ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD CANÔNICA

Celi Vasques Crepaldi

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD CANÔNICA

Celi Vasques Crepaldi

ORIENTADOR: Prof. Dr. Cândido Lima da Silva Dias

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS

1985

Aos meus pais
ao Moacir e
às minhas filhas

AGRADEÇO SINCERAMENTE

Ao Prof. Dr. Cândido Lima da Silva Dias, pela orientação segura e principalmente pelo incentivo e amizade.

Ao Prof. Dr. Antonio Paques, pelas suas valiosas sugestões e colaborações.

Ao Prof. Dr. Antonio Conde sempre pronto a prestar-me o seu valioso auxílio.

Aos colegas e amigos do IQAr. - UNESP, em especial, ao Prof. Romeu Magnani, pela amizade, apoio e colaboração.

Aos colegas e amigos do I.C.M.S.C., pelo apoio e estímulo.

Ao José Carlos pela paciência, dedicação e pelo ótimo trabalho de datilografia.

ABSTRACT

Our intention was to construct and study one Clifford algebra C_M , which has a fundamental importance to the determination of other Clifford algebras. Moreover, it allows the establishment of the relation between the Clifford algebra of vector space E , of a finite dimension, and the exterior algebra of that space: ΛE .

The algebra C_M is a Clifford algebra of the space $M = E \oplus E^*$, which the quadratic form $Q((x, x')) = \langle x, x' \rangle$.

When we have studied the properties of this algebra, we have come to the conclusion that the quadratic space M (and the space E) over the field K , has an inner product.

The orthogonal group G of C_M and the Clifford group of G are very important and have been described and analysed in Chapter II.

In Chapter III, we have constructed one algebra on the vector space E with a quadratic form Q_1 , induced from Q , and by analogy, we have constructed one algebra on the vector space E^* , we have also established the relations among the algebras C_M , C_E e C_E^* .

On Chapter IV, we have shown that the Clifford algebra of E can be obtained as a deformation of the exterior algebra ΛE , based on the works of J. Helmstetter and using the interior products. Finally, we have shown an analogy between the reasoning of Helmstetter and the results we have attained.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO -----	i
CAPÍTULO I	
ÁLGEBRA DE CLIFFORD -----	1
CAPÍTULO II	
GRUPO DE CLIFFORD -----	23
CAPÍTULO III	
RELAÇÕES ENTRE AS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E ÁLGEBRA EXTERIOR -----	45
CAPÍTULO IV	
AS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD COMO DEFORMAÇÕES DAS ÁLGEBRAS EXTERIORES -----	60
BIBLIOGRAFIA -----	82

INTRODUÇÃO

A idéia inicial e a motivação para este trabalho surgiram de um artigo de M. Schemberg [29], no qual o autor introduziu uma álgebra de Clifford de um espaço pseudo-euclidiano de dimensão $2n$.

A definição da álgebra G_n é intrínseca e obtivemos uma definição equivalente e canônica.

A partir do K -espaço vetorial E de dimensão n , define-se o espaço $M = E \times E^*$, onde E^* é o dual de E e sobre M considera-se a forma quadrática canônica $Q[(x, x')] = \langle x, x' \rangle$; no Capítulo I, construímos a álgebra de Clifford de M em relação à forma quadrática canônica e a representamos por C_M , cuja multiplicação é dada por

$$x_i y'_j + y'_j x_i = \delta_{ij} \cdot 1$$

onde $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ é uma base de E e $(y'_j)_{1 \leq j \leq n}$ é a base dual de E^* .

Estudam-se também no Capítulo I, as propriedades do espaço quadrático (M, Q) : é um espaço hiperbólico e se $K = \mathbb{R}$, é um espaço pseudo-euclidiano com índice de inércia igual a (n, n) .

Como M é de dimensão par, verifica-se que C_M é uma álgebra central simples isomorfa à álgebra das matrizes de ordem 2^n .

A construção e as propriedades gerais da álgebra de Clifford são estudadas no Capítulo I; define-se também a álgebra de Weyl e as suas propriedades, mostrando suas relações com a álgebra de Clifford.

No Capítulo II, determina-se o grupo ortogonal de Q , representado por G , isto é, o grupo dos automorfismos lineares de M que conservam a forma quadrática e o grupo de Clifford Γ associado a G ; obtivemos a descrição dos automorfismos lineares de M que pertencem ao grupo G e como a dimensão de M é par, para cada $F \in G$, existe $s \in \Gamma$ tal que $\chi(s) \equiv F$, onde χ é a representação linear de Γ ; por este procedimento, determina-se o grupo de Clifford de G e estudam-se as propriedades.

Neste Capítulo, obtém-se um resultado importante: como E e E^* são subespaços totalmente singulares maximais de M , eles são permutados entre si por operações F do grupo ortogonal; então a restrição de F a E fornece um isomorfismo linear $u: E \rightarrow E^*$, e através de u , obtém-se uma forma bilinear $B_1: E \times E \rightarrow K$ não-degenerada (e simétrica se $u = {}^t u$), que origina uma álgebra de Clifford sobre o espaço E , representada C_E (Se B_1 não é simétrica, pode-se obter uma forma bilinear simétrica $B': E \times E \rightarrow K$, a partir de B_1).

No Capítulo III, evidenciamos as relações entre a álgebra de Clifford de um espaço vetorial E e a álgebra exterior deste espaço, utilizando-se a construção de Chevalley em [8]; obtém-se a igualdade

$$x \cdot y = x \wedge y + B(x, y) \quad x, y \in E$$

onde B é a forma bilinear canônica associada a Q e demonstra-se que C_E e ΛE são isomorfos como espaços vetoriais.

A álgebra C_M é de uma importância fundamental pois pode-se demonstrar que: uma álgebra de Clifford de um espaço vetorial de dimensão finita E , em relação a uma forma quadrática Q_1 pode ser obtida da álgebra C_M e analogamente para o espaço vetorial E^* . No Capítulo III, verifica-se que os espaços quadráticos (M, Q) , (E, Q_1) e (E^*, Q_2) são isométricos e são estabelecidas as relações entre C_M , C_E e C_E^* .

Finalmente, demonstra-se o isomorfismo de álgebra entre C_M e a álgebra dos endomorfismos de ΛE , utilizando-se os produtos interiores.

No Capítulo IV, generaliza-se os resultados de Chevalley, baseando-se em trabalhos mais recentes do autor J. Helmstetter [17], [18]. O autor se propõe estudar os isomorfismos $J_B: C_E \rightarrow \Lambda E$ como espaços vetoriais, dependendo de uma forma bilinear B sobre E tal que $B(a, a) = Q(a)$ para todo $a \in E$, que não é necessariamente a forma bilinear canonicamente associada a Q .

Considerando-se que a álgebra de Clifford C_E e a álgebra exterior ΛE tem o mesmo espaço vetorial, constrói-se sobre o espaço vetorial ΛE um

produto (que depende de B) que a transforma numa álgebra $\Lambda(E, B)$, isomorfa à álgebra de Clifford C_E ; o produto de Clifford aparece então como uma "deformação" do produto exterior.

Para estudar esta álgebra $\Lambda(E, B)$, utiliza-se os produtos interiores que originam uma anti-derivação de ΛE e dependem de formas lineares sobre E .

Estes procedimentos podem ser usados com poucas mudanças na álgebra simplética.

Mostra-se que esta abordagem da álgebra de Clifford apresenta estreita analogia com os objetivos deste trabalho e com os resultados obtidos.

CAPÍTULO I

ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Neste capítulo, daremos a definição e construção das álgebras de Clifford, e também suas propriedades fundamentais.

Também serão introduzidos conceitos essenciais ao desenvolvimento do trabalho.

A seguir, determinaremos a álgebra de Clifford de um espaço particular $M = E \oplus E^*$, onde E é um espaço vetorial qualquer $\dim E = n$ sobre K e E^* o seu espaço dual, em relação à forma quadrática canônica $Q: Q[(x, x')] = \langle x, x' \rangle$, onde $\langle x, x' \rangle$ é a forma bilinear fundamental, e analisaremos as suas propriedades.

Seja M um espaço vetorial sobre um corpo K .

Definição 1.1. Uma forma quadrática em M é uma aplicação Q de M em K que tem as seguintes propriedades:

- (a) $Q(ax) = a^2 \cdot Q(x)$ $a \in K, x \in M$
- (b) A aplicação $(x, y) \rightarrow Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ é uma forma bilinear $B: M \times M \rightarrow K$.

Dizemos que B é a forma bilinear associada a Q . É claro da definição que $B(x, y) = B(y, x)$ para todo $x, y \in M$. B é portanto simétrica.

Além disso, temos: $Q(2x) = 4Q(x)$ o que implica por (b)

$$B(x, x) = 2Q(x).$$

A forma bilinear simétrica associada com a aplicação quadrática Q é única.

Definição 1.2. Um espaço quadrático é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K , munido de uma forma quadrática Q e a forma bilinear simétrica B associada com Q .

A restrição da aplicação Q a um subespaço N de M é uma forma quadrática em N cuja forma bilinear associada é a restrição de B a $N \times N$.

Definição 1.3. Um elemento $x \in M$ é chamado singular se $Q(x) = 0$. Se a restrição da forma quadrática a N é igual a zero, dizemos que N é totalmente singular.

Seja K um corpo comutativo de característica diferente de 2 e seja M um K -espaço vetorial.

Define-se:

$$M' = \{x \in M \text{ t.q. } B(x,y) = 0 \forall y \in M\}$$

Definição 1.4. O posto da forma quadrática Q é o número $m-m'$ tal que $m = \dim M$ e $m' = \dim M'$.

Definição 1.5. Um espaço vetorial M diferente de zero, é isotrópico (ou singular) se ele contém um vetor singular.

Proposição 1.6. [8] Seja B_0 uma forma bilinear em $M \times M$. Então $x \rightarrow B_0(x,x)$ é uma forma quadrática em Q e toda forma quadrática pode ser representada desta maneira.

Se K não é característica 2, podemos tomar na Proposição 1.6,

$$B_0 = \frac{1}{2} B.$$

Seja E um K -espaço vetorial de dimensão n e seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de E , seja E^* o espaço dual de E e consideremos a base dual da base $\{x_i\}$, isto é,

$$\{x'_1, \dots, x'_n\} \text{ é a base de } E^* \text{ tal que } x'_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ ou } \langle x_i, x'_j \rangle = \delta_{ij}$$

Define-se o conjunto

$$M = E \times E^* = \{(x, x') / x \in E \text{ e } x' \in E^*\}$$

Introduz-se em M uma estrutura de espaço vetorial, através das operações:

$$(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y')$$

$$\lambda(x, x') = (\lambda x, \lambda x')$$

$$\forall (x, x'), (y, y') \in M, \forall \lambda \in K.$$

O espaço vetorial $M = E \times E^*$ é chamado o produto cartesiano de E por E^* .

Proposição 1.7. Se $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $F = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ são bases de E e E^* , respectivamente, então

$$E + F = \{(x_1, 0), \dots, (x_n, 0), (0, x'_1), \dots, (0, x'_n)\} \text{ é uma base de } E \times E^*.$$

Demonstração: De fato,

$$\alpha_1(x_1, 0) + \dots + \alpha_n(x_n, 0) + \beta_1(0, x'_1) + \dots + \beta_n(0, x'_n) = 0$$

significa

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 0 + \dots + \beta_n 0 = 0$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 + \beta_1 x'_1 + \dots + \beta_n x'_n = 0$$

Como os x_i e x'_j são linearmente independentes isto implica

$$\alpha_i = 0 \text{ e } \beta_j = 0.$$

Portanto, $E + F$ é um sistema l.i.

Além disso, se $z \in E \times E^*$, então $z = (x, x')$, $x \in E$ e $x' \in E^*$

assim,

$$z = (x, x') = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \beta_j x'_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i, 0) + \sum_{j=1}^n \beta_j (0, x'_j)$$

portanto, todo $z \in E \times E^*$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $E + F$.

Conclui-se que:

$$\dim (E \times E^*) = \dim E + \dim E^* = 2n.$$

Se $M' = E \oplus E^*$, existe um isomorfismo canônico $T: E \oplus E^* \rightarrow E \times E^*$

tal que

$$T(x+x') = (x, x') \quad x \in E, \quad x' \in E^*$$

$$E \times E^* \cong E \oplus E^*$$

isto é,

Pode-se identificar (a menos de isomorfismos) os subespaços E' e E'^* , com E e E^* , respectivamente, sendo:

$$E' = \{(x, 0') \in E \times E^*\} = \{(x, 0') / x \in E \text{ e } 0' \in E^*\}$$

$$E'^* = \{(0, x') \in E \times E^*\} = \{(0, x') / 0 \in E \text{ e } x' \in E^*\}$$

$$E' \cong E \text{ e } E'^* \cong E^*$$

Portanto, deste modo, E e E^* podem ser considerados subespaços vetoriais de $M = E \oplus E^* = E \times E^*$, isto é, o produto cartesiano $E \times E^*$ se decompõe como soma direta de subespaços isomorfos canonicamente a E e E^* .

Sobre M toma-se a forma quadrática canônica

$$Q: M \rightarrow K/Q(x, x') = [x'(x)].$$

Q é de fato uma forma quadrática, pois:

$$(a) \quad Q[\lambda(x, x')] = \langle \lambda x, \lambda x' \rangle = \lambda^2 \cdot \langle x, x' \rangle = \lambda^2 \cdot Q[(x, x')]$$

isto é,

$$Q[\lambda z] = \lambda^2 \cdot Q(z) \quad \lambda \in K, z \in M$$

$$(b) \quad \text{Se } z = (x, x') \text{ e } \omega = (y, y') \in M,$$

$$\begin{aligned} B(z, \omega) &= Q(z + \omega) - Q(z) - Q(\omega) \\ &= x'(y) + y'(x) \end{aligned}$$

é uma forma bilinear B em $M \times M$.

Observemos que B é não-degenerada.

$$\text{Temos também } B_0((x, x'), (y, y')) = \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)].$$

Então M com a forma quadrática Q e a forma bilinear B é um espaço quadrático.

Podemos associar uma matriz simétrica com uma base $E + F$ de M , tomando a matriz $2n \times 2n$, cujos elementos são

$$B_0((x_i, x'_i), (x_k, x'_k)) \cdot 1 \leq i, j, k, \ell \leq n.$$

Seja $\{x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n\}$ base de $M = E \oplus E^*$. Então temos

$$B((x_i, 0'), (x_j, 0')) = 0 \quad \forall i, j, 1 \leq i, j, \leq n$$

$$B((0, x'_i), (0, x'_j)) = 0 \quad \forall i, j, 1 \leq i, j, \leq n$$

$$B((x_i, 0'), (0, x'_j)) = x'_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$B((0, x'_i), (x_j, 0')) = x'_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Portanto, a matriz N , que é a matriz do espaço quadrático M na base em relação à forma bilinear B será:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Usa-se a notação

$$M \cong N$$

O determinante da matriz N é chamado o discriminante dos vetores $\{x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n\}$ e temos $\det N = -1$. (se n é ímpar).

Uma condição necessária e suficiente para que B seja não-degenerada é que seu discriminante seja diferente de zero.

Observemos que os subespaços $E \subset M$ e $E^* \subset M$ são totalmente singulares, pois:

$Q(E) = 0 \quad \text{e} \quad Q(E^*) = 0$
 e vale $Q(E) = 0 \iff B_0(E, E) = 0$
 por causa da identidade

$$B_0(z, \omega) = \frac{1}{2} [Q(z+\omega) - Q(z) - Q(\omega)] \quad \forall z, \omega \in M$$

Seja U um subespaço do espaço quadrático M . O complemento ortogonal U' (espaço conjugado) de U em M é o subespaço.

$$U' = \{z \in M \mid B(z, U) = 0\}$$

Definição 1.8. Definimos o radical de M como o subespaço

$$\text{rad } M = \{z \in M \mid B(z, M) = 0\} = M'$$

M é um espaço regular quadrático se $\text{rad } M = 0$.

O espaço quadrático M é regular se e somente se $\det. N \neq 0$.

Um importante exemplo de um espaço regular isotrópico é o plano hiperbólico.

Definição 1.9. Chama-se plano hiperbólico um espaço vetorial de dimensão 2, munido de uma forma quadrática, que é regular e possui uma base de vetores singulares.

As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço quadrático binário E :

- (a) E é um plano hiperbólico
- (b) E é isotrópico e regular
- (c) $dE = -1$.

Um plano hiperbólico E tem a matriz $E \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ em uma de suas bases.

Definição 1.9. Seja um vetor $y \in M$ tal que $Q(y) \neq 0$

Define-se uma aplicação $\tau_y : M \rightarrow M$, pela fórmula

$$\tau_y x = x - \frac{B(x,y)}{Q(y)} \cdot y$$

τ_y é um endomorfismo de M , que conserva a forma quadrática; é uma involução e é chamada a simetria em relação a y .

τ_y deixa os pontos do hiperplano H , conjugado de Ky , invariantes.

Toda simetria num plano hiperbólico troca as duas retas isotrópicas.

Temos a seguinte:

Proposição 1.10. [26] M é um espaço regular quadrático, E é um subespaço com $Q(E) = 0$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base para E . Então existe um subespaço $H_1 \perp \dots \perp H_n$ de M no qual cada H_i é um plano hiperbólico com $x_i \in H_i$.

Temos então $M = E \oplus E^*$, $E \subset M$, $Q(E) = 0$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ base de E .

Se mantermos a decomposição de planos hiperbólicos em M , temos

$$M = H_1 \perp \dots \perp H_n \perp M_0$$

como $0 \leq 2n \leq \dim M$ em cada H_i é um plano hiperbólico e M_0 é ou 0 ou não singular.

Pelo Teorema de Witt vemos que n não depende do modo como a decomposição é feita, e então M_0 é único a menos de isometria.

Aplica-se agora a Proposição 1.10 e concluímos que n é realmente o índice de M . Em particular isto prova que $n = \text{ind } M$ satisfaz a desigualdade.

$$0 \leq 2 \text{ ind } M \leq \dim M$$

Definição 1.11. Neste caso, chama-se M um espaço hiperbólico se $0 < 2n = \dim M$.
Então M é hiperbólico se e somente se tem uma decomposição.

$$M = H_1 \perp \dots \perp H_n$$

no qual $n \geq 1$ com todos H_i planos hiperbólicos.

Em particular, o espaço vetorial considerado $M = E \oplus E^*$ é um espaço hiperbólico.

