BIFURCAÇÃO EM CAMPOS

DESCONTÍNUOS

Marcos Luiz Crispino

**Tese apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos
da Universidade de São Paulo, para
a obtenção do título de Doutor em
Ciências -Área: Matemática: Análise**

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Vieira de Carvalho

São Carlos - SP

1992

ABSTRACT

The bifurcation of the solutions of the following class of equations:

$$\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x([t])), \quad t \geq 0, \quad x_0 = c_0 \quad (1)$$

where $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in R^m$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, \dots, m-1$, and:

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_i, & \beta_i < t \leq \beta_{i+1}, \quad i=0, \dots, m-1, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_m = 1 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 1 \\ -f_{\alpha}(-t), & t \leq 0 \end{cases}$$

was studied.

Taking a particular case where $\alpha \in R^9$, it was shown that the solutions of (1) may exhibit a complicated (but not chaotic) behavior.

RESUMO

Estudamos neste trabalho a bifurcação das soluções da seguinte classe de equações:

$$\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x([t])), \quad t \geq 0, \quad x(0) = c_0 \quad (1)$$

Onde $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, \dots, m-1$, e:

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_i, & \beta_i < t \leq \beta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_m = 1 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 1 \\ -f_{\alpha}(-t), & t \leq 0 \end{cases}$$

Considerando um caso particular onde $\alpha \in \mathbb{R}^3$, foi demonstrado que as soluções de (1) podem exibir um comportamento não caótico, porém complicado.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero expressar meu agradecimento aos Profs. Drs. Luiz Antônio Vieira de Carvalho e Plácido Zoéga Táboas pela orientação segura e objetiva.

Também desejo agradecer aos(às) professores(as) e funcionários(as) do ICMSC - USP que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho, bem como aos colegas do Departamento de Energia Nuclear - UFPE, pelo apoio e incentivo.

Finalmente agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS	1
CAPÍTULO 2 - TEOREMAS AUXILIARES	7
Lema 2-1	7
Lema 2-2	7
Teorema 2-4	10
Corolário 2-5	11
Teorema 2-7	11
Lema 2-8	12
Teorema 2-9	13
Teorema 2-10	14
Corolário 2-11	16
Observação 2-12	17
CAPÍTULO 3 - CONJUNTOS LIMITE, PONTOS DE PERIODICIDADE E CONJUNTOS INVARIANTES POR F_α	19
Lema 3-1	20
Teorema 3-2	22
Lema 3-3	24
Teorema 3-4	24
Teorema 3-5	26
Teorema 3-7	28
Corolário 3-8	29/30
Corolário 3-9	31
Teorema 3-10	32
Teorema 3-11	32
Teorema 3-12	33
Lema 3-14	35
Lema 3-15	36
CAPÍTULO 4 - DESCRIÇÃO DA DINÂMICA GERADA POR F_α EM UM CASO PARTICULAR	38
Definição 4-1	38
Lema 4-2	38

Lema 4-2	38
Teorema 4-3	39
Teorema 4-5	41
Corolário 4-6	42
Lema 4-8	43
Definição 4-9	44
Lema 4-10	45
Observação 4-11	46
Lema 4-12	47
Teorema 4-14	48
Corolário 4-15	50
Lema 4-17	52
Teorema 4-18	53
Teorema 4-20	54
Teorema 4-21	55
Lista dos símbolos	56
CAPÍTULO 5 - A EQUAÇÃO $\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x([t]))$	57
Definição 5-1	59
Teorema 5-2	59
Corolário 5-3	60
Corolário 5-4	60/61
Corolário 5-5	62
Teorema 5-6	63
Teorema 5-8	65
Teorema 5-9	66
Um exemplo	67
Descrição de um fenômeno oscilatório não linear	68
APENDICE	70
BIBLIOGRAFIA	72

INTRODUÇÃO:

O objetivo do presente trabalho é estudar o comportamento das soluções da seguinte família de equações:

$$\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x([t])), \quad t \geq 0, \quad x(0) = c_0 \quad (1)$$

Onde, como usual, $[t]$ é a parte inteira de t , $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})$.

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_i, & \beta_i < t \leq \beta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_m = 1 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 1 \\ -f_{\alpha}(-t), & t \leq 0 \end{cases}$$

e $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, \dots, m-1$.

No primeiro capítulo, apresentamos notações que serão frequentemente utilizadas no restante do texto.

Deduzimos no segundo capítulo propriedades importantes dos conjuntos limite e dos conjuntos de pontos de periodicidade para uma classe de funções que contém as F_{α} , sendo $F_{\alpha}(t) = t - f_{\alpha}(t)$.

Estudamos no terceiro capítulo aspectos gerais da dinâmica gerada por F_{α} .

No quarto capítulo abordamos, à luz dos resultados dos capítulos anteriores, um caso particular da dinâmica das funções F_{α} , onde, agora, $\alpha \in \mathbb{R}^3$. Mostraremos assim que F_{α} pode exibir um comportamento complicado.

Demonstraremos no quinto capítulo a relação entre a dinâmica das funções F_{α} e o comportamento das soluções de (1). Apresentamos a aplicação de (1) na descrição de um fenômeno oscilatório não linear.

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo serão apresentados diversos símbolos e conceitos frequentemente utilizados no decorrer do texto.

1.1 Alguns Símbolos Frequentemente Utilizados

- a) N , Z , Q , R e C indicam os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente.
- b) Z_+ e R_+ são os conjuntos dos inteiros não negativos e dos reais não negativos, respectivamente.
- c) R_+^m é o conjunto dos pontos $(x_0, \dots, x_{m-1}) \in R^m$ cujas coordenadas são não negativas.
- d) Como usual, $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$
- e) Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Se $x \in X$ e $r \geq 0$, os símbolos $B(x:r)$, $\bar{B}(x:r)$ e $S(x:r)$ representam a bola aberta, a bola fechada e a esfera de centro x e raio r , respectivamente.

Se $x \in X$ e A, B são subconjuntos não vazios de X , $\rho(x, A)$ é a distância de x a A e $\rho(A, B)$ é a distância de A a B .

Se $A \subseteq X$ e $A \neq \emptyset$, $\text{diam}(A)$ indica o diâmetro de A .

Se $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ e $r \geq 0$, o símbolo $B(A; r)$ significa a bola aberta de raio r em torno de A .

f) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

Se $A \subseteq X$, o interior e a fronteira de A serão indicados por $\text{Int}(A)$ e ∂A , respectivamente. O fecho de A será indicado pelo símbolo $\bar{A}$.

O conjunto dos pontos de acumulação de um subconjunto $A \subseteq X$ será representado por A' .

A classe das vizinhanças de um ponto x de X será representada por $\mathcal{V}(x)$ e a classe das vizinhanças de um subconjunto $A \subseteq X$ é indicada pela notação $\mathcal{V}(A)$.

Os símbolos $P_c(X)$ e $P_{cn}(X)$ denotarão as classes dos subconjuntos compactos e conexos de X , respectivamente.

Para todo $A \subseteq X$, $Cn(A)$ é a classe das componentes conexas de A .

Se $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é um espaço topológico e $A \subseteq X$, a notação $\mathcal{K}(A, Y)$ indica o conjunto das funções $f: X \longrightarrow Y$ contínuas em A .

g) Seja E um espaço vetorial normado.

$\|x\|$ significa a norma de x , para todo $x \in E$.

Se $E = R^m$, então $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_S$ e $\|\cdot\|_M$ são as normas euclidiana, da soma e do máximo em E , respectivamente e $\mathcal{T}_E$ é a topologia induzida por estas normas.

Se $E = C$, então S^1 é a esfera unitária $S(0,1)$, com a topologia induzida pela norma euclidiana em C .

Se F é um espaço vetorial normado, $A \subseteq E$ e $f: A \longrightarrow F$ é limitada, então $\|f\|$ é a norma da convergência uniforme de f .

Se $x \in E$, λ é um escalar e $A \subseteq E$, então

$$x + A = \{x + \xi \in E \mid \xi \in A\}$$

$$\lambda A = \{\lambda x \in E \mid x \in A\}$$

$$-A = (-1)A = \{-x \in E \mid x \in A\}$$

1.2 Definição:

Se $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ indica a parte inteira de x , portando a parte fracionária é $x - [x]$.

1.3 Definição:

Seja $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m) = (0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, 1)$ uma partição de $[0, 1]$.

a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$ sejam $f_\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como segue:

$$f_\alpha(\theta) = \begin{cases} \alpha_i, & \beta_i < \theta \leq \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \\ 1, & \theta > 1 \end{cases}$$

$$f_\alpha(0) = 0 \text{ e } f_\alpha(\theta) = -f_\alpha(-\theta) \text{ se } \theta \leq 0$$

$$F_\alpha(\theta) = \theta - f_\alpha(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$, $D(\alpha)$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f_α e $I_0(\alpha)$ é o intervalo $[-\|f_\alpha\|, \|f_\alpha\|]$

1.4 Definição:

Sejam (X, ρ) um espaço métrico e $f: X \longrightarrow X$. Como usual,

- a) Para todo subconjunto A de X , as órbitas positiva e negativa por A , representadas por $\gamma_+(f; A)$ e $\gamma_-(f; A)$ são definidas por:

$$\gamma_+(f; A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(A), \quad \gamma_-(f; A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(A)$$

- b) Para todo subconjunto $B \subseteq X$, os conjuntos ω - limite e α - limite de B , indicados pelas notações $\omega(f; B)$ e $\alpha(f; B)$ são definidos como segue:

$$\omega(f; B) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \left[\bigcup_{j=i}^{\infty} f^j(B) \right], \quad \alpha(f; B) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \left[\bigcup_{j=i}^{\infty} f^{-j}(B) \right]$$

- c) Dado $A \subseteq X$, a órbita completa por A é $\gamma(f; A) = \gamma_+(f; A) \cup \gamma_-(f; A)$
- d) Para simplificar, escrevemos $\gamma_+(f; x)$ em lugar de $\gamma_+(f; \{x\})$, etc. No caso específico em que $f = F_\alpha$, escrevemos $\gamma_+(\alpha, A)$ para denotar $\gamma_+(F_\alpha, A)$, etc.

1.5 Definição:

Como usual, dizemos que:

- a) Um subconjunto $B \subseteq X$ é invariante por f se $f(B) = B$.
- b) Um subconjunto $A \subseteq X$ atrai um subconjunto $B \subseteq X$ por f se, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $f^n(B) \subseteq B(A; \epsilon)$.
- c) Um subconjunto $B \subseteq X$ é um atrator global quando atrai todo subconjunto limitado de X .
- d) Se $A \subseteq X$ é invariante por f , então A é estável quando, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, A) > 0$ tal que $\gamma_+(f; B(A; \delta)) \subseteq B(A; \epsilon)$.

1.6 Definição:

a) Dados $x \in X$ e n natural, diz-se que $\gamma_+(f; x)$ é periódica de período (mínimo) n ou n -periódica, ou um ciclo de período n , se $f^n(x) = x$ e $f^i(x) \neq x$, $i = 1, \dots, n-1$.

b) Dado $x \in X$, diz-se que x é um ponto periódico, ou um ponto de periodicidade, se $\gamma_+(f; x)$ é periódica.

c) Dado $x \in X$, diz-se que $\gamma_+(f; x)$ é eventualmente periódica se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \neq x$ e $\gamma_+(f; f^n(x))$ é n -periódica, para algum $i \in \mathbb{N}$.

d) Quando $\gamma_+(f; x)$ é um subconjunto infinito de X , então dizemos que $\gamma_+(f; x)$ é aperiódica. Note que uma órbita aperiódica não é periódica nem eventualmente periódica.

e) $P(f; n_0)$ é o conjunto dos pontos de X tais que $\gamma_+(f; x)$ é n_0 -periódica.

f) $Per(f)$ é a reunião dos conjuntos $P(f; n)$, $n = 1, 2, \dots$.

1.7 Definição:

Sejam $A \subseteq X$, $f: A \longrightarrow A$ e $B \subseteq A$, $Int(B) \neq \emptyset$, tal que $f(B) \subseteq B$.

a) Se existir r positivo tal que, para qualquer que seja $\theta \in B$, é verdadeira a afirmação: " dada uma vizinhança U de θ , existem $i \in \mathbb{Z}_+$ e $t \in U$ tais que $\rho(f^i(t), f^i(\theta)) > r$ ",

então diz-se que f é sensível às condições iniciais em B

b) Se f é sensível às condições iniciais em B e existe $\theta_0 \in B$ tal

que $\overline{\gamma_+(f; \theta_0)} = \bar{B}$, então f é pseudocaótica em B .

1.8 Definição:

Dados X, A, B e $f: A \longrightarrow A$ como em 1.7 dizemos que f é caótica em B se $\bigcup_{n=0}^{\infty} P(f; n)$ é denso em B .

