrar max $K_\beta(w_1, w_2)$, agora $K_\beta(c_{ij})$ caimos na resolução do sistema linear $Rx=v$, obtido quando impomos derivada de K_β em relação a $c_{\ell m}$ igual a zero para todo ℓ , $1 \leq \ell \leq M$ e para todo m, $1 \leq m \leq N$.

Embora as hipóteses do teorema 4(cap.1) de convergência sejam verificadas, a matriz R tem um número de condição muito

elevado o que explica que os resultados numéricos não sejam bons.

No capítulo 3, assim como no capítulo 2, desenvolvemos um método numérico para aproximação da solução da Equação do Calor com coeficientes constantes: $a(x,t)\equiv 1$, $b(t)\equiv 0$, $q(x,t)\equiv 0$ onde as restrições, para o princípio do máximo são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} & \text{(V1)} \\[2ex] w_2(0,t) = w_2(1,t) = 0 & \text{(V3)} \end{cases}$$

A modificação fundamental que introduzimos aqui foi fazer com que a restrição V1 fosse satisfeita numa forma fraca apenas. Com isso, integração por partes nos permite usar para funções base dos Elementos Finitos funções lineares por partes tanto em x como em t.

Tomamos pois:

$$\begin{cases} w_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(t) \\[2ex] w_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(t) \end{cases}$$

as quais satisfazem trivialmente as condições V3. Uma outra modificação introduzida foi escrever a forma fraca discretizada de V1(com funções-teste lineares por parte tanto em x quanto em t , também) numa forma matricial que nos permite escrever a matriz A

dos coeficientes de w_1 em função da matriz B, dos coeficientes de w_2. Levamos esta expressão na formulação do funcional $K_\beta(-Q)$ escrito como soma de traços de produtos de matrizes e ficamos com um problema de minimização (max K_β=-min Q) sem restrições o qual é resolvido com sucesso pelo método dos Gradientes Conjugados.

Apresentamos alguns resultados teóricos sobre o problema discretizado e alguns resultados numéricos que se mostraram bastante bons.

Tendo em vista os bons resultados obtidos no capítulo 3, no capítulo 4 apresentamos os cálculos necessários bem como alguns resultados numéricos obtidos para uma equação com $a(x,t)=a(x)$, $b(t)\equiv 0$ e $q(x,t)$ qualquer.

As listagens dos programas usados nos capítulos 3 e 4 se encontram na referencia [12] .

Observamos que nos capítulos 2, 3 e 4, trabalhamos com a equação do calor com $b(t) \equiv 0$. No entanto, os resultados teóricos mostrados no capítulo 1 são para a equação completa.

Uma vez que os resultados obtidos pelo método dos capítulos 3 e 4 foram bastante bons, planejamos, num futuro próximo, usar esse método para a equação completa.

Finalmente temos como propostas de continuidade de trabalho (i) tentar usar splines quadráticas em x no método do capítulo 2, as quais tem as derivadas de segunda ordem que necessitamos e esperamos que a matriz R resultante seja menos mal-condiciona-

da que a obtida no capítulo 2.

(ii) tentar aplicar um método do tipo do dos capítulos 3 e 4 para aproximar solução da equação da onda.

sujeito a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial t} + b(t)\dfrac{\partial w_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right] + q_1(x,t) & (V\,1\text{-}2) \\ w_1(x,T) - w_2(x,T) = v_0(x) & (V\,2\text{-}2) \\ w_2(1,t) = w_2(0,t) = 0 & (V\,3\text{-}2) \end{cases}$$

Nos métodos numéricos vamos tomar w_1 e w_2 em espaços de dimensão finita, de forma que as condições V3(1 e 2) sejam automaticamente satisfeitas.

No capítulo 2, tomamos as condições V1 satisfeitas exatamente e nos capítulos 3 e 4 elas serão satisfeitas numa forma fraca discretizada somente.

Quanto às condições V2 nós as incluimos no funcional (J_α e K_β) em todos os casos, conforme justificamos nos próximos parágrafos.

1.2 A Incorporação dos Vínculos V2 nos Funcionais:

Uma vez que $v_0(x)$ e $r(x,t)$ podem ser quaisquer funções de quadrado integrável em (2), nós trabalharemos com $v_0(x) \equiv 0$ e $r(x,t) \equiv 0$.(Isto, segundo a teoria de Equações Diferenciais Parciais, nos fornece como única solução para (2) a função $v(x,t) \equiv 0$).

Assim, para (V2-2) temos:

$$w_1(x,T) = w_2(x,T), \text{ donde } \quad w_1^2(x,T) = w_2^2(x,T) \qquad (5)$$

Agora, de (V2-1): $w_2(x,0) = u_0(x) - w_1(x,0)$ o que implica em:

$$w_2^2(x,0) = u_0^2(x) - 2u_0(x)\, w_1(x,0) + w_1^2(x,0) \tag{6}$$

Finalmente $r(x,t) \equiv 0$ implica em:

$$q_1(x,t) = q_2(x,t) = \frac{1}{2}\, q(x,t) \tag{7}$$

Usando $v_0(x) \equiv 0$, (5), (6) e (7), os princípios extremos duais ficam:

$$(8)\quad \left[\begin{array}{l} \min J_\alpha(w_1,w_2) = \min \Big[0{,}5 \displaystyle\int_0^1 \int_0^T a(x,t) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx \\ \qquad - 0{,}5 \displaystyle\int_0^1 \int_0^T q(x,t)\, w_1(x,t)\, dt\, dx \\ \qquad + 0{,}5 \displaystyle\int_0^1 \Big[w_1^2(x,T) + \underbrace{u_0^2(x) - 2u_0(x) w_1(x,0) + w_1^2(x,0)}_{w_2^2(x,0)} \Big] dx \end{array}\right.$$

sujeito a:

$$(8a)\quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + b(t)\, \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t)\, \dfrac{\partial w_2}{\partial x} \right] + \dfrac{1}{2}\, q(x,t) \\ w_1(1,t) = w_1(0,t) = 0 \end{array}\right.$$

e

$$
(9)\quad \left[\begin{array}{l}
\max K_\beta(w_1,w_2)=\max \left[-0,5\displaystyle\int_0^1 \int_0^T a(x,t)\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\, dx \right. \\
\qquad + 0,5 \displaystyle\int_0^1 \int_0^T q(x,t)\; w_2(x,t)\; dt\, dx \\
\qquad - 0,5 \left. \displaystyle\int_0^1 \left[\underbrace{w_2^2(x,T)}_{w_1^2(x,T)} + w_2^2(x,0) - 2u_0(x)w_2(x,0)\right] dx \right]
\end{array}\right.
$$

sujeito a:

$$
(9a)\quad \left[\begin{array}{l}
\dfrac{\partial w_2}{\partial t} + b(t)\,\dfrac{\partial w_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right] + 0,5\; q(x,t) \\
\\
w_2(1,t) = w_2(0,t) = 0
\end{array}\right.
$$

O teorema a seguir nos garante que, se (w_1,w_2) é ponto de mínimo de J_α, reformulado em (8), então $u = w_1+w_2$ é solução da equação do calor, (1).

Teorema 1:

Se $w_1(x,t)$ e $w_2(x,t)$ são funções suficientemente regulares que satisfazem

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + b(t)\dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial w_2}{\partial x}\right] + \dfrac{1}{2}\,q(x,t) \\[2ex] w_1(1,t) = w_1(0,t) = 0 \\[2ex] w_2(1,t) = w_2(0,t) = 0 \end{cases}$$

e (w_1, w_2) minimiza o funcional J_α com as restrições em (8), então $u(x,t)=w_1(x,t)+w_2(x,t)$ é solução da equação (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x,t) \\[2ex] u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0\leq t\leq T,\ a(x,t)>0\ \forall\ x\in[0,1],\ \forall\, t\in[0,T]. \\[2ex] u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Dem:

É fácil ver que (w_1,w_2) ser mínimo de J_α sujeito às restrições em (8) é equivalente a

$$\int_0^1\int_0^T a(x,t)\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,dt\,dx + \int_0^1\int_0^T a(x,t)\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,dt\,dx$$

$$-\,0{,}5\int_0^1\int_0^T q(x,t)\,\varphi_1(x,t)\,dt\,dx\ +$$

$$+ \int_0^1 \left[w_1(x,T)\ \varphi_1(x,T) - u_0(x)\ \varphi_1(x,0) + w_1(x,0)\ \varphi_1(x,0) \right] dx = 0 \qquad (11)$$

$\forall\, \varphi_1(x,t)$ e $\varphi_2(x,t)$ tais que

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} + b(t)\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t)\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \\[2ex] \varphi_1(1,t) = \varphi_1(0,t) = 0 \\[2ex] \varphi_2(1,t) = \varphi_2(0,t) = 0 \end{cases}$$

Analisemos a equação (11):

<u>1ª Parcela</u>:

$$\int_0^1 \int_0^T a(x,t) \frac{\partial w_1}{\partial x}\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\ dt\ dx = \text{(por partes em x)}$$

$$= \int_0^T \left[a(x,t) \frac{\partial w_1}{\partial x}\ \varphi_1(x,t) dt \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t)\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \right] \varphi_1(x,t) dt\ dx$$

$$= - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t) \frac{\partial w_1}{\partial x} \right] \varphi_1(x,t)\ dt\ dx \,//$$

<u>2ª Parcela</u>:

$$\int_0^1 \int_0^T a(x,t) \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \, dt \, dx = \text{(por partes em x)}$$

$$a(x,t)\, w_2(x,t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \, dt \Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \int_0^T w_2(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] dt \, dx$$

$$= - \int_0^1 \int_0^T \left\{ w_2(x,t) \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + b(t) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right] \right\} dt \, dx.$$

$$\int_0^1 \int_0^T w_2(x,t) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \, dt dx - \int_0^1 \int_0^T b(t) w_2(x,t) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \, dt \, dx = \text{(por partes em t e x)}$$

$$\int_0^1 \Big[w_2(x,t) \varphi_1(x,t) dx \Big]_{t=0}^{t=T} + \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial t} \varphi_1(x,t) \, dt \, dx +$$

$$\int_0^T \Big[b(t) w_2(x,t) \, \varphi_1(x,t) dt \Big]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \int_0^T b(t) \frac{\partial w_2}{\partial x} \varphi_1(x,t) dt \, dx$$

Assim a equação (11) fica:

$$- \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t) \frac{\partial w_1}{\partial x} \right] \varphi_1(x,t) \, dt \, dx \qquad +$$

Seja X um espaço de Hilbert real e $B : X \times X \to R$ uma forma sesquilinear contínua ($\exists\, k$ tal que $|B(x,y)| \leq k \|x\| \|y\|$), tal que $\exists\, c>0$ tal que, para todo $x \in X$ temos $|B(x,x)| \geq c\|x\|^2$.

Então, para todo $x' \in X'$ existe um e um só $x \in X$ tal que $x'(y) = B(y,x)$ para todo $y \in X$; temos $\|x\| \leq \frac{1}{c} \|x'\|$, isto é, existe uma aplicação linear biunívoca e bicontínua F de X' sobre X tal que $x'(y) = B(y,Fx')$.

Inicialmente temos que encontrar o espaço X onde vamos trabalhar. Uma vez que no funcional e no vínculo aparecem derivadas parciais em relação a x e a t, a primeira idéia é tomar para X o espaço $H^1 x H^1$. No entanto esta escolha não funciona. De fato, como no funcional não aparecem derivadas em relação a t, fica mais ou menos claro que não é possível obter $|B(x,x| \geq c\|x\|^2$ $c>0$. Na realidade, o exemplo que daremos a seguir mostra que é impossível obter tal limitação pois se acontecesse o Lema implicaria em:

$$\int_0^1 \int_0^T \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 dt\, dx \quad \text{ser majorada pela norma } L_2 \text{ da}$$

condição inicial.

Se $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi x$ então $\|u_0\|^2_{L_2} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi x\, e^{-n^2 t}$$

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos n\pi x \; e^{-n^2 t}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 a_n \operatorname{sen} n\pi x \; e^{-n^2 t}$$

Com isto temos :

$$\| u_x \|^2_{L_2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \, |a_n|^2 \, e^{-n^2 t}$$

$$\Rightarrow \int_0^T \|u_x\|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T n^2 |a_n|^2 \, e^{-2n^2 t} \, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left[\frac{n^2}{2n^2} (1 - e^{2n^2 T}) \right]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|u_0\|_{L_2} < \infty .$$ Então $\int_0^1 \int_0^T |u_x(x,t)|^2 dt \, dx$ é

majorada pela norma L_2 da condição inicial.

Porém,

$$\| u_t \|^2_{L_2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |a_n^2| e^{-2n^2 t}$$

$$\Rightarrow \int_0^T \| u_t \|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T n^4 |a_n|^2 \, e^{-2n^2 t} \, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left[\frac{n^2}{2}(1 - e^{-2n^2T})\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2\left(\frac{1 - e^{-2n^2T}}{2}\right)$$

Agora, $T>0 \Rightarrow \frac{1}{2}(1-e^{-2n^2T}) > \frac{1}{2}(1-e^{-2T}) \geq \lambda > 0$, donde

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2\left(\frac{1-e^{-2n^2T}}{2}\right) \geq \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2$ o que mostra ser impossível majorar $\int_0^1 \int_0^T |u_t(x,t)|^2 \, dt \, dx$ pela norma L_2 de $u_0(x)$.

Estas observações juntamente com o vínculo (V1-2) nos levaram à escolha do espaço $X \subset H_x^1 \times H_x^1$, onde

$$H_x^1 = \{p(x,t) \in L_2(Q) \text{ t.q } \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \in L_2(Q)\}$$ sendo

$Q = ([0,1] \times [0,T])$ e, para $p \in L_2(Q)$, $\frac{\partial p}{\partial x}$ existe se existe uma única $g \in L_2(Q)$ tal que

$$\int_0^1 \int_0^T g(x,t)\, \psi(x,t) \, dt \, dx = -\int_0^1 \int_0^T p(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) \, dt \, dx \quad ,$$

$\forall\ \psi\ (x,t) \in c\infty(Q)$ de suporte compacto.

Como o vínculo $V1$ para K_β é:

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + b(t)\ \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\ \frac{\partial w_1}{\partial x}\right] + 0{,}5\ q(x,t),$$ vamos trabalhar com ele na forma:

$$\int_0^1 \int_0^T \underbrace{\frac{\partial w_2}{\partial t}}_{dv}\ \underbrace{\varphi(x,t)}_{u}\ dt\ dx + \int_0^1 \int_0^T b(t)\ \frac{\partial w_2}{\partial x}\ \varphi\ (x,t)\ dt\ dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^T \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\ \frac{\partial w_1}{\partial x}\right]}^{dv}\ \overbrace{\varphi(x,t)}^{u}\ dt\ dx + 0{,}5 \int_0^1 \int_0^T q(x,t)\,\varphi(x,t)\ dt\ dx$$

$$\forall \varphi \in V = \{\varphi \in c\infty\ (Q) \quad t.q \quad \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0\}.$$

Integrando por partes eliminamos a primeira derivada de w_2 em relação a t e a derivada segunda de w_1 em relação a x:

$$\int_0^1 w_2(x,t)\ \varphi\ (x,t)dx\Big]_{t=0}^{t=T} - \int_0^1 \int_0^T w_2(x,t)\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\ (x,t)\ dt\ dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^T b(t)\ \frac{\partial w_2}{\partial x}\ \varphi(x,t)\ dt\ dx =$$

$$\int_0^1 g_2^n(x,t)\,\varphi(x,t)dx - \int_0^1 g_2^n(x,s)\,\varphi(x,s)dx =$$

$$\int_0^1 \int_s^t \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\,\frac{\partial g_1^n}{\partial x}(x,r)\right]\varphi(x,r)dr\,dx \;+$$

$$\int_0^1 \int_s^t b(t)\,\frac{\partial g_2^n}{\partial x}(x,r)\,\varphi(x,r)dr\,dx.$$

Assim,

$$\int_0^1 g_2^n(x,t)\,\varphi(x,t)dx - \int_0^1 g_2^n(x,s)\,\varphi(x,s)dx =$$

$$= \int_0^1 \int_s^t g_2^n(x,r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x,r)dr\,dx + \int_0^1 \int_s^t \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\frac{\partial g_1^n}{\partial x}(x,r)\right]\varphi(x,r)drdx$$

$$- \int_0^1 \int_0^T b(t)\frac{\partial g_2^n}{\partial x}(x,r)\,\varphi(x,r)dr\,dx \text{ (por partes em } x)$$

$$= \int_0^1 \int_s^t g_2^n(x,r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x,r)dr\,dx + \int_s^t a(x,t)\frac{\partial g_1^n}{\partial x}(x,r)\varphi(x,r)dr\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$-\int_0^1 \int_s^t a(x,t) \frac{\partial g_1^n}{\partial x}(x,r) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,r)dr\, ds$$

$$-\int_0^1 \int_0^T b(t) \frac{\partial g_2^n}{\partial x}(x,r)\, \varphi(x,r)dr\, dx.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 g_2^n(x,t)\varphi(x,t)dx - \int_0^1 g_2^n(x,s)\varphi(x,s)dx =$$

$$= \int_0^1 \int_s^t g_2^n(x,r) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x,r)dr\, dx$$

$$- \int_0^1 \int_s^t a(x,t) \frac{\partial g_1^n}{\partial x}(x,r) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,r)dr\, dx$$

$$- \int_0^1 \int_0^T b(t) \frac{\partial g_2^n}{\partial x}(x,r)\, \varphi(x,r)dr\, dx$$

donde a aplicação que leva y em $\int_0^1 g_2^n(x,y)dx$ é contínua e, como (g_1^n, g_2^n) converge para (g_1, g_2) em $H_x^1 x H_x^1$, $\int_0^1 g_2^n(x,t)\varphi(x,t)dx$ converge uniformemente. Portanto $\forall (g_1, g_2) \in X$, temos que a

aplicação que leva t em $\int_0^1 g_2(x,t)\varphi(x,t)dx$ faz sentido e é contínua.

Embora não façamos aqui a demonstração, gostaríamos de observar que vale a propriedade abaixo o que nos permite usar $w(a,t)$, $a \in \mathbb{R}$ para $w \in X$;

Propriedade 2:

Qualquer que seja $x \in [0,1]$ a função que leva $u \in C^\infty(Q)$ em $u(x,\cdot) \in L_2[0,T]$ se estende continuamente a uma função de H_x^1 em $L_2[0,T]$.

Temos agora que verificar que <u>X é espaço de Hilbert</u>. Para tal vamos mostrar que H_x^1 é espaço de Hilbert e que X é fechado em $H_x^1 \times H_x^1$.

Em H_x^1, $\langle p,q \rangle = \int_0^1 \int_0^T \left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + pq\right] dt\, dx$ e

$$\|p\|^2_{H_x^1} = \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + p^2\right] dt\, dx.$$

Agora, para $p \in L_2(Q)$, $\frac{\partial p}{\partial x}$ existe se existe uma única $g \in L_2$ tal que

$$\int_0^1 \int_0^T g(x,t)\,\psi(x,t)dt\,dx = -\int_0^1 \int_0^T p(x,t)\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,(x,t)dt\,dx$$

$\forall\ \psi \in c\infty$, de suporte compacto.

Seja $\{p_n\}$ uma sequência de Cauchy em H_x^1; então existe $\{g_n\}$ em L_2 tal que

$\|p_n\|_{H_x^1} = \|p_n\|_{L_2} + \|g_n\|_{L_2}$ para todo n e tanto $\{p_n\}$ quanto $\{g_n\}$ são sequências de Cauchy em L_2, ou seja:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in N$ t.q. para $n,m \geq n_0$, $\|p_n - p_m\|_{H_x^1} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\|p_n - p_m\|_{L_2} + \|g_n - g_m\|_{L_2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \|p_n - p_m\|_{L_2} < \varepsilon$ e $\|g_n - g_m\|_{L_2} < \varepsilon$.

Como L_2 é completo, então $\{g_n\} \to g$ e $\{p_n\} \to p$ em $L_2(Q)$.

Agora, $\forall n$

$$\int_0^1 \int_0^T g_n(x,t)\psi(x,t) = -\int_0^1 \int_0^T p_n(x,t)\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,(x,t)\,dt\,dx,$$

$\forall\ \psi \in c\infty(Q)$ de suporte compacto.

Queremos mostrar que:

$$\int_0^1 \int_0^T g(x,t)\,\psi(x,t)dt\,dx = - \int_0^1 \int_0^T p(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)dt\,dx \quad ;$$

para isto mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \int_0^T g_n(x,t)\psi(x,t)dt\,dx = \int_0^1 \int_0^T g(x,t)\,\psi(x,t)dt\,dx \qquad \text{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^T p_n(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)dt\,dx = \int_0^1 \int_0^T p(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)dt\,dx.$$

Temos que, para todo n,

$$\left| \int_0^1 \int_0^T [g_n(x,t) - g(x,t)]\ \psi\ (x,t)dt\,dx \right| =$$

$$= \langle g_n - g, \psi \rangle \leq \text{(Cauchy-Schwartz)} \quad \|g_n - g\|_{L_2} \|\psi\|_{L_2} \quad ;$$

mas $\{g_n\} \to g$ em L_2. Assim , quando $n \to \infty$,

$$\int_0^1 \int_0^T g_n(x,t)\,\psi(x,t)dt\,dx \to \int_0^1 \int_0^T g(x,t)\psi(x,t)\ dt\,dx \,//$$

Analogamente mostramos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^T p_n(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x}\, dt\, dx = \int_0^1 \int_0^T p(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\, dt\, dx$$

o que conclui a prova de que H_x^1 é espaço de Hilbert, donde $H_x^1 \times H_x^1$ é espaço de Hilbert.