O índice de um espaço regular quadrático M é um invariante que pode ser definido assim:

Definição 1.12. Chama-se índice de Q a dimensão comum de todos os subespaços maximais regularmente singulares de M .

Seja M um K -espaço vetorial, munido de uma forma quadrática e uma forma bilinear associada.

Definição 1.13. (da álgebra de Clifford)

Seja $T(M)$ a álgebra tensorial do espaço vetorial M e I o ideal gerado em T pelos elementos $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$ para todo $x \in M$. Então a álgebra $C(M) = \frac{T(M)}{I}$ é chamada álgebra de Clifford da forma quadrática Q .

A álgebra de Clifford é uma álgebra graduada.

De fato, seja $T^h(M)$ o espaço dos elementos homogêneos de grau h de $T(M)$. Representamos por $T_+(M) = \bigoplus_{h \text{ par}} T^h(M)$ e $T_-(M) = \bigoplus_{h \text{ ímpar}} T^h(M)$.

Então

$$T(M) = T_+(M) \oplus T_-(M)$$

O ideal I é gerado por elementos pertencentes a $T_+(M)$. Desde que $T(M)$ tem uma base composta de elementos homogêneos, todo elemento de I pode ser escrito como a soma de elementos de $I \cap T_+(M)$ e $I \cap T_-(M)$.

Seja

$$C_+(M) = \frac{T_+(M)}{I \cap T_+(M)} \quad \text{e} \quad C_-(M) = \frac{T_-(M)}{I \cap T_+(M)}$$

Então

$$C(M) = C_+(M) \oplus C_-(M)$$

e diz-se também que $C(M)$ tem uma estrutura de uma álgebra Z_2 - graduada, representando-se

$$C_+(M) = C_0(M) \quad \text{e} \quad C_-(M) = C_1(M)$$

Lembremos que uma K -álgebra C é Z_2 - graduada se ela é de dimensão finita dada na forma $C = C_0 \oplus C_1$, tal que $K = K.1 \subset C_0$ e que $C_i \cdot C_j \subset C_{i+j}$,

(Em particular, C_0 é uma sub-álgebra).

Os elementos de $C_+(M)$ são chamados pares e os elementos de $C_-(M)$ são ímpares.

Representaremos, a partir daqui, a álgebra de Clifford do espaço vetorial M , por C , enquanto não existir dúvidas sobre o espaço vetorial considerado.

Definição 1.14. Chama-se involução principal o automorfismo linear $\varepsilon : C \rightarrow C$ tal que

$$\varepsilon(u) = u \quad \text{se} \quad u \in C_+$$

$$\varepsilon(u) = -u \quad \text{se} \quad u \in C_-$$

Seja $h \geq 0$. A aplicação

$$(x_1, \dots, x_h) \rightarrow x_h \otimes \dots \otimes x_1 \text{ de } M \otimes \dots \otimes M \rightarrow T^h(M)$$

é obviamente multilinear.

Portanto, existe uma aplicação linear

$$\alpha_h^T : T^h(M) \rightarrow T^h(M) \text{ tal que}$$

$$\alpha_h^T(x_1 \otimes \dots \otimes x_h) = x_h \otimes \dots \otimes x_1 \text{ se } x_1, \dots, x_h \in M.$$

Seja α^T a aplicação linear de $T(M)$ sobre ele mesmo que estende todas as aplicações α_h^T . É claro que $(\alpha^T)^2$ é identidade.

Se $x_1, \dots, x_h, y_1, \dots, y_k$ estão em M ,

$$t = x_1 \otimes \dots \otimes x_h, \quad t' = y_1 \otimes \dots \otimes y_k,$$

então temos:

$$\alpha^T(t \otimes t') = y_k \otimes \dots \otimes y_1 \otimes x_h \otimes \dots \otimes x_1 = \alpha^T(t') \otimes \alpha^T(t),$$

o que prova que α^T é um anti-automorfismo de $T(M)$.

Este anti-automorfismo deixa os elementos de $T^0(M) = K$ e $T^1(M) = M$ fixados; ele leva sobre eles mesmos os geradores $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$ de I .

Mas I é o conjunto de todos os elementos que são somas de produtos da forma

$$t \otimes (x \otimes x - Q(x) \cdot 1) \otimes t', \text{ com } t, t' \in T(M), \quad x \in M.$$

Isto implica que

$$\alpha^T(I) = I.$$

Então α^T define de uma maneira natural uma aplicação linear $\alpha : C(M) \rightarrow C(M)$, sendo $C(M) = \frac{T(M)}{I}$. É claro que α é um anti-automorfismo de C , cujo quadrado é a identidade; é chamado o anti-automorfismo principal de $C(M)$.

$$\alpha^2 = I_M$$

Definição 1.15. O anti-automorfismo $\alpha: C \rightarrow C$ tal que $\alpha(x) = x$ para todo $x \in M$ é chamado anti-automorfismo principal de C .

Temos o seguinte teorema fundamental:

Teorema 1.16. "Seja φ uma aplicação linear de M numa álgebra C' sobre K . Suponhamos que $(\varphi(x))^2 = Q(x) \cdot 1$ para $x \in M$. Então φ pode ser estendido a um homomorfismo ψ de C em C' . Se $\varphi(M)$ gera C' , então $\psi(C) = C'$.

Prova:

Seja C' uma álgebra sobre K e $\varphi: M \rightarrow M' \subseteq C'$ uma aplicação s.e. tal que

$$(\varphi(x))^2 = Q(x) \cdot 1 \quad \forall x \in M$$

Seja π a aplicação canônica $\pi: T(M) \rightarrow C = \frac{T(M)}{I}$. Então existe um homomorfismo $\psi: C \rightarrow C'$ tal que $\psi(\pi(x)) = \varphi(x) \quad \forall x \in M$.

De fato, sabemos que φ pode ser estendido a um homomorfismo $\phi: T(M) \rightarrow C'$.

Se $x \in M$, então

$$\phi(x \otimes x - Q(x) \cdot 1) = (\varphi(x))^2 - Q(x) \cdot 1 = 0.$$

Isto mostra que o núcleo de ϕ contém I (núcleo de π). Então ϕ pode ser na forma

$$\phi = \psi \circ \pi$$

onde $\psi: C \rightarrow C'$ é um homomorfismo com a propriedade exigida. Se M' gera C' , então, temos

$$\psi(C) = C'$$

Agora construiremos uma álgebra C' .

Seja $E = \Lambda M$ a álgebra exterior sobre M , na qual a multiplicação será representada por $\wedge$.

Sabemos que, sendo λ uma função linear em M , existe uma anti-derivada δ de ΛM tal que $\delta \cdot x = \lambda(x) \cdot 1$ para $x \in M$, δ é homogênea de grau -1 e $\delta^2 = 0$.

Existe uma forma bilinear $B_0: M \times M \rightarrow K$ tal que $B_0(x, x) = Q(x)$ para todo $x \in M$.

Representamos por δ_x a anti-derivada de ΛM tal que

$$\delta_x \cdot y = B_0(x, y) \quad y \in M$$

Seja L_x o operador $u \rightarrow x \wedge u$ da multiplicação à esquerda por x em E ; coloca-se

$$L'_x = L_x + \delta_x$$

Então $x \rightarrow L'_x$ é uma aplicação linear $\Psi: M \rightarrow \mathbb{C}$ dos endomorfismos do espaço vetorial ΛM .

Mostraremos que vale:

$$(\Psi(x))^2 = L'^2_x = Q(x) \cdot I$$

onde I é a aplicação identidade.

De fato:

$$L'^2_x = L^2_x + L_x \delta_x + \delta_x L_x + \delta^2_x \quad (1)$$

Temos que $L^2_x = \delta^2_x = 0$ e

$$\begin{aligned} \delta_x L_x \cdot u &= \delta_x (x \wedge u) = (\delta_x x) \wedge u - x \wedge (\delta_x u) = \\ &= Q(x) \cdot u - L_x \cdot \delta_x u \end{aligned}$$

Portanto, $L_x \delta_x + \delta_x L_x = Q(x) \cdot I$ e

$$L_x'^2 = Q(x) \cdot I \quad (2)$$

Esta igualdade implica que existe um homomorfismo ψ de C em C tal que $\psi(\pi(x)) = L_x'$ para $x \in M$.

Verifica-se que $\varphi : x \rightarrow L_x'$ é um isomorfismo de M , pois:

$$L_x' \cdot 1 = x \wedge 1 + \delta_x \cdot 1 = x,$$

desde que $\delta_x \cdot 1 = 0$, se $x \in M$ e temos o núcleo de φ igual a zero.

Segue que π induz um isomorfismo de M em C . Poderemos portanto identificar os elementos de M com suas imagens em C pela aplicação φ e M será considerado como um subespaço de C . Temos

$$x^2 = Q(x) \cdot 1 \quad \text{se} \quad x \in M \quad (3)$$

Aplicando (3) a x, y e $x + y$ (onde $x, y \in M$) e usando o fato

$$Q(x+y) - Q(x) - Q(y) = B(x, y) \quad \text{obtemos}$$

$$xy + yx = B(x, y) \cdot 1 \quad x, y \in M \quad (4)$$

Enunciaremos as propriedades fundamentais da álgebra de Clifford que serão utilizadas posteriormente.

Proposição 1.17. [8] "Seja $\{x_1, \dots, x_m\}$ base de M . Se $\sigma = (i_1, \dots, i_h)$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros $i_1, \dots, i_h$ entre 1 e m , seja $P(\sigma)$ o produto $x_{i_1} \dots x_{i_h}$ em C . Então os elementos $P(\sigma)$ formam uma base de C , que é de dimensão 2^m ".

Proposição 1.18. [8] "Seja a notação de 1.16, se $\Psi(M)$ gera C' e C' é de dimensão $\geq 2^m$, então ψ é um isomorfismo de C com C' ."

Proposição 1.19. [8] "Seja N um subespaço de M . Então a subálgebra de C gerada por N é isomorfa à álgebra de Clifford da restrição de Q a N ".

Retornamos ao homomorfismo $\psi: C \rightarrow \mathbb{C}$ considerando acima. Coloca-se

$$\theta(u) = \psi(u) (1) \quad \text{para} \quad u \in C$$

Então θ é uma aplicação linear de $C(M)$ em ΛM e desde que, $\dim C(M) = 2^m = \dim M$, θ é um isomorfismo linear, que coincide com a identidade em K e em M . Geralmente, identificaremos o espaço vetorial básico de $C(M)$ com o espaço vetorial de ΛM , através de θ . Entretanto, devemos sempre considerar, que essa identificação depende da escolha de uma forma bilinear B_0 tal que $B_0(x, x) = Q(x)$.

Portanto

$$C(M) \cong \Lambda M \quad (\text{de espaços vetoriais})$$

Finalmente, enunciaremos um teorema de maior importância, que determina a estrutura da álgebra de Clifford para espaços vetoriais de dimensão par.

Teorema 1.21. [8] "Seja M um espaço vetorial de dimensão $2r$ e Q de posto m . Então a álgebra de Clifford C de Q é uma álgebra central simples. Além disso, se Q é de índice r , então C é isomorfa a álgebra de todas as matrizes de ordem 2^r com coeficiente em K ".

Apliquemos os resultados obtidos, na determinação da álgebra de Clifford do espaço $M = E \oplus E^*$ definido anteriormente, em relação à forma quadrática canônica.

A álgebra de Clifford C de M em relação à forma quadrática Q , é a álgebra $C_M = \frac{T(M)}{I}$, onde I é o ideal gerado pelo conjunto $S = \{z \otimes z - Q(z) \cdot 1 \text{ para } z \in M\}$.

Se $z = x + y' \in M$, S pode ser escrito

$$S = \{(x+y') \otimes (x+y') - y'(x) \cdot 1 \mid x \in E, y' \in E^*\}$$

Então, considerando-se M como subespaço de C , fica:

$$x^2 + x \cdot y' + y' \cdot x + y'^2 = [y'(x)] \cdot 1 \quad x \in E, y' \in E^*$$

o que implica que

$$x \cdot y' + y' \cdot x = \langle x, y' \rangle \cdot 1, \quad x \in E, y' \in E^* \quad (5)$$

pois:

$$x^2 = Q(x) = 0 \quad \text{e} \quad y'^2 = Q(y') = 0$$

considerando-se que

$$Q(E) = 0 \quad \text{e} \quad Q(E^*) = 0.$$

Se considerarmos a base de E $\{x_1, \dots, x_n\}$ e a base dual $\{y'_1, \dots, y'_n\}$ de E^* , vale:

$$x_i \cdot y'_j + y'_j \cdot x_i = \langle x_i, y'_j \rangle \cdot 1 = \delta_{ij} \cdot 1 \quad (6)$$

que é a tábua da multiplicação da álgebra G_n .

Lembramos que a forma bilinear associada a Q é dada por

$$B[(x, x'), (y, y')] = [x'(y) + y'(x)]$$

ou

$$B_0[(x, x'), (y, y')] = \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)]$$

Considerando-se que a restrição da forma quadrática canônica Q , aos subespaços E e E^* de M , é igual a forma nula, isto é,

$$Q|_E = 0 \quad \text{e} \quad Q|_{E^*} = 0,$$

conclui-se que as álgebras de Clifford das restrições de Q a E e a E^* , são isomorfas às álgebras exteriores de E e E^* .

Em símbolos,

$$C_{(E)} \cong \Lambda E \quad \text{e} \quad C_{(E^*)} \cong \Lambda E^*$$

o que é equivalente a afirmar,

$$x^2 = x \wedge x = 0 \quad \forall x \in E$$

$$x'^2 = x' \wedge x' = 0 \quad \forall x' \in E^*$$

Além disso, é importante destacar que, sendo a dimensão do espaço par $= 2n$ e Q de índice n , C_M é isomorfa à álgebra de todas as matrizes de ordem 2^n , com coeficientes em K e é uma álgebra central simples (aplicando-se o Teorema 1.21).

A seguir, daremos a definição e propriedades de uma álgebra que está intimamente relacionada com a álgebra de Clifford: é a chamada Álgebra de Weyl.

Seja K um corpo comutativo de característica nula e M um K -espaço vetorial.

Definição 1.22. Uma forma bilinear $f: M \times M \rightarrow K$ é anti-simétrica se e somente se

$$(a) \quad f(x,y) = -f(y,x) \quad x,y \in M$$

Esta condição é equivalente a:

$$(b) \quad f(x,x) = 0 \quad x \in M$$

(pois K tem característica nula)

Definição 1.23. A Álgebra de Weyl de um espaço vetorial M , $C_S(M,f)$ é a álgebra quociente da álgebra tensorial $T(M)$ pelo ideal bilateral gerado pelos elementos.

$$z \otimes w - w \otimes z - f(z,w) \quad z,w \in M$$

onde f é uma forma bilinear anti-simétrica.

Muitas das propriedades das álgebras de Clifford tem analogia com as da álgebra de Weyl; por exemplo toda forma bilinear B sobre M tal que $B(a,b) - B(b,a) = f(a,b)$ se $a,b \in M$, determina um isomorfismo J_B do espaço vetorial $C_S(M,f)$ sobre o espaço vetorial subjacente à álgebra simétrica SM .

Pode-se definir uma extensão desta álgebra.

Definição 1.24. Seja F uma forma bilinear anti-simétrica de "ordem" maximal sobre M (forma simplética). A álgebra de Clifford simplética é a álgebra quociente da álgebra tensorial $T(M)$ pelo ideal bilateral gerado pelos elementos

$$z \otimes w - w \otimes z - F(z,w) \quad z,w \in M$$

Notação: $C_S(M,F)$

A álgebra $C_S(M,F)$ é associativa e é única a menos de isomorfismo (propriedade universal).

Teorema 1.25. [12] "Seja A uma álgebra associativa sobre K, e u uma aplicação linear de M em A tal que

$$u(x) \cdot u(y) - u(y) \cdot u(x) = F(x, y) \quad x, y \in M;$$

então existe um homomorfismo $\bar{u}$ e um sô de $C_S(M, F)$ em A tal que $u = \bar{u} \circ \rho_F$, onde ρ_F é a aplicação canônica $\rho_F: T(M) \rightarrow C_S(M, F)$ ".

Teorema 1.26. [12] "A álgebra $C_S(M, F)$ é linearmente isomorfa à álgebra simétrica SM".

Retomamos o espaço vetorial $M = E \oplus E^*$, definido anteriormente.

Seja $F: M \times M \rightarrow K$ a forma bilinear anti-simétrica

$$F(z, w) = F((x, x'), ((y, y'))) = [y'(x) - x'(y)]$$

Então, a multiplicação de $C_S(M, F)$ é dada por

$$z \cdot w - w \cdot z = F(z, w) \quad z, w \in M$$

$$(x+x')(y+y') - (y+y')(x+x') = [y'(x) - x'(y)] \cdot 1 \quad x, y \in E, x', y' \in E^*$$

ou

$$x y' + x' y - y x' - y' x = [y'(x) - x'(y)] \cdot 1 \quad (7)$$

Fazendo $z = x \in E$, a igualdade (7) fica:

$$x y' - y' x = [y'(x)] \cdot 1 \quad x \in E, y' \in E^* \quad (8)$$

Se $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é base de E e $\{y_j^!\}_{1 \leq j \leq n}$ a base dual de E^* , temos:

$$x_i y_j^! - y_j^! x_i = \delta_{ij} \cdot 1 \quad (9)$$

A álgebra $C_S(M, f)$ definida por estas igualdades constitui a álgebra L_n , definida por Schemberg.

É importante ressaltar que a álgebra $C_S(M, F)$ restrita a E é isomorfa à álgebra simétrica sobre E e a álgebra $C_S(M, F)$ restrita ao subespaço E^* de M é isomorfa à álgebra simétrica sobre E^* .

Em símbolos, na álgebra $C_S(M, F)$ vale:

$$x y = y x \quad \forall x, y \in E$$

$$x' y' = y' x' \quad \forall x', y' \in E^*$$

Portanto, usando a notação de Schemberg [29]; concluímos que as álgebras G_n e L_n são extensões das álgebras exterior e simétrica de vetores contravariantes.

Usando a definição de plano hiperbólico e observando-se que $\det M = -1$ (em relação à forma bilinear B_0), analisaremos a decomposição do espaço M em planos hiperbólicos. ($\det M = -1$ se $n = \dim E$ é ímpar).