1.9 Definição:

Sejam (X, ρ) um espaço métrico, $f: X \longrightarrow X$ e $x \in X$. Diz-se que a órbita positiva $\gamma_+(f; x)$ é estável quando: Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\gamma_+(f; \xi) \subseteq B(\gamma_+(f; x); \varepsilon)$, para todo $\xi \in B(x; \delta)$.

Se uma órbita $\gamma_+(f; x)$ não é estável, então diz-se que é instável.

CAPÍTULO 2

TEOREMAS AUXILIARES

Sejam E um espaço vetorial normado e $f: E \longrightarrow E$. Neste capítulo vamos estabelecer condições para a estabilidade de conjuntos invariantes por f , mesmo que f não seja contínua.

Precisamos dos seguintes lemas:

2.1 Lema:

Seja E um espaço vetorial normado. Se A, B são subconjuntos próprios não vazios de E e $r_0 = \rho(A, \partial B)$, então:

- a) $A \subseteq \text{Int}(B) \Rightarrow B(A, r_0) \subseteq \text{Int}(B)$
- b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B}) = \rho(A, \partial B) = \rho(\partial A, B) = \rho(\partial A, \partial B)$
- c) $r > 0 \Rightarrow B(A; r) = A \cup B(\partial A; r)$

A prova deste lema, que apresentamos no Apêndice, é um simples exercício de topologia.

2.2 Lema:

Sejam E um espaço vetorial normado e $A \subseteq E$ um subconjunto não vazio. Seja U uma componente conexa de $B(A; r)$, onde $r > 0$ é dado. Então, para todo $\xi \in U$ existe, em correspondência $x = x(\xi) \in U \cap A$ tal que $\xi \in B(x; r)$.

- Demonstração:

Pelo Lema 2-1, $B(A;r) = A \cup B(\partial A;r)$. Se U é como especificado e $\xi \in U$ então, ou bem $\xi \in A$ ou bem $\xi \in B(\partial A;r)$. Se $\xi \in A$, nada há a mostrar. Se $\xi \in B(\partial A;r)$, existe $\bar{x} \in \partial A$ tal que $\xi \in B(\bar{x};r)$. Temos que $B(\bar{x};r) \subseteq U$, pois U é uma componente conexa de $B(A;r)$. ($B(\bar{x};r)$ é conexa, $B(\bar{x};r) \subseteq B(A;r)$ e $\xi \in U \cap B(\bar{x};r)$)
Seja $\bar{r} = \rho(\bar{x}, \xi) < r$. Se $\bar{r} = 0$, nada há a mostrar. Se $\bar{r} > 0$, consideremos a bola $B(\bar{x};r - \bar{r})$. É claro que $B(\bar{x};r - \bar{r}) \subseteq B(\bar{x};r) \subseteq U$. Seja $x \in A \cap B(\bar{x};r - \bar{r})$. Então $x \in A \cap U$ e $\rho(x, \bar{x}) < r - \bar{r}$. Logo, $\rho(x, \xi) \leq \rho(x, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \xi) < r - \bar{r} + \bar{r} = r$, portanto $\xi \in B(x;r)$, como queríamos.

O corolário abaixo é um fato de topologia que demonstramos por questão de completividade.

Sejam E, A e r como acima. Sejam também $V \subseteq E$, $V \neq \emptyset$. Se $\rho(\partial A, V) \geq r$ e U é uma componente conexa de $B(A;r) \setminus V$, então, a cada $\xi \in U$ corresponde $x = x(\xi) \in A \cap U$ tal que $\xi \in B(x;r)$.

- Demonstração:

Como $B(A;r) = A \cup B(\partial A;r)$ e $\rho(\partial A, V) \geq r$, temos que $B(A;r) \setminus V = (A \setminus V) \cup (B(\partial A;r) \setminus V)$. Logo, se $\xi \in U$ então, ou bem $\xi \in A \setminus V$ (logo $\xi \in A$) e nada mais há a demonstrar, ou bem $\xi \in B(\partial A;r) \setminus V$. Logo, existe $\bar{x} \in \partial A$ tal que $\xi \in B(\bar{x};r)$. Uma vez que $B(\bar{x};r) \subset B(A;r) \setminus V$ (devido ao fato de ser $r \leq \rho(\partial A, V)$) e U é componente conexa de $B(A;r) \setminus V$, segue-se que $B(\bar{x};r) \subset U$.

Seja $\bar{r} = \rho(\bar{x}, \xi)$. Então $\bar{r} < r$. Se $\bar{r} = 0$, nada mais há a mostrar. Se $\bar{r} > 0$, a prova segue como no Lema (2.2).

2.3 Observações:

a) O resultado acima nem sempre é válido quando U não é uma componente conexa. Por exemplo, sejam $E = \mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $A = [x; y]$, $0 < r < \|x - y\|$ e $\xi = (y_1, y_2 + (r/2))$.

Se $U = [x; \xi]$ então $U \subseteq B(A; r)$, $U \cap A = \{x\}$ e $r < \|x - y\| < \|x - \xi\|$.

b) Os resultados dos Lemas 2-1 e 2-2 podem não ser válidos quando E é um espaço métrico onde nem toda bola aberta é conexa. De fato, consideremos $E = [(1, 1/2); (6, 1/2)] \cup [(1, 1/2); (1, 1)] \cup [(1, 1); (6, 1)]$, com a métrica induzida pela norma do máximo em $\mathbb{R}^2$. Se $A = [(3, 1); (4, 1)]$ e $B = [(2, 1); (5, 1)]$ então $\rho(A, \partial B) = 1$ e $B(A; 1)$ não está contida em $\text{Int}(B)$.

Tem-se também que o segmento aberto $U = ((2, 1/2); (5, 1/2))$ é uma componente conexa de $B(A; 1)$, e $U \cap A = \emptyset$. Observe-se que E é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos.

Estabeleceremos, em seguida, que certas propriedades de conjuntos invariantes por funções contínuas definidas em um espaço vetorial normado E , como, por exemplo a estabilidade, permanecem válidas, sob certas condições, para funções não contínuas.

2.4 Teorema:

Sejam E um espaço vetorial normado, $A, V \subseteq E$, $A, V \neq \emptyset$, e (X, ρ) um espaço métrico. Seja $f: E \longrightarrow X$ tal que $D(f) \subseteq V$, onde $D(f)$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f . Se existir $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ contínua e estritamente crescente tal que $g(0) = 0$ e tal que, para todo $U \in \mathcal{C}_n(E \setminus V)$, para todo $x, \xi \in U$, $\rho(f(x), f(\xi)) \leq g(\|\xi - x\|)$, então:

$$\rho(\partial A, V) > 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \mid f(B(A; \delta)) \subseteq B(f(A); \varepsilon)$$

- Demonstração:

Seja $0 < r \leq \rho(\partial A, V)$. Pelo Lema (2.1), temos que $A \cup B(\partial A; r) = B(A; r)$ e $B(\partial A; r) \subseteq \text{Int}(E \setminus V)$, logo $V \cap B(A; r) = A \cap V$. Dado $y \in f(B(A; r) \setminus V)$, sejam $\xi = \xi(y) \in B(A; r) \setminus V$ tal que $y = f(\xi)$, $U(\xi) \in \mathcal{C}_n(B(A; r) \setminus V)$ tal que $\xi \in U(\xi)$ e $x = x(\xi) \in U(\xi) \cap A$ tal que $\|\xi - x\| < r$. Como $B(A; r) \setminus V \subseteq E \setminus V$ e a aplicação de inclusão $i: B(A; r) \setminus V \longrightarrow E \setminus V$ é contínua, temos que $U(\xi)$ é um subconjunto conexo de $E \setminus V$. Logo existe uma única componente conexa $W(\xi)$ de $E \setminus V$ tal que $U(\xi) \subseteq W(\xi)$. Pelas hipóteses acima, temos que $\rho(y, f(x)) = \rho(f(x), f(\xi)) \leq g(\|\xi - x\|) < g(r)$. Como $f(x) \in f(A)$, $\rho(y, f(A)) \leq \rho(y, f(x)) < g(r)$, portanto $y \in B(f(A); g(r))$.

Como y é arbitrário, conclui-se que $f(B(A; r) \setminus V) \subseteq B(f(A); g(r))$, logo $f(B(A; r)) \subseteq B(f(A); g(r))$.

Seja $c > 0$ tal que $[0; c] \subseteq g(R_+)$ e, dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon_0 = \min\{c, \varepsilon\}$. Tomando $0 < \delta < \min\{g^{-1}(\varepsilon_0), \rho(\partial A, V)\}$, obtemos $f(B(A; \delta)) \subseteq B(f(A); \varepsilon)$, como queríamos.

2.5 Corolário:

Sejam $E, A, V, f, D(f)$ e g como no Teorema (2.5). Se existe $b > 0$ tal que $g(\theta) \leq \theta$ para todo $\theta \in (0, b]$, $X = E, A$ é invariante por f e $\rho(\partial A, V) > 0$, então A é estável e atrai ∂A .

- Demonstração:

Seja c como no Teorema 2.4 e, dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon_0 = \min\{c, \varepsilon\}$. Como $f(A) = A$, tomando $0 < \delta \leq \min\{\varepsilon_0, b, r_0\}$, onde $r_0 = \rho(\partial A, V)$, temos $f(B(A; \delta)) \subseteq B(A; \varepsilon)$, logo $\gamma_+(f; B(A; \delta)) \subseteq B(A; \delta) \subseteq B(A; \varepsilon)$.

Portanto, A é estável. Como $\partial A \subseteq B(A; \delta)$, temos $\gamma_+(f; \partial A) \subseteq B(A; \delta) \subseteq B(A; \varepsilon)$. Por isto conclui-se que A atrai ∂A .

2.6 Observação:

Um caso particular importante do Teorema 2.4 e do Corolário 2.5, é aquele no qual $E = X = R$, ρ é a métrica euclidiana em R e $f = F_\alpha$.

2.7 Teorema

Sejam (X, ρ) um espaço métrico, $f: X \longrightarrow X$ e $B \subseteq X, B \neq \emptyset$. Se $\overline{\gamma_+(f; B)}$ é compacto, então $\omega(f; B) \neq \emptyset$, compacto, e atrai B .

- Demonstração:

Como $\overline{\bigcup_{j=i+1}^{\infty} f^j(B)} \subseteq \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} f^j(B)} \subseteq \overline{\gamma_+(f;B)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, se $\overline{\gamma_+(f;B)}$ é compacto, segue que $\omega(f;B) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} f^j(B)}$ não é vazio.

A prova de que $\omega(f;B)$ atrai B é exatamente como a prova da propriedade correspondente do Lema 2.1.2 de [10] (pag. 9). Note que o Teorema 2.7 não exige a continuidade de f , que é exigida apenas para provar a invariância de $\omega(f;B)$.

2.8 Lema:

Sejam (X,ρ) um espaço métrico, $f:X \longrightarrow X$, e $A,B \subseteq X$, $A,B \neq \emptyset$. Se A é um atrator global, B é limitado e $\omega(f;B) \neq \emptyset$, então $\omega(f;B) \subseteq A$.

- Demonstração:

Uma vez que $\rho(x,Y) = \rho(x,\bar{Y})$ para todo $x \in X, Y \subseteq X$ podemos supor, sem perda de generalidade, que A é fechado. Logo, se $x \in X/A$, então $\rho(x,A) > 0$.

Sejam $x_0 \in X/A$ e $0 < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0,A)$. Se $x \in A$ e $\xi \in B(x_0,r)$, então $\rho(x_0,\xi) < r \leq \frac{1}{2}\rho(x_0,A)$ e $\rho(x_0,A) \leq \rho(x,x_0)$, logo $\frac{1}{2}\rho(x_0,A) < |\rho(x,x_0) - \rho(\xi,x_0)| \leq \rho(x,\xi)$. Como x e ξ são arbitrários, daí conclui-se $\rho(A,B(x_0,r)) \geq \frac{1}{2}\rho(x_0,A)$.

Suponhamos que $\omega(f;B) \setminus A \neq \emptyset$. Sejam $x_0 \in \omega(f;B) \setminus A$ e $0 < r < \frac{1}{2}\rho(x_0,A)$. Como $x_0 \in \omega(f;B)$, existem seqüências (x_i) em B e (k_i) em $\mathbb{N}$ tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{k_i} x_i = x_0$. Mas, se $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{k_i}(x_i) = x_0$ então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i=i_0}^{\infty} \{f^{k_i}(x_i)\} \subseteq B(x_0;r)$.