Para mostrar que X é fechado em $H_x^1 \times H_x^1$, consideremos a sequência $\{(w_1^n, w_2^n)\} \in X$ convergente para $(w_1, w_2) \in H_x^1 \times H_x^1$ e verifiquemos que, na realidade, $(w_1, w_2) \in X$, ou seja que a equação (16) é satisfeita para (w_1, w_2) e que $w_1(0,t) = w_1(1,t) = w_2(0,t) = w_2(1,t) = 0$.

Agora, para cada n,

$$\int_0^1 w_2^n(x,T)\varphi(x,T)dx - \int_0^1 w_2^n(x,0)\,\varphi(x,0)dx - \int_0^1 \int_0^T w_2^n(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)dt\, dx$$

$$+ \int_0^1 \int_0^T b(t)\frac{\partial w_2^n}{\partial x}(x,t)\varphi(x,t)dt\, dx =$$

$$= -\int_0^1 \int_0^T a(x,t)\frac{\partial w_1^n}{\partial x}(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\, dt\, dx \qquad \forall\, \varphi \in V.$$

Com raciocínio completamente análogo ao feito anteriormente, mostramos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 w_2^n(x,T)\varphi(x,T)dx = \int_0^1 w_2(x,T)\varphi(x,T)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 w_2^n(x,0)\varphi(x,0)dx = \int_0^1 w_2(x,0)\varphi(x,T)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^T w_2^n(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\ dx = \int_0^1 \int_0^T w_2(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\ dt\ dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^T b(t)\frac{\partial w_2^n}{\partial x}(x,t)\varphi(x,t)dt\ dx = \int_0^1 \int_0^T b(t)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,t)\varphi(x,t)dt\ dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^T a(x,t)\frac{\partial w_1^n}{\partial x}(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)dt\ dx = \int_0^1\int_0^T a(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ dt\ dx$$

Ainda mais, o Teorema 3 e o mesmo raciocínio mostram também que

$$w_1(0,t)=w_1(1,t)=w_2(0,t)=w_2(1,t) = 0.$$

Assim $(w_1, w_2) \in X$ e X é fechado em $H_x^1 \times H_x^1$ que é espaço de Hilbert donde <u>X é espaço de Hilbert</u>.

A próxima etapa é definir a forma sesquilinear $S: X \times X \to \mathbb{R}$ com a qual trabalharemos, mostrar que ela é contínua e exibir a constante $c > 0$ tal que $S(x,x) \geq c \, \|x\|^2$.

Sejam $x = (w_1, w_2) \in X$ e $y = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in X$.

$S: X \times X \to \mathbb{R}$

$((w_1, w_2), (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)) \mapsto S(x,y)$ é definida por

$$\underline{S(x,y)} = \int_0^1 \int_0^T a(x,t) \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x} \right] dt \, dx$$

$$+ \int_0^1 \left[w_2(x,T)\tilde{w}_2(x,T) + w_2(x,0)\tilde{w}_2(x,0) \right] dx$$

Obviamente S é simétrica pois $S(y,x) = S(x,y)$

Desta forma

$$K_\beta(w_1,w_2) = - S(x,x) + \int_0^1 u_0(x) w_2(x,0) dx.$$

Vamos verificar que $\exists \; c > 0$ t.q. $S(x,x) \geq c \, \|x\|^2$ e, para isto precisamos da

<u>Desigualdade de Poincaré</u>: [4]

Seja Ω um aberto com diam $(\Omega) \leq 2a$. Então $\|f\|_0 \leq 2a \; \|f\|_1$, $\forall \; f \in H_0^1(\Omega)$.

No nosso caso, $\Omega = (0,1) \Rightarrow \operatorname{diam}\Omega = 2a = 1$ e

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_0^2 &= \int_0^1 f^2(x,t)dx \\ \|f\|_1^2 &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx \end{aligned}\right\} \quad \text{então} \int_0^1 f^2(x,t)dx \leq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}^2(x,t)dx$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^T f^2(x,t)dt\, dx \leq \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}^2 (x,t)dt\, dx. \tag{18}$$

Temos pois que

$$S(x,x) = \int_0^1 \int_0^T a(x,t) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx \; +$$

$$+ \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) \right] dx \geq$$

$$\int_0^1 \int_0^T a(x,t) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx \geq$$

$$\alpha \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dx \text{ pois } \quad a(x,t) \geq \alpha > 0 \quad \text{em } Q$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx \; +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \Bigg] \quad dt\, dx$$

$$\geq \text{(por (18))}\ 0{,}5\,\alpha \int_0^1 \int_0^T \left\{ \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] + (w_1^2 + w_2^2) \right\} dt\, dx$$

$$= 0{,}5\alpha \quad \| (w_1, w_2) \|_X^2 .$$

Assim, $\boxed{S(x,x) \geq 0{,}5\,\alpha \|x\|_X^2}$ donde $c = 0{,}5.\alpha$.

Como $S(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ temos que S é simétrica, definida-positiva.

Resta mostrar que $S(x,y)$ é contínua, ou seja que $\exists\ k$ t.q $|S(x,y)| \leq k \ \|x\| \ \|y\|$, o que embora pareça surpreendente, não é coisa trivial dada a norma com a qual estamos trabalhando no nosso espaço X.

Como S é simétrica e $S(x,x) \geq 0\ \forall x \in X$, usaremos a seguinte propriedade:

<u>**Propriedade 3**</u>:

Se a forma bilinear B é simétrica e tal que $B(x,x) \geq 0 \; \forall \; x$, então $|B(x,y)| \leq [B(x,x)]^{1/2} \; [B(y,y)]^{1/2}$.

Achemos pois um majorante para $S(z,z)$, $z = (w_1, w_2)$.

$$S(z,z) = \int_0^1 \int_0^T a(x,t)\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0)\right] dx \; // \; .$$

Agora, dado $t \in [0,T]$,

$$w_2^2(x,t) = w_2^2(x,s) - 2 \int_t^s w_2(x,r) \frac{\partial w_2}{\partial r}(x,r) \; dr.$$

Chamamos a atenção anteriormente e vamos usar novamente o resultado: "se w_1 e w_2 são funções regulares, então as equações a seguir são equivalentes: (16) e

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + b(t) \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,t) \frac{\partial w_1}{\partial x}\right] // \text{ ".}$$

A justificativa deste resultado está na Propriedade 4 abaixo:

Propriedade 4:

Seja $Y = \{(w_1, w_2) \in X$ que são regulares $\}$; então Y é

um sub-conjunto denso em X .

Assim,

$$w_2^2(x,t) = w_2^2(x,s)-2\int_t^s w_2(x,r)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,r)\frac{\partial}{\partial x} w_1(x,r)-b(r)\frac{\partial}{\partial x} w_2(x,r)\right]dr$$

$$= w_2^2(x,s)-2\int_t^s w_2^2(x,r)\ \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}\right]dr + 2\int_t^s b(r)\frac{\partial w_2}{\partial x}\ dr$$

donde

$$\int_0^T w_2^2(x,t)ds= \int_0^T w_2^2(x,s)ds-2\int_0^T\int_t^s w_2(x,r)\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)\right] dr\ ds +$$

$$+\ 2\int_0^T\int_t^s b(r)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)\ dr\ ds.$$

$$Tw_2^2(x,t)= \int_0^T w_2^2(x,s)ds-2\int_0^T\int_t^s w_2(x,r)\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)\right] dr\ ds\ +$$

$$+\ 2\int_0^T\int_t^s b(r)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)\ dr\ ds.$$

Então

$$T\int_0^1 w_2^2(x,t)dx= \int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)dx\ ds- 2\int_0^1\int_0^T\int_t^s w_2(x,r)\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)\right] dxdrds$$

$$+2\int_0^1\int_0^T\int_t^s b(r)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)dx\ dr\ ds\ .$$

Agora,

$$\int_0^1\int_0^T\int_t^s b(r)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)dx\ dr\ ds = (b(r) \text{ não depende de } x)$$

$$= \int_0^T\int_t^s b(r)w_2(x,r)dr\ ds\Big]_{x=1}^{x=0} = 0.$$

E,

$$\int_0^1\int_0^T\int_t^s \underbrace{w_2(x,r)}_{u}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\ a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)}_{dv}dx\ \ dr\ ds = (\text{por partes em } x)$$

$$= \int_0^T\int_t^s w_2(x,r)a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)dr\ ds\Big]_{x=0}^{x=1} +$$

$$-\int_0^1\int_0^T\int_t^s a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)\ dx\ dr\ ds\ //$$

Assim,

$$\int_0^1 w_2^2(x,t)dx = \int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)dxds + 2\int_0^1\int_0^T\int_t^s a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)dxdrds$$

$$\leq \int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)dxds + 2\left\{\int_0^1\int_0^T\int_t^s \left[a(x,r)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,r)\right]^2 dxdrds\right\}^{1/2} \cdot$$

$$\left\{\int_0^1\int_0^T\int_t^s \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,r)\right)^2 dx\, dr\, ds\right\}^{1/2} \quad //$$

Mas $a(x,t) \leq A$ em $[0,1] \times [0,T]$, donde

$$\int_0^1 w_2^2(x,t)dx \leq \frac{1}{T}\int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)dx\, ds + \frac{2}{T}A\left[\int_0^1\int_0^T\int_0^1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}\left[\int_0^1\int_0^T\int_0^1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)dx\, ds + \frac{2}{T}A.T\left(\int_0^1\int_0^T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2}\left(\int_0^1\int_0^T \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2}$$

usando o fato que $2ab \leq a^2+b^2$,

$$\int_0^1 w_2^2(x,t)dx \leq \frac{1}{T}\int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)dx\, ds + A\left(\int_0^1\int_0^T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 dx\, dr + \int_0^1\int_0^T \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dxdr\right)$$

para qualquer $t \in [0,T]$.

Assim,

$$S(z,z) = \int_0^1 \int_0^T a(x,t) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx +$$

$$+ \int_0^1 w_2^2(x,T)dx + \int_0^1 w_2^2(x,0)dx$$

$$\leq 3A \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx +$$

$$+ \frac{2}{T} \int_0^1 \int_0^T w_2^2(x,s)dx\, ds \text{ , ou seja:}$$

$S(z,z) \leq K \; \|(w_1,w_2)\|_X^2$ onde $K = \text{máx} \; \{ 3A, \frac{2}{T} \}$

Desta forma temos que, como pela propriedade 2,

$|S(x,y)| \leq [S(x,x)]^{1/2} \; [S(y,y)]^{1/2}$ então

$$\boxed{|S(x,y)| \leq K \; \|x\|_X \; \|y\|_X}$$ como queríamos.

Uma vez que $S(x,y)$ é continua e $\int_0^1 u_0(x)w_2(x,0)dx$ é linear e

contínua, então pelo teorema de Riesz

$$S(x,y) = \langle x,Ry \rangle \quad e \quad \int_0^1 u_0(x)w_2(x,0) = \langle b,x \rangle \quad \text{donde}$$

$$K_\beta(w_1,w_2) = K_\beta(x) = -\left(\frac{1}{2} S(x,x) - \langle b,x\rangle\right) = -\left(\frac{1}{2}\langle x,Rx \rangle - \langle b,x\rangle\right).$$

Temos que, encontrar $\max K_\beta(x)$ é resolver a equação $Rx=b$.

Verificamos todas as hipóteses do Lema de Lax-Milgram para $S(x,y)$. Assim, para todo $x' \in X'$, $X' = \{f:X \to \mathbb{R}\}$, existe <u>um e um só</u> $x \in X$ t.q. $x'(y) = S(x,y)$, $\forall\, y \in X$.

Mas dado $x' \in X'$, pelo teorema de Riesz $\exists\, z \in X$ t.q. $x'(y) = \langle y,z \rangle$, $\forall\, y \in X$.

Assim,

$$\langle y,z \rangle = x'(y) = S(x,y) = \langle y,Rx \rangle \ \forall\, y, \quad \text{donde} \quad z = Rx$$

tem solução única e portanto $b = Rx$ tem solução única e $x=R^{-1}b$.

Ainda mais, o Lema de Lax-Milgram diz que

$$\|x\| \leq \frac{1}{c}\|x'\| = \frac{1}{c}\|b\| \quad \Leftrightarrow$$

$$\|R^{-1}z\| \leq \frac{1}{c}\|z\| \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\|R^{-1}z\|}{\|z\|} \leq \frac{1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \|R^{-1}\| \leq \frac{1}{c}.$$

A desigualdade $\|x\| \leq \frac{1}{c} \|b\|$ nos dá uma estimativa da solução em termos das condições iniciais. Lembramos que $c = 0,5 \times \alpha$ onde $\alpha = \min_{(x,t)\in Q} a(x,t)$ (estamos supondo que tomaremos $a(x,t)$ contínua sempre).

Na realidade, pode-se mostrar que $w_1(x,t)$ e $w_2(x,t)$ tem as derivadas necessárias, donde a solução que mostramos existir e ser única, resolve a equação do calor:(1).

1.4 O Caso não homogêneo:

Vamos mostrar agora como tratar o caso $q(x,t) \not\equiv 0$.

Seja $\tilde{w}_1(x,t)$ solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}\right] + 0,5\, q(x,t) = 0 \\ \tilde{w}_1(0,t) = \tilde{w}_1(1,t) = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$a(x,t)\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}(x,t) = c(t) - 0,5\int_0^x q(s,t)ds$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}(x,t) = \frac{c(t)}{a(x,t)} - \frac{0,5}{a(x,t)}\int_0^x q(s,t)ds$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{w}_1(x,t) = d(t) + c(t)\int_0^x \frac{dr}{a(r,t)} - 0,5\int_0^x \frac{1}{a(y,t)}\left(\int_0^y q(s,t)ds\right)dy$$

Agora,

$$\begin{cases} \tilde{w}_1(0,t) = d(t) = 0 \\ \\ \tilde{w}_1(1,t) = c(t)\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{a(r,t)} - 0{,}5\int_0^1\int_0^y \frac{q(s,t)}{a(y,t)}\, ds\, dy = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$c(t) = \frac{0{,}5 \displaystyle\int_0^1 \int_0^y \frac{q(s,t)}{a(y,t)}\, ds\, dy}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{a(r,t)}}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{w}_1(x,t) = \frac{0{,}5 \displaystyle\int_0^1 \int_0^y \frac{q(s,t)}{a(y,t)}\, ds\, dy}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{a(r,t)}} \int_0^x \frac{dr}{a(r,t)} +$$

$$- 0{,}5 \int_0^x \frac{1}{a(y,t)} \left(\int_0^y q(s,t)ds\right)dy \ .$$

Seja agora $\bar{w}_1 = w_1 - \tilde{w}_1$, então $w_1 = \bar{w}_1 + \tilde{w}_1$ e

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} + b(t)\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t).\frac{\partial}{\partial x}(\bar{w}_1 + \tilde{w}_1)\right] + 0,5\ q(x,t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}\right] + 0,5\ q(x,t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x}\right] \quad // \ .$$

Então o Lema de Lax-Milgram pode ser aplicado para unicidade de sol. de max $K_\beta(\bar{w}_1, w_2)$.

$$\|(\bar{w}_1, w_2)\| \leq \frac{1}{c} \quad \| b \|$$

Agora,

$$K_\beta(\bar{w}_1, w_2) = -0,5 \int_0^1 \int_0^T a(x,t)\left[\left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\ dx$$

$$- 0,5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x)w_2(x,0)\right] dx$$

$$= -0,5 \int_0^1 \int_0^T a(x,t)\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\ dx$$

$$- 0,5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x)w_2(x,0)\right] dx \quad \text{e assim}$$

$< b,x >$, neste caso, será:

$$\int_0^1 \int_0^T [\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x}] \quad dt\, dx + \int_0^1 u_0(x) w_2(x,0)\, dx.$$

1.5 Convergência:

Neste trabalho, vamos aproximar a solução de max $K_{-\beta}(w_1,w_2)$ (min $J_\alpha(w_1,w_2)$) em espaços de dimensão finita N, X_N e o teorema abaixo nos dá condições para que a sequência $\{u_N\}$ seja convergente para u onde u_N é solução de max $K_\beta(w_1^N, w_2^N)$ em X_N e u é a solução de max $K_\beta(w_1,w_2)$ em X.

Teorema 4:

Se $\{X_N\}$ é uma sequência de sub-espaços de X tais que $B = \bigcup_N X_N$ é denso em X então $\{u_N\} \to u$

Dem.:

Como max $K_\beta(w_1,w_2) = -$ min $(-K_\beta(w_1,w_2)) = -$min $Q(w_1,w_2)$ onde $Q(x) = Q(w_1,w_2) = \frac{1}{2} < x,Rx > - < b,x >$, vamos raciocinar com

u : min $Q(x)$ em X

u_N : min $Q(x)$ em X_N

Inicialmente mostremos que $\forall\ v \in X$, $Q(v)-Q(u) \geq k\,\|v-u\|^2$.

Chamemos $v = u + h$ ($\Rightarrow h = v-u$) e lembremos que u ser min de $Q(x)$ é o mesmo que u ser solução de $Ru = b$.

Assim,

$$Q(v)-Q(u) = \frac{1}{2}\langle v, Rv\rangle - \langle b, v\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Ru\rangle + \langle b, u\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle u+h,\ Ru+Rh\rangle - \langle b, u+h\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Ru\rangle + \langle b, u\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle u, Ru\rangle + \frac{1}{2}\langle u, Rh\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Ru\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Rh\rangle$$

$$- \langle b, h\rangle - \langle b, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Ru\rangle + \langle b, u\rangle$$

$$= \langle u, Rh\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Rh\rangle - \langle b, h\rangle$$

$$= \langle Ru-b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Rh\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle h, Rh\rangle = \frac{1}{2}\,S(h,h) \geq \frac{1}{2}.c\,\|h\|_X^2$$

Então $\quad Q(v) - Q(u) \geq k\,\|v-u\|_X^2$

Como B é denso em X, $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ v_N \in X_N$ tal que $\|u-v_N\| < \varepsilon$.

Assim,

$$\|Q(v_N)-Q(u)\| \leq \frac{1}{2}\ \|S(u,u)-S(v_N,v_N)\| + \|b\|\,\|u-v_N\|$$

$$= \frac{1}{2}\ \|S(u+v_N,\ u-v_N)\| + \|b\|\ \|u-v_N\|$$

$$\leq \frac{K}{2}\|u+v_N\|\,\|u-v_N\| + \|b\|\,\|u-v_N\|$$

$$= \left[\frac{K}{2}\|u+v_N\| + \|b\|\right]\|u-v_N\|$$

Como $\|u-v_N\| < \varepsilon$ e $\|v_N\| - \|u\| \leq \|u-v_N\|$

$$\|v_N\| \leq \|u\| + \varepsilon$$

$\Rightarrow \|u+v_N\| \leq \|u\| + \|v_N\| \leq 2\|u\| + \varepsilon$. Mas, por Lax-Milgram, $\|u\| \leq \frac{\|b\|}{c}$

$$\Rightarrow \|u+v_N\| \leq 2\frac{\|b\|}{c} + \varepsilon$$

$$\frac{K}{2}\|u+v_N\| + \|b\| \leq \frac{K\|b\|}{c} + \frac{K\varepsilon}{2} + \|b\| = \left(\frac{K}{c} + 1\right)\|b\| + K\varepsilon = M$$

Donde

$$\|Q(v_N) - Q(u)\| \leq M\|u - v_N\| < M\varepsilon$$

$$-M\varepsilon < Q(v_N) - Q(u) < M\varepsilon$$

$$Q(u) - M\varepsilon < Q(v_N) < Q(u) + M\varepsilon$$

Como u_N é min $Q(x)$ em X_N, $Q(u_N) \leq Q(v_N)$ e como u é min $Q(x)$ em X, $Q(u) \leq Q(u_N)$.

Assim,

$$Q(u) \leq Q(u_N) \leq Q(v_N) < Q(u) + M\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad Q(u_N) - Q(u) < M\varepsilon$$

donde

$$k\,\|u_N - u\|^2 \leq Q(u_N) - Q(u) < M\varepsilon$$

$\|u_N - u\| < \sqrt{\frac{M\varepsilon}{k}}$ donde $\{u_N\} \to u$, como queríamos demonstrar.

1.6 Comentários Finais

Obviamente a prova de existência e unicidade de solução da equação (1) poderia ser feita de outra forma, mais simples até, o que pode ser encontrado em textos teóricos de equações diferenciais parciais.

No entanto precisamos do que foi demonstrado neste capítulo, porque este método é o método construtivo que adotaremos para as aproximações numéricas; além disso, a convergência dos métodos está ligada às estimativas que foram feitas aqui.

CAPÍTULO 2

APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES SUFICIENTEMENTE REGULARES

2.1 Introdução:

Nossa meta neste capítulo é aproximar solução para a equação

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b(t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T,\ a(x,t) > 0\ \forall\ x \in [0,1],\quad t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

em espaços de dimensão finita.