Teorema 1.27. [13] "Seja (M, B) um espaço vetorial munido de uma forma B simétrica ou anti-simétrica não-degenerada. Se S é um espaço totalmente singular de M , de base dada $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$, existe um sub-espaço S' totalmente singular, de mesma dimensão que S , e uma base $(x'_j)_{1 \leq j \leq r}$ de S' tais que:

1) Para cada j , $1 \leq j \leq r$, x_j e x'_j formam uma base de um plano regular H_j (plano hiperbólico) e $B(x_i, x'_j) = 1$ se $i = j$, 0 se $i \neq j$.

2) A soma $S + S'$ é direta, e é um sub-espaço regular de (M, B) , soma direta ortogonal dos planos H_j (planos hiperbólicos):

$$S \oplus S' = H_1 \perp H_2 \perp \dots \perp H_r$$

decomposição dita hiperbólica de $S \oplus S'$."

Proposição 1.28. [13] "Seja (M, B) um espaço vetorial de dimensão $2n$ munido de uma forma bilinear B , simétrica ou anti-simétrica, não degenerada, cuja aplicação linear associada à direita, bijeção de M sobre M^* , e representada ρ , $\langle x, \rho(y) \rangle = B(x, y)$. Suponhamos que existe um sub-espaço S totalmente singular de dimensão n , onde uma base $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ é dada; todo outro espaço totalmente singular S' , de dimensão n , suplementar de S ($S \cap S' = 0$) é identificado ao dual de S e possui uma base $(x'_j)_{1 \leq j \leq n}$ tal que $B(x_i, x'_j) = \delta_{ij}$, a restrição de B a $S \times S'$ se identificando ao "colchete" de dualidade".

No espaço vetorial $M = E \oplus E^*$ temos a forma B simétrica e a forma B' anti-simétrica:

$$B(x+x', y+y') = \langle x, y' \rangle + \langle y, x' \rangle \quad x, y \in E$$

$$B'(x+x', y+y') = \langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle \quad x', y' \in E^*$$

A restrição de B e B' a $E \times E^*$ é a forma bilinear canônica.

$$B(x, y') = B'(x, y') = \langle x, y' \rangle$$

Conclui-se então, que, em M , E^* pode ser identificado a um sub-espaço E' totalmente singular de dimensão n , onde uma base $(x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ é dada e a soma $E \oplus E'$ pode ser escrita como a soma direta ortogonal dos planos hiperbólicos H_i : ($1 \leq i \leq n$)

$$E \oplus E' = H_1 \perp H_2 \perp \dots \perp H_n$$

o que equivale a afirmar que M é um espaço hiperbólico.

Reciprocamente, um espaço hiperbólico (M, Q) de dimensão $2n$ pode ser decomposto em soma direta de dois subespaços totalmente singular maximais E e E' , de dimensão n , colocados em dualidade pela forma bilinear associada a

$Q(M, Q)$ é isomorfo ao espaço quadrático $E \oplus E^*$, munido da forma bilinear simétrica

$$B(x + x', y + y') = \langle x, y' \rangle + \langle y, x' \rangle.$$

Teorema 1.29. [13] "Seja (M, Q) um espaço quadrático sobre um corpo ordenado. Todos os subespaços estritamente positivos maximais tem mesma dimensão p , todos os subespaços estritamente negativos maximais tem mesma dimensão q . O par de inteiros (p, q) é chamado o índice de inércia de Q , que é de "posto" $p+q$. Se $Q(z) = \sum_{i=1}^n (a_i)^2 X_i$ em uma base ortogonal de M , $(z = \sum_i a_i x_i \in M \text{ e } Q(x_i) = X_i \text{ } 1 \leq i \leq n)$, o número de coeficientes X_i estritamente positivo é igual a p , o número de coeficientes X_i estritamente negativo é igual a q e estes números são os mesmos para toda base ortogonal".

Esta forma pode se escrever em uma base ortogonal conveniente:

$$Q(z) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_p)^2 - (x_{p+1})^2 - \dots - (x_{p+q})^2$$

Definição 1.30. Um espaço quadrático real regular (M, Q) é chamado espaço euclidiano se Q é estritamente positiva, anti-euclidiano se Q é estritamente negativa, pseudo-euclidiano se Q é de índice (p, q) com $p > 0$ e $q > 0$.

Verifica-se que o espaço $M = E \oplus E^*$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço pseudo-euclidiano com índice de inércia igual a (n, n) .

CAPÍTULO II

GRUPO DE CLIFFORD

Neste capítulo são válidas as notações já utilizadas anteriormente.

Q representa a forma quadrática sobre um espaço vetorial M de dimensão m sobre um corpo K , B é a forma bilinear associada a Q e supõe-se que ela é não degenerada; C é a álgebra de Clifford de Q e G o grupo ortogonal de Q .

Definição 2.1. Chama-se grupo de Clifford de G e representa-se por Γ , o grupo de elementos inversíveis s de C tal que $s x s^{-1} \in M$ para todo $x \in M$.

Se $s \in \Gamma$, representa-se por $\chi(s)$ o automorfismo linear $x \mapsto s x s^{-1}$ de M e $\chi: s \mapsto \chi(s)$ é uma representação linear de Γ , chamada a representação vetorial de Γ .

Seja $s \in \Gamma$. Então temos, para $x \in M$,

$$Q(s x s^{-1}) = (s x s^{-1})^2 = s x^2 \cdot s^{-1} = Q(x) \cdot 1$$

Isto implica que χ leva Γ no grupo ortogonal G de Q .

Teorema 2.2. [8] Se a dimensão do espaço vetorial M é par, então

$$\chi(\Gamma) = G.$$

Seja H um hiperplano de M cujo conjugado contém um vetor não singular z . Para $x \in M$, define-se

$$\tau_z: x \mapsto x - [Q(z)]^{-1} \cdot B(x, z) \cdot z$$

τ_z é um endomorfismo de M , que pertence ao grupo ortogonal G , e é chamada a simetria em relação a H .

Teorema 2.3. "Se x é um elemento não singular de M , então $x \in \Gamma$ e $\chi(x)$ é a aplicação $y \rightarrow -\tau y$, onde τ é a simetria em relação ao hiperplano conjugado de Kx ".

Prova:

Seja x um elemento não singular de M . Então x é inversível, e $x^{-1} = [Q(x)]^{-1} \cdot x$.

Temos $xy + yx = B(x, y) \cdot 1$ para $y \in M$,

$$xy x^{-1} + y = B(x, y) \cdot x^{-1}$$

$$xy x^{-1} = [Q(x)]^{-1} \cdot B(x, y) x^{-1} = -\tau \cdot y$$

donde

$$\chi(x) \cdot (y) = -\tau_x y$$

onde τ é a simetria em relação ao conjugado de $K \cdot x$.

Segue que $x \in \Gamma$ e $\chi(x) = -\tau$.

Teorema 2.4. "Seja Z^* o grupo multiplicativo dos elementos inversíveis do centro Z de C ; então Z^* é o núcleo de χ e, exceto no caso que K é um corpo com 2 elementos, $\dim M = 4$ e Q é de índice 2, $Z^* \cup (\Gamma \cap M)$ é um conjunto de geradores do grupo Γ ".

Prova:

Se $s \in Z^*$, $\chi(s) \cdot (x) = x$ para $x \in M$ e portanto $Z^* \subset \Gamma$, e é óbvio que Z^* está no núcleo de χ .

Reciprocamente, se $s \in \Gamma$, $\chi(s) = I$, então s comuta com todo elemento de M , e $s \in Z \cap \Gamma = Z^*$.

Excluamos o caso excepcional mencionado no enunciado. Toda operação de G pode ser escrita como um produto $\tau_1 \dots \tau_h$ de simetrias em relação aos hiperplanos cujos conjugados contêm vetores não singulares $x_1, \dots, x_h$.

Seja ζ a aplicação $x \rightarrow -x(x \in M)$, e ζ' o automorfismo de C que estende ζ . Vale $\zeta'(u) = -u$ para $u \in C_-$.

Então, desde que $\zeta^2 = 1$, temos $\sigma = \zeta^h \chi(x_1, \dots, x_h)$

Se m é ímpar, então temos $\det \tau_i = +1$, $\det \zeta = -1$, e, se $\sigma \in G^+$, então temos $h \equiv 0 \pmod{2}$ e $\sigma = \chi(x_1 \dots x_h)$; se $\sigma = \chi(s)$, $s \in \Gamma$, então $s = s_0 s_1 \dots s_h$ com $s_0 \in Z^*$.

Se m é par, então ζ pertence ao grupo gerado por $\Gamma \cap M$. De fato, seja $(y_1, \dots, y_m)$ uma base de M composta de vetores mutuamente ortogonais. Então

$$\chi(y_i)(y_j) = -y_j \quad \text{se } i \neq j$$

$$\chi(y_i)(y_i) = y_i.$$

donde

$$\zeta = \chi(y_1 \dots y_m).$$

Então, segue do mesmo modo que acima que todo $s \in \Gamma$ pertence ao grupo gerado por $\Gamma \cap M$ e Z^* .

Teorema 2.5. [8] "Todo $s \in \Gamma$ pode ser escrito na forma zs' , onde s está no centro de C e s' é um elemento de Γ que é par ou ímpar. Se m é par, s é ou par ou ímpar.

Representa-se por Γ^+ o grupo de elementos pares de Γ .

Teorema 2.6. [8] Toda operação de G pertence ao grupo G' gerado pelas simetrias em relação aos hiperplanos cujos conjugados contêm vetores não singulares.

Retornemos ao espaço quadrático $M = E \oplus E^*$, onde E é um K -espaço vetorial de dimensão n , com a forma quadrática canônica Q .

Então Γ é gerado pelo conjunto $K^* \cup (\Gamma \cap M)$ onde

$$\Gamma \cap M = M_1 = \{z \in M \text{ t.q. } Q(z) \neq 0\}$$

ou

$$M_1 = \{z = (x + x') \in M \text{ t.q. } \langle x, x' \rangle \neq 0\}$$

Portanto $z \in M_1 \implies z = x + x' \text{ t.q. } x \neq 0 \text{ e } x' \neq 0$.

Verifica-se também aplicando-se [2.5] neste caso particular que um elemento $s \in \Gamma$ é da forma

$$s = k \cdot s_1 \dots s_h \quad k \in K^*$$

e $s_i = x_i + x'_i$, $1 \leq i \leq h$ onde $\langle x_i, x'_i \rangle \neq 0$ e h pode ser par ou ímpar.

Seja σ uma operação do grupo G . Como $\dim M = 2n$ é par, existe $s \in \Gamma$ t.q. $\chi(s) \equiv \sigma$.

Aplicando 2.6., vemos que:

se $\sigma \in G \implies$ existe $s = k s_1 \dots s_h$ t.q. $\chi(s) \equiv \sigma$ e para $z \in M$

$$\begin{aligned} \chi(s)(z) &= sz s^{-1} = (s_1 \dots s_h) z (s_1 \dots s_h)^{-1} = \\ &= -\tau_{s_1} \cdot -\tau_{s_2} \dots -\tau_{s_h}(z) \end{aligned}$$

onde τ_{s_i} é a simetria em relação ao vetor s_i e s_i é não-singular.

Determinemos as operações do grupo G de $M = E \oplus E^*$

$$G_M = \{F: M \rightarrow M \text{ automorfismos lineares t.q. } Q(F(x, x')) = \langle x, x' \rangle, (x, x') \in M\}$$

Seja $B: E \times E \rightarrow K$ uma forma bilinear. Para todo $x \in E$, temos a forma linear em E

$$u(x) : y \rightarrow B(x, y)$$

e $u: E \rightarrow E^*$ é a aplicação linear canonicamente associada a B .

Observemos que se B é não-degenerada, u é injetora e como $\dim E = \dim E^*$, u é um isomorfismo de E sobre E^* .

Seja F um K -espaço vetorial.

Definição 2.7. Chama-se transposta de uma aplicação linear $u: E \rightarrow F$, e representa-se ${}^t u$, a aplicação linear ${}^t u: F^* \rightarrow E^*$ t.q. ${}^t u(y') = y' \circ u$.

Valem as propriedades:

$$(a) \langle u(x), y' \rangle = \langle x, {}^t u(y') \rangle \quad x \in E, y' \in F^*$$

(b) Se $u: E \rightarrow F$ e $v: F \rightarrow H$ (H é um K -espaço vetorial)

$${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$$

$$(c) {}^t({}^t u) = u$$

(d) Se $u: E \rightarrow F$ um isomorfismo, então ${}^t u: F^* \rightarrow E^*$ é um isomorfismo, e

$${}^{t u^{-1}} = ({}^t u)^{-1}$$

Definição 2.8. Seja $u: E \rightarrow F$ um isomorfismo; chama-se isomorfismo contragradiente de u (ou aplicação contragradiente de u) e representa-se $\overset{v}{u}$, a transposta do isomorfismo recíproco de u (igual ao isomorfismo recíproco de ${}^t u$), isto é,

$$\overset{v}{u} = {}^t(u^{-1}) = ({}^t u)^{-1}$$

O isomorfismo $\overset{v}{u}$ é então definido pela identidade

$$\langle u(x), \overset{v}{u}(x') \rangle = \langle x, x' \rangle \quad x \in E, x' \in E^* \quad (1)$$

e temos

$$\overset{v}{(\overset{v}{u})} = u,$$

isto é, u é o isomorfismo contragradiente de $\overset{v}{u}$.

Proposição 2.9. Existe um automorfismo $F:M \rightarrow M$, que pertence ao grupo ortogonal de M e troca (entre si) os s.e. totalmente singulares maximais E e E^* de M .

Prova:

Seja $B:E \times E \rightarrow K$ e $u:E \rightarrow E^*$ a aplicação linear associada a B . (B não-degenerada) e $\bar{u}:E^* \rightarrow E$. (u é um isomorfismo).

Podemos então definir a aplicação

$$F:M \rightarrow M \quad \text{t.q.}$$

$$F(x, x') = (u(x), \bar{u}(x')) \quad (x, x') \in M \quad (I)$$

(pode-se também escrever $F(x, x') = (\bar{u}(x'), u(x))$).

Obviamente, F é linear e é um isomorfismo.

F troca os subespaços totalmente singulares maximais de M , E e E^* , pois:

Se $x \in E \subset M$
s.e.

$$F(x) = F(x, 0) = (u(x), 0) \in E^* \implies F(E) = E^*;$$

se $x' \in E^* \subset M$,

$$F(x') = F(0, x') = (\bar{u}(x'), 0) \in E \implies F(E^*) = E$$

$F \in$ grupo ortogonal de M , pois se $z = (x, x') \in M$,

$$Q(F(z)) = Q(F(x, x')) = \langle \bar{u}(x'), u(x) \rangle = \langle x, x' \rangle = Q(z)$$

Conclui-se que:

a partir de uma função bilinear $B:E \times E \rightarrow K$ (não degenerada), temos um isomorfismo $u:E \rightarrow E^*$, e o isomorfismo contragradiente $\bar{u}:E^* \rightarrow E$.

Define-se então um automorfismo de M , $F((x, x')) = (u(x'), u(x))$ que conserva a forma quadrática e troca entre si os s.e. totalmente singulares maximais E e E^* , isto equivale a afirmar que $F \in G$ (grupo ortogonal de Q).

Reciprocamente, dado o grupo ortogonal G de Q , os s.e. totalmente singulares maximais de M , E e E^* são permutados transitivamente entre si por operações de G .

Então

$$F \in G \implies F(E) = E^* \text{ e } F(E^*) = E;$$

define-se então $u: E \rightarrow E^*$ isomorfismo e uma forma bilinear não-degenerada (simétrica)

$$B: E \times E \rightarrow K \text{ t.q. } u(x)(y) = B(x, y), \quad x, y \in E.$$

B é simétrica se e somente se $u =$

Estabelece-se então uma correspondência entre as operações de G que trocam os s.e. totalmente singulares E e E^* de M e os espaços quadráticos E (espaço vetorial de dimensão finita n munido de uma forma bilinear B e uma forma quadrática Q).

Teorema 2.10 [8] Sejam E e E' s.e. totalmente singulares de dimensão n . Então existe

$$s \in \Gamma \text{ t.q. } s E s^{-1} = E'$$

Teorema 2.11 [8] Todos os subespaços totalmente singulares maximais tem a mesma dimensão e são permutados transitivamente entre eles por operações de G .

Portanto, existe

$$s \in \Gamma \quad \text{t.q.} \quad \chi(s) \equiv F,$$

onde F é o automorfismo da Proposição 2.9 e

$$\chi(s)(E) = E^*, \quad \chi(s)(E^*) = E.$$

Quais são as outras aplicações $F:M \rightarrow M$ que pertencem a G ?

Seja

$$F_1:M \rightarrow M \quad \text{t.q.} \quad F_1(z) = \lambda z \quad z \in M.$$

Então se

$$z = (x, x'),$$

temos

$$Q(\lambda z) = \langle \lambda x, \lambda x' \rangle = \lambda^2 \langle x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

se e somente se

$$\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1.$$

Portanto

$$I \text{ e } -I \in G.$$

Existem outros automorfismos de M , que pertencem ao grupo ortogonal G .

Seja

$$u':E \rightarrow E$$

um isomorfismo linear; a transposta ${}^t u'$ é um isomorfismo de E^* sobre E^* e pode-se definir o isomorfismo contragradiente

$$v'_u = ({}^t u')^{-1} : E^* \rightarrow E^*$$

e o automorfismo linear

$$F': M \rightarrow M \quad \text{t.q.} \quad F'(x, x') = (u'(x), \overset{V}{u}'(x')) \quad (\text{II})$$

Proposição 2.12. Além da identidade, existe um automorfismo $F': M \rightarrow M$, que pertence ao grupo ortogonal de Q e leva E em E e E^* em E^* .

Prova:

Verifica-se como em 2.9, que

$$F': M \rightarrow M \quad \text{t.q.} \quad F'(x, x') = (u'(x), \overset{V}{u}'(x'))$$

é um automorfismo linear de M e

$$\langle u'(x), \overset{V}{u}'(x') \rangle = \langle x, x' \rangle$$

e que mostra que F' pertence ao grupo ortogonal G de M .

F' leva os s.e. totalmente singulares maximais E e E^* , neles mesmos, isto é,

$$F'(E) = E \quad \text{e} \quad F'(E^*) = E^*$$

Se $x \in E \subset M$

$$F'(x) = F'(x, 0) = (u'(x), 0) \in E$$

e se $x' \in E^* \subset M$.

$$F'(x) = F'(0, x') = (0, \overset{V}{u}'(x')) \in E^*.$$

Vimos que existe $s, s' \in \Gamma$ t.q. $\chi(s) \equiv F$ e $\chi(s') \equiv F'$.