Ora, $\bigcup_{i=i_0}^{\infty} \{f^{k_i}(x_i)\} \subseteq B(x_0;r) \Rightarrow \rho\left(A, \bigcup_{i=i_0}^{\infty} \{f^{k_i}(x_i)\}\right) \geq$

$\rho(A, B(x_0; r)) \geq \frac{1}{2}\rho(x_0, A)$, contra o fato de que A atrai B . Daí conclui-se que $\omega(f; B) \setminus A = \emptyset$. Logo $\omega(f, B) \subseteq A$, c.q.d.

2.9 Teorema:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$, $K = [a, b]$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f(K) \subseteq K$ e existe $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_{\mathbb{R} \setminus K}$ é contínua e não decrescente, $a \leq f(\theta) \leq \varphi(\theta) < \theta$ para $\theta > b$ e $\theta < \varphi(\theta) \leq f(\theta) \leq b$ para $\theta < a$, então:

a) K é um atrator global

b) Se $B \subseteq \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$ e $\text{diam}(B) < \infty$, então $\omega(f; B) \neq \emptyset$ e $\omega(f, B) \subseteq K$.

- Demonstração:

É suficiente mostrar que K atrai $[a, b + r]$ para $r > 0$. (De maneira análoga, demonstra-se que K atrai $[a - r, b]$ para $r > 0$).

Em primeiro lugar, como $a \leq f(\theta) \leq \varphi(\theta)$ para $\theta > b$ e $\varphi|_{\mathbb{R} \setminus K}$ é não decrescente, $b < \theta$ implica $a \leq f(t) \leq \varphi(t) < \varphi(\theta)$ para $b < t \leq \theta$. Logo, $f((b; \theta]) \subseteq [a; \varphi(\theta)]$ para $\theta > b$. Uma vez que $f(K) \subseteq K = [a; b]$ concluímos que $f([a; \theta]) \subseteq K \cup [a; \varphi(\theta)]$ para todo $\theta > b$. Observe-se que $K \cup [a; \varphi(\theta)] = K$ ou $K \cup [a; \varphi(\theta)] = [a; \varphi(\theta)]$, conforme seja $\varphi(\theta) \leq b$ ou $\varphi(\theta) > b$.

Se $r > 0$, então, ou bem $\varphi(b + r) > b$, $i \in \mathbb{N}$, ou bem existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq \varphi^i(b + r) \leq b$. Supondo que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq \varphi^i(b + r) \leq b$, temos $\varphi^j(b + r) \in (b; b + r)$, $j = 0, 1, \dots, i-1$. Portanto $f^j([a; b + r]) \subseteq K \cup [a; \varphi^j(b + r)]$, $j = 0, 1, \dots, i$. Mas $K \cup [a; \varphi^i(b + r)] = K$, logo $f^p([a; b + r]) \subseteq K$ para $p \geq i$.

Suponhamos agora $\varphi^i(b + r) > b$ para $i \in \mathbb{Z}_+$. Visto que $a \leq \varphi(\theta) < \theta$ para $\theta > b$, a sequência $\theta_i = \varphi^i(b + r)$, $i = 1, 2, \dots$ é

decrecente e limitada. (Pois $b < \theta_{i+1} < \theta_i \leq b + r$, para $i \in \mathbb{Z}_+$). Seja $t = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i$, (o qual existe). Então, $b \leq t$. Afirma-se que $b = t$. De fato, se fosse $t < b$, teríamos, pela continuidade de $\varphi|_{R \setminus K}$, $\varphi(t) = \varphi(\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^i(b+r)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^{i+1}(b+r) = t$, contra a hipótese de que $\varphi(t) < t$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $i_0 = i_0(\varepsilon, r) \in \mathbb{N}$ tal que $b < \varphi^i(b+r) < b + \varepsilon$, para $i \geq i_0$. Como $\varphi^i(b+r) > b$ para $i \in \mathbb{Z}_+$, e $f(K) \subseteq K$, temos $f^i([a; b+r]) \subseteq [a; \varphi^i(b+r)]$, $i \in \mathbb{N}$. Logo $f^i([a; b+r]) \subseteq [a; b+\varepsilon] \subseteq B(K; \varepsilon)$ para $i \geq i_0$. Daí concluímos que K é um atrator global.

Como $\theta < f(\theta) \leq b$ se $\theta < a$ e $a \leq f(\theta) < \theta$ para $\theta > b$, tem-se que $f([a-r; b+r]) \subseteq [a-r; b+r]$ para $r > 0$. Por isto, se $B \neq \emptyset$ e $\text{diam}(B) < \infty$, existe $r = r(B) > 0$ tal que $\gamma_+(f; B) \subseteq [a-r; b+r]$. Logo $\gamma_+(f; B)$ é compacto.

Portanto, (b) segue-se do Teorema (2.7) e do Lema (2.8).

2.10 Teorema:

Sejam a, b, K, f e φ como no Teorema (2.9). Se $a < \varphi(a-)$ e $\varphi(b+) < b$, onde $\varphi(a-) = \lim_{\theta \rightarrow a-} \varphi(\theta)$ e $\varphi(b+) = \lim_{\theta \rightarrow b+} \varphi(\theta)$, então:

a) Para todo subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, é verdadeira:

$$B \neq \emptyset \wedge \text{diam}(B) < \infty \Rightarrow (\exists n_0 = n_0(B) \in \mathbb{Z}_+) \mid \bigcup_{j=n_0}^{\infty} f^j(B) \subseteq K$$

b) Para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, A é um atrator global se e somente se atrai K

c) $\Omega(f) = \omega(f; K)$ é um atrator global minimal.

- Demonstração:

i) Para provar (a), basta mostrar que, para todo $r > 0$, existe $i_0 = i_0(r) \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{i_0}([b+r]) \subseteq K$. (O caso $t = a-r$, $r > 0$,

é semelhante).

Seja $l_1 = \lim_{\theta \rightarrow b+} (\theta - \varphi(\theta))$. Por hipótese, $l_1 > 0$.
Sejam, então, $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que $0 < l_1 - \varepsilon < \theta - \varphi(\theta) < l_1 + \varepsilon$,
para $b < \theta < b + \delta$. (É claro que tais ε e δ existem).

Dai, $l_1 - \varepsilon$ é uma cota inferior para o conjunto:

$$\{|\theta - \varphi(\theta)| \in K \mid b < \theta < b + \delta\},$$

logo

$$s_\delta = \inf\{|\theta - \varphi(\theta)| \in K \mid b < \theta < b + \delta\} \geq l_1 - \varepsilon > 0$$

Se $r > \delta$ então, como $[b + \delta; b + r]$ é compacto, $\varphi|_{R \setminus K}$ é
contínua e $|\theta - \varphi(\theta)| > 0$ para $b + \delta \leq \theta \leq b + r$, temos que $s_r =$
 $\inf\{|\theta - \varphi(\theta)| \in R \mid b + \delta \leq \theta \leq b + r\} > 0$.

$$\text{Logo, } S_r = \inf\{|\theta - \varphi(\theta)| \in R \mid b < \theta < b + r\} > 0.$$

Dado $r > 0$, afirmamos que existe $i_0(r) \in \mathbb{N}$ tal que
 $f^{i_0(r)} \in K$. Pois, se fosse $f^i(b + r) > b$, para $i \in \mathbb{Z}_+$, teríamos b
 $< \varphi^{i+1}(b + r) < \varphi^i(b + r)$, $i = 0, 1, \dots$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^i(b + r) = b$,
enquanto que $\varphi^i(b + r) - \varphi^{i+1}(b + r) = |\varphi^i(b + r) - \varphi^{i+1}(b + r)| \geq$
 $S_r, i = 0, 1, \dots$, uma contradição.

A prova de (a) segue, então, como no teorema anterior.

ii) Se A é um atrator global então A atrai K , pois K é limitado.

Supondo que A atrai K , dados $\varepsilon > 0$ e $B \subseteq R$, $B \neq \emptyset$, tal
que $\text{diam}(B) < \omega$, sejam $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $\bigcup_{i=n_0}^{\infty} f^i(K) \subseteq B(A; \varepsilon)$ e
 $\bigcup_{j=n_1}^{\infty} f^j(B) \subseteq K$ (Pela parte (i) e pela Definição 1.5, estes n_0 e n_1
existem). Ora $f^{n_1}(B) \subseteq K \Rightarrow f^{n_0+n_1+j}(B) = f^{n_0+j}(f^{n_1}(B)) \subseteq f^{n_0+j}(K)$
 $\subseteq B(A, \varepsilon)$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Logo A atrai B . Como $B \subseteq R$ é um subconjunto não vazio e limitado arbitrário, conclui-se que A é um atrator global.

iii) Como $\overline{\gamma_+(f; K)} \subseteq K$, temos que $\Omega(f)$ é não vazio, compacto e atrai K , portanto, segue do item (ii) que $\Omega(f)$ é um atrator global.

Se $W \subseteq R$ é um atrator global, como K é limitado e $\Omega(f) = \omega(f; K) \neq \emptyset$, pelo Lema (2.8) $\Omega(f) \subseteq W$. Logo, $\Omega(f)$ é um atrator global minimal, como queríamos.

2.11 Corolário:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ uma partição de $[0;1]$ e $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \in R_+^m$. Então:

a) $I_0(\alpha)$ é um atrator global

b) Para todo subconjunto $B \subseteq R$, é válida a afirmação:

$$B \neq \emptyset \wedge \text{diam}(B) < \infty \Rightarrow \omega(\alpha; B) \neq \emptyset \wedge \omega(\alpha; B) \subseteq I_0(\alpha).$$

c) Para todo subconjunto $U \subseteq R$,

$$U \neq \emptyset \wedge \text{diam}(U) < \infty \Rightarrow (\exists i_0 = i_0(U) \in \mathbb{N}) \mid \bigcup_{i=i_0}^{\infty} F_{\alpha}^i(U) \subseteq I_0(\alpha)$$

d) Para todo subconjunto $V \subseteq R$, V é um atrator global se e somente se atrai $I_0(\alpha)$.

e) $\omega(\alpha) = \omega(\alpha; I_0(\alpha))$ é um atrator global.

- Demonstração:

Basta mostrar que $F_{\alpha}(I_0(\alpha)) \subseteq I_0$. Pela Definição 1.3, $\|f_{\alpha}\| = \max(1, \|\alpha\|_M)$, portanto, se $\|f_{\alpha}\| > 1$ e $\theta \in I_0(\alpha) \setminus [-1;1]$, temos:

$$\theta \in (1, \|f_{\alpha}\|) \Rightarrow F_{\alpha}(\theta) = \theta - 1 \Rightarrow 0 < F_{\alpha}(\theta) \leq \|f_{\alpha}\| - 1 \quad (2.12.1)$$

$$\theta \in [-\|f_{\alpha}\|; -1] \Rightarrow F_{\alpha}(\theta) = \theta - 1 \Rightarrow 1 - \|f_{\alpha}\| < 0 \quad (2.12.2)$$

Se $\theta \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, sejam $i, k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Então

$$\begin{aligned} \theta \in [-\beta_{i+1}; \beta_i] \Rightarrow F_\alpha(\theta) = \theta + \alpha_i \Rightarrow -\|f_\alpha\| \leq \\ \leq -\beta_{i+1} + \alpha_i \leq F_\alpha(\theta) < -\beta_i + \alpha_i \leq \alpha_i \leq \|f_\alpha\| \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

$$\begin{aligned} \theta \in (\beta_k; \beta_{k+1}) \Rightarrow F_\alpha(\theta) = \theta - \alpha_k - \|f_\alpha\| \leq -\alpha_k \leq \beta_k - \alpha_k \\ < F_\alpha(\theta) \leq \beta_{k+1} - \alpha_k \leq \beta_{k+1} \leq 1 \leq \|f_\alpha\| \end{aligned} \quad (2-12-4)$$

Como $F_\alpha(0)=0$, de (2-12-1), (2-12-2), (2-12-3) e (2-12-4)

obtemos $F_\alpha(I_0(\alpha)) \subseteq I_0(\alpha)$. É fácil ver que, se $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, então $F_\alpha(I_0(\alpha)) \subseteq \text{Int}(I_0(\alpha))$, como também, que $F_\alpha(\text{Int}(I_0(\alpha))) \subseteq \text{Int}(I_0(\alpha))$ para todo $\alpha \in R_+^m$.

Ora, fazendo $K = I_0(\alpha)$ e $f = \varphi = F_\alpha$, temos que F_α satisfaz as demais condições dos Teoremas 2.9 e 2.10. As propriedades acima seguem-se, portanto, destes teoremas.

2.12 Observação:

a) Note que as demonstrações dos Teoremas 2.10 e 2.11 dependem apenas da hipótese de que $f(K) \subseteq K$ e do comportamento da função em $R \setminus K$, não sendo exigida a continuidade de f .