Desenvolvemos nossos cálculos, no entanto, para o caso particular onde $b(t) \equiv 0$, $q(x,t) \equiv 0$, $a(x,t) \equiv 1$ ou seja, aproximamos solução para a equação

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad \forall\ x \in [0,1],\ t \in [0,T]. \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Desta forma segundo o que vimos no capítulo anterior, os princípios extremos duais se reformulam por:

$\max K_\beta(w_1, w_2)$ com

$$K_\beta(w_1,w_2) = 0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx$$

$$-0,5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - \quad -2u_0(x)w_2(x,0)\right]dx$$

sujeito a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ \\ w_2(0,t) = w_2(1,t) = 0 \end{cases}$$

e min $J_\alpha(w_1,w_2)$ com

$$J_\alpha(w_1,w_2) = 0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx +$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \left[w_1^2(x,T) + u_0^2(x) - 2u_0(x)w_1(x,0) + w_1^2(x,0) \right] dx.$$

<u>sujeito a</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \\ \\ w_1(0,t) = w_1(1,t) = 0. \end{cases}$$

Conforme fizemos no capítulo anterior, vamos trabalhar aqui com o

princípio do máximo, apenas.

2.2 Aproximação Usando Polinômios Por Partes:

Queremos pois encontrar $\max K_\beta(w_1,w_2)$, com

$$\underline{\mathcal{K}_\beta(w_1,w_2)} = -0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx$$

$$-0,5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x) w_2(x,0) \right] dx \ ,$$

<u>sujeito a</u>:

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad ; \quad w_2(0,t) = w_2(1,t) = 0$$

Conforme feito por Zago em [18] uma forma de aproximar a solução deste problema é escolher $w_1(x,t)$ num espaço de dimensão finita, calcular $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$ e então encontrar $w_2(x,t)$ por integração.

Faremos aqui a mesma escolha feita em [18], a saber:

$$w_1(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \quad \Phi_j'(t) \ \psi_i(x) \quad \text{impondo que}$$

$\psi_i(0) = 0$ para todo i, o que implica em

$$w_2(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \, \Phi_j(t) \ \psi_i''(x) \quad \text{desde que} \quad \psi_i''(0)=\psi_i''(1)=0$$

para todo i.

Substituindo w_1 e w_2 acima na expressão de K_β, obtemos a seguinte função a ser maximizada, agora função de c_{ij}:

$$\underline{K_\beta(c_{ij})} = -0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\, \phi_j'(t)\, \psi_i'(x) \right]^2 dt\, dx$$

$$-0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(t)\, \psi_i'''(x) \right]^2 dt\, dx$$

$$-0{,}5 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(T)\, \psi_i''(x) \right]^2 dx$$

$$-0{,}5 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(0)\, \psi_i''(x) \right]^2 dx$$

$$+ \int_0^1 u_0(x) \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(0)\, \psi_i''(x) \right] dx \,//$$

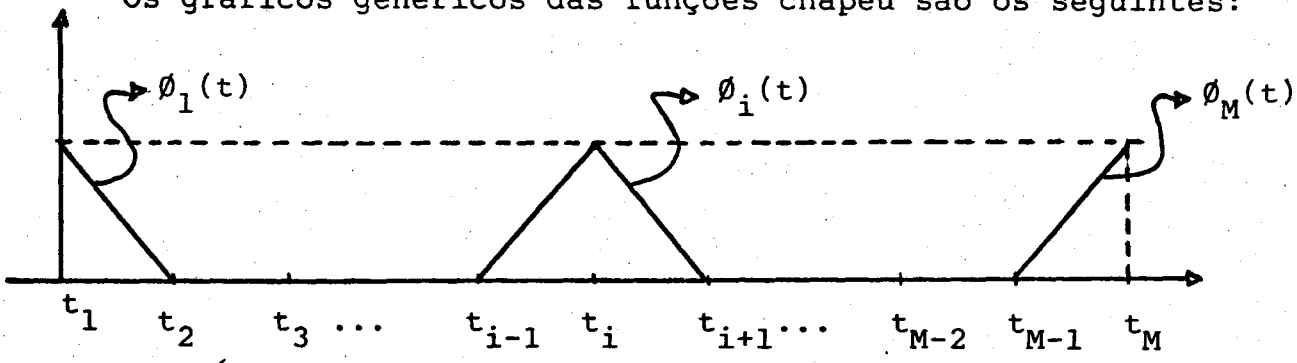
Para esta expressão ter sentido precisamos que as funções $\phi_j(t)$ sejam contínuas e com derivada com descontinuidade num conjunto de medida zero e que as funções $\psi_i(x)$ tenham derivada segunda contínua e derivada terceira com descontinuidade num con

junto de medida zero.

Chamemos de NPX o número de pontos da nossa malha no eixo x e NPT, no eixo t.

Aqui também trabalhamos com malhas igualmente espaçadas tanto em t($\Delta t = \frac{1}{NPT-1}$) como em x($\Delta x = \frac{1}{NPX-1}$) e com funções chapéu em t e B-splines cúbicas em x.

Os gráficos genéricos das funções chapéu são os seguintes:



$$\phi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t-t_{i-1}}{\Delta t} & , \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \\[2ex] \dfrac{t_{i+1}-t}{\Delta t} & , \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \\[2ex] 0 & , \quad t \leq t_{i-1}, \quad t \geq t_i \end{cases}$$

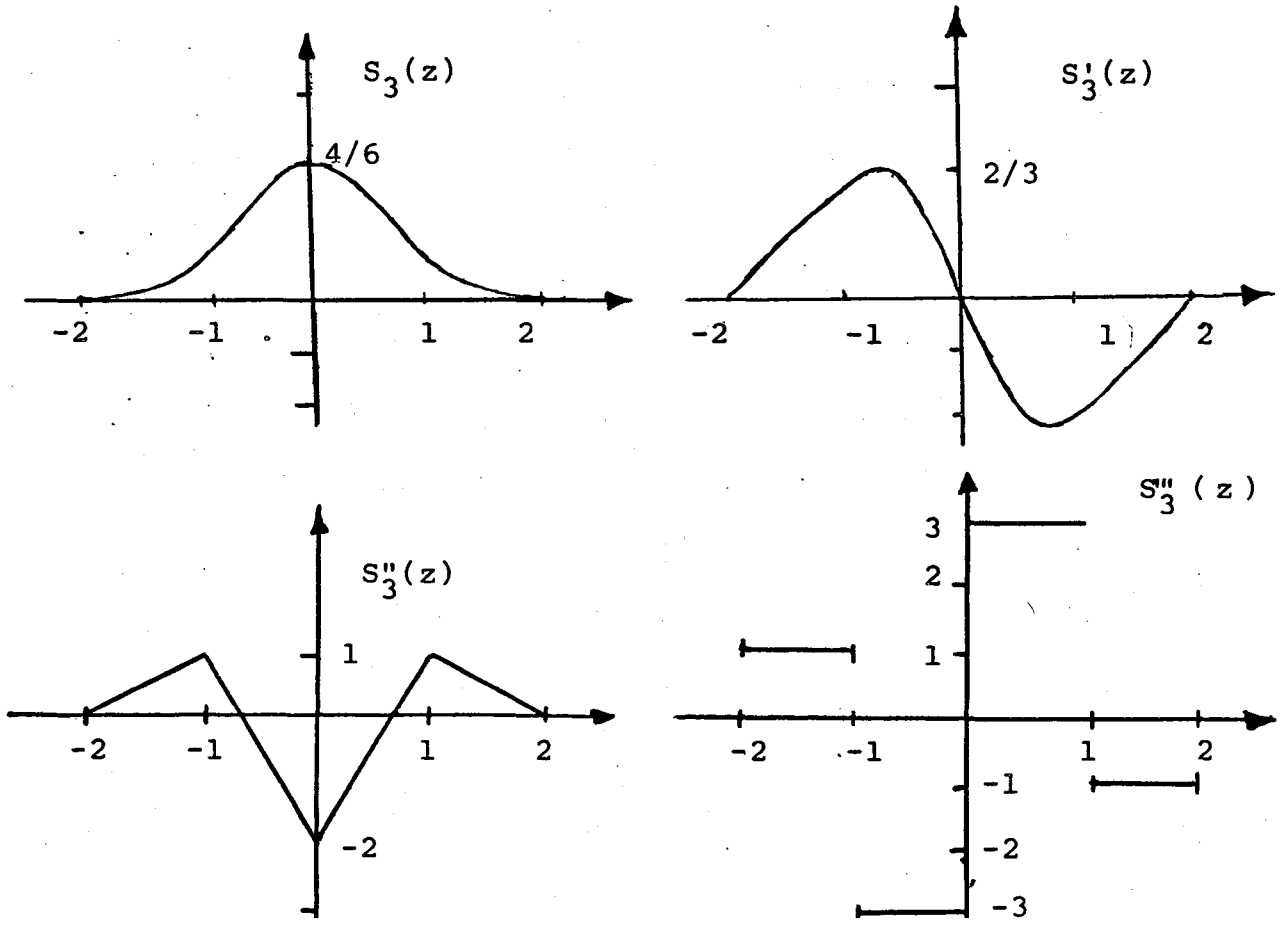
A derivada primeira de $\phi_i(t)$ é pois

$$\phi_i'(t) = \begin{cases} 1/\Delta t & , \quad t_{i-1} < t < t_i \\[2ex] -1/\Delta t & , \quad t_i < t < t_{i+1} \\[2ex] 0 & , \quad t < t_{i-1}, \quad t > t_{i+1} \end{cases}$$

Para as funções B-spline cúbicas temos a seguinte expressão genérica, considerando $[z_{i-2}, z_{i+2}] = [-2,2]$:

$$S_3(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}(z^3+6z^2+12z+8) & , \quad -2 \leq z \leq -1 \\ \frac{1}{6}(-3z^3-6z^2+4) & , \quad -1 \leq z \leq 0 \\ \frac{1}{6}(3z^3-6z^2+4) & , \quad 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{1}{6}(-z^3+6z^2-12z+8) & , \quad 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Os gráficos são os seguintes:



Observamos que, em t, as funções ϕ_j que não se anulam em $[0,T]$ são exatamente as funções $\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_{NPT}$

Agora, em x, no intervalo $[x_1, x_2]$ teremos a contribuição de $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ que não se anulam em $[x_1, x_2]$ e $\psi_{NPX-2}(x)$, $\psi_{NPX-1}(x)$, $\psi_{NPX}(x)$ e $\psi_{NPX+1}(x)$ que não se anulam em $[x_{NPX-1}, x_{NPX}]$.

Temos assim a contribuição de NPX+2 funções no intervalo $[0,1]$.

Agora, como vamos exigir que $w_1(0,t)=w_1(1,t)=w_2(0,t)=w_2(1,t)=0$ faremos a seguinte reformulação: $\tilde{\psi}_1 = \psi_2 - \psi_0$, jogamos fora ψ_1 e fazemos o análogo para o extremo superior. Vamos assim trabalhar com <u>N = NPX-2</u> funções em x e <u>M = NPT</u> funções em t. Chamaremos $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n$ de ψ_i mesmo, lembrando que

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_2 - \psi_0$$

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_3$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\psi}_{N-1} = \psi_{NPX-2}$$

$$\tilde{\psi}_N = \psi_{NPX-1} - \psi_{NPX+1}$$

e que agora, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2.\Delta x$, ..., $x_N = N.\Delta x$.

Como as funções S_3 estão definidas em $[-2,2]$, para trabalharmos em $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, com $x_i = i.\Delta x$, a mudança de variáveis nos fornece,

$$\psi_i(x) = S_3(\frac{x}{\Delta x} - i)$$

$$\psi_i'(x) = \frac{1}{\Delta x} S_3'(\frac{x}{\Delta x} - i)$$

$$\psi_i''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2} S_3''(\frac{x}{\Delta x} - i)$$

$$\psi_i'''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^3} S_3'''(\frac{x}{\Delta x} - i)$$

Queremos $\max K_\beta(c_{ij})$ e, para encontrá-lo vamos impor que a derivada de K_β em relação a $c_{\ell m}$ seja igual a zero, para todo ℓ, $1 \leq \ell \leq M$ e para todo m, $1 \leq m \leq N$, ou seja, teremos que resolver o sistema:

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} -\int_0^1 \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j'(t) \; \psi_j'(x) \,] \, \phi_\ell'(t) \; \psi_m'(x) \; dt \; dx \\ -\int_0^1 \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(t) \; \psi_i'''(x)] \; \phi_\ell(t) \; \psi_m'''(x) \; dt \; dx \\ -\int_0^1 [\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} \phi_j(T) \; \psi_i''(x)] \; \phi_\ell(T) \; \psi_m''(x) \; dx \end{array} \right.$$

$$(3)\quad \left[\begin{array}{l} -\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\phi_j(0)\ \psi_i''(x)\right]\ \phi_\ell(0)\ \psi_m''(x)\ dx \\ \\ +\int_0^1 u_0(x)\phi_\ell(0)\ \psi_m''(x)dx = 0 \quad , \quad 1 \leq \ell \leq M, \quad 1 \leq m \leq N. \end{array}\right.$$

que é um sistema linear com M.N equações e M.N incógnitas.

Levando nossas funções no nosso sistema linear (3) e efetuando a integração em t, teremos o sistema:

<u>para</u> <u>$\ell = 1$</u>:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N} c_{i,1}\left(\frac{1}{\Delta t}\right) \int_0^1 \psi_i'(x)\ \psi_m'(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,2}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx \\ \\ + \sum_{i=1}^{N} c_{i,1}\left(\frac{\Delta t}{3}\right) \int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,2}\left(\frac{\Delta t}{6}\right) \int_0^1 \psi_i'''(x)\ \psi_m'''(x)dx \\ \\ + \sum_{i=1}^{N} c_{i,1} \int_0^1 \psi_i''(x)\ \psi_m''(x)dx = \int_0^1 u_0(x)\ \psi_m''(x)\ , \quad 1 \leq m \leq N \ // \end{array}\right.$$

<u>para</u> <u>$2 \leq \ell \leq M-1$</u>:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} c_{i,\ell-1}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,\ell}\left(\frac{2}{\Delta t}\right) \int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx \end{array}\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} c_{i,\ell+1}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,\ell-1}\left(\frac{\Delta t}{6}\right)\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} c_{i,\ell}\left(\frac{4\Delta t}{6}\right)\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,\ell+1}\left(\frac{\Delta t}{6}\right)\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx$$

$$= 0, \quad 1 \leq m \leq N \;//$$

Finalmente, para $\underline{\ell = M}$,

$$\sum_{i=1}^{N} c_{i,M-1}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,M}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} c_{i,M-1}\left(\frac{\Delta t}{6}\right)\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx + \sum_{i=1}^{N} c_{i,M}\left(\frac{\Delta t}{3}\right)\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} c_{i,M}\int_0^1 \psi_i''(x)\psi_m''(x)dx = 0 \quad , \quad 1 \leq m \leq N$$

Podemos reescrever nosso sistema na forma matricial, $Rx = v$, onde:

$$R = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B & A_1 & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & A_1 & B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B & A_1 & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & B & A_1 & B \\ 0 & 0 & 0 & & & B & A \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{pmatrix}_{N.M\times 1}, \quad \text{com} \quad c_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{Nj} \end{pmatrix}_{N\times 1} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}_{NM\times 1}$$

$$\text{com } v_1 = \begin{pmatrix} \int u_0 \psi_1'' \\ \int u_0 \psi_2'' \\ \vdots \\ \int u_0 \psi_N'' \end{pmatrix}_{N\times 1} \quad \text{e} \quad v_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{N\times 1}, \quad j = 2, \ldots, M$$

sendo

$$A=(a_{mi})\left[\frac{1}{\Delta t}\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx+\frac{\Delta t}{3}\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx+\int_0^1 \psi_i''(x)\psi_m''(x)dx\right]_{N\times N}$$

$$B=(b_{mi})=\left[\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx+\frac{\Delta t}{6}\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx\right]_{N\times N}$$

$$A_1=(al_{mi})=\left[\frac{2}{\Delta t}\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx+\frac{4\Delta t}{6}\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx\right]_{N\times N}$$

Devido à relativa simplicidade das funções -spline cúbicas e suas derivadas, os cálculos das tabelas abaixo foram feitos analiticamente:

para $4 < i \leq N-3$

integrais \ m	i - 3	i-2	i-1	i	i+1	i+2	i+3
$\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_m'(x)dx$	$\frac{-1}{120.\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{8.\Delta x}$	$\frac{2}{3\Delta x}$	$\frac{-1}{8.\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{120\Delta x}$
$\int_0^1 \psi_i'''(x)\psi_m'''(x)dx$	$\frac{-1}{(\Delta x)^5}$	$\frac{6}{(\Delta x)^5}$	$\frac{-15}{(\Delta x)^5}$	$\frac{20}{(\Delta x)^5}$	$\frac{-15}{(\Delta x)^5}$	$\frac{6}{(\Delta x)^5}$	$\frac{-1}{(\Delta x)^5}$
$\int_0^1 \psi_i''(x)\psi_m''(x)dx$	$\frac{1}{6(\Delta x)^3}$	0	$\frac{-3}{2(\Delta x)^3}$	$\frac{8}{3(\Delta x)^3}$	$\frac{-3}{2(\Delta x)^3}$	0	$\frac{1}{6(\Delta x)^3}$

Agora, para $i = 1, 2, 3$ teremos:

i	m / integrais	i-3	i-2	i-1	i	i+1	i+2	i+3
1	$\int_0^1 \tilde{\psi}_1'(x)\psi_m'(x)dx$				$\frac{8}{15\Delta x}$	$\frac{-7}{60\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{120\Delta x}$
	$\int_0^1 \tilde{\psi}_1'''(x)\psi_m'''(x)dx$				$\frac{14}{\Delta x^5}$	$\frac{-14}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-1}{\Delta x^5}$
	$\int_0^1 \tilde{\psi}_1''(x)\psi_m''(x)dx$				$\frac{8}{3\Delta x^3}$	$\frac{-5}{3\Delta x^3}$	0	$\frac{1}{6\Delta x^3}$
2	$\int_0^1 \tilde{\psi}_2'(x)\psi_m'(x)dx$			$\frac{-7}{60\Delta x}$	$\frac{2}{3\Delta x}$	$\frac{-1}{8\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{120\Delta x}$
	$\int_0^1 \tilde{\psi}_2'''(x)\psi_m'''(x)dx$			$\frac{-14}{\Delta x^5}$	$\frac{20}{\Delta x^5}$	$\frac{-15}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-1}{\Delta x^5}$
	$\int_0^1 \psi_2''(x)\psi_m''(x)dx$			$\frac{-5}{3\Delta x^3}$	$\frac{8}{3\Delta x^3}$	$\frac{-3}{2\Delta x^3}$	0	$\frac{1}{6\Delta x^3}$
3	$\int_0^1 \psi_3'(x)\psi_m'(x)dx$		$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{8\Delta x}$	$\frac{2}{3\Delta x}$	$\frac{-1}{8\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{120\Delta x}$
	$\int_0^1 \psi_2'''(x)\psi_m'''(x)dx$		$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-15}{\Delta x^5}$	$\frac{20}{\Delta x^5}$	$\frac{-15}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-1}{\Delta x^5}$
	$\int_0^1 \psi_3''(x)\psi_m''(x)dx$		0	$\frac{-3}{2\Delta x^3}$	$\frac{8}{3\Delta x^3}$	$\frac{-3}{2\Delta x^3}$	0	$\frac{1}{6\Delta x^3}$

E, para $i = N-2,\ N-1,\ N$:

i	Integrais \ m	N-5	N-4	N-3	N-2	N-1	N	N+1
N-2	$\int_0^1 \psi'_{n-2}(x)\psi'_m(x)dx$	$\frac{-1}{120\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{8\Delta x}$	$\frac{2}{3\Delta x}$	$\frac{-1}{8\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	
	$\int_0^1 \psi'''_{n-2}(x)\psi'''_m(x)dx$	$\frac{-1}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-15}{\Delta x^5}$	$\frac{20}{\Delta x^5}$	$\frac{-15}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	
	$\int_0^1 \psi''_{n-2}(x)\psi''_m(x)dx$	$\frac{1}{6\Delta x^3}$	0	$\frac{-3}{2\Delta x^3}$	$\frac{8}{3\Delta x^3}$	$\frac{-3}{2\Delta x^3}$	$\frac{0}{\Delta x^3}$	
i	Integrais \ m	N-4	N-3	N-2	N-1	N	N+1	N-2
N-1	$\int_0^1 \psi'_{n-1}(x)\psi'_m(x)dx$	$\frac{-1}{120\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-1}{8\Delta x}$	$\frac{2}{3\Delta x}$	$\frac{-7}{60\Delta x}$		
	$\int_0^1 \psi'''_{n-1}(x)\psi'''_m(x)dx$	$\frac{-1}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-15}{\Delta x^5}$	$\frac{20}{\Delta x^5}$	$\frac{-14}{\Delta x^5}$		
	$\int_0^1 \psi''_{n-1}(x)\psi''_m(x)dx$	$\frac{1}{6\Delta x^3}$	0	$\frac{-3}{2\Delta x^3}$	$\frac{8}{3\Delta x^3}$	$\frac{-5}{3\Delta x^3}$		
i	Integrais \ m	N-3	N-2	N-1	N	N+1	N+2	N+3
N	$\int_0^1 \psi'_n(x)\psi'_m(x)dx$	$\frac{-1}{120\Delta x}$	$\frac{-1}{5\Delta x}$	$\frac{-7}{60\Delta x}$	$\frac{8}{15\Delta x}$			
	$\int_0^1 \psi'''_n(x)\psi'''_m(x)dx$	$\frac{-1}{\Delta x^5}$	$\frac{6}{\Delta x^5}$	$\frac{-14}{\Delta x^5}$	$\frac{14}{\Delta x^5}$			
	$\int_0^1 \psi''_n(x)\psi''_m(x)dx$	$\frac{1}{6\Delta x^3}$	0	$\frac{-5}{3\Delta x^3}$	$\frac{8}{3\Delta x^3}$			

Chamando

$$C_1 = \left(\int_0^1 \psi_i'(x)\ \psi_j'(x)dx \right)_{NxN}$$

$$D = \left(\int_0^1 \psi_i'''(x)\ \psi_j'''(x)dx \right)_{NxN}$$

$$E = \left(\int_0^1 \psi_0''(x)\ \psi_j''(x)dx \right)_{NxN}$$

teremos

$$\begin{cases} (a_{ij}) = \frac{1}{\Delta t}\ cl_{ij} + \frac{\Delta t}{3}\ d_{ij} + e_{ij} \\ (b_{ij}) = -\frac{1}{\Delta t}\ cl_{ij} + \frac{\Delta t}{6}\ d_{ij} \\ (al_{ij}) = \frac{2}{\Delta t}\ cl_{ij} + \frac{4\Delta t}{6}\ d_{ij} \end{cases}$$

com o que construimos a matriz R.

