UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

BIFURCAÇÃO DE HOPF E O APARECIMENTO
DE UM CONTÍNUO ILIMITADO DE SOLUÇÕES
PERIÓDICAS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
FUNCIONAIS RETARDADAS

JAIR SILVÉRIO DOS SANTOS

ORIENTADOR:

Prof. Dr. JOSÉ GERALDO DOS REIS

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universi-
dade de São Paulo, para obtenção do tí-
tulo de Doutor em Matemática.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS
1994

DEDALUS - Acervo - ICMSC

734097

Class. -	T
Cutt. -	S 237.6
Tombo -	T 731

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor José Geraldo dos Reis , pela orientação segura e confiança depositada , especialmente por ser um grande amigo .

Ao Professor Doutor Plácido Zoega Táboas , por sua valiosa orientação no início deste trabalho e pelo apoio recebido .

À Professora Doutora Maria Aparecida Bená , por sua amizade que tanto conforta nos momentos difíceis .

À Professora Doutora Sandra Maria Semensato de Godoy , por sua dedicação e sugestões apresentadas durante a redação deste trabalho .

Aos colegas de pós - graduação , pela compreensão e grande apoio nos momentos difíceis .

Aos amigos do ICMSC , pelo ambiente acolhedor , incentivo e dedicação .

Ao DGFM da FFCLRP , pelo apoio recebido .

Aos meus pais , dois lavradores que muito me orgulham e que começaram tudo isto .

À Célia o Higor e Thiago , pelo carinho e amor .

Aos amigos , que mesmo anonimamente colaboraram para que este momento fosse possível .

Este trabalho contou
com apoio financeiro
da CAPES.

ABSTRACT

This work is devoted to the study of the existence an unbounded continuum of periodic solutions that appear by Hopf bifurcation in non-linear delay differential equations .

Our main objective is to give some information that assure that certain restrictive conditions are always satisfied .

In this sense we were able to prove a Theorem , that guarantees the appearance of an unbounded continuum of periodic solutions , with a simpler proof than the existing in the literature .

This result is based on various previous results that we had proved earlier .

In the last chapter some applications , studied earlier , show the power of the Theorem .

This Theorem can solve new problems which were very difficult to be handle by the previous Theorems .

RESUMO

Este trabalho se propõe a estudar a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas que aparecem por bifurcação em equações diferenciais funcionais retardadas.

Nosso principal objetivo é dar informações que assegurem que certas condições restritivas estão sempre satisfeitas.

Neste sentido, provamos um Teorema que garante o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas com uma prova mais simples que a existente na literatura.

Este resultado está baseado em vários resultados que foram provados anteriormente.

No último capítulo algumas aplicações que são mais facilmente estudadas mostram a potência do nosso Teorema.

Este Teorema soluciona novos problemas que eram difíceis de serem resolvidos por Teoremas anteriores.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	i
2. FATOS BÁSICOS E PRELIMINARES	1
3. EXISTÊNCIA DAS VARIEDADES ESTÁVEL E INSTÁVEL	6
4. RESULTADOS PRINCIPAIS	25
5. APLICAÇÕES	37

INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial funcional retardada é uma equação da forma

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t).$$

Suponhamos r um número real positivo, R o conjunto dos números reais, R^n espaço vetorial sobre os reais com a norma $|\cdot|$, e $C([a, b], R^n)$ é o espaço de Banach das funções contínuas que aplicam o intervalo fechado $[a, b]$ em R^n . Se $[a, b] = [-r, 0]$, seja $C = C([-r, 0], R^n)$ o espaço onde a norma de um elemento $\phi \in C$, é dada por

$$\|\phi\| = \sup \{ |\phi(\theta)|, \quad -r \leq \theta \leq 0 \}.$$

Se $\sigma \in R$, $A \geq 0$, $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], R^n)$, então para todo $t \in [\sigma, \sigma + A]$ definimos $x_t \in C$ por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Seja Ω uma vizinhança do zero em C e $BC^1(\Omega)$ o conjunto das fun -

ções $f: \Omega \rightarrow R^n$ contínuas e limitadas sobre Ω , que têm derivada de Frechet, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, contínuas e limitadas em Ω . Este conjunto munido com norma $\|f\|_{BC^1(\Omega)} = \sup \left\{ \|f(\phi)\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi) \right\| \right\}$, torna-se um espaço de Banach.

Procurar soluções periódicas de uma Equação Diferencial Funcional Retardada é, em alguns casos, equivalente a provar a existência de pontos fixos de um operador apropriado.

Em nosso caso, desejamos encontrar soluções periódicas de uma equação do tipo,

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \alpha) \quad (1.1)$$

onde $f(0, \alpha) = 0$.

Geralmente estas soluções aparecem por bifurcação de uma solução estacionária, por exemplo, $x = 0$.

Linearizando a função f em uma vizinhança de $x = 0$, obtemos

$$\dot{x}(t) = L(x_t, \alpha) + g(x_t, \alpha), \quad (1.2)$$

onde, $L(., \alpha)$ é uma família de operadores lineares limitados que apresenta propriedades espectrais convenientes.

Obs: Neste trabalho, nas equações enumeradas, a enumeração é precedida pela letra I na introdução, nos preliminares pela letra P, e nos

capítulos, o número do mesmo.

A equação (1.2) pode ser transformada em uma equação integral da forma:

$$u(t) = T(t, \alpha) u_0 + \int_0^t T(t-s, \alpha) g(u(s), \alpha) ds \quad (1.3)$$

onde $u(t) = x_t(\phi, \alpha)$ e $T(t, \alpha) \phi = x_t(\phi, \alpha)$ satisfaz propriedades de um semigrupo.

Encontrar soluções periódicas de período p , não conhecido, para a equação integral (1.3) é equivalente a provar a existência de uma solução para o problema

$$\left[((I-T)(p, \alpha)) u_0 - \int_0^p T(p-s, \alpha) g(u(s), \alpha) ds \right] = 0.$$

No caso em que a dimensão do espaço das soluções é finita, o problema geralmente pode ser resolvido com os seguintes resultados, devidos a Brouwer.

TEOREMA 1.1: Sejam X um espaço Euclidiano e B a bola fechada de centro zero e raio um em X . Se $f : B \rightarrow B$ for uma aplicação contínua, então f terá um ponto fixo.

COROLÁRIO 1.2: Se K for um subconjunto compacto e convexo do espaço Euclidiano X , então toda aplicação contínua de K em K

terá um ponto fixo .

Quando o espaço for de dimensão infinita , o problema de encontrar solução periódica é não trivial . Neste caso , apresentar boas respostas para o problema , depende , em geral , dos Teoremas de ponto fixo de Schauder , Browder e Nussbaum .

Para enunciar alguns destes Teoremas precisamos da definição de aplicação completamente contínua .

DEFINIÇÃO 1.3 : Sejam X um espaço de Banach e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua . Diz - se que f é uma função completamente contínua , quando a imagem por f , de um subconjunto limitado de X , estiver contida em um subconjunto compacto de X .

O Teorema do Ponto Fixo de Schauder pode ser enunciado em uma das três formas seguintes e que podem ser encontradas em Browder [1] .

(a) Se X for um espaço de Banach e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação completamente contínua tal que $f(X)$ é limitado , então f terá um ponto fixo .

(b) Se S for um subconjunto convexo e fechado de X e f for uma aplicação completamente contínua de S em X , tal que $f(S) \subset S$,

então f terá um ponto fixo.

(c) Se S for um subconjunto compacto de X , então toda aplicação contínua de S em S terá um ponto fixo.

Cada uma destas versões do Teorema de Schauder tem uma extensão, devida a Browder [1], onde as hipóteses sobre as aplicações são substituídas por hipóteses sobre suas iteradas.

Estes resultados tiveram suas versões melhoradas pelo próprio Browder [2], usando o conceito de ejetividade de um ponto que passamos a definir em seguida.

DEFINIÇÃO 1.4: Sejam X um espaço de Banach, $U \subset X$ e $x_0 \in U$. Dada uma aplicação $A: U \setminus \{x_0\} \rightarrow X$, o ponto $x_0 \in U$ diz-se ponto ejetivo de A se existir uma vizinhança aberta G de x_0 , $G \subset X$ tal que para todo $y \in G \cap U$, $y \neq x_0$, existe um inteiro positivo $m = m(y)$ tal que $A^m(y) \notin G \cap U$.

DEFINIÇÃO 1.5: Sejam X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$ e $K \subset X$ um conjunto convexo. Chama-se ponto extremo de K , a todo elemento de K que não pode ser escrito como combinação convexa de outros elementos de K .

Denotemos $S_M = \{x \in X : \|x\| = M\}$ e $B_M = \{x \in X : \|x\| \leq M\}$, $M > 0$.

Usando estes conceitos, os seguintes resultados podem ser enunciados.

TEOREMA 1.6: Se $K \subset X$ for um conjunto fechado, convexo, limitado com dimensão infinita, $A: K \setminus \{x_0\} \rightarrow K$ completamente contínua e $x_0 \in K$ for um ponto ejetivo de A , então A terá um ponto fixo em $K \setminus \{x_0\}$. Se K tiver dimensão finita então A terá um ponto fixo em $K \setminus \{x_0\}$; se x_0 for ponto extremo de K .

TEOREMA 1.7: Se $K \subset X$ for um conjunto convexo e fechado, $A: K \setminus \{0\} \rightarrow K$ for completamente contínua, $0 \in K$ for um ponto ejetivo de A e se existir $M > 0$ tal que $A(x) = \lambda x$, $x \in K \cap S_M$ implica que $0 < \lambda < 1$, então A terá um ponto fixo em $K \cap B_M \setminus \{0\}$, se K tiver dimensão infinita, ou 0 for ponto extremo de K .

Usando alguns conceitos de Browder [2], Nussbaum [11] provou os Teoremas 1.6 e 1.7. O Teorema seguinte é devido a Chow & Hale e pode ser encontrado em Hale [9].

Consideremos as equações (1.2) e

$$\dot{y}(t) = L(y_t, \alpha) \quad (1.4)$$

onde $L: C \rightarrow R^n$ é uma aplicação linear contínua e $g: C \rightarrow R^n$ é uma aplicação completamente contínua, $g(0) = 0$ e $\dot{g}(0) = 0$, onde g aparece em (1.2).

TEOREMA 1.8: Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas.

(i) Existe uma raiz característica λ de (1.4) satisfazendo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

(ii) Existem $K \subseteq C$ convexo e fechado, $0 \in K$ e $\delta > 0$ tais que

$$\nu = \nu(\delta) = \left\{ \left\| \pi_\lambda(\phi) \right\| \ ; \ \phi \in K \ ; \ \left\| \phi \right\| = \delta \right\} > 0.$$

(iii) Existe uma função contínua $\tau: K \setminus \{0\} \rightarrow [\rho, \infty)$, $\rho > 0$ tal

que o operador $A: K \setminus \{0\} \rightarrow K$ dado por, $A(\phi) = x_{\tau(\phi)}(\phi)$, $\phi \in K \setminus \{0\}$, $A(0) = 0$ é completamente contínuo.

Então 0 é um ponto ejetivo de A .

Estamos denotando por $\pi_\lambda(\phi)$ a projeção de ϕ sobre o subespaço instável que será definida posteriormente.

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar a existência de condições que facilitem a aplicação do Teorema enunciado abaixo, devido a Nussbaum, e que pode ser encontrado em Hale [9] pag. 252. Este Teorema é de particular importância porque não apenas prova a existência de solução periódica, para equações diferenciais funcionais retar-

dadas mas também, garante que existe um contínuo de soluções periódicas. Isto é, pode-se demonstrar que as soluções periódicas que aparecem por bifurcação, para um determinado valor do parâmetro, formam um contínuo ilimitado.

DEFINIÇÃO 1.9: Dados X espaço de Banach, $x_0 \in X$, $U \subseteq X$ uma vizinhança de x_0 e $A: U \rightarrow X$ aplicação contínua. O elemento x_0 diz-se ponto uniformemente atrativo se existir uma vizinhança U_0 de x_0 , $U_0 \subseteq U$ tal que para qualquer vizinhança V de x_0 , existe um número inteiro $m(V)$ tal que $A^j(U_0) \subseteq V$ para todo $j > 0$, $A^j(U_0) \subseteq V$, $j > m(V)$.

TEOREMA 1.10: Suponhamos que K seja um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X , 0 um ponto extremo de K , $K \neq \{0\}$, $J = (a, \infty)$, $-\infty < a < \infty$ e $A: K \times J \rightarrow K$ satisfaça as seguintes hipóteses.

(i) $A(0, \alpha) = 0$, $\alpha \in J$.

(ii) A é completamente contínuo.

(iii) Existe $\alpha_0 \in J$ tal que para todo intervalo compacto

$J_0 \subset J$, $\alpha_0 \notin J_0$, existe um $\varepsilon = \varepsilon(J_0) > 0$ tal que

$$A(x, \alpha) \neq x, \quad \alpha \in J_0, \quad 0 < \|x\| < \varepsilon.$$

(iv) Existe um intervalo aberto I_0 contendo α_0 tal que 0 é um ponto uniformemente atrativo de $A(\cdot, \alpha)$ para $\alpha \in I_0$, $\alpha < \alpha_0$.

e 0 é um ponto ejetivo de $A(\cdot, \alpha)$ para todo $\alpha \in I_0$, $\alpha > \alpha_0$ ou reciprocamente.

(v) Existe um $\alpha_1 \in J$ tal que $A(x, \alpha) = x$ para $x \neq 0$ implica $\alpha \geq \alpha_1$.

Se as hipóteses acima estiverem satisfeitas, S e $S_0 \subseteq K \times J$, definidos por, $S = Cl \{ (x, \alpha) \in K \times J : x \neq 0, A(x, \alpha) = x \}$.