As proposições dos Teoremas 2.10 e 2.11 são, portanto, verdadeiras, independentemente de f ser ou não contínua.

b) Se a hipótese $f(K) \subseteq K$ do Teorema 2.9 for substituída por $f(K) = K$, então K é um atrator global estável. De fato, é fácil ver, da demonstração deste teorema, que $f(B(K; \varepsilon)) \subseteq \varphi(B(K; \varepsilon)) \subseteq B(K; \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$.

c) Se φ não satisfaz $\varphi(a-) > a$ ou $\varphi(b+) < b$, então $\Omega(f) = \omega(f; K)$ não é, necessariamente, um atrator global. Pois, se $K = [-1, 1]$, $f = \varphi$ e φ é definida por:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\theta + 1), & \theta > 1 \\ \frac{1}{2}\theta, & -1 \leq \theta \leq 1 \\ \frac{1}{2}(\theta - 1), & \theta < -1 \end{cases}$$

então f satisfaz as condições do Teorema 2.9, mas

$$\alpha(f) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{f^i(K)} = \bigcap_{i=0}^{\infty} [-2^{-i}; 2^{-i}] = \{0\},$$

enquanto que, se $\theta > 1$ então $\gamma_+(f; \theta) < (1; \infty)$.

d) Se f não satisfaz $\alpha \leq f(\theta) < \theta$ para $\theta > b$ ou $\theta < f(\theta) \leq b$ para $\theta < a$, então o Teorema 2.10 não é necessariamente válido, como se pode ver tomando $a = -1$, $b = 1$, e $f = \varphi$ definida por:

$$f(\theta) = \theta, \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

$$f(\theta) = \theta - 3, \quad 1 < \theta < 2$$

$$f(\theta) = 0, \quad \theta \geq 2$$

$$f(\theta) = -f(-\theta), \quad (\theta) < -1$$

Neste caso, $f(\theta) < \alpha$ para $1 < \theta < 2$ e, se $\theta \in (1; 2)$ ou $\theta \in (-2; -1)$ então $f^{2k}(\theta) = \theta, k = 1, 2, \dots$. Portanto, $K = [-1; 1]$ não é um atrator global.

Fazendo $a = -1, b = 1, f = \varphi$ e definindo f por:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & -1 < \theta < 2 \\ 2, & \theta \geq 2 \\ 0, & \theta \leq -1 \end{cases}$$

Então $f(K) \subseteq K$, mas K não é um atrator global. Pois, como $f(2) = 2$, temos $f^n(2) = 2$ para todo n inteiro não negativo.

Portanto, como mostram os exemplos dados em (c) e (d), não se pode dispensar qualquer uma das hipóteses dos Teoremas 2.9 e 2.10.

CAPÍTULO 3

CONJUNTOS LIMITE, PONTOS DE PERIODICIDADE
E CONJUNTOS INVARIANTES POR F_α

Conforme mostraremos no Capítulo 5, para toda função $g: R \rightarrow R$, o problema:

$$x(t) = g(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = c_0,$$

recai na equação de diferenças finitas:

$$x_{n+1} = (I + g)(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = c_0,$$

Onde I é a função identidade em R . Por esta razão, abordaremos agora, utilizando os resultados obtidos no Capítulo 2, aspectos importantes da dinâmica gerada pelas funções F_α e, portanto, das soluções das equações:

$$x_{n+1} = F_\alpha(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = c_0,$$

tais como as propriedades dos conjuntos $\omega(\alpha, A)$, onde $A \in I_0(\alpha)$, $A \neq \emptyset$, e do conjunto dos pontos de periodicidade contidos em $I_0(\alpha)$.

No Capítulo 2 de Hale [10] são estabelecidos vários resultados referentes à dinâmica gerada por funções contínuas $T: X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico completo. O livro de Lakshmikantham e Trigiante [17] aborda a teoria geral das equações de diferenças finitas e contém, além de importantes exemplos de aplicações, resultados básicos análogos aos da teoria de equações

diferenciais ordinárias. Estudando equações de diferenças finitas lineares de ordem n , Hartman [11] estabelece, também, resultados análogos aos da teoria de equações diferenciais lineares de ordem n . Henderson [12] estabelece condições para a continuidade e diferenciabilidade das soluções de problemas de valor inicial e de contorno para equações de diferenças finitas de ordem n não lineares.

A dinâmica gerada por transformações de intercâmbio de intervalos foi estudada por Keane [14]. Lasota e Yorke [15] demonstraram a existência de uma medida invariante para uma classe de funções seccionalmente contínuas que, entretanto, não contém a função F_α .

A maioria dos resultados do presente capítulo depende do seguinte lema:

3.1 Lema:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ uma partição de $[0,1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$. Se $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo limitado, valem as seguintes afirmações:

a) Para todo $p \in \mathbb{Z}_+$, se $\bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(J) \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$, então:

$$\theta, \tau \in J \Rightarrow F_\alpha^i(\tau) - F_\alpha^i(\theta) = \tau - \theta, \quad i = 0, \dots, p+1$$

b) Se $r_0 = \rho\left(\bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(J), D(\alpha)\right) > 0$ então $F_\alpha^i(B(J;r)) =$

$$= B(F_\alpha^i(J); r), \quad i=0, \dots, p+1 \text{ e } \bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(B(J;r)) \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha), \text{ para } 0 < r \leq r_0.$$

c) Se $r_0 = \rho\left(\bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(J), D(\alpha)\right) > 0$ então, para $0 < r < r_0$, $F_\alpha^i(\overline{B(J;r)}) =$

$$\overline{F_\alpha^i(B(J;r))} = \overline{B(F_\alpha^i(J);r)}, \quad i = 0, \dots, p+1, \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(\overline{B(J;r)}) \subseteq R \setminus D(\alpha)$$

- Demonstração:

a) Para verificar (a), basta ver que, para $i = 0, \dots, p$, se $\theta, \tau \in J$ então $F_\alpha^i(\theta), F_\alpha^i(\tau)$ pertencem a uma mesma componente conexa de $R \setminus D(\alpha)$, onde F_α se comporta, neste caso, como uma translação.

b) é uma consequência do item (a), notando-se que $F_\alpha^i(J)$ é um intervalo em $R \setminus D(\alpha)$ e F_α se comporta, neste caso, como uma translação

c) Para verificar (c), é suficiente notar que, para $0 < r < r_0$, $i = 0, \dots, p$, $\overline{B(F_\alpha^i(J);r)} \subseteq R \setminus D(\alpha)$.

Como consequência do Lema 3.1 acima temos que, se K é um intervalo limitado e $\gamma_+(\alpha, K) \subseteq R \setminus D(\alpha)$, então:

$$\theta, \tau \in K \Rightarrow F_\alpha^i(\tau) - F_\alpha^i(\theta) = \tau - \theta, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

Temos também que, se $\overline{\gamma_+(\alpha, K)} \subseteq R \setminus D(\alpha)$ então existe $r_0 > 0$ tal que:

$$\overline{F_\alpha^i(B(K;r))} = \overline{B(F_\alpha^i(K);r)}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3.1.2)$$

$$\gamma_+(\alpha, B(K;r)) \subseteq R \setminus D(\alpha), \quad \text{para } 0 < r \leq r_0$$

$$\overline{F_\alpha(B(K;r))} = \overline{F_\alpha^i(B(K;r))} = \overline{B(F_\alpha^i(K);r)}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3.1.3)$$

$$\gamma_+(\alpha, \overline{B(K;r)}) \subseteq R \setminus D(\alpha), \quad \text{para } 0 < r < r_0$$

De fato, se $\gamma_+(\alpha, K) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ então, para todo $p \in \mathbb{Z}_+$,

$\bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(K) \subseteq R \setminus D(\alpha)$. Se $\overline{\gamma_+(\alpha, K)} \subseteq R \setminus D(\alpha)$ então, como $\overline{\gamma_+(\alpha, K)}$ é

compacto, temos que $\rho(\gamma_+(\alpha, K, D\alpha)) > 0$. Fazendo $r_0 = \rho(\gamma_+(\alpha, K, D\alpha))$, temos $r_0(\rho) = \rho\left(\bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(K, D\alpha)\right) \geq r_0 > 0$, $\rho = 0, 1, \dots$, e (3.1.2), (3.1.3) seguem.

Uma outra consequência do Lema 3.1 é o fato de que, se U é um intervalo, $\rho \in \mathbb{Z}_+$ e $\bigcup_{i=0}^p F_\alpha^i(U) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ então, para todo $j = 0, \dots, p+1$ existe $b_j \in \mathbb{R}$ tal que $F_\alpha^j(U) = b_j + U$. É suficiente notar que, para $i = 0, \dots, p$, $F_\alpha^i(U)$ é um intervalo contido em $R \setminus D(\alpha)$ e a restrição de F_α a cada componente conexa de $R \setminus D(\alpha)$ é uma translação.

O teorema abaixo, válido para a classe das funções F_α , é um dos resultados principais deste capítulo e tem uma interessante consequência: F_α não pode ser caótica.

3.2 Teorema:

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ uma partição de $[0, 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$. Então:

- a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a família $C_n(P(\alpha, n))$ das componentes conexas de $P(\alpha, n)$ é finita.
- b) A classe $\{P(\alpha, n) : n \in \mathbb{N}\}$ tem no máximo $3m + 1$ elementos.

- Demonstração:

1) Seja $n \in \mathbb{N}$. $P(\alpha, n)$ é limitado pois, do contrário existiria $t_0 \in R \setminus I_0(\alpha)$ com $F_\alpha^{j_n}(t_0) \in R \setminus I_0(\alpha)$ para $j = 0, 1, \dots$, contra o Corolário 2.11. Suponhamos $P(\alpha, n) \neq \emptyset$ e seja $K \in C_n(P(\alpha, n))$. Afirmamos que $\overline{\gamma_+(\alpha; K)}$ contém pelo menos um ponto de $D(\alpha)$. De fato, se fosse $\overline{\gamma_+(\alpha; K)} \subseteq R \setminus D(\alpha)$ então, como K é limitado, do Lema 3.1 acima obtemos um $r > 0$ tal que $\gamma_+(\alpha; B(K; r)) \subseteq R \setminus D(\alpha)$. Sendo

$B(K; r)$ um intervalo, $F_{\alpha}^i(\tau) - F_{\alpha}^i(\theta) = \tau - \theta$, $i = 0, 1, \dots$, para todo $\theta, \tau \in B(K; r)$. Portanto, tomando $\theta \in K$ e $\tau \in B(K; r)$ temos $F_{\alpha}^n(\tau) - F_{\alpha}^n(\theta) = F_{\alpha}^n(\tau) - \theta = \tau - \theta$, logo $F_{\alpha}^n(\tau) = \tau$. Uma vez que τ é arbitrário, temos $K \subseteq B(K; r) \subseteq P(\alpha; n)$. Da maximalidade de K segue $B(K; r) = K$, uma contradição. Logo $\overline{\gamma_+(\alpha; K)} \cap D(\alpha) \neq \emptyset$, como queríamos.

ii) Seja $K \in Cn(P(\alpha, n))$ tal que $\bar{K} \cap D(\alpha) = \emptyset$. Uma vez que $F_{\alpha}^n(K) = K$, temos $\gamma_+(\alpha, K) = \bigcup_{i=0}^{n-1} F_{\alpha}^i(K)$. Pelo item (i) acima, $\overline{\gamma_+(\alpha, K)} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{F_{\alpha}^i(K)}$ contém pelo menos um ponto de $D(\alpha)$. Portanto, se $p_0 = \min\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid F_{\alpha}^i(K) \cap D(\alpha) \neq \emptyset\}$, então $p_0 > 0$ e $\bigcup_{i=0}^{p_0-1} F_{\alpha}^i(K) \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$.

Conforme o Lema 3.1, para todo $i = 0, \dots, p_0$, $\overline{F_{\alpha}^i(K)} = F_{\alpha}^i(\bar{K})$ e $F_{\alpha}^i(K)$ é um intervalo. Como $K \subseteq P(\alpha, n)$, temos que $F_{\alpha}^{p_0}(K) \subseteq U$, para algum $U \in Cn(P(\alpha, n))$. Este U tem a propriedade $\bar{U} \cap D(\alpha) \neq \emptyset$, pois $\overline{F_{\alpha}^{p_0}(K) \cap D(\alpha)} \subseteq \bar{U} \cap D(\alpha)$ e $\overline{F_{\alpha}^{p_0}(K) \cap D(\alpha)} \neq \emptyset$.

Uma vez que K é conexo e $K = F_{\alpha}^n(K) = F_{\alpha}^{n-p_0}(F_{\alpha}^{p_0}(K)) \subseteq F_{\alpha}^{n-p_0}(U) \subseteq \gamma_+(\alpha; U)$, segue que $K \subseteq V$, para alguma componente conexa V de $\gamma_+(\alpha; U)$. Como $V \subseteq \gamma_+(\alpha; U) \subseteq P(\alpha, n)$, da maximalidade de K segue $K = V$.