Para um nó genérico $(x_\ell\ ,\ t_k)$, temos que a aproximação da solução é dada por

$$u(x_\ell,\ t_k) \simeq w_2(x_\ell,\ t_k) + w_1(x_\ell,\ t_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\phi_j(t_k)\psi_i''(x_\ell) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\phi_j'(t_k)\psi_i(x_\ell) =$$

$$\left[= \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\Delta x^2} c_{\ell-1,j}\phi_j(t_k) - \sum_{j=1}^{M} \frac{2}{\Delta x^2} c_{\ell j}\phi_j(t_k) + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\Delta x^2} c_{\ell+1,j}\phi_j(t_k) \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{6} c_{\ell-1,j}\phi_j'(t_k) + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{M} c_{\ell j}\phi_j'(t_k) + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{6} c_{\ell+1,j}\phi_j'(t_k) \right. //$$

$$\left[= \frac{1}{\Delta x^2} c_{\ell-1,k} - \frac{2}{\Delta x^2} c_{\ell k} + \frac{1}{\Delta x^2} c_{\ell+1,k} + \right.$$

$$+ 1/6 \left[c_{\ell-1,k-1}\phi_{k-1}'(t_k) + c_{\ell-1,k}\phi_k'(t_k) + c_{\ell-1,k+1}\phi_{k+1}'(t_k) \right]$$

$$+ 2/3 \left[c_{\ell,k-1}\phi_{k-1}'(t_k) + c_{\ell k}\phi_k'(t_k) + c_{\ell,k+1}\phi_{k+1}'(t_k) \right]$$

$$\left. + 1/6 \left[c_{\ell+1,k-1}\phi_{k-1}'(t_k) + c_{\ell+1,k}\phi_k'(t_k) + c_{\ell+1,k+1}\phi_{k+1}'(t_k) \right] // \right.$$

Agora, para os pontos (x_1, t_k) as parcelas em $c_{\ell-1}$ desaparecem pois $\psi_i(0) = \psi_i''(0) = 0$ $1 \leq i \leq N$, o mesmo acontecendo com os pontos (x_N, t_k) onde as parcelas em $c_{\ell+1}$ desaparecem.

Ainda mais, como as funções $\phi_\alpha'(t)$ são descontínuas nos nós

aproximaremos assim:

(i) $\emptyset'_\alpha(t_k) = \lim_{t\to t_k^-} \emptyset'_\alpha(t)$, $\alpha = k-1,k,k+1$ donde $\emptyset'_{k+1}(t_k)=0$ e

$$u(x_\ell, t_k) \simeq \left(\frac{2}{3\Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2}\right)c_{\ell k} + \left(\frac{1}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}\right)(c_{\ell-1,k} + c_{\ell+1,k}) -$$

$$- \frac{1}{6\Delta t}(c_{\ell-1,k-1} + 4\, c_{\ell,k-1} + c_{\ell+1,k-1}),$$ ou então

(ii) $\emptyset'_\alpha(t_k) = \lim_{t\to t_k^+} \emptyset'_\alpha(t)$, $\alpha = k-1,k,k+1$, donde $\emptyset'_{k-1}(t_k)=0$ e

$$u(x_\ell, t_k) \simeq -\left(\frac{2}{3\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2}\right) c_{\ell k} + \left(\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{6\Delta t}\right)(c_{\ell-1,k} + c_{\ell+1,k})$$

$$+ \frac{1}{6\Delta t}(c_{\ell-1,k+1} + 4\, c_{\ell,k+1} + c_{\ell+1,k+1}).$$

2.3 A Convergência

Para mostrar que $\{u_k\} \to u$, segundo o teorema 4 do capítulo 1, temos que mostrar que $D = \mathcal{V}X_k$ é denso em X $(k=N.M)$.

Agora, $D = \text{span}\ [\varphi'_j(t)\psi_i(x),\ \varphi_j(t)\psi''_i(x)]$.

Para mostrar que D é denso em X vamos mostrar que o ortogonal de D em X é $\{0,0\}$.

De fato, seja $(g_1,g_2) \in D^{\perp}$; então $(g_1,g_2) \in X$ e $(g_1,g_2) \perp$ $\perp (p_1,p_2)$ $\forall$ $(p_1,p_2) \in D$, ou seja:

$$(4)\int_0^1 \int_0^T \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} \underbrace{p'(t)\ \psi'(x)}_{\frac{\partial p_1}{\partial x}} + \frac{\partial g_2}{\partial x} \underbrace{p(t)\ \psi'''(x)}_{\frac{\partial p_2}{\partial x}} \right] dt\ dx = 0 \ \forall$$

p e ψ regulares tais que $\psi(0)=\psi(1)=0$ e $\psi''(0)=\psi''(1)=0$.

Tomando $p_1(x,t)=p'(t)\psi(x)$ e $p_2(x,t) = p(t)\ \psi''(x)$, então

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}.$$

Como $(g_1,g_2) \in X$, temos que, por (16) do capítulo 1, como $\varphi(x,t) = p'(t)\psi(x)$ pertence a V,

$$\int_0^1 g_2(x,T)p'(T)\psi(x)dx - \int_0^1 g_2(x,0)p'(0)\psi(x)dx$$

$$-\int_0^1 \int_0^T g_2(x,t)p''(t)\psi(x)dt\,dx = -\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial g_1}{\partial x}\, p'(t)\,\psi'(x)dt\,dx$$

Agora por (4):

$$-\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial g_1}{\partial x}\, p'(t)\psi'(x)dt\,dx = \int_0^1 \int_0^T \underbrace{\frac{\partial g_2}{\partial x}}_{dv}\, \underbrace{p(t)\ \ \psi'''(x)}_{u}\, dt\,dx$$

= (integrando por partes e $g_2(0,t) = g_2(1,t) = 0$)

$$= -\int_0^1 \int_0^T g_2(x,t)p(t)\,\psi^{(iv)}\,(x)dt\,dx\ //$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^T g_2(x,t)p(t)\psi^{(iv)}(x)dt\,dx - \int_0^1 \int_0^T g_2(x,t)p''(t)\psi(x)dt\,dx=$$

$$= \int_0^1 g_2(x,T)p'(T)\psi(x)dx - \int_0^1 g_2(x,0)p'(0)\psi(x)dx$$

Ou seja,

$$\int_0^1 \int_0^T g_2(x,t)\left[p(t)\,\psi^{(iv)}(x) - p''(t)\psi(x)\right] dt\,dx =$$

$$= \int_0^1 g_2(x,T)p'(T)\psi(x)dx - \int_0^1 g_2(x,0)p'(0)\psi(x)dx.$$

Sejam $\psi(x) = \text{sen } n\pi x$ e $p(t) = e^{n^2\pi^2 t} + e^{-n^2\pi^2 t}$.

Assim $\psi^{(iv)}(x) = n^4\pi^4\,\psi(x)$ e

$$p''(t) = n^4\pi^4\; p(t)$$

Ainda mais $\psi(0) = \psi(1) = 0$ donde $\varphi(x,t) = p'(t)\psi(x) \in V$.

Agora, $p'(t) = n^2\pi^2 \left[e^{n^2\pi^2 t} - e^{-n^2\pi^2 t}\right]$ donde

$$p'(0) = 0 \quad \text{e} \quad p'(T) \neq 0.$$

Com isto,

$$\int_0^1 \int_0^T g_2(x,t) \left[p(t)\;\psi^{(iv)}(x) - p''(t)\psi(x)\right] dt\, dx \equiv 0$$ o que

implica em $\int_0^1 g_2(x,T)p'(T)\psi(x)\, dx - \int_0^1 g_2(x,0)p'(0)\psi(x)dx = 0$ e,

como $p'(0)=0$, $\int_0^1 g_2(x,T)p'(T)\psi(x)dx = 0 = p'(T)\int_0^1 g_2(x,T)\psi(x)dx.$

Mas $p'(T) \neq 0 \Rightarrow \int_0^1 g_2(x,T)\;\text{sen } n\pi dx = 0$, $\forall n$.

Como $g_2(0,T) = g_2(1,T)=0$ então $g_2(x,T) \equiv 0$ //

Com argumentos análogos mostramos que $g_2(x,0) \equiv 0$ //

Isto implica que

$$\int_0^1 \int_0^T g_2(x,t) \left[p(t)\psi^{(iv)}(x) - p''(t)\psi(x) \right] dt\, dx = 0, \quad \forall \ \varphi \in V$$

Seja novamente $\psi(x) = \text{sen } n\pi x$; então

$$\psi^{(iv)}(x) = n^4\pi^4 \text{ sen } n\pi x \quad e, \quad \forall n ,$$

$$n^4\pi^4 \int_0^1 \int_0^T g_2(x,t) \text{ sen } n\pi x \left[p(t) - p''(t) \right] dt\, dx = 0$$ e tomando

$p(t) = \text{sen } k\pi t$ donde $p''(t) = -k^2\pi^2 \text{ sen } k\pi t$ temos que, $\forall k$,

$$(1+k^2\pi^2)n^4\pi^4 \int_0^1 \int_0^T g_2(x,t) \text{ sen } n\pi x \text{ sen } k\pi t \ dt\, dx = 0$$ ou seja

$$\forall k, \ \forall n \int_0^1 \int_0^T g_2(x,t) \text{ sen } n\pi x \text{ sen } k\pi t \ dt\, dx = 0$$ e, como

$g_2(0,t) \equiv g_2(1,t) \equiv 0$ e $g_2(x,0) \equiv g_2(x,1) \equiv 0$, $g_2(x,t) \equiv 0$.

Voltando em (4) teremos que

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial g_1}{\partial x} p'(t)\, \psi'(x)\, dt\, dx = 0 \quad \forall \ p \ e \ \psi \ \text{regulares}$$

com $\psi(0) = \psi(1) = 0$ e $\psi''(0) = \psi''(1) = 0$, donde

$$\int_0^1 \int_0^T g_1(x,t)\, p'(t)\, \psi''(x)\,dt\,dx = 0$$

e, da mesma forma que anteriormente, $g_1(x,t) \equiv 0$.

2.4 Resultados Numéricos

Para testar este método, trabalhamos com a equação do calor (1) com condição inicial $u_0(x)=\text{sen}\pi x$ da qual conhecemos a solução exata: $u(x,t)=\text{sen}\pi x\, e^{-\pi^2 t}$ e assim podemos medir o erro cometido.

Todos os programas foram feitos em linguagem FORTRAN e implementados no computador Digital da linha VAX, disponível no CPD da UNICAMP.

Inicialmente elaboramos um programa, TBLOCK, com ajuda do prof. Petrônio Pulino, o qual usa um algorítmo específico para matrizes tri-diagonais por blocos e explora o fato dos blocos serem banda 7, que é o nosso caso. Este algoritmo efetua a decomposição

de R em L.U em blocos, sem usar nenhuma estratégia de pivoteamento. Os resultados obtidos não foram os esperados e para redes mais refinadas, houve mesmo divergência, mesmo tentando fazer refinamento iterativo da solução.

Depois tentamos duas rotinas da MA-28 [2] usadas pela NAG, também sem sucesso. Uma delas, a F01BRF, faz a decomposição de uma permutação da matriz R em L.U, usando a esparsidade de R. Ela usa uma estratégia pivotal feita com o comprometimento entre manter a esparsidade e controlar a perda de precisão por arredondamento. A outra, a F04AXF, resolve sistemas lineares esparsos com um único vetor constante v, usando a decomposição da matriz do sistema feita pela rotina F01BRF.

Tentamos então a rotina F04ATF[17]-(i), também da NAG, que trabalha com matrizes cheias e calcula a solução de um sistema linear $Rx = v$ pelo método de Crout com pivotamento parcial para decompor R em L.U e faz refinamento iterativo da solução. Embora obtivéssemos convergência, mesmo para as malhas mais refinadas, a esperada convergência, da ordem de Δt em t e de $(\Delta x)^2$ em x não ocorreu.

Resultados análogos a estes foram obtidos usando o método dos Gradientes Conjugados para resolver o sistema $Rx=v$. Efetuamos tantas iterações quanto a dimensão de R e no final a norma do Gradiente era ainda da ordem de 10^{-1}.

Fizemos finalmente uma pesquisa sobre o número de condição da matriz R. Para isto usamos a rotina F02AAF[17]-(ii) da NAG que nos

fornece todos os auto-valores de uma matriz real e simétrica por redução de Householder e o algoritmo QL.

Segundo Forsythe & Moler [3] uma medida de $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ ou seja do erro relativo na solução causado por um erro relativo no vetor constante ou nos elementos da matriz é $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \rho.\ \mathrm{cond}(R).\ \beta^{-t}$ onde ρ é uma quantidade não maior que a base β na qual opera a máquina e β^{-t} é o epsilon da máquina, que para o nosso caso é estimado em 5×10^{-8}.

Por exemplo para dim R=119, obtemos cond(R)≃ 10.400 donde $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 5\times10^{-3}$. Já para dim R = 209, cond(R)≃6×10^{7} donde $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 30$. Isto indica que a matriz R é muito mal condicionada o que julgamos ser a explicação dos resultados ruins que obtivemos.

CAPÍTULO 3

APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES "CHAPÉU"

3.1 Introdução

Neste capítulo desenvolvemos um método numérico para aproximação da solução da equação geral do calor o qual deduzimos a partir da mesma equação estudada no capítulo anterior:

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(0,t) = u(1,t)=0 \qquad 0 \leq t \leq T \quad , \ \forall \ x \in [0,1] \ , \ t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Da mesma forma que anteriormente vamos procurar $\max K_\beta(w_1,w_2)$ com

$$\underline{K_\beta(w_1,w_2)} = -\,0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] \quad dt\ dx$$

$$-\,0{,}5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x)w_2(x,0) \right] \ dx$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \qquad (v1\text{-}2) \\ \\ w_2(0,t) = w_2(1,t) = 0 \qquad (v3\text{-}2) \end{cases}$$

ou $\min J_\alpha(w_1,w_2)$, com

$$\underline{J_\alpha(w_1,w_2)} = 0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx \; +$$

$$+ \; 0,5 \int_0^1 \left[w_1^2(x,T) + u_0^2(x) - 2u_0(x)w_1(x,0) + w_1^2(x,0) \right] dx$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} & \text{(v1-i)} \\[2ex] w_1(0,t) = w_1(1,t) = 0 & \text{(v3-1)} \end{cases}$$

O que fazemos aqui é:

(i) exigir que os vínculos (v1) sejam feitos na sua forma fraca discretizada. Uma integração por partes na formulação fraca de (1) nos sugere trabalharmos com funções "chapéu" tanto em x como em t, as quais escolhemos satisfazendo trivialmente as condições de vínculo (v3).

(ii) escrever a forma fraca das condições (v1) em forma matricial de modo que conseguimos escrever a matriz A dos coeficientes a_{ij} em função de B , matriz dos coeficientes b_{ij}.

(iii) escrever o funcional K_β (J_α) na forma de soma de traços de produtos de matrizes.

iv) levar a expressão de A em função de B obtida em (ii) na expressão do funcional em (iii) de forma a obter um problema de maximização (minimização)sem restrições o qual é resolvido pelo método dos Gradientes Conjugados.

Apresentamos ainda um estudo sobre a convergência deste método, bem como resultados numéricos.

3.2 A Formulação Matricial dos Vínculos (v1)

Conforme feito anteriormente,faremos os cálculos detalhados para o caso do princípio do máximo e, depois, só os adaptaremos para o princípio do mínimo.

Vamos então encontrar $\max K_\beta(w_1,w_2)$ onde

$$\left[\begin{array}{l} \underline{K_\beta(w_1,w_2)} = -0,5\displaystyle\int_0^1\int_0^T\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\,dx \\ \\ \qquad\qquad - 0,5\displaystyle\int_0^1\left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x)w_2(x,0)\right] dx \end{array}\right.$$

e as restrições ficaram:

$$\left[\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right.$$

desde que $w_2(1,t) = w_2(0,t) = 0$.

Convém lembrarmos aqui que, para resolver o princípio do mínimo, teremos que ter $w_1(1,t)=w_1(0,t)=0$.

A maneira como conseguimos escrever as restrições (v1) na forma matricial foi usando o método de Galerkin para aproximá-las. Para isto, tomamos sua formulação fraca:

$$< \frac{\partial w_2}{\partial t}, \varphi > = < \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \varphi > \quad \text{para} \quad \forall \varphi \in V, \ V \text{ espaço vetorial das funções teste, com } < f,g > = \int_0^1 \int_0^T f(x,t)g(x,t)dt\, dx.$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial t}(x,t)\varphi(x,t)dt\, dx = \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\varphi(x,t)dt\, dx = \text{(p/partes em x)}$$

$$\underbrace{\int_0^T \varphi(x,t) \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t)dt\Big|_0^1 - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dt\, dx}_{I}, \quad \forall \varphi \in V$$

Se V for tal que $\varphi(0,t)=\varphi(1,t)=0 \quad \forall \varphi \in V$ então

$$I = \int_0^T \varphi(1,t)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t)dt - \int_0^T \varphi(0,t)\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t)dt - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dt\, dx =$$

$$= - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dt \, dx$$

Com isto as restrições (v1-2) ficam:

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial t}(x,t)\varphi(x,t)dt \, dx = - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt \, dx \, \forall \varphi \in V$$

desde que $w_1(1,t)=w_1(0,t)=w_2(1,t)=w_2(0,t)=0$.

Com esta nova visão das restrições do problema e das funções teste, tomaremos, como <u>nossos espaços de dimensão finita</u>, para o método de Galerkin:

W:(w_1 e $w_2 \in W$): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_{n-1}$ em x e $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m$ em t)

$$(2) \quad \left[\begin{array}{l} w_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \, \varphi_i(x) \, \psi_j(t) \\ \\ w_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \, \varphi_i(x) \, \psi_j(t) \end{array} \right.$$

V:(espaço das funções-teste): $g_{k\ell}(x,t)= \varphi_k(x)\psi_\ell(t)$ $1 \leq k \leq n-1$, $0 \leq \ell \leq m$ $(\Rightarrow g_{k\ell}(0,t)= g_{k\ell}(1,t)=0)$

onde, tanto as funções $\varphi_r(x)$ como as $\psi_s(t)$ são também funções

"chapéu", cujos gráficos genéricos se encontram no capítulo anterior.

