INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMESC-USP
PÓS-GRADUADO

APLICAÇÕES DA TEORIA DE ADMISSIBILIDADE AO
ESTUDO DE EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA
EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Adalberto Spezamiglio

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

APLICAÇÕES DA TEORIA DE ADMISSIBILIDADE AO
ESTUDO DE EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA
EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Adalberto Spezamiglio

Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em
Ciências (Matemática).

Orientador: Dr. Nelson Onuchic

São Carlos
1978

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, que com sua dinâmica projetou e orientou este trabalho, transmitindo ao mesmo tempo lições de sabedoria e humildade, meus agradecimentos. A sua conduta tem influenciado de forma decisiva minha iniciação na pesquisa matemática.

Minha gratidão aos amigos do ICMSC-USP, e a todos que, direta ou indiretamente, participaram na realização deste trabalho.

Este trabalho contou com apoio financeiro das entidades: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

A Sonia Maria

APPLICATIONS OF THE ADMISSIBILITY THEORY IN THE STUDY OF RELATIVE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Adalberto Spezamiglio

Adviser: Prof. Dr. Nelson Onuchic

We deal with the basic ordinary differential systems

$$(1) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(2) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t,x)$$

where x , y and $f(t,x)$ are n -vectors, $A(t)$ is an $n \times n$ matrix and t ranges on $[t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$. If $\mu \geq 0$ is an integer and $\rho \geq 0$ is a real, we give conditions on $f(t,x)$ to obtain a positive answer to the following problems:

- (I) If $y(t) \neq 0$ is a solution of (1), find a family of solutions $x(t)$ of (2) satisfying

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

- (II) If $x(t)$ is a solution of (2) with $x(t) \neq 0$ for $t \geq t_0$, find a family of solutions $y(t)$ of (1) satisfying

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

We also give information, in each case, about the number of parameters depending the family of solutions obtained.

We plan this work as follows:

In the first part, we study the $A(t)$ -admissibility of a pair (B, D) of Banach spaces and give a positive answer to the above problems. We also derive a result on relative asymptotic equivalence, with weight $t^\mu e^{\rho t}$, between two perturbed systems of (1).

In the second part, we restrict the conditions on $f(t, x)$ and make the above study, with additional information about uniqueness of solution. This enables us to obtain certain topological property on the initial values of the families of solutions found in problems (I) and (II).

I N D I C E

Introdução *i*

Capítulo 0

Preliminares *1*

Capítulo 1

Equivalência Assintótica Relativa, com Peso *11*

Capítulo II

Equivalência Assintótica Relativa, com Peso, e Certas Propriedades Topológicas de um Conjunto de Valores Iniciais. *61*

Bibliografia *81*

INTRODUÇÃO

Consideremos as equações diferenciais ordinárias:

$$(1) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(2) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t,x)$$

onde $x, y \in E$ ($E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$), t varia em $J = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ e f está definida em $J \times E$, assumindo valores em E .

Sejam $\mu \geq 0$ um inteiro e $\rho \geq 0$ um real.

Colocamos os seguintes problemas:

(I) Se $y(t) \neq 0$ é uma solução de (1), determinar uma família de soluções $x(t)$ de (2) satisfazendo à propriedade

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

(II) Se $x(t)$ é uma solução de (2) com $x(t) \neq 0$ para todo t suficientemente grande, determinar uma família de soluções $y(t)$ de (1) satisfazendo à propriedade

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

(III) Em cada um dos problemas acima, dizer de quantos parâmetros depende a família de soluções encontrada.

Observamos que a condição (a), por exemplo, no caso $\mu > 0$, $\rho > 0$, significa que a diferença relativa $||x(t)-y(t)||/||y(t)||$ tende a zero mais rapidamente do que $t^{-\mu}e^{-\rho t}$.

O problema (I) foi estudado por S. Faedo [2] e E. Levi [5] no caso em que $A(t)$ é constante, $f(t,x)$ linear em x , $\mu = 0$ e $\rho = 0$.

Z. Szmydt [10], usando o método topológico de T. Ważewski [12], generalizou os resultados de Faedo e Levi, considerando $A(t)$ ainda constante, $f(t,x)$ não necessariamente linear em x , $\rho = 0$, $\mu = 0$ ou $\mu = \ell$ onde ℓ é um inteiro não negativo associado a cada solução de (1). Além disso, com relação ao problema (III), ele deu uma estimativa para o número de parâmetros de que depende a família de soluções de (2).

Isso tudo ocorreu no período de 1947 a 1955.

Em 1963, inspirados num teorema de C. Corduneanu [1, Th. II], P. Hartman e N. Onuchic obtiveram um resultado bastante geral [4, Th. 1.1] (Teorema 0.3 neste trabalho), baseados em resultados de J. Massera e J. Schäffer [6, (a) - (b)], envolvendo aplicações do Teorema da Aplicação Aberta e do teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff. (Para uma visão ampla da teoria de Massera-Schaffer, ver também [6 - (c)]). Esse resultado permitiu a N. Onuchic [7, (b) - (c)], em 1965, generalizar os resultados de Szmydt. Mais precisamente, ele deu uma resposta positiva aos problemas (I), (II) e (III), com $A(t)$ não necessariamente constante, $\mu = 0$ e $\rho = 0$.

Em 1973, ainda baseado no método Hartman-Onuchic, H. M. Rodrigues [8, (a) - (b)] generalizou os resultados de Onuchic para o caso $\mu \geq 0$ inteiro qualquer, $\rho = 0$.

iii

A finalidade deste trabalho é, em parte, generalizar os resultados de Rodrigues, para o caso $\mu \geq 0$ inteiro, $\rho \geq 0$ real arbitrários. Para isso, a técnica utilizada será ainda o teorema de Hartman-Onuchic. Além disso, procuraremos informações sobre a distribuição, no espaço de fase, dos valores iniciais das famílias de soluções descritas nos problemas acima. Este novo aspecto dos problemas (I) e (II), surgiu da possibilidade do uso de um teorema de Corduneanu [1, Th. I], que envolve aplicação do Princípio de Contração de Banach, teorema esse bastante semelhante ao de Hartman-Onuchic, cuja versão ligeiramente modificada é o nosso Teorema 0.2. Mas, para isso, as hipóteses sobre a perturbação $f(t,x)$ serão substituídas por hipóteses tipo-Lipschitz, que são mais restritivas que as consideradas anteriormente.

Observamos que P. Z. Táboas [11] fez interessantes aplicações do teorema de Corduneanu. Na verdade, foi a tese de Táboas que chamou nossa atenção para a aplicação do mencionado teorema.

O trabalho foi desenvolvido da seguinte maneira:

No Capítulo 0 estão os resultados básicos, definições e notações. Destacam-se um resultado de Massera-Schäffer, o teorema de Hartman-Onuchic e o de Corduneanu.

No Capítulo I atacamos os três problemas acima, via Teorema de Hartman-Onuchic. Ressaltamos o Lema 1.3, que trata da $A(t)$ -admissibilidade de um par (B,D) de espaços de Banach, que constitui a parte mais elaborada deste trabalho, e em geral, das aplicações dos métodos citados. Especial atenção deve ser dada ao "significado do número p ", que definirá o "número de parâmetros" do problema (III).

No Capítulo II damos uma resposta positiva aos três

problemas, via Teorema de Corduneanu, e, explorando a unicidade de solução, nos ocupamos de obter propriedades topológicas sobre o conjunto dos valores iniciais das famílias de soluções de terminadas nos problemas (I) e (II).

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Neste capítulo estabelecemos definições, notações, e resumimos alguns resultados básicos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Destacamos alguns resultados da teoria de J. Massera e J. Schäffer, que é apresentada com abundância de detalhes por N. Onuchic em [7 - c, cap. I] e por P. Hartman em [3, Cap. XII, p. III].

Tomado $t_0 \geq 0$, denotamos por J o intervalo $[t_0, \infty)$. O espaço $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $n \geq 1$, será denotado por E , e $||\cdot||$ representará uma norma sobre E . $L(J, E)$ será o espaço das funções definidas em quase toda parte (q.t.p.) de J , com valores em E , que são localmente Lebesgue-integráveis. Identificamos funções que coincidem em q.t.p. de J e equipamos $L(J, E)$ com a topologia da convergência em média de ordem um, nos intervalos compactos de J . Tal topologia pode ser dada, por exemplo, pela família de seminormas $\{p_n : n = 1, 2, \dots\}$ onde

$$p_n(f) = \int_{t_0}^n ||f(t)|| dt \quad f \in L(J, E).$$

$L(J, E)$ se torna então um espaço vetorial topológico localmente convexo.

Se B é um espaço de Banach, sua norma será denotada por $|\cdot|_B$, ou, quando conveniente, por alguma outra notação usual.

Dizemos que um espaço de Banach B de funções de

J em E é mais forte que $L(J, E)$, se B está contido algebricamente em $L(J, E)$ e se convergência em B implica convergência em $L(J, E)$. O termo *contido algebricamente* deve ser entendido isomorfo a um subespaço. Se B está contido algebricamente em $L(J, E)$, uma condição equivalente à de B ser mais forte que $L(J, E)$ é a seguinte: existe sequência numérica $k_n = k_n(B) > 0$ tal que

$$\int_{t_0}^n ||f(t)|| dt \leq k_n |f|_B \quad (n = 1, 2, \dots) (f \in B).$$

Alguns exemplos de espaços de Banach mais fortes que $L(J, E)$ são os seguintes:

$M^p (1 \leq p < \infty)$: espaço das funções $f \in L(J, E)$ tais que $\int_t^{t+1} ||f(\tau)||^p d\tau$ é limitado para $t \in J$, com a norma

$$|f|_{M^p} = \sup_{t \geq t_0} \left[\int_t^{t+1} ||f(\tau)||^p d\tau \right]^{1/p}.$$

M_0 : subespaço de $M = M^1$ das funções f tais que $\int_t^{t+1} ||f(\tau)|| d\tau \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, com a norma induzida por M .

$L^p (1 \leq p < \infty)$: espaço das funções $f \in L(J, E)$ tais que $\int_{t_0}^{\infty} ||f(t)||^p dt < \infty$, com a norma $|f|_p = \left[\int_{t_0}^{\infty} ||f(t)||^p dt \right]^{1/p}$.

L^∞ : espaço das funções $f \in L(J, E)$ essencialmente limitadas, com norma $|f|_\infty = \sup_{t \in J} \text{ess } ||f(t)||$.

L_0^∞ : subespaço de L^∞ das funções f que tendem essencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$, com a norma induzida

por L^∞ .

Se $\psi(t) > 0$ é uma função contínua em J , o espaço L_ψ das funções $f \in L(J, E)$ tais que $\frac{f}{\psi} \in L^\infty$, com a norma $\|f\|_{L_\psi} = \left\| \frac{f}{\psi} \right\|_\infty$.

$L_{\psi,0}$: subespaço de L_ψ das funções f tais que $\frac{f}{\psi} \in L_0^\infty$, com a norma induzida por L_ψ .

Uma classe importante de espaços de Banach é a classe H dos espaços $\beta = \beta(J, \mathbb{R})$, $\beta \subset L(J, \mathbb{R})$, que satisfazem às seguintes condições:

- (1) β é mais forte que $L(J, \mathbb{R})$.
- (2) Se $\psi \in \beta$ e φ é mensurável, com $|\varphi(t)| \leq |\psi(t)|$ em q.t.p. de J , então $\varphi \in \beta$ e $\|\varphi\|_\beta \leq \|\psi\|_\beta$.
- (3) Se $\chi_{[t_0, T]}$ indica a função característica do intervalo $[t_0, T]$, então $\chi_{[t_0, T]} \in \beta$, para todo $T \geq t_0$.
- (4) β é *lean* no infinito, isto é, se $\psi \in \beta$ então $\chi_{[t_0, T]} \psi \rightarrow \psi$ quando $T \rightarrow \infty$ em β .

Os espaços L^p ($1 \leq p < \infty$), L_0^∞ , $L_{\psi,0}$ de funções reais são todos elementos de H .

Por $B = \beta(J, E)$ representamos o espaço das funções $f \in L(J, E)$ tais que $\|f\| \in \beta(J, \mathbb{R})$, com a norma $\|f\|_B = \|\|f\|\|_\beta$.

Seja $\mathcal{D}$ um espaço de Banach mais forte que $L(J, E)$. Uma solução de uma equação $\dot{x} = F(t, x)$, $t \geq t_0$, $x \in Q \subset E$ é chamada $\mathcal{D}$ -solução, se for um elemento de $\mathcal{D}$.

Consideremos os sistemas

$$(H) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(NH) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em J e $b(t) \in L(J, E)$. Um par $(B, \mathcal{D})$ de espaços de Banach mais fortes que $L(J, E)$ é dito *admissível* relativamente a $A(t)$ ou $A(t)$ -*admissível*, se para todo $b(t) \in B$, existe pelo menos uma $\mathcal{D}$ -solução $x(t)$ de (NH).

A partir daqui, todos os espaços de Banach considerados serão supostos mais fortes que $L(J, E)$.

Dado um espaço de Banach $\mathcal{D}$, denotamos por $E_{t_0, \mathcal{D}}$ o subespaço vetorial de E formado pelos valores iniciais $y(t_0)$ das $\mathcal{D}$ -soluções de (H). $E_{\mathcal{D}}$ representará um subespaço de E , complementar de $E_{t_0, \mathcal{D}}$, isto é, $E = E_{t_0, \mathcal{D}} \oplus E_{\mathcal{D}}$. $P_{t_0, \mathcal{D}}$ será a projeção de E sobre $E_{t_0, \mathcal{D}}$ anulando $E_{\mathcal{D}}$. O teorema seguinte, devido a J. Massera e J. Schäffer, é de grande importância neste trabalho. Sua prova pode ser encontrada em P. Hartman [3, Lemma 6.3], pág. 438, ou em N. Onuchic, [7 - c, Teorema 1.3].