S_0 = Componente conexa fechada de S que contém $(0, \alpha_0)$.

Então, S_0 será ilimitado.

Observamos que a condição do zero ser ponto extremo de K , neste Teorema, se faz necessária, apenas se $\dim(K) < \infty$.

Na prática, é muito difícil verificar as condições deste Teorema quando desejamos aplicá-lo a um caso particular. Assim sendo, cada caso tem sido tratado isoladamente, com todas as suas particularidades. Tentando amenizar estas dificuldades, Hale & Chow em Hale [9] dão uma série de condições, que uma vez satisfeitas, garantem que as hipóteses do Teorema I.10 de Nussbaum estão satisfeitas. Estas condições são as seguintes:

(A): Existe um conjunto $K \subseteq C$, convexo e fechado e $a < 0$ tal que 0 é um ponto extremo de K , $K \neq \{0\}$ e para toda $\phi \in K$ $\phi \neq 0$ e $\alpha \in (a, \infty)$, existe uma função completamente contínua

$\tau(\phi, \alpha) > 0$ tal que a solução $x(\phi, \alpha)$ da equação (1.1) através de ϕ , satisfaz $x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha) \in K$.

(B): Se $A(\phi, \alpha) = x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha) \in K$, $\phi \in K$, $\phi \neq 0$, $A(0, \alpha) = 0$, $\alpha \in (a, \infty)$, então $A(\cdot, \alpha): K \rightarrow C$ é completamente contínua.

As condições (A) e (B) implicam que as hipóteses (i) e (ii) do Teorema 1.10 estão satisfeitas.

(C): A equação linear (1.4) tem uma raiz característica $\lambda_0 = \pm i\beta_0$, $\beta_0 \neq 0$ e todas as outras raízes $\lambda_j \neq \lambda_0$ tem parte real negativa.

As condições (C) e o Lema 2.2 de Hale [9] pag.171 implicam que existe $\alpha > 0$ e uma raiz característica simples $\lambda(\alpha)$ da equação linear (1.4), com derivada contínua $\lambda(\alpha)$ em α , para $|\alpha| < \alpha_2$.

(D): $\operatorname{Re}(\dot{\lambda}(0)) \neq 0$.

Seja $\pi_{\lambda(\alpha)}$ a projeção definida pela decomposição de C como $C = P_{\lambda(\alpha)} \oplus Q_{\lambda(\alpha)}$ com imagem igual a $P_{\lambda(\alpha)}$, o auto-espaço generalizado associado a $\lambda(\alpha)$.

(E) : Para todo intervalo fechado J_0 de (a, ∞) existe $\delta > 0$ tal que

$$\nu = \nu(\delta) = \inf \left\{ \left\| \pi_{\lambda(\alpha)}(\phi) \right\| : \phi \in K, \left\| \phi \right\| = \delta, \alpha \in J_0 \right\} > 0.$$

Se as condições (C), (D) e (E) estão satisfeitas, então o Teorema 1.1 de Hale [9] pag . 230 e o Teorema 2.3 de Hale [9] pag . 250 implicam que a hipótese (i v) do Teorema 1.10 está satisfeita . Além disso , a demonstração do Teorema 2.3 de Hale [9] pag . 250 e a uniformidade da condição (E) em α implicam que a hipótese (i i i) do Teorema 1.10 está satisfeita .

Se as condições (D) e (E) estão satisfeitas, então o Teorema 1.1 de Hale [9] pag . 230 implica que existem $b_0 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\delta > 0$ e funções

$$\alpha(b) \in (a, \infty), w(b) \in \mathbb{R}, \phi^*(b) \in C, |b| < b_0$$

$$\alpha(0) = 0, w(0) = \frac{2\pi}{\nu_0}, \phi^*(0) = 0$$

tais que, cada função é contínua e continuamente diferenciável em b , a solução $x^*(\phi^*(b), \alpha(b))$ da equação (1.1) para $\alpha = \alpha(b)$ através de $\phi^*(b)$ é uma solução $w(b)$ -periódica.

Táboas em [12] observou corretamente que Hale em [9] supõe que ,

$$\nu = \nu(\delta) = \inf \left\{ \left\| \pi_{\lambda}(\phi) \right\|, \left\| \phi \right\| = \delta, \phi \in K \right\} > 0 \quad (1.5)$$

apenas nas condições iniciais ; entretanto , na demonstração do Teorema 1.8 este fato é usado para todo $t \in [0, \tau(\phi)]$ e , portanto , se faz necessário exibir uma demonstração de que isto é verdadeiro . Táboas supera esta dificuldade em seu trabalho [12] supondo .

$$\nu(\delta) = \inf_{0 \leq t \leq \tau(\phi)} \{ \| \pi_\lambda(x_t) \| , x_t = x_t(\cdot, \phi) , \phi \in K , \| \phi \| = \delta \} > 0 \quad (1.6)$$

Devemos observar que não é uma tarefa fácil verificar a condição (1.5) ; logicamente verificar (1.6) é ainda mais difícil . Um exemplo desta dificuldade pode ser observada em [12] e [6] . O nosso objetivo no que segue é superar algumas destas dificuldades .

FATOS BÁSICOS E PRELIMINARES

Os seguintes fatos são resultados da teoria básica de equações diferenciais funcionais retardadas e estão demonstrados com detalhes em Hale [9]. Vamos enunciá-los afim de facilitar a leitura dos capítulos seguintes.

Consideremos a equação diferencial funcional retardada (1.4) com $\alpha = 0$, onde L é uma aplicação linear contínua de C em R^n . O Teorema de representação de Riez garante a existência de uma matriz $n \times n$, $\eta(\theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, cujos elementos são de variação limitada e tais que

$$L(\phi) = \int_{-\tau}^0 d\eta[\theta] \phi(\theta) \quad , \quad \phi \in C \quad (P.1)$$

Como L é uma aplicação linear contínua segue que, para cada $\phi \in C$ a equação (1.4) tem uma única solução $x(\phi)$ com condição inicial

ϕ em $t = 0$, e que $x(\phi)$ está definida em $[-r, \infty]$. Isto nos permite definir para cada $t \in [0, \infty]$ o operador $T(t) : C \rightarrow C$ que é dado por $T(t)\phi = x_t(\phi)$, para toda $\phi \in C$.

Podemos usar a matriz η e definir a equação característica de (P.1) por,

$$\det \left[\lambda I_n - \int_{-r}^0 d\eta[\theta] \phi(\theta) \right] = 0 \quad (\text{P.2})$$

onde I_n denota a identidade de ordem n . As soluções de (P.2) denominam-se raízes características ou autovalores de (1.4) e para qualquer número real β_0 , existe apenas uma quantidade finita destes autovalores com parte real maior que β_0 . Além disso, se λ é autovalor da equação (1.4), seu conjugado também o é.

Seja Λ um conjunto finito $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de autovalores de (1.4) tendo multiplicidade $m_1, m_2, \dots, m_k$, respectivamente, como raízes de (P.2). Se $m = \sum_{i=1}^k m_i$, então existe um único subespaço m -dimensional $P(\Lambda)$ de C tendo a propriedade que, para qualquer função

$$\Phi : [-r, 0] \rightarrow R^{(n, m)},$$

cujas colunas formam uma base de $P(\Lambda)$, existe uma matriz $B \in R^{(n, m)}$ tal

que os seus autovalores são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ e

$$T(t)\Phi = \Phi e^{Bt}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

onde $R^{(n,m)}$ é o conjunto das matrizes $n \times m$.

Para cada $\phi \in P(\Lambda)$, existe uma solução $x^*(\phi)$ de (1.4) definida sobre

$(-\infty, \infty)$ tal que $x_0^*(\phi) = \phi$ e $x_t^*(\phi) \in P(\Lambda)$ para todo $t \in (-\infty, \infty)$.

Esta solução é dada pelas equações,

$$x^*(t, \phi) = \Phi(0) e^{Bt} y_0$$

$$x_t^*(\phi) = \Phi e^{Bt} y_0 \quad -\infty < t < \infty,$$

onde y_0 é o único elemento em R^n tal que $\phi = \Phi y_0$.

O espaço $P(\Lambda)$ é denominado auto-espaço generalizado de (1.4) associado a Λ .

Dado η como em (P.1) podemos introduzir a equação adjunta formal de (1.4) da seguinte maneira,

$$\dot{v}(s) = - \int_{-\tau}^0 d[\eta(\theta)^T] \phi(\theta), \quad (P.3)$$

onde $\eta(\theta)^T$ denota a transposta de $\eta(\theta)$. Então para cada $\phi \in C^*$

$C^* = C([0, r], R^n)$, existe uma única solução $v(\psi)$ de (P.3) definida em $(-\infty, r)$ tal que $v(s, \psi) = \psi(s)$, $0 \leq s \leq r$. Assim, como $P(\Lambda)$, existe um auto-espaço generalizado m -dimensional $P^*(\Lambda) \subset C^*$ com propriedades de invariância semelhantes às apresentadas por $P(\Lambda)$.

Isto nos permite definir uma forma bilinear $(\cdot, \cdot)$ sobre $C^* \times C$ através da seguinte relação:

$$(\psi, \phi) = \psi^T(0)\phi(0) + \int_{-r}^0 \int_0^0 \psi^T(\xi - \theta) d\eta[\theta] \phi(\theta) d\xi, \quad \psi \in C^*, \phi \in C \quad (P.4)$$

Se Ψ for qualquer função aplicando $[0, r]$ em $R^{(n, m)}$ cujas colunas formam uma base de $P^*(\Lambda)$, então a matriz (Ψ, Φ) obtida formalmente substituindo Ψ e Φ em (P.4) é não singular. Além disso, Ψ e Φ podem ser escolhidas de tal modo que $(\Psi, \Phi) = I_m$.

Seja $Q(\Lambda)$ o subespaço de C que consiste de todas $\phi \in C$ tais que $(\psi, \phi) = 0$ para cada $\psi \in P^*(\Lambda)$. Então $Q(\Lambda)$ é invariante por $T(t)$ para $t > 0$. Além disso, $P(\Lambda) \cap Q(\Lambda) = \{0\}$ e C pode ser representado como a soma direta de $P(\Lambda)$ e $Q(\Lambda)$.

Se Ψ e Φ forem escolhidas tais que $(\Psi, \Phi) = I_m$ então, para toda $\phi \in C$, ficam determinadas unicamente $\phi^P \in P(\Lambda)$ e $\phi^Q \in Q(\Lambda)$

tais que $\phi = \phi^p + \phi^q$ e além disso, $\phi^p = \Phi(\Psi, \phi)$ e $\phi^q = \phi - \phi^p$.

EXISTÊNCIA DAS VARIEDADES ESTÁVEL E INSTÁVEL

Os resultados apresentados neste capítulo, podem ser encontrados em Chafee [3] no caso específico das equações diferenciais funcionais retardadas e em um contexto mais geral e com mais detalhes em Iooss [10], por esta razão não apresentaremos as demonstrações.

Consideremos agora a equação

$$\dot{x}(t) = L(x_t, \varepsilon) + f(x_t, \varepsilon) \quad (1.1)$$

onde $x \in R^n$ e ε é um parâmetro real variando no intervalo fechado $[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$. Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre as funções que aparecem na equação (1.1).

(H_1) A função $L: C \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow R^n$ é uniformemente contínua sobre qualquer conjunto $B(\rho) \times [0, \varepsilon_0]$, $0 < \rho < \infty$ onde, $B(\rho)$ é a bola de centro zero em C e raio ρ . Além disso, para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, a função $L(\cdot, \varepsilon): C \rightarrow R^n$ é linear.

(H_2) A função $f: B(\rho_0) \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow R^n$, $0 < \rho_0 < \infty$ é contínua e $f(\phi, \varepsilon) \rightarrow f(\phi, 0)$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, com respeito a toda $\phi \in B(\rho_0)$.

(H_3) Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $f(0, \varepsilon) = 0$

(H_4) Existe uma função $k : (0, \rho_0] \rightarrow [0, \infty)$ tal que $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$ e tal que para todo $\rho \in [0, \rho_0]$

$$|f(\phi_1, \varepsilon) - f(\phi_2, \varepsilon)| \leq k(\rho) \|\phi_1 - \phi_2\|, \quad \phi_1, \phi_2 \in B(\rho), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

(H_5) Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, a equação linear

$$\dot{x}(t) = L(x_t, \varepsilon) \tag{1.2}$$

tem um único par de autovalores conjugados $\gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ tais que

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(\varepsilon) > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \beta(\varepsilon) > 0, \quad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Além disso, cada um desses autovalores têm multiplicidade um, como raiz da equação característica de (1.2). Para $\varepsilon = 0$, qualquer outro autovalor de (1.2) que não tenha a forma $\pm i\beta(0)$, tem parte real negativa.

(H_6) Para $\varepsilon = 0$ o ponto de equilíbrio $\phi_0 = 0$ de (1.1) é uniformemente assintoticamente estável.

Queremos salientar que a hipótese H_6 , que exige estabilidade

uniforme assintótica para $\varepsilon = 0$, isto é quando os autovalores são imaginários puros, é bastante restritiva. Nesta situação, necessitamos geralmente de um funcional de Liapunov ou de uma função dicotômica para provar este fato. Felizmente, para os nossos propósitos, essa hipótese não se faz necessária.

Das hipóteses (H_1) , (H_2) e (H_4) segue que para cada $\phi \in B(\rho_0)$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, a equação (1.1) tem uma única solução $x(\phi, \varepsilon)$ tendo condição inicial ϕ para $t = 0$.