De (2) concluímos que

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e} \quad \dfrac{\partial g_k}{\partial x} = \varphi_k'(x)\psi_\ell(t) \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j'(t) \end{cases}$$

Assim, dado que a restrição (v2-2) está incluída no funcional e que as restrições (v3-2) são satisfeitas naturalmente pela escolha de W, nosso princípio do máximo tem, como única restrição,

$$(v1\text{-}2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j'(t)\Big]\varphi_k(x)\psi_\ell(t)dt\,dx = \\ \displaystyle -\int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\Big]\varphi_k'(x)\psi_\ell(t)dt\,dx\ , \quad 1\leq k\leq n-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\leq \ell\leq m. \end{cases}$$

Agora,

$$a):\quad \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_i'(t)\Big]\varphi_k(x)\psi_\ell(t)dt\,dx \quad =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \left(\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx \right) \left(\int_0^T \psi_j'(t)\psi_\ell(t)dt \right)$$

$$b): -\int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t) \right] \varphi_k'(x)\psi_\ell(t)dt\, dx$$

$$= - \sum_{i=1}^{n=1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_k'(x)dx \right) \left(\int_0^1 \psi_j(t)\psi_\ell(t)dt \right).$$

Sendo A, B, C, D, E e F as matrizes:

$A = (a_{ij})_{(n-1)x(m+1)}$ matriz das incógnitas, coeficientes de $w_1(x,t)$

$B = (b_{ij})_{(n-1)x(m+1)}$ matriz das incógnitas, coeficientes de $w_2(x,t)$

$$C = (c_{ki}) = \left(\int_0^1 \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right)_{(n-1)x(n-1)}$$

$$D = (d_{j\ell}) = \left(\int_0^T \psi_j'(t)\psi_\ell(t)dt \right)_{(m+1)x(m+1)}$$

$$E = (e_{ki}) = \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_k'(x)dx \right)_{(n-1)x(n-1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \left(\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx \right) \left(\int_0^T \psi_j'(t)\psi_\ell(t)dt \right)$$

$$b): -\int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t) \right] \varphi_k'(x)\psi_\ell(t)dt\, dx$$

$$= - \sum_{i=1}^{n=1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_k'(x)dx \right) \left(\int_0^1 \psi_j(t)\psi_\ell(t)dt \right).$$

Sendo A, B, C, D, E e F as matrizes:

$A = (a_{ij})_{(n-1)x(m+1)}$ matriz das incógnitas, coeficientes de $w_1(x,t)$

$B = (b_{ij})_{(n-1)x(m+1)}$ matriz das incógnitas, coeficientes de $w_2(x,t)$

$$C = (c_{ki}) = \left(\int_0^1 \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right)_{(n-1)x(n-1)}$$

$$D = (d_{j\ell}) = \left(\int_0^T \psi_j'(t)\psi_\ell(t)dt \right)_{(m+1)x(m+1)}$$

$$E = (e_{ki}) = \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_k'(x)dx \right)_{(n-1)x(n-1)}$$

$$F = (f_{j\ell}) = \left(\int_0^T \psi_j(t)\, \psi_\ell(t)dt \right)_{(m+1)x(m+1)}$$

teremos:

$$a): \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} c_{ik} d_{j\ell} = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} b_{ij} d_{j\ell} \right)}_{bd_{i\ell}} c_{ki} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} c_{ki} (bd)_{i\ell} = (cbd)_{k\ell} = C.B.D \;//$$

$$b): \; - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} e_{ki} f_{j\ell} = - \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} a_{ij} f_{j\ell} \right)}_{af_{i\ell}} e_{ki} =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} e_{ki} (af)_{i\ell} = - (eaf)_{k\ell} = - E.A.F \;//$$

O fato de a) = b) implica em

$$CBD = - EAF$$

As matrizes C, D, E e F são as seguintes:

$$C = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 \cdots\cdots & & & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 4 \end{bmatrix}_{(n-1)x(n-1)}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & & 1/2 & +1/2 \end{bmatrix}_{(m+1)x(m+1)}$$

$$E = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cdots\cdots -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots -1 & 2 \end{bmatrix}_{(n-1)x(n-1)}$$

$$F = \frac{\Delta t}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots & & 4 & 1 \\ 0 & 0 \cdots\cdots & & 1 & 2 \end{bmatrix}_{(m+1)x(m+1)}$$

Queremos escrever B em função de A ou A em função de B para, após fazermos a formulação do funcional em forma "matricial", podermos fazer a devida substituição.

A matriz D é matriz <u>não</u> inversível pois $D.\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Assim, não podemos escrever B em função de A. Agora F é matriz quadrada, simétrica, estritamente diagonalmente dominante, donde inversível e E é, como F, quadrada, simétrica e diagonalmente dominante donde também inversível.

Temos também que a matriz E:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 \ldots & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \ldots\ldots 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \ldots\ldots 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & & (n-1)/(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & & 0 & n/(n-1) \end{bmatrix}_{(n-1)x(n-1)}$$

Portanto,

$$-E.A.F = C.D.B$$

$$A.F = -E^{-1}.C.B.D$$

$$\boxed{A = -E^{-1}.C.B.D.F^{-1}} \qquad (= S^t.B.DF)$$

3.3 O Funcional $K_\beta(w_1,w_2)$ na Forma de Soma de Traços de Produtos de Matrizes:

Queremos encontrar $\max K_\beta(w_1,w_2)$ e, conforme dissemos anteriormente vamos usar o método dos Gradientes Conjugados, para isto.

Agora, o método dos Gradientes Conjugados é formulado para calcular $\min F(x)$; como $\max K_\beta(w_1,w_2) = -\min(-K_\beta(w_1,w_2))$, vamos então trabalhar, daqui pra frente com o funcional

$Q(w_1,w_2) = -K_\beta(w_1,w_2) \quad \Rightarrow$

$$\underline{Q(w_1,w_2)} = 0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x)w_2(x,0) \right] dx$$

Analisemos $Q(w_1,w_2)$, parcela por parcela:

<u>Parcela 1</u>: $0,5 \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 dt\, dx = 0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\right]^2 dt dx$

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\right]\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{m} a_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(t)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{ij}\varphi_i'\psi_j a_{k\ell}\varphi_k'\psi_\ell =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{m}\left[\sum_{\ell=0}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{ik}'a_{k\ell}\right)\psi_{\ell j}\right]a_{ij}\right\} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{ik}'a_{k\ell}\,\psi_{\ell j}a_{ij}, \quad \text{com:}$$

$$\Phi_1'(x)=(\varphi_{ir}'(x)) = (\varphi_i'(x)\,\varphi_r'(x))_{(n-1)x(n-1)} \quad (1\leq i\ ,r\leq n-1)$$

$$\Psi(t)=(\psi_{js}(t)) = (\psi_j(t)\psi_s(t))_{(m+1)x(m+1)} \quad (0\leq j\ ,\ s\leq m)$$

Agora,

$$\Phi_1'.A = X = (x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{ik}'a_{kj} \quad \text{é matriz } (n-1)x(m+1)$$

$$(\Phi_1'.A).\Psi = X.\Psi = Y = (y_{rs}) = \sum_{k=0}^{m} x_{r\ell}\psi_{\ell s} \quad \text{é matriz } (n-1)x(m+1)$$

Então

$$Z = Y.A^t = (\Phi_1'.A.\Psi)A^t = (z_{pq}) = \sum_{j=0}^{m} y_{pj}a_{qj}' \text{(é matriz}(n-1)x(n-1))$$

$$\hat{=} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} x_{p\ell}\, \psi_{\ell j} a_j^q = \sum_{j=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi'_{pk} a_{k\ell} \psi_{\ell j} a_{qj} \quad //$$

Temos pois que

$$\operatorname{tr} Z = \sum_{t=1}^{n=1} z_{tt} = \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi'_{tk}\, a_{k\ell} \psi_{\ell j} a_{tj} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \varphi'_i(x) \psi_j(t) \right]^2$$

Com isto,

$$0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 dt\, dx = 0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \operatorname{tr}(\Phi_1'(x).A.\Psi(t).A^t)\, dt\, dx$$

<u>Parcela 2</u>: $0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dt\, dx = 0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi'_i(x) \psi_j(t) \right]^2 dt dx$

De forma completamente análoga,

$$0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dt\, dx = 0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\operatorname{tr}(\Phi_1'(x).B.\psi(t).B^t)\right] dt\, dx$$

<u>Parcela 3</u>:

$$0,5 \int_0^1 w_2^2(x,T)dx = 0,5 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(T) \right]^2 dx$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(T) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(T) \right] \left[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell} \varphi_k(x) \psi_\ell(T) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{ij} \varphi_i \psi_j b_{k\ell} \varphi_k \psi_\ell$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{\ell=0}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{ik} b_{k\ell} \right) \psi_{j\ell}^T \right] b_{ij} \right\} , \text{ com}$$

$$\Omega(x) = (\Omega_{ij}) = (\varphi_i(x) \varphi_j(x))_{(n-1)x(n-1)}$$

$$\psi_T = (\psi_{ij}^T) = (\psi_i(T) \psi_j(T))_{(m+1)x(m+1)}$$

Repetindo o mesmo raciocínio da Parcela 1,

$$0,5 \int_0^1 w_2^2(x,T)dx = 0,5 \int_0^1 [tr(\Omega(x).B.\psi_T.B^t)] dx$$

Da mesma forma para a <u>Parcela 4:</u>

sendo

$$\psi_0 = (\psi^0_{ij}) = (\psi_i(0)\psi_j(0))_{(m+1)x(m+1)} \quad , \quad \text{teremos}$$

$$0,5 \int_0^1 w_1^2(x,0)dx = 0,5 \int_0^1 [tr(\Omega(x).B.\psi_0.B^t)] \; dx$$

<u>Parcela 5</u>:

$$\int_0^1 u_0(x)\bar{w}_2(x,0)dx = \int_0^1 [u_0(x) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\Psi_j(0)] \; dx$$

$$\int_0^1 u_0(x) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(0)dx = \ldots = b_{10} \int_0^1 u_0(x)\varphi_1(x)dx \quad +$$

$$+ \; b_{20} \int_0^1 u_0(x)\,\varphi_2(x)dx + \ldots\ldots + b_{n-1,0} \int_0^1 u_0(x)\varphi_{n-1}(x) \; dx$$

Sendo

$$D^{\int u} = (d^{\int u}_{ij}) = \begin{cases} \int_0^1 u_0(x)\varphi_i(x)dx \; , & i = j \\ 0 \; , & i \neq j \end{cases} \qquad \text{matriz } (n-1)x(n-1)$$

$$\bar{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 \end{bmatrix}_{(m+1)x(n-1)}$$

Temos que

$$D^{\int u}.B.\bar{1} = \begin{bmatrix} b_{10}\int u_0\varphi_1 & b_{10}\int u_0\varphi_1 \cdots\cdots b_{10}\int u_0\varphi_1 \\ b_{20}\int u_0\varphi_2 & b_{20}\int u_0\varphi_1 \cdots\cdots b_{20}\int u_0\varphi_1 \\ \vdots & \\ b_{n-1,0}\int u_0\varphi_{n-1} & b_{n-1,0}\int u_0\varphi_{n-1} \cdots\cdots b_{n-1,0}\int u_0\varphi_{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\int_0^1 u_0'(x)w_2(x,0)dx = tr\,(D^{\int u}.B.\bar{1})$$

Chegamos pois à seguinte formulação para Q, que agora deixa de ser $Q(w_1,w_2)$ e passa a ser $Q(A,B)$:

$$\underline{Q(A,B)} = 0,5 \int_0^1 \int_0^T [tr(\Phi_1'(x).A.\psi(t).A^t)]\, dt\, dx$$

$$+ 0,5 \int^1 \int_0^T [tr(\Phi_1'(x).B.\psi(t).B^t)]\, dt\, dx$$

$$+ 0,5 \int_0^1 [tr(\Omega(x).B.\psi_T.B^t)]\, dx$$

$$+ 0,5 \int_0^1 [tr(\Omega(x).B.\psi_0.B^t)]\, dx$$

$$- tr(D^{\int u}.B.\bar{I}) \;//$$

Agora,

$$0,5 \int_0^1 \int_0^T [tr\,(\Phi_1'(x).A.\psi(t).A^t)]\, dt\, dx =$$

$$= 0,5 tr\,[\int_0^1 \int_0^T [\Phi_1'(x).A.\psi(t).A^t)]\, dt\, dx =$$

$$= 0,5 \quad tr\,[\int_0^1 \Phi_1'(x)dx.A.\int_0^T \psi(t)dt.A^t]\, dt\, dx \;//$$

Mas,

$$\int_0^1 \Phi_1'(x)\,dx = \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_r'(x)dx \right) = E$$

$$\int_0^T \psi(t)dt = \left(\int_0^1 \psi_j(t)\,\psi_s(t)dt \right) = F.$$

Assim,

$$0,5\int_0^1 \int_0^T [tr(\Phi_1'(x).A.\psi(t).A^t)]\ dt\ dx = 0,5\ tr(E.A.F.A^t)\ //$$

Análogamente,

$$0,5\int_0^1 \int_0^T tr\ (\Phi_1'(x).B.\psi(t).B^t)]\ dt\ dx = 0,5\ tr\ (E.B.F.B^t)\ //$$

Como

$$0,5\int_0^1 tr\ (\Omega(x).B.\psi_T.B^t)]\ dx = 0,5\ \ tr\ \left(\int_0^1 \Omega(x)dx.B.\psi_T.B^t \right)$$

e

$$\int_0^1 \Omega(x)dx = \left(\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \right) = C \quad , \quad \text{então}$$

$$0,5 \int_0^1 tr\,(\Omega(x).B.\psi_T.B^t)\,]\,dx = 0,5\,tr\,(C.B.\psi_T.B^t).\ //$$

Da mesma forma,

$$0,5 \int_0^1 tr\,(\Omega(x).B.\psi_0.B^t)\,]\,dx = 0,5\,tr\,(C.B.\psi_0.B^t).\ //$$

Temos assim a versão final de $Q(A,B)$:

$$\underline{Q(A,B)} = 0,5\,tr(E.A.F.A^t) + 0,5tr(E.B.F.B^t) + 0,5tr(C.B.\psi_T.B^t) +$$

$$+ 0,5\,tr(C.B.\psi_0.B^t) - tr(D^{\int u}.B.\bar{I})$$

Levando agora a expressão de $A(= - E^{-1}.C.B.D.F^{-1})$ em $Q(A,B)$ teremos a formulação desejada para o princípio do máximo pois então vamos procurar min $Q(B)$, sem restrições.

$$\underline{Q(B)} = 0,5tr[E.(-)E^{-1}.C.B.D.F^{-1}.F.(-)(E^{-1}.C.B.D.F^{-1})^t\,]$$

$$+ 0,5tr(E.B.F.B^t) + 0,5tr(C.B.\psi_T.B^t) + 0,5tr(C.B.\psi_0.B^t) - tr(D^{\int u}.B.\bar{I})\ //$$

Sendo

$$\begin{cases} S = C^t.E^{-1t} \Rightarrow S^t = E^{-1}C \quad (C \text{ é simétrica}) : (n-1)x(n-1) \\ R = D.(D.F^{-1})^t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad : (m+1)x(m+1) \end{cases}$$

teremos finalmente:

$$\underline{Q(B)}=0{,}5tr(C.B.R.B^t.S)+0{,}5tr(E.B.F.B^t)+0{,}5tr(C.B.\psi_T.B^t)+0{,}5tr(C.B.\psi_0.B^t)-tr(D^{\int u}.B.\bar{1})$$

3.4 O Método dos Gradientes Conjugados

O método dos Gradientes Conjugados [5], [8] e [9] que trabalha com direções conjugadas, é aplicável a problemas quadráticos:

$$\text{minimize } Q(x) = \text{minimize } \{ \tfrac{1}{2}x^t\, Gx - b^t x \}$$

onde G é matriz simétrica, definida positiva.

Definição:

Dada uma matriz simétrica G, dois vetores d_1 e d_2 são ditos G-ortogonais, ou conjugados com respeito a G, se $d_1^t\, Gd_2 = 0$.

Temos, para o método, o seguinte

Algoritmo:

Começando com qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e, dado $\varepsilon > 0$, defina $d_0 = -g_0 = b - Gx_0 = -\text{grad } Q(x_0)$. Se $\|d_0\| < \varepsilon \Rightarrow x_0$ é a solução, caso contrário, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, onde

$$\alpha_k = -\frac{g_k^t\, d_k}{d_k^t\, Gd_k} = \frac{\langle g_k\, ,\, d_k\rangle}{\langle d_k\, ,Gd_k\rangle}.$$ Se $\|g(x_{k+1})\| < \varepsilon \Rightarrow x_{k+1}$ é

a solução. Caso contrário ($g(x_{k+1}) = g_{k+1}$),

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^t \, Gd_k}{d_k^t \, G \, d_k} = \frac{\langle g_{k+1}, Gd_k \rangle}{\langle d_k, Gd_k \rangle}$$

onde $g_k = Gx_k - b$.

No algorítmo, a partir do segundo passo, cada passo seguinte se move numa direção que é uma combinação linear do gradiente correspondente ao passo e do vetor direção anterior. E as direções são G-conjugadas.

Uma observação importante é que a convergência do método é garantida em, no máximo, n iterações, onde n é a dimensão de G.

No capítulo 1 mostramos que a forma bilinear $S(x,y)$ associada ao nosso operador é simétrica, definida-positiva.

Observamos também que encontrar $\min Q(x)$ é o mesmo que resolver a equação $Rx = b$, uma vez que

$$Q(x) = Q(w_1, w_2) = \frac{1}{2} x^t Rx - b^t x.$$

e

$$\min\left[\frac{1}{2} x^t Rx - b^t x\right] = \min \left(\frac{1}{2} \langle x, Rx \rangle - \langle b, x \rangle \right) \equiv$$

$\equiv$ solução do sistema $Rx = b$ $\Leftrightarrow$

$$g(x) = Rx - b = 0 \quad \text{com} \quad g(x) = \text{grad } Q(x) \; //$$

Para o nosso problema, queremos min Q(B), sem restrições e então teremos que adaptar o algorítmo do método dos Gradientes Conjugados.

Precisamos, em cada passo, de Rd_k, para o qual <u>não</u> temos uma expressão analítica. No entanto sabemos que $Rx=g(x)+b=$ grad $Q(x)+b$.

Assim, dada uma matriz B inicial, B^0, vamos construir uma sequência B^1, B^2,....., B^k ,..... de matrizes B até encontrarmos um k para o qual $\|g(B^{k+1})\| < \varepsilon$.

Precisamos pois, calcular grad(Q(B)). Este cálculo será efetuado via derivada direcional mais o teorema de representação de Riesz.

Achemos pois a derivada direcional de Q(B), numa direção K qualquer: dada K, matriz (n-1)x(m+1),

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Der}[Q(B)]K} = {} & 0{,}5\,\mathrm{tr}[C.K.R.B^t.S] + 0{,}5\,\mathrm{tr}[C.B.R.K^t.S] + \\ & + 0{,}5\,\mathrm{tr}[E.K.F.B^t] + 0{,}5\,\mathrm{tr}[E.B.F.K^t] + \\ & + 0{,}5\,\mathrm{tr}[C.K.\psi_T.B^t] + 0{,}5\,\mathrm{tr}[C.B.\psi_T.K^t] + \\ & + 0{,}5\,\mathrm{tr}[C.K.\psi_0.B^t] + 0{,}5\,\mathrm{tr}[C.B.\psi_0.K^t] + \\ & - \mathrm{tr}[D^{\mu}.K.\bar{1}] \quad //\end{aligned}$$

A seguir demonstraremos um teorema que será usado nos cálculos da Der[Q(B)] K;

<u>Teorema 1</u>:

tr X.Y = tr Y.X para quaisquer duas matrizes X e Y que tenham os produtos X.Y e Y.X definidos.

<u>Dem</u>:

Sejam X matriz mxn e Y matriz nxm, quaisquer. Assim X.Y e Y.X estão definidos.

Então,

$$X.Y = Z_{mxm} \quad \text{com} \quad z_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_{ik}y_{kj} \Rightarrow z_{ii} = \sum_{k=1}^{m} x_{ik}y_{ki}$$

Agora $\text{tr}\,(X.Y) = \text{tr}(Z) = \sum_{i=1}^{n} z_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik}y_{ki} \right)$ //

Por outro lado, $Y.X = W_{nxn}$ com $w_{pq} = \sum_{\ell=1}^{n} y_{p\ell}x_{\ell q} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w_{pp} = \sum_{\ell=1}^{n} y_{p\ell}x_{\ell p}; \text{ e } \text{tr}(Y.X) = \text{tr}(W) = \sum_{p=1}^{m} w_{pp} =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \left(\sum_{\ell=1}^{n} y_{p\ell}x_{\ell p} \right).$$

Ou seja:

$$\text{tr}(Y.X) = \sum_{p=1}^{m} \left(\sum_{\ell=1}^{n} y_{p\ell}x_{\ell p} \right) = \sum_{p=1}^{m} \left(\sum_{\ell=1}^{n} x_{\ell p}y_{p\ell} \right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{m} x_{\ell p}y_{p\ell} \right) = \text{tr}\,(X.Y).$$

Usando devidamente este teorema na expressão da derivada direcional de $Q(B)$ temos:

$$\underline{Der[Q(B)]K} = 0,5\,tr\,[K.R.B^t.S.C] + 0,5\,tr\,[S.C.B.R.K^t] +$$

$$+ 0,5\,tr\,[K.F.B^t.E] + 0,5\,tr\,[E.B.F.K^t] +$$

$$+ 0,5\,tr\,[K.\psi_T.B^t.C] + 0,5\,tr\,[C.B.\psi_T.K^t] +$$

$$+ 0,5\,tr\,[K.\psi_0.B^t.C] + 0,5\,tr\,[C.B.\psi_0.K^t] - tr\,[K.\bar{I}.D^{\int u}]$$

Como $tr\,X = tr\,X^t$,

$$\underline{Der[Q(B)]K} = 0,5\,tr\,[C^t.S^t.B.R^t.K^t] + 0,5\,tr\,[S.C.B.R.K^t] +$$

$$+ 0,5\,tr\,[E^t.B.F^t.K^t] + 0,5\,tr\,[E.B.F.K^t] +$$

$$+ 0,5\,tr\,[C^t.B.\psi_T^t.K^t] + 0,5\,tr\,[C.B.\psi_T.K^t] +$$

$$+ 0,5\,tr\,[C^t.B.\psi_0^t.K^t] + 0,5\,tr\,[C.B.\psi_0.K^t] -$$

$$- tr\,[D^{\int u}.\bar{I}^t.K^t] //$$

Temos ainda que as matrizes E, F, C, ψ_T, ψ_0 e $D^{\int u}$ são simétricas. Ainda mais

$$\left.\begin{array}{l}(SC)^t = (C^t.E^{-1t}.C)^t = (C.E^{-1}.C)^t = C.E^{-1}.C \\ (SC) = C.E^{-1}.C\end{array}\right\rangle \text{ SC é simétrica}$$

$$R=D(D.F^{-1})^t \Rightarrow R^t=(D.F^{-1}).D^t = D.(F^{-1t}.D^t) = D.(DF^{-1})^t = R \Rightarrow$$

R é simétrica

Assim,

$$\underline{\text{Der}[Q(B)]K} = tr(S.C.B.R.K^t) + tr(E.B.F.K^t) + tr(C.B.\psi_T.K^t) +$$

$$+ tr(C.B.\psi_0.K^t) - tr(D^{\int u}.\bar{1}^t.K^t) \quad //$$

(4) $\underline{\text{Der}[Q(B)]K} = tr[(S.C.B.R + E.B.F + C.B.\psi_T + C.B.\psi_0 - (\bar{1}.D^{\int u})^t)K^t]$ $\forall K$ matriz $(n-1)x(m+1)$

Temos agora

(i) $B \in X = \mathbb{R}^{(n-1)\,x(m+1)}$, espaço de Hilbert ,

(ii) $Q: X \to \mathbb{R}$

$B \mapsto Q(B)$ é um funcional em X

(iii) $Q'(B)K = (4)$

Pelo teorema de Riesz, se $< \, , \, >_Q$ é um produto escalar em X Der $Q(B) \in X'$ é tal que existe um único $H \in X$ tal que Der $[Q(B)]K = < H, K >$ e $H \equiv \text{grad } Q(B)$.