TEOREMA 0.1 [Massera-Schäffer]

Seja $(B, \mathcal{D})$ um par de espaços de Banach *admissível* para $A(t)$ e seja $\xi_0 \in E_{t_0, \mathcal{D}}$. Então, para cada $b(t) \in B$, a equação (NH) tem uma única $\mathcal{D}$ -solução $x(t)$ tal que $P_{t_0, \mathcal{D}} x(t_0) = \xi_0$. Além disso, existem constantes positivas C_0 e K independentes de $b(t)$ ou de ξ_0 , mas dependentes de $E_{\mathcal{D}}$

tais que

$$|x(t)|_{\mathcal{D}} \leq C_0 ||\xi_0|| + K|b(t)|_{\mathcal{B}}.$$

Observamos que o teorema acima, bem como os seguintes, são apresentados nas referências com $t_0 = 0$, mas podem ser formulados para um $t_0 \geq 0$ qualquer. A partir de agora, sempre que tivermos um par $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ admissível para $A(t)$, denotaremos por C_0 e K as constantes dadas no Teorema 0.1.

Se $R > 0$, seja S_R a bola fechada de raio R no espaço $\mathcal{D}$,

$$S_R = \{f \in \mathcal{D} : |f|_{\mathcal{D}} \leq R\}.$$

Enunciamos em seguida um resultado devido a C. Corduneanu, apresentado em [1, Th. I]. Sua prova pode ser encontrada também em [3, Th. 8.1, Cap. XII].

Consideremos o sistema

$$(P) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t, x).$$

TEOREMA 0.2 [Corduneanu]

Admitamos que as seguintes hipóteses estejam satisfeitas com relação à equação (P):

- (a) O par $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ é $A(t)$ -admissível.
- (b) $f(t, x(t)) \in \mathcal{B}$ desde que $x(t) \in S_R$.
- (c) Existe λ , $0 < \lambda < K^{-1}$ tal que

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))|_{\mathcal{B}} \leq \lambda |x(t) - y(t)|_{\mathcal{D}},$$

desde que $x(t), y(t) \in S_R$.

Seja $\xi_0 \in E_{t_0, D}$ e ponhamos $\eta = |f(t, 0)|_B$.

Então, se $||\xi_0||$ e η são suficientemente pequenos de modo que

$$C_0 ||\xi_0|| + K\eta \leq (1 - \lambda K)R,$$

existe uma única D -solução $x(t) \in S_R$ da equação (P), com $P_{t_0, D} x(t_0) = \xi_0$.

Intimamente relacionado com o teorema anterior, apresenta-se um resultado de P. Hartman e N. Onuchic, exposto em [4, Th. 1.1]. Indiquemos por $C(J, E)$ o conjunto das funções contínuas em J , com valores em E , e por $C_c(J, E)$ esse conjunto equipado com a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de J . Seja $S = S_R \cap C(J, E)$ e seja $\bar{S}$ a aderência de S em $C_c(J, E)$.

TEOREMA 0.3 [Hartman-Onuchic]

Suponhamos que as seguintes hipóteses estejam satisfeitas com relação à equação (P):

- (a) (B, D) é $A(t)$ -admissível.
- (b) Para cada $x(t) \in \bar{S}$, $f(t, x(t)) \in B$ e a aplicação $x(t) \in \bar{S} \rightarrow f(t, x(t)) \in B$ é contínua, onde em $\bar{S}$ consideramos a topologia induzida por $C_c(J, E)$.
- (c) Existe constante $r > 0$ tal que $|f(t, x(t))|_B \leq r$ para todo $x(t) \in \bar{S}$.
- (d) Existe $\lambda(t) \in L(J, \mathbb{R})$ tal que $||f(t, x(t))|| \leq \lambda(t)$, para todo $x(t) \in \bar{S}$.

Seja $\xi_0 \in E_{t_0, D}$ e suponhamos que $C_0 ||\xi_0|| + Kr \leq R$.
Então, existe pelo menos uma D -solução $x(t) \in S$ da equação
(P), com $P_{t_0, D} x(t_0) = \xi_0$.

Dizemos que uma matriz $A(t) = (a_{ij}(t)), 1 \leq i, j \leq n$,
pertence à classe $\Delta(n)$, se as seguintes condições estiverem
satisfeitas:

($\Delta 1$) $A(t)$ é contínua e $a_{ij}(t) = 0$ se $i < j, t \geq t_0$.

($\Delta 2$) $a_{ii}(t) = \alpha + \lambda(t), i = 1, 2, \dots, n$, onde

$\int_{t_0}^t R(\lambda(\tau)) d\tau$ é limitada em J , sendo que $R(z)$

denota a parte real do número complexo z .

($\Delta 3$) $a_{ij}(t)$ é limitado em J , se $i \neq j$.

($\Delta 4$) Para $m = 2, \dots, n$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_{t_0}^t a_{m,m-1}(t_{m-2}) dt_{m-2} \int_{t_0}^{t_{m-2}} a_{m-1,m-2}(t_{m-3}) dt_{m-3} \dots \int_{t_0}^{t_1} a_{21}(\tau) d\tau \right|}{t^{m-1}} > 0$$

Observamos que uma condição suficiente para ($\Delta 4$)
é que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |a_{j+1,j}(t)| > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

LEMA 0.4.

Se $A(t) \in \Delta(n)$, então para cada solução $y(t) \neq 0$
de (H), existe inteiro $l, 0 \leq l \leq n-1$, tal que:

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^{\frac{l}{e}} R(\alpha) t} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^{\frac{l}{e}} R(\alpha) t} < \infty.$$

Este Lema encontra-se demonstrado em [7 - b, Lemma 1].

LEMA 0.5.

Seja $A(t) = \text{diag}(A_1(t), \dots, A_N(t))$ onde $A_k(t) \in \Delta(n_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Indiquemos por α_k o elemento constante da diagonal de $A_k(t)$ e suponhamos que $R(\alpha_1) \geq \dots \geq R(\alpha_N)$. Então, para cada solução $y(t) \neq 0$ de (H), existem inteiros q, l , com $1 \leq q \leq N$, $0 \leq l \leq n_q - 1$, de modo que

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^{\frac{l}{e}} R(\alpha_q) t} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^{\frac{l}{e}} R(\alpha_q) t} < \infty$$

O Lema acima encontra-se em [7 - b, Lemma 2].

Sobre convergência envolvendo integrais, utilizaremos os dois resultados seguintes. O primeiro, Lema 0.6, é apresentado por Z. Szmydt em [10, Lemma 3]. O segundo, Lema 0.7, encontra-se em [9, Lemma 3.6]. É também caso particular de [11, Lema 2.3].

LEMA 0.6.

Se $h(t)$ é uma função positiva e se k é um inteiro, $k \geq 2$, então

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\int_{u_k}^{\infty} \dots \left(\int_{u_2}^{\infty} h(u_1) du_1 \right) \dots \right) du_k < \infty$$

se e somente se

$$\int_{t_0}^{\infty} u^{k-1} h(u) du < \infty.$$

LEMA 0.7.

Se $\delta > 0$ e se $\gamma(t)$ está no espaço real M_0 ,
então

$$e^{-\delta t} \int_{t_0}^t e^{\delta \tau} \gamma(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Consideremos dois sistemas de equações diferen-
ciais ordinárias,

$$(0.1) \quad \dot{y} = F(t, y)$$

$$(0.2) \quad \dot{x} = G(t, x)$$

onde $F, G : J \times E \rightarrow E$. Sejam $\mu \geq 0$ um inteiro e $\rho \geq 0$ um real.

DEFINIÇÃO

Dizemos que os sistemas (0.1) e (0.2) são relati-
vamente assintoticamente equivalentes com peso $t^\mu e^{\rho t}$, se a
toda solução $y(t)$ de (0.1) definida no futuro, com $y(t) \neq 0$
para todo t suficientemente grande, corresponder pelo menos
uma solução $x(t)$ de (0.2), definida no futuro, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0,$$

e reciprocamente.

CAPÍTULO I

EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA, COM PESO

Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$ contínua em $J=[t_0, \infty)$ e seja $f : J \times E \rightarrow E$ contínua. Consideremos os sistemas

$$(H) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(P) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t,x).$$

Sejam $\mu \geq 0$ um inteiro e $\rho \geq 0$ um real fixados. Nosso objetivo aqui é dar condições sobre a perturbação $f(t,x)$ que permitam resolver os seguintes problemas:

- (P₁) Dada uma solução $y(t) \neq 0$ de (H), determinar uma família de soluções $x(t)$ de (P) de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

Além disso, dar informações sobre o número de parâmetros de que depende essa família.

- (P₂) Dada uma solução $x(t)$ de (P) com $x(t) \neq 0$ para todo t suficientemente grande, determinar uma família de soluções $y(t)$ de (H) de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Além disso, dar informações sobre o número de parâmetros de que depende essa família.

LEMA 1.1.

Sejam $A(t) \in \Delta(n)$, $\ell \geq 0$ um inteiro e $B(t) = A(t) - \frac{\ell}{t}I$. Suponhamos que $R(\alpha) \leq 0$ e que $0 \leq \rho \leq -R(\alpha)$, sendo que, quando $\rho = -R(\alpha)$, exigimos $\ell \geq \mu + n$. Então, toda solução $y(t)$ de $\dot{y} = B(t)y$ satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} ||y(t)|| = 0.$$

PROVA:

Fazendo a mudança de variáveis $x = t^{\ell} y$ em $\dot{y} = B(t)y$, obtemos o sistema $\dot{x} = A(t)x$. Se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = A(t)x$, segue do Lema 0.4 que existe inteiro m , $0 \leq m \leq n-1$, tal que

$$||x(t)|| \leq C t^m e^{R(\alpha)t}, \quad C = \text{constante}.$$

Logo,

$$||y(t)|| \leq C t^{m-\ell} e^{R(\alpha)t}$$

que implica

$$t^{\mu} e^{\rho t} ||y(t)|| \leq C t^{m+\mu-\ell} e^{[\rho+R(\alpha)]t}.$$

Portanto, se $R(\alpha) < 0$ e se $\rho < -R(\alpha)$, o lema está provado.

Se $R(\alpha) = 0$ (portanto $\rho = 0$) ou se $\rho = -R(\alpha) > 0$, temos

$$t^{\mu} e^{\rho t} ||y(t)|| \leq C t^{m+\mu-\ell}.$$

É só observar agora que

$$m + \mu - \ell \leq n - 1 + \mu - \ell \leq -1.$$

O lema está provado.

OBSERVAÇÃO:

Daremos a seguir o significado do número p , que a parecerá no texto:

Seja $B(t) = \text{diag}(B_1(t), \dots, B_N(t))$ onde $B_k(t) \in \Delta(n_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Indiquemos por γ_k o elemento constante da diagonal de $B_k(t)$ e suponhamos $R(\gamma_1) \geq \dots \geq R(\gamma_{q-1}) > R(\gamma_q) = \dots = R(\gamma_{q+r-1}) = 0 > R(\gamma_{q+r}) \geq \dots \geq R(\gamma_N)$. Sejam $s + 1 = \max\{n_k : k = 1, \dots, N\}$ e ℓ um inteiro satisfazendo $0 \leq \ell \leq s$. Para $k = q, q+1, \dots, N$, seja

$$s_k = \min\{\ell - \mu, n_k\}, \text{ se } \ell > \mu$$

$$s_k = 0, \text{ se } \ell \leq \mu.$$

Para $k = q+r, q+r+1, \dots, N$, seja

$$s'_k = s_k, \text{ se } \rho = -R(\gamma_k)$$

$$s'_k = n_k, \text{ se } 0 \leq \rho < -R(\gamma_k)$$

$$s'_k = 0, \text{ se } -R(\gamma_k) < \rho.$$

Nestas condições, definimos:

$$p = s'_{q+r} + \dots + s'_N, \text{ se } \rho > 0$$

$$p = s_q + \dots + s_{q+r-1} + s'_{q+r} + \dots + s'_N, \text{ se } \rho = 0.$$

Nesta definição, pode ocorrer naturalmente $q = 1$ ou $q+r-1=N$.

No segundo caso, a definição de p fica assim:

$$p = 0, \text{ se } \rho > 0$$

$$p = s_q + \dots + s_{q+r-1}, \text{ se } \rho = 0.$$

Estaremos supondo a partir de agora, $t_0 \geq 1$. Seja $\psi(t) = t^{-\mu} e^{-\rho t}$, $t \geq t_0$, e consideremos o espaço de Banach $\mathcal{D} = L_{\psi,0}(J,E)$.

LEMA 1.2.

Sejam $B(t)$, s e ℓ nas condições da definição de p . Seja $E_{t_0, \mathcal{D}}$ o espaço dos valores iniciais $y(t_0)$ das $\mathcal{D}$ -soluções $y(t)$ do sistema $\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y$. Então, $\dim E_{t_0, \mathcal{D}} \geq p$.

PROVA:

Para $k = q, q+1, \dots, N$, consideremos os sistemas

$$(1.1)_k \quad \dot{y}_k = [B_k(t) - \frac{\ell}{t}I]y_k.$$

Fixemos k entre $q+r$ e N e suponhamos que

$$0 < \rho < -R(\gamma_k).$$

Pelo Lema 1.1, toda solução $y_k(t)$ de $(1.1)_k$ satisfaz

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \|y_k(t)\| = 0,$$

ou seja, temos n_k soluções em $L_{\psi,0}(J,E)$. Suponhamos agora $\rho = -R(\gamma_k) > 0$. Se $\ell \leq \mu$, então $s'_k = 0$. Se $\mu < \ell$, fazemos $y_1^k = \dots = y_{n_k - s_k}^k = 0$ e obtemos um sistema nas s_k variáveis $y_{n_k - s_k + 1}^k, \dots, y_{n_k}^k$. Aqui,

$$y_k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_{n_k}^k \end{pmatrix}. \text{ Comos } s_k \leq \ell - \mu, \text{ temos } \ell \geq s_k + \mu.$$

Segue do Lema 1.1 que toda solução $y_k(t)$ do novo sistema satisfaz (1.2). Temos portanto s_k soluções de (1.1) em $L_{\psi,0}(J,E)$.