Concluimos, portanto, que para toda componente conexa K de $P(\alpha, n)$, $\bar{K} \cap D(\alpha) \neq \emptyset$ ou existe $U \in Cn(P(\alpha, n))$ tal que $\bar{U} \cap D(\alpha) \neq \emptyset$ e $K \in Cn(\gamma_+(\alpha; U))$. Mas $\gamma_+(\alpha; U) = \bigcup_{i=0}^{n-1} F_{\alpha}^i(U)$, logo, de acordo com a definição de F_{α} , $Cn(\gamma_+(\alpha; U))$ é finita. Visto que $D(\alpha)$ é finito, (a) segue.

iii) Dos itens (i) e (ii) acima temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se

$P(\alpha, n) \neq \emptyset$ então $\overline{P(\alpha, n)} \cap D(\alpha) \neq \emptyset$. Como $Cn(P(\alpha; n))$ é finita, existem $p \in N$ e intervalos $K_1, \dots, K_p \subseteq R$ tais que $\overline{P(\alpha, n)} = \bigcup_{i=1}^p K_i$.

Portanto, se $b \in D(\alpha)$ e $b \neq 0$ existem no máximo 3 elementos de $\{P(\alpha; n) | n \in N\}$ (um dos quais, possivelmente, $\gamma_+(\alpha; b)$) cujo fecho contém b , e se $b = 0$ existe no máximo um elemento $P(\alpha, n_0) \in \{P(\alpha; n) | n \in N\}$ com $b \in \overline{P(\alpha, n_0)}$. Visto que F_α é ímpar e $D(\alpha)$ tem, no máximo, n elementos positivos, isto demonstra (b).

Nos teoremas seguintes, deduzimos condições suficientes para que toda órbita $\gamma_+(\alpha; \theta)$ seja finita, bem como uma condição necessária e suficiente para que $\gamma_+(\alpha; \theta)$ com $\theta \neq 0$ (e, portanto, toda solução não trivial de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$) seja oscilatória.

3.3 Lema:

Sejam $m \in N$, $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in R_+^m$. Então, para todo conjunto $A \subseteq I_0(\alpha)$, $F_\alpha(\gamma_-(\alpha, A) \setminus I_0(\alpha)) \subseteq I_0(\alpha) \setminus \gamma_-(\alpha, A)$.

- Demonstração:

Se $A = \emptyset$ ou $I_0(\alpha) \setminus \gamma_-(\alpha, A) = \emptyset$, nada mais há a demonstrar. Se $A \neq \emptyset$ e $t_0 \in I_0(\alpha) \setminus \gamma_-(\alpha, A)$, suponhamos $F_\alpha(t_0) \in \gamma_-(\alpha, A)$. Então existe $p \in Z_+$ tal que $F_\alpha^{p+1}(t_0) = F_\alpha^p(F_\alpha(t_0)) \in A$. Mas $F_\alpha^{p+1}(t_0) \in A$ acarreta $t_0 \in F_\alpha^{-(p+1)}(A)$, e portanto $t_0 \in \gamma_-(\alpha, A)$, uma contradição. Logo, o resultado segue.

3.4 Teorema:

Sejam $m \in N$, $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in R_+^m$. Se $I_0(\alpha) \cap \gamma_-(\alpha, D(\alpha))$ é finito ou α_i é racional para $i=0, \dots, m-1$, então $\gamma_+(\alpha, \theta)$ é finita para todo $\theta \in R$.

- Demonstração:

i) De acordo com o Corolário 2.11, podemos supor que $\theta \in I_0(\alpha)$ sem perda de generalidade.

Seja $K_0(\alpha) = I_0(\alpha) \setminus \gamma_-(\alpha; D(\alpha))$ e suponhamos $\gamma_-(\alpha; D(\alpha)) \cap I_0(\alpha)$ finito. Então a classe $C_n(K_0(\alpha))$ das componentes conexas de $K_0(\alpha)$ é finita, i.e. $C_n(K_0(\alpha)) = \{V_1, \dots, V_k\}$. Pelo Lema 3.3 acima, $F_\alpha^n(V_i) \subseteq K_0(\alpha) \subseteq R \setminus D(\alpha)$, $i = 1, \dots, k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, logo $\gamma_+(\alpha; V_i) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ e, conforme o Lema 3.1, $F_\alpha^n(V_i) = b_{in} + V_i$, para algum $b_{in} \in R$.

Afirmamos que, para $i \in \{1, \dots, k\}$, $n \in N$, ou bem $F_\alpha^n(V_i) = V_i$ ou bem $F_\alpha^n(V_i) \cap V_i = \emptyset$. De fato, uma vez que a restrição de F_α^n a V_i é uma translação, não podemos ter $F_\alpha^n(V_i) \subseteq V_i$ e $F_\alpha^n(V_i) \neq V_i$. Logo, se $F_\alpha^n(V_i) \cap V_i \neq \emptyset$ e $F_\alpha^n(V_i) \neq V_i$, então $F_\alpha^n(V_i)$ contém um ponto de $\gamma_-(\alpha; D(\alpha))$, contra a afirmação de que $F_\alpha^n(K_0(\alpha)) \subseteq K_0(\alpha)$.

ii) Seja, então, $\theta \in K_0(\alpha)$. Como $F_\alpha^n(\theta) \in V_i$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, existem $i_0 \in \{1, \dots, k\}$, $n_1, n_2 \in N$ tais que $n_1 < n_2$ e $F_\alpha^{n_1}(\theta), F_\alpha^{n_2}(\theta) \in V_{i_0}$. Isto acarreta que $F_\alpha^{n_2 - n_1} \left(V_{i_0} \right) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ e, portanto, $F_\alpha^{n_2 - n_1} \left(V_{i_0} \right) = V_{i_0}$. Como $F_\alpha^{n_1}|_{V_{i_0}}$ é uma translação, segue que $F_\alpha^{n_2}(\theta) = F_\alpha^{n_2 - n_1} \left(F_\alpha^{n_1}(\theta) \right) = F_\alpha^{n_1}(\theta)$. Sendo θ arbitrário, tem-se que $\gamma_+(\alpha; t)$ é finita para $t \in K_0(\alpha)$. Dado $\theta \in \gamma_-(\alpha; D(\alpha)) \cap I_0(\alpha)$, ou bem $\gamma_+(\alpha; \theta) \subseteq \gamma_-(\alpha; D(\alpha)) \cap I_0(\alpha)$ ou bem existe $p \in Z_+$ tal que $F_\alpha^p(\theta) \in K_0(\alpha)$. Como $\gamma_-(\alpha; D(\alpha))$ e $\gamma_+(\alpha; t)$, $t \in K_0(\alpha)$, são finitos, segue que $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é finita.

iii) Seja $\alpha \in R_+^m$ com α_i racional, $i = 0, \dots, m-1$. Se $\alpha = (0, \dots, 0)$, nada há a demonstrar. Se $\alpha \neq (0, \dots, 0)$ existe um subconjunto não

vazio de índices $\{i_0, \dots, i_s\} \subseteq \{0, \dots, m-1\}$ tal que, para $j \in \{1, \dots, s\}$, existem $p_j, q_j \in \mathbb{N}$ com $\alpha_{i_j} = p_j/q_j$.

Dado $\theta \in I_0(\alpha)$, suponhamos $\gamma_+(\alpha; \theta)$ infinita. Como $\gamma_+(\alpha; \theta) \subseteq I_0(\alpha)$, obtemos $\gamma'_+(\alpha; \theta) \neq \emptyset$. Logo, existe uma sequência $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots$, com $\left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| > 0$, $i = 1, 2, \dots$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} \left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| = 0$. Mas, da definição de F_α segue que $F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) = r_{s+1} + \sum_{j=0}^s r_j \alpha_j$, onde $r_0, r_1, \dots, r_{s+1} \in \mathbb{Z}$. Portanto,

fazendo $q = q_0 \dots q_s$ e $n_j = q/q_j$, $j = 1, \dots, s$, obtemos

$\left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| = (1/q) \left| q r_{s+1} + \sum_{j=0}^s n_j q_j r_j \right|$. Como $r_0, r_1, \dots, r_{s+1}$ são inteiros, temos que $\left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| = 0$ ou $\left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| \geq 1/q$ para $i = 0, 1, 2, \dots$, contra o fato de que $\left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| > 0$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} \left| F_\alpha^{k_{i+1}}(\theta) - F_\alpha^{k_i}(\theta) \right| = 0$. Logo $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é finita.

O resultado que deduziremos agora é de grande importância, pois, entre as aplicações da equação $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x(t))$, temos a descrição de fenômenos oscilatórios.

3.5 Teorema:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\{\beta_0, \dots, \beta_m\}$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$. Então, toda solução não trivial de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$ é oscilatória se, e somente se $\alpha_i > 0$, $i = 0, \dots, m-1$, e $F_\alpha^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

- Demonstração:

Se $\alpha_i = 0$ para algum $i \in \{0, \dots, m-1\}$ então, para todo

$t_0 \in (\beta_i; \beta_{i+1}]$, a solução de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, $x_0 = t_0$ é $x_0 = t_0$, $n = 0, 1, \dots$, e portanto é não trivial e não oscilatória. Se $F_\alpha(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in I_0(\alpha) \setminus \{0\}$, então a solução de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, $x_0 = t_0$ é $x_0 = t_0$, $x_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Isto demonstra a necessidade das condições acima.

Por outro lado, se $F_\alpha^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ e $\alpha_i > 0$, $i = 0, \dots, m-1$ então $\alpha_i > 0$, $i = 0, \dots, m-1$, e $\gamma_-(\alpha; 0) = \{0\}$. Portanto, para todo $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a solução de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, $x_0 = t_0$ é tal que $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = 0, 1, \dots$ (portanto, $\gamma_+(\alpha; t_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Seja $t_0 > 0$ e suponhamos que $x_{n_0+j} = F_\alpha^{n_0+j}(t_0) > 0$, $j = 0, 1, \dots$, (ou $x_{n_0+j} < 0$, $j = 0, 1, \dots$, em cujo caso a demonstração é semelhante), para algum $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Como $\alpha_i > 0$, $i = 0, \dots, m-1$, temos $0 < x_{n_0+j+1} < x_{n_0+j}$, $j = 0, 1, \dots$, e portanto, $\lim_{j \rightarrow \infty} |x_{n_0+j+1} - x_{n_0+j}| = 0$. Mas, se $\alpha_0 = \min\{\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}\}$ então $0 < x_{n_0+j+1} < x_{n_0+j}$, $j = 0, 1, \dots$, acarreta $|x_{n_0+j+1} - x_{n_0+j}| \geq \alpha_0 > 0$, $j = 0, 1, \dots$, contra $\lim_{j \rightarrow \infty} |x_{n_0+j+1} - x_{n_0+j}| = 0$. Logo, o resultado segue.

3.6 Observações:

a) Da definição de F_α temos que, se a solução de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, $x_0 = t_0$, tem um zero generalizado em $n_0 \geq 1$ ([11], pag. 2, [12], pag. 749) então ou bem $x_{n_0-1}x_{n_0} < 0$, ou bem $x_{n_0} = 0$. Não podemos ter $(-1)^j x_{n_0-j}x_{n_0} > 0$ e $x_{n_0-j+1} = \dots = x_{n_0} = 0$ para $j > 1$, pois $x_{n_0-j+1} = 0$ acarreta $x_{n_0+j+p} = 0$, $p = 0, 1, 2, \dots$

b) A equação $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, nem sempre é desconjugada ([11], pag. 2, [12], pag. 749). De fato, tomando $m = 2$, $\beta_1 = 1/2$,

$\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = 3/2$, temos que se $x(1/4)$ e $x(3/4)$ são as soluções de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, para $x_0 = 1/4$ e $x_0 = 3/4$ respectivamente, então $(x_m(3/4) - x_m(1/4))$ tem uma infinidade de zeros generalizados, enquanto que $x_m(3/4) - x_m(1/4) \neq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$

c) Do exemplo acima temos que uma solução x de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ nem sempre é contínua em relação ao valor inicial. Para constatar este fato, basta considerar a solução de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, onde m, β e α são como acima, para $x_0 = 1/2$. Concluimos, portanto, que a continuidade do segundo membro é uma condição essencial para que seja válido o Teorema 2.1 de [12].

d) Note que a condição $\alpha_i > 0$ e $F_\alpha^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ do Teorema 3.5 é satisfeita se, e somente se, $\alpha_0 > \beta_1$ e ou bem $\alpha_i > \beta_{i+1}$ ou bem $0 < \alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Como consequência do teorema abaixo, obteremos uma condição necessária e suficiente para a estabilidade das órbitas $\gamma_+(\alpha; t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ (e, portanto, das soluções de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, $x_0 = t_0$).