Veremos agora que, para cada ε pertencente a algum intervalo $[0, \bar{\varepsilon}]$, $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon_0$, a equação (1.1) tem uma variedade integral local $M(\varepsilon)$ homeomorfa a um disco aberto do R^2 , que contém a origem de C . Além disso, estabeleceremos certas propriedades para $M(\varepsilon)$, necessárias para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Começamos com a seguinte construção. Seja $v: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ uma função de classe C^∞ satisfazendo as seguintes condições,

$$v(s) = 1, \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad v(s) = 0, \quad 1 \leq s < \infty.$$

Consideramos L, f, ρ_0 e ε_0 definidos em (H_1) , (H_2) e tomamos $\mu_0 = \rho_0$. Definimos $f_1: C \times [0, \mu_0] \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow R^n$ da seguinte forma

$$f_1(\phi, \mu, \varepsilon) = L(\phi, \varepsilon) - L(\phi, 0) + v(\mu^{-1} \|\phi\|) f(\phi, \varepsilon), \quad (1.3)$$

para

$$0 \leq \|\phi\| \leq \mu, \quad 0 < \mu \leq \mu_0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

$$f_1(\phi, \mu, \varepsilon) = L(\phi, \varepsilon) - L(\phi, 0),$$

para

$$\mu \leq \|\phi\| < \infty, \quad 0 \leq \mu \leq \mu_0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Estas funções satisfazem as propriedades enunciadas no Teorema seguinte.

TEOREMA 1.1: A função f_1 definida em (1.3) é contínua sobre $C \times [0, \mu_0] \times [0, \varepsilon_0]$ e além disso satisfaz,

$$f_1(\phi, \mu, \varepsilon) = L(\phi, \varepsilon) - L(\phi, 0) + f(\phi, \varepsilon),$$

para $0 < \|\phi\| \leq \frac{\mu}{2}$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, e também

$$f_1(0, \mu, \varepsilon) = 0,$$

$$|f_1(\phi_1, \mu, \varepsilon) - f_1(\phi_2, \mu, \varepsilon)| \leq [k_1(\mu) + l_1(\varepsilon)] \|\phi_1 - \phi_2\|,$$

para $0 \leq \|\phi_1\|, \|\phi_2\| < \infty$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

onde $k_1: [0, \mu_0] \rightarrow [0, \infty)$, $l_1: [0, \varepsilon_0] \rightarrow [0, \infty)$, são tais que

$k_1(\mu) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 0^+$, $l_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $l(0) = 0$.

Seja $L_0 : C \rightarrow R^n$ a transformação linear dada por

$$L_0(\phi) = L(\phi, 0), \quad \phi \in C. \quad (1.4)$$

Definimos então a equação,

$$\dot{x}(t) = L_0(x_t) + f_1(x_t, \mu, \varepsilon) \quad (1.5)$$

É sabido que para cada $\phi \in C$, $\mu \in [0, \mu_0]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ a equação (1.5) tem uma única solução $x(\phi, \mu, \varepsilon)$ com condição inicial ϕ em $t = 0$, e que a solução $x(\phi, \mu, \varepsilon)$ está definida em $[-r, \infty)$.

Também introduzimos a equação

$$\dot{x}(t) = L_0(x_t). \quad (1.6)$$

Notemos que esta equação e a equação (1.4) com $\alpha = 0$, são equivalentes. Então, sabemos que existe uma decomposição de C em auto-espaços associados a (1.6) e aos autovalores $\pm i\beta(0)$ de (1.2) para $\varepsilon = 0$.

Sejam P_0 o auto-espaço generalizado associado a $\pm i\beta(0)$ e Q_0 o subespaço complementar associado a (1.6). Indicamos por P_0^* o auto-

espaço generalizado associado a $\pm i \beta(0)$ através da equação adjunta de (1.6).

Sejam $b_0 : C \rightarrow R^2$ e $\pi_0^{Q_0} : C \rightarrow Q_0$ transformações lineares contínuas definidas por

$$b_0(\phi) = (\Psi_0, \phi)_0, \quad \pi_0^{Q_0}(\phi) = \phi - \Phi_0 b_0(\phi), \quad \phi \in C.$$

Ainda, para cada $\phi \in C$, sejam

$$\phi = \phi^{P_0} + \phi^{Q_0}, \quad \phi^{P_0} \in P_0, \quad \phi^{Q_0} \in Q_0$$

$$P_0 = \{ \phi \in C : \phi = \Phi_0 b_0 \}, \quad Q_0 = \{ \phi \in C : (\Psi_0, \phi) = 0 \}$$

$$\pi_0^{P_0}(\phi) = \phi_0^{P_0} = \Phi_0 b_0(\phi), \quad \phi_0^{Q_0} = \phi - \phi_0^{P_0}.$$

Temos que para cada $\phi \in C$, $\mu \in [0, \mu_0]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, a função

$$x_t(\phi, \mu, \varepsilon) = T_0(t)\phi + \int_0^t T_0(t-\tau) X_0 f_1(x_\tau(\phi, \mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon) d\tau,$$

é a única solução para a equação (1.5) com condição inicial ϕ .

Definimos $X_0^{P_0} \in R^{(2,n)}$ e $X_0^{Q_0} : [-r, 0] \rightarrow R^{(n,n)}$ da seguinte maneira,

$$X_0^{P_0} = \Phi_0(\Psi_0, X_0) \text{ e } X_0^{Q_0} = X_0 - X_0^{P_0}.$$

Também definimos as funções $y(\phi, \mu, \varepsilon): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e

$z(\phi, \mu, \varepsilon): [0, \infty) \rightarrow Q_0$ dadas por

$$y(t; \phi, \mu, \varepsilon) = b_0 x_t(\phi, \mu, \varepsilon) \quad , \quad z(t; \phi, \mu, \varepsilon) = \pi_0^{Q_0} x_t(\phi, \mu, \varepsilon).$$

Estas funções satisfazem as equações ,

$$y(t; \phi, \mu, \varepsilon) = e^{B_0 t} y_0 + \int_0^t e^{B_0(t-\tau)} X_0^{P_0} f_1(x_\tau(\phi, \mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon) d\tau$$

$$z(t; \phi, \mu, \varepsilon) = T_0(t) z_0 + \int_0^t T_0(t-\tau) X_0^{Q_0} f_1(x_\tau(\phi, \mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon) d\tau \quad , \quad 0 \leq t < \infty,$$

onde $y_0 = y(0; \phi, \mu, \varepsilon)$ e $z_0 = z(0; \phi, \mu, \varepsilon)$.

Usando o argumento apresentado por Hale em [9] é fácil ver que

$$\left(\Psi_0, T_0(t) X_0^{Q_0} \right)_0 = 0 \quad , \quad 0 \leq t < \infty$$

Com estes conceitos prova-se o seguinte resultado .

TEOREMA 1.2: Sejam μ_0 e ε_0 dados pelas equações (1.3).

Então existe uma função

$$\mathfrak{F}: \mathbb{R}^2 \times [0, \mu_1] \times [0, \varepsilon_1] \rightarrow Q_0, \quad 0 < \mu_1 \leq \mu_0, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0,$$

contínua, tal que, para todo $\mu \in [0, \mu_1]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ a relação

$$\phi = \Phi_0 y + \mathfrak{F}(y, \mu, \varepsilon) \quad y \in \mathbb{R}^2 \quad (1.7)$$

representa uma variedade integral $M(\mu, \varepsilon)$ da equação (1.5) de dimensão 2, tal que

$$\mathfrak{F}(0, \mu, \varepsilon) = 0$$

$$\| \mathfrak{F}(y_1, \mu, \varepsilon) - \mathfrak{F}(y_2, \mu, \varepsilon) \| \leq |y_1 - y_2|$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in [0, \mu_1], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$$

Além disso, para cada $\mu \in [0, \mu_1]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ e $\phi \in M(\mu, \varepsilon)$, existe uma

única solução $x^*(\phi, \varepsilon)$ da equação (1.5), definida sobre $\mathbb{R}$ tal que

$x^*(0, \mu, \varepsilon) = \phi$ e $x_t^*(\phi, \mu, \varepsilon) \in M(\mu, \varepsilon)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta

solução satisfaz a relação

$$x_t^*(\phi, \mu, \varepsilon) = \Phi_0 y^*(t; y_0, \mu, \varepsilon) + \mathfrak{F}(y^*(t; \phi, \mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $y_0 = b_0 y$, $y^*(y_0, \mu, \varepsilon)$ é a solução de equação diferencial ordi -

nária

$$\dot{y} = B_0 y + X_0^p f_1(\Phi_0 y + \mathfrak{F}(y, \mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon) \quad (1.8)$$

tendo valor inicial y_0 quando $t = 0$.

COROLÁRIO 1.3 : Existem números $\mu_1^* \in (0, \mu_1]$ e $\varepsilon_1^* \in (0, \varepsilon_1]$ tal que para todo $\mu \in [0, \mu_1^*]$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1^*]$ o único ponto de equilíbrio de (1.5) em $M(\mu, \varepsilon)$ é a origem em C .

Passamos agora a estabelecer algumas propriedades de estabilidade da variedade integral $M(\mu, \varepsilon)$.

Sejam μ_0 e ε_0 definidos em (1.3). Então para todo $\bar{\mu}_0 \in (0, \mu_0]$ e $\bar{\varepsilon}_0 \in (0, \varepsilon_0]$ seja $\sum(\bar{\mu}_0, \bar{\varepsilon}_0)$ o conjunto formado pelos elementos $(t, y, z, \mu, \varepsilon) \in [0, \infty) \times R^2 \times Q_0 \times [0, \bar{\mu}_0] \times [0, \bar{\varepsilon}_0]$.

Então temos o seguinte Lema.

LEMA 1.4 : Sejam μ_1^* , ε_1^* como no Corolário 1.3, e consideremos $\alpha > 0$ tal que os autovalores de (1.6) tenham parte real menor que -2α . Então existem $\bar{\mu}_1^* \in (0, \mu_1^*]$, $\bar{\varepsilon}_1^* \in (0, \varepsilon_1^*]$, $K_0 \geq 1$ e uma função h que aplica $\sum(\bar{\mu}_1^*, \bar{\varepsilon}_1^*)$ continuamente em Q_0 tal que para todo $\phi \in C$, $\mu \in [0, \mu_1^*]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1^*]$ as componentes y e z de $x(\phi, \mu, \varepsilon)$ satisfazem a relação

$$z(t; \phi, \mu, \varepsilon) = h(t; y(t; \phi, \mu, \varepsilon)) \quad , \quad 0 \leq t < \infty$$

onde $z_0 = z(0, \phi, \mu, \varepsilon)$ e ainda mais

$$\|H(t; y_1, z_1, \mu, \varepsilon) - H(t; y_2, z_2, \mu, \varepsilon)\| \leq K_0 |y_1 - y_2| + \\ Ke^{-\alpha} \|z_1 - z_2\|,$$

$$h(t; 0, 0, \mu, \varepsilon) = 0, \quad (t; y_1, z_2, \mu, \varepsilon), \quad (t; y_2, z_2, \mu, \varepsilon) \in \sum(\mu_1^*, \varepsilon_1^*).$$

O próximo Teorema garante que para cada $\phi \in C$ a segunda componente da solução $x(\phi, \mu, \varepsilon)$ de (1.6) se aproxima exponencialmente da variedade integral $M(\mu, \varepsilon)$ de (1.6).

TEOREMA 1.5: Sejam $\bar{\mu}_1^*$, $\bar{\varepsilon}_1^*$ e α como no Lema 1.4 e $\mathfrak{F}$ como no Teorema 1.2. Então existem números $\bar{\mu}_1 \in (0, \bar{\mu}_1^*]$, $K_1 \geq 1$ e $\bar{\varepsilon}_1 \in (0, \bar{\varepsilon}_1^*]$ tais que para cada $\phi \in C$, $\mu \in [0, \bar{\mu}_1]$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ vale a seguinte desigualdade:

$$\|x(t; \phi, \mu, \varepsilon) - \mathfrak{F}(t; \phi, \mu, \varepsilon)\| \leq K_1 e^{-\frac{\alpha t}{2}} \|\phi\|, \quad 0 \leq t < \infty.$$

COROLÁRIO 1.6: Para cada $\mu \in [0, \bar{\mu}_1]$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ suponhamos que $x^*(\mu, \varepsilon)$ seja uma solução de (1.7) definida sobre um intervalo $(-\infty, \tau)$, $-\infty < \tau < \infty$ e que existam K_2 e $\bar{\alpha}$, $0 \leq \bar{\alpha} < \alpha$ tais que

$$\|x_i^*(\mu, \varepsilon)\| \leq K_2 e^{-\alpha t}, \quad -\infty < t < \tau.$$

Então $x_i^*(\mu, \varepsilon) \in M(\mu, \varepsilon)$ para todo $t \in (\tau_1, \tau_2)$, $-\infty < \tau_1, \tau_2 \leq \tau$.

COROLÁRIO 1.7: Para quaisquer $\mu \in [0, \bar{\mu}_1]$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$, o único ponto de equilíbrio de (1.5) é a origem em C .

LEMA 1.8: Sejam $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\varepsilon}_1$ como no Lema 1.4 e seja $M(\mu, \varepsilon)$, $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}_1$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_1$ como no Teorema 1.2. Para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ seja $P(\varepsilon)$ o auto-espaço generalizado da equação (1.2) associado ao autovalor $\gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$. Então para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ temos $P(\varepsilon) = M(0, \varepsilon)$.

TEOREMA 1.9: Existe uma função $\Phi: [-r, 0] \times [0, \bar{\varepsilon}_1] \rightarrow R^{(n,2)}$ tal que, para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ as colunas de $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ formam uma base de $P(\varepsilon)$ e para cada $y \in R^2$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$,

$$\Phi(\cdot, \varepsilon)y = \Phi_0 y + \mathfrak{F}(y, 0, \varepsilon). \quad (1.9)$$

Sabe-se que existe uma forma bilinear $v: C^* \times C \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow R$, contínua, dada por $v(\psi, \phi, \varepsilon) = (\psi, \phi)_\varepsilon$ é uniformemente contínua sobre $\{(\psi, \phi, \varepsilon), \|\psi\|, \|\phi\| < \rho, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ para algum ρ positivo.