Suponhamos $\rho = 0$. Para $k = q+r, \dots, N$, temos $\rho < -R(\gamma_k)$, e portanto, toda solução $y_k(t)$ de (1.1), para $k = q+r, \dots, N$, satisfaz (1.2), e portanto está em $L_{\psi,0}(J,E)$. Para $k = q, \dots, q+r-1$, repetimos o que foi feito acima para $\rho = -R(\gamma_k)$, e obtemos s_k soluções de (1.1) em $L_{\psi,0}(J,E)$. Uma análise na definição do número p , mostra que o lema está provado.

Seja $B(t) = \text{diag}(B_1(t), \dots, B_N(t))$ onde $B_k(t) \in \Delta(n_k)$, $k = 1, \dots, N$. Sejam $s+1 = \max\{n_k : k = 1, 2, \dots, N\}$ e ℓ um inteiro, $0 \leq \ell \leq s$. Seja $h(t)$ uma função escalar contínua, positiva, satisfazendo

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty.$$

Nestas condições, é conhecido que existe uma função $\gamma(t)$ contínua, $\gamma(t) \geq 1$, $\gamma(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, tal que

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) \gamma(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty.$$

Sejam $M > 0$ uma constante e $\psi(t)$ função definida por

$$\psi(t) = Mh(t)\gamma(t) \quad (t \geq t_0).$$

(O significado de M aparecerá nas aplicações). Consideremos os espaços de Banach

$$B = L_{\psi,0}(J,E),$$

$$\mathcal{D} = L_{\psi,0}(J,E)$$

onde $\psi(t) = t^{-\mu} e^{-\rho t}$, $t \geq t_0$. Nestas condições, provaremos agora um resultado fundamental neste trabalho.

LEMA 1.3.

Suponhamos que $B(t)$ satisfaça às condições dadas, com a restrição que $(B_k(t))_{ii} = \gamma_k$, $i = 1, \dots, n_k$; $k=1, \dots, N$. Então, o par $(B, \mathcal{D})$ de espaços de Banach é $[B(t) - \frac{\ell}{t}I]$ -admissível.

PROVA:

Consideremos o sistema

$$(1.3) \quad \dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y + b(t)$$

onde $b(t) \in \mathcal{B}$. Devemos provar que tal sistema admite uma solução em $\mathcal{D}$, isto é, uma solução $y(t)$ que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \|y(t)\| = 0.$$

O sistema (1.3) pode ser decomposto em N sistemas

$$(1.3)_k \quad \dot{y}_k = [B_k(t) - \frac{\ell}{t}I]y_k + b_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

onde

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}.$$

Faremos a demonstração em três partes:

$$(1) \quad -R(\gamma_k) < \rho$$

$$(2) \quad \rho = -R(\gamma_k)$$

$$(3) \quad \rho < -R(\gamma_k).$$

Consideremos o caso (1).

Existe uma solução $y_k(t)$ de $(1.3)_k$ na forma

$$y_k(t) = \begin{pmatrix} y_1^k(t) \\ y_2^k(t) \\ \vdots \\ y_{n_k}^k(t) \end{pmatrix}$$

onde

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \sigma_2^i(t) + \dots + \sigma_i^i(t) \quad (i=1,2,\dots,n_k)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_m^i(t) = & \int_{\infty}^t c_1(t_1) dt_1 \int_{\infty}^{t_1} c_2(t_2) dt_2 \dots \\ & \dots \int_{\infty}^{t_{m-1}} b_{i-m+1}^k(t_m) \cdot e^{\int_{t_m}^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} dt_m \end{aligned}$$

para $m = 1, 2, \dots, i$. Na expressão acima, $c_j(t)$ são elementos fora da diagonal principal de $A_k(t)$, sendo portanto limitados, e

$$b_k(t) = \begin{pmatrix} b_1^k(t) \\ b_2^k(t) \\ \vdots \\ b_{n_k}^k(t) \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, N).$$

O procedimento a seguir mostrará, em particular, que a expressão que define $\sigma_m^i(t)$ tem sentido.

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^t \left[\gamma_k - \frac{\ell}{\tau} \right] d\tau &= \gamma_k (t - t_m) - \ell \ln \left(\frac{t}{t_m} \right) = \\ &= \gamma_k (t - t_m) + \ln \left(\frac{t_m}{t} \right) \ell. \end{aligned}$$

Assim, existe constante C tal que

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^\infty |b_{i-m+1}^k(t_m)| e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t} \right)^\ell dt_m. \end{aligned}$$

Como $b(t) \in L_{\psi,0}(J,E)$, segue que $\frac{b}{\psi}$ é essencialmente limitada em J , isto é, existe constante L tal que

$$||b(t)|| \leq L \psi(t) \quad (\text{q.t.p.}) \quad \text{em } J.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t} \right)^\ell dt_m \end{aligned}$$

donde segue

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m. \end{aligned}$$

Multiplicando os dois membros por $t^\mu e^{\rho t}$,

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^1(t)| \leq C L t^{\mu-l} e^{[\rho+R(\gamma_k)]t} \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m.$$

Como $\rho + R(\gamma_k) > 0$, existe $T \geq t_0$ tal que a função $t^{\mu-l} e^{[\rho+R(\gamma_k)]t}$ é crescente para $t \geq T$. Portanto,

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^1(t)| \leq C L \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{\rho t_m} t_m^\ell dt_m \quad (t \geq T).$$

Pelo Lema 0.6, a integral acima converge se e somente se

$$\int_t^\infty \psi(\tau) \tau^{\mu+m-1} e^{\rho \tau} d\tau < \infty,$$

e este é o caso, pois $\mu+m-1 \leq \mu+n_k-1 \leq \mu+s$, e por hipótese,

$$\int_{t_0}^\infty \psi(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty.$$

Isso mostra que $t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^1(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, $i=1,2,\dots,n_k$, $m = 1, 2, \dots, i$, e o caso (1) fica assim provado.

Passemos ao caso (2) que será dividido em dois:

$$(a) \quad \mu \geq l$$

$$(b) \quad \mu < l$$

Consideremos o caso (a): $\mu \geq l$. Tomamos a solução $y_k(t)$ de $(1.3)_k$ que tem componentes:

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_m^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n_k)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_m^i(t) &= \int_{\infty}^t C_1(t_1) dt_1 \int_{\infty}^{t_1} C_2(t_2) dt_2 \dots \\ &\dots \int_{\infty}^{t_{m-1}} b_{i-m+1}^k(t_m) e^{\int_{t_m}^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} dt_m, \end{aligned}$$

$m = 1, 2, \dots, i$. Como $C_j(t)$ são limitados e $b(t) \in L_{\psi,0}(J,E)$, temos que existem constantes C, L tais que

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t}\right)^{\ell} dt_m. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^{\ell} dt_m. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por $t^{\mu} e^{\rho t}$, observando que $\rho = -R(\gamma_k)$, temos

$$\begin{aligned} t^{\mu} e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L t^{\mu-\ell} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{\rho t_m} t_m^{\ell} dt_m. \end{aligned}$$

Sendo $\mu \geq \ell$, a função $t^{\mu-\ell}$ é não decrescente. Portanto,

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \leq C L \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{\rho t_m} t_m^\mu dt_m.$$

Como a integral acima é convergente, concluímos que

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

e o caso (a) está, pois, provado.

Passemos ao caso (b): $\mu < \ell$. Este caso será consi
derado em duas partes:

$$(I) \quad n_k \leq \ell - \mu$$

$$(II) \quad n_k > \ell - \mu$$

Para resolver a parte (I), consideremos separadamen
te as possibilidades:

$$(i) \quad n_k \leq \mu + 1$$

$$(ii) \quad n_k > \mu + 1$$

Provemos o caso (i): $n_k \leq \mu + 1$. Consideremos a
solução $y_k(t)$ de $(1.3)_k$ que tem componentes

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_i^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n_k)$$

onde

$$\sigma_m^i(t) = \int_\infty^t C_1(t_1) dt_1 \int_\infty^{t_1} C_2(t_2) dt_2 \dots$$

$$\dots \int_\infty^{t_{m-1}} b_{i-m+1}^k(t_m) e^{\int_{t_m}^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} dt_m,$$

$m = 1, 2, \dots, i$. Existem constantes C, L tais que

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t}\right)^\ell dt_m.$$

Logo,

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m.$$

Multiplicando os dois membros por $t^\ell e^{\rho t}$, lembrando que

$$\rho = -R(\gamma_k),$$

$$t^\ell e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \leq C L \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) e^{\rho t_m} t_m^\ell dt_m.$$

Examinemos a convergência da integral acima. Pelo Lema 0.6, ela será convergente se

$$(1.4) \quad \int_t^\infty \tau^{\ell+m-1} e^{\rho \tau} \psi(\tau) d\tau < \infty.$$

Como $\ell+m-1 \leq \ell+n_k-1 \leq \ell+\mu+1-1 \leq s+\mu$, e como por hipótese

$$\int_{t_0}^\infty t^{\mu+s} e^{\rho t} \psi(t) dt < \infty,$$

segue que (1.4) de fato ocorre. Concluimos assim que

$$t^\ell e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Como $\mu < \ell$, concluimos a prova do caso (i).

Passemos ao caso (ii): $n_k > \mu + 1$. Determinaremos uma solução $y_k(t)$ de $(1.3)_k$, descrevendo suas componentes. Para $i = 1, 2, \dots, \mu + 1$, consideramos as componentes

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_i^i(t)$$

onde

$$\sigma_m^i(t) = \int_{\infty}^t C_1(t_1) dt_1 \int_{\infty}^{t_1} C_2(t_2) dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{\infty}^{t_{m-1}} b_{i-m+1}^k(t_m) e^{\int_{t_m}^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} dt_m,$$

$m = 1, 2, \dots, i$. Existem constantes C, L tais que

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t}\right)^{\ell} dt_m.$$

Logo,

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^{\ell} dt_m.$$

Multiplicando por $t^{\ell} e^{\rho t}$,

$$t^{\ell} e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \leq C L \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{\rho t_m} t_m^{\ell} dt_m.$$

A integral acima será convergente se

$$\int_t^\infty \psi(\tau) e^{\rho\tau} \tau^{\ell+m-1} d\tau < \infty,$$

e isto de fato ocorre pois $\ell+m-1 \leq \ell+\mu+1-1 \leq s+\mu$. Isso mostra que

$$t^\ell e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

e como $\mu < \ell$, concluímos que

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

para $i = 1, 2, \dots, \mu + 1$.

As demais componentes da solução $y_k(t)$ de (1.3)_k serão determinadas por indução. Seja $v = (\mu+1) + 1$. A coordenada $y_v^k(t)$ de $y_k(t)$ deve satisfazer à equação

$$(1.5) \quad \dot{y}_v^k = [\gamma_k - \frac{\ell}{t}] y_v^k + \Sigma_1(t) + b_v^k(t)$$

onde

$$\Sigma_1(t) = a_{v,1}^k(t) y_1^k(t) + \dots + a_{v,v-1}^k(t) y_{v-1}^k(t).$$

Na expressão acima, $y_1^k(t), \dots, y_{v-1}^k(t)$ já estão calculadas e $a_{v,j}^k(t)$, $j = 1, \dots, v-1$, são elementos da linha v da matriz $A_k(t)$, sendo portanto funções limitadas. Temos assim que

$$(1.6) \quad t^\ell e^{\rho t} |\Sigma_1(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Seja a solução da equação (1.5) dada por

$$y_v^k(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} [\Sigma_1(u) + b_v(u)] du.$$

Temos que

$$|y_v^k(t)| \leq \int_{t_0}^t e^{R(\gamma_k)(t-u)} \left(\frac{u}{t}\right)^\ell |\Sigma_1(u) + b_v^k(u)| du.$$

Dai, segue

$$|y_v^k(t)| \leq t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_{t_0}^t u^{\ell} e^{-R(\gamma_k)u} (|\Sigma_1(u)| + |b_v^k(u)|) du.$$

Multiplicando os dois membros por $t^{\ell-1} e^{\rho t}$ e lembrando que $b(t) \in L_{\psi,0}(J,E)$, temos que existe constante L tal que

$$\begin{aligned} t^{\ell-1} e^{\rho t} |y_v^k(t)| &\leq \frac{1}{t} \int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_1(u)| du + \\ &+ \frac{L}{t} \int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} \psi(u) du. \end{aligned}$$

Da hipótese

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} \psi(t) dt < \infty,$$

segue que

$$\int_{t_0}^{\infty} u^{\ell} e^{\rho u} \psi(u) du < \infty$$

pois $\ell \leq s \leq \mu+s$. Portanto,

$$(1.7) \quad \frac{L}{t} \int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} \psi(u) du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Vamos mostrar agora que

$$(1.8) \quad \frac{1}{t} \int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_1(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Se o fator integral for limitado, o resultado é óbvio. Caso contrário, segue da Regra de L'Hospital que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_1(u)| du}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\ell} e^{\rho t} |\Sigma_1(t)|$$

e portanto (1.8) segue de (1.6).