Temos pois que introduzir um produto escalar em X, o que será feito pela definição seguinte:

<u>Definição</u>:

Sendo $X = \mathbb{R}^{(n-1)(m+1)}$, dados A_1 e $A_2 \in X$, $< A_1, A_2 >_Q =$

$= tr(A_1 A_2^t)$ é um produto interno em X.

<u>Verificação</u>:

(i) " $<A,A>_Q \geq 0$ e $<A,A>_Q = 0 \Leftrightarrow A=0$"

$$A = (a_{ij})_{(n-1)x(m+1)} \Rightarrow A.A^t = (c_{ij}) = \sum_{k=1}^{m+1} a_{ik}a_{jk}$$

$$\Rightarrow tr(A.A^t) = \sum_{\ell=1}^{n-1} c_{\ell\ell} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m+1} a_{\ell k}a_{\ell k}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m+1} a_{\ell k}^2\right) .$$

(ii) "como nosso espaço é real, $<A_1,A_2>_Q = <A_2,A_1>_Q$ "

$$<A_1,A_2>_Q = tr(A_1A_2^t) = tr(A_1A_2^t)^t = tr(A_2A_1^t) = <A_2,A_1>_Q.$$

(iii) " $<\alpha A_1+\beta A_2,A_3>_Q = \alpha <A_1,A_3>_Q + \beta <A_2,A_3>_Q$ "

$$\alpha <A_1+\beta A_2,A_3>_Q = tr[(\alpha A_1+\beta A_2)A_3^t] =$$

$$= tr(\alpha A_1A_3^t+\beta A_2A_3^t) = \alpha\, tr(A_1A_3^t) + \beta\, tr(A_2A_3^t) =$$

$$= \alpha <A_1,A_3>_Q + \beta <A_2,A_3>_Q.$$

Tendo este produto interno,

$$Der[Q(B)]K = tr[(SCBR+EBF+CB\psi_T+CB\psi_0 - (\bar{I}D^{\int u})^t)K^t] =$$

$$= <SCBR+EBF+CB\psi_T+CB\psi_0-(\bar{I}D^{\int u})^t, K>_Q$$

e assim, pelo teo. Riesz,

$$\boxed{\underline{\text{GRAD } Q(B)} = SCBR+EBF+CB(\psi_T+\psi_0)-(\bar{I}D^{\int u})^t}$$

3.5 O Mínimo de J_α (w_1,w_2)

Conforme já vimos, queremos min J_α (w_1,w_2), onde

$$\left[\begin{array}{l} \underline{J_\alpha(w_1,w_2)}=0,5\displaystyle\int_0^1\int_0^T\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right]dt\,dx \;+ \\ \qquad\qquad +\;0,5\displaystyle\int_0^1\left[w_1^2(x,T)+u_0^2(x)w_1(x,0)+w_1^2(x,0)\right]dx. \\ \underline{\text{sujeito a}}: \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \end{array}\right.$$

Como $u_0(x)=\text{sen}\,\pi x$, $u_0^2(x) = \text{sen}^2\pi x \Rightarrow \int_0^1 u_0^2(x)dx=\int_0^1 \text{sen}^2\pi x\,dx=\ldots=1/2$.

Usando os cálculos feitos para K_β (w_1,w_2), concluímos que

$$J_\alpha(A,B)=0,5tr(E.A.F.A^t)+0,5tr(E.B.F.B^t)+0,5tr(C.A.\psi_T.A^t)+0,5x\tfrac{1}{2}-tr(D^{\int u}A\bar{I}).$$

Analisando agora a restrição $\dfrac{\partial w_1}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$ na sua forma fraca:

$< \frac{\partial w_1}{\partial t}, \varphi > = < \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \varphi >$ $\forall \varphi \in V$, espaço das funções teste, temos:

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial t}(x,t)\varphi(x,t)dt\, dx = \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x,t)\varphi(x,t)dt\, dx =$$

$$(\text{por partes em } x) = \int_0^T \varphi(x,t) \frac{\partial w_2}{\partial x}(x,t)dt \Big|_0^1 - \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx = I$$

$\forall \varphi \in V$.

Como nosso V é tal que $\varphi(1,t) = \varphi(0,t) = 0 \Rightarrow$

$I = -\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt\, dx$. Assim, nossa única restrição fica:

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t)\varphi(x,t)dt\, dx = -\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial x}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt\, dx$$

E, com cálculos completamente análogos aos feitos no caso de $K_\beta(w_1,w_2)$, chegamos à formulação matricial:

$$CAD = -EBF \Leftrightarrow \boxed{B = -E^{-1}.C.A.DF^{-1} = -S^t.A.D.F^{-1}}$$

Com isto, $J_\alpha(A,B)$ passa a ser apenas $J_\alpha(A)$ e

$$J_\alpha(A) = 0,5tr(E.A.F.A^t)+0,5tr(E.E^{-1}.C.A.D.F^{-1}.F.(DF^{-1})^t.A^t.C^t.E^{-1t})$$
$$+ 0,5tr(C.A.\psi_T.A^t)+0,5tr(C.A.\psi_0.A^t)+0,25-tr(D^{\int u}.A.\bar{I})$$

$$\underline{J_\alpha(A)}=0,5tr(E.A.F.A^t)+0,5tr(C.A.R.A^t.S)+0,5tr(C.A.\psi_T.A^t)+0,5tr(C.A.\psi_0.A^t)+$$
$$+0,25-tr(D^{\int u}.A.\bar{I})$$

Da mesma forma que fizemos para $K_\beta(B)$,

$$Der[J_\alpha(A)](K) = \{tr(E.A.F)+tr(S.C.A.R)+tr[CA(\psi_T+\psi_0)] -tr(\bar{I}D^{\int u})^t\} K^t$$

$\forall$ K , matriz (n-1)x(m+1), e, pelo teo. de Riesz,

$$\boxed{\underline{GRAD\ J_\alpha(A)} = SC.A.R + E.A.F + C.A.\psi_T+C.A.\psi_0-(\bar{I}D^{\int u})}$$

Conforme podemos obervar A e B trocam os papéis em GRAD Q(B) e GRAD $J_\alpha(A)$. Assim, o resultado fornecido pelo método dos Gradientes Conjugados para min J_α é o mesmo fornecido para min Q.

Ainda mais,

$$\boxed{J_\alpha(A) = Q(B)+0,25}$$

3.6 Sobre a Convergência do Método

Mostraremos que, em cada espaço de dimensão finita X_K onde estamos aproximando a solução da equação (1), vale o teorema de Lax-Milgram e portanto temos limitações a priori da solução.

Entretanto os espaços X_K não são sub-espaços do espaço X e o teorema 4 do capítulo 1 não se aplica. Seria necessário aqui estudar em que sentido a sequencia de espaços $\{X_K\}$, converge para o espaço X.

No entanto os resultados numéricos que apresentamos no próximo ítem confirmam a convergência do método, conforme esperamos.

Em cada X_K, $K=(n-1)x(m+1)$, procuramos min $Q(w_1,w_2)$ com

$$w_1(x,t) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t)$$

e

$$w_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t)$$

e os <u>vínculos</u> são: para $1 \leq k \leq n-1$, $0 \leq \ell \leq m$,

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial t}(x,t)\varphi_k(x)\psi_\ell(t)dt\, dx = -\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t)\varphi_k'(x)\psi_\ell(t)dt\, dx$$

Assim, nosso problema discretizado é:

encontrar min $Q(w_1,w_2)$, onde:

$$\underline{Q(w_1,w_2)} = \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t) \right]^2 dt\, dx \quad +$$

$$+ 0{,}5 \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i'(x) \psi_j(t) \Big]^2 \, dt \, dx +$$

$$+ 0{,}5 \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(T) \Big]^2 \, dx +$$

$$+ 0{,}5 \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(0) \Big]^2 \, dx$$

$$- 2 \int_0^1 u_0(x) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(0) \Big] \, dx \quad //$$

<u>sujeito a</u>: para $1 \leq k \leq (n-1)$ e $0 \leq \ell \leq m$,

$$\int_0^1 \int_0^T \big[\varphi_k(x) \psi_\ell(t) \big] \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j'(t) \Big] \, dt \, dx =$$

$$= - \int_0^1 \int_0^T \big[\varphi_k'(x) \psi_\ell(t) \big] \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \varphi_i'(x) \psi_j(t) \Big] \, dt \, dx \quad (5).$$

Chamando novamente a parte quadrática de Q, de S, de forma totalmente análoga ao que fizemos no capítulo 1, teremos, para $x = (w_1, w_2)$, $x \in X_K$,

$$S(x,x) = 0,5 \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\Big]^2 \, dt\, dx +$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \int_0^T \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\Big]^2 \, dt\, dx +$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(0)\Big]^2 \, dx +$$

$$+0,5 \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(T)\Big]^2 \, dx \quad // \qquad (6)$$

Aplicando aqui a desigualdade de Poincaré da mesma forma que fizemos no capítulo 1, em 1.3, obtemos que

$$|S(x,x)| \geq 0,5 \quad \|x\|^2_{H^1_x x H^1_x}$$

Queremos agora provar a continuidade de S, ou seja, queremos mostrar que

$$|S(x,y)| \leq \lambda \|x\| \, \|y\| \qquad \text{onde} \qquad \|\cdot\| \quad \text{é em} \quad H^1_x x H^1_x .$$

Precisamos trabalhar com

$$\int_0^1 w_2(x,0)dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(0)\Big]^2 \, dx \qquad \text{e}$$

$$\int_0^1 w_2(x,T)dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\,\psi_j(T)\,]^2 \; dx.$$

Agora, para cada $t \in [0,T]$,

$$w_2^2(x,t) = w_2^2(x,s) - 2\int_t^s w_2(x,r)\,\frac{\partial w_2}{\partial r}(x,r)\,dr.$$

Assim,

$$T\,w_2^2(x,t) = \int_0^T w_2^2(x,s)ds - 2\int_0^T\int_t^s w_2(x,r)\,\frac{\partial w_2}{\partial r}(x,r)dr\,ds, \quad \text{donde}$$

$$T\int_0^1 w_2^2(x,t)dx = \int_0^1\int_0^T w_2^2(x,s)ds\,dx - 2\int_0^1\int_0^T\int_t^s w_2(x,r)\frac{\partial w_2}{\partial r}(x,r)dr\,dx\,ds.$$

Temos pois:

$$T\int_0^1 [\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t)]^2\,dx = \int_0^1\int_0^T [\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(s)]^2 ds\,dx +$$

$$-2\int_0^1\int_0^T\int_t^s [\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(s)][\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j'(r)]\,dr\,dx\,ds \quad (7)$$

Agora, nos vínculos (5) vamos multiplicar cada equação (k,ℓ) por $b_{k\ell}$ e somar em k e em ℓ , o que nos fornece:

$$\int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k(x)\psi_\ell(r)\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j'(r)\Big]\, dr\, dx$$

$$=-\int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(r)\Big]\Big[\sum_{n=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(r)\Big]\, dr\, dx \quad (8)$$

Assim, levando (8) em (7) temos que, para cada t,

$$T\int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t)\Big]^2 dx = \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(s)\Big]^2 ds\,dx +$$

$$+2\int_0^1 \int_0^T \int_t^s \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(r)\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(r)\Big]\, dr\,dx\,ds.$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(s)\Big]^2 ds\, dx +$$

$$+2\,\Big\{\int_0^T \int_t^s \int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(r)\Big]^2 dx\, dr\, ds\Big\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot\Big\{\int_0^T \int_t^s \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(r)\Big]^2 dx\, dr\, ds\Big\}^{1/2}$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\,\psi_j(s)\Big]^2 \, ds\, dx \; +$$

$$+\; 2 \left\{ \int_0^T \int_0^T \int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(r)\Big]^2 \, dx\, dr\, ds \right\}^{1/2} .$$

$$\cdot \left\{ \int_0^T \int_0^T \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(r)\Big]^2 \, dx\, dr\, ds \right\}^{1/2},$$

$$= \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\,\psi_j(s)\Big]^2 \, ds\, dx \; +$$

$$+2 \left\{ T \int_0^T \int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} \varphi_k'(x)\psi_\ell(r)\Big]^2 dx\, dr \right\}^{1/2} .$$

$$\cdot \left\{ T \int_0^T \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\,\psi_j(r)\Big]^2 dx\, dr \right\}^{1/2}$$

Ou seja, $\forall \; t \in [0,T]$,

$$\int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\,\psi_j(t)\Big]^2 dx \leq \frac{1}{T} \int_0^1 \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(s)\Big]^2 dx\, ds \; +$$

$$+2\left\{\int_0^T\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(s)\right]^2 dx\,ds\right\}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^T\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(s)\right]^2 dx\,ds\right\}^{1/2}$$

$(2ab \leq a^2+b^2)$.

$$(9)\quad \left[\begin{array}{l} \leq \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^1\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(s)\right]^2 dx\,ds + \\ +\displaystyle\int_0^T\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{m} b_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(s)\right]^2 dx\,ds + \int_0^T\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(s)\right]^2 dx\,ds. \end{array}\right.$$

Como (9) vale $\forall\ t \in [0,T]$, então, usando (9) para $t = 0$ e $t = T$ em (6) teremos:

$$S(x,x) \leq 0{,}5\int_0^1\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\right]^2 dt\,dx +$$

$$+\ 0{,}5\int_0^1\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\right]^2 dt\,dx$$

$$+ \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i'(x) \psi_j(t) \right]^2 dt\, dx \right. + \right.$$

$$\int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i'(x) \psi_j(t) \right]^2 dt\, dx \; +$$

$$\left. \int_0^1 \int_0^T \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \dot{\varphi}_i'(x) \psi_j(t) \right]^2 dt\, dx \Bigg\}$$

$$= 1{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \varphi_i'(x) \psi_j(t) \right]^2 dt\, dx \; +$$

$$1{,}5 \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i'(x) \psi_j(t) \right]^2 dt\, dx \; +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^1 \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(t) \right]^2 dt\, dx$$

Assim,

$$S(x,x) \leq \lambda \, \| x \|^2_{H^1_x \times H^1_x} \qquad \text{onde} \qquad \lambda = \max \{1{,}5, \tfrac{1}{T}\}$$

Como S é simétrica e tal que $S(x,x) \geq 0 \; \forall \; x$, então pela propriedade 2 do capítulo 1,

$$|S(x,y)| \leq [S(x,x)]^{1/2} \; [S(y,y)]^{1/2}$$

Desta forma temos $|S(x,y)| \leq [\lambda\|x\|^2]^{1/2} \; [\lambda\|y\|^2]^{1/2} =$

$= \lambda \; \|x\| \; \|y\|$ o que mostra que S é contínua.

Usando agora o teorema de Lax-Milgram, concluímos que, para cada K $(=(n-1)x(m+1))$ o sistema linear $R_K \, x_K - b_K = 0$ tem solução única, $x_K = R_K^{-1} \, b_K$ e, além disso, $\forall K$.

$$\|x_K\| \leq \frac{1}{0,5} \; \|b_K\| = 2 \; \|b_K\| .$$

3.7 Resultados Numéricos

Fizemos um programa computacional na linguagem FORTRAN e o implementamos no computador digital (VAX) disponível no CPD da UNICAMP, bem como num micro-computador da linha PC.

Obtivemos convergência do nosso método com erro menor que $\min\{\Delta t, \Delta x\}$ com $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ = cte, a qual tomamos 0,5.

O programa do método, neste caso, se chama KABETA. Para executá-lo temos que rodar juntos KABETA e ROTKABET , o programa que fornece as subrotinas necessárias.

Observamos que, se quizermos mudar a condição inicial $u_0(x)$ teremos que fazê-lo em KABETA.

Neste programa, cuja listagem de alguns resultados estão a seguir, nós, usando o método dos Gradientes Conjugados, calculamos $\bar{B}$, o ponto de min de $Q(B)$.

Com esta matriz $\bar{B}$ nós encontramos $\bar{A}=-E^{-1}.C.\bar{B}.D.F^{-1}$, cor-

respondente.

Lembramos que aproximamos aqui a solução para o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad , \quad x \in [0,1] \\ u(x,0) = u_0(x) = \operatorname{sen} \pi x \qquad (\text{e } v_0(x) \equiv 0 \text{ p/equação adjunta}) \end{cases}$$

e, a teoria de Equações Diferenciais Parciais nos fornece, para solução exata, a função:

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\pi x \; e^{-\pi^2 t} \quad . \quad (\text{e} \quad v(x,t) \equiv 0)$$

Conhecendo então a solução analítica, foi que fizemos a medida do erro cometido em cada ponto da nossa malha.

A seguir calculamos os valores de K_β máximo e J_α mínimo, ou seja, $K_\beta(\bar{A},\bar{B})$ e $J_\alpha(\bar{A},\bar{B})$.

De $u = w_1+w_2$ e $v = w_1-w_2$ temos $w_1=w_2=\frac{1}{2}u$ então

$$K_\beta(w_1,w_2) = -0,5 \int_0^1 \int_0^T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx$$

$$-0,5 \int_0^1 \Big[\underbrace{w_2^2(x,T)}_{\frac{1}{4}u^2(x,T)} + \underbrace{w_2^2(x,0)}_{\frac{1}{4}u_0^2(x)} - 2u_0(x) \underbrace{w_2(x,0)}_{\frac{1}{2}u_0(x)} \Big] dx,$$

fica:

$$K_{\beta}(u) = -\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dt\, dx - \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T)-3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}.u(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T u(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x}\, dt\, dx$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T)-3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\, dt\, dx - \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T)-3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\Big|_{t=0}^{t=T} dx - \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T) - 3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \int_0^1 [\frac{1}{8}\, u^2(x,T) - \frac{1}{8}\, u^2(x,0) - \frac{1}{8}\, u^2(x,T) + \frac{3}{8}\, u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 u_0^2(x)\, dx \,//$$

Agora, $\int_0^1 u_0^2(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \pi x \quad dx = \int_0^1 \frac{1-\cos^2 2\pi x}{2}\,dx = \ldots = \frac{1}{2}$

Temos assim que $K_\beta\,[u(x,t)] = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}125$.

Da mesma forma verificamos que $J_\alpha\,[u(x,t)] = 0{,}125$ o que nos permite conferir os resultados obtidos para $J\,(\bar{A},\bar{B})$ e $K_\beta\,(\bar{A},\bar{B})$.

As listagens dos programas se encontram na referência [12].

Temos disponíveis ainda os resultados para as redes com 495 e 2015 nós.

Ap.Sol.Eq. do calor via Met.Grad.Conjugados :

-- --- -- -- ----- --- --- ---- ----------

Esta malha tem : 4 intervalos no eixo x e
8 intervalos no eixo t .
Assim temos que : delta(x)= .2500000E+00 e
delta(t)= .1250000E+00 .

A dim. do nosso espaco e (n-1)*(m+1) = 27 e

para obter !!Grad(-Kbeta(Xk))!!(.5000000E-05,
foram necessarias 11 iteracoes.