Isto nos permite enunciar o seguinte Teorema.

TEOREMA 1.10 : Para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ seja $P^*(\varepsilon)$ o auto-espaço generalizado associado à adjunta de (1.2) e ao par de autovalores $\gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$. Então existe uma função $\Psi_\varepsilon: [0, r] \times [0, \bar{\varepsilon}_1] \rightarrow R^{(n,2)}$ tal que, para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ as colunas de $\Psi(\cdot, \varepsilon)$ formam uma base para $P^*(\varepsilon)$ e

$$(\Psi(\cdot, \varepsilon), \Phi(\cdot, \varepsilon)) = I_2. \quad (1.10)$$

Este Teorema implica na existência de uma aplicação contínua $\zeta: [0, \bar{\varepsilon}_1] \rightarrow R^{(2,2)}$ dada por

$$\zeta(\varepsilon) = (\Psi(\cdot, \varepsilon), \Phi(\cdot, \varepsilon))_\varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}_1.$$

Além disso, a matriz $\zeta(\varepsilon)$ é invertível, o que nos permite definir a função $\Psi: [0, r] \times [0, \bar{\varepsilon}_1] \rightarrow R^{(n,2)}$ dada por $\Psi(\theta, \varepsilon) = \Psi_1(\theta, \varepsilon)(\zeta(\varepsilon)^{-1})^T$, $0 \leq \theta \leq r$ e $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_1$, onde T indica transposição.

Para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$, denotaremos $\Psi(\cdot, \varepsilon)$ e $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ por Ψ_ε e Φ_ε respectivamente.

Para cada $t \in [0, \infty)$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$, seja $T(t, \varepsilon): C \rightarrow C$, o operador linear limitado dado por

$$T(t, \varepsilon)\phi = x_t(\phi, 0, \varepsilon), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Tomemos $B_\varepsilon y \in R^{(2,2)}$ como a única matriz tendo autovalores $\gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ satisfazendo

$$T(t, \varepsilon) \Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon e^{B_\varepsilon t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Ainda, consideremos (1.8) com $\mu = 0$. Mostra-se que existe uma função contínua $B_{1\varepsilon} : [0, \bar{\varepsilon}_1] \rightarrow R^{(2,2)}$ de tal forma que,

$$B_{1\varepsilon} y = B_0 y + X_0^{P_0} f_1(\Phi_0 y + \mathfrak{F}(y, 0, \varepsilon), 0, \varepsilon), \quad y \in R^2, \quad \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1].$$

Então, para $\mu = 0$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ podemos substituir (1.8) pela equação

$$\dot{y} = B_{1\varepsilon} y$$

e então o Teorema 1.2 e a equação (1.9) garantem que,

$$T(t, \varepsilon) \Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon e^{B_{1\varepsilon} t}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

portanto $B_\varepsilon = B_{1\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$.

Para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ seja $Q(\varepsilon)$ o subespaço complementar em C associado a (1.2) e $\gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$. Definimos as transformações lineares B_ε , $\pi_\varepsilon^{P(\varepsilon)}$, $\pi_\varepsilon^{Q(\varepsilon)}$ que aplicam C sobrejetivamente em R^2 , $P(\varepsilon)$ e $Q(\varepsilon)$ dadas respectivamente por

$$b_\varepsilon \phi = (\Psi_\varepsilon, \phi)_\varepsilon, \quad \pi_\varepsilon^{P(\varepsilon)} \phi = \phi_\varepsilon^{P(\varepsilon)} = \Phi_\varepsilon b_\varepsilon(\phi), \quad \pi_\varepsilon^{Q(\varepsilon)} \phi = \phi - \phi_\varepsilon^{P(\varepsilon)}, \quad \phi \in C.$$

Dados $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$, $k > 0$ seja

$$W(k, \varepsilon) = \left\{ \phi \in C : \|\pi_\varepsilon^{Q(\varepsilon)} \phi\| \leq k \|\phi_\varepsilon^{P(\varepsilon)}\| \right\}.$$

Podemos então enunciar o seguinte Teorema.

TEOREMA 1.11 : Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1^*]$ seja $M(\varepsilon) = M(0, \varepsilon)$ como no Teorema 1.2 . Então existem números $k_0 > 0$ e $\varepsilon_1^* \in [0, \varepsilon_1]$ tais que , para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1^*]$

$$M(\varepsilon) \subset W(k_0, \varepsilon) .$$

TEOREMA 1.12 : Sejam $\bar{\mu}_1$, α como no Teorema 1.4 e ε_1^* como no Teorema 1.11 . Então existem , números $\mu_2 \in [0, \bar{\mu}_1]$, $\varepsilon_2 \in [0, \varepsilon_1^*]$, $K_2 \geq 1$ e uma função continua $G: Q_0 \times [0, \mu_2] \times [0, \varepsilon_2] \rightarrow R^2$ com ,

$$G(0, \mu, \varepsilon) = 0$$

$$| G(z_1, \mu, \varepsilon) - G(z_2, \mu, \varepsilon) | \leq \| z_1 - z_2 \|$$

$$z_1, z_2 \in Q_0 , \quad \mu \in [0, \mu_2] , \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$$

Ainda , para cada $\mu \in [0, \mu_2]$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$ a relação

$$\phi = \Phi_0 G(z, \mu, \varepsilon) + z , \quad z \in Q_0 ,$$

representa uma variedade integral $N(\mu, \varepsilon)$ de (1.5) que possui as seguintes propriedades , para cada $\phi \in N(\mu, \varepsilon)$, $x_t(\phi, \mu, \varepsilon) \in N(\mu, \varepsilon)$,

$$\| x_t(\phi, \mu, \varepsilon) \| \leq K_2 e^{-\alpha t} , \quad 0 \leq t < \infty .$$

Da mesma forma que no Lema 1.8 a variedade integral $N(0, \varepsilon)$ é um subespaço de C . Ainda mais, para cada $\phi \in C$, existe um único elemento $\phi \in P_0$ e $\phi_2 \in N(0, \varepsilon)$ tal que $\phi = \phi_1 + \phi_2$,

$$\phi_1 = \Phi_0[y - Q(z, 0, \varepsilon)] \quad , \quad \phi_2 = \Phi_0[G(z, 0, \varepsilon) + z] \quad ,$$

onde $y = b_0(\phi)$, $z = \pi_0^Q$. Então, segue que $N(0, \varepsilon)$ tem codimensão 2 em C . Além disso, dados $\mu \in [0, \mu_2]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$ consideremos $N(0, \varepsilon)$ como no Teorema 1.12. Então, para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$ $N(0, \varepsilon) = Q(\varepsilon)$. Isto segue trivialmente do fato que $\gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ são os únicos autovalores de (1.2) com parte real positiva, e, que para cada $\phi \in C$ $x_1(\phi, 0, \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ se, somente se $\phi \in Q(\varepsilon)$. Daí então $N(0, \varepsilon) \subset Q(\varepsilon)$ pelo Teorema 1.12.

TEOREMA 1.13 : Sejam ε_2 , K_2 como no Teorema 1.12 e α como no Teorema 1.4. Então para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$ e $\phi \in Q(\varepsilon)$,

$$\|T_0(t, \varepsilon)\phi\| \leq K_2 e^{-\alpha t} \|\phi\| \quad , \quad 0 \leq t < \infty \quad .$$

LEMA 1.14 : Existe um número $\varepsilon^* \in [0, \varepsilon_2]$ tal que, para todo $\mu \in [0, \mu_2]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2^*]$ e $\bar{z}_0 \in Q_0$, o elemento $\phi \in N(\mu, \varepsilon)$ tal que $\bar{z}_0 = \pi_\varepsilon^{Q(\varepsilon)} \phi$ é único.

TEOREMA 1.15 : Existe uma função $\Delta_1 : (0, \varepsilon_2^*] \rightarrow (0, \mu_2]$

contínua e monótona crescente sobre $(0, \varepsilon_2^*)]$, $\Delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e tal que $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2^*)$, $\mu \in [0, \Delta_1(\varepsilon)]$ e $\phi \in C$, $x_t(\phi, \mu, \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ somente se $\phi \in N(\mu, \varepsilon)$.

Para cada $\rho > 0$, sejam $D(\rho)$ e $D^*(\rho)$ bolas abertas de centro na origem e raio ρ em R^2 e Q_0 respectivamente. Sejam ρ_0 e ε_0 como nas hipóteses $(H_1), (H_2), \dots, (H_6)$, $\bar{\varepsilon}_1$ como no Teorema 2.2 e ε_1^* como no Teorema 2.12. Então existem números ρ_1 , $\bar{\rho}_2 \in (0, \rho_0]$, $\bar{\varepsilon}_2 \in (0, \min\{\bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_1^*\}]$, ρ_2 , $\bar{\rho}_2 \in (0, \rho_1]$ e funções contínuas $F: D(\bar{\rho}_1) \times (0, \bar{\varepsilon}_1] \rightarrow Q_0$, $G: D^*(\bar{\rho}_2) \times (0, \bar{\varepsilon}_2] \rightarrow R^2$ e $\Delta_2: (0, \bar{\varepsilon}_2] \rightarrow (0, \rho_2]$ tais que,

$$(a) : F(0, \varepsilon) = 0$$

$$\|F(y_1, \varepsilon) - F(y_2, \varepsilon)\| \leq |y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in D(\bar{\rho}_1), \quad \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_2]$$

e satisfaz as seguintes afirmações:

(i) Para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ a relação

$$\phi = \Phi_0 y + F(y, \varepsilon), \quad y \in D(\bar{\rho}_1),$$

representa a variedade integral $M(\varepsilon)$ de (1.1), cuja dimensão é 2, contendo a origem de C . Além disso, para cada $\phi \in M(\varepsilon)$, existe uma única solução $x_t(\phi, \varepsilon)$ de (1.1) definida sobre o intervalo $(\tau_1 - r, \tau_2)$, $-\infty \leq \tau_1 < 0 < \tau_2 \leq \infty$, com $x_0(\phi, \varepsilon) = \phi$

$$x_t(\phi, \varepsilon) \in M(\varepsilon), \quad t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Ainda mais ,

$$x_t(\phi, \varepsilon) = \Phi_0 y^*(t; y_0, \varepsilon) + F(y^*(t; y_0, \varepsilon), \varepsilon) \quad , \quad \tau_1 < t < \tau_2 ,$$

onde $y_0 = h_0 \phi$ e $y^*(y_0, \varepsilon)$ é a solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{y} = B_0 y + X_0^{P_0} L(\Phi_0 y + F(y, \varepsilon), \varepsilon) -$$

(1.11)

$$X_0^{P_0} L(\Phi_0 y + F(y, \varepsilon), 0) + X_0^{P_0} f(\Phi_0 y + F(y, \varepsilon), \varepsilon)$$

com condição y_0 em $t = 0$.

(ii) Se , dada $\phi \in B(\rho_1)$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ a solução $x(\phi, \varepsilon)$ de (1.1) estiver definida em $[-r, \infty)$ e terá a propriedade que $x_t(\phi, \varepsilon) \in B(\rho_1)$ para todo $t \in [0, \infty)$, então $x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow M(\varepsilon)$ quando $t \rightarrow \infty$.

(iii) Se , para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_1]$ a equação (1.1) tiver uma solução $x^*(\varepsilon)$ definida em $(-\infty, \tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, tal que $x_t^*(\varepsilon) \in B(\rho_1)$ para todo $t \in (-\infty, \tau)$, então $x_t^*(\varepsilon) \in M(\varepsilon)$ para todo $t \in (-\infty, \tau)$.

(b) Δ_2 é monótona decrescente em $(0, \bar{\varepsilon}_2]$ e $\Delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$G(0, \varepsilon) = 0 ,$$

$$|G(z_1, \varepsilon) - G(z_2, \varepsilon)| \leq \|z_1 - z_2\| \quad , \quad z_1, z_2 \in D(\bar{\rho}_2) \quad , \quad \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_2] ,$$

e para cada $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_2]$ a relação

$$\phi = \Phi_0 G(z, \varepsilon) + z, \quad z \in D^*(\rho_2)$$

representa um variedade integral $N(\varepsilon) \subset B(\rho_0)$ que tem as seguintes propriedades :

(i) Para toda $\phi \in N(\varepsilon) \cap B(\rho_2)$, a solução $x(\phi, \varepsilon)$ de (1.1) está definida em $[-r, \infty)$ e $x_t(\phi, \varepsilon) \in N(\varepsilon)$ para todo $t \in [0, \infty)$ e $x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

(ii) Se, para cada $\phi \in B(\Delta_2(\varepsilon))$ a solução $x_t(\phi, \varepsilon)$ está definida em $[-r, \infty)$ e se $x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\phi \in N(\varepsilon)$.