De (1.7) e (1.8), concluimos que

$$t^{\ell-1} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Consideremos agora a hipótese de indução: para $i = (\mu+1)+1, \dots$
 $\dots, \mu+1+d < n_k$, temos componentes $y_i^k(t)$ satisfazendo

$$(1.9) \quad t^{\ell-d} e^{\rho t} |y_i^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

O caso $d = 1$ foi feito acima. Seja agora $v = \mu+1+d+1$. Vamos encontrar uma componente $y_v^k(t)$ de $y_k(t)$ que satisfaz

$$t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

A componente $y_v^k(t)$ é solução da equação

$$(1.10) \quad \dot{y}_v^k = [\gamma_k - \frac{\ell}{t}] y_v^k + \Sigma_{d+1}(t) + b_v^k(t),$$

onde

$$\Sigma_{d+1}(t) = a_{v,1}^k(t) y_1^k(t) + \dots + a_{v,v-1}^k(t) y_{v-1}^k(t).$$

Como os elementos $a_{v,j}^k(t)$, $j = 1, \dots, v-1$ são limitados e como (1.9) é satisfeita para $i = (\mu+1)+1, \dots, \mu+1+d = v-1$, temos que

$$(1.11) \quad t^{\ell-d} e^{\rho t} |\Sigma_{d+1}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Consideremos a solução da equação (1.10) da forma

$$y_v^k(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} [\Sigma_{d+1}(u) + b_v^k(u)] du.$$

Temos que

$$|y_v^k(t)| \leq \int_{t_0}^t e^{R(\gamma_k)(t-u)} \left(\frac{u}{t}\right)^\ell |\Sigma_{d+1}(u) + b_v^k(u)| du.$$

Dai, segue

$$|y_v^k(t)| \leq t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_{t_0}^t e^{-R(\gamma_k)u} u^\ell [|\Sigma_{d+1}(u)| + |b_v^k(u)|] du.$$

Multiplicando os dois membros por $t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t}$ e lembrando que $b(t) \in L_{\psi,0}(J,E)$, temos que existe constante L tal que

$$\begin{aligned} t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t} |y_v^k(t)| &\leq \\ &\leq t^{-(d+1)} \left[\int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} |\Sigma_{d+1}(u)| du + L \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du \right]. \end{aligned}$$

Da hipótese

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} \psi(t) dt < \infty$$

e do fato de $\ell \leq s \leq \mu+s$, segue que

$$\int_{t_0}^{\infty} u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du < \infty$$

e portanto

$$(1.12) \quad t^{-(d+1)} L \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Provemos que

$$(1.13) \quad t^{-(d+1)} \int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_{d+1}(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Se o fator integral for limitado, é imediato. Caso contrário, segue da Regra de L'Hospital que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_{d+1}(u)| du}{t^{d+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\ell} e^{\rho t} |\Sigma_{d+1}(t)|}{(d+1)t^d},$$

e este limite é zero por (1.11). Assim, (1.13) é verdadeiro.

De (1.12) e (1.13), temos que

$$t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Provamos assim que para todo i , $i = (\mu+1)+1, \dots, (\mu+1)+d$, com $\mu+1+d \leq n_k$, temos componentes $y_i^k(t)$ da solução $y_k(t)$ de (1.3)_k satisfazendo

$$t^{\ell-d} e^{\rho t} |y_i^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Agora, $\mu+1+d \leq n_k$ implica

$$d \leq n_k - (\mu+1) \leq \ell - \mu - (\mu+1)$$

donde tiramos

$$\ell - d \geq 2\mu + 1 > \mu.$$

Portanto,

$$t^{\mu} e^{\rho t} |y_i^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

para $i = 1, 2, \dots, n_k$, e o caso (ii) fica provado.

Provemos agora a parte (II): $n_k > \ell - \mu$. Para $i = 1, 2, \dots, n_k - (\ell - \mu)$, consideramos as componentes $y_i^k(t)$ da

solução $y_k(t)$ de (1.3)_k, da forma

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_i^i(t)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_m^i(t) &= \int_{\infty}^t C_1(t_1) dt_1 \int_{\infty}^{t_1} C_2(t_2) dt_2 \dots \\ &\dots \int_{\infty}^{t_{m-1}} b_{i-m+1}^k(t_m) e^{\int_{t_m}^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} dt_m, \end{aligned}$$

para $m = 1, 2, \dots, i$. Existem constantes C, L tais que

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t}\right)^{\ell} dt_m. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^{\ell} dt_m. \end{aligned}$$

Como $\rho = -R(\gamma_k)$,

$$\begin{aligned} t^{\ell} e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| &\leq C L \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{\rho t_m} t_m^{\ell} dt_m. \end{aligned}$$

Usando o Lema 0.6, vemos que a integral do segundo membro é convergente, pois

$$\ell+m-1 \leq \ell + n_k - (\ell-\mu)-1 = n_k - 1 + \mu \leq s+\mu.$$

Portanto,

$$t^\ell e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Sendo $\mu < \ell$, concluímos

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

As demais componentes de $y_k(t)$ serão definidas por indução.

Seja $v = n_k - (\ell-\mu) + 1$. Determinaremos a componente $y_v^k(t)$ e mostraremos que esta satisfaz

$$t^{\ell-1} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Tal componente é solução da equação

$$(1.14) \quad \dot{y}_v^k = [\gamma_k - \frac{\ell}{t}] y_v^k + \Sigma_1(t) + b_v^k(t)$$

onde

$$\Sigma_1(t) = a_{v,1}^k(t) y_1^k(t) + \dots + a_{v,v-1}^k(t) y_{v-1}^k(t).$$

Como $a_{v,j}^k(t)$ são limitados, segue que

$$(1.15) \quad t^\ell e^{\rho t} |\Sigma_1(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Consideremos a solução de (1.14) dada por

$$y_v^k(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} [\Sigma_1(u) + b_v^k(u)] du.$$

Temos que

$$|y_v^k(t)| \leq \int_{t_0}^t e^{R(\gamma_k)(t-u)} \left(\frac{u}{t}\right)^\ell |\Sigma_1(u) + b_v^k(u)| du$$

e daí,

$$|y_v^k(t)| \leq t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_{t_0}^t u^\ell e^{-R(\gamma_k)u} (|\Sigma_1(u)| + |b_v^k(u)|) du.$$

Multiplicando por $t^{\ell-1} e^{\rho t}$, e lembrando que $b(t) \in L_{\psi,0}(J,E)$, temos que existe constante L tal que

$$\begin{aligned} t^{\ell-1} e^{\rho t} |y_v^k(t)| &\leq \frac{1}{t} \left[\int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} |\Sigma_1(u)| du + \right. \\ &\quad \left. + L \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du \right]. \end{aligned}$$

Como $\ell \leq s \leq \mu+s$, segue da hipótese que

$$\int_{t_0}^{\infty} u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du < \infty.$$

Portanto,

$$(1.16) \quad \frac{L}{t} \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Provemos que

$$(1.17) \quad \frac{1}{t} \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} |\Sigma_1(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Se o fator integral for limitado, é imediato. Caso contrário, segue da Regra de L'Hospital que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_1(u)| du}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\ell} e^{\rho t} |\Sigma_1(t)|$$

e portanto, (1.17) segue de (1.15). Agora, (1.16) e (1.17) implicam

$$t^{\ell-1} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Consideremos a hipótese de indução: para $i = n_k - (\ell - \mu) + 1, \dots, \dots, n_k - (\ell - \mu) + d$, com $n_k - (\ell - \mu) + d < n_k$, temos componentes $y_i^k(t)$ satisfazendo

$$t^{\ell-d} e^{\rho t} |y_i^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Seja agora $v = n_k - (\ell - \mu) + d + 1$. Vamos determinar uma componente $y_v^k(t)$ de modo que

$$t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

A componente $y_v^k(t)$ é solução da equação

$$(1.18) \quad \dot{y}_v^k = \left[\gamma_k - \frac{\ell}{t} \right] y_v^k + \Sigma_{d+1}(t) + b_v^k(t)$$

onde

$$\Sigma_{d+1}(t) = a_{v,1}^k(t) y_1^k(t) + \dots + a_{v,v-1}^k(t) y_{v-1}^k(t).$$

Como $a_{v,j}^k(t)$ são limitados, segue da hipótese de indução que

$$(1.19) \quad t^{\ell-d} e^{\rho t} |\Sigma_{d+1}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Consideremos a solução de (1.18) dada por

$$y_v^k(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} [\Sigma_{d+1}(u) + b_v^k(u)] du.$$

Temos que

$$|y_v^k(t)| \leq \int_{t_0}^t e^{R(\gamma_k)(t-u)} \left(\frac{u}{t}\right)^\ell |\Sigma_{d+1}(u) + b_v^k(u)| du$$

e daí,

$$|y_v^k(t)| \leq t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_{t_0}^t e^{-R(\gamma_k)u} u^\ell (|\Sigma_{d+1}(u)| + |b_v^k(u)|) du.$$

Multiplicando por $t^{-\ell(d+1)} e^{\rho t}$ e usando o fato que

$b(t) \in L_{\psi,0}(J,E)$, temos que existe constante L tal que

$$\begin{aligned} t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t} |y_v^k(t)| &\leq t^{-(d+1)} \left[\int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} |\Sigma_{d+1}(u)| du + \right. \\ &\quad \left. + L \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du \right]. \end{aligned}$$

Como $\ell \leq s \leq \mu+s$, segue que

$$\int_{t_0}^{\infty} u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du < \infty,$$

e portanto,

$$(1.20) \quad \frac{L}{t^{d+1}} \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} \psi(u) du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Provemos que

$$(1.21) \quad \frac{1}{t^{d+1}} \int_{t_0}^t u^\ell e^{\rho u} |\Sigma_{d+1}(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Se o fator integral for limitado, é imediato. Caso contrário, segue da Regra de L'Hospital que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t u^{\ell} e^{\rho u} |\Sigma_{d+1}(u)| du}{t^{d+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\ell} e^{\rho t} |\Sigma_{d+1}(t)|}{(d+1)t^d},$$

e portanto, (1.21) segue de (1.19). Agora, (1.20) e (1.21) implicam

$$t^{\ell-(d+1)} e^{\rho t} |y_v^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Concluimos assim que, para $i = n_k - (\ell - \mu) + 1, \dots, n_k - (\ell - \mu) + d \leq n_k$, temos componentes $y_i^k(t)$ satisfazendo

$$t^{\ell-d} e^{\rho t} |y_i^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Agora, $n_k - (\ell - \mu) + d \leq n_k$ implica $\mu \leq \ell - d$. Portanto,

$$t^{\mu} e^{\rho t} |y_i^k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

para $i = 1, 2, \dots, n_k$, e o caso (II) fica provado.

Passemos agora ao caso (3): $\rho < -R(\gamma_k)$. Consideremos a solução $y_k(t)$ de (1.3)_k que tem componentes

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_i^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n_k)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_m^i(t) &= \int_{t_0}^t C_1(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} C_2(t_2) dt_2 \dots \\ &\dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} b_{i-m+1}^k(t_m) e^{\int_{t_m}^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} dt_m, \end{aligned}$$

$m = 1, 2, \dots, i$. Existen constantes C, L tais que

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} \left(\frac{t_m}{t}\right)^\ell dt_m,$$

donde segue

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m.$$

Como $t_j \leq t$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, segue

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_0}^t \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m.$$

Logo,

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} (t-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m,$$

donde segue

$$|\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{-\ell} e^{R(\gamma_k)t} t^{m-1} \int_{t_0}^t \psi(t_m) e^{-R(\gamma_k)t_m} t_m^\ell dt_m.$$

Multiplicando os dois membros por $t^\mu e^{\rho t}$,

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{\mu-\ell+m-1} e^{[\rho+R(\gamma_k)]t} \int_{t_0}^t \psi(t_m) t_m^\ell e^{-R(\gamma_k)t_m} dt_m.$$

Seja $\delta > 0$ tal que $\rho + R(\gamma_k) + \delta < 0$. Então,

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \leq C L t^{\mu-\ell+m-1} e^{[\rho+R(\gamma_k)+\delta]t} e^{-\delta t} \int_{t_0}^t \psi(t_m) t_m^\ell e^{-R(\gamma_k)t_m} dt_m.$$

Como $\rho + R(\gamma_k) + \delta < 0$, existe $T \geq t_0$ tal que a função

$t^{\mu-\ell+m-1} e^{[\rho+R(\gamma_k)+\delta]t}$ é decrescente para $t \geq T$. Logo,

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \leq C L e^{-\delta t} \int_{t_0}^t e^{\delta t_m} t_m^{\mu+m-1} e^{\rho t_m} \psi(t_m) dt_m \quad (t \geq T).$$

Como $\mu+m-1 \leq \mu+n_k-1 \leq \mu+s$, segue que

$$\int_{t_0}^{\infty} t_m^{\mu+m-1} e^{\rho t_m} \psi(t_m) dt_m < \infty,$$

e portanto, a função $t^{\mu+m-1} e^{\rho t} \psi(t)$ está no espaço de Banach M_0 . Pelo Lema 0.7, concluímos que

$$t^\mu e^{\rho t} |\sigma_m^i(t)| \rightarrow 0 \quad \text{quanto } t \rightarrow \infty,$$

e a prova de (3) está completa. O Lema 1.3 está, pois, completamente provado.

O lema seguinte estabelece relações entre soluções dos sistemas:

$$(H) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(P) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t, x),$$

que conduzirão ao estudo dos problemas (P_1) e (P_2) .

LEMA 1.4.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Seja $f(t, x)$ contínua, satisfazendo

$$||f(t, x)|| \leq h(t) ||x|| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E)$$

onde $h(t)$ é uma função contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} h(t) dt < \infty.$$

Seja $y(t) \neq 0$ solução de (H) satisfazendo

$$(1.22) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^l e^{\frac{R(\alpha_q)}{t}}} < \infty$$

onde l é um inteiro, $0 \leq l \leq s$. Então, existe uma família de soluções $x(t)$ de (P) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{t^l e^{\frac{R(\alpha_q)}{t}}} = 0.$$

OBSERVAÇÃO:

O significado do número p aparecerá naturalmente no corpo da prova. Quando $p = 0$, a frase família de soluções dependendo de pelo menos p parâmetros significa pelo menos uma solução.