3.7 Teorema:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\{\beta_0, \dots, \beta_m\}$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$. Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, se $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é infinita então $\gamma'_+(\alpha; t_0) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$.

- Demonstração:

i) Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é infinita. Uma vez que $I_0(\alpha)$ é um atrator global e $D(\alpha)$ é finito, podemos supor, sem perda de generalidade, $\gamma_+(\alpha; t_0) \subseteq I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$.

Seja, então, $t_0 \in I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$ tal que $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é infinita, está contida em $I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$, e $\gamma'_+(\alpha; t_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$. Neste caso,

$\gamma'_+(\alpha; t_0) \subseteq I_0(\alpha)$. Logo, $\gamma'_+(\alpha; t)$ é compacto, e $\rho(\gamma'_+(\alpha; t_0), D(\alpha)) > 0$. Da continuidade de F_α em $R \setminus D(\alpha)$ obtemos $\gamma'_+(\alpha; \theta) \subseteq \gamma'_+(\alpha; t_0)$, para todo $\theta \in \gamma'_+(\alpha; t_0)$.

ii) Suponhamos, como acima, que $\gamma_+(\alpha; t_0) \subseteq I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$ e $\gamma'_+(\alpha; t_0) \subseteq R \setminus D(\alpha)$. Sejam $\theta \in \gamma'_+(\alpha; t_0)$ e $r_0 = r_0(\alpha, t_0) = \rho(\gamma'_+(\alpha; t_0), D(\alpha))$. Existe uma sequência $j_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, 2, \dots$, com $\lim_{i \rightarrow \infty} j_i = \infty$, $F_\alpha^{j_i}(t_0)$ crescentes, (ou decrescentes, em cujo caso a demonstração é semelhante) e $\lim_{i \rightarrow \infty} F_\alpha^{j_i}(t_0) = \theta$. Portanto existem $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, $s_1 < s_2$, tais que $\theta - r_0 < F_\alpha^{s_1}(t_0) < F_\alpha^{s_2}(t_0) < \theta$. Uma vez que $\gamma_+(\alpha; \theta) \subseteq \gamma'_+(\alpha; t_0)$, obtemos $\rho(\gamma_+(\alpha; \theta), D(\alpha)) \geq r_0 > 0$ e, conforme o Lema 3.1, $\gamma_+(\alpha; (\theta - r_0; \theta + r_0)) \subseteq R \setminus D(\alpha)$. Fazendo $n_0 = s_2 - s_1$, $\theta_0 = F_\alpha^{s_1}(t_0)$ e $\delta = F_\alpha^{n_0}(\theta_0) - \theta_0 = F_\alpha^{s_2}(t_0) - F_\alpha^{s_1}(t_0)$, temos $\theta - r_0 < \theta_0 < F_\alpha^{n_0}(\theta_0) < \theta$. Pelo Lema 3.1, $F_\alpha^{n_0+p}(\theta_0) - F_\alpha^p(\theta_0) = F_\alpha^{n_0}(\theta_0) - \theta_0 = \delta$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Logo $F_\alpha^{(l+1)n_0}(\theta_0) - F_\alpha^{ln_0}(\theta_0) = \delta$, $l = 0, 1, \dots$, e daí tiramos $F_\alpha^{ln_0}(\theta_0) = \theta_0 + l\delta$, $l = 0, 1, \dots$. Como $\delta > 0$, temos que $\{F_\alpha^{ln_0}(\theta_0) \in \mathbb{R} \mid l \in \mathbb{N}\} = \{F_\alpha^{s_1+ln_0}(t_0) \in R \mid l \in \mathbb{N}\} \subseteq \gamma_+(\alpha; t_0)$ é não limitado, contra $\gamma_+(\alpha; t_0) \subseteq I_0(\alpha)$. Logo, o resultado segue.

Do resultado que apresentamos a seguir, obtemos uma importante propriedade das funções F_α (e, por conseguinte, das soluções das equações $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$): Se $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é infinita, então é instável. Estabelecemos também uma condição necessária e suficiente para a estabilidade das órbitas $\gamma_+(\alpha; \theta)$, $\theta \in R$.

3.8 Corolário I:

Sejam $m, \langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ e α como no Teorema 3.7. Para todo $t_0 \in R$, se $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é infinita ou $\gamma_+(\alpha; t_0) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$ então existe $r = r(\alpha) > 0$ tal que:

$$\forall V \in \mathcal{V}(t_0) \rightarrow \left[\exists (j, t) \in \mathbb{Z}_+ \times V \right] \left| F_\alpha^j(t) - F_\alpha^j(t_0) \right| > r \quad (3.8.1)$$

- Demonstração:

i) Seja $t_0 \in R$ e suponhamos $\gamma_+(\alpha; t_0)$ infinita e contida em $R \setminus D(\alpha)$. (O caso $\gamma_+(\alpha; t_0) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$ é semelhante). Segundo o Teorema 3.7, $\gamma_+(\alpha; t_0) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$. Logo, se $d_n = \rho \left(\bigcup_{i=0}^n (F_\alpha^i(\theta)), D(\alpha) \right)$, $n=0,1,2,\dots$, temos $0 < d_{n+1} \leq d_n$, $n=0,1,\dots$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

Sejam $r_0 = r_0(\beta) = \min(\beta_{i+1} - \beta_i \mid i=0,\dots,m-1)$ e $r_1 = r_1(\alpha) = \min(|f_\alpha(s+) - f_\alpha(s-)| \mid s \in D(\alpha))$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $0 < \varepsilon_0 < \min(\varepsilon, r_0, r_1/2, \rho(t_0, D(\alpha)))$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ (o qual existe) tal que $0 < d_n \leq d_{n_0} < \varepsilon_0$ para $n \geq n_0$.

$D(\alpha)$ e $\bigcup_{i=0}^{n_0} (F_\alpha^i(t_0))$ sendo finitos, existem $p = p(n_0) \in \{1, \dots, n_0\}$ e $s = s(n_0) \in D(\alpha)$ tais que $d_{n_0} = d_p = |F_\alpha^p(t_0) - s|$ e $d_p < d_i$, $i=0,\dots,p-1$.

Do Lema 3.1 tiramos $F_\alpha^i \left([t_0 - d_{p-1}; t_0 + d_{p-1}] \right) \subseteq R \setminus D(\alpha)$, $i=0,\dots,p-1$, e $F_\alpha^i(t) - F_\alpha^i(t_0) = t - t_0$ para $t_0 - d_{p-1} < t < t_0 + d_{p-1}$ e $i=0,1,\dots,p$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$, sejam ε_0, n_0, p e s como no item (i) e $\delta_0 = \min(\varepsilon_0, d_{p-1})$. Se $F_\alpha^p(t_0) < s$ então $F_\alpha^p(t_0) + d_p = s$. Logo, tomando $t_0 + d_p < t < t_0 + \delta_0$, obtemos $t_0 - \delta_0 < F_\alpha^p(t_0) < s < F_\alpha^p(t) < t_0 + \delta_0$. Das definições de ε_0, δ_0 e F_α segue $|F_\alpha^{p+1}(t) - F_\alpha^{p+1}(t_0)| = |F_\alpha^p(t) - F_\alpha^p(t_0) + f_\alpha(s-) - f_\alpha(s+)| = |t - t_0 + f_\alpha(s-) - f_\alpha(s+)| \geq |f_\alpha(s+) - f_\alpha(s-)| - |t - t_0| \geq r_1 - |t - t_0| > r_1 - \varepsilon_0 > r_1/2$. Se $F_\alpha^p(t_0) > s$

então, escolhendo t de modo que $t_0 - \delta_0 < t < t_0 - d_p$ obtemos, de maneira análoga, $r_1/2 < |F_\alpha^{p+1}(t) - F_\alpha^{p+1}(t_0)|$, e a demonstração está concluída.

3.9 Corolário II:

Sejam $m, (\beta_0, \dots, \beta_m)$ e α como no Teorema 3.7. Para todo $t_0 \in R$, a órbita $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é estável se, e somente se, é finita e está contida em $R \setminus D(\alpha)$.

- Demonstração:

A necessidade da condição acima decorre do Corolário 3.8. Por outro lado, suponhamos $\gamma_+(\alpha; t_0)$ finita e contida em $R \setminus D(\alpha)$. Então, $r_0 = \rho(\gamma_+(\alpha; t_0), D(\alpha)) > 0$ e do Lema 3.1 segue $\gamma_+(\alpha; (t_0 - r_0; t_0 + r_0)) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ e $F_\alpha^i(t_2) - F_\alpha^i(t_1) = t_2 - t_1$, para todo $t_1, t_2 \in (t_0 - r_0; t_0 + r_0)$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, dado $\varepsilon \in (0, r_0)$, escolhendo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que $0 < \delta < \min(\varepsilon, r_0)$ temos que $|t - t_0| < \delta$ acarreta $|F_\alpha^i(t) - F_\alpha^i(t_0)| = |t - t_0| < \varepsilon$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Logo $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é estável.

Note que $\gamma_+(\alpha; 0)$ é estável se e somente se $\alpha_0 = 0$ (em cujo caso $0 \in R \setminus D(\alpha)$) e que, pelo Corolário 3.9, se $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é estável para algum $t_0 \in R$ então, para todo t suficientemente próximo de t_0 , $|F_\alpha^i(t) - F_\alpha^i(t_0)|$ é contante, para $i \in \mathbb{Z}_+$. Portanto as órbitas $\gamma_+(\alpha; t_0)$, $t_0 \in R$, e as soluções $x(t_0)$ de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$ não podem ser assintoticamente estáveis ([17], pag. 88, Definição 4.1.2).

Mostraremos agora que, apesar da solução x de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$ não ser, necessariamente, contínua em relação ao valor inicial, podemos deduzir resultados análogos aos Teoremas 2.1 e 2.2 de [12].

3.10 Teorema:

Sejam $m, \{\beta_0, \dots, \beta_m\}$ e α como antes e $x(n, t_0)$ a solução de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$, $x_0 = t_0$. Se $t_0 \in R \setminus \overline{\gamma_-(\alpha; D(\alpha))}$ então valem as seguintes afirmações:

a) Dados $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{Z}_+$, existe $\delta(\varepsilon, t_0, p) > 0$ tal que, se

$$|t_0 - \theta_0| < \delta \text{ então } |x_n(t_0) - x_n(\theta_0)| < \varepsilon, n = 0, \dots, p.$$

b) $\frac{dx}{dt}(x_n(t_0)) = 1, n \in \mathbb{N}$

- Demonstração:

É fácil constatar que (a) verifica-se com $\delta < \min(\varepsilon, \rho((t_0, \dots, F_\alpha^p(t_0)), D(\alpha)))$ e (b) é imediato.

Demonstraremos agora uma interessante propriedade do atrator global $\omega(\alpha)$ válida para as funções F_α : $\omega(\alpha)$ contém pelo menos um ponto de $D(\alpha)$.

3.11 Teorema

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\{\beta_0, \dots, \beta_m\}$ e α como antes, e $\omega(\alpha) = \omega(\alpha; I_0(\alpha))$. Então, $\omega(\alpha) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$.

- Demonstração:

Se $\gamma_+(\alpha; t_0)$ é infinita para algum $t_0 \in R$ então, pelo Teorema 3.7 $\gamma'_+(\alpha; t_0) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$. Logo existem $s_0 \in D(\alpha)$ e uma sequência $j_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots$, com $\lim_{i \rightarrow \infty} j_i = \infty$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} F_\alpha^{j_i}(t_0) = s_0$. Como existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\alpha^{j_i}(t_0) \in I_0(\alpha)$ para $i \geq i_0$, temos que $s_0 \in \omega(\alpha)$. Consequentemente, $\omega(\alpha) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$.

Se $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é finita para todo $\theta \in R$, então $P(\alpha, n_0) \neq \emptyset$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto, se K_0 é uma componente conexa de $P(\alpha, n_0)$, então,

como $F_\alpha^{n_0}(K_0) = K_0$, $\gamma_+(\alpha; K_0) = \bigcup_{i=0}^{n_0-1} F_\alpha^i(K_0)$ é não vazia, invariante e

está contida em $I_0(\omega)$. Uma vez que $F_\alpha^i(I_0(\omega)) \subseteq I_0(\omega)$, temos $\omega(\omega) =$

$$= \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} F_\alpha^j(I_0(\omega))} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{F_\alpha^i(I_0(\omega))}, \text{ logo } \overline{\gamma_+(\alpha; K_0)} \subseteq \omega(\omega).$$

Mas, pelo Teorema 3.2, $\overline{\gamma_+(\alpha; K_0)} \cap D(\omega) \neq \emptyset$. Então $\omega(\omega) \cap D(\omega) \neq \emptyset$,

e o resultado segue.