TEOREMA 1.16 : Escolhendo $\rho_2, \bar{\varepsilon}_2$ tal que $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_2]$, seja $M(\varepsilon)$ como no Teorema 1.8. Então existe $\rho_3 \in [0, \rho_2]$ com a propriedade que para toda $\phi \in B(\rho_2)$ e $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_2]$ a solução $x(\phi, \varepsilon)$ de (1.6) está definida sobre $[-r, \infty)$ e $x_t(\phi, \varepsilon) \in B(\rho_3)$ para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma função $h_1; (0, \varepsilon_3] \rightarrow (0, \rho_2]$, $0 < \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon}_2$ contínua e monótona sobre $[0, \varepsilon_3]$, $h_1(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e para cada $\phi \in C$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_3]$, $x(\phi, \varepsilon)$ tem um conjunto w -limite $w(\phi, \varepsilon)$, compacto, conexo e não vazio, contido na interseção,

$$M(\varepsilon) \cap B(h_1(\varepsilon)) \text{ e } x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow w(\phi, \varepsilon), \quad t \rightarrow \infty.$$

TEOREMA 1.17 : Existe uma função $h_2 : (0, \varepsilon_2] \rightarrow [0, \rho_2]$ monótona crescente sobre $(0, \varepsilon_2]$ e tal que, $h_1(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $h_2(\varepsilon) < h_1(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ e para cada $\phi \in C$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ tem-se

$$w(\phi, \varepsilon) = \{0\} \quad \text{ou} \quad w(\phi, \varepsilon) \subset M(\varepsilon) \cap \left(B(h_1(\varepsilon)) \setminus B(h_2(\varepsilon)) \right).$$

RESULTADOS PRINCIPAIS

O fato que a função F leva conjuntos da forma de $K_1 \times (0, \infty)$ em limitados sempre que $K_1 \subset K$ for limitado, implica que a aplicação dada por $A(\phi, \varepsilon) = x_{\tau(\phi, \varepsilon)}(\phi, \varepsilon)$, $\phi \in K \setminus \{0\}$, $A(0, \varepsilon) = 0$, é completamente contínua, se $\tau(\phi, \varepsilon)$ for contínua.

Entretanto, cada vez que exigimos mais do conjunto K , impondo condições adicionais, percebemos que, normalmente, torna-se mais difícil mostrar que as soluções retornam a tal conjunto. Se, por alguma maneira, pudermos provar que as soluções são limitadas, o problema de demonstrar que $A(\phi, \cdot)$ é completamente contínua, torna-se bastante simples.

Passamos agora ao principal objetivo deste trabalho.

Consideremos uma família de Equações Diferenciais Funcionais Retardadas, dependendo de um parâmetro real positivo ε

$$\dot{x}(t) = F(x_t, \varepsilon)$$

onde, $F(\phi, \varepsilon)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em ϕ e ε , para $\phi \in C$, $\varepsilon \in R$; $F(0, \varepsilon) = 0$, $\varepsilon \in R$. Seja $L: C \times R \rightarrow R^n$ definido por,

$$L(\psi, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \phi}(0, \varepsilon)\psi, \quad \psi \in C, \quad \varepsilon \in R$$

$$f(\phi, \varepsilon) = F(\phi, \varepsilon) - L(\phi, \varepsilon), \quad \phi \in C, \quad \varepsilon \in R.$$

Assumimos ainda as seguintes hipóteses adicionais :

(Hipótese 1) A Equação Diferencial Funcional Retardada Linear $L(., 0)$ tem duas raízes características imaginárias puras diferentes de zero, $\lambda_0 = \pm i\beta(0)$ e as outras raízes características têm parte real estritamente negativa .

(Hipótese 2) $\operatorname{Re}(\dot{\lambda}(0)) > 0$.

As hipóteses sobre as funções L e f implicam que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) e (H_5) dadas no capítulo I estão satisfeitas .

Como F possui duas derivadas contínuas e ainda , $F(0, \varepsilon) = 0$ e $f(0, \varepsilon) = 0$, $\varepsilon \in R$, é fácil ver que L e f satisfazem as hipóteses

(H_1) , (H_2) e (H_3) . Ainda , usando o fato que para $\varepsilon \in R$, $\frac{\partial F}{\partial \phi}(0, \varepsilon) = 0$ e definindo $k : (0, \rho_0] \rightarrow [0, \infty)$ através da fórmula ,

$$k(\rho) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial \phi}(\psi, \varepsilon) \right\| : \|\psi\| \leq \rho, \psi \in C \right\} ,$$

torna - se uma aplicação imediata da desigualdade do valor médio , provar que f satisfaz a hipótese (H_4) . Finalmente , das hipóteses 1 e 2 segue (H_5) .

Por um momento , vamos supor que (H_6) esteja satisfeita . Assim sendo , podemos assumir as mesmas condições sobre L e f , exigidas no capítulo I .

Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos a equação deferencial ,

$$\dot{x}(t) = L(x_t, \varepsilon) + f(x_t, \varepsilon) \quad (2.1)$$

Sejam $\lambda(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ raízes característica da equação ,

$$\dot{y}(t) = L(y_t, \varepsilon) , \quad (2.2)$$

$P(\varepsilon)$ e $Q(\varepsilon)$ os subespaços originados pela decomposição de C em soma direta , que são invariantes pelo operador solução dado por ,

$$T(t, \varepsilon)\phi = x_t(\phi, \varepsilon) , \quad \phi \in C , \quad \varepsilon > 0 .$$

A projecção definida em C cuja imagem é igual a $P(\varepsilon)$ será indicada por $\pi_{\lambda(\varepsilon)}$.

TEOREMA 2.1 : Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas :

(i) : Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que , para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ a raiz característica $\lambda(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ de (2.2) satisfaz $\gamma(0) = 0$ e $\dot{\gamma}(0) > 0$.

(ii) : Existem um subconjunto convexo fechado K de C contendo a origem e uma função completamente contínua $\tau : K \times [\rho, \infty) \rightarrow (\rho, \infty)$ para $\rho > 0$ tais que , $A : K \times (\rho, \infty) \rightarrow C$ dada por ,

$$A(\phi, \varepsilon) = x_{\tau(\phi, \varepsilon)}(\phi, \varepsilon) , \quad \phi \in K \setminus \{0\} , \quad A(0, \varepsilon) = 0 , \quad \varepsilon > 0$$

é completamente contínua e $AK \subset K$, onde $\tau(\phi, \varepsilon)$ é o tempo de retorno à K .

$$(iii) : \inf \left\{ \left\| \pi_{\lambda(\varepsilon)} \phi \right\| ; \phi \in K, \left\| \phi \right\| = 1 \right\} > 0.$$

Então zero em C é um ponto ejetivo de A em relação a K .

Observamos que a aplicação $\tau: K \times [\rho, \infty) \rightarrow (\rho, \infty)$ deste Teorema pode ser tomada somente contínua.

A demonstração deste Teorema depende dos seguintes resultados.

TEOREMA 2.2 : Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ sejam $M(\varepsilon)$ e $B(\rho_3)$ os conjuntos definidos nos Teoremas (1.2) e (1.16) respectivamente. Dada $\phi \in M(\varepsilon) \cap B(\rho_3)$, a solução $x^*(\phi, \varepsilon)$ de (2.1) descrita no Teorema 1.2 está definida no intervalo (τ_1, ∞) $-\infty < \tau_1 < \infty$ e $x_t(\phi, \varepsilon)$ não tende a zero quando t tende a infinito.

PROVA : Conforme o enunciado do Teorema 2.16 a solução $x^*(\phi, \varepsilon)$ está definida sobre um intervalo (τ_1, ∞) , $-\infty < \tau_1 < \infty$. O Teorema 2.18 garante que o conjunto w -limite $w(\phi, \varepsilon)$ da solução $x_t(\phi, \varepsilon)$ está contido em $M(\varepsilon) \cap (B(h_1(\varepsilon)) \setminus B(h_2(\varepsilon)))$ e portanto $x_t(\phi, \varepsilon)$ não tende a zero quando t tende a infinito.

TEOREMA 2.3 : Para cada $\phi \in B(\rho_3)$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$, suponhamos que $x_t(\phi, \varepsilon)$ não tenda a zero quando t tende a infinito. Então $w(\phi, \varepsilon)$ é a união de uma ou mais órbitas fechadas de (2.1). Interpretadas como curvas de Jordan em $M(\varepsilon)$, cada uma destas órbitas contém a origem de C em seu interior.

PROVA : Pelo Teorema 1.2 é claro que as órbitas de (1.5) pertencem a $M(\varepsilon)$ e se comportam de acordo com a teoria de Poincaré - Bendixon . Portanto por este fato e os Teoremas 1.2 , 1.16 , 1.17 pode ser mostrando que o conjunto $w(\phi, \varepsilon)$ contém pelo menos uma órbita periódica de (1.5) e que qualquer órbita fechada de (1.5) que contém $w(\phi, \varepsilon)$ tem a origem de C em seu interior . Queremos agora mostrar que $w(\phi, \varepsilon)$ é uma união de órbitas fechadas de (1.5) .

Dada $\bar{\phi} \in w(\phi, \varepsilon)$, consideremos , a correspondente solução de (1.5) . Como $w(\phi, \varepsilon)$ é invariante , $x(\bar{\phi}, \varepsilon)$ está definida em $(-\infty, \infty)$. Suponhamos que exista uma órbita fechada γ em $w(\phi, \varepsilon)$ tal que $x(\bar{\phi}, \varepsilon) \rightarrow \gamma$, $t \rightarrow \infty$. Seja $g = b_0 \gamma$ e então g é uma órbita fechada de (1.11) . Também definimos $\bar{y} = b_0 \bar{\phi}$.

Seja $\xi \in g$ e I_0 um segmento de reta em $D(\bar{\rho}_1)$, disco fechado em C de centro na origem e raio $\bar{\rho}_1$, tal que $\xi \in I_0$, I_0 é homeomorfo ao intervalo aberto $(0, 1)$, e I_0 é transversal ao campo vetorial dado por (1.11) .

Consideremos a solução $y(\bar{y}, \varepsilon)$ de (1.11) . Pela teoria de Poincaré - Bendixon , existem t_1, t_2, t_3, t_4 , $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ tais que , se $y_j = y(t_j, \bar{y}, \varepsilon)$, $j = 1, 2, 3, 4$, temos $y_j \in I_0$ $j = 1, 2, 3, 4$ e

$$|y_{j+1} - \xi| < |y_j - \xi| \quad , \quad y(t; \bar{y}, \varepsilon) \notin I_0 \quad , \quad t_j < t < t_{j+1} .$$

Seja J a curva de Jordan em $D(\bar{\rho}_1)$ formada por segmentos fechados ligando y_1 e y_2 , por pontos $y(t; \bar{y}, \varepsilon)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Então J está no interior de g e $\bar{y}$ no interior de J .

Seja $I_1 \subset I_0$ o segmento fechado ligando y_3 e y_4 . Então I_1 pertence ao exterior de J . Também existem s_0 e s_1 tais que $0 < s_1 < s_0$, tendo a

propriedade que, para todo $\bar{y}_0 \in J$, existe um único $\bar{t} \in [s_1, s_0]$ tal que $y(\bar{t}; \bar{y}_0, \varepsilon) \in I_1$.

Seja E um conjunto compacto em $D(\rho_1)$ definido por,

$$E = \{ y(t; \bar{y}_0, \varepsilon) \mid \bar{y}_0 \in J, 0 \leq t \leq s_0 \}$$

Então existe um número $\delta_1 > 0$ tendo a propriedade que se $y \in R^2$ é tal que $\text{dist}(y, E) < \delta_1$ então $|y - \bar{y}_1| > \delta_1$ e se $y \in R^2$ com $\text{dist}(y, E) > \delta_1$, então y está no exterior de J .

Consideremos a curva de Jordan $J^* \subset M(\varepsilon)$ formada pelo conjunto de todos os pontos

$$\phi^* = \Phi_0 \bar{y} + F(\bar{y}, \varepsilon) \quad , \quad \bar{y} \in J.$$

Então existe um número $\delta_2 > 0$ tendo a propriedade que se $\bar{\phi} \in B(\rho_0)$ e $\phi^* \in J^*$ são tais que $\|\bar{\phi} - \phi^*\| < \delta_2$, isto implica que, $x_t(\bar{\phi}, \varepsilon)$ está definida para todo $t \in [0, s_0]$ e

$$|b_0 x_t(\bar{\phi}, \varepsilon) - b_0 x_t(\phi^*, \varepsilon)| < \delta_1 \quad , \quad 0 \leq t \leq s_0.$$

Denotemos O^* a vizinhança de $M(\varepsilon)$ definida pela relação abaixo,

$$O^* = \{ \bar{\phi} \in B(\rho_0) : \|\pi_0^O \bar{\phi} - F(b_0 \bar{\phi}, \varepsilon)\| < \delta_2 \}.$$

Consideremos a solução $x(\phi, \varepsilon)$ de (1.5) cujo conjunto w -limite $w(\phi, \varepsilon)$ contém a órbita de γ . Pelo Teorema 1.5 existe $\bar{t}_1 > 0$ tal que $x_t(\phi, \varepsilon) \in O^*$, $t \geq \bar{t}_1$. Introduzimos a componente $y(\phi, \varepsilon)$ de $x(\phi, \varepsilon)$ através da expressão

$$y(t; \phi, \varepsilon) = b_0 x_t(\phi, \varepsilon) \quad , \quad 0 \leq t < \infty.$$

Como $\gamma \subset w(\phi, \varepsilon)$ e $g \subset \text{Ext}(J)$ (exterior de J), existe um número $t \in [\bar{t}_1, \infty)$ tal que $y(t; \phi, \varepsilon) \in \text{Ext}(J)$. Suponhamos que

$$y(t; \phi, \varepsilon) \in \text{Ext}(J) \quad , \quad t \in [\bar{t}_1, \infty).$$

Então $\bar{\phi} \notin w(\phi, \varepsilon)$ porque $\bar{y} \in \text{Int}(J)$.

Suponhamos que exista $t \in [\bar{t}_1, \infty)$ tal que $y(t; \phi, \varepsilon) \in J \cup \text{Int}(J)$.