PROVA:

Temos que os elementos diagonais de $A_k(t)$ são da forma

$$a_{ii}^k(t) = \alpha_k + \lambda_k(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n_k)$$

onde $\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau$ é limitado em J . Observamos inicialmente que podemos supor, sem perda de generalidade,

$$a_{ii}^k(t) = \alpha_k \quad (i = 1, \dots, n_k) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Para ver isso, consideremos a mudança de variáveis

$$y_j^k = e^{\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} v_j^k, \quad x_j^k = e^{\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} u_j^k \quad (j=1, \dots, n_k)$$

respectivamente nos sistemas (H) e (P). Temos

$$v_j^k = e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} y_j^k \quad (j = 1, 2, \dots, n_k)$$

donde

$$\dot{v}_j^k = e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} \dot{y}_j^k - e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} y_j^k \lambda_k(t).$$

Dai,

$$\dot{v}_j^k = e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} [a_{j1}^k(t) y_1^k + \dots + a_{jj}^k(t) y_j^k - \lambda_k(t) y_j^k],$$

$$\dot{v}_j^k = e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} [a_{j1}^k(t)y_1^k + \dots + a_{j,j-1}^k(t)y_{j-1}^k + \alpha_k y_j^k],$$

e portanto

$$\dot{v}_j^k = a_{j1}^k(t)v_1^k + \dots + a_{j,j-1}^k(t)v_{j-1}^k + \alpha_k v_j^k$$

ou seja,

$$\dot{v}_j^k = (a_{j1}^k(t) \dots a_{j,j-1}^k(t) \alpha_k \ 0 \dots 0) \begin{pmatrix} v_1^k \\ \vdots \\ v_j^k \\ \vdots \\ v_{n_k}^k \end{pmatrix}$$

De maneira inteiramente análoga, obtemos

$$\dot{u}_j^k = (a_{j1}^k(t) \dots a_{j,j-1}^k(t) \alpha_k \ 0 \dots 0) \begin{pmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_j^k \\ \vdots \\ u_{n_k}^k \end{pmatrix} + F_j^k(t, u)$$

onde

$$F_j^k(t, u) = e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\tau) d\tau} f_j^k(t, x) \quad (x \text{ dado acima}).$$

Vemos assim que nas novas variáveis, os sistemas obtidos satisfazem a condição requerida acima. Verificaremos agora que a função $F(t, u)$ satisfaz hipóteses semelhantes às de f . Para cada k ,

temos

$$|F_j^k(t, u)| = e^{-\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau} |f_j^k(t, x)|.$$

Usando a hipótese sobre f e a limitação de $\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau$, temos

que existe constante M tal que

$$|F_j^k(t, u)| \leq Mh(t) ||x||.$$

Consideremos em E a norma da soma dos valores absolutos das coordenadas, temos

$$|F_j^k(t, u)| \leq Mh(t) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{n_k} |x_j^k|,$$

e usando o valor de x_j^k ,

$$|F_j^k(t, u)| \leq Mh(t) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{n_k} e^{\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau} |u_j^k|.$$

Existe constante $\bar{M}$ tal que

$$|F_j^k(t, u)| \leq \bar{M}h(t) ||u||.$$

Portanto, existe constante L tal que

$$||F(t, u)|| \leq Lh(t) ||u||,$$

e F satisfaz uma hipótese semelhante à de f , pois, se $H(t) = Lh(t)$, temos que

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} H(t) dt < \infty.$$

Finalmente, se nessas novas condições, u e v satisfazem a tese, então x e y correspondentes pela mudança de variáveis também satisfazem. De fato,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{|x_j^k(t) - y_j^k(t)|}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} e^{\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau} \frac{|u_j^k(t) - v_j^k(t)|}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}$$

$\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau$

e este limite é zero devido a limitação do fator $e^{\int_{t_0}^t R(\lambda_k(\tau)) d\tau}$.

Suporemos então $a_{ii}^k(t) = \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, N$;

$i = 1, 2, \dots, n_k$. Seja $y(t)$ solução de (H) satisfazendo (1.22). Consideremos a mudança de variáveis

$$z = \frac{x - y(t)}{t^{\ell} e^{\beta t}}$$

onde $\beta = R(\alpha_q)$ e x satisfaz (P). Temos então que

$$\dot{z} = \frac{t^{\ell} e^{\beta t} [\dot{x} - \dot{y}(t)] - [x - y(t)] (mt^{\ell-1} e^{\beta t} + t^{\ell} \beta e^{\beta t})}{t^{2\ell} e^{2\beta t}},$$

$$\dot{z} = \frac{t^{\ell} e^{\beta t} [A(t)x + f(t, x) - A(t)y(t)] - [x - y(t)] e^{\beta t} (\ell t^{\ell-1} + t^{\ell} \beta)}{t^{2\ell} e^{2\beta t}},$$

$$\dot{z} = \frac{t^{\ell} e^{\beta t} [A(t)(t^{\ell} e^{\beta t} z + y(t)) + f(t, x) - A(t)y(t)] - t^{\ell} e^{2\beta t} z (\ell t^{\ell-1} + t^{\ell} \beta)}{t^{2\ell} e^{2\beta t}},$$

$$\dot{z} = \frac{t^{2\ell} e^{2\beta t} A(t)z + t^{\ell} e^{\beta t} f(t, t^{\ell} e^{\beta t} z + y(t)) - t^{\ell} e^{2\beta t} z (\ell t^{\ell-1} + t^{\ell} \beta)}{t^{2\ell} e^{2\beta t}},$$

$$\dot{z} = A(t)z - \left(\frac{\ell}{t} + \beta\right)z + f(t, t^{\ell}e^{\beta t}z + y(t))t^{-\ell}e^{-\beta t},$$

$$\dot{z} = [A(t) - \beta I - \frac{\ell}{t}I]z + f(t, t^{\ell}e^{\beta t}z + y(t))t^{-\ell}e^{-\beta t}.$$

Seja $B(t) = A(t) - \beta I = \text{diag}(B_1(t), \dots, B_N(t))$, onde

$$B_k(t) = A_k(t) - \beta I \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

e seja

$$g(t, z) = f(t, t^{\ell}e^{\beta t}z + y(t))t^{-\ell}e^{-\beta t}.$$

Obtivemos assim o sistema

$$(1.23) \quad \dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + g(t, z).$$

Para provar o teorema, mostraremos que existe uma família de soluções $z(t)$ de (1.23) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} ||z(t)|| = 0.$$

De (1.22), tiramos que existe constante C tal que

$$||y(t)|| \leq C t^{\ell} e^{\beta t} \quad (t \geq t_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||g(t, z)|| &= ||f(t, t^{\ell}e^{\beta t}z + y(t))t^{-\ell}e^{-\beta t}|| \leq \\ &\leq t^{-\ell}e^{-\beta t} h(t) ||t^{\ell}e^{\beta t}z + y(t)|| \leq \\ &\leq t^{-\ell}e^{-\beta t} h(t) [t^{\ell}e^{\beta t} ||z|| + ||y(t)||] \leq \\ &\leq h(t) [||z|| + C]. \end{aligned}$$

Fixemos $R > 0$. Então, para $\|z\| \leq R$, temos

$$\|g(t, z)\| \leq (R+C)h(t).$$

Usaremos agora o Teorema 0.3. Para tanto, seja $\gamma(t)$ contínua, satisfazendo

$$\gamma(t) \geq 1 \quad (t \geq t_0)$$

$$\gamma(t) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t)h(t)t^{\mu+s}e^{\rho t}dt < \infty.$$

Sejam $\psi(t) = t^{-\mu}e^{-\rho t}$, $\varphi(t) = (R+C)h(t)\gamma(t)$, $t \geq t_0$ e consideremos os espaços de Banach

$$B = L_{\psi,0}(J,E)$$

$$D = L_{\varphi,0}(J,E).$$

Seja o sistema

$$(1.24) \quad \dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y$$

e seja $E_{t_0,D}$ o subespaço dos valores iniciais $y(t_0)$ das D -soluções $y(t)$ desse sistema. Fixemos um subespaço E_D , complementar de $E_{t_0,D}$. Notamos o par (B,D) é $[B(t) - \frac{\ell}{t}I]$ -admissível. Se C_0 e K são as constantes dadas no Teorema 0.1, então existe $T_0 \geq t_0$ tal que

$$(1.25) \quad \frac{1}{\gamma(t)} \leq \frac{R}{2K} \quad (t \geq T_0).$$

Seja a função

$$\tilde{g}(t, z) = \chi_{[T_0, \infty)}(t)g(t, z).$$

Aplicaremos o Teorema 0.3 para o sistema

$$(1.26) \quad \dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + \tilde{g}(t, z).$$

Observamos que os elementos da diagonal principal $B_k(t)$ são dados por

$$\gamma_k = \alpha_k - \beta \quad (k = 1, \dots, N)$$

e satisfazem

$$\begin{aligned} R(\gamma_1) &\geq \dots \geq R(\gamma_{q-1}) > R(\gamma_q) = \dots = \\ &= R(\gamma_{q+r-1}) = 0 > R(\gamma_{q+r}) \geq \dots \geq R(\gamma_N). \end{aligned}$$

Estamos nas condições da observação feita no início deste capítulo com relação ao significado do número p .

Verifiquemos as hipóteses do teorema.

(a) O par $(B, \mathcal{D})$ de espaços de Banach é $[B(t) - \frac{\ell}{t}I]$ -admissível.

Isto é o que provamos no Lema 1.3.

(b) Se $S = \{z \in \mathcal{D} : \|z\|_{\mathcal{D}} \leq R\} \cap C(J, E)$ e se $\bar{S}$ é a aderência de S em $C_c(J, E)$, então a aplicação

$$z(t) \in \bar{S} \rightarrow \tilde{g}(t, z(t)) \in B$$

é contínua.

Mostraremos primeiro que, se $z(t) \in \bar{S}$ então $\tilde{g}(t, z(t)) \in B$. Temos que

$$\|\tilde{g}(t, z(t))\| \leq h(t)[\|z(t)\| + C] \quad (t \geq t_0).$$

Como $z(t) \in \bar{S}$, existe seqüência $z_n(t) \in S$ tal que $z_n \rightarrow z$ em $C_c(J, E)$. Logo, para cada $\tilde{t} \in J$, temos

$$z_n(\tilde{t}) \rightarrow z(\tilde{t}) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Mas, para todo n ,

$$||z_n(\tilde{t})|| \leq R(\tilde{t})^{-\mu} e^{-\rho \tilde{t}} \leq R$$

pois $\tilde{t} \geq t_0 \geq 1$. Portanto $||z(\tilde{t})|| \leq R$, donde concluimos que se $z(t) \in \bar{S}$ então

$$||z(t)|| \leq R \quad (t \geq t_0).$$

Assim, se $z(t) \in \bar{S}$ então

$$||\tilde{g}(t, z(t))|| \leq h(t)[R+C].$$

Para mostrarmos que $\tilde{g}(t, z(t)) \in B$, a desigualdade acima nos diz que é suficiente mostrarmos que $[R+C]h(t) \in L_{\psi,0}(J, \mathbb{R})$, e isso é óbvio pois

$$\frac{(R+C)h(t)}{\psi(t)} = \frac{(R+C)h(t)}{(R+C)h(t)\gamma(t)} = \frac{1}{\gamma(t)}$$

$$\text{e } \frac{1}{\gamma(t)} \in L_0^\infty(J, \mathbb{R}).$$

Mostremos agora a continuidade da aplicação

$$z(t) \in \bar{S} \rightarrow \tilde{g}(t, z(t)) \in B.$$

Sejam $z_0(t) \in \bar{S}$, $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar $\delta > 0$ e um compacto $[t_0, \tilde{T}]$ de modo que, se $z(t) \in \bar{S}$ e $z(t) \in V(z_0(t); [t_0, \tilde{T}]; \delta)$, então

$$||\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))||_B < \varepsilon$$

onde

$$V(z_0(t); [t_0, \tilde{T}]; \delta) = \{z(t) \in C(J, E) : ||z(t) - z_0(t)|| < \delta, \quad t \in [t_0, \tilde{T}]\}.$$

Para todo $T \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
 |\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))|_{\beta} &= |\chi_{[t_0, T)}(t)[\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))] + \\
 &\quad + \chi_{[T, \infty)}(t)[\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]|_{\beta} \leq \\
 &\leq |\chi_{[t_0, T)}(t)[\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]|_{\beta} + |\chi_{[T, \infty)}(t)[\tilde{g}(t, z(t)) - \\
 &\quad - \tilde{g}(t, z_0(t))]|_{\beta} \leq |\chi_{[t_0, T)}(t)[\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]|_{\beta} + \\
 &\quad + |\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z(t))|_{\beta} + |\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z_0(t))|_{\beta}.
 \end{aligned}$$

Mas, $||\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z(t))|| = \chi_{[T, \infty)}(t)||\tilde{g}(t, z(t))|| \leq$
 $\leq \chi_{[T, \infty)}(t)h(t)[||z(t)|| + C] \leq \chi_{[T, \infty)}(t)h(t)[R + C]$, e da mes
 ma forma, temos que $||\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z_0(t))|| \leq \chi_{[T, \infty)}(t)h(t)[R+C]$.
 Como $\chi_{[T, \infty)}(t)h(t)(R + C)$ está em $\beta = L_{\psi, 0}(J, R) \in H$, segue que
 $\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z(t))$ e $\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z_0(t))$ estão em β , e além
 disso,

$$|\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z(t))|_{\beta} \leq (R + C)|\chi_{[T, \infty)}(t)h(t)|_{\beta},$$

$$|\chi_{[T, \infty)}(t)\tilde{g}(t, z_0(t))|_{\beta} \leq (R + C)|\chi_{[T, \infty)}(t)h(t)|_{\beta}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (1.27) \quad &|\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))|_{\beta} \leq \\
 &\leq |\chi_{[t_0, T)}(t)[\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]|_{\beta} + \\
 &\quad + 2(R + C)|\chi_{[T, \infty)}(t)h(t)|_{\beta}.
 \end{aligned}$$

Como β é *lean* no infinito, existe $\tilde{T} > T_0$ tal que

$$(1.28) \quad 2(R + C) | \chi_{[\tilde{T}, \infty)}(t) h(t) |_{\beta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $B[0; R] = \{z \in E : ||z|| \leq R\}$, temos que $\tilde{g}(t, z)$ é uniforme mente contínua em $[T_0, \tilde{T}] \times B[0; R]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe portanto $\delta > 0$ tal que se $z_1, z_2 \in B[0; R]$, com $||z_1 - z_2|| < \delta$ e se $t \in [T_0, \tilde{T}]$,

$$||\tilde{g}(t, z_1) - \tilde{g}(t, z_2)|| < \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_0, \tilde{T}]}(t)|_{\beta}}.$$

Logo, se $z(t) \in V(z_0; [t_0, \tilde{T}]; \delta) \cap \bar{S}$, temos

$$\begin{aligned} & ||\chi_{[t_0, \tilde{T}]}(t) [\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]| || \leq \\ & \leq ||\chi_{[t_0, T_0)}(t) [\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]| || + \\ & + ||\chi_{[T_0, \tilde{T}]}(t) [\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]| || = \\ & = ||\chi_{[T_0, \tilde{T}]}(t) [\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))]| || = \\ & = \chi_{[T_0, \tilde{T}]}(t) ||\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))|| < \\ & < \chi_{[T_0, \tilde{T}]}(t) \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_0, \tilde{T}]}(t)|_{\beta}} \leq \\ & \leq \chi_{[t_0, \tilde{T}]}(t) \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_0, \tilde{T}]}(t)|_{\beta}}, \end{aligned}$$

donde tiramos

$$\begin{aligned}
 (1.29) \quad & |x_{[t_0, \tilde{T}]}(t) [\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))] |_B \leq \\
 & \leq |x_{[t_0, \tilde{T}]}(t)|_B \frac{\varepsilon}{2|x_{[t_0, \tilde{T}]}(t)|_B} = \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo (1.28) e (1.29) em (1.27), com $T = \tilde{T}$, concluímos que, se $z(t) \in V(z_0; [t_0, \tilde{T}]; \delta) \cap \bar{S}$, então

$$|\tilde{g}(t, z(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))|_B < \varepsilon,$$

e assim, a aplicação $z(t) \in \bar{S} \rightarrow \tilde{g}(t, z(t)) \in B$ é contínua.