Em particular, se

$$x \in E, F(x) = u(x) = s x s^{-1} = \chi(s)(x) \in E^* \quad (1)$$

e para

$$x' \in E^*, F'(x') = \overset{V}{u}(x') = s x' s^{-1} = \chi(s)(x) \in E$$

Analogamente, se

$$x \in E \text{ e } x' \in E^*, \exists s, s' \in \Gamma \text{ t.q.}$$

$$F'(x) = u'(x) = s x s^{-1} \in E \quad \text{e} \quad (2)$$

$$F'(x') = v'(x') = s x' s^{-1} \in E^*.$$

Observemos que se $s_1, s_2 \in \Gamma$ t.q. $\chi(s_1)(x) = \chi(s_2)(x)$ (nas igualdades 1 e 2), para $x \in E$,

$$s_1 x s_1^{-1} = s_2 x s_2^{-1}$$

$$s_1 x = s_2 x s_2^{-1} s_1$$

$$x = (s_1^{-1} s_2) x (s_2^{-1} s_1)$$

$$x = (s_1^{-1} s_2) x (s_1^{-1} s_2)^{-1}$$

Portanto,

$$s_1^{-1} s_2 \text{ pertence ao centro de } C \implies s_1^{-1} s_2 \in K^* \implies$$

$$\frac{s_2}{s_1} = k \in K^* \implies s_2 = k \cdot s_1$$

e portanto, s_1 e s_2 diferem por um escalar diferente de zero.

Pode-se interpretar ou estudar estas aplicações ortogonais, através das representações.

Definição 2.13. Chama-se representação do grupo G todo homomorfismo P de G no grupo dos automorfismos de um espaço vetorial E , que é o espaço da representação.

Se E é um K -espaço vetorial, de dimensão finita n , diz-se que P é uma representação sobre o corpo K , de grau n .

Definição 2.14. Sejam P e P' representações de um grupo G e E e E' os espaços destas representações. Diz-se que P e P' são equivalentes se existe um isomorfismo J de E sobre E' tal que

$$P'(s) \circ J = J \circ P(s) \quad \text{para todo } s \in G$$

Definição 2.15. Sejam P e P' representações de um grupo G e E e E' os espaços destas representações. Diz-se que P e P' são contragredientes, se existe uma forma bilinear B não-degenerada sobre $E \times E'$ tal que vale

$$B(P(s)x, P'(s)x') = B(x, x')$$

quaisquer que sejam $s \in G$, $x \in E$ e $x' \in E'$, diz-se também que P e P' são contragredientes em relação à forma B .

Se $u: E \rightarrow E^*$ é um isomorfismo linear, determina-se uma forma bilinear não-degenerada $B_1: E \times E \rightarrow K$ e reciprocamente.

Seja Q_1 a forma quadrática em E t.q. $Q_1(x) = B_1(x, x)$ $x \in E$. Representa-se por C_E a álgebra de Clifford de E em relação a forma quadrática Q_1 e Γ_E o seu grupo de Clifford.

Se $s \in \Gamma_E$, seja $\chi(s)$ o automorfismo linear $x \rightarrow s x s^{-1}$ de E ; χ é a representação vetorial de Γ .

Verifica-se que a aplicação

$$s \rightarrow {}^t\chi(s^{-1})$$

é uma representação do grupo Γ , contragradiente à $\chi(s)$ em relação à forma bilinear canônica $\langle x, x' \rangle$ sobre $E \times E^*$.

De fato:

$$B(\chi(s)(x), {}^t\chi(s^{-1})(x')) = \left[{}^t\chi(s^{-1})x' \right] (\chi(s)(x)) = \quad (3)$$

$$[x' \circ \chi(s^{-1})](\chi(s)(x)) = x'(x) = \langle x, x' \rangle = B(x, x') \quad x \in E, x' \in E'$$

${}^t\chi(s^{-1})$ chama-se dual da representação $\chi(s)$ e o espaço desta representação é E^* .

A igualdade acima pode ser escrita

$$\langle \chi(s)(x), {}^t\chi(s^{-1})(x') \rangle = \langle x, x' \rangle \quad s \in \Gamma \quad (4)$$

o que mostra que a aplicação

$$F'' : M \rightarrow M \quad \text{t.q.} \quad F''(x, x') = (\chi(s)(x), {}^t\chi(s^{-1})(x'))$$

pertence ao grupo ortogonal G de Q e vale $F''(E) = E$ e $F''(E^*) = E^*$, isto é, F'' preserva os s.e. totalmente singulares maximais de M .

Vimos que E e E^* são os espaços das representações $\chi(s)$ e ${}^t\chi(s^{-1})$, e considerando-se o isomorfismo u , vale

$${}^t\chi(s^{-1}) \circ u = u \circ \chi(s) \quad \text{para todo } s \in \Gamma_E \quad (5)$$

Resulta de (3) e (5) que $\chi(s)$ e ${}^t\chi(s^{-1})$ são representações do grupo Γ_E , que são equivalentes e contragredientes entre si.

De modo geral, se P e P' são representações de um grupo G , E e E' espaços de suas representações (de dim finita) e $B: E \times E'$ uma forma bilinear não-degenerada, conclui-se que: se P' é contragradiente à P , então P' é equivalente à representação dual de P .

Resulta que todas as representações contragredientes a uma representação de grau finito são equivalentes entre si; além do mais, é claro que, se P é de grau finito, a dual da dual de P é equivalente à P .

Então, para que duas representações de grau finito de um grupo G sejam contragredientes, é necessário e suficiente que cada uma seja equivalente à dual da outra.

Observemos finalmente, que a representação $\Lambda = \chi(s) \times {}^t\chi(s^{-1})$, produto cartesiano de $\chi(s)$ e ${}^t\chi(s^{-1})$, do espaço vetorial $E \times E^*$ (que se identifica a F'') é contragradiente a ela mesma em relação a B_0 .

$$B_0((x+x', y+y')) = [x'(y) + y'(x)] \quad x, y \in E, \quad x', y' \in E^*$$

De fato:

$$B_0(\Lambda(s)(x+x'), \Lambda(s)(y+y')) =$$

$$B_0(\chi(s)(x) + {}^t\chi(s^{-1})(x'), \chi(s)(y) + {}^t\chi(s^{-1})(y')) =$$

$${}^t\chi(s^{-1})(x') [\chi(s)(y)] + {}^t\chi(s^{-1})(y') [\chi(s)(x)] =$$

$$x' \circ \chi(s^{-1}) [\chi(s)(y)] + y' \circ \chi(s^{-1}) [\chi(s)(x)] =$$

$$x'(y) + y'(x) = B_0(x+x', y+y') \quad x, y \in E \quad x', y' \in E^*$$

Teorema 2.16. "Se $\dim M = m > 0$, o grupo $\chi(\Gamma^+)$ é um subgrupo de índice 2 de G . Se K não é de característica 2, então $\chi(\Gamma^+)$ é o grupo de operações de determinante 1 em G'' .

Prova

Desde que $m > 0$, M contém um vetor não singular x ; x é um elemento ímpar de Γ , donde $\Gamma \neq \Gamma^+$.

Se m é par, então o centro de C_M é $K.1$, que está em C_+ ; segue imediatamente que $\chi(\Gamma^+)$ é então de índice 2 em G .

Se m é ímpar, então o centro de C_M contém um elemento inversível ímpar; este elemento está em Γ mas não em Γ_+ .

Então segue de [2.5] que todo elemento de Γ é o produto de um elemento do centro de C_M por um elemento de Γ^+ , donde $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma^+)$. Este grupo é o grupo de operações de determinante 1 em G .

O determinante de todo elemento de G é ± 1 , e G contém uma operação de determinante -1 , por exemplo, a aplicação $x \rightarrow -x$. Segue $\chi(\Gamma^+)$ é de índice 2 em G .

Agora, suponhamos que m é par e que a característica de K é $\neq 2$. Todo $s \in \Gamma$ é representável na forma $cx_1 \dots x_h$, $c \in K$, $x_i \in \Gamma \cap M$ ($1 \leq i \leq h$) e vê-se facilmente que $\det \chi(x_i) = -1$ ($1 \leq i \leq h$), donde

$$\det \chi(s) = (-1)^h.$$

Então, $\det \chi(s)$ é 1 ou -1 , se $s \in \Gamma^+$ ou não, o que completa a prova do teorema.

O grupo Γ^+ chama-se grupo especial de Clifford de Q ; o grupo $\chi(\Gamma^+)$ será chamado grupo especial ortogonal de Q (ou grupo de rotações).

Teorema 2.17. [8] Se m é par > 0 , o grupo Γ^+ é gerado pelos produtos de dois elementos não singulares de M .

Conclui-se que:

(A) As operações F_i de G que trocam os s.e. totalmente singulares maximais E e E^* de M são "equivalentes" à aplicação F .

$F_i \equiv F \pmod{u}$ u isomorfismo de E em E^* e se $s \in \Gamma$ t.q. $\chi(s) \equiv F_i$, então

$$\det \chi(s) = -1$$

(B) As operações F'_j de G que conservam os s.e. totalmente singulares maximais E e E^* de M são "equivalentes" à aplicação F' .

$F'_j \equiv F' \pmod{u'}$ u' isomorfismo de E em E e se $s \in \Gamma$ t.q. $\chi(s) \equiv F'_j$ então

$$\det \chi(s) = 1$$

Obtemos então uma partição do grupo G que corresponde a uma partição do grupo de Clifford Γ_M , que originam respectivamente as reflexões e rotações de M .

$$G = \{F_i \in G \text{ t.q. } F_i(E) = E^* \text{ e } F_i(E^*) = E\} \cup \{F'_j \in G \text{ t.q. } F'_j(E) = E \text{ e } F'_j(E^*) = E^*\}$$

$$\Gamma = \{s \text{ t.q. } \det \chi(s) = -1\} \cup \{s \text{ t.q. } \det \chi(s) = 1\}$$

Podemos verificar esta afirmação do seguinte modo:

Sabemos que as matrizes quadradas inversíveis sobre K (de ordem n) correspondem aos automorfismos u' de E . Se $A = M(u')$ é a matriz de u' em relação à base $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $M(u') = ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, que é a matriz contragradiente de X .

Então, a matriz de F' em relação a uma base $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de M é dada por:

$$M(F') = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\text{e } \det M(F') = \det A \cdot \det {}^t A^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Analogamente, se $B = M(u)$ é a matriz de $u: E \rightarrow E^*$, em relação às bases $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E e $(y'_j)_{1 \leq j \leq n}$ de E^* , então $M(\tilde{u}) = ({}^t B)^{-1} = {}^t B^{-1}$.

A matriz de F em relação à base $(x_1, \dots, x_n, y'_1, \dots, y'_n)$ de M é da da por:

$$M(F) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^t B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det M(F) = \pm 1$. (se n é par ou ímpar).

Vimos que para $F \in G$, existe $s \in \Gamma (\Gamma_M)$ tal que $\chi(s) \equiv F$.

Se

$$\begin{aligned} z = (x, x') \in M, \quad s z s^{-1} = F(z) &\Rightarrow s(x, x') s^{-1} = \\ &= (u(x), {}^v u(x')) \end{aligned}$$

e se $z = x$ ou $z = x'$, temos:

$$s x s^{-1} = u(x) \quad \text{e} \quad s x' s^{-1} = {}^v u(x') \quad s \in \Gamma_M$$

$u: E \rightarrow E^*$, o isomorfismo linear já definido.

Se $u(x) = \chi(s)(x)$

$$u^{-1}(x) = [\chi(s)]^{-1}(x) = \chi(s^{-1})(x)$$

e

$${}^t u^{-1} = {}^t \chi(s^{-1}) \quad s \in \Gamma_M$$

Então

$$F(x, x') = (u(x), {}^v u(x')) = (\chi(s)(x), {}^t \chi(s^{-1})(x')) \quad x \in E, \quad x' \in E^*$$

o que implica que

$$\chi(s) \equiv u : E \rightarrow E^*$$

$${}^t\chi(s^{-1}) \equiv \underset{u}{v} : E^* \rightarrow E$$

são representações do grupo Γ_M sobre o espaço vetorial M .

Analogamente, se u é um automorfismo linear de E , e $F': M \rightarrow M$ o automorfismo definido anteriormente, vale:

$$\exists s \in \Gamma_M \text{ t.q. } \chi(s) \equiv F'$$

Se

$$z = (x, x') \in M; \chi(s)(z) = F'(z) \implies s z s^{-1} = F'(z);$$

$$s(x, x') s^{-1} = (u(x), \underset{u}{v}(x'))$$

e se $z = x$ ou $z = x'$, fica:

$$s x s^{-1} = u(x) \quad \text{e} \quad s x' s^{-1} = \underset{u}{v}(x') \quad s \in \Gamma_M$$

Neste caso, $\chi(s) = u: E \rightarrow E$ e ${}^t\chi(s^{-1}) = \underset{u}{v}: E^* \rightarrow E^*$ são representações do grupo Γ_M e pode-se verificar que estas aplicações podem ser consideradas como representações do grupo Γ_E (e os espaços das representações são E e E^*).

Aplicando-se o texto de Bourbaki [4] sobre aplicações lineares de uma soma direta, temos:

Proposição 2.18. Seja $M = E \oplus E^*$ e N um K -espaço vetorial; qualquer que sejam as aplicações lineares $F_E: E \rightarrow N$ e $F_{E^*}: E^* \rightarrow N$, existe uma aplicação linear F e uma só de M em N t.q. a restrição de F à E (ou à E^*) é igual à F_E (respectivamente F_{E^*}).

Em particular, se $F: M \rightarrow M$ é dada por $F(x, x') = (u(x), \underset{u}{v}(x'))$, te

mos:

$$F(z) = F(h_E(z) + h_{E^*}(z)) \quad z \in M$$

$$= F(h_E(z)) + F(h_{E^*}(z)) =$$

$$= F_E(h_E(z)) + F_{E^*}(h_{E^*}(z))$$

$$= F_E(x) + F_{E^*}(x') = u(x) + v(x')$$

onde $F_E = u: E \rightarrow E^*$ e $F_{E^*} = v: E^* \rightarrow E$ e $h_E(z)$ (respectivamente $h_{E^*}(z)$) representa a componente de z em E (em E^*).

Analogamente, vale para $F'_E = u: E \rightarrow E$ e $F'_{E^*} = v: E^* \rightarrow E^*$.

O valor de F para todo z de M é determinado pelo conhecimento das restrições de F a E (e a E^*).

Reciprocamente, conhecendo-se as aplicações lineares $F_E = u: E \rightarrow M$ e $F_{E^*} = v: E^* \rightarrow M$, determina-se uma única aplicação $F: M \rightarrow M$.

Por outro lado, se considerarmos as aplicações lineares

$$u_1 : E \rightarrow E \oplus E^*$$

$$u_2 : E^* \rightarrow E \oplus E^*$$

e se $z \in E \oplus E^*$, representa-se $k_1(z)$ a componente de z em E e $k_2(z)$ a componente de z em E^* .

Dada $F: M \rightarrow E \oplus E^*$, $F = u_1 + u_2$, vale:

$$u_1 = k_1 \circ u_1 + k_2 \circ u_1 \quad \text{e} \quad u_2 = k_1 \circ u_2 + k_2 \circ u_2$$

e então:

$$F(z) = k_1 \circ u_1(z) + k_2 \circ u_1(z) + k_1 \circ u_2(z) + k_2 \circ u_2(z)$$

onde as aplicações lineares são definidas

$$k_1 \circ u_1 : E \rightarrow E$$

$$k_2 \circ u_1 : E \rightarrow E^*$$

$$k_1 \circ u_2 : E^* \rightarrow E$$

$$k_2 \circ u_2 : E^* \rightarrow E^*$$

Verifica-se que as aplicações lineares definidas acima (t.q.

$u_1 = u$ e $u_2 = v$) geram todas as operações do grupo G .

E e E^* não são os únicos subespaços totalmente singulares maximais de M . De fato:

Seja S_1 um subespaço regular de E e seja $S_1^\perp$ o subespaço de E^* ortogonal a S_1 em relação à forma bilinear canônica, isto é,

$$S_1^\perp = \{y' \in E^* / \langle x, y' \rangle = 0 \quad \forall x \in S_1\}$$

Deduz-se que: todo subespaço S_1 regular de E é um fator direto e $E = S_1 \oplus S_1^\perp$, e que $\dim (S_1 \oplus S_1^\perp) = \dim E = n$.

Conclui-se então que o subespaço $S_1 \oplus S_1^\perp$ de M é totalmente singular maximal, em relação à forma quadrática canônica.

Proposição 1: Seja $E = S_1 \oplus S_2$, uma decomposição de E como soma direta de subespaços. Então

$$E^* = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$$

e os pares $S_1^\perp, S_2$ e $S_2^\perp, S_1$ são duais em relação à forma bilinear canônica. Além disso, as aplicações injetoras induzidas

$$S_1^\perp \rightarrow S_2^*, \quad S_2^\perp \rightarrow S_1^*$$

são sobrejetoras e portanto,

$$E^* = S_1^* \oplus S_2^*$$

Prova: Sejam $\pi_1: E \rightarrow E_1$ e $\pi_2: E \rightarrow E_2$ as projeções canônicas associadas com a soma direta.

Seja $x' \in E^*$, e define-se x'_1, x'_2 por

$$x'_1(x) = x'(\pi_2 x) \quad \text{e} \quad x'_2(x) = x'(\pi_1 x)$$

Segue que $x'_i \in S_i^\perp (i = 1, 2)$ e $x' = x'_1 + x'_2$. Portanto,

$$E^* = S_1^\perp + S_2^\perp$$

Para mostrar que a decomposição é direta, suponhamos que

$$x' \in S_1^\perp \cap S_2^\perp. \quad \text{Então}$$

$$x'(x) = 0 \quad x \in S_1, x \in S_2$$

e portanto $x'(x) = 0$ para todo $x \in E$. Então $x' = 0$ e assim a decomposição é direta.