Então existe um $\bar{t}_2 \in [\bar{t}_1, \infty)$ tal que $y(\bar{t}_2, \phi, \varepsilon) \in J$. Por escolha de $\bar{t}_1$ existe $\phi^* \in J^*$ tal que $\|x_{\bar{t}_2}(\phi, \varepsilon) - \phi^*\| < \delta_3$. Logo, podemos escolher δ_2 de modo que

$$|y(t + \bar{t}_2; \phi, \varepsilon) - y(t; \bar{y}_0, \varepsilon)| < \delta_1, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}_2,$$

onde $\bar{y}_0 = b_0 \phi^*$. Mas $y(t; \bar{y}_0, \varepsilon) \in E$ para todo $t \in [0, t_0]$. Então, da forma que escolhemos δ_1 , segue que

$$|y(t; \phi, \varepsilon) - \bar{y}| > \delta_1, \quad \bar{t}_2 \leq t \leq \bar{t}_2 + s_0, \quad (2.3)$$

Ainda mais, a escolha de s_0 e s_1 garante que existe um único $t \in [s_1, s_0]$,

tal que $y(\bar{t}; \bar{y}_0, \varepsilon) \in I_1$. Então, pela escolha de δ_1 , concluímos que

$y(\bar{t}, \phi, \varepsilon) \in \text{Ext}(J)$. Deste fato e de (2.3), segue que $\bar{\phi} \notin w(\phi, \varepsilon)$.

Portanto, da hipótese que $x^*(\phi, \varepsilon)$ não é solução periódica, mostramos que $\bar{\phi} \notin w(\phi, \varepsilon)$. Isto é uma contradição.

TEOREMA 2.4: Se o conjunto $w(\phi, \varepsilon)$ descrito no Teorema 2.2 não consistir de uma órbita fechada simples, então $w(\phi, \varepsilon)$ será homeomorfo a algum anel $\bar{W} = \{x \in R^2 : \eta_1 \leq |x| \leq \eta_2, \quad 0 < \eta_1 < \eta_2\}$.

PROVA: Nestas condições o conjunto terá mais que uma órbita periódica. Existe uma destas órbitas que contém o conjunto $w(\phi, \varepsilon)$

em seu interior e outra para a qual o conjunto $w(\phi, \varepsilon)$ está no exterior. Isto nos permite escolher os números η_1 e η_2 tal que o conjunto $w(\phi, \varepsilon)$ seja homeomorfo ao disco $\overline{W}$.

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 2.1 .

PROVA DO TEOREMA 2.1 : Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$, sejam $M(\varepsilon)$, $N(\varepsilon) = N(0, \varepsilon)$ e $B(\rho_3)$ conjuntos definidos no Lema 2.8, Teorema 1.12 e Teorema 2.16 respectivamente. Dado $\phi \in K$ onde

$$\inf \left\{ \left\| \pi_{\lambda(\varepsilon)}(\phi) \right\| : \phi \in K, \left\| \phi \right\| = \delta \right\} > 0,$$

para $0 < \delta < \rho_3$, então $\phi \in B(\rho_3) \setminus N(\varepsilon)$ e pelo Teorema (2.2) $x_t(\phi, \varepsilon)$ está definida para todo $t \in (\tau_1, \infty)$, $-\infty < \tau_1 < 0$ e $x_t(\phi, \varepsilon)$ não tende a zero quando t tende a infinito.

Como não exigimos a hipótese de estabilidade, não podemos garantir, a priori, que o conjunto w -limite de $x_t(\phi, \varepsilon)$ seja o anel $\overline{W}$ em $M(\varepsilon)$ descrito no Teorema 2.4. Entretanto, isto não se faz necessário para os nossos objetivos, pois desejamos mostrar apenas que $\phi_0 = 0$ é um ponto ejetivo de A em relação a K . Para isto, prosseguimos da seguinte forma.

Como para cada ε , a aplicação $\tau(\phi, \varepsilon) = \tau_\phi$ definida no Teorema 2.1 é completamente contínua ou apenas contínua se o conjunto K é compacto, existe $\tau_\phi = \max \{ \tau(\phi, \varepsilon) : \phi \in K \}$. Tomemos agora uma vizinhança $V(0, \delta_1) \subset C$ suficientemente pequena tal que $V(0, \delta_1) \subset B(\rho_3)$. Para cada $\phi \in V(0, \delta_1)$, segue da continuidade do operador $T(t, \varepsilon)$ e do

fato que $T(0, \varepsilon) = 0$, que a vizinhança $V(0, \delta_1)$ pode ser escolhida de tal forma que $x_t(\phi, \varepsilon) \in B(0, \eta_1)$, para todo $t \in [0, \tau_\phi]$, a menos de homeomorfismo. Se, para algum $n \in N$, $A^n \phi \notin V(0, \delta_1)$ então 0 será ponto ejetivo de A em relação a K . Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra, ou seja, que para todo $n \in N$, $A^n \phi \in V(0, \delta_1)$, qualquer que seja $\phi \in V(0, \delta_1)$. Como $x_t(\phi, \varepsilon) \in B(0, \eta_1)$, segue do Teorema 1.16 que $x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow w(\phi, \varepsilon)$, $t \rightarrow \infty$. Seja $\eta = \frac{1}{2} \eta_1$, e consideremos a vizinhança $V(0, \eta)$. Como $x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow w(\phi, \varepsilon)$ existe algum t^* tal que $x_t(\phi, \varepsilon) \notin V(0, \eta)$ para todo $t > t^*$ e portanto isto contradiz o fato que $\phi \in V(0, \delta_1)$.

No caso em que a origem é assintoticamente estável para $\varepsilon = 0$, temos a garantia de que $x_t(\phi, \varepsilon) \rightarrow w(\phi, \varepsilon)$. Assim sendo, procedemos de maneira análoga.

TEOREMA 2.5: Consideremos as equações (2.1), (2.2). Suponhamos que as funções f e L satisfazem as condições estabelecidas no início deste capítulo. Assumimos ainda as seguintes condições.

- (a) Existe $\delta_1 > 0$ tal que $A(x, \varepsilon) = x$ implica que $\varepsilon > \delta_1$.
- (b) Se existir uma sequência $(\varepsilon^{(n)})_{n \in N}$ tal que para cada $n \in N$, $\lambda(\varepsilon^{(n)}) = \gamma(\varepsilon^{(n)}) \pm i\beta(\varepsilon^{(n)})$ é raiz característica de (2.2) com $\gamma(\varepsilon^{(n)}) = 0$ então $\dot{\gamma}(\varepsilon^{(n)}) > 0$.

- (c) $\delta = \inf \{ \|\pi_{\lambda(\varepsilon_0)}(\phi, \varepsilon_0)\|, \phi \in K, \|\phi\| = 1 \} > 0$.

Onde A e K estão definidas como no Teorema 2.1. Sejam

$$S = Cl\{(x, \varepsilon) \in K, x \neq 0, A(x, \varepsilon) = x\}$$

S_0 a componente conexa fechada de S que contém $(0, \varepsilon_0)$.

Então S_0 é ilimitado.

PROVA: Como a tese deste Teorema é a mesma que a do Teorema 1.10, basta demonstrar que as condições do Teorema 1.10 estão satisfeitas. Suponhamos que quando $\varepsilon = \varepsilon_0$ a primeira raiz característica de (2.2) cruza o eixo imaginário, e que a condição (b) esteja satisfeita. Então no ponto $(0, \varepsilon_0) \in K \times [0, \infty)$ aparece um contínuo ilimitado de soluções periódicas não nulas. O fato do operador solução de (2.2) ser compacto implica imediatamente que $A(\phi, \varepsilon)$ é completamente contínua. O Teorema (2.1) implica que a condição (iv) do Teorema 1.10 está satisfeita.

Resta-nos portanto provar que a condição (iii) do Teorema 1.10

Suponhamos que a condição (iii) do Teorema 1.10 não esteja satisfeita. Isto é, existe um intervalo compacto J_0 , $\varepsilon_0 \notin J_0$ e se-quências

$(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset J_0$ e $(x_t^{(n)}(\phi, \tau^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, tais que $\|x_t^{(n)}(\phi, \tau^{(n)})\| < \frac{1}{n}$. Afim de simplificar notações indicaremos $x_t^{(n)}(\phi, \tau^{(n)}) = x^{(n)}(t)$. Definimos

$$\|x^{(n)}\| = \max\{\|x_t\|, t \geq 0\} \text{ e } y^{(n)}(t) = \frac{x^{(n)}(t)}{\|x^{(n)}\|}. \text{ Colocando}$$

$$I(\varphi, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \phi}(0, \varepsilon)\varphi,$$

temos que,

$$\dot{y}^{(n)}(t) = \frac{1}{\|x^{(n)}\|} \dot{x}^{(n)}(t) = \frac{1}{\|x^{(n)}\|} F(x^{(n)}(t), \tau^{(n)}) =$$

$$= L(y^{(n)}(t), \tau^{(n)}) + \frac{1}{\|x^{(n)}\|} F(x^{(n)}(t), \tau^{(n)}) - L(y^{(n)}(t), \tau^{(n)}) =$$

$$= L(y^{(n)}(t), \tau^{(n)}) + \frac{1}{\|x^{(n)}\|} [F(x^{(n)}(t), \tau^{(n)}) - L(x^{(n)}(t), \tau^{(n)})].$$

Como f é diferenciável e sua derivada é L a segunda parcela do segundo membro tende a zero quando $\|x^{(n)}\|$ tende a zero.

Como para cada n , $y^{(n)}$ é uma função periódica e J_0 é compacto temos $\tau^{(n)} \rightarrow \tau$, $y^{(n)}(t) \rightarrow y(t)$ e $\dot{y}^{(n)}(t) \rightarrow \dot{y}(t)$ uniformemente sobre conjuntos compactos e $y(t)$ é continuamente diferenciável. Aplicando o Teorema de Ascoli e lembrando que $y^{(n)}(t)$ e $\dot{y}^{(n)}(t)$ são uniformemente limitadas, temos por passagem ao limite que $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{y}(t) = L(y(t), \tau).$$

A teoria das equações diferenciais retardadas em [9] implica que esta equação tem uma solução periódica, se e somente se, a sua equação característica tem uma raiz com parte real zero. Isto implica que $\tau = \varepsilon^{(n)}$ para algum $n \geq 1$ pois $\tau \in J_0$ e $\varepsilon_0 \notin J_0$. Em particular isto implica que se trabalhássemos com a condição (iii) do Teorema 2.1 bastaria mostrar que $\inf \{ \|\pi_{\lambda(\varepsilon)}(\phi, \cdot)\|, \phi \in K, \|\phi\| = 1 \} > 0$ apenas para valores de $\varepsilon = \varepsilon^{(n)}$. Isto significa dizer que ϕ tem projeção não nula sobre a variedade instável, correspondente à raiz característica que cruzou o eixo imaginário em ε_0 , isto em geral é equivalente a provar que

$$\inf \{ \|\pi_{\lambda(\varepsilon_0)}(\phi, \cdot)\|, \phi \in K, \|\phi\| = 1 \} > 0 \text{ e portanto pelos resultados do}$$

capítulo I não tende a zero . O que demonstra que a condição (iii) do Teorema I.10 e a prova está completa .

APLICAÇÕES

Neste capítulo, aplicaremos o nosso resultado a três equações já estudadas na literatura, ver por exemplo, [9], [12], [13], [5] e [6] e a uma outra onde pode não aparecer um contínuo ilimitado de soluções periódicas. Podemos observar nas três primeiras aplicações, que o esforço dispendido, nos trabalhos originais sem a utilização do nosso resultado é muito grande.

EXEMPLO 1

Vamos estudar a equação de Wright [14],

$$\dot{z}(t) = -\alpha z(t-1)[1+z(t)] \quad (3.1)$$

com parâmetro real $\alpha > 0$. Esta equação tem sido objeto de estudo, de vários autores [4], [9]. Mas aqui, vamos nos concentrar apenas na aplicação dos resultados apresentados. Sabemos que $z = 0$ é uma

solução assintoticamente estável quando $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que é instável

quando $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Em [4] Chow & Mallet - Paret também desenvolvem

estudos sobre esta equação usando o método da média e chegam a conclusões semelhantes sobre o comportamento local de soluções periódicas, que aparecem em cada ponto de bifurcação.

Para atingir nossos objetivos , necessitamos de algumas informações sobre as raízes características da equação associada à linearização de (3.1) próximo da origem . A equação linear é dada por ,

$$\dot{z}(t) = -\alpha z(t-1) . \quad (3.2)$$

A equação característica é a seguinte :

$$\lambda e^{\lambda} = -\alpha . \quad (3.3)$$

LEMA 3.1 : (i) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, toda solução da equação (3.3) tem parte real negativa .

(ii) Se $\alpha > e^{-1}$, existe uma raiz $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) \pm i\beta(\alpha)$ da equação (3.3) que é contínua juntamente com sua primeira derivada em relação a α e satisfaz

$$0 < \beta(\alpha) < \pi , \quad \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} , \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 , \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 , \quad \gamma(\alpha) > 0 \text{ para } \alpha > \frac{\pi}{2} .$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Hale [9]

Observe que $F(\phi, \alpha) = \alpha \phi(-1)[1 + \phi(0)]$ é limitada , e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados .

LEMA 3.2 A equação (3.1) tem uma bifurcação de Hopf quando α cruza o valor $\frac{\pi}{2}$.

A prova deste resultado segue do Lema (3.1) e do Teorema da Bifurcação de Hopf.

É sabido que para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a equação (3.3) tem uma raiz imaginária pura $\beta(\alpha) = \pm i\frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha > \frac{\pi}{2}$, próximo de $\frac{\pi}{2}$, existe um único par conjugado de raízes de (3.3) $\lambda(\alpha), \bar{\lambda}(\alpha)$ ainda mais, para cada $n \in \mathbb{N}$, no ponto $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ um par de raízes características $\lambda(\alpha_n) = \gamma(\alpha_n) \pm i\beta(\alpha_n)$ cruza o eixo imaginário com $\gamma(\alpha_n) = 0$ e $\dot{\gamma}(\alpha_n) > 0$.