Sendo F_α descontínua, nada podemos afirmar quanto à invariância de $\omega(\omega)$. Mas, o teorema seguinte estabelece que, sob certas condições, vale um resultado análogo ao Lema 2.2 de [10]:

$F_\alpha(\omega(\omega))$ é denso em $\omega(\omega)$.

3.12 Teorema:

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $(\beta_0, \dots, \beta_m)$, α como Teorema 3.7. Se $\partial\omega(\alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$ então $\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))} = \omega(\alpha)$.

- Demonstração:

i) Sejam $t_0 \in \omega(\alpha) \setminus D(\alpha)$ e sequências $\theta_i \in I_0(\alpha)$, $j_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots$, tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} j_i = \infty$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} F_\alpha^{j_i}(\theta_i) = t_0$. Como $I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$ é aberto em $I_0(\alpha)$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\alpha^{j_i}(\theta_i) \in I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$ para $i \geq i_0$. Por isto, podemos supor, sem perda de generalidade, $F_\alpha^{j_i}(\theta_i) \in I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$, $i = 1, 2, \dots$. Sendo F_α contínua em $I_0(\alpha) \setminus D(\alpha)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} F_\alpha^{j_i}(\theta_i) = t_0$ implica $F_\alpha(t_0) = F_\alpha\left(\lim_{i \rightarrow \infty} F_\alpha^{j_i}(\theta_i)\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} F_\alpha^{j_i+1}(\theta_i)$. Logo $F_\alpha(t_0) \in \omega(\alpha)$. Como t_0 é arbitrário, concluímos que $F_\alpha(\omega(\alpha) \setminus D(\alpha)) \subseteq \omega(\alpha)$.

ii) Seja $s_0 \in \omega(\alpha) \cap D(\alpha)$. Por hipótese, $\partial\omega(\alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$. Logo, $s_0 \in \text{Int}(\omega(\alpha))$. $\text{Int}(\omega(\alpha))$ é aberto e $D(\alpha)$ é finito. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que :

$$(s_0 - \varepsilon; s_0 + \varepsilon) \subseteq \omega(\alpha) \text{ e } (s_0 - \varepsilon; s_0 + \varepsilon) \cap D(\alpha) = \{s_0\}. \quad (3.12.1)$$

Neste caso, temos $(s_0 - \varepsilon; s_0) \subseteq \omega(\alpha) \setminus D(\alpha)$ e $(s_0; s_0 + \varepsilon) \subseteq \omega(\alpha) \setminus D(\alpha)$. Pelo ítem (i), $F_\alpha((s_0 - \varepsilon; s_0)) \cup F_\alpha((s_0; s_0 + \varepsilon)) \subseteq \omega(\alpha)$.

Sendo $\omega(\alpha)$ fechado, temos $\overline{F_\alpha((s_0 - \varepsilon; s_0))} \cup \overline{F_\alpha((s_0; s_0 + \varepsilon))} \subseteq \omega(\alpha)$. Mas, da definição de F_α segue que $\overline{F_\alpha((s_0 - \varepsilon; s_0))} = [F_\alpha(s_0 - \varepsilon); F_\alpha(s_0 -)]$ e $F_\alpha((s_0; s_0 + \varepsilon)) = [F_\alpha(s_0 +); F_\alpha(s_0 + \varepsilon)]$. Uma vez que $F_\alpha(s_0) = F_\alpha(s_0 -)$ ou $F_\alpha(s_0) = F_\alpha(s_0 +)$, $F_\alpha(s_0) \in \omega(\alpha)$. Como s_0 é arbitrário, concluímos que $F_\alpha(\omega(\alpha) \cap D(\alpha)) \subseteq \omega(\alpha)$.

iii) Uma vez que $\omega(\alpha)$ é fechado e $\omega(\alpha) = (\omega(\alpha) \setminus D(\alpha)) \cup (\omega(\alpha) \cap D(\alpha))$, dos itens (i) e (ii) tiramos $\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))} \subseteq \omega(\alpha)$. Como $\omega(\alpha)$ é compacto e $D(\alpha)$ é finito, $\partial\omega(\alpha) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ acarreta $\rho(\partial\omega(\alpha), D(\alpha)) > 0$. Do Lema 2.1 e do Teorema 2.4 obtemos

$F_\alpha(B(\omega(\alpha)); r) \subseteq B(F_\alpha(\omega(\alpha)); r) = B(\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))}; r)$, para $0 < r \leq \rho(\partial\omega(\alpha), D(\alpha))$. Mas, pelo Teorema 2.7, $\omega(\alpha)$ atrai $I_0(\alpha)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, sejam $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) = \min\{\varepsilon, \rho(\partial\omega(\alpha), D(\alpha))\}$ e $j_0 = j_0(\alpha, \delta) \in \mathbb{N}$ (o qual existe) tais que $\bigcup_{j=j_0}^{\infty} F_\alpha^j(I_0(\alpha)) \subseteq B(\omega(\alpha); \delta)$.

Da definição de δ , obtemos $F_\alpha\left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} F_\alpha^j(I_0(\alpha))\right) = \bigcup_{j=j_0}^{\infty} F_\alpha^{j+1}(I_0(\alpha)) = \bigcup_{j=j_0+1}^{\infty} F_\alpha^j(I_0(\alpha)) \subseteq F_\alpha(B(\omega(\alpha); \delta)) \subseteq B(\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))}; \delta) \subseteq B(\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))}; \varepsilon)$.

Logo $\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))}$ atrai $I_0(\alpha)$ e, pelo Corolário 2.11 $\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))}$ é

um atrator global. Uma vez que, conforme o Teorema 2.10, $\omega(\alpha)$ é um atrator global minimal, temos $\omega(\alpha) \subseteq \overline{F_\alpha(\omega(\alpha))}$. Logo

$\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))} = \omega(\alpha)$, como queríamos.

3.13 Observações:

a) Se $\partial\omega(\alpha) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$, o resultado do Teorema 3.12 pode não ser válido, conforme podemos verificar fazendo $m = 2$, $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) =$

$= \{0, 1/2, 1\}$, $\alpha_0 = 1/8$ e $\alpha_1 = 3/2$. Neste caso, $\omega(\alpha) = [-1; -1/2] \cup [-1/8; 1/8] \cup [1/2; 1]$, enquanto que $\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))} = [-1; -1/2] \cup [-1/8; 1/8] \cup [1/2; 1] \cup \{-3/8; 3/8\}$. Este exemplo mostra também que a continuidade da função $T: X \rightarrow X$ é essencial no Teorema 2.4 de [10].

b) Em alguns casos, $\omega(\alpha)$ é invariante e conexo, como podemos constatar fazendo $m = 2$, $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (0, 1/2, 1)$ e $\alpha = (1/2, 2)$. Então $\omega(\alpha) = [-1/2; 1/2]$ e $F_\alpha(\omega(\alpha)) = \omega(\alpha)$. Note que $\partial\omega(\alpha) \cap D(\alpha) \neq \emptyset$, portanto este exemplo mostra que a condição $\partial\omega(\alpha) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ é suficiente, mas não necessária, para que tenhamos $\overline{F_\alpha(\omega(\alpha))} = \omega(\alpha)$.

Demonstraremos em seguida resultados auxiliares para o estudo da dinâmica de F_α em um certo caso particular, onde α pertence a um subconjunto aberto de R^3 .

3.14 Lema:

Sejam $m \in N$, $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in R_+^m$. Sejam $n_i = n_i(\alpha) = [\alpha_i]$ e $v_i = v_i(\alpha) = \alpha_i - [\alpha_i]$, $i = 0, \dots, m-1$.

a) Se $\beta_{i+1} < v_i$ então $F_\alpha^{n_i+1}(\theta) = \theta - v_i$, $\beta_i < \theta \leq \beta_{i+1}$, e

$$F_\alpha^{n_i+1}(\theta) = \theta + v_i, \quad -\beta_{i+1} \leq \theta < -\beta_i.$$

b) Se $0 < v_0 \leq \beta_{i+1}$ e $n_i \geq 1$ então $F_\alpha^{n_i}(\theta) = \theta - 1 - v_i$,

$$\beta_i < \theta \leq \beta_{i+1}, \text{ e } F_\alpha^{n_i}(\theta) = \theta + 1 + v_i, \quad -\beta_{i+1} \leq \theta < -\beta_i$$

- Demonstração:

Sejam $i \in \{0, \dots, m-1\}$ e $\theta \in (\beta_i; \beta_{i+1}]$. Pela Definição de F_α , $F_\alpha(\theta) = \theta - \alpha_i$. Suponhamos $\beta_{i+1} < v_i$. Se $n_i = 0$, nada há a demonstrar. Se $n_i > 0$, sejam $j \in \{0, \dots, n_i-1\}$ e $\theta \in (\beta_i; \beta_{i+1}]$. Supondo $F_\alpha^{j+1}(\theta) = \theta - \alpha_i + j$, temos $F_\alpha^{j+1}(\theta) = \theta - n_i - v_i + j$, logo

$F_{\alpha}^{j+1}(\theta) \leq \beta_{i+1} - n_i - \nu_i + j \leq \beta_{i+1} - \nu_i - 1$, e portanto $F_{\alpha}^{j+2}(\theta) = \theta - \alpha_i + j + 1$. Uma vez que $F_{\alpha}(\theta) = \theta - \alpha_i$ tiramos, por indução, que $F_{\alpha}^{p+1}(\theta) = \theta - \alpha_i + p$, para $\beta_i < \theta \leq \beta_{i+1}$, $p = 0, \dots, n_i$. Como F_{α} é ímpar, (a) segue. A demonstração de (b) é semelhante. Note que, se $\beta_{i+1} < \nu_i$ então, para todo $\theta \in (\beta_i; \beta_{i+1}]$, temos $n_i + 1 = \text{Min}\{j \in \mathbb{N} \mid |F_{\alpha}^j \in [-1; 1]\}$.

3.15 Lema:

Sejam $m \geq 2, (\beta_0, \dots, \beta_m)$, $\alpha, n_i = n_i(\alpha)$ e $\nu_i = \nu_i(\alpha)$ como Lema

3.14. Seja $\nu = \nu(\alpha) = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{m-1})$. Se $\beta_{i+1} < \nu_i$, $i = 0, \dots, m-2$, e $\alpha_{m-1} < 1$ então, para todo $\theta \in [-1; 1]$, $\gamma_+(\alpha; \theta) \cap [-1; 1] = \gamma_+(\nu; \theta)$ e $\gamma_-(\alpha; \theta) \cap [-1; 1] = \gamma_-(\nu; \theta) \cap [-1; 1]$.

- Demonstração:

i) Dados $i \in \{0, \dots, m-1\}$ e $\theta \in (\beta_i; \beta_{i+1}]$, pelo Lema 3.14 e pelas hipóteses acima, $F_{\nu}(\theta) = F_{\alpha}^{n_i+1}(\theta)$ e, para todo $j \in \{1, \dots, n_i\}$, $F_{\alpha}^j(\theta) \in I_0(\alpha) \setminus [-1; 1]$. Logo, para todo $\theta \in [-1; 1]$, se $\alpha(\theta) = \text{Min}\{j \in \mathbb{N} \mid -1 \leq F_{\alpha}^j(\theta) \leq 1\}$ então $F_{\nu}(\theta) = F_{\alpha}^{\alpha(\theta)}(\theta)$. Dado $\theta \in [-1; 1]$, sejam $t_0 = \theta$ e $t_{p+1} = F_{\alpha}^{\alpha(t_p)}(t_p)$. Temos, então, $\gamma_+(\alpha; \theta) \cap [-1; 1] = \{t_0, t_1, \dots, t_p, \dots\}$. Mas $t_p = F_{\nu}^p(\theta)$, $p = 0, 1, \dots$. Logo, $\gamma_+(\alpha; \theta) \cap [-1; 1] = \gamma_+(\nu; \theta)$, como queríamos.

ii) Uma vez que, para todo $\theta \in [-1; 1]$, $F_{\nu}(\theta) = F_{\alpha}^{n_i+1}(\theta)$ para algum $i \in \{0, \dots, m-1\}$, é fácil ver, por indução, que para $\theta \in [-1; 1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, existe $p = p(n, \theta) \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F_{\nu}^n(\theta) = F_{\alpha}^{p(n, \theta)}(\theta)$. Logo, $\gamma_-(\nu; \theta) \cap [-1; 1] \subseteq \gamma_-(\alpha; \theta) \cap [-1; 1]$, $\theta \in [-1; 1]$. Por outro lado, se $t \in \gamma_-(\alpha; \theta) \cap [-1; 1]$ então $t \in F_{\alpha}^{-k}(\theta) \cap [-1; 1]$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ e $-1 \leq t \leq 1$. Temos $F_{\alpha}^k(t) = \theta$ e, como $\theta \in [-1; 1]$ por hipótese, $\theta \in \gamma_+(\alpha; t) \cap [-1; 1]$. Pelo item (i), $\theta \in \gamma_+(\nu; t)$, logo $\theta = F_{\nu}^n(t)$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$ e, portanto, $t \in \gamma_-(\nu; \theta) \cap [-1; 1]$. Daí

concluimos que $\gamma_-(\alpha; \theta) \cap [-1; 1] = \gamma_-(\nu; \theta) \cap [-1; 1]$.