Proposição 2 - Seja $S_1 \subset E$ um subespaço e seja $S_1^* \subset E^*$ o subespaço dual de E_1 tal que

$$(S_1^*)^{\perp\perp} = S_1^*$$

Então

$$E = S_1 \oplus (S_1^*)^\perp \quad (1)$$

e

$$E^* = S_1^* \oplus S_1^\perp \quad (2)$$

Prova: Temos

$$(S_1 + S_1^{\perp\perp})^\perp = S_1^\perp \cap (S_1^{\perp\perp})^\perp = S_1^\perp \cap S_1^* = 0$$

donde

$$E = 0^\perp = [S_1 + (S_1^{\perp\perp})]^\perp = S_1 + S_1^{\perp\perp} \quad (3)$$

Por outro lado, desde que S_1 e S_1^* são duais, segue que

$$S_1 \cap S_1^{*\perp} = 0$$

o que junto com (3) prova que a soma é direta.

(2) segue da Proposição anterior.

Dado o isomorfismo linear $u: E \rightarrow E^*$ e $\check{u}: E^* \rightarrow E$, podemos escrever:

$$u|_{S_1} = u_1 \quad \text{e} \quad u|_{S_2} = u_2$$

$$\check{u}|_{S_2^\perp} = \check{u}_1 \quad \text{e} \quad \check{u}|_{S_1^\perp} = \check{u}_2$$

Então temos:

$$E = S_1 \oplus S_2 \xrightarrow{(I, u_2)} S_1 \oplus S_1^\perp \xrightarrow{(u_1, I)} S_2^\perp \oplus S_1^\perp \cong S_1^* \oplus S_2^* = E^*$$

Reciprocamente, dadas as aplicações:

$$u_1: S_1 \longrightarrow S_2^\perp$$

$$u_2: S_2 \longrightarrow S_1^\perp$$

que caracterizam a dualidade, obtêm-se uma aplicação linear

$$u: E \rightarrow E^*.$$

Analogamente, temos:

$$E^* = S_1^* \oplus S_2^* \cong S_2^\perp \oplus S_1^\perp \xrightarrow{(\check{u}_1, I)} S_1 \oplus S_1^\perp \xrightarrow{(I, \check{u}_2)} S_1 \oplus S_2 = E$$

e obtêm-se os isomorfismos que permutam entre si os subespaços totalmente singulares maximais de M.

Além disso, observemos que:

$$E \xrightarrow{u} E^* \xrightarrow{\vee u} E \quad \vee u \circ u: E \rightarrow E$$

(= I_E se u é simétrica)

$$E^* \xrightarrow{\vee u} E \xrightarrow{u} E^* \quad u \circ \vee u: E^* \rightarrow E^*$$

(= I_{E^*} se u é simétrica)

Sabemos que $S_1^\perp$ e S_2 ; $S_2^\perp$ e S_1 são duais em relação à forma bilinear canônica e o subespaço $S_1 \oplus S_1^\perp$ de M é totalmente singular maximal em relação à forma quadrática Q ($Q(x, y') = \langle x, y' \rangle$), considerando $\dim(S_1 \oplus S_1^\perp) = n$.

Portanto, dado qualquer subespaço S_i regular de M, obtêm-se as decomposições acima descritas e as aplicações lineares que permutam entre si os subespaços totalmente singulares maximais de M.

Em particular, temos o caso em que

$$S_1 = E \quad \text{e} \quad S_1^\perp = \{0\},$$

As operações do grupo G, isto é, os automorfismos de M que conservam a forma quadrática, são formados por pares de aplicações que permutam entre si os subespaços totalmente singulares maximais de M, por exemplo:

$$F_1 = (u, \vee u) \quad u: E \rightarrow E^* \text{ isomorfismo linear}$$

$$F_2 = (\vee u \circ u, u \circ \vee u) \text{ ou } F_2 = (u, \vee u) \quad u: E \rightarrow E$$

e analogamente, determinam-se todos os automorfismos $F_i \in G$.

Conclui-se que os isomorfismos lineares acima geram o grupo G.

CAPÍTULO III

RELAÇÕES ENTRE AS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E ÁLGEBRA EXTERIOR

Vimos a definição e construção da álgebra de Clifford que: dado $z \in M$, a aplicação $\phi: z \rightarrow L'_z$ de M em $\text{End } (\Lambda M) = \mathbb{C}$ (endomorfismos de espaços vetorial ΛM), satisfaz a relação

$$L'^2_z = Q(z) \cdot I \quad z \in M \quad (1)$$

Isto implica que existe um homomorfismo $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que estende e $z \rightarrow L'_z$ é um isomorfismo de $M \rightarrow \text{End } (\Lambda M)$.

Dada uma forma bilinear $B_0: M \times M \rightarrow K$ tal que $Q(z) = B_0(z, z)$ para $z \in M$, podemos identificar o espaço vetorial subjacente da álgebra de Clifford C_M com o espaço vetorial básico da álgebra exterior ΛM de M , tal que

$$z \cdot w = (L'_z + \delta_z)(w) = z \wedge w + \delta_z \cdot w \quad z, w \in M \quad (2)$$

onde $\delta_z: \Lambda M \rightarrow \Lambda M$ é a anti-derivação tal que $\delta_z w = B_0(z, w) \cdot 1$.

[Observemos que se $z, w \in M$, $z \cdot w$ representa seu produto em C_M , enquanto $z \wedge w$ representa seu produto em ΛM].

Pode-se escrever então

$$z \cdot w = z \wedge w + B_0(z, w) \quad z, w \in M \quad (3)$$

onde B_0 é a forma bilinear associada a Q .

No caso em questão, no qual $M = E \oplus E^*$ e $Q(z) = \langle x, x' \rangle$ é a forma quadrática canônica, a relação (3) se escreve:

$$\text{Se} \quad z = x + x', \quad w = y + y' \quad \in M$$

$$(x+x')(y+y') = (x+x') \wedge (y+y') + \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)] \cdot 1$$

$$\begin{aligned} x \cdot y + xy' + x'y + x' \cdot y' &= x \wedge y + x \wedge y' + x' \wedge y + x' \wedge y' + \\ &+ \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)] \cdot 1 \end{aligned} \quad (4)$$

mas:

$$x \cdot y = x \wedge y \quad \text{e} \quad x' \cdot y' = x' \wedge y' \quad \text{pois: } C_{(E)} = \Lambda E \quad \text{e} \quad C_{(E^*)} = \Lambda E^*$$

Então (4) fica:

$$xy' + x'y = x \wedge y' + x' \wedge y + \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)] \cdot 1 \quad (5)$$

se $x, y \in E$, $x', y' \in E^*$

Se fizermos em (5), respectivamente $z = x + 0'$ e $z = 0 + x'$ temos as igualdades;

$$\begin{aligned} xy' &= x \wedge y' + B((x, y + y')) \\ &= x \wedge y' + \langle x, y' \rangle \end{aligned} \quad (6.a)$$

$$\begin{aligned} x'y &= x' \wedge y + B((x', y + y')) \\ &= x' \wedge y + \langle y, x' \rangle \end{aligned} \quad (6.b)$$

o que pode ser obtido, tomando-se a forma $B = 2B_0$.

Se tomarmos a base $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E e a base dual $(y_j')_{1 \leq j \leq n}$ de E^* , temos

$$x_i \cdot y_j' = x_i \wedge y_j' + \delta_{ij} \cdot 1 \quad (7.a)$$

$$y_j' \cdot x_i = y_j' \wedge x_i + \delta_{ji} \cdot 1 \quad (7.b)$$

Além disso, é importante observar que (6.a) e (6.b) implicam

Se

$$z_1 = x_1 + y_1', \quad z_2 = x_2 + y_2' \quad \in M,$$

então

$$x_1 y'_2 = x_1 \wedge y'_2 + B_1(x_1, y_2) \quad (8.a)$$

$$y'_1 x_2 = y'_1 \wedge x_2 + B_1(x_2, y_1) \quad (8.b)$$

onde $B_1: E \times E \rightarrow K$ é a forma bilinear simétrica t.q. $\sigma(y)(x) = B_1(x, y)$ e $\sigma = u: E \rightarrow E^*$ é o isomorfismo linear do capítulo anterior ou $B_1(x, y) = \frac{1}{2} [\sigma(y)(x) + \sigma(x)(y)]$.

Retomamos a construção de uma álgebra de Clifford, como feita por Chevalley [8].

Queremos definir uma álgebra de Clifford do K-espaço vetorial E , em relação à uma forma quadrática Q , (associada à forma bilinear B_1) e estabelecer relações entre esta álgebra e a álgebra C , do K-espaço vetorial M em relação a forma quadrática canônica Q , definida anteriormente. Representaremos esta álgebra por C_M , e fazemos aqui a restrição que a característica do corpo K deve ser diferente de 2.

Seja x' uma forma linear sobre E . Então existe uma anti-derivada $\delta_{x'}$ de ΛE tal que $\delta_{x'}(x) = x'(x) \cdot 1$ para todo $x \in E$.

A operação $\delta_{x'}$ é homogênea de grau -1 ; isto é, leva $\Lambda^h E$, em $\Lambda^{h-1} E$ e 1 sobre $\{0\}$. Temos $\delta_{x'}^2 = 0$; se x'_1, x'_2 são formas lineares e a_1, a_2 escalares, então temos

$$\delta_{ax'} = a \cdot \delta_{x'}, \quad \delta_{x'_1 + x'_2} = \delta_{x'_1} + \delta_{x'_2}$$

$$\delta_{x'_1} \delta_{x'_2} + \delta_{x'_2} \delta_{x'_1} = 0$$

Se $z = x + \sigma(x)$ é um elemento de $M_1 \subset M$ definimos a aplicação linear $\phi_1: M_1 \rightarrow \text{End}(\Lambda E)$ da seguinte maneira:

$$L'_{1z}(y) = L_x \cdot y + \delta_{x'}(y) = x \wedge y + x'(y) \cdot 1 \quad (9)$$

$$= x \wedge y + B_1(x, y) \cdot 1$$

onde $B_1(x, y) = \sigma(x)(y) = x'(y)$ é uma forma bilinear simétrica e $\sigma: E \rightarrow E^*$ é a aplicação linear definida anteriormente. Então temos:

$$\begin{aligned} \delta_x' L_x \cdot y &= \delta_x'(x \wedge y) = (\delta_x'(x)) \wedge y - x \wedge (\delta_x'(y)) = \\ &= Q(z) \cdot y - L_x \delta_x'(y) \end{aligned}$$

Portanto:

$$L_x \delta_x' + \delta_x' L_x = Q(z) \cdot I_E \quad z \in M_1 \quad (10)$$

Desde que $L_x^2 = 0$, (10) implica que

$$L_{1z}^2 = Q(z) \cdot I_E \quad z \in M_1 \quad (11)$$

Aplicando-se o Teorema 1.16, a igualdade (11) implica que existe um homomorfismo ψ_1 de C_{M_1} em $\text{End}(\Lambda E)$ que estende ϕ_1 .

Os resultados acima são reunidos no

Teorema 3.1. "Seja ϕ_1 a aplicação linear de M_1 na álgebra dos endomorfismos de ΛE definida por (9). Então $L_{1z}^2 = Q(z) \cdot I_E$ para $z \in M_1$ e ϕ_1 pode ser estendido a um homomorfismo ψ_1 de C_{M_1} em $\text{End}(\Lambda E)$ ".

Usando a forma bilinear $B_1: E \times E \rightarrow K$, define-se uma forma quadrática Q_1 tal que $Q_1(x) = B_1(x, x)$ para todo $x \in E$ e a álgebra de Clifford de E em relação à forma quadrática Q_1 , que será representada por C_E .

Analogamente, podemos definir o endomorfismo de ΛE^* :

$$L_{2z}'(y') = L_{x,y'} + \delta_x(y') = x' \wedge y' + y'(x) \cdot 1 \quad (12)$$

se $z \in M_2$, $y' \in E^*$, onde L_x é o operador $y' \rightarrow x' \wedge y'$ da multiplicação por x' em ΛE^* e δ_x a anti-derivada de ΛE^* tal que

$$\delta_x \cdot y' = y'(x) \quad y' \in E^*$$

$$e \quad M_2 = \{z \in M \text{ t.q. } z = (\sigma^{-1}(y'), y'), \quad y' \in E^*\}$$

$L_{2z}^1(y') = x' \wedge y' + B_2(x', y') \cdot 1$ para $x', y' \in E^*$ onde $B_2: E^* \times E^* \rightarrow K$ é uma forma bilinear simétrica tal que $B_2(x', y') = y'(x)$ e $x = \sigma^{-1}(x')$ e $\sigma^{-1}: E^* \rightarrow E$ é a inversa da aplicação linear definida anteriormente.

Então temos:

$$\begin{aligned} \delta_x \cdot L_{x'} \cdot y' &= \delta_x(x' \wedge y') = \\ &= (\delta_x x') \wedge y' - x' \wedge \delta_x(y') = \\ &= x'(x) \wedge y' - L_{x'} \delta_x(y') = \\ &= Q(z) \cdot y' - L_{x'} \delta_x(y') \end{aligned}$$

Portanto:

$$L_{x'} \delta_x + \delta_x L_{x'} = Q(z) \cdot I_E^* \quad (13)$$

Desde que $L_{x'}^2 = 0$, (13) implica que

$$L_{2z}^2 = Q(z) \cdot I_E^* \quad z \in M_2 \quad (14)$$

Temos então uma aplicação linear $\phi_2: E^* \rightarrow \text{End}(\Lambda E^*)$, aplicando-se o Teorema [1.16], a igualdade (14) implica na existência de um homomorfismo ψ_2 de C_E^* em $\text{End}(\Lambda E^*)$ que estende ϕ_2 .

Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.

"Seja ϕ_2 a aplicação linear de M_2 na álgebra dos endomorfismos de ΛE^* definida por (12). Então $L_{2z}^2 = Q(z) \cdot I_E^*$ para $z \in M_2$ e ϕ_2 pode ser estendida a um homomorfismo ψ_2 de C_{M_2} em $\text{End}(\Lambda E^*)$."

Usando a forma bilinear $B_2: E^* \times E^* \rightarrow K$ define-se uma forma quadrática Q_2 tal que $Q_2(x') = B_2(x', x')$ para todo $x' \in E^*$ e temos a álgebra de Clifford de E^* em relação à forma quadrática Q_2 , que será representada por C_E^* .

Definição 3.3. Se E_1, E_2 são espaços vetoriais munidos, respectivamente, de formas quadráticas Q_1 e Q_2 associadas às formas bilineares B_1 e B_2 , dizemos que eles são isométricos se existe um isomorfismo linear $\tau: E_1 \rightarrow E_2$ tal que

$$B_2(\tau(x), \tau(y)) = B_1(x, y) \text{ para todo } x, y \in E_1$$

$$\text{Notação: } (E_1, Q_1) \approx (E_2, Q_2)$$

Seja $M = E \oplus E^*$, o K -espaço vetorial, objeto deste estudo, munido da forma quadrática canônica Q e a forma bilinear associada B_0 .

Vimos que existe um isomorfismo linear $\sigma: E \rightarrow E^*$ tal que $\sigma(x)(y) = B_1(x, y)$; para $x, y \in E$.

Definimos a aplicação

$$\bar{\sigma}: E \rightarrow E \oplus E^* \quad \text{tal que}$$

$$\bar{\sigma}(x) = (x, \sigma(x)) \quad x \in E$$

e representamos $M_1 = \bar{\sigma}(E)$, a imagem de E pela aplicação $\bar{\sigma}$.

$$M_1 = \{(x, \sigma(x)) \in M \quad \text{t.q.} \quad x \in E\}$$

M_1 é um subespaço de M de dimensão n , que é isomorfo à E , através da aplicação $\bar{\sigma}$.

Além disso, vale:

$$\begin{aligned}
 B_0(\bar{\sigma}(x), \bar{\sigma}(y)) &= B_0((x, x'), (y, y')) = \\
 &= \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)] = \\
 &= \frac{1}{2} [\sigma(x)(y) + \sigma(y)(x)] = \\
 &= \frac{1}{2} [B_1(x, y) + B_1(y, x)] = B'(x, y) \quad x, y \in E
 \end{aligned}$$

Portanto, os espaços (E, Q_1) e (M_1, Q) são isométricos onde Q_1 é a forma quadrática associada a B_1 .

Analogamente, define-se um isomorfismo linear:

$$\bar{\sigma}' : E^* \rightarrow E \oplus E^* \quad \text{tal que}$$

$$\bar{\sigma}'(x') = (\sigma^{-1}(x'), x') \quad x' \in E^*$$

e representa-se $M_2 = \bar{\sigma}'(E^*)$.

$$M_2 = \{(\sigma^{-1}(y'), y') \in M \quad \text{t.q.} \quad y' \in E^*\}$$

M_2 é um subespaço de M de dimensão n , que é isomorfo a E^* , através da aplicação $\bar{\sigma}'$.

Então vale:

$$\begin{aligned}
 B_0(\bar{\sigma}'(x'), \bar{\sigma}'(y')) &= B_0((x, x'), (y, y')) = \\
 &= \frac{1}{2} [x'(y) + y'(x)] = \\
 &= \frac{1}{2} [B_2(x', y') + B_2(y', x')] = B''(x', y') \\
 &\quad x', y' \in E^*
 \end{aligned}$$

Portanto, os espaços (E^*, Q_2) e (M_2, Q) são isométricos, onde Q_2 é a forma quadrática associada a B_2 .

Além disso, conclui-se que os espaços quadráticos (E, Q_1) e (E^*, Q_2) são isométricos, através do isomorfismo linear $\sigma: E \rightarrow E^*$.

De fato:

$$\begin{aligned} B_2(\sigma(x), \sigma(y)) &= B_2(x', y') = \\ &= y'(x) = \sigma(y)(x) = B_1(x, y) \end{aligned}$$

para $x, y \in E$, $\sigma(y) = y'$ e $x = \sigma^{-1}(x')$.

Portanto, decompomos o espaço M , munido da forma quadrática canônica Q em dois espaços quadráticos, (E, Q_1) e (E^*, Q_2) , que são isométricos entre si.

Já definimos a álgebra de Clifford do espaço M , em relação à forma quadrática, que representamos por C_M . Podemos também definir a álgebra de Clifford do espaço E em relação à forma quadrática Q_1 , representada por C_E e a álgebra de Clifford do espaço vetorial E^* em relação à forma quadrática Q_2 , que será representada C_E^* .