!!Grad [-Kbeta(X(11))] !!= .3442929E-05

Matriz aproximacao da solucao : USOL :

.6611059E+00	.9349474E+00	.6611059E+00
.1775245E+00	.2510559E+00	.1775245E+00
.4723482E-01	.6680059E-01	.4723482E-01
.1320867E-01	.1867880E-01	.1320868E-01
.2742940E-02	.3879342E-02	.2742942E-02
.1916943E-02	.2709893E-02	.1916944E-02
-.1230510E-02	-.1739641E-02	-.1230510E-02
.2245973E-02	.3174592E-02	.2245974E-02
-.3197798E-02	-.4520624E-02	-.3197798E-02

A matriz !erro! :

.4600090E-01	.6505263E-01	.4600090E-01
.2839415E-01	.4015702E-01	.2839410E-01
.1273134E-01	.1800437E-01	.1273134E-01
.4254250E-02	.6017502E-02	.4254241E-02
.2342488E-02	.3312539E-02	.2342486E-02
.4360012E-03	.6155248E-03	.4360017E-03
.1661780E-02	.2349548E-02	.1661779E-02
.2120382E-02	.2996979E-02	.2120382E-02
.3234372E-02	.4572347E-02	.3234372E-02

Vetor com max !erro! em cada nivel de t :

.6505263E-01	.4015702E-01	.1800437E-01
.6017502E-02	.3312539E-02	.6155248E-03
.2349548E-02	.2996979E-02	.4572347E-02

O valor maximo de ! erro ! e : .6505263E-01

O valor maximo de Kbeta e : .1232803E+00

O valor minimo de Jalfa e : .1267197E+00

Ap.Sol.Eq. do calor via Met.Grad.Conjugados :

-- --- -- -- ----- --- --- ---- ----------

Esta malha tem : 8 intervalos no eixo x e
16 intervalos no eixo t .
Assim temos que : delta(x)= .1250000E+00 e
delta(t)= .6250000E-01 .

A dim. do nosso espaco e (n-1)*(m+1) = 119 e

para obter !!Grad(-Kbeta(Xk))!!< .5000000E-05,
foram necessarias 31 iteracoes.

!!Grad [-Kbeta(X(31))] !!= .1370577E-05

Matriz aproximacao da solucao : USOL :

.3757470E+00	.6942909E+00	.9071347E+00	.9818748E+00	.9071343E+00
.6942907E+00	.3757469E+00			
.2010879E+00	.3715617E+00	.4854691E+00	.5254681E+00	.4854690E+00
.3715616E+00	.2010879E+00			
.1075619E+00	.1987487E+00	.2596775E+00	.2810729E+00	.2596774E+00
.1987487E+00	.1075619E+00			
.5760201E-01	.1064344E+00	.1390632E+00	.1505211E+00	.1390632E+00
.1064344E+00	.5760199E-01			
.3076526E-01	.5684703E-01	.7427397E-01	.8039367E-01	.7427396E-01
.5684703E-01	.3076527E-01			
.1653133E-01	.3054616E-01	.3991084E-01	.4319949E-01	.3991088E-01
.3054611E-01	.1653135E-01			
.8760247E-02	.1618696E-01	.2114914E-01	.2289172E-01	.2114920E-01
.1618687E-01	.8760308E-02			
.4792062E-02	.8854802E-02	.1156933E-01	.1252257E-01	.1156937E-01
.8854737E-02	.4792107E-02			
.2437166E-02	.4502624E-02	.5882232E-02	.6366635E-02	.5882235E-02
.4502621E-02	.2437167E-02			
.1460050E-02	.2697804E-02	.3524754E-02	.3815114E-02	.3524724E-02
.2697844E-02				

.1460022E-02

.5900247E-03	.1090165E-02	.1424334E-02
.1541615E-02	.1424304E-02	.1090208E-02
.5899947E-03		

.5494368E-03	.1015239E-02	.1327065E-02
.1436473E-02	.1327048E-02	.1015264E-02
.5494190E-03		

.7478229E-05	.1395307E-04	.1835579E-04
.1970446E-04	.1835113E-04	.1395965E-04
.7473689E-05		

.3553884E-03	.6562988E-03	.8577295E-03
.9282177E-03	.8577321E-03	.6562945E-03
.3553914E-03		

-.2399940E-03	-.4433238E-03	-.5793599E-03
-.6272966E-03	-.5793548E-03	-.4433306E-03
-.2399890E-03		

.3983582E-03	.7357411E-03	.9615990E-03
.1041041E-02	.9616024E-03	.7357357E-03
.3983618E-03		

-.4328704E-03	-.7991017E-03	-.1044136E-02
-.1130475E-02	-.1044135E-02	-.7991031E-03
-.4328692E-03		

A matriz !erro! :

.6936431E-02	.1281589E-01	.1674485E-01
.1812518E-01	.1674521E-01	.1281607E-01
.6936371E-02		

.5423963E-02	.1002240E-01	.1309460E-01
.1417333E-01	.1309469E-01	.1002246E-01
.5423889E-02		

.3880456E-02	.7169932E-02	.9368181E-02
.1014006E-01	.9368211E-02	.7169947E-02
.3880434E-02		

.2536915E-02	.4687816E-02	.6124943E-02
.6629497E-02	.6124958E-02	.4687801E-02
.2536900E-02		

.1688194E-02	.3119133E-02	.4075587E-02
.4411288E-02	.4075602E-02	.3119133E-02
.1688171E-02		

.9819027E-03	.1814062E-02	.2369829E-02
.2564773E-02	.2369795E-02	.1814116E-02
.9818673E-03		

.6906185E-03	.1275964E-02	.1667269E-02
.1804585E-02	.1667211E-02	.1276048E-02
.6905533E-03		

.3080168E-03	.5689142E-03	.7433519E-03
.8045807E-03	.7433081E-03	.5689794E-03
.3079697E-03		
.3150478E-03	.5828035E-03	.7621991E-03
.8252463E-03	.7621963E-03	.5828063E-03
.3150452E-03		
.2515852E-04	.4650326E-04	.6085681E-04
.6592344E-04	.6088661E-04	.4646392E-04
.2518599E-04		
.2114554E-03	.3907769E-03	.5106096E-03
.5527529E-03	.5106397E-03	.3907337E-03
.2114850E-03		
.1169247E-03	.2160608E-03	.2828888E-03
.3062646E-03	.2828717E-03	.2160855E-03
.1169071E-03		
.2259232E-03	.4173165E-03	.5451251E-03
.5902029E-03	.5451298E-03	.4173099E-03
.2259276E-03		
.2294354E-03	.4235680E-03	.5536520E-03
.5990866E-03	.5536546E-03	.4235637E-03
.2294384E-03		
.3079635E-03	.5689150E-03	.7434528E-03
.8049095E-03	.7434476E-03	.5689219E-03
.3079585E-03		
.3616790E-03	.6679668E-03	.8730476E-03
.9451936E-03	.8730510E-03	.6679614E-03
.3616826E-03		
.4526640E-03	.8356755E-03	.1091922E-02
.1182198E-02	.1091921E-02	.8356769E-03
.4526628E-03		

Vetor com max !erro! em cada nivel de t :

.1812518E-01	.1417333E-01	.1014006E-01
.6629497E-02	.4411288E-02	.2564773E-02
.1804585E-02	.8045807E-03	.8252463E-03
.6592344E-04	.5527529E-03	.3062646E-03
.5902029E-03	.5990866E-03	.8049095E-03
.9451936E-03	.1182198E-02	

O valor maximo de ! erro ! e : .1812518E-01

O valor maximo de Kbeta e : .1248725E+00

O valor minimo de Jalfa e : .1251275E+00

3.8 Comparação de Resultados

a) Nosso objetivo era poder comparar resultados, encontrando max $K_\beta(w_1,w_2)$ e min $J_\alpha(w_1,w_2)$ por um outro método que não fosse o dos Gradientes Conjugados. A maneira que nos pareceu mais óbvia foi, então, para encontrar max K_β, uma vez que

$$\underline{\mathrm{Der}[Q(B)](K)} = 0{,}5\,\mathrm{tr}[(SCBR + 2EBF + 2CB(\psi_T+\psi_0) - 2(\bar{I}D^{\int u})^t)K^t]$$

$\forall$ K, matriz (n-1)x(m+1), resolver o sistema matricial

$$\boxed{SCBR + EBF + CB(\psi_T+\psi_0) - (\bar{I}D^{\int u})^t = 0}$$

Como nossa matriz de incógnitas, B, se encontra em 3 das parcelas, pensamos num método iterativo do tipo:

(i) isolar B no primeiro membro por uma das parcelas e passar as outras duas para o outro membro.

(ii) gerar uma sequência de aproximações, a partir de um $B^{(0)}$, usando (i).

Como R é matriz não inversível pois $R=D(DF^{-1})^t$ e D <u>não</u> é inversível e, dada a estrutura de ψ_T e ψ_0, nossa única opção é fazer

$$\boxed{EBF = (\bar{I}D^{\int u})^t - CB(\psi_T+\psi_0) - S\bar{C}BR}$$

Tentamos resolver por:

1) $BF = X \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} EX = (\bar{I}D\int u)^t - CB^{(k)}(\psi_T+\psi_0) - SCB^{(k)}R \\ B^{(k+1)}F = X \end{cases}$$

2) $BF^{(k+1)}E^{-1}[(\bar{I}D\int u)^t - CB^{(k)}(\psi_T+\psi_0) - SCB^{(k)}R]$

3) $EB = [(\bar{I}D\int u)^t - CB^{(k)}(\psi_T+\psi_0) - SCBR]F^{-1}$

Fazendo $E = \frac{1}{\Delta x}(I+O)$

$$B^{(k+1)} = \Delta x\,[((\bar{I}D\int u)^t\ CB^{(k)}(\psi_T+\psi_0) - SCB^{(k)}R)F^{-1}] - O.B.^{(k)}$$

Temos as listagens e os resultados dos programas que mostram a divergência do processo nos tres casos.

b) Resolvemos então a nossa equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \operatorname{sen}\pi x \end{cases}$$

por um método de Diferenças Finitas [11].

Usamos como teste um método implícito descrito na seção 4.1 do capítulo 9 da referência [11].

A notação usada para a aproximação da solução $u(x,t)$ da equação (1) é $U(x,t)$.

Chamando os pontos (x,t) discretizados por (x_j,t_n), $x_j=j\Delta x$,

$t_n = n\Delta t$ as equações de diferença que representam a aproximação da nossa equação (1) são:

$$(1+2\lambda)U_{j,n} = U_{j,n-1} + \lambda(U_{j+1,n}) + U_{j-1,n}), \quad n = 1, 2, \ldots P, \quad 1 \leq j \leq J.$$

onde $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $\Delta x = \dfrac{1}{J+1}$, $\Delta t = \dfrac{1}{P+1}$.

Este é um método incondicionalmente convergente (sem restrições sobre λ) e, para o erro, $e(x,t)=U(x,t)-u(x,t)$, tem-se:

$$|u(x,t)-U(x,t)| \leq t \, . \, O(\Delta t+\Delta x^2), \quad t \leq 1.$$

Apresentamos a seguir apenas um resultado para exemplificar que estamos conseguindo, com o nosso método, um valor máximo de erro bem menor que o do método das Diferenças Finitas usado.

Obviamente o tempo de execução do nosso método é muito maior.

Ap. Sol. Eq. do Calor via Met. Difs. Finitas :

Nossa malha tem : 4 intevalos no eixo dos x.
8 intervalos no eixo dos t.
Assim temos que: delta(x)= .2500000E+00
delta(t)= .1250000E+00

A matriz solucao : USOL :

.7071068E+00	.1000000E+01	.7071068E+00
.1414213E+00	.3054388E+00	.3256197E+00
.2828427E-01	.8619221E-01	.1230363E+00
.5656854E-02	.2321570E-01	.4186850E-01
.1131371E-02	.6066295E-02	.1334145E-01
.2262742E-03	.1552106E-02	.4063045E-02
.4525483E-04	.3910989E-03	.1197060E-02
.9050967E-05	.9742877E-04	.3438856E-03
.1810193E-05	.2405932E-04	.9684810E-04

A matriz !erro! :

.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
.6449728E-01	.1422584E-01	.1197010E+00
.3168189E-01	.1387253E-02	.6307016E-01
.1180607E-01	.1480605E-02	.2440557E-01
.3954057E-02	.1125586E-02	.8256018E-02
.1254668E-02	.5422627E-03	.2582103E-02
.3860148E-03	.2188084E-03	.7657905E-03
.1165403E-03	.8018409E-04	.2182943E-03
.3476360E-04	.2766383E-04	.6027431E-04

Vetor com max!erro! em cada nivel de t :

.0000000E+00	.1197010E+00	.6307016E-01
.2440557E-01	.8256018E-02	.2582103E-02
.7657905E-03	.2182943E-03	.6027431E-04

O valor max !erro! e : .1197010E+00

CAPÍTULO 4

O CASO DE COEFICIENTES VARIÁVEIS

4.1 Introdução

Tendo em vista os bons resultados obtidos no caso da equação com coeficientes constantes, testamos o método no caso onde $a(x,t)=a(x)$ e $q(x,t)$ é uma função qualquer.

Desta forma, aplicamos a método do capítulo anterior para aproximar solução da equação:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x) \dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Os princípios extremos duais aplicados neste caso, nos levam a procurar $\min J_\alpha(w_1,w_2)$ e $\max K_\beta(w_1,w_2)$ onde,

$$\underline{K_\beta(w_1,w_2)} = -0,5 \int_0^1 \int_0^T a(x) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\, dx$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \int_0^T q(x,t) w_2(x,t)\, dt\, dx$$

$$- 0,5 \int_0^1 \left[w_2^2(x,T) + w_2^2(x,0) - 2u_0(x) w_2(x,0) \right] dx$$

sujeito a:

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial w_1}{\partial x}\right] + 0,5\ q(x,t), \quad e$$

$$J_\alpha(w_1,w_2) = 0,5 \int_0^1\int_0^T a(x)\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] dt\ dx$$

$$- 0,5 \int_0^1\int_0^T q(x,t)w_1(x,t)\ dt\ dx$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \left[w_1^2(x,T) + u_0^2(x) - 2u_0(x)w_1(x,0) + w_1^2(x,0)\right]dx//$$

sujeito a:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial w_2}{\partial x}\right] + 0,5\ q(x,t).$$

4.2 O Método

Lembramos que trabalharemos aqui com as mesmas funções-base e funções teste anteriores donde

$w_1(0,t) = w_1(1,t) = w_2(0,t) = w_2(1,t) = 0$, bem como

$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0$ qualquer que seja a função teste $\varphi(x,t)$.

Aqui também vamos analisar mais detalhadamente o caso de $K_\beta(w_1,w_2)$.

A forma fraca das restrições neste caso é:

$$< \frac{\partial w_2}{\partial t}, \varphi > = < \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x} \right] , \varphi > \quad + 0,5 \ < q, \varphi > \forall \varphi \in V .$$

Agora,

$$< \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x}\right], \varphi > = \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x}\right] \varphi \ (x,t) \ dt \ dx =$$

$$= \int_0^T \varphi(x,t) a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t) dt \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \int_0^T a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt \ dx$$

$$= - \int_0^1 \int_0^T a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt \ dx$$

Assim,

$$< \frac{\partial w_2}{\partial t}, \varphi > = < \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x}\right] , \varphi > + 0,5 \ < q, \varphi > \quad , \text{ fica:}$$

$$\int_0^1 \int_0^T \frac{\partial w_2}{\partial t} \varphi \, dt \ dx = - \int_0^1 \int_0^T a(x) \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt \ dx + 0,5 \int_0^1 \int_0^T q\varphi \ dt \ dx$$

e, conforme podemos observar, o lado ésquerdo é o mesmo do caso anterior.

Sendo pois,

$$w_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t) \qquad \text{e}$$

$$w_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t) \qquad \text{, o primeiro}$$

membro fica c.B.D//

Agora,

$$-\int_0^1\int_0^T a(x)\,\frac{\partial w_1}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dt\,dx =$$

$$=-\int_0^1\int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\,a(x)\,\varphi_i'(x)\psi_j(t)\Big]\;\varphi_k'(x)\,\psi_\ell(t)\,dt\,dx$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\underbrace{\Big(\int_0^1 a(x)\,\varphi_i'(x)\varphi_k'(x)dx\Big)}_{g_{ki}}\underbrace{\Big(\int_0^1 \psi_j(t)\psi_\ell(t)dt\Big)}_{f_{j\ell}}$$

$$1 \le k \le n-1$$

$$0 \le \ell \le m$$

Assim, fazendo

$$G=(g_{ki}) = \Big(\int_0^1 a(x)\,\varphi_i'(x)\varphi_k'(x)dx\Big)_{(n-1)x(n-1)} \qquad \text{, os mesmos cál}$$

culos anteriores nos fornecem:

$$-\int_0^1\int_0^T a(x)\,\frac{\partial w_1}{\partial x}(x,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt\,dx = -GAF \;//$$

Antes de trabalhar com a parcela $0{,}5\,\langle q,\varphi\rangle$, analisaremos a matriz G:

$$G = \begin{bmatrix} \int_0^1 a(x)\varphi_1'\varphi_1' & \int_0^1 a(x)\varphi_1'\varphi_2' & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ \int_0^1 a(x)\varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 a(x)\varphi_2'\varphi_2' & \int_0^1 a(x)\varphi_2'\varphi_3' & 0\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \int_0^1 a(x)\varphi_3'\varphi_2' & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \int_0^1 a(x)\varphi_{n-1}'\varphi_{n-1}' \end{bmatrix}$$

G é matriz simétrica. Mostraremos agora que G é definida-positiva o que prova que G é inversível.

Seja $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x=(x_1,x_2,\ldots\ldots x_{n-1})^t$; assim, $x^tGx =$

$$(x_1\ x_2\ x_3\ldots x_{n-1})\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{1,n-1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & g_{n-1,x_{n-1}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$=(x_1g_{11}+x_2g_{21}+\ldots+x_{n-1}g_{n-1,1}\ldots x_1g_{1,n-1}+x_2g_{2,n-1}+\ldots+x_{n-1}g_{n-1,n-1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i1} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i2} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i3} \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i,n-1}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i1}\right)x_1+\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i2}\right)x_2+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{i,n-1}\right)x_{n-1} =$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_ig_{ij}\right)x_j\right] = \sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i \int_0^1 a(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx\right] x_j$$

$$=\int_0^1 a(x)\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_j\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx = \int_0^1 \underset{>0}{a(x)}\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i\varphi_i'(x)\right]^2}_{\geq 0} dx\right.$$

Então $x^t\, G\, x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e , $x^t\, G\, x = 0 \iff$

$\sum_{i=1}^{n-1} x_i\varphi_i'(x) = 0$. Agora,

$$\text{se } x\in[0,\Delta x] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_i\varphi_i'(x)=x_1\varphi_1'(x) = \frac{x_1}{\Delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\text{se } x\in[\Delta x, 2\Delta x] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_i\varphi_i'(x)=x_1\varphi_1'(x)+x_2\varphi_2'(x)=\frac{1}{\Delta x}(x_2-x_1)=0 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Leftrightarrow x_2=0$$

$$\vdots$$

$$\text{se } x\in[(n-1)\Delta x, n\Delta x] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_i\varphi_i'(x)=x_{n-1}\varphi_{n-1}'(x)=\frac{x_{n-1}}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow x_{n-1} = 0$$

ou seja $x^t\, Gx = 0 \Leftrightarrow x = 0$, c.q.d

Na realidade a matriz G é a seguinte:

$$G=\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} \int_0^{2\Delta x} a(x)dx & -\int_{\Delta x}^{2\Delta x} a(x)dx & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ -\int_{\Delta x}^{2\Delta x} a(x)dx & \int_{\Delta x}^{3\Delta x} a(x)dx & -\int_{2\Delta x}^{3\Delta x} a(x)dx \ldots\ldots\; 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \int_{(n-2)\Delta x}^{n\Delta x} a(x)dx \end{bmatrix}$$

Analisemos agora $0,5 < q,\varphi > = 0,5 \int_0^1 \int_0^T q(x,t)\varphi(x,t)dt\, dx$,

que com $\varphi_k(x)$, $1 \leq k \leq n-1$ e $\psi_\ell(t)$, $0 \leq \ell \leq m$, fica

$$0,5 \int_0^1 \int_0^T q(x,t)\varphi_k(x)\psi_\ell(t)dt\, dx = 0,5\ RO, \text{ onde}$$

$$RO = (p_{ij}) = \left(\int_0^1 \int_0^T q(x,t)\varphi_i(x)\psi_j(t)dt\, dx \right)_{(n-1)x(m+1)} (1 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m)$$

A matriz RO terá pois a forma:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \int_0^T q\varphi_1\psi_0 & \int_0^1 \int_0^T q\,\varphi_1\psi_1 & \int_0^1 \int_0^T q\,\varphi_1\psi_2 \cdots\cdots & \int_0^1 \int_0^T q\varphi_1\psi_m \\ \int_0^1 \int_0^T q\varphi_2\psi_0 & \int_0^1 \int_0^T q\varphi_2\psi_1 & \int_0^1 \int_0^T q\,\varphi_2\varphi_2 \cdots\cdots & \int_0^1 \int_0^T q\varphi_2\psi_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^T q\varphi_{n-1}\psi_0 & \int_0^1 \int_0^T q\varphi_2\psi_1 \cdots\cdots & & \int_0^1 \int_0^T q\varphi_{n-1}\psi_m \end{bmatrix}_{(n-1)x(m+1)}$$

que na realidade se reduz a:

$$
\left[\begin{array}{llll}
\int_0^{2\Delta x}\int_0^{\Delta t} q\varphi_1\psi_0 & \int_0^{2\Delta x}\int_0^{2\Delta t} q\varphi_1\psi_1 & \int_0^{2\Delta x}\int_{\Delta t}^{3\Delta t} q\varphi_1\psi_2 \cdots & \int_0^{2\Delta x}\int_{(m-1)t}^{m\Delta t} q\varphi_1\psi_m \\
\int_{\Delta x}^{3\Delta x}\int_0^{\Delta t} q\varphi_2\psi_0 & \int_{\Delta x}^{3\Delta x}\int_0^{2\Delta t} q\varphi_2\psi_1 & \int_{\Delta x}^{3\Delta x}\int_{\Delta t}^{3\Delta t} q\varphi_2\psi_2 \cdots & \int_{\Delta x}^{3\Delta x}\int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} q\varphi_2\psi_m \\
\vdots & & & \\
\int_{(n-2)\Delta x}^{n\Delta x}\int_0^{\Delta t} q\varphi_{n-1}\psi_0 & \int_{(n-2)\Delta x}^{n\Delta x}\int_0^{2\Delta t} q\varphi_{n-1}\psi_1 \cdots\cdots & & \int_{(n-2)\Delta x}^{n\Delta x}\int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} q\varphi_{n-1}\psi_m
\end{array}\right.
$$

Observamos que tanto para calcular a matriz G(que no programa, por simplicidade, chamamos de E) como para calcular a matriz RO usamos quadratura Gaussiana com 3 pontos sendo pois exata para polinômios de grau $\leq$ 5. Chegamos a testar fórmulas de Gauss com 5 pontos o que não melhorou em nada os resultados dos testes. Assim, optamos pelas fórmulas de 3 pontos.