É fácil ver que se $x(\phi, \alpha)$ é a solução da equação (3.1) com condição inicial ϕ e se $\phi(0) > -1$, então $x(\phi, \alpha)(t) > -1, t \geq 0$. Ainda mais, não existe $t_0 > 0$ tal que $x(\phi, \alpha)(t) = 0, t > t_0$.

O seguinte Lema dá uma caracterização melhor do comportamento das soluções da equação (3.1).

LEMA 3.3 : (i) Se $\phi(0) > -1$ e os zeros de $x(\phi, \alpha)(t)$ são limitados, então $x(\phi, \alpha) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

(ii) Se $\phi(0) > -1$, então $x(\phi, \alpha)(t)$ é limitada. Além disso, se os zeros de $x(\phi, \alpha)$ são ilimitados, então qualquer valor máximo local de $x(\phi, \alpha)(t), t > 0$ é menor que $e^\alpha - 1$.

(iii) Se $\phi(0) > -1$ e $\alpha > 1$, então os zeros de $x(\phi, \alpha)$ são ilimitados.

(iv) Se $\phi(\theta) > -1$, $-1 < \theta < 0$ ou $[\phi(0) > -1, \phi(\theta) < 0, -1 < \theta < 0]$ então os zeros de $x(\phi, \alpha)(t)$ são simples e a distância de um zero de $x(\phi, \alpha)(t)$ ao próximo máximo ou mínimo local é maior ou igual a um.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Hale [9] página 255.

Seja K o conjunto das funções $\phi \in C$, tais que $\phi(\theta) \geq 0$, $-1 < \theta \leq 0$, $\phi(-1) = 0$, ϕ não decrescente e que satisfazem a mesma condição de Lipschitz, com constante N . Com esta condição o conjunto K é compacto. É fácil ver que o conjunto assim definido é um cone. Para cada $\phi \in K \setminus \{0\}$ e $\alpha > 1$, seja

$$z(\phi, \alpha) = \min \{ t : x(\phi, \alpha)(t) = 0, \dot{x}(\phi, \alpha)(t) > 0 \}.$$

O item (ii) do Lema 3.3 assegura que $z(\phi, \alpha)$ é finito e o item (iv) que $z(\phi, \alpha) > 2$. Ainda mais, pelo item (iv) do Lema 3.3 $x(\phi, \alpha)(t)$ é positiva não decrescente no intervalo $(z(\phi, \alpha), z(\phi, \alpha) + 1)$.

Então a aplicação $A: K \times [0, \infty) \rightarrow C$ definida por

$$A(\phi, \alpha) = x_{z(\phi, \alpha)+1}(\phi, \alpha), \quad \phi \neq 0, \quad A(0, \alpha) = 0,$$

é uma aplicação de K em K , completamente contínua pois $F(\phi, \alpha) = \alpha \phi(-1) [1 + \phi(0)]$ leva conjunto limitado de $K \times [0, \infty)$ em conjunto limitado de C e $z(\phi, \alpha)$ é contínua.

LEMA 3.4 : Se J_0 é um intervalo compacto em $\left(\frac{\pi}{2}, \infty\right)$, então

$$\mu = \inf \left\{ \left\| \pi_{\lambda(\alpha)}(\phi) \right\| : \phi \in K, \|\phi\| = 1, \alpha \in J_0, \alpha_0 \notin J_0 \right\} > 0.$$

PROVA : O Teorema 2.5 nos mostra que é suficiente provar que

$$\mu = \left\{ \left\| \pi_{\lambda(\alpha_n)} \right\| : \phi \in K, \|\phi\| = 1, n > 1 \right\} > 0. \text{ Então para cada } \phi \in C, \text{ seja}$$

$$\pi_{\lambda(\alpha_n)}(\phi) = \Phi(\Psi, \phi)_{\alpha_n}, \quad ; \quad \alpha_n > \frac{\pi}{2}, \quad n > 1$$

Vamos mostrar que ,

$$\inf \left\{ \left| (\psi, \phi)_{\alpha_n} \right| : \phi \in K, |\phi| = 1 \right\} > 0.$$

Se $\phi \in K$, $|\phi| = 1$, então $\phi(0) = 1$ e $(\psi, \phi)_{\alpha_n} = R(\phi) + iI(\phi)$, onde

$R(\phi)$ e $I(\phi)$ significam respectivamente , parte real e parte imaginária de (ψ, ϕ) . Temos então ,

$$R(\phi) = 1 - \alpha_n \int_{-1}^0 \phi(\theta) e^{\gamma(\theta+1)} \cos(\beta(\theta+1)) d\theta$$

$$I(\phi) = \alpha_n \int_{-1}^0 \phi(\theta) e^{-\gamma(\theta+1)} \sin(\beta(\theta+1)) d\theta$$

Suponhamos que para algum $\alpha_0 > 0$ o ínfimo seja zero , como

K é compacto existe $\phi_0 \in K$ tal que $\pi_{\alpha_0}(\phi_0) = 0$, então $I(\phi_0) = 0$ e

portanto $R(\phi_0) = 1$, isto contradiz o fato que $\pi_{\alpha_0}(\phi_0) = 0$.

LEMA 3.5: Existe $\alpha_1 > 1$ tal que, para todo $\alpha \in (1, \alpha_1)$, a única solução de $A(\phi, \alpha) = \phi$ em K , é $\phi = 0$.

A prova deste Lema pode ser encontrada com detalhes em Hale [9].

Com isto, provamos que as condições do Teorema 1.10 estão satisfeitas e portanto se $S \subseteq K \times J$ e $S_0 \subseteq K \times J$ são definidos por

$$S = Cl \{ (x, \alpha) \in K \times J : x \neq 0, A(x, \alpha) = x \}$$

S_0 = Componente conexa fechada, maximal de S que contém $(0, \alpha_0)$.

Então S_0 é ilimitado.

EXEMPLO 2

A equação diferencial retardada

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \alpha F(x(t-1)) \quad (3.4)$$

onde $x = col(x_1, x_2)$ e $F = col(F_1, F_2)$ é uma função classe C^3 que aplica R^2 em R^2 e α é um parâmetro real positivo, foi objeto de estudos desenvolvidos por Táboas [12] e Táboas & Baptistini [13]. No segundo trabalho é provada a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas não estacionárias para uma certa classe de funções F .

Vamos denotar $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) = \delta_1$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) = \delta_2$, e assumir as seguintes

hipóteses:

$$(G) \quad x_2 F_1(x) > 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_1 F_2(x) < 0, \quad x_1 \neq 0, \quad \delta_1 = -\delta_2 = 1.$$

Seja $K \subset C$, onde $C = C([-1, 0], R^2)$ com a norma do sup, o conjunto

$$K = \{ \phi \in C : e^\theta \phi_j(\theta), -1 \leq \theta \leq 0, \text{ é não decrescente, } \\ j = 1, 2, \phi_1(-1) = 0, \phi_2(-1) \geq 0, \exists N > 0 \text{ tal que } \|\dot{\phi}\| < N \}.$$

É fácil ver que este conjunto é um cone.

TEOREMA 3.6 Seja $\alpha_0 = (1 + b^2) \operatorname{sen} b$, onde b é unicamente determinado pela equação $b \operatorname{tg} b = 1$ em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, onde $\operatorname{tg} b$ denota tangente de b . Se (G) estiver satisfeita e se F for limitada, então para cada $\alpha > \alpha_0$ a equação (3.4) terá uma solução periódica não constante $x(\cdot, \phi)$, $\phi \in K$ com período $T > 4$.

Da hipótese de limitação sobre F segue que para cada α existe um bola

$$B(M_\alpha) = \{ \phi \in C : \|\phi\| < M_\alpha \}$$

invariante sob o semifluxo definido por (3.4). Isto nos permite tomar o conjunto K limitado ou seja o Teorema pode ser provado para o conjunto $K_0 = K \cap \overline{B(M_\alpha)}$. K_0 é um conjunto fechado, convexo e equicontínuo.

TEOREMA 3.7: Se (G) estiver satisfeita, existirá uma sequência $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots \rightarrow \infty$ tal que a equação (3.4) possuirá uma bifurcação de Hopf para $\alpha = \alpha_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

TEOREMA 3.8: Suponhamos que (G) esteja satisfeita e que F seja limitada. Então existe uma aplicação contínua $t_1: K \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ tal que $x_1(t_1(\phi)) > 0$, $x_2(t_1(\phi)) = 0$ e $x(t, \phi) \in Q_1$ onde.

$$Q_1 = \{ x \in R^2, x_1, x_2 \geq 0 \}, 0 \leq t \leq t_1(\phi).$$

A prova destes resultados podem ser encontradas em Táboas [12].

Dada $\phi \in K \setminus \{0\}$, seja $\psi = x_{t_1(\phi)+1}(\cdot, \phi)$ e note que, para $-1 \leq \theta \leq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(e^\theta \psi(\theta)) &= e^{-t_1(\phi)} \frac{d}{d\theta} \left[x(t_1(\phi) + \theta, \phi) e^{t_1(\phi) + \theta} \right] \\ &= e^{-t_1(\phi)} \alpha F(x(t_1(\phi) + \theta - 1, \phi)) > 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como $x(t_1(\phi) + \theta - 1, \phi) \in Q_1$, $-1 \leq \theta \leq 0$ a relação (3.5) juntamente com (G) implicam que $e^\theta \psi_1(\theta)$ e $e^\theta \psi_2(\theta)$ são não decrescentes. Então, se R for a rotação dada por,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e se $RK = \{ R\phi : \phi \in K \}$ então esta propriedade de $e^\theta \psi(\theta)$ significará que $\psi \in RK$ e podemos definir a aplicação $T_1: K \rightarrow RK$ por $T_1(\phi) = x_{t_1(\phi)+1}(\cdot, \phi)$, $\phi \in K \setminus \{0\}$, $T_1(0) = 0$. Esta função aplica K em RK . Da limitação de F segue que T_1 é uma aplicação completamente contínua.

Definimos as funções $\phi \rightarrow t_j(\phi)$, $j = 2, 3, 4$ que aplicam $R^j K$ em $[0, \infty)$ continuamente e as funções $T_j: R^{j-1}(K \setminus \{0\}) \rightarrow R^j K$, $j = 1, 2, 3, 4$ cada uma delas completamente contínuas.

Finalmente definimos a aplicação completamente contínua $A: K \rightarrow R^4 K$ por $A(\phi) = T_4 T_3 T_2 T_1(\phi)$, $\phi \in K \setminus \{0\}$, $A(0) = 0$.

Agora vamos mostrar que se o autovalor λ é tal que $\dot{\gamma}(\alpha) > 0$, então

$$\inf \{ \|\pi_\lambda(\phi)\| : \phi \in K, \|\phi\| = 1 \} > 0.$$

Devemos mostrar que

$$\inf \{ |(\psi, \phi)| : \phi \in K, \|\phi\| = 1 \} > 0.$$

Seja $L(\phi) = -\phi(0) + B(\alpha)\phi(-1)$ a transformação linear dada pela linearização próximo de zero da equação (3.4). Sua representação de Riesz é dada por uma matriz 2×2 , $\eta(\theta)$ definida para $\theta \in [-1, 0]$ tal que $\eta(-1) = 0$, $\eta(\theta) = B(\alpha)$, $-1 < \theta < 0$, $\eta(0) = -I + B(\alpha)$, onde

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}. \text{ Neste caso, a forma bilinear será dada por}$$

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi, \quad \psi \in C^*, \quad \phi \in C$$

Se u é solução não trivial de $\Delta(\lambda)u = 0$ e v é um vetor não nulo tal que $v\Delta(\lambda) = 0$ onde $\Delta(\lambda) = \lambda I - L(e^\lambda I)$, então as funções

$\rho(t) = e^{\lambda t}u$, $t \in [-1, 0]$ e $\sigma(s) = v e^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$ são tais que, para

qualquer $\phi \in C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, tem representação única dada por

$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}$ e $\phi^{P_\lambda} = (\sigma, \phi) \rho$. Observemos primeiramente que

podemos escolher $v = (1, -i)$ como solução de $v\Delta(\lambda) = 0$. Temos

$\psi(0) = v$, $\psi(\xi - \theta) = v e^{-\lambda(\xi - \theta)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) &= v \phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta v e^{-\lambda(\xi - \theta)} d[\eta(\theta)] \phi(\xi) d\xi \\ &= (1, -i) \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\lambda(\xi - \theta)} (1, -i) \begin{bmatrix} d[\eta_{11}(\theta)] & d[\eta_{12}(\theta)] \\ d[\eta_{21}(\theta)] & d[\eta_{22}(\theta)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) \\ \phi_2(\xi) \end{bmatrix} d\xi \end{aligned}$$

$$(\psi, \phi) = \phi_1(0) - i\phi_2(0) -$$

$$\int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\lambda(\xi - \theta)} \left\{ \left[d[\eta_{11}(\theta)] - i d[\eta_{21}(\theta)] \right] \phi_1(\xi) + \left[d[\eta_{12}(\theta)] - i d[\eta_{22}(\theta)] \right] \phi_2(\xi) \right\} d\xi$$

Fazendo $\lambda = x + iy$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ e calculando as integrais de

Stieltjes em θ obtemos,

$$(\psi, \phi) = \operatorname{Re}((\psi, \phi)) + i \operatorname{Im}((\psi, \phi))$$

onde ,

$$\operatorname{Re}(\psi, \phi) =$$

$$\phi_1(0) + \alpha \int_{-1}^0 e^{-x(\xi+1)} \cos y(\xi+1) \phi_2(\xi) d\xi + \alpha \int_{-1}^0 e^{-x(\xi+1)} \operatorname{sen} y(\xi+1) \phi_1(\xi) d\xi$$

$$\operatorname{Im}((\psi, \phi)) =$$

$$-\phi_2(0) - \alpha \int_{-1}^0 e^{-x(\xi-\theta)} \operatorname{sen} y(\xi+1) \phi_2(\xi) d\xi + \alpha \int_{-1}^0 e^{-x(\xi+1)} \cos y(\xi+1) \phi_1(\xi) d\xi$$

Como K é compacto, se $\inf \{ |(\psi, \phi)| : \phi \in K, \|\phi\|=1 \} = 0$ então existiria $\phi \in K$ tal que $\phi_1(0) = 0$. Notando que $\phi_j(-1) \geq 0$, $e^\theta \phi_j(\theta) \geq 0$, $j = 1, 2$ e como as funções que aparecem no integrando das duas parcelas do segundo membro da parte real, são contínuas e não negativas, concluímos que as integrais serão nulas somente se $\phi_j(\theta) \equiv 0$, $j = 1, 2$, o que é uma contradição. Portanto $\operatorname{Re}((\psi, \phi)) > 0$.