Consideremos agora a álgebra C_E , álgebra de Clifford do espaço E em relação à forma quadrática Q_1 ; vale

$$x^2 = Q_1(x) \cdot 1$$

$$xy + yx = B_1(x, y) \cdot 1 \quad x, y \in E \quad (23)$$

onde $B_1: E \times E \rightarrow K$ é a forma bilinear associada a Q_1 , t.q.

$$B_1(x, y) = x'(y) = \sigma(x)(y) = \langle y, x' \rangle \quad x' \in E^*$$

ou

$$B(x, y) = \frac{1}{2} [\langle y, x' \rangle + \langle x, y' \rangle]$$

Sejam $x, y \in E$ e $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E ,

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad y = \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

e a igualdade (23) se escreve

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j (x_i x_j + x_j x_i) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j B_1(x_i, x_j) \cdot 1 \quad a_i, b_j \in K \quad (24)$$

(suponhamos que $y = \sum_{j=1}^n c_j y_j$, onde $y_j = \sigma^{-1}(y_j')$ e $(y_j')_{1 \leq j \leq n}$ é a base dual de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$)

e então (24) se escreve

$$\sum_{i,j=1}^n a_i c_j (x_i y_j + y_j x_i) = \sum_{i,j=1}^n a_i c_j B_1(x_i, y_j) \cdot 1 \quad a_i, c_j \in K \quad (25)$$

e

$$B_1(x_i, y_j) = x_i'(y_j) = y_j'(x_i) = \delta_{ij} \quad (\text{se } \sigma = \sigma^t)$$

Portanto,

$$x_i y_j + y_j x_i = \delta_{ij} \cdot 1$$

Definição 3.4. Chama-se produto interior (à direita) de um elemento $x \in \Lambda E$ e um elemento $x' \in \Lambda E^*$, e representa-se $x \perp x'$, o valor para x do transposto do endomorfismo $z' \rightarrow x' \wedge z'$ de ΛE^* .

Vale:

$$\langle x \perp x', z' \rangle = \langle x, x' \wedge z' \rangle$$

Define-se o endomorfismo linear

$$\tau(u') : \Lambda E \rightarrow \Lambda E \quad u' \in \Lambda E^*$$

$$\tau(u')(x) = x \wedge u'$$

Prova-se como na página 65 que $\tau(y')$ é uma anti-derivação da álgebra graduada ΛE se

$$y' \in E^* \quad x_1, \dots, x_p \in E$$

Se

$$v' \in \wedge^{p-1} E^* \quad \text{e} \quad y' = x'_1; \quad v' = x'_2 \wedge \dots \wedge x'_1 \wedge \dots \wedge x'_p$$

$$\langle \tau(y')(x_1 \wedge \dots \wedge x_p), v' \rangle = \det | \langle x_i, x'_j \rangle |$$

Desenvolvendo este determinante em relação aos elementos da linha $i=1$, obtém-se

$$\langle \tau(y')(x_1 \wedge \dots \wedge x_p), v' \rangle = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \langle x_j, x'_1 \rangle \langle x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_p, v' \rangle$$

$$(\text{se } x'_1 = y')$$

Resulta que

$$\tau(y')(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_j (-1)^{j+1} \langle x_j, y' \rangle x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_p \quad (1)$$

Como $\tau(y')$ abaixa o grau de uma unidade, temos

$$\tau(y') \cdot w + w \cdot \tau(y') = 0$$

(w é um automorfismo involutivo de ΛE); com a relação (1), isto prova que $\tau(y')$ é uma anti-derivação da álgebra graduada ΛE , (o sinal $\wedge$ acima de x_i significa que o elemento x_i é subtraído do produto).

Se

$$y' \in E^*, [\tau(y')]^2 = 0$$

Generalizamos os Teoremas 3.1 e 3.2 do seguinte modo:

(Teorema 3.5): "A álgebra C_M é isomorfa à álgebra $\text{End}(\Lambda E)$ dos endomorfismos do espaço vetorial ΛE .

Prova: A álgebra exterior ΛE , que é a álgebra de Clifford de E (relativa a $Q|_E$), é considerada como sub-álgebra de C_M , e vale:

$$x \cdot y = x \wedge y \quad \forall x, y \in \Lambda E$$

Seja

$$x \in E \quad \text{e} \quad y' \in E^*. \quad \text{Temos:}$$

$$\begin{aligned} Q(x+y') &= (x+y')^2 = x^2 + y'^2 + xy' + y'x = xy' + y'x = \\ &= B(x, y') \cdot 1 = \langle x, y' \rangle \cdot 1 = B_1(x, y) \end{aligned}$$

Definimos as aplicações:

$$\rho_1: E \rightarrow \text{End}(\Lambda E) \quad \rho_2: E^* \rightarrow \text{End}(\Lambda E)$$

1) Se $x \in E$, $\rho_1(x)$ é endomorfismo de ΛE tal que

$$\rho_1(x) u = x \wedge u \quad u \in \Lambda E$$

2) Se $y' \in E^*$, $\rho_2(y')$ é a anti-derivada de ΛE tal que

$$\rho_2(y')(x) = \langle x, y' \rangle = B_1(x, y) \quad x, y \in E, \quad y' \in E^*$$

Observemos que a anti-derivada $\rho_2(y') = \tau(y')$ de E é definida pelo produto interior (à direita) (ver Capítulo IV).

Usando a definição do produto interior (à direita), vemos que, se $u \in \Lambda^p E$, $u = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$, então $\rho_2(y') : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$ é um endomorfismo linear tal que

$$\rho_2(y')(u) = \tau(y')(u) = \sum_j (-1)^{j+1} \langle x_j, y' \rangle x_1 \wedge \dots \wedge x_{j-1} \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_p$$

Se $u \in \Lambda^p E$, $v \in \Lambda^q E$,

$$\rho_2(y')(uv) = [\rho_2(y')u]v + (-1)^p \cdot u [\rho_2(y')v]$$

Resulta, por recorrência, que, se u é homogêneo de grau p , $\rho_2(y')u$ é homogêneo de grau $(p-1)$, o que implica $\rho_2(y')^2 = 0$.

A aplicação linear $\rho : E \oplus E^* = M \rightarrow \text{End}(\Lambda E)$ é definida por:

$$\rho(x+y') = \rho_1(x) + \rho_2(y')$$

e

$$\begin{aligned} [\rho(x+y')]^2 &= \rho_1^2(x) + \rho_2^2(y') + \rho_1(x) \rho_2(y') + \rho_2(y') \cdot \rho_1(x) = \\ &= \rho_1(x) \cdot \rho_2(y') + \rho_2(y') \cdot \rho_1(x) \end{aligned}$$

Calculemos o valor deste endomorfismo de ΛE :

$$\rho_2(y') [\rho_1(x) \cdot u] = \rho_2(y') [x \wedge u] = \rho_2(y') x \wedge u - x \wedge \rho_2(y') u =$$

$$\langle x, y' \rangle \cdot u - x \wedge \rho_2(y') u = Q(x+y') \cdot u - \rho_1(x) \cdot \rho_2(y') \cdot u \quad u \in E$$

Portanto:

$$[\rho_1(x) \cdot \rho_2(y') + \rho_2(y') \rho_1(x)](u) = Q(x+y') \cdot u \quad u \in E$$

e

$$\rho(x+y')^2 = Q(x+y') \cdot I = Q(z) \cdot I \quad \text{se } z = x+y' \in M$$

Resulta, da propriedade universal das álgebras de Clifford, que a aplicação ρ se estende em um homomorfismo de álgebras unitárias

$$\phi : C_M \rightarrow \text{End}(\Lambda E)$$

Como $\dim C_M = 2^{2n} = \dim \text{End}(\Lambda E)$, para mostrar que ϕ é um isomorfismo, falta provar que ϕ é sobrejetora.

Seja $e = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ a base de E^* dual de e

$$[\langle x_i, x'_j \rangle = \delta_{ij}]$$

Sabemos que E admite uma base formada de 2^n elementos e_H , onde H percorre o conjunto de todas as partes do intervalo $[1, n]$ de $\mathbb{N}$.

A multiplicação é dada por

$$e_H \wedge e_K = 0 \quad \text{se } H \cap K \neq \emptyset$$

$$e_H \wedge e_K = \rho_{H,K} e_{H \cup K} \quad \text{se } H \cap K = \emptyset$$

com $\rho_{H,K} = (-1)^v$, v sendo o número de pares (i, j) tal que $i \in H$, $j \in K$ e $j < i$.

Seja J uma seqüência estritamente crescente de índices entre 1 e n : $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$, R a seqüência $(1, 2, \dots, n)$, $J' = R - J$, representa-se

$$e_J = e_{j_1} \dots e_{j_p} \quad ; \quad e'_J = e'_{j_1} \dots e'_{j_p}$$

Temos:

$$(2) \quad \begin{cases} \phi(e'_J) \cdot e_L = e_L \tau e'_J = 0 & \text{se } J \not\subset L \\ \phi(e'_J) \cdot e_L = e_L \tau e'_J = \pm e_{L-J} & \text{se } J \subset L \end{cases}$$

(2) resulta do cálculo do produto interior à direita nos elementos da base de ΛE [5].

$$(3) \quad \begin{cases} \phi(e_J) \cdot e_L = e_J \wedge e_L = \pm e_{J \cup L} & \text{se } J \cap L = \emptyset \\ \phi(e_J) \cdot e_L = 0 & \text{se } J \cap L \neq \emptyset \end{cases}$$

(3) resulta da multiplicação em ΛE de elementos da base [5].

Representa-se

$$a_{IJ} = \phi(e_I) \phi(e'_R) \phi(e_{J'}) = \phi(e_I e'_R e_{J'})$$

e obtêm-se:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{IJ}(e_J) = \pm e_I \\ a_{IJ}(e_L) = 0 & \text{se } L \neq J \quad (e_L \in \text{base de } \Lambda E) \end{cases}$$

Conclui-se que ϕ é um isomorfismo, pois os endomorfismos definidos acima (4) constituem uma base de $\text{End}(\Lambda E)$.

OBS: A prova deste teorema implica também na afirmação feita anteriormente, que a álgebra de Clifford C_M é isomorfa à álgebra de matrizes $K(2^n)$.

CAPÍTULO IV

AS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD COMO DEFORMAÇÕES DAS ÁLGEBRAS EXTERIORES

O objetivo deste capítulo é mostrar as relações entre a álgebra de Clifford $C(E, Q)$ do espaço quadrático Q e a álgebra, ΛE , álgebra exterior de E , utilizando-se de resultados anteriores obtidos através do estudo da álgebra C_M .

Um resultado já estabelecido é que os espaços vetoriais $C(E, Q)$ e ΛE são isomorfos [8]; Chevalley mostra também que a multiplicação em $C(E, Q)$ pode ser obtida da multiplicação em ΛE e da forma B_Q , como já foi explicitado.

O autor J. Helmstetter [17], se propõe a obter as álgebras de Clifford como deformações das álgebras exteriores. Para isso, utiliza sistematicamente as técnicas de produtos interiores e abandona as técnicas clássicas das álgebras de Clifford; esse procedimento é mais adequado aos resultados que se pretende obter e pode ser utilizado com poucas mudanças na álgebra de Weyl.

Obtém-se sobre o espaço vetorial ΛE um produto (que depende da forma bilinear B), que a transforma numa álgebra $\Lambda(E, B)$ isomorfa à álgebra $C(E, Q)$.

Reciprocamente, conhecendo-se a álgebra $\Lambda(E, B)$, é possível, graças à propriedade universal da álgebra de Clifford, reencontrar o isomorfismo θ_B (isomorfismo entre os espaços vetoriais $C(E, Q)$ e ΛE e temos $\theta_B(a) = a$ para todo $a \in E$).

Este raciocínio permite utilizar e estudar estes isomorfismos θ_B , relacionados às formas bilineares $B: E \times E \rightarrow K$, (t.q. $B(a, a) = Q(a) \forall a \in E$) o que é uma generalização em relação ao estudo de Chevalley, que só usa a forma bilinear canonicamente associada a Q .

Fundamentando-se no raciocínio de Chevalley e utilizando os produtos interiores e os resultados de J.H., mostra-se que uma álgebra de Clifford pode ser obtida como uma "deformação" da álgebra exterior ΛE ; e finalmente, como isto pode ser relacionado com os resultados que obtivemos.

Seja E um K -espaço vetorial de dimensão n .

Definição 4.1. Seja $(x_1, \dots, x_n)$ base de E . Se

$$u = \sum_{i < j} a_{ij} x_i \wedge x_j$$

é um elemento de $\Lambda^2 E$, define-se

$$\exp u = \prod_{i < j} (1 + a_{ij} x_i \wedge x_j).$$

Verifica-se que:

$$\exp(u + u') = (\exp u) \wedge (\exp u') \quad u, u' \in \Lambda^2 E$$

Se

$$u = a x_k, \quad x = \sum_{i=1}^r a_i x_i, \quad \text{ou se}$$

u é um elemento decomponível, temos

$$\exp u = 1 + u$$

Isto mostra que a definição de $\exp u$ não depende da base especial escolhida em E .

Vale

$$\exp 0 = 1$$

o que implica que $\exp u$ é sempre inversível e que

$$(\exp u)^{-1} = \exp(-u)$$

Para todo $u \in \Lambda^2 E$, $\exp u$ está em $\Lambda_+^2 E$ e difere de $1 + u$ por um elemento de

$$\sum_{k>1} \Lambda^{2k} E.$$

Introduz-se as notações, relativas as álgebras graduadas sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

A aplicação $x \rightarrow \tilde{x}$ é o automorfismo $\Lambda E \rightarrow \Lambda E$ t.q. $\tilde{x} = x$ se, x é par e $\tilde{x} = -x$ se x é ímpar.

Se x e $y \in \Lambda E$, coloca-se:

$$\sigma(x,y) = 1 \text{ se } x \text{ ou } y \text{ é par}$$

$$\sigma(x,y) = -1 \text{ se } x \text{ e } y \text{ são ímpares}$$

Definição 4.2. Chama-se produto interior ($\tilde{a}$) direita de um elemento $x \in \Lambda E$ e de um elemento $x' \in \Lambda E^*$, e representa-se $x \tilde{L} x'$ (ou $x \tau x'$), o valor para x do transposto do endomorfismo

$$z' \rightarrow x' \wedge z' \quad \text{de } \Lambda E^*$$

Vale identicamente:

$$\langle x \tilde{L} x', z' \rangle = \langle x, x' \wedge z' \rangle$$

Verifica-se que a adição e a lei de composição externa $(x', x) \rightarrow x \tilde{L} x'$ sobre ΛE definem sobre este conjunto uma estrutura de módulo $\tilde{a}$ direita, em relação ao anel ΛE^* . Temos a identidade

$$x \tilde{L} (x' \wedge y') = (x \tilde{L} x') \tilde{L} y'$$

Deduz-se, em particular que, para um p -vetor x e uma q -forma x' , temos

$$x \tilde{L} x' = 0 \quad p < q$$

$$x \tilde{L} x' = (p-q)\text{-vetor} \quad \text{se } p \geq q$$

$$x \tilde{L} x' = \langle x, x' \rangle \quad \text{se } p = q$$

Identifica-se o dual de $\overset{P}{\Lambda E}$ a $\overset{P}{\Lambda E^*}$ e a forma bilinear canônica sobre $(\overset{P}{\Lambda E}) \times (\overset{P}{\Lambda E^*})$ é definida pela fórmula fundamental

$$\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_p, x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_p \rangle = \det (\langle x_i, x'_j \rangle)$$

Definição 4.3. "Chama-se produto interior ($\tilde{\alpha}$) esquerda de um elemento $x \in \overset{P}{\Lambda E}$ e de um elemento $x' \in \overset{P}{\Lambda E^*}$, e representa-se $x \lrcorner x'$, o valor para x' da transposta do endomorfismo $z \rightarrow z \wedge x$ de $\overset{P}{\Lambda E}$."

Temos a identidade

$$\langle z, x \lrcorner x' \rangle = \langle z \wedge x, x' \rangle \quad x, z \in \overset{P}{\Lambda E}, x' \in \overset{P}{\Lambda E^*}$$

Proposição 4.4. [5] "A adição e a lei de composição externa $(x, x') \rightarrow x \lrcorner x'$ sobre $\overset{P}{\Lambda E^*}$ definem sobre este conjunto uma estrutura de módulo $\tilde{\alpha}$ esquerda em relação ao anel $\overset{P}{\Lambda E}$."

Conclui-se na demonstração desta Proposição, que

$$(x \wedge y) \lrcorner x' = x \lrcorner (y \lrcorner x')$$

para $x, y \in \overset{P}{\Lambda E}$, $x' \in \overset{P}{\Lambda E^*}$.

Deduz-se que se $x \in \overset{P}{\Lambda E}$ e $x' \in \overset{q}{\Lambda E^*}$,

$$x \lrcorner x' = 0 \quad \text{se } p > q$$

$$x \lrcorner x' = (q-p)\text{-forma} \quad \text{se } p \leq q$$

$$x \lrcorner x' = \langle x, x' \rangle \quad \text{se } p = q$$

OBS:- A seguir usaremos a notação $x \tau y'$ (ou $x' \tau y$) para representar o produto interior $\tilde{\alpha}$ direita (ou $\tilde{\alpha}$ esquerda)

$$x, y \in \overset{P}{\Lambda E} \text{ e } x', y' \in \overset{P}{\Lambda E^*}$$

Definição 4.5. "Seja A uma álgebra e seja ω um automorfismo involutivo de A . Uma derivação θ de A (relativamente a ω) é um endomorfismo linear de A tal que

$$\theta\omega - \omega\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta(ab) = (\theta.a) b + a (\theta.b) \quad a, b \in A$$

Uma anti-derivação $\bar{\theta}$ de A (relativamente a ω) é um endomorfismo linear de A t.q.

$$\bar{\theta}\omega + \omega\bar{\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\theta}(ab) = (\bar{\theta}a)b + (\omega.a)(\bar{\theta}b) \quad a, b \in A.$$

Se A possui um elemento unidade 1 , observa-se que 1 é um zero de todas as derivações e anti-derivações de A .

Seja E espaço vetorial de dimensão n ; a potência exterior $\Lambda^n E$ tem uma base formada de um só elemento.

Proposição 4.6. [5] "Seja e um elemento de $\Lambda^n E$ formando uma base deste espaço, e' o elemento de $\Lambda^{n*} E$ formando a base dual de e . A aplicação $x \rightarrow x \lrcorner e'$ é um isomorfismo de $\Lambda^n E$ sobre $\Lambda^{n-p*} E$, que aplica $\Lambda^n E$ sobre $\Lambda^{n-p*} E$ para $0 \leq p \leq n$; o isomorfismo inverso é a aplicação $x' \rightarrow e \lrcorner x'$."