(c) Existe constante $r > 0$ tal que $|\tilde{g}(t, z(t))|_B \leq r$ para todo $z(t) \in \bar{S}$.

Se $z(t) \in \bar{S}$, então

$$\begin{aligned}
 |\tilde{g}(t, z(t))|_B &= \sup_{t \geq t_0} \frac{||\tilde{g}(t, z(t))||}{\psi(t)} = \\
 &= \sup_{t \geq T_0} \frac{||\tilde{g}(t, z(t))||}{\psi(t)} \leq \\
 &\leq \sup_{t \geq T_0} \frac{h(t)[||z(t)|| + C]}{\psi(t)} \leq \\
 &\leq \sup_{t \geq T_0} \frac{h(t)(R+C)}{(R+C)h(t)\gamma(t)} = \\
 &= \sup_{t \geq T_0} \frac{1}{\gamma(t)} \leq \\
 &\leq \frac{R}{2K}.
 \end{aligned}$$

Temos assim, $r = R/2K$.

(d) $\exists \lambda(t) \in L(J, R)$ tal que $||\tilde{g}(t, z(t))|| \leq \lambda(t)$,
para todo $z(t) \in \bar{S}$ e $t \geq t_0$.

Se $z(t) \in \bar{S}$, então

$$||\tilde{g}(t, z(t))|| \leq h(t)[||z(t)|| + C] \leq (R + C)h(t).$$

Tomamos então $\lambda(t) = (R + C)h(t)$.

Assim, as hipóteses do Teorema 0.3 estão satisfeitas.

Temos que

$$Kr = \frac{R}{2}.$$

Se tomarmos $\xi_0 \in E_{t_0, \vartheta}$ tal que

$$||\xi_0|| < \frac{R}{2C_0},$$

então

$$C_0 ||\xi_0|| + Kr < R,$$

e portanto existe pelo menos uma solução $z(t)$ de (1.26) tal que $z(t) \in S$ e $P_{t_0, \vartheta} z(t_0) = \xi_0$. Pelo Lema 1.2, temos que $\dim E_{t_0, \vartheta} \geq p$. Logo, podemos tomar ξ_0 dependendo de pelo menos p parâmetros. Como g e $\tilde{g}$ coincidem em $[T_0, \infty) \times E$, concluímos o seguinte: existe uma família de soluções $z(t)$ de (1.23) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} ||z(t)|| = 0,$$

e o lema fica provado.

O teorema seguinte nos dá uma resposta ao problema (P_1) .

TEOREMA 1.5.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5, e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$.
Seja $f(t, x)$ contínua satisfazendo

$$||f(t, x)|| \leq h(t) ||x|| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E)$$

onde $h(t)$ é contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty.$$

Seja $y(t) \neq 0$ solução de (H). Então, existe uma família de soluções $x(t)$ de (P) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

PROVA:

Dada a solução $y(t)$ de (H), existem, pelo Lema 0.5, inteiros q, ℓ , com $1 \leq q \leq N, 0 \leq \ell \leq n_q - 1$, tais que

$$(1.30) \quad 0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} < \infty.$$

Pelo Lema 1.4, existe uma família de soluções $x(t)$ de (P) dependendo de pelo menos p parâmetros, tal que

$$(1.31) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} = 0.$$

De (1.30), segue que existe constante $C > 0$, tal

que

$$\frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \geq C \quad (t \geq t_0),$$

ou seja

$$\frac{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}{||y(t)||} \leq \frac{1}{C} \quad (t \geq t_0).$$

Assim,

$$t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}.$$

$$\frac{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}{||y(t)||} \leq \frac{1}{C} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \quad (t \geq t_0),$$

e a tese segue de (1.31). O teorema está provado.

A partir de agora, estaremos interessados em obter uma resposta ao problema (P_2) .

LEMA 1.6.

Suponhamos satisfeitas as hipóteses do teorema anterior, com $f(t, x)$ linear em x . Seja $U(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))$ matriz fundamental de (H) com $U(t_0) = I$. Seja $V(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$ matriz de soluções de (P) onde

$$x_i(t) = y_i(t) + o(||y_i(t)||) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Então, $V(t)$ é matriz fundamental de (P) .

O lema acima encontra-se demonstrado em [7 - c, co

rolário 3.1]. Uma consequência imediata do Lema 1.6 é o

LEMA 1.7.

Suponhamos satisfeitas as hipóteses do Teorema 1.5, com $f(t, x)$ linear em x . Seja $U(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))$ matriz fundamental de (H) com $U(t_0) = I$. Seja $V(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$ matriz de soluções de (P) onde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x_i(t) - y_i(t)||}{||y_i(t)||} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Então, $V(t)$ é matriz fundamental de (P).

LEMA 1.8.

Suponhamos satisfeitas as hipóteses do Teorema 1.5 com $f(t, x)$ linear em x . Seja $x(t)$ solução de (P) com $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$. Então, existe solução $y(t) \neq 0$ de (H) satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0$$

PROVA:

Seja $U(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))$ matriz fundamental de (H) com $U(t_0) = I$. Usando o Teorema 1.5, construímos $V(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$, matriz de soluções de (P), onde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x_i(t) - y_i(t)||}{||y_i(t)||} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pelo lema anterior, $V(t)$ é matriz fundamental de (P). Portanto, dada a solução $x(t)$ de (P) com $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$, e

existem constantes $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ tais que

$$x(t) = \zeta_1 x_1(t) + \dots + \zeta_n x_n(t).$$

Seja $Z = \{i : \zeta_i \neq 0\}$. Temos então que $Z \neq \emptyset$ e

$x(t) = \sum_{i \in Z} \zeta_i x_i(t)$. Seja $y(t) = \sum_{i \in Z} \zeta_i y_i(t)$. Da prova do Corolário 3.2 de [7 - c], extraímos

$$(1.32) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||y_i(t)||}{||y(t)||} < \infty \quad (i \in Z).$$

Tomando $M = \max \{|\zeta_i| : i \in Z\}$, temos

$$\begin{aligned} t^{\rho} e^{\mu t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} &= t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||\sum_{i \in Z} \zeta_i (x_i(t) - y_i(t))||}{||y(t)||} \leq \\ &\leq t^{\mu} e^{\rho t} \frac{\sum |\zeta_i| ||x_i(t) - y_i(t)||}{||y(t)||} \leq \\ &\leq M t^{\mu} e^{\rho t} \frac{\sum ||x_i(t) - y_i(t)||}{||y(t)||} = \\ &= M t^{\mu} e^{\rho t} \frac{\sum ||x_i(t) - y_i(t)||}{||y_i(t)||} \cdot \frac{||y_i(t)||}{||y(t)||}. \end{aligned}$$

Da hipótese e de (1.32) segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0,$$

e o lema está provado.

Estamos agora em condições de dar uma resposta ao problema (P_2) .

TEOREMA 1.9.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$.
Seja $f(t, x)$ contínua satisfazendo

$$||f(t, x)|| \leq h(t) ||x|| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E)$$

onde $h(t)$ é contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty.$$

Seja $x(t)$ solução de (P) com $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$. Então, existe uma família de soluções $y(t)$ de (H) dependendo de pelo menos $\bar{p}$ parâmetros, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

PROVA:

Denotando a transposta conjugada de $x(t)$ por $x^*(t)$, consideremos o sistema linear em w ,

$$\dot{w} = A(t)w + \frac{x^*(t)w}{x^*(t)x(t)} f(t, x(t)).$$

Claramente, $x(t)$ é solução desse sistema. Seja $D(t)$ a matriz

$$D(t) = \frac{1}{x^*(t)x(t)} \begin{pmatrix} f_1(t, x(t))x^*(t) \\ \vdots \\ f_n(t, x(t))x^*(t) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\frac{x^*(t)w}{x^*(t)x(t)} f(t, x(t)) = D(t)w$$

e o sistema inicial fica

$$(1.33) \quad \dot{w} = A(t)w + D(t)w.$$

Notamos agora que existe constante $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} ||D(t)|| &= \\ &= \frac{1}{||x(t)||^2} \left\| \begin{pmatrix} f_1(t, x(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(t, x(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(t, x(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^*(t) \\ x^*(t) \\ \vdots \\ x^*(t) \end{pmatrix} \right\| \leq \\ &\leq \frac{L}{||x(t)||^2} ||f(t, x(t))|| ||x(t)|| \leq \\ &\leq \frac{L}{||x(t)||^2} h(t) ||x(t)|| ||x(t)|| = Lh(t). \end{aligned}$$

Pondo $g(t, w) = D(t)w$, $H(t) = Lh(t)$, vemos que

$$||g(t, w)|| \leq H(t) ||w||$$

onde

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty.$$

Considerando os sistemas (H) e (1.33), temos pelo Lema (1.8) que existe solução $z(t) \neq 0$ de (H) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Tomando a solução $z(t)$ de (H), aplicamos o Teorema 1.5 [com perturbação nula] e obtemos uma família de soluções $y(t)$ de (H) dependendo de pelo menos $\tilde{p}$ parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||z(t) - y(t)||}{||z(t)||} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} &\leq \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} + \\ &+ \frac{||z(t) - y(t)||}{||z(t)||} \cdot \frac{||z(t)||}{||x(t)||} \end{aligned}$$

e como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||z(t)||}{||x(t)||} = 1,$$

segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0,$$

e o teorema está provado.

Observamos que, se $x(t)$, $y(t)$ são funções contínuas, com $x(t) \neq 0$, $y(t) \neq 0$ para $t \geq T$, então

$$(1.34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0$$

é equivalente a

$$(1.35) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

De fato, suponhamos que (1.34) ocorre. Temos que

$$\frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} \cdot \frac{||y(t)||}{||x(t)||}.$$

Como

$$\frac{||x(t)||}{||y(t)||} \leq \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} + 1,$$

temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||x(t)||}{||y(t)||} = 1$$

e portanto, existe constante M tal que

$$\frac{||y(t)||}{||x(t)||} \leq M \quad (t \geq T).$$

Assim,

$$\frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} \leq M \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} \quad (t \geq T)$$

que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

A outra implicação é simétrica.

A seguir, analisaremos a equivalência assintótica relativa entre dois sistemas perturbados de um sistema linear. Consideremos os sistemas

$$(H) \quad \dot{y} = A(t)y$$

$$(1.36) \quad \dot{x} = A(t)x + f_1(t, x)$$

$$(1.37) \quad \dot{z} = A(t)z + f_2(t, z)$$

TEOREMA 1.10.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5, e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Sejam $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ contínuas, satisfazendo

$$||f_i(t, x)|| \leq h_i(t) ||x|| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E) \quad (i = 1, 2)$$

onde cada $h_i(t)$ é contínua, positiva com

$$\int_{t_0}^{\infty} h_i(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty \quad (i = 1, 2).$$

Então, valem os seguintes resultados:

(I) Se $x(t)$ é solução de (1.36) com $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$, então existe uma família de soluções $z(t)$ de (1.37) dependendo de pelo menos p parâmetros tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

(II) Se $z(t)$ é solução de (1.37) com $z(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$, então existe uma família de soluções $x(t)$ de (1.36) dependendo de pelo menos p' parâmetros tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||z(t)||} = 0.$$

PROVA:

Provaremos (I). A prova de (II) é completamente simétrica. Seja $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$ solução de (1.36). Pelo Teorema 1.9, existe pelo menos uma solução $y(t)$ de (H) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Tomada a solução $y(t)$ de (H), segue do Teorema 1.5 que existe uma família de soluções $z(t)$ de (1.37) dependendo de pelo menos p parâmetros tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||y(t) - z(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} &\leq \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} + \\ &+ \frac{||y(t) - z(t)||}{||y(t)||} \cdot \frac{||y(t)||}{||x(t)||} \end{aligned}$$

e como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{||x(t)||} = 1,$$

segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} = 0,$$

e o teorema fica provado.

Como consequência imediata do Teorema (1.10), temos o seguinte

COROLÁRIO 1.11.