Observamos que não necessitamos da condição (3) do Lema 5.2 de Baptistini & Táboas, cujas demonstrações como se pode ver em [13] não são simples.

Com isto, provamos que as condições do Teorema 1.10 estão satisfeitas e portanto se $S \subseteq K \times J$ e $S_0 \subseteq K \times J$ são definidos por,
 $S = \operatorname{Cl} \{ (x, \alpha) \in K \times J : x \neq 0, A(x, \alpha) = x \}$
 $S_0 =$ Componente conexa fechada de S que contém $(0, \alpha_0)$.
 Então S_0 é ilimitado.

EXEMPLO 3

Consideremos a equação diferencial retardada

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \alpha f(x(t-1)) \quad (3.6)$$

onde $f: R^2 \rightarrow R^2$, $f = (f_1, f_2)$, $\alpha > 0$. Godoy & Dos Reis em [5], provaram o seguinte Teorema:

Teorema 3.9: Consideremos a equação (3.6) e suponhamos que exista $M > 0$, tal que $\|f(x)\| < M$ para todo $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Seja

$$Jf(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

onde $Jf(0)$ indica a matriz Jacobiana de f em zero e $a > 0$, $b > 0$,

$b > a$, $\gamma = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} > 1$. Suponhamos que

$$(H_1) \quad \begin{aligned} f_1(x)(ax_1 + bx_2) &> 0, & ax_1 + bx_2 &\neq 0 \\ f_2(x)(-bx_1 + ax_2) &> 0, & -bx_1 + ax_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

$$(H_2) \quad \text{Em III: } f_2(x) < -\frac{a}{b}f_1(x)$$

$$\text{Em V: } f_2(x) > \frac{b}{a}f_1(x)$$

$$\text{Em VII: } f_2(x) > -\frac{a}{b}f_1(x)$$

$$\text{Em IX: } f_2(x) < -\frac{b}{a}f_1(x)$$

onde as regiões *III*, *V*, *VII*, *IX* estão definidas na figura 1. Assim sendo, existe $\alpha_0 > 0$, tal que a equação (3.6) tem uma bifurcação de Hopf com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas.

Figura 1

Consideremos a equação diferencial funcional retardada

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + A x(t-1) \quad (3.7)$$

onde $A = Jf(0)$.

TEOREMA 3.10: (i) Se $\gamma < 1$, a solução nula de (3.7) será assintoticamente estável.

(ii) Se $\gamma > 1$, então existirá um $\alpha_0 > 0$, tal que a solução nula de (3.6) torna-se instável.

(iii) Se $\gamma > 1$ e $a < 1$, então existirá um $\alpha_0 > 0$ e existirão raízes características de equação (3.7) com parte real positiva para $0 < \alpha < \alpha_0$.

(iv) Se $\gamma > 1$ e $a > 1$, então existirá uma raiz característica da equação (3.7) com parte real positiva para todo $\alpha > 0$.

(v) No caso (iii) (resp. iv), existirá uma sequência $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, de valores reais, tal que no intervalo $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, a equação característica de (3.7) tem exatamente $n + 1$ (resp. $n + 2$) raízes com parte real e imaginária positivas.

A prova deste Teorema pode ser encontrada em Godoy & Dos Reis [6]

Seja

$$K = \left\{ \phi \in C, \phi_1(-1) \geq 0, 0 \leq \phi_2(\theta) \leq \frac{b}{a} \phi_1(\theta), \phi_1(\theta)e^{\lambda\theta} \text{ não decrescente} \right. \\ \left. \text{para } \theta \in [-1, 0] \text{ e existe } N > 0 \text{ tal que } \|\dot{\phi}\| \leq N \right\}$$

Consideremos a equação diferencial funcional retardada

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + H(x_t) \quad (3.8)$$

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \quad (3.9)$$

onde $L: R^2 \rightarrow R^2$ é um operador linear contínuo, H é uma função de classe C^1 , $H(0) = 0$, $\dot{H}(0) = 0$. A equação característica de (3.9) será denotada por

$$\det(\Delta(\lambda)) = 0 \quad , \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - L(e^{\lambda} I) .$$

Para cada autovalor λ , o espaço de fase C é decomposto como $C = P_{\lambda} \oplus Q_{\lambda}$, onde P_{λ} e Q_{λ} são subespaços invariantes pelo operador solução de (3.9) $T(t)\phi = x_t(\phi, .)$, $\phi \in C$. Seja π_{λ} a projeção com imagem P_{λ} definida pela decomposição .

Godoy & Dos Reis em [6] provaram a existência para cada $\phi \in K$ de um tempo finito t_{ϕ} , que é o primeiro retorno em K , isto é , $x_{t_{\phi}}(\phi, \alpha) \in K$. Se considerarmos então a aplicação $A(\phi, \alpha) = x_{t_{\phi}}(\phi, \alpha)$, esta aplicação será completamente contínua .

Vamos agora mostrar que a condição (iii) do Teorema 2.1 também está satisfeita .

Pela demonstração do Teorema 3.9 em [6] podemos seleccionar λ , $\text{Re} \lambda > 0$ e $a < \text{Im} \lambda < \frac{\pi}{2}$.

Seja

$$L\phi = -\alpha \phi(0) + \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \phi(-1)$$

A representação de Riesz para L é dada por uma matriz $\eta(\theta)$, $-1 \leq \theta \leq 0$ de ordem 2 dada por

$$\eta(-1) = 0 \quad , \quad \eta(\theta) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad , \quad -1 \leq \theta \leq 0 \quad , \quad \eta(0) = -\alpha I + \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Assim

$$L\phi = \int_{-1}^0 [d\eta(\theta)] \phi(\theta) , \quad \phi \in C .$$

A forma bilinear definida em $C^* \times C$ é dada por

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \psi(\alpha - \theta) [d\eta(\theta)] \phi(\alpha) d\alpha$$

Seja v solução não trivial de $\Delta(\lambda)v = 0$

$$\Delta(\lambda) = (\alpha + \lambda)I - \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} e^{-\lambda} ,$$

e v^* solução não trivial de $v^* \Delta(\lambda) = 0$. Então as funções

$\rho(t) = e^{\lambda t} v$, $t \in [-1, 0]$ e $\psi(s) = v^* e^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$ autovetores de

A e A^* respectivamente associados a λ .

Queremos provar que

$$\inf \{ \|\pi_\lambda \phi\| , \phi \in K , \|\phi\| = 1 \} > 0 .$$

É suficiente provar que

$$\inf \{ (\psi, \phi) , \phi \in K , \|\phi\| = 1 \} > 0$$

Primeiro observamos que podemos escolher $v^* = (1, -i)$ e

$\eta(\theta) = (\eta_{ij}(\theta))_{2 \times 2}$. Então, $\psi(0) = v^*$, $\psi(\alpha - \theta) = v^* e^{-\lambda(\alpha - \theta)}$.

Se $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $0 < \lambda_2 < \frac{\pi}{2}$, então teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\psi, \phi) &= \phi_1(0) + \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(s+1)} \cos[\lambda_2(s+1)] (a\phi_1(s) + b\phi_2(s)) ds \\ &\quad + \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(s+1)} \operatorname{sen}[\lambda_2(s+1)] (b\phi_1(s) - a\phi_2(s)) ds . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\psi, \phi) &= -\phi_2(0) - \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(s+1)} \operatorname{sen}[\lambda_2(s+1)] (a\phi_1(s) + b\phi_2(s)) ds \\ &\quad + \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(s+1)} \cos[\lambda_2(s+1)] (b\phi_1(s) - a\phi_2(s)) ds . \end{aligned}$$

Se $\inf \{ \|\pi_\lambda \phi\| : \phi \in K : \|\phi\| = \delta \} = 0$ segue da compacidade de K que existe ϕ_0 tal que o ínfimo é assumido. Como, $b > a > 0$ as funções que aparecem nas integrais são positivas e contínuas, o fato do ínfimo ser zero implica que $\phi_0 = 0$.

Então as condições do Teorema 3.1 estão satisfeitas e portanto 0 é um ponto ejetivo de K .

A condição da existência de $\alpha_1 > 0$ tal que $A(x, \alpha) = x$ implica que e $\alpha > \alpha_1$, foi demonstrada por Dos Reis & Godoy em [5]. Com isto, provamos que as condições do Teorema 1.10 estão satisfeitas e portanto se $S \subseteq K \times J$ e $S_0 \subseteq K \times J$ são definidos por ,
 $S = Cl \{ (x, \alpha) \in K \times J : x \neq 0 , A(x, \alpha) = x \}$, S_0 = componente conexa fechada de S que contém $(0, \alpha_0)$.

Então S_0 é ilimitado

EXEMPLO 4

Um exemplo onde não existe um contínuo ilimitado de soluções periódicas não triviais.

Consideremos a equação

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{\pi}{4} + \pi \operatorname{sen}^2(\alpha)\right)[x(t-1)(1+x(t))] \quad (3.10)$$

A equação linearizada de (3.10) no ponto $x(t) \equiv 0$ é dada por

$$\dot{y}(t) = -\left(\frac{\pi}{4} + \pi \operatorname{sen}^2(\alpha)\right)y(t-1) \quad (3.11)$$

Associada a ela temos a seguinte equação característica:

$$-\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2(\alpha)\right) = \lambda e^\lambda \quad (3.12)$$

O estudo feito na equação de Wright no exemplo 1, mostra que equação (3.10) terá uma solução periódica não nula se e somente se

$\frac{\pi}{4} + \pi \operatorname{sen}^2(\alpha) > \frac{\pi}{2}$. Isto acontece quando $\operatorname{sen}(\alpha) > \frac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen}(\alpha) < -\frac{1}{2}$, ou

seja nos intervalos $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

No extremo inferior de cada um destes intervalos, a raiz característica $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) \pm i\beta(\alpha)$ de (3.12) tem parte real zero e a parte real da derivada positiva, e no extremo superior ela tem parte real zero

e a parte real da derivada negativa. Os argumentos apresentados para equação de Wright no exemplo 1, podem ser aplicados sem modificações. Como mostra o Teorema 2.5 um ramo de soluções periódicas não triviais

aparece no extremo inferior do intervalo $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$,

$k = 0, 1, 2, \dots$, e um ramo de soluções periódicas não triviais desaparece no extremo superior deste intervalo, quando em virtude da periodicidade da função seno, a raiz característica que cruzou do semi-plano real negativo para o semi-plano real positivo, cruza novamente o eixo imaginário, mas agora em sentido contrário.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Browder Felix E. - *On a Generalization of the Schauder Fixed Point Theorem* - Duke math. J. 26 p. 291 - 304 (1959).
- 2 - Browder Felix E. - *A Further Generalization of the Schauder Fixed Point Theorem* - Duke Math. J. 32 p. 399 - 406 (1965).
- 3 - Chafee N. - *A Bifurcation Problem For a Functional Differential Equation of Finitely Retarded Type* - J. Math. Anal. Appl. 35 p. 312 - 349 (1971).
- 4 - Chow S.- Mallet - Paret J. - *Integral Averaging and Bifurcation* - J. Dif. Eqs. 26 p. 112 - 159 (1977).

- 5 - Dos Reis J. G. - Godoy S. M. S. - *An Extension of the Bendixon Negative Criterion and Existence of an Unbounded Continuum of Periodic Solutions for Planar Delay Differential Equations* - A aparecer .**
- 6 - Godoy S. M. S. - Dos Reis J. G. - *Comportamento Assintótico e Existência de Soluções Periódicas de uma Classe de Equações Diferenciais Retardadas Autônomas Não Lineares* - In: Seminário Brasileiro de Análise 31º São Carlos 1990 Atas . São Carlos SBA 1992 p. 91 - 98 .**
- 7 - Hale J. K. - *Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems* - Ann. of Math. 73 p. 496 -531 (1961) .**
- 8 - Hale J. K. - *Linear Functional Differential Equations With Constant Coefficients* - Contributions to Differential Equations - 2 p. 219 - 317 (1963) .**
- 9 - Hale J. K. - *Theory of Functional Differential Equations* - Springer - Verlag - New York - 1977 .**
- 10 - Iooss G. - *Bifurcation of Maps and Applications* - North Holland - Amsterdam - 1979 .**
- 11 - Nussbaum Roger D. - *A Global Bifurcation With Applications to Functional Differential Equations* - J. Func. Anal. 19 p. 319 - 338 (1975) .**
- 12 - Táboas P. Z. - *Periodic Solutions of a Planar Delay Equation* - Proc. Royal Soc. Edinburgh 116A p. 85 - 101 (1990) .**
- 13 - Táboas P. Z. - Baptistini M. Z. - *On the Existence and Global Bifurcation of Periodic Solution to Planar Differential Delay Equations* - A Aparecer .**
- 14 - Wright E. M. - *A Non -linear Difference Differential Equations* - J. Reine Angew. Math. 194 p. 68 - 87 (1955) .**