Considerando-se o produto interior à esquerda definido anteriormente ($x \in \Lambda^n E$) temos um endomorfismo de $\Lambda^{n*} E$, que representaremos por

$$\tau(x): \Lambda^{n*} E \rightarrow \Lambda^{n*} E \quad \text{t.q.}$$

$$\tau(x)(x') = x \lrcorner x' \quad x \in \Lambda^n E, x' \in \Lambda^{n*} E$$

Quando $x \in E$, o endomorfismo $\tau(x)$ se explicita simplesmente. Suponhamos que

$$x'_1, \dots, x'_p \in \Lambda^{n-p*} E \quad \text{e} \quad y \in E.$$

Para todo elemento $v \in \wedge^{p-1} E$, decomponível em $v = x_2 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_p$, temos, colocando $x_i = y$

$$\langle v, \tau(y)(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_j \wedge \dots \wedge x'_p) \rangle = \det | \langle x_i, x'_j \rangle |$$

Desenvolvendo o determinante em relação aos elementos da linha $i = 1$, obtêm-se

$$\langle v, \tau(y)(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_j \wedge \dots \wedge x'_p) \rangle = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \langle x_1, x'_j \rangle \langle v, x'_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x'_j} \wedge \dots \wedge x'_p \rangle$$

Resulta que

$$\tau(y)(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_j \wedge \dots \wedge x'_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \langle y, x'_j \rangle x'_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x'_j} \wedge \dots \wedge x'_p \quad (2)$$

Como $\tau(y)$ abaixa o grau de uma unidade, temos

$$\tau(y)\omega + \omega\tau(y) = 0; \quad (3)$$

De (2) e (3) conclui-se que $\tau(y)$ é uma anti-derivação da álgebra graduada $\wedge E^*$.

Analogamente, considerando-se o produto interior à direita e $y' \in \wedge E^*$, mostra-se que

$$\tau(y') : \wedge E \rightarrow \wedge E \quad \text{t.q.}$$

$$\tau(y')(x) = x \lrcorner y' \quad (\text{ou } x \tau y') \quad x \in \wedge E$$

é um endomorfismo linear e se $y' \in E^*$, $\tau(y')$ é uma anti-derivação da álgebra graduada $\wedge E$.

Definição 4.7. A e B são duas álgebras graduadas, o produto tensorial graduado de A e B, repres. $A \hat{\otimes} B$, é uma álgebra graduada, cuja multiplicação em $A \hat{\otimes} B$ é dada por

$$(a \hat{\otimes} b)(a' \hat{\otimes} b') = \sigma(b, a') \quad aa' \hat{\otimes} bb'$$

Podemos citar outras propriedades do produto interior (p.i.d):

$$\text{se } u \in \Lambda^2 E \text{ e } b' \in E^* \quad (4)$$

$$(\text{Exp } u) \tau b' = (u \tau b') \wedge \text{Exp } u$$

Se f é uma aplicação linear de E em um K -espaço vetorial F , e $\bar{f}$ é o seu prolongamento canônico ΛE em ΛF , vale:

$$\bar{f}(x) \tau z' = \bar{f}(x \tau {}^t\bar{f}(z')) \quad \text{se } x \in \Lambda E \text{ e } z' \in \Lambda F^* \quad (5)$$

Além disso, identifica-se $\Lambda(E \oplus F)$ com $\Lambda E \hat{\otimes} \Lambda F$, no qual o produto exterior é definido

$$(x \otimes x') \wedge (y \otimes y') = \sigma(x', y) \cdot (x \wedge y) \otimes (x' \wedge y').$$

$$\text{se } x, y \in \Lambda E \text{ e } x', y' \in \Lambda F$$

Também identifica-se todo $(a, b) \in E \oplus F$ com $a \otimes 1 + 1 \otimes b \in \Lambda E \otimes \Lambda F$.

Se $x \in \Lambda E$, $x' \in \Lambda E^*$, $y \in \Lambda F$ e $y' \in \Lambda F^*$, pode-se calcular o produto interior de $x \otimes y \in \Lambda(E \oplus F)$ por $x' \otimes y' \in \Lambda(E \oplus F)^*$:

$$(x \otimes y) \tau (x' \otimes y') = \sigma(x \tau x', y') \cdot (x \tau x') \otimes (y \tau y')$$

Em particular, se $x \otimes x' \in \Lambda(E \oplus E^*)$ e $y' \otimes y \in \Lambda(E \oplus E^*)^* \cong \Lambda(E^* \oplus E)$, fica:

$$(x \otimes x') \tau (y' \otimes y) = \sigma(x \tau y', y) (x \tau y') \otimes (x' \tau y)$$

A seguir, estabeleceremos a relação fundamental entre a álgebra de Clifford de um espaço quadrático E e a álgebra exterior do espaço vetorial E , segundo Chevalley.

Retornamos ao homomorfismo $\psi: C_E \rightarrow \text{End}(\Lambda E)$, definido no Teorema 1.16, onde ψ é a extensão à C_E da aplicação linear

$$\varphi: E \rightarrow \text{End}(\Lambda E) \quad \text{t.q.}$$

$$x \rightarrow L'_x$$

$$\text{e} \quad L'_x(u) = L_x u + \delta_x \cdot u \quad u \in C_E$$

onde $L_x(u) = x \wedge u$ é a multiplicação à esquerda por x em ΛE e δ_x é uma anti-derivada de ΛE t.q.

$$\delta_x(y) = B(x,y) \quad x,y \in E$$

Em particular, se $z = x + x' \in M = E \oplus E^*$, representamos

$$L'_{1z}(y) = L_x \cdot y + \delta_{x'} \cdot y$$

onde $\delta_{x'} : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$ é a anti-derivada t.q. $\delta_{x'}(y) = x'(y) = B(x,y)$.

Temos o seguinte

Teorema 4.8. [8] "Seja uma forma bilinear B_0 em $E \times E$ tal que $Q(x) = B_0(x,x)$ para $x \in E$. Podemos então identificar o espaço vetorial "subjacente" da álgebra de Clifford C_E com o da álgebra exterior ΛE de modo que, para todo $x \in E$, o operador da multiplicação à esquerda por x em C_E é $L_x + \delta_x$, onde L_x é o operador da multiplicação à esquerda por x em ΛE e δ_x a anti-derivada de ΛE tal que

$$\delta_x \cdot y = B_0(x,y) \cdot 1 \quad \text{para} \quad y \in E.$$

Seja C_E^h o subespaço de C_E gerado pelos produtos de no máximo h elementos de E e ΛE o espaço dos elementos homogêneos de grau h de ΛE ; então temos

$$C_E^h = \sum_{h' \leq h} \Lambda E^{h'}$$

Se $x_1, \dots, x_h$ estão em E , então temos para $h \geq 2$,

$$x_1 \dots x_h \equiv x_1 \wedge \dots \wedge x_h \pmod{C_E^{h-2}}.$$

Temos

$$C_E^+ = \sum_{h \text{ par}} \Lambda_E^h, \quad C_E^- = \sum_{h \text{ ímpar}} \Lambda_E^h.$$

Prova

Coloca-se $\theta(u) = \psi(u)(1)$ para $u \in C_E$.

Então θ é uma aplicação linear de C_E em ΛE .

Lembremos que um elemento $\Lambda \in \text{End}(\Lambda E)$ é chamado homogêneo de grau d se Λ leva todo elemento homogêneo de grau h de ΛE em um elemento homogêneo de grau $h + d$.

Se $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ são homogêneos de graus $d_1, \dots, d_h$ então $\Lambda_1 \dots \Lambda_h$ é homogêneo de grau $d_1 + \dots + d_h$.

Para todo $x \in E$, L_x é homogêneo de grau 1 e δ_x de grau -1.

Seja $x_1, \dots, x_h \in E$. Então temos

$$\psi(x_1 \dots x_h) = (L_{x_1} + i_{x_1}) \dots (L_{x_h} + i_{x_h})$$

e isto pode ser escrito como

$$\psi(x_1 \dots x_h) = L_{x_1} \dots L_{x_h} + \sum_{d=-h}^{h-1} \Lambda_d \quad (7)$$

onde L_d é homogêneo de grau d .

Segue que

$$\theta(x_1 \dots x_h) = x_1 \wedge \dots \wedge x_h + \sum_{d=0}^{h-1} \xi_d \quad (8)$$

onde ξ_d é homogêneo de grau d .

Desde que $\dim C_E = 2^n = \dim \Lambda E$, θ definida acima é um isomorfismo linear que coincide com a identidade em $K.1$ e em E .

Identificaremos o espaço vetorial subjacente de C_E com o de ΛE por meio de θ .

Se $u, v \in \Lambda E$, $u.v$ representa seu produto em C_E , enquanto $u \wedge v$ é seu produto em ΛE . Devemos observar que essa identificação depende da escolha de uma forma bilinear B_0 . Tal que $B_0(x, x) = Q(x)$.

Observemos que, na fórmula (7) acima, Λ_d é diferente de zero se $d \equiv h \pmod{2}$, porque um produto de r operadores L_{x_i} e $h-r$ operadores δ_{x_i} é de grau $h-2r$.

Por outro lado, C_E^+ (respectivamente: C_E^-) é obviamente gerado pelos produtos de um número par (respectivamente: ímpar) de fatores em M . Segue que C_+ (respectivamente: C_-) é o conjunto de elementos de ΛE cujos componentes homogêneos $\neq 0$ são todos de grau par (respectivamente: ímpar).

Isto mostra que a involução principal de C_E é a mesma que a de ΛE . Além disso, vemos que

$$x_1 \dots x_h \equiv x_1 \wedge \dots \wedge x_h \pmod{\sum_{h' \leq h-2} \Lambda^{h'} E}$$

para todo $x_1, \dots, x_h \in E$.

Mais explicitamente:

$$x_1 x_2 \dots x_h = x_1 \wedge \dots \wedge x_h + X_{h-2} + X_{h-4} + \dots + Y$$

onde

$$X_{h-i} \in \Lambda^{h-i} E; \quad Y \in \Lambda^0 E \cong K \quad \text{se } h \text{ é par}$$

$$\text{e } Y \in \Lambda^1 E \cong E \quad \text{se } h \text{ é ímpar}$$

Através destes resultados, o autor [8] estabelece a relação fundamental entre as álgebras de Clifford C_E e a álgebra exterior ΛE ,

$$xy = x \wedge y + B(x,y) \quad x, y \in E \quad (9)$$

onde B é a forma bilinear associada a Q .

Baseando-se no trabalho de J. Helmstetter e utilizando-se os produtos interiores, obteve-se uma generalização de (9), na qual o isomorfismo θ_B entre os espaços vetoriais C_E e ΛE depende de uma forma bilinear B t.q.

$$B(x,x) = Q(x)$$

para todo $x \in E$ e essa forma bilinear não é necessariamente a forma bilinear associada a Q .

Uma das vantagens desse procedimento é que ele pode ser utilizado com poucas mudanças na álgebra simplética (ou álgebra de Weyl).

Sejam $\mu: E \otimes E \rightarrow E$, $\delta: E \rightarrow E \otimes E$ e $T: E \otimes E \rightarrow E \otimes E$ as aplicações lineares definidas por:

$$\mu(a,b) = a+b, \quad \delta(a) = (a,a) \quad \text{e} \quad T(a,b) = (b,a) \quad a, b \in E$$

Representa-se $\bar{\mu}$, $\bar{\delta}$ e $\bar{T}$ seus prolongamentos em homomorfismos das álgebras exteriores; como identifica-se $\Lambda(E \otimes E)$ com $\Lambda E \hat{\otimes} \Lambda E$, pode-se escrever:

$$\bar{\mu}(x \otimes y) = x \wedge y \quad \text{e} \quad \bar{T}(x \otimes y) = \sigma(x,y) \cdot y \otimes x \quad \text{se} \quad x, y \in \Lambda E$$

Sejam μ' , δ' e T' as aplicações em E^* definidas de modo análogo e $\bar{\mu}'$, $\bar{\delta}'$ e $\bar{T}'$ seus prolongamentos a ΛE^* .

Observemos que as aplicações μ' , δ' , T' relativas a E^* são respectivamente as transpostas das aplicações δ , μ , τ relativas a E , o que permite a aplicação de (5).

Se $f: \Lambda E \rightarrow \Lambda F^*$ e se $x \in \Lambda E$ e $z' \in \Lambda F^*$

$$f(x) \tau z' = f(x \tau {}^t f(z')) \quad (10)$$

Seja $B: E \times E \rightarrow K$ uma forma bilinear. Existe um isomorfismo entre $\beta(E)$ (formas bilineares sobre E) e $E^* \otimes E^*$ t.q.

$$B \leftrightarrow x' \otimes y' \text{ se e somente se}$$

$$(x' \otimes y')(a, b) = x'(a) \cdot y'(b) = B(a, b) \quad a, b \in E$$

Teorema 4.9. [9] "Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, B uma forma bilinear simétrica sobre $E \times E$, E^* o dual de E e β a aplicação linear de E em E^* canonicamente associada a B . Prolonguemos β em um homomorfismo unitário β da álgebra tensorial $T(E)$ na álgebra tensorial $T(E^*)$; representamos $T_2(E)$ e $T_2(E^*)$ os espaços de elementos homogêneos de grau 2 de $T(E)$ e $T(E^*)$.

A forma B pode então ser considerada como um elemento de $T_2(E^*)$. Como tal, B pertence à imagem $\beta(T_2(E))$ de $T_2(E)$ por β . Pode-se também considerar a forma bilinear B como definindo uma função linear, que representaremos ainda por B sobre $E \otimes E$. Seja p a dimensão do subespaço $\beta(E)$ de E^* . Se $t \in E \otimes E$ é tal que $\beta(t) = B$, temos $B(t) = p.1$."

Definição 4.10. Chama-se $\underline{XE}$ o conjunto de elementos de ΛE da forma $\eta \wedge \text{Exp } u$, onde $u \in \Lambda E$ e onde η é um elemento decomponível de ΛE (produtos exteriores de elementos de E e também os elementos de K).

Proposição 4.11. [17] Se $x \in \underline{XE}$, então $F(x) \in \underline{XE}^*$

F é o isomorfismo definido na Proposição 4.6.

Corolário 4.12. [17] Se $x \in XE$ e $z' \in XE^*$, então $x \tau z' \in XE$.

Seja $B: E \times E \rightarrow K$ uma forma bilinear sobre E t.q.

$$B(a,a) = Q(a) \quad \text{para todo } a \in E$$

Pode-se associar a B um elemento de $E^* \otimes E^*$, que representaremos por B . Como $E^* \otimes E^*$ pode ser identificado com um subespaço de $\Lambda^2(E \oplus E)^*$, pode-se definir $\text{Exp } B$ em $\Lambda(E \oplus E)^*$.

Definição 4.13. A álgebra $\Lambda(E,B)$ é o espaço vetorial ΛE munido do produto que a todo par (x,y) associa

$$xy = \mu((x \otimes y) \tau \text{Exp } B) \quad (11)$$

Para explicitar este produto, observemos que:

$$\text{Se } B = \sum_{i=1}^p x_i' \otimes y_i' = \sum_{i=1}^p u_i', \quad x_i', y_i' \in E^*$$

então

$$\begin{aligned} \text{Exp } B &= (1 + u_1') \wedge (1 + u_2') \wedge \dots \wedge (1 + u_p') \\ &= [(1 + u_1') \wedge (1 + u_2')] \wedge \dots \wedge (1 + u_p') \\ &= [(1 + u_1' + u_2' + u_1' \wedge u_2')] \wedge \dots \wedge (1 + u_p') \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} p = 1, B = x_1' \otimes y_1' &\implies \text{Exp } B = 1 + B \\ &= 1 + x_1' \otimes y_1' \end{aligned}$$

(se B é um elemento decomponível de $\Lambda^2(E \oplus E)^*$).

Para

$$p = 2, B = u'_1 + u'_2 = x'_1 \otimes y'_1 + x'_2 \otimes y'_2$$

$$\text{Exp } B = 1 + u'_1 + u'_2 + u'_1 \wedge u'_2$$

$$= 1 + x'_1 \otimes y'_1 + x'_2 \otimes y'_2 + (x'_1 \otimes y'_1) \wedge (x'_2 \otimes y'_2)$$

$$[e \text{ vale } (x'_1 \otimes y'_1) \wedge (x'_2 \otimes y'_2) = \sigma(y'_1, x'_2) \cdot (x'_1 \wedge x'_2) \otimes (y'_1 \wedge y'_2)]$$

$$= 1 + x'_1 \otimes y'_1 + x'_2 \otimes y'_2 + \sigma(y'_1, x'_2) \cdot (x'_1 \wedge x'_2) \otimes (y'_1 \wedge y'_2)]$$

Neste caso, $\text{Exp } B$ difere de $1 + B$ por um elemento de grau 4

$$\text{Exp } B \equiv 1 + B \text{ módulo } \Lambda^4(E \oplus E)^* \quad (12)$$

Para $p = j$

$$\text{Exp } B = 1 + B + C + D + \dots + W \quad (13)$$

onde

$$C \in \Lambda^2 E^* \otimes \Lambda^2 E^* \subset \Lambda^4(E \oplus E)^* \quad (\text{gr}(C) = 4)$$

$$D \in \Lambda^3 E^* \otimes \Lambda^3 E^* \subset \Lambda^6(E \oplus E)^* \quad (\text{gr}(D) = 6)$$

$$W \in \Lambda^j E^* \otimes \Lambda^j E^* \subset \Lambda^{2j}(E \oplus E)^* \quad (\text{gr}(W) = 2j)$$

e de modo geral

$$\text{Exp } B \equiv 1 + B \text{ módulo } \Lambda^{\geq 4}(E \oplus E)^* \quad (14)$$

Verifica-se imediatamente que o escalar 1 é o elemento unidade para este produto (I); demonstraremos mais adiante sua associatividade.

É óbvio que $\Lambda^+ E$ e $\Lambda^- E$ dão uma graduação de $\Lambda(E, B)$ sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lema 4.14. "Se $x \in \Lambda^p E$ e $y \in \Lambda^q E$, então

$$xy \in \Lambda^{p+q} E \oplus \Lambda^{p+q-2} E \oplus \Lambda^{p+q-4} E \oplus \dots \oplus \Lambda^{|p-q|} E ;$$

a componente de xy em $\Lambda^{p+q} E$ é $x \wedge y$."