Nas condições do Teorema 1.10, os sistemas (1.36) e (1.37) são relativamente assintoticamente equivalentes, com peso $t^{\mu} e^{\rho t}$.

CAPÍTULO II

EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA, COM PESO, E CERTAS PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DE UM CONJUNTO DE VALORES INICIAIS

Efetuiremos inicialmente um estudo dos problemas (P_1) e (P_2) , utilizando hipóteses mais restritivas sobre a perturbação $f(t, x)$. Teremos a solução desses problemas, com informação adicional referente a unicidade de solução, que permitirá uma análise de propriedades topológicas dos valores iniciais das famílias de soluções de (H) e de (P).

LEMA 2.1.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5, e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Seja $f(t, x)$ contínua satisfazendo

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq h(t) ||x - y|| \quad (t \geq t_0) (x, y \in E),$$

$$f(t, 0) = 0 \quad (t \geq t_0)$$

onde $h(t)$ é contínua, positiva, satisfazendo

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} h(t) dt < \infty.$$

Seja $y(t) \neq 0$ solução de (H) satisfazendo

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{||y(t)||}{t^l e^{\frac{R(\alpha_q)}{q} t}} < \infty$$

onde l é um inteiro, $0 \leq l \leq s$. Então, existe uma família de soluções $x(t)$ de (P) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} = 0.$$

OBSERVAÇÃO:

Este lema é essencialmente o Lema 1.4. Como as hipóteses neste, implicam nas hipóteses daquele, o Lema 2.1 é obviamente verdadeiro. Mas, faremos abaixo a demonstração deste, usando, ao invés do Teorema 0.3, o Teorema 0.2, que evidenciará o aspecto citado sobre *unicidade*, que será objeto central de exploração neste capítulo.

PROVA:

Conforme vimos na demonstração do Lema 1.4, podemos supor sem perda de generalidade, que

$$a_{ii}^k(t) = \alpha_k \quad (t \geq t_0) \quad (i = 1, \dots, n_k) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Considerando a mudança de variáveis

$$z = \frac{x - y(t)}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}},$$

temos o sistema

$$(2.2) \quad \dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + g(t, z)$$

onde, pondo $\beta = R(\alpha_q)$, segue

$$B(t) = A(t) - \beta I = \text{diag}(B_1(t), \dots, B_N(t))$$

com

$$B_k(t) = A_k(t) - \beta I \quad (i = 1, \dots, N)$$

e

$$g(t, z) = f(t, t^{\ell} e^{\beta t} z + y(t)) t^{-\ell} e^{-\beta t}.$$

Mostraremos então que existe uma família de soluções $z(t)$ de (2.2) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} ||z(t)|| = 0.$$

De (2.1), temos que existe constante C tal que

$$||y(t)|| \leq C t^{\ell} e^{\beta t} \quad (t \geq t_0).$$

Então, observando que

$$||f(t, x)|| \leq h(t) ||x|| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E),$$

temos que

$$\begin{aligned} ||g(t, z)|| &\leq t^{-\ell} e^{-\beta t} h(t) ||t^{\ell} e^{\beta t} z + y(t)|| \leq \\ (2.3) \quad &\leq h(t) ||z|| + t^{-\ell} e^{-\beta t} h(t) ||y(t)|| \leq \\ &\leq h(t) [||z|| + C]. \end{aligned}$$

Além disso, para $z_1, z_2 \in E$,

$$\begin{aligned} &||g(t, z_1) - g(t, z_2)|| = \\ (2.4) \quad &= ||[f(t, t^{\ell} e^{\beta t} z_1 + y(t)) - f(t, t^{\ell} e^{\beta t} z_2 + y(t))] t^{-\ell} e^{-\beta t}|| \leq \\ &\leq t^{-\ell} e^{-\beta t} h(t) ||t^{\ell} e^{\beta t} (z_1 - z_2)|| = h(t) ||z_1 - z_2||. \end{aligned}$$

Fixemos $R > 0$. Usaremos agora o Teorema 0.2. Para tanto, seja $\gamma(t)$ contínua, positiva, satisfazendo

$$\gamma(t) \geq 1 \quad (t \geq t_0),$$

$$\gamma(t) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} \gamma(t) h(t) dt < \infty.$$

Sejam $\psi(t) = t^{-\mu} e^{-\rho t}$, $\psi(t) = (R+C)h(t)\gamma(t)$, $t \geq t_0$, e consideremos os espaços de Banach

$$B = L_{\psi,0}(J,E),$$

$$D = L_{\psi,0}(J,E).$$

Seja o sistema

$$(2.5) \quad \dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y.$$

Fixemos um subespaço E_D de E , complementar do subespaço E_{t_0} , D dos valores iniciais $y(t_0)$ das D -soluções $y(t)$ de (2.5), e sejam C_0 , K as constantes dadas no Teorema 0.1. Existe $T_0 \geq t_0$ tal que

$$(2.6) \quad \frac{1}{\gamma(t)} \leq \frac{R}{4K} \quad (t \geq T_0).$$

Seja

$$\tilde{g}(t,z) = \chi_{[T_0,\infty)}(t) \cdot g(t,z) \quad (t \geq t_0) \quad (z \in E).$$

Aplicaremos o Teorema 0.2 para o sistema

$$(2.7) \quad \dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + \tilde{g}(t,z).$$

Verifiquemos as condições do teorema:

(a) O par (B,D) é $[B(t) - \frac{\ell}{t}I]$ -admissível.

Isso foi provado no Lema 1.3.

(b) Se $z(t) \in S_R = \{z \in \mathcal{D} : |z|_{\mathcal{D}} \leq R\}$, então $\tilde{g}(t, z(t)) \in \mathcal{B}$.

Temos, para todo $t \geq t_0$,

$$||z(t)|| \leq t^\mu e^{\rho t} ||z(t)|| \leq |z|_{\mathcal{D}}.$$

Logo, se $z(t) \in S_R$, usando (2.3),

$$\frac{||\tilde{g}(t, z(t))||}{(R+C)h(t)\gamma(t)} \leq \frac{h(t)(||z(t)|| + C)}{(R+C)h(t)\gamma(t)} \leq \frac{1}{\gamma(t)}$$

($t \geq t_0$)

e das hipóteses sobre $\gamma(t)$, concluimos que $\tilde{g}(t, z(t)) \in \mathcal{B}$.

(c) $\exists \lambda$, $0 < \lambda < K^{-1}$ tal que

$$|\tilde{g}(t, z_1(t)) - \tilde{g}(t, z_2(t))|_{\mathcal{B}} \leq \lambda |z_1(t) - z_2(t)|_{\mathcal{D}},$$

desde que $z_1(t), z_2(t) \in S_R$.

Sejam então $z_1(t), z_2(t) \in S_R$. Temos portanto

$$\begin{aligned} & ||\tilde{g}(t, z_1(t)) - \tilde{g}(t, z_2(t))|| \leq \\ & \leq \chi_{[T_0, \infty)}(t) h(t) ||z_1(t) - z_2(t)|| \leq \\ & \leq \chi_{[T_0, \infty)}(t) h(t) |z_1(t) - z_2(t)|_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Como $\chi_{[T_0, \infty)}(t) h(t) \in \beta = L_{\psi, \rho}(J, R)$, temos que

$$|\tilde{g}(t, z_1(t)) - \tilde{g}(t, z_2(t))|_B \leq |x_{[T_0, \infty)}(t)h(t)|_B |z_1(t) - z_2(t)|_D.$$

Pondo $\lambda = |x_{[T_0, \infty)}(t)h(t)|_B$, temos, usando (2.6), que

$$\begin{aligned} \lambda &= \sup_{t \geq t_0} \frac{x_{[T_0, \infty)}(t)h(t)}{(R+C)h(t)\gamma(t)} = \sup_{t \geq T_0} \frac{1}{(R+C)\gamma(t)} \leq \frac{R}{4K(R+C)} < \\ &< \frac{1}{4K} < \frac{1}{K} \end{aligned}$$

e assim a condição (c) está verificada.

Seja $\xi_0 \in E_{t_0, D}$ tal que $||\xi_0|| \leq R/2C_0$ e coloquemos $\eta = |\tilde{g}(t, 0)|_B$. Como

$$||\tilde{g}(t, 0)|| \leq x_{[T_0, \infty)}(t)h(t)C,$$

segue que,

$$\eta = |\tilde{g}(t, 0)|_B \leq \lambda C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} C_0 ||\xi_0|| + K\eta &\leq C_0 \frac{R}{2C_0} + K\lambda C \leq \\ &\leq \frac{R}{2} + \frac{KCR}{4K(R+C)} < \frac{R}{2} + \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}. \end{aligned}$$

Usamos acima o fato que $\lambda \leq \frac{R}{4K(R+C)}$. Como $\lambda < \frac{1}{4K}$, temos ainda

$$\frac{3R}{4} < (1 - \lambda K)R$$

e portanto, nas condições acima,

$$C_0 ||\xi_0|| + K\eta < (1 - \lambda K)R.$$

Pelo Teorema 0.2, existe uma única $\mathcal{D}$ -solução $\tilde{z}(t) \in S_R$ da equação (2.7) satisfazendo $P_{t_0, \mathcal{D}} \tilde{z}(t_0) = \xi_0$. Como $\dim E_{t_0, \mathcal{D}} \geq p$, podemos tomar ξ_0 dependendo de pelo menos p parâmetros. Como g e $\tilde{g}$ coincidem para $t \geq T_0$, concluímos que existe uma família de soluções $z(t)$ de (2.2) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} ||z(t)|| = 0,$$

e o teorema está provado.

O teorema anterior permite, através de teoremas análogos aos Teoremas 1.5 e 1.9, obtermos uma resposta positiva aos problemas (P_1) e (P_2) . Registramos esse fato nos Teoremas 2.2 e 2.3 abaixo. Lembrando que as novas hipóteses sobre a perturbação $f(t, x)$ implicam nas hipóteses consideradas naqueles teoremas, as demonstrações dos Teoremas 2.2 e 2.3 são exatamente as mesmas das daqueles, motivo pelo qual não expomos aqui. A única modificação, é que na demonstração do Teorema 2.2, usa-se agora o Lema 2.1, ao invés do Lema 1.4.

TEOREMA 2.2.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Seja $f(t, x)$ contínua, satisfazendo

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq h(t) ||x - y|| \quad (t \geq t_0) (x, y \in E)$$

$$f(t, 0) = 0 \quad (t \geq t_0)$$

onde $h(t)$ é contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} h(t) dt < \infty.$$

Seja $y(t) \neq 0$ solução de (H). Então, existe uma família de soluções $x(t)$ de (P) dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

TEOREMA 2.3.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Seja $f(t, x)$ contínua satisfazendo

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq h(t) ||x - y|| \quad (t \geq t_0) (x, y \in E)$$

$$f(t, 0) = 0 \quad (t \geq t_0)$$

onde $h(t)$ é contínua, positiva com

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} h(t) dt < \infty..$$

Seja $x(t) \neq 0$ solução de (P). Então, existe uma família de soluções $y(t)$ de (H) dependendo de pelo menos $\tilde{p}$ parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Observamos agora que, nas condições do Lema 2.1, temos uma informação adicional, que passaremos a explorar: uni-

cidade de solução. De fato, seja $\xi_0 \in E_{t_0, \mathcal{D}}$ com

$||\xi_0|| \leq R/2C_0$. Nas condições do Lema 2.1, existe uma única solução $\tilde{z}(t) \in S_R$ de (2.7) tal que $P_{t_0, \mathcal{D}} \tilde{z}(t_0) = \xi_0$. Este fato sugere a notação $\tilde{z}(t; \xi_0)$ para a solução de (2.7) satisfazendo $P_{t_0, \mathcal{D}} \tilde{z}(t_0; \xi_0) = \xi_0$

Fixemos σ , $0 < \sigma < R/2C_0$ e seja

$$V_\sigma = \{\xi \in E_{t_0, \mathcal{D}} : ||\xi|| < \sigma\}.$$

Consideremos a família de soluções de (2.7),

$$F = \{\tilde{z}(t; \xi) \in S_R : \xi \in V_\sigma\}$$

munido com a topologia induzida por $\mathcal{D}$. Temos que a correspondência

$$T : \xi \in V_\sigma \rightarrow \tilde{z}(t; \xi) \in F$$

é biunívoca e sobre. Estabelecemos a seguir a continuidade dessa correspondência.

LEMA 2.4.

Nas condições do Lema 2.1, a aplicação

$$T : \xi \in V_\sigma \rightarrow \tilde{z}(t; \xi) \in F$$

é contínua.

PROVA:

Sejam $\xi_0 \in V_\sigma$ e $\varepsilon > 0$. Consideremos a constante positiva R_1 , tal que:

$$(2.8) \quad C_0 \sigma + K\eta = (1 - \lambda K)R_1.$$

Não há perda de generalidade supor $\varepsilon \leq R - R_1$. Como $S_{R_1} \subset S_R$, as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema 0.2 estão satisfeitas, com R_1 no papel de R , e uma vez que $C_0 ||\xi_0|| + K\delta < (1 - \lambda K)R_1$, o Teorema 0.2 garante que $z_0(t) = \tilde{z}(t; \xi_0) \in S_{R_1}$.

Tomemos $\delta = \delta(\varepsilon, \xi_0) > 0$ de modo que

$$||\xi - \xi_0|| < \delta \implies \xi \in V_\sigma; \quad C_0 \delta \leq (1 - \lambda K)\varepsilon.$$

A mudança de variáveis

$$y = z - z_0(t)$$

transforma a equação (2.7) em

$$(2.9) \quad \dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y + G(t, y)$$

onde $G(t, y) = \tilde{g}(t, y + z_0(t)) - \tilde{g}(t, z_0(t))$. Verificaremos que as hipóteses do Teorema 0.2 estão satisfeitas para o sistema (2.9), com ε no papel de R . É suficiente verificarmos (b) e (c).