Concluímos assim que as restrições, no caso de K_β se escrevem, na forma matricial, como:

$$C.B.D = - G.A.F + 0,5 \ RO$$

$$GAF = 0,5 \ RO - CBD \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A = 0,5 \ G^{-1}.RO.F^{-1} - G^{-1}.C.B.D.F^{-1}}$$

Analisaremos a seguir, a forma matricial de $K_\beta(w_1,w_2)$:

$$\underline{K_\beta(w_1,w_2)} = -0,5 \int_0^1\int_0^T a(x)\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right]dt\,dx$$

$$+0,5 \int_0^1\int_0^T q(x,t)w_2(x,t)dt\,dx$$

$$-\ 0,5\left[w_2^2(x,T)+w_2^2(x,0)-2u_0(x)w_2(x,0)\right]\ dx\ //$$

<u>Parcela 1</u>:

$$-0,5\int_0^1\int_0^T a(x)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 dt\,dx=-0,5\int_0^1\int_0^T a(x)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j(t)\right]^2 dt\,dx$$

$$=-0,5\int_0^1\int_0^T a(x)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\varphi_i'(x)\psi_j'(t)\right]\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{k\ell}\varphi_k'(x)\psi_\ell(t)\right] dt\,dx$$

$$= \ldots\ldots = -0,5\,\mathrm{tr}\,(GAFA^t)$$

<u>Parcela 2</u>: Analogamente,

$$-\ 0,5\int_0^1\int_0^T a(x)\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dt\,dx = \ldots = 0,5\,\mathrm{tr}\,(GBFB^t)$$

<u>Parcela 3</u>:

$$0,5\int_0^1\int_0^T q(x,t)w_2(x,t)dtdx=0,5\int_0^1\int_0^T q(x,t)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(t)dt\,dx$$

$$= 0,5\int_0^1\int_0^T \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}q(x,t)\varphi_i(x)\psi_j(t)dt\,dx =$$

$$= +0,5\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\underbrace{\int_0^1\int_0^T q(x,t)\varphi_i(x)\psi_j(t)\,dt\,dx}_{p_{ij}(x,t)}$$

$$= 0,5\,tr(B.RO^t) \quad //$$

As demais parcelas continuam as mesmas do caso de coeficientes constantes. Assim, $K_\beta(w_1,w_2) = K_\beta(A,B)$, onde

$$\underline{K_\beta(A,B)}=-0,5\,tr(GAFA^t)-0,5\,tr(GBFB^t)+0,5\,tr(B.RO^t)-0,5\,tr(C\,B\,\psi_T B^t)$$
$$-0,5\,tr(C.B.\psi_0 B^t)+tr(D^{\int u}B\bar{I})$$

Da mesma forma que no capítulo anterior, vamos, para usar o método dos Gradientes Conjugados, trabalhar com $Q(A,B)=-K_\beta(A,B)$ ou seja:

$$\underline{Q(A,B)}=0,5tr(GAFA^t)+0,5tr(GBFB^t)-0,5tr(B.RO^t)+0,5tr(CB\psi_T B^t)+$$
$$+0,5tr(CB\psi_0 B^t)-tr(D^{\int u}B\bar{I}).$$

Levando agora a expressão de A em Q(A,B) teremos nosso

$$\underline{\text{Der } Q(B)K} = -0{,}25\,\mathrm{tr}\,(S.ROD.K^t) - 0{,}25\,\mathrm{tr}(K^t.DRO^t.D^t.K^t)$$
$$+0{,}5\mathrm{tr}\,((SC)^t.B.R^t.K^t) + 0{,}5\,\mathrm{tr}\,(SC.B.R.K^t)$$
$$+0{,}5\mathrm{tr}\,(G^t\ B.F^t.K^t) + 0{,}5\,\mathrm{tr}\,(G.B.F.K^t)$$
$$-0{,}5\mathrm{tr}\,(RO.K^t) - \mathrm{tr}\,(D\int u^t\ \bar{1}^t.K^t)$$
$$+0{,}5\mathrm{tr}\,(K^t.B.\psi_T.K^t) + 0{,}5\,\mathrm{tr}\,(C.B.\psi_T.K^t)$$
$$+0{,}5\mathrm{tr}\,(C^t.B.\psi_0\ .K^t) + 0{,}5\,\mathrm{tr}\,(C.B.\psi_0.K^t)\ //$$

Assim,

$$\underline{\text{Der } Q(B)K} = \mathrm{tr}\,[-0{,}25.S.ROD - 0{,}25.C.DRO^t.D^t + SC.B.R +$$
$$+G.B.F\ -0{,}5.RO - D\int u^t\ \bar{1} + C.B.\psi_T + C.B.\psi_0]^t$$

$\forall K$, matriz $(n-1)x(m+1)$

Usando agora o teorema de Riesz, da mesma forma que o fizemos no capítulo anterior, concluímos que

$$\underline{\text{GRAD } Q(B)} = -0{,}25.S.ROD - 0{,}25.C.DRO^t.D^t + SC.B.R + GB.F - 0{,}5RO - (\bar{1}D\int u)^t + C.B(\psi_0 + \psi_T)$$

Adaptamos então nosso programa original para o caso de coeficientes variáveis, o qual agora se chamará <u>KBECVAR</u>.

Vejamos agora como fica o caso de $J_\alpha(w_1, w_2)$:

queremos encontrar

min $J_\alpha(w_1, w_2)$ sujeito a

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial w_2}{\partial x}\right] + 0,5\ q(x,t), \quad \text{onde}$$

$$J_\alpha(w_1,w_2) = 0,5 \int_0^1 \int_0^T a(x) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \right] dt\ dx$$

$$- 0,5 \int_0^1 \int_0^T q(x,t) w_1(x,t) dt\ dx$$

$$+ 0,5 \int_0^1 \left[w_1^2(x,T) + u_0^2(x) - 2u_0(x) w_1(x,0) + w_2^1(x,0) \right] dx \ //$$

Como $u_0^2(x)$ vai mudar a cada teste do programa, chamaremos

$\int_0^1 u_0^2(x)dx = \gamma$ o que calcularemos pela mesma fórmula de integração de Gauss que calcula os elementos da matriz G.(=E, no programa).

Usando os cálculos feitos para $K_\beta(w_1,w_2)$, concluimos que

$$J_\alpha(A,B) = 0,5 tr\,(GAFA^t) + 0,5 tr\,(GBFB^t) - 0,5 tr\,(A.RO^t) +$$
$$+ 0,5 tr\,(C A\psi_T . A^t) + 0,5\ \gamma - tr(D^{\int u} A\bar{1}) + 0,5 tr(C.A.\psi_0 . A^t)$$

De maneira análoga as restrições nos fornecem:

$$= -\frac{1}{4}\int_0^T a(x)\frac{\partial u}{\partial x}u(x,t)\Big|_0^1 dt + \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T u(x,t)\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] dt\, dx$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T q(x,t)u(x,t)dt\, dx$$

$$- \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T)-3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})+q(x,t)\right] u(x,t)dt\, dx +$$

$$- \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T) - 3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^T u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\, dt\, dx - \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T) - 3u_0^2(x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 u^2(x,t)\Big|_{t=0}^{t=T} dx - \frac{1}{8}\int_0^1 [u^2(x,T) - 3u_0^2(x)]\, dx$$

$$\Rightarrow \dot{K}_\beta(u) = \frac{1}{4}\int_0^1 u_0^2(x)dx \;//$$

O mesmo tipo de cálculo nos mostra que

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{4}\int_0^1 u_0^2(x)dx \quad //$$

4.3 Resultados Numéricos

Fizemos um programa de computador na linguagem FORTRAN e o implementamos no computador digital (VAX) disponível no CPD da UNICAMP, bem como num micro-computador da linha P.C.

Obtivemos convergência do nosso método com erro menor que max $\{\Delta x, \Delta t\}$ com $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.5$.

O programa neste caso, como dissemos se chama KBECVAR e , para executá-lo, temos que executar ao mesmo tempo o programa ROTCVAR, que nos fornece as rotinas análogas às usadas para o programa KABETA e ainda temos que executar o programa FUNGAUSS no qual introduzimos $a(x)$, $q(x,t)$, $u_0(x)$, a solução exata, caso seja conhecida e ainda fornecemos as fórmulas de Integração Numérica.

Testamos o programa com a equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(2+\operatorname{sen}\pi x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \left[-\pi^2 x(1-x) - \pi\cos\pi x(1-2x) + 2(2+\operatorname{sen}\pi x)\right] e^{-\pi^2 t} \\ u_0(x) = x(1-x) \end{cases}$$

cuja solução exata é $u(x,t) = x(1-x)e^{-\pi^2 t}$.

Neste caso, $J_\alpha(u) = K_\beta(u) = \frac{1}{4}\int_0^1 u_0^2(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (x-x^2)dx$

donde $J_\alpha(u) = K_\beta(u) = 0,00833....$.

Fornecemos a seguir alguns resultados obtidos. As listagens dos programas se encontram na referencia [12].

Temos ainda os resultados para redes maiores.

Ap. Sol. Eq. do Calor com coeficientes variaveis
(via Metodo dos Gradientes Conjugados) :

Esta malha tem : 4 intervalos no eixo x e
8 intervalos no eixo t .
Assim temos que : delta(x)= .2500000E+00 e
delta(t)= .1250000E+00.

A dimensao do nosso espaco e (n-1)*(m+1)= 27 e

para obter !! Grad [-Kbeta(Xk)] !! < .5000000E-05,
foram necessarias 18 iteracoes.

!!Grad [-Kbeta(X(18))]!!= .3983355E-05

Matriz aproximacao da solucao : USOL :

.1457279E+00	.1715640E+00	.1177887E+00
.5130437E-01	.6845650E-01	.5305781E-01
.1583682E-01	.1968256E-01	.1420507E-01
.4384016E-02	.5743087E-02	.4374433E-02
.1319446E-02	.1659604E-02	.1214334E-02
.3907803E-03	.5074473E-03	.3830502E-03
.7984773E-04	.9883972E-04	.7155471E-04
.9654205E-04	.1285864E-03	.9667641E-04
-.1220574E-03	-.1644732E-03	-.1247811E-03

A matriz !erro! :

.4177208E-01	.7843605E-01	.6971133E-01
.3298052E-02	.4346728E-02	.1544613E-02
.6411038E-04	.1518676E-02	.1695857E-02
.2465402E-03	.4309881E-03	.2561230E-03
.2903142E-04	.1383667E-03	.1341441E-03
.1913722E-05	.1614471E-04	.9643816E-05
.3450990E-04	.5363711E-04	.4280292E-04
.6323964E-04	.8418321E-04	.6337400E-04
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Vetor com max!erro! em cada nivel de t :

.7843605E-01	.4346728E-02	.1695857E-02
.4309881E-03	.1383667E-03	.1614471E-04
.5363711E-04	.8418321E-04	.1774040E-03

O valor max !erro! e : .7843605E-01

O valor maximo de Kbeta e : .7339768E-02

O valor minimo de Jalfa e : .9326899E-02

Ap. Sol. Eq. do Calor com coeficientes variaveis
(via Metodo dos Gradientes Conjugados) :

Esta malha tem : 8 intervalos no eixo x e
16 intervalos no eixo t .
Assim temos que : delta(x)= .1250000E+00 e
delta(t)= .6250000E-01.

A dimensao do nosso espaco e (n-1)*(m+1)= 119 e

para obter !! Grad [-Kbeta(Xk)] !! (.5000000E-05,
foram necessarias 39 iteracoes.

!!Grad [-Kbeta(X(39))]!!= .3754142E-05

Matriz aproximacao da solucao : USOL :

.9990349E-01	.1587179E+00	.1858713E+00
.1870767E+00	.1659633E+00	.1250999E+00
.6746855E-01		
.6032585E-01	.9891792E-01	.1206162E+00
.1274598E+00	.1197564E+00	.9690915E-01
.5776899E-01		
.3592376E-01	.5887282E-01	.7147395E-01
.7495963E-01	.6968321E-01	.5550674E-01
.3218149E-01		
.1983978E-01	.3259062E-01	.3965016E-01
.4167681E-01	.3885065E-01	.3109024E-01
.1821073E-01		
.1084079E-01	.1781320E-01	.2167350E-01
.2277808E-01	.2122377E-01	.1696116E-01
.9893443E-02		
.5872190E-02	.9651605E-02	.1174440E-01
.1234386E-01	.1150280E-01	.9196607E-02
.5373568E-02		
.3175255E-02	.5219203E-02	.6351683E-02
.6676525E-02	.6221919E-02	.4973779E-02
.2904079E-02		
.1714904E-02	.2819224E-02	.3430424E-02
.3605587E-02	.3360114E-02	.2686453E-02
.1568770E-02		
.9247372E-03	.1519494E-02	.1849513E-02
.1944095E-02	.1811579E-02	.1447917E-02
.8456526E-03		
.5026182E-03	.8264235E-03	.1005783E-02
.1057146E-02	.9853373E-03	.7880112E-03

.2658258E-03	.4362550E-03	.5310340E-03
.5581353E-03	.5199564E-03	.4154721E-03
.2427386E-03		
.1501837E-03	.2472237E-03	.3009677E-03
.3165937E-03	.2950323E-03	.2359766E-03
.1378127E-03		
.7118114E-04	.1167704E-03	.1415648E-03
.1485230E-03	.1383541E-03	.1105869E-03
.6451632E-04		
.5066976E-04	.8401749E-04	.1026459E-03
.1082357E-03	.1010490E-03	.8076891E-04
.4724165E-04		
.1276320E-04	.2047759E-04	.2419760E-04
.2494347E-04	.2314398E-04	.1825950E-04
.1060455E-04		
.2677635E-04	.4508599E-04	.5587752E-04
.5956603E-04	.5600257E-04	.4491676E-04
.2651106E-04		
-.1438454E-04	-.2569559E-04	-.3292740E-04
-.3611517E-04	-.3456415E-04	-.2848202E-04
-.1697078E-04		

A matriz !erro! :

.9471513E-02	.2878207E-01	.4850373E-01
.6292327E-01	.6841171E-01	.6240009E-01
.4190645E-01		
.1302566E-02	.2264857E-02	.5862243E-02
.7450595E-02	.6722108E-02	.4273623E-02
.1254298E-02		
.4072346E-02	.4270397E-02	.3220923E-02
.2156399E-02	.1430184E-02	.9043217E-03
.3300756E-03		
.2651434E-02	.3124885E-02	.2818000E-02
.2389167E-02	.2018485E-02	.1624508E-02
.1022389E-02		
.1565251E-02	.1912266E-02	.1797335E-02
.1576841E-02	.1347613E-02	.1060229E-02
.6178999E-03		
.8667228E-03	.1070805E-02	.1018398E-02
.9027952E-03	.7768013E-03	.6158073E-03
.3681015E-03		
.4740970E-03	.5886471E-03	.5634874E-03
.5024495E-03	.4337230E-03	.3432231E-03
.2029215E-03		

.2572468E-03	.3203843E-03	.3068743E-03
.2738002E-03	.2365634E-03	.1876128E-03
.1111131E-03		
.1381252E-03	.1710168E-03	.1639161E-03
.1461249E-03	.1259820E-03	.9943952E-04
.5904061E-04		
.7812979E-04	.9872904E-04	.9616482E-04
.8688710E-04	.7571926E-04	.6031676E-04
.3548813E-04		
.3675425E-04	.4356098E-04	.4016643E-04
.3454328E-04	.2908887E-04	.2277808E-04
.1366710E-04		
.2656714E-04	.3530955E-04	.3607513E-04
.3404162E-04	.3013969E-04	.2406252E-04
.1419618E-04		
.4472524E-05	.2412744E-05	.1382257E-05
.3953828E-05	.4592905E-05	.3770692E-05
.2192297E-05		
.1467104E-04	.2230541E-04	.2550581E-04
.2595289E-04	.2390891E-04	.1905682E-04
.1124294E-04		
.6663206E-05	.1282482E-04	.1743041E-04
.1945975E-04	.1848404E-04	.1504291E-04
.8821853E-05		
.1629305E-04	.2711462E-04	.3341331E-04
.3560421E-04	.3353835E-04	.2694539E-04
.1602776E-04		
.2004176E-04	.3539368E-04	.4505001E-04
.4904596E-04	.4668677E-04	.3818011E-04
.2262800E-04		

Vetor com max!erro! em cada nivel de t :

.6841171E-01	.7450595E-02	.4270397E-02
.3124885E-02	.1912266E-02	.1070805E-02
.5886471E-03	.3203843E-03	.1710168E-03
.9872904E-04	.4356098E-04	.3607513E-04
.4592905E-05	.2595289E-04	.1945975E-04
.3560421E-04	.4904596E-04	

O valor max !erro! e : .6841171E-01

O valor maximo de Kbeta e : .7747253E-02

O valor minimo de Jalfa e : .8919414E-02

BIBLIOGRAFIA

[1] Ciarlèt, P. G., Schultz, M. H. and Varga, R. S. - Numerical Methods of High Order Accuracy for Non-Linear Boundary Value Problems I-one dimensional problems , Num. Math. 9, 394-430 (1966).

[2] Duff, I.S.-MA-28 - a set of FORTRAN subroutines for sparse unsymmetric linear equations A. E. R. E. Report R. 8730. HMSO, London, 1977.

[3] Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. and Moler, C. B. -Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice Hall, 1977.

[4] Giglioli, A. - Equações Diferenciais Parciais Elipticas , 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, 7 a 26 de julho 1975, IMPA.

[5] Golub, G. H. and Van Loan, C. F.-Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 1985.

[6] Herrera, I. - A General Formulation of Variational Principles, Instituto de Ingenieria, UNAM, E 10 Mexico, DF (1974).

[7] Herrera, I. and Sewell, M. J. - Dual Extremum Principles for Non-Negative Unsymetric Operators, J.Inst. Maths. Applics, (1978)21, 95-115.

[8] Hestenes, M. R. and Stiefel, E. - Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, J. Res. Nat. Bur. Stand. 49, 409-36, 1952.

[9] Hestenes, M. R. - Conjugate Direction Methods in Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[10] Hönig, C.S. - Análise Funcional e Aplicações (vol. 1) Publicações do IME-USP, 1970.

[11] Isaacson, E. and Keller, H. B. - Analysis of Numerical Methods, John Wiley & Sons, 1966.

[12] Lopes, V. L. R. - Manual Técnico do Sistema KABETA para Apr. Sol. Eq. do Calor por Elementos Finitos via Princípios Extremos Duais, Relatório Técnico (a aparecer) IMECC-UNICAMP.

[13] Noble, B. - Variational Finite Element Methods for Initial Value Problems (do livro: The Mathematics of the Finite Element Method and Applications, J. R.Whiteman Academic Press, New York, 1973).

[14] Noble, B. and Sewell, M. J. - On Dual Extremum Principles in Applied Mathematics, J. Inst. Maths. and its Applics, vol. 9, nº 2, April 1972.

[15] Prenter, P. M. - Splines and Variational Methods, John Wiley & Sons, Inc., 1975.

[16] Strang, G. and Fix, G. J. - An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs , N. J., 1973.

[17] Wilkinson, J. H. and Reinsch, C. - Handbook for Automatic Computation. Vol. II, Linear Algebra, Springer-Verlag 1971, (i) pg. 93-110; (ii) pg. 212-216 and 227-240.

[18] Zago, J. V. - Approximate Solution of Generalized Hamiltonian Equations with Applications, Ph.D Thesis, Wisconsin, Madison, 1976.

[19] Zago, J. V. - Princípios Extremos Duais para a Equação do Calor, Atas do 3º Seminário Brasileiro de Análise , 1976, R.J.