Prova

Considerando-se a expressão de $\text{Exp } B$, verifica-se que para todo grau par $2j$, a componente de $\text{Exp } B$ em $\Lambda^{2j}(E \oplus E)^*$ está de fato em $\Lambda^j E^* \otimes \Lambda^j E^*$; e se $j = 0$, ela vale 1.

Então temos,

$$\text{se } x \in \Lambda^p E \text{ e } y \in \Lambda^q E, \quad \text{e } B = \sum_{i=1}^m x'_i \otimes y'_i \quad x'_i, y'_i \in E^* \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$x \cdot y = \mu((x \otimes y) \tau \text{Exp } B) =$$

$$= \mu((x \otimes y) \tau (1 + B + C + \dots + W))$$

onde

$$C = s \cdot (x'_1 \wedge x'_2) \otimes (y'_1 \wedge y'_2)$$

$$D = s \cdot (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \otimes (y'_1 \wedge y'_2 \wedge y'_3)$$

$$W = s \cdot (x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_j) \otimes (y'_1 \wedge y'_2 \wedge \dots \wedge y'_j)$$

Além disso, observemos que

$$(x \otimes y) \tau [(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_j) \otimes (y'_1 \wedge \dots \wedge y'_j)] =$$

$$[x \tau (x'_1 \wedge \dots \wedge x'_j)] \otimes [y \tau (y'_1 \wedge \dots \wedge y'_j)] = \quad (17)$$

$$\{[(x \tau x'_1)] \tau \dots \tau x'_j\} \otimes \{[(y \tau y'_1) \tau y'_2] \tau \dots \tau y'_j\}$$

OBS. a letra s nas igualdades indica o sinal que precede a expressão, proveniente da definição de produto tensorial graduado.

Lembrando-se que cada x'_i (ou y'_i) ($1 \leq i \leq m$) determina uma anti-derivada $\tau x'_i$ (ou $\tau y'_i$) de ΛE , que é de grau -1 , verifica-se que o elemento definido por (15)

$$(x \otimes y) \tau (A'_j \otimes B'_j) \quad A'_j = x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_j$$

$$\text{é de grau } p + q - 2j, \quad 1 \leq j \leq m. \quad B'_j = y'_1 \wedge y'_2 \wedge \dots \wedge y'_j$$

Além disso,

$$(x \otimes y) \tau (A'_j \otimes B'_j) = 0 \quad \text{se } p + q < 2j \quad \text{e}$$

então os termos de $\text{Exp } B$ que serão considerados vão até o grau $p + q - 2j$, isto é,

$$\text{gr } (W) = p + q - 2j \quad \text{e} \quad j = p \quad \text{ou} \quad j = q$$

Portanto:

$$\text{gr } (W) = \begin{cases} p + q - 2p = q - p & \text{se } j = p \\ p + q - 2q = p - q & \text{se } j = q \end{cases}$$

$$W \in \overset{0}{\Lambda E} = K \quad \text{se } p + q \text{ é par} \quad \text{e} \quad W \in \overset{1}{\Lambda E} = E \quad \text{se } p + q \text{ é ímpar}$$

$$(p + q = 2j \quad \text{ou} \quad p + q = 2j + 1)$$

Lema 4.15.

"Se $x, y \in E$, então $x \cdot y = x \wedge y + B(x, y)$; em particular

$$x^2 = Q(x)."$$

Prova

De fato, vimos que

$$\text{Exp } B = 1 + B \quad \text{módulo } \overset{\geq 4}{\Lambda} (E \otimes E)^*$$

Então

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= \mu((x \otimes y) \tau (1 + B)) \\
 &= \mu((x \otimes y) \tau 1 + (x \otimes y) \tau B) \\
 &= x \wedge y + B(x, y) \quad x, y \in E
 \end{aligned}$$

Os resultados dos dois lemas anteriores coincidem com as afirmações do Teorema 4.8 de Chevalley e além disso, pela propriedade da aplicação universal, conclui-se que: existe um homomorfismo de álgebras de $C(E, Q)$ em $\Lambda(E, B)$.

Proposição 4.16. [17] "Sejam B_{12}, B_{13}, B_{23} as imagens de B pelos três isomorfismos

$$\begin{aligned}
 E^* \otimes E^* &\rightarrow E^* \otimes E^* \otimes K \\
 E^* \otimes E^* &\rightarrow E^* \otimes K \otimes E^* \\
 E^* \otimes E^* &\rightarrow K \otimes E^* \otimes E^*;
 \end{aligned}$$

considera-se B_{12}, B_{13}, B_{23} como elementos de $\Lambda^2(E \oplus E \oplus E)^*$. Se x, y e $z \in \Lambda E$, os produtos $(xy)z$ e $x(yz)$ são os dois iguais a

$$\mu_{123}((x \otimes y \otimes z) \tau \text{Exp}(B_{12} + B_{13} + B_{23})),$$

se μ_{123} representa o homomorfismo evidente de $\Lambda(E \oplus E \oplus E)$ em ΛE ."

Esta proposição demonstra a associatividade de $\Lambda(E, B)$.

Proposição 4.17. "Existe um e um só isomorfismo J_B da álgebra C_E (ou $C(E, Q)$) sobre a álgebra $\Lambda(E, B)$, t.q. $J_B(a) = a$ para todo $a \in E$. Este isomorfismo respeita as graduações sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; para todo $p \in \mathbb{Z}$, ele envia $\overset{\leq p}{C_E}$ sobre $\overset{\leq p}{\Lambda E} = K \oplus \overset{2}{E} \oplus \overset{p}{\Lambda E} \oplus \dots \oplus \overset{p}{\Lambda E}$."

Prova

De fato por causa de [4.15] existe um homomorfismo (único) J_B de C_E em ΛE t.q. $J_B(a) = a$ para todo $a \in E$.

Se $a_1, a_2, \dots, a_p \in E$, deduz-se de (4.14) que

$$a_1 a_2 \dots a_p = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p \quad \text{módulo } \Lambda^{\leq p-2} E;$$

o que permite demonstrar a bijetividade de J_B e o fato que J_B preserva as filtrações.

Como B não é determinada de maneira única por Q , comparemos duas escolhas de B .

Proposição 4.18. "Sejam B_1 e B_2 duas formas bilineares sobre E tais que

$$B_1(a, a) = B_2(a, a) = Q(a) \quad \text{para todo } a \in E;$$

existe $v \in \Lambda E^2$ tal que, quaisquer que sejam a e $b \in E$,

$$B_1(a, b) - B_2(a, b) = \langle v, a \wedge b \rangle;$$

a aplicação $x \mapsto x \tau \text{Exp } v$ é o único isomorfismo da álgebra $\Lambda(E, B_1)$ sobre a álgebra $\Lambda(E, B_2)$ que deixa fixo os elementos de E ."

Prova

A existência de v é evidente.

O produto de $x \tau \text{Exp } v$ e $y \tau \text{Exp } v$ em $\Lambda(E, B_2)$ é

$$\mu((x \otimes y) \tau \text{Exp } (B_2 + v \otimes 1 + 1 \otimes v))$$

Comparemos este com $(\mu(x \otimes y) \tau \text{Exp } B_1) \tau \text{Exp } v$, que por (5) é igual a

$$\mu((x \otimes y) \tau \text{Exp } (B_1 + \delta(v)))$$

Se provarmos que $B_2 + v \otimes 1 + 1 \otimes v = B_1 + \delta(v)$, a proposição está demonstrada.

Ora, sejam $b'_1, b'_2, \dots, c'_1, c'_2, \dots \in E^*$ t.q.

$$v = \sum_j b'_j \wedge c'_j ;$$

encontra-se

$$B_2 - B_1 = \sum_j (b'_j \otimes c'_j - c'_j \otimes b'_j),$$

$$\delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v + \sum_j (b'_j \otimes c'_j - c'_j \otimes b'_j),$$

a igualdade anunciada é verificada.

Vemos que toda propriedade de $\Lambda(E, B)$ é também uma propriedade de $C(E, Q)$, graças ao isomorfismo J_B da proposição 4.17, e a sua expressão em $C(E, Q)$ não depende da escolha de B .

Também, por causa de [4.18] e [4.12], a imagem de XE em $C(E, Q)$ não depende de B ; esta imagem $X(E, Q) = J_B^{-1}(XE)$ é estável pelo produto e coloca-se em evidência um sub-conjunto notável de $C(E, Q)$; J.H. mostra que o grupo de Clifford é o conjunto dos elementos inversíveis de $X(E, Q)$.

Após ter colocado a possibilidade de escolhas diferentes de B , vamos indicar as mais interessantes. Se K não é de característica 2, temos a escolha canônica de $B: B_0 = \frac{1}{2} B$, o que dá o isomorfismo linear determinado por Chevalley [8], e que é usado também de preferência neste texto.

Se E é a soma direta de dois subespaços U e V totalmente singulares, a forma bilinear B associada ao par (U, V) é definida:

$$B(a, b) = \phi(a, b) \quad \text{se } a \in V \text{ e } b \in U$$

e

$$B(U, E) = B(E, V) = 0$$

(onde ϕ é a aplicação bilinear canonicamente associada a Q); esta escolha de B implica que

$$xy = x \wedge y \quad \text{se} \quad x \in \Lambda U \quad \text{ou se} \quad y \in \Lambda V,$$

o que torna os cálculos mais fáceis, o isomorfismo J_B é então a inversa da aplicação linear especial ("normal ordering"), que é introduzida em [28].

OBS. - Observemos que o produto interior à direita também é definido em $C(E, Q)$ ($C(E, Q) \times \Lambda E^* \rightarrow C(E, Q)$) com propriedades análogas ao prod. definido em ΛE .

A seguinte proposição generaliza o lema [4.15]. Se B é bilinear em E , (não necessariamente simétrica), sejam B' e B'' as aplicações lineares de E em E^* definidas

$$B'(a)(b) = B''(b)(a) = B(a, b) \quad a, b \in E$$

Representa-se ϕ a forma bilinear canonicamente associada a Q (simétrica) e ϕ a sua aplicação linear associada

$$(\phi: E \rightarrow E^*)$$

Proposição 4.19. Se $a \in E$ e $x \in \Lambda E$, temos em $\Lambda(E, B)$:

$$(a) \quad ax = a \wedge x + x \tau B'(a)$$

$$(b) \quad \tilde{x}a = a \wedge x - x \tau B''(a)$$

$$(c) \quad ax - \tilde{x}a = x \tau \phi(a)$$

$$(d) \quad ax + \tilde{x}a = 2a \wedge x \quad \text{se} \quad B = \phi/2$$

Prova

As identidades (a) e (b) resultam dos cálculos seguintes:

$$(a \otimes x) \tau B = 1 \otimes (x \tau B'(a))$$

$$(x \otimes a) \tau B = -(\tilde{x} \tau B''(a) \otimes 1$$

Pode-se deduzir (b) de (a) e de (25) [17].

Como $\phi(a,b) = B(a,b) + B(b,a)$, deduz-se (c) de (a) e (b); graças ao produto interior à direita em $C(E,Q)$, a identidade (c) é também válida em $C(E,Q)$.

Se $B = \phi/2$, então $B' = B''$, o que implica (d); esta identidade mostra que todo automorfismo (respectivamente, toda derivação) da álgebra $\Lambda(E, \phi/2)$ que deixa E invariante, é também um automorfismo (respectivamente uma derivação) da álgebra ΛE .

Vejamos como a álgebra C_M e C_E podem ser construídas e analisadas, usando este procedimento.

Seja $\sigma: E \rightarrow E^*$ o isomorfismo que se obtém, restringindo a aplicação ortogonal $F \in G$, ao subespaço E de M . Temos a forma bilinear $B_1(x,y) = \sigma(x)(y)$ ($x, y \in E$) e o espaço quadrático $\Lambda(E, B_1)$.

A álgebra $\Lambda(E, B_1)$ é então definida pelo produto

$$xy = x \wedge y + \delta_x(y) \quad \text{onde } x \in E, y \in \Lambda E \quad (18)$$

δ_x é a anti-derivação de ΛE t.q.

$$\delta_x(y) = x'(y) = B_1(x,y) \quad \text{se } y \in E$$

Sabemos que a toda forma bilinear $B: E \times E \rightarrow K$ pode se associar um elemento de $E^* \otimes E^*$, através do isomorfismo

$$\beta(E) \cong E^* \otimes E^*$$

$$B \leftrightarrow x' \otimes y' \quad \text{t.q.} \quad (x' \otimes y')(a,b) = x'(a) \cdot y'(b) \quad a, b \in E$$

é chamado o produto das formas lineares x' e $y' \in E^*$

Se $B: E \times E \rightarrow K$ é uma forma bilinear ($B \leftrightarrow x' \otimes y'$) e B_1 é definida como anteriormente, temos

$$B(a,b) = (x' \otimes y')(a,b) = x'(a) \cdot y'(b) = B_1(x,a) \cdot B_1(y,b) \quad (19)$$

Temos então

$$\delta_{x'} : \Lambda E \rightarrow \Lambda E \quad \text{e} \quad \delta_{y'} : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$$

anti-derivações e

$$\delta_{x'} \otimes \delta_{y'} : \Lambda E \hat{\otimes} \Lambda E \rightarrow \Lambda E \hat{\otimes} \Lambda E$$

é uma anti-derivação de $\Lambda(E \oplus E)$ t.q. $\delta_{x'} \otimes \delta_{y'} (a \otimes b) = B(a,b)$ se $a, b \in E$.

Dessa forma, temos a álgebra $\Lambda(E, B)$, cujo produto é dado por (11); no desenvolvimento deste produto, utiliza-se a anti-derivação que é a generalização da anti-derivação δ_x introduzida por Chevalley [8] para definir o produto de Clifford.

Usando as propriedades do produto interior e o desenvolvimento de Exp B, verifica-se que o produto definido em [11] coincide com o produto de Clifford, dado por Chevalley [8], se B é a forma bilinear canonicamente associada a Q.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARTIN, E. - Geometric Algebra. New York, Interscience, 1957.
- [2] ATIYAH, M.F.; BOTT, R. & SHAPIRO, A. - Clifford Modules. Topology (3): 3 - 39, 1964.
- [3] BAER, R. - Linear Algebra and Projective Geometry. New York, Academic Press, 1952.
- [4] BOURBAKI, N. - Algèbre Linéaire. Algèbre, Paris, Hermann, 1948. Cap. II (Eléments de Mathématique).
- [5] BOURBAKI, N. - Algèbre Multilinéaire. Algèbre, Paris, Hermann, 1948. Cap. III (Eléments de Mathématique).
- [6] BOURBAKI, N. - Formes Sesquilinéaires et Formes Quadratiques. Algèbre, Paris, Hermann, 1959. Cap. IX (Eléments de Mathématique).
- [7] CHAMBADAL, L. & OVAER, J.L. - Algèbre Linéaire et Algèbre Tensorielle. Paris, Dunod, 1968.
- [8] CHEVALLEY, C. - The Algebraic Theory of Spinors. New York, Columbia University Press, 1954.
- [9] CHEVALLEY, C. - Théorie des Groupes de Lie. Paris, Hermann, 1954, 3v.
- [10] CHEVALLEY, C. - The Construction and Study of Certain Important Algebras. Tokyo, The Math. Soc. of Japan, 1955.

- [11] CHEVALLEY, C. - Fundamental Concepts of Algebra. New York, Academic Press, 1956.
- [12] CRUMEYROLLE, A. - Algèbre de Clifford Symplectique. J. Math. Pure Appl., 56: 205 - 30, 1977.
- [13] DEHEUVELS, R. - Formes Quadratiques et Groupes Classiques. Paris, Presses Universitaires de France, 1981.
- [14] DIEUDONNÉ, J. - La Géométrie des Groupes Classiques. Berlin, Springer-Verlag, 1955.
- [15] DIEUDONNÉ, J. - Sur les Groupes Classiques. Paris, Hermann, 1948.
- [16] GRUNENFELDER, L. - Clifford K-Algebras and K^* -Groups. Math. Z., 185: 137 - 50, 1984.
- [17] HELMSTETTER, J. - Groupe de Clifford Pour des Formes Quadratiques de Rang Quelconque. C.R. Acad. Sc. Paris, 285: 175 - 77, 1977.
- [18] HELMSTETTER, J. - Produits Intérieurs de Séries Formelles et Algèbres de Clifford Symplectiques. C.R. Acad. Sc. Paris, 293: 63 - 65, 1981.
- [19] JACOBSON, N. - Lectures in Abstract Algebra. New Jersey, D. Van Nostrand, 1951.
- [20] LAM, T.Y. - The Algebraic Theory of Quadratic Forms. Massachusetts, Benjamin, 1973.
- [21] LIMA, E.L. - Cálculo Tensorial. Rio de Janeiro, IMPA, 1965.

- [22] LOUNESTO, P. - Sur les Idéaux à Gauche des Algèbres de Clifford et les Produits Scalaires des Spineurs. Ann. Inst. Henri Poincaré, 33 (1): 53-61, 1980.
- [23] MICALI, A. & REVOY, P. - Modules Quadratiques. Bull. Soc. Math. France Mémoire, 63, 1979.
- [24] MICALI, A. & VILLAMAYOR, O.E. - Sur Les Algèbres de Clifford. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 1 271 - 304, 1968.
- [25] MILNOR, J. & HUSEMOLLER, D. - Symmetric Bilinear Forms. New York, Springer-Verlag, 1973.
- [26] O'MEARA, O.T. - Introduction to Quadratic Forms. New York, Springer-Verlag, 1973.
- [27] REVOY, P. & GARNIER, M.R. - Nouvelles Algèbres de Clifford. C.R. Acad. Sc. Paris, 284: 985 - 87, 1977.
- [28] SATO, M.; MIWA, T. & JIMBO, M. - Holonomic Quantum Fields I. Publ. RIMS Kyoto Univ., 14: 223 - 67, 1968.
- [29] SCHEMBERG, M. - On the Grassmann and Clifford Algebras I. An. Acad. Bras. Ciênc., 28: 11 - 19, Marc., 1956
- [30] SCHEMBERG, M. - On the Grassmann and Clifford Algebras II. An. Acad. Bras. Ciênc., 32 (3/4): 299 - 322, 1960.
- [31] ZASSENHAUS, H. - On the Spinor Norm. Arch. Math., 13: 434 - 51, 1962.