Se $y(t) \in S_\varepsilon$, então $y(t) + z_0(t) \in S_R$, e como $\tilde{g}(t, z)$ satisfaz (b) então $G(t, y(t))$ obviamente está em B , e portanto (b) está satisfeita.

Se $y_1(t), y_2(t) \in S_\varepsilon$, então

$$\begin{aligned} & ||G(t, y_1(t)) - G(t, y_2(t))|| \leq \\ & \leq \chi_{[T_0, \infty)}(t) h(t) ||y_1(t) - y_2(t)|| \leq \\ & \leq \chi_{[T_0, \infty)}(t) h(t) ||y_1(t) - y_2(t)||_0 \end{aligned}$$

e portanto

$$|G(t, y_1(t)) - G(t, y_2(t))|_B \leq \lambda |y_1(t) - y_2(t)|_D.$$

Assim, (c) está satisfeita. Tomemos ξ'_0 tal que $||\xi'_0 - \xi_0|| < \delta$.

Da escolha de δ , decorre que

$$C_0 ||\xi'_0 - \xi_0|| < (1 - \lambda K)\epsilon$$

e como neste caso $\eta = |G(t, 0)| = 0$, segue do Teorema 0.2 que existe uma única solução $y(t) \in S_\epsilon$ da equação (2.9) tal que

$$P_{t_0, D} y(t_0) = \xi'_0 - \xi_0.$$

A solução $z_1(t) = y(t) + z_0(t)$ de (2.7) está em F pois

$$|z_1|_D \leq |y|_D + |z_0|_D < \epsilon + R_1 \leq R$$

e

$$P_{t_0, D} z_1(t_0) = \xi'_0 - \xi_0 + \xi_0 = \xi'_0 \in V_\sigma.$$

Portanto, $z_1(t) = \bar{z}(t; \xi'_0)$. Como $y(t) = z_1(t) - z_0(t) \in S_\epsilon$, $z_0(t) = \bar{z}(t; \xi_0)$, $z_1(t) = \bar{z}(t; \xi'_0)$, temos provado que

$$\xi'_0 \in V_\sigma; \quad ||\xi'_0 - \xi_0|| < \delta \implies$$

$$\implies |\bar{z}(t; \xi'_0) - \bar{z}(t; \xi_0)|_D < \epsilon$$

e o lema está demonstrado.

Se $\bar{t} \geq t_0$ é fixado, seja

$$F(\bar{t}) = \{\bar{z}(\bar{t}; \xi) \in E : \bar{z}(t; \xi) \in F\}$$

e consideremos a aplicação

$$U : \bar{z}(t; \xi) \in F \rightarrow \bar{z}(\bar{t}; \xi) \in F(\bar{t}).$$

LEMA 2.5.

Nas condições do Lema 2.1, a aplicação U é contínua.

PROVA:

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$. Sejam $z_1(t) = z(t; \xi_1)$, $z_2(t) = z(t; \xi_2)$ elementos de F tais que

$$|z_1(t) - z_2(t)|_D < \delta.$$

Isso é equivalente a

$$\sup_{t \geq t_0} \frac{||z_1(t) - z_2(t)||}{t^{-\mu} e^{-\rho t}} < \delta$$

que implica

$$\frac{||z_1(t) - z_2(t)||}{t^{-\mu} e^{-\rho t}} < \delta \quad (t \geq t_0).$$

Como $t \geq t_0 \geq 1$, temos

$$||z_1(t) - z_2(t)|| < \delta \quad (t \geq t_0).$$

Para $t = \bar{t}$,

$$||z_1(\bar{t}) - z_2(\bar{t})|| < \varepsilon$$

e portanto U é contínua, o que prova o lema.

Se $\bar{z}(t; \xi) \in F$, seja $z(t; \xi)$ definida por

$$z(t; \xi) = \bar{z}(t; \xi) \quad (t \geq T_0),$$

onde T_0 é dado na prova do Lema 2.1. Temos que, para cada $\xi \in V_\sigma$, $z(t; \xi)$ é solução de (2.2). Se $V(t)$ é matriz fundamental de (2.5) satisfazendo $V(t_0) = I$, então

$$z(T_0; \xi) = \tilde{z}(T_0; \xi) = V(T_0) \tilde{z}(t_0; \xi)$$

ou seja

$$\tilde{z}(t_0; \xi) = V^{-1}(T_0) z(T_0; \xi)$$

e portanto

$$P_{t_0, \vartheta} V^{-1}(T_0) z(T_0; \xi) = \xi.$$

Consideremos agora as aplicações

$$T : \xi \in V_\sigma \rightarrow \tilde{z}(t; \xi) \in F,$$

$$U : \tilde{z}(t; \xi) \in F \rightarrow \tilde{z}(T_0; \xi) = z(T_0; \xi) \in F(T_0)$$

$$P_0 : z(T_0; \xi) \in F(T_0) \rightarrow \xi \in V_\sigma.$$

TEOREMA 2.6.

Nas condições do Lema 2.1, as aplicações T , U e P_0 são homeomorfismos.

PROVA:

T é contínua pelo Lema 2.4. U é contínua pelo Lema 2.5. P_0 é contínua pois é composta de aplicações contínuas:

$$P_0 = P_{t_0, \vartheta} \circ V^{-1}(T_0).$$

Analisando o diagrama

notamos que cada uma das aplicações é invertível, sendo a inversa de cada uma escrita como composta das outras duas. Logo, as inversas são também contínuas, e o teorema está provado.

Reunindo esses resultados com os Teoremas 2.2 e 2.3 temos os seguintes resultados:

TEOREMA 2.7.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Seja $f(t, x)$ contínua, satisfazendo

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq h(t) ||x - y|| \quad (t \geq t_0) \quad (x, y \in E)$$

$$f(t, 0) = 0 \quad (t \geq t_0)$$

onde $h(t)$ é uma função contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} h(t) dt < \infty.$$

Seja $y(t) \neq 0$ solução de (H). Então, existe $T_0 \geq t_0$ e existe uma família de soluções $x(t)$ de (P) definidas para $t \geq T_0$, dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$(2.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||y(t)||} = 0$$

Além disso, o conjunto dos valores iniciais $x(T_0)$ dos elementos dessa família é homeomorfo a um subespaço p -dimensional de E .

PROVA:

Pelo que vimos anteriormente, existe $T_0 \geq t_0$, existe uma família G de soluções $z(t; \xi)$ de (2.2) definidas para $t \geq T_0$, dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \|z(t; \xi)\| = 0 \quad (\xi \in V_\sigma).$$

Além disso, a aplicação

$$P_0 : z(T_0; \xi) \in F(T_0) \rightarrow \xi \in V_\sigma$$

é um homeomorfismo.

A cada solução $z(t; \xi)$ de (2.2), corresponde pela mudança de variáveis efetuada na prova do Lema 2.1, a solução

$$x(t; \xi) = y(t) + t^\ell e^{\beta t} z(t; \xi) \quad (t \geq T_0)$$

de (P), que satisfaz portanto (2.10). Claramente, a aplicação

$$z(T_0; \xi) \in F(T_0) \rightarrow x(T_0; \xi) \in E$$

é um homeomorfismo. O teorema está pois provado.

TEOREMA 2.8.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Seja $f(t, x)$ contínua, satisfazendo

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq h(t) ||x - y|| \quad (t \geq t_0) \quad (x, y \in E)$$

$$f(t, 0) = 0 \quad (t \geq t_0)$$

onde $h(t)$ é contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\mu+s} e^{\rho t} h(t) dt < \infty.$$

Seja $x(t) \neq 0$ solução de (P). Então, existe $\tilde{T}_0 \geq t_0$ e existe uma família de soluções $y(t)$ de (H) definidas para $t \geq \tilde{T}_0$, dependendo de pelo menos $\tilde{p}$ parâmetros, satisfazendo

$$(2.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Além disso, o conjunto dos valores iniciais $y(\tilde{T}_0)$ dos elementos dessa família é homeomorfo a um subespaço $\tilde{p}$ -dimensional de E .

PROVA:

Pelo que vimos na prova do Teorema 1.9, $x(t)$ é solução de uma equação linear

$$\dot{w} = A(t)w + D(t)w$$

onde $g(t, w) = D(t)w$ satisfaz às hipóteses de $f(t, x)$ no Lema 1.8. Por este lema, existe solução $z(t)$ de (H) tal que

$$(2.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Tomando a solução $z(t)$ de (H) e usando o Teorema 2.7 para o caso $f(t, x) \equiv 0$, existe $\tilde{T}_0 \geq t_0$, e existe uma família de soluções $y(t)$ de (H) definidas para $t \geq \tilde{T}_0$, dependen

do de pelo menos $\tilde{p}$ parâmetros, satisfazendo

$$(2.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||y(t) - z(t)||}{||z(t)||} = 0.$$

Além disso, o conjunto dos valores iniciais $y(t_0)$ dos elementos dessa família é homeomorfo a um subespaço $\tilde{p}$ -dimensional de E . Para finalizar a prova, notamos que (2.12) e (2.13) implicam (2.11). O teorema está provado.

Com relação a dois sistemas perturbados de um sistema linear,

$$(2.14) \quad \dot{x} = A(t)x + f_1(t, x)$$

$$(2.15) \quad \dot{z} = A(t)z + f_2(t, z),$$

temos o seguinte resultado:

TEOREMA 2.9.

Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 0.5 e seja $s+1$ a ordem máxima dos blocos de $A(t)$. Sejam $f_i(t, x)$ contínuas, satisfazendo

$$||f_i(t, x) - f_i(t, y)|| \leq h_i(t) ||x - y|| \quad (t \geq t_0) (x, y \in E) (i=1, 2)$$

$$f_i(t, 0) = 0 \quad (t \geq t_0) \quad (i = 1, 2)$$

onde $h_i(t)$ são funções contínuas, positivas, com

$$\int_{t_0}^{\infty} h_i(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty \quad (i = 1, 2).$$

Então, valem os seguintes resultados:

- (I) Se $x(t) \neq 0$ é solução de (2.14), então existe $T_0 \geq t_0$ e existe uma família de soluções $z(t)$ de (2.15) definidas para $t \geq T_0$, dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Além disso, o conjunto dos valores iniciais $z(T_0)$ dos elementos dessa família, é homeomorfo a um subespaço p -dimensional de E .

- (II) Se $z(t) \neq 0$ é solução de (2.15), então existe $T'_0 \geq t_0$ e existe uma família de soluções de $x(t)$ de (2.14) definidas para $t \geq T'_0$, dependendo de pelo menos p' parâmetros, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||z(t)||} = 0.$$

Além disso, o conjunto dos valores iniciais de $x(T'_0)$ dos elementos dessa família é homeomorfo a um subespaço p' -dimensional de E .

PROVA:

Faremos a prova de (I). A prova de (II) é completamente análoga.

Seja $x(t) \neq 0$ solução de (2.14). Pelo Teorema 2.3, existe solução $y(t) \neq 0$ de (H) satisfazendo

$$(2.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t) - y(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

Considerando a solução $y(t)$ de (H), aplicamos o Teorema 2.7 aos sistemas (H) e (2.15). Portanto, existe $T_0 \geq t_0$ e existe uma família de soluções $z(t)$ de (2.15) definidas para $t \geq T_0$, dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo

$$(2.17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||y(t) - z(t)||}{||y(t)||} = 0.$$

Além disso, o conjunto dos valores iniciais $z(T_0)$ dos elementos dessa família é homeomorfo a um subespaço p -dimensional de E . Para finalizar a prova, é só notar que (2.16) e (2.17) implicam

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{||x(t) - z(t)||}{||x(t)||} = 0.$$

O Teorema está provado.

COROLÁRIO 2.10.

Nas condições do Teorema 2.9, os sistemas (2.14) e (2.15) são relativamente assintoticamente equivalentes, com peso $t^\mu e^{\rho t}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - CORDUNEANU, C.
Sur certains systèmes différentiels non-linéaires. An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza". Iasi, Sect. I, 6 (1960), 257-260.
- [2] - FAEDO, S.
Proprietà assintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei. Ann. Mat. Pura Apl. 26 (1947), 207-215.
- [3] - HARTMAN, P.
Ordinary Differential Equations. Wiley, N. York (1964).
- [4] - HARTMAN, P. and ONUCHIC, N.
On the asymptotic integration of ordinary differential equations. Pacific J. Math. 13 (1963), 1193-1207.
- [5] - LEVI, E.
Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Atti Acad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Nat. 8 (1950), 465-470; 9 (1950), 26-31.
- [6] - MASSERA, J.L. and SCHAFFER, J.J.
 (a) *Linear differential equations and functional analysis, I.* Ann. Math. 67 (1960), 517-573.
 (b) *Linear differential equations and functional analysis, IV.* Ann. Math. 139 (1960), 287-342.
 (c) *Linear differential equations and function spaces.* Academic Press, New York, (1966).
- [7] - ONUCHIC, N.
 (a) *Asymptotic equivalence between two systems of ordinary differential equations.* Portugaliae Math. 30 (1971), 97-105.
 (b) *Asymptotic relationships at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations.* J. Diff. Eq. 3 (1967), 47-58.

(c) *Comportamento assintótico das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Tese de Livre-Docência, FFCL-USP (1965).*

[8] - RODRIGUES, H.M.

(a) *Equivalência assintótica relativa com peso t^μ , entre dois sistemas de equações diferenciais ordinárias. Tese de Doutorado, ICMSC-USP (1973).*

(b) *Relative asymptotic equivalence with weight t^μ , between two systems of ordinary differential equations. Dynamical Systems, vol. 2. An International Symposium. Academic Press, Inc. (1976).*

[9] - STRAUSS, A. and YORKE, J.A.

Perturbation theorems for ordinary differential equations. J. Diff. Eq. 3 (1967), 15-30.

[10] - SZMYDT, Z.

Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non-linéaires. Ann. Pol. Math. (1955), 253-276.

[11] - TÁBOAS, P.Z.

Admissibilidade e aplicações em equações diferenciais ordinárias. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, (1975).

[12] - WAŻEWSKI, T.

Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 279-313.