O lema abaixo é imediato.

3.16 Lema:

Sejam $m, (\beta_0, \dots, \beta_m)$, α e ν como no Lema 3.15. Para todo $\theta \in [-1; 1]$, $n \in \mathbb{N}$, existem $\rho_0(n, \theta), \dots, \rho_{m-1}(n, \theta) \in \mathbb{Z}_+$, não todos nulos, de modo que $\sum_{i=0}^{m-1} \rho_i(n, \theta) = n$ e $F_\nu^n(\theta) = F_\alpha^{k(n, \theta)}(\theta)$, onde

$$k(n, \theta) = \sum_{i=0}^{m-1} \rho_i(n, \theta) (n_i(\alpha) + 1).$$

3.17 Observação:

Dados $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$ e uma partição $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ de $[0; 1]$, seja $\psi_\alpha: I_0(\alpha) \longrightarrow S^1$, $\psi_\alpha(t) = -\exp(\pi i t / ||f_\alpha||)$. Se $\phi_\alpha: S^1 \longrightarrow S^1$ é definida por:

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} x \exp(-\pi i \alpha_j / ||f_\alpha||), & x \in \psi_\alpha((\beta_j; \beta_{j+1})), \quad j = 0, \dots, m-1 \\ x \exp(\pi i \alpha_j / ||f_\alpha||), & x \in \psi_\alpha([- \beta_{j+1}; -\beta_j]), \quad j = 0, \dots, m-1 \\ x \exp(-\pi i / ||f_\alpha||), & x \in \psi_\alpha((1; ||f_\alpha||)) \\ x \exp(\pi i / ||f_\alpha||), & x \in \psi_\alpha([-||f_\alpha||; -1]) \end{cases}$$

e $\phi_\alpha(-1) = -1$, então $\psi \circ F_\alpha = \phi_\alpha \circ \psi_\alpha$.

CAPÍTULO 4

DESCRIÇÃO DA DINÂMICA GERADA POR F_α EM UM CASO PARTICULAR

Estudaremos agora, com a ajuda dos resultados anteriores, a dinâmica de F_α quando α pertence a um certo subconjunto aberto de R_+^3 .

Os símbolos usados no decorrer deste capítulo serão listados no final do mesmo.

4.1 Definição

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0;1]$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Dado $\alpha \in R_+^3$, sejam $n_i = n_i(\alpha) = [\alpha_i]$ e $\nu_i = \nu_i(\alpha) = \alpha_i - [\alpha_i]$, $i = 0, 1, 2$. Consideramos os seguintes sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} \beta_2 < \nu_1 < \nu_0 < \text{Min}(1, \beta_1 + \beta_2) \\ \nu_0 - \nu_1 < \alpha_2 < \text{Min}(\beta_2 - \beta_1, 2(\nu_0 - \nu_1), 1 - \nu_1, \beta_1 + \beta_2 - \nu_1) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{cases} \beta_2 < \nu_1 < \nu_0 < \text{Min}(1, \beta_1 + \beta_2) \\ \nu_0 - \nu_1 < 2\alpha_2 < 2(\nu_0 - \nu_1). \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Então:

- $U_0(\beta)$ e $U_1(\beta)$ são os conjuntos das soluções de (4.1.1) e (4.1.2), respectivamente
- Se $\beta_2 < 2\beta_1$, então $V_i(\beta) = U_i(\beta) \cap \{\alpha \in R_+^3 \mid \nu_i < 2\beta_1 < \nu_0\}$, $i = 0, 1$.
É claro que vale:

4.2 Lema:

Seja $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0;1]$. Então:

- $U_i(\beta)$, $i = 0, 1$, são abertos não conexos do R_+^3 .
- Quando $\beta_2 < 2\beta_1$, $V_i(\beta)$, $i = 0, 1$, são abertos não conexos do R_+^3 .

4.3 Teorema:

Seja $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ uma partição de $[0;1]$. Para todo $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, o conjunto $A_0(\alpha, \beta) = (\beta_2, \beta_2 + \nu_0 - \nu_1] \cup \bigcup_{i=0}^{n_0} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) \cup \bigcup_{i=0}^{n_1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2])$ é invariante por F_α e $F_\alpha|_{A_0(\alpha, \beta)}$ é bijetiva.

- Demonstração:

i) Se $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ temos $(\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1] \subseteq (\beta_2; 1]$, $(\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1] \subseteq (-\beta_1; 0)$ e $(\beta_2 - \alpha_2; \beta_2] \subseteq (\beta_1; \beta_2]$. Como $\beta_i < \nu_i$, $i = 0, 1$, e $n_2 = 0$, do Lema 3.14 obtemos:

$$F_\alpha^{n_0+1}((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) = (\beta_2 - \alpha_2 + \nu_0 - \nu_1; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$$

$$F_\alpha^{n_1+1}((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2]) = (\beta_2 - \nu_1 - \alpha_2; \beta_2 - \nu_1].$$

Como $F_\alpha((\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]) = (\beta_2 - \alpha_2; \beta_2 - \alpha_2 + \nu_0 - \nu_1]$, obtemos

$$F_\alpha((\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]) \cup F_\alpha^{n_0+1}((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) \cup F_\alpha^{n_1+1}((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2]) = (\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1] \cup (\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1] \cup (\beta_2 - \alpha_2; \beta_2].$$

Visto que $F_\alpha(A_0(\alpha, \beta)) = F_\alpha((\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]) \cup \bigcup_{i=1}^{n_0+1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) \cup \bigcup_{i=1}^{n_1+1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2])$, temos que $F_\alpha(A_0(\alpha, \beta)) = A_0(\alpha, \beta)$, logo $A_0(\alpha, \beta)$ é invariante por F_α como queríamos.

ii) sejam $K_0 = (\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$, $K_1 = \bigcup_{i=0}^{n_0} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1])$ e $K_2 = \bigcup_{i=0}^{n_1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2])$. É fácil ver que $F_\alpha(K_0) \cap F_\alpha(K_1) = F_\alpha(K_0) \cap F_\alpha(K_2) = F_\alpha(K_1) \cap F_\alpha(K_2) = \emptyset$ e que $F_\alpha|_{K_0}$, $F_\alpha|_{K_1}$ e $F_\alpha|_{K_2}$ são

injetivas. Logo $F_\alpha|_{A_0(\alpha,\beta)}$ é injetiva. Da invariância de $A_0(\alpha,\beta)$ por F_α , segue que $F_\alpha|_{A_0(\alpha,\beta)}$ é bijetiva, e a demonstração está concluída.

4.4 Observações:

a) Como F_α é ímpar, segue do Teorema 4.3 que $-A_0(\alpha,\beta)$ é invariante por F_α e que a restrição de F_α a $-A_0(\alpha,\beta)$ é bijetiva. Temos, $A_0(\alpha,\beta) \cap (-A_0(\alpha,\beta)) = \emptyset$, logo $A_0(\alpha,\beta) \cup (-A_0(\alpha,\beta))$ é invariante por F_α , e a restrição de F_α a $A_0(\alpha,\beta) \cup (-A_0(\alpha,\beta))$ é bijetiva.

b) Seja $A(\alpha,\beta) = A_0(\alpha,\beta) \cup (-A_0(\alpha,\beta))$. Então $D(\alpha) \cap A(\alpha,\beta) = (-\beta_2; \beta_2)$, logo $D(\alpha) \cap A(\alpha,\beta) \subseteq \text{Int}(A(\alpha,\beta))$. Do Corolário 2.5 obtemos, portanto, que $A(\alpha,\beta)$ é estável e atrai $\partial A(\alpha,\beta)$. Temos, além disso, que $A_0(\alpha,\beta)$ e $-A_0(\alpha,\beta)$ têm esta propriedade.

c) Seja $G_\alpha = F_\alpha|_{A_0(\alpha,\beta)}$. Não é difícil demonstrar que G_α^{-1} é dada por:

$$G_\alpha^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta + \alpha_2, & \beta_2 - \alpha_2 < \theta \leq \beta_2 - \alpha_2 + \nu_0 - \nu_1 \\ \theta - \alpha_0, & \beta_2 + \alpha_0 - \alpha_2 + \nu_1 < \theta \leq \beta_2 + \alpha_0 - \nu_1 \\ \theta + \alpha_1, & \beta_2 - \alpha_2 - \alpha_1 < \theta \leq \beta_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

$$G_\alpha^{-1}(\theta) = \theta + 1 \text{ se } \theta \in \bigcup_{i=2}^{n_0+1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) \text{ e } G_\alpha^{-1}(\theta) = \theta - 1 \\ \text{se } \theta \in \bigcup_{i=2}^{n_1+1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2]).$$

Determinaremos a seguir o atrator global minimal $\omega(\alpha)$.

para uma dada partição $\tilde{\alpha}$ de $[0;1]$ e para α contido em um aberto do R_+^s , que depende da partição escolhida.

4.5 Teorema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição $\tilde{\alpha}$ de $[0;1]$, $A_0(\alpha, \beta)$ como no Teorema 4.3, $A(\alpha, \beta) = A_0(\alpha, \beta) \cup (-A_0(\alpha, \beta))$ e $B(\alpha, \beta) = \bigcup_{i=0}^{2n_1+1} F_\alpha^i((\beta_1; \nu_1 - \beta_1))$. Então:

- a) Quando $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, $\omega(\alpha) = \{0\} \cup \overline{A(\alpha, \beta)} \cup \overline{B(\alpha, \beta)}$
- b) Quando $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$, $\omega(\alpha) = \{0\} \cup \overline{A(\alpha, \beta)}$

- Demonstração:

i) Suponhamos $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, e seja $\nu = \nu(\alpha) = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$. Do Lema 3.14 e da Definição 4.1 segue que $F_\alpha^{2(n_1+1)}((\beta_1; \nu_1 - \beta_1)) = F_\nu^2((\beta_1; \nu_1 - \beta_1)) = (\beta_1; \nu_1 - \beta_1)$, logo $B(\alpha, \beta)$ é invariante por F_α . Como $F_\alpha(0) = 0$, temos, pelo Teorema 4.3, que $\{0\} \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta)$ é invariante por F_α . Portanto, $\{0\} \cup \overline{A(\alpha, \beta)} \cup \overline{B(\alpha, \beta)} \subseteq \omega(\alpha)$.

Calculando os valores das iteradas de F_ν em cada uma das quatro componentes conexas de $[0;1] \setminus (\{0\} \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta))$ (que são $(0; \nu_1 - \beta_1)$, $[\nu_1 + \alpha_2 - \beta_2, \beta_1]$, $[\nu_1 - \beta_2; \beta_2 - \alpha_2]$ e $(\beta_2 + \nu_0 - \nu_1; 1)$) temos que existe $p_1(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\theta \in [0;1] \setminus (\{0\} \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta))$ existe $p \in \{1, \dots, p_1(\alpha, \beta)\}$ com $F_\nu^p(\theta) \in [-1;1] \cap A(\alpha, \beta)$. Como F_ν é ímpar, temos que, para todo $\theta \in [-1;1] \setminus (\{0\} \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta))$ existe $p \in \{1, \dots, p_1(\alpha, \beta)\}$ tal que $F_\nu^p(\theta) \in [-1;1] \cap A(\alpha, \beta)$. Logo, para todo $\theta \in [-1;1]$, $F_\nu^p(\theta) \in \{0\} \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta)$ para algum $p \in \{0, \dots, p_1(\alpha, \beta)\}$.

ii) Se $n_0 = n_1 = 0$ então $F_\alpha = F_\nu$, e (a) segue. Se $n_0 > 0$ ou $n_1 > 0$, então $\|f_\alpha\| > 1$. Uma vez que, para todo $\theta \in I_0(\alpha) \setminus [-1;1]$, $F_\alpha^i(\theta) \in$

$[-1;1]$ para algum $i \in \langle 1, \dots, \lceil \|f_\alpha\| \rceil \rangle$, do item (1) e do Lema 3.16 obtemos que existe $p_2(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\theta \in I_0(\omega)$, $F_\alpha^p(\theta) \in \langle 0 \rangle \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta)$ para algum $p \in \langle 0, \dots, p_2(\alpha, \beta) \rangle$. Logo, $\langle 0 \rangle \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta)$ atrai $I_0(\omega)$. Do Corolário 2.12 tiramos $\omega(\omega) \subseteq \langle 0 \rangle \cup A(\alpha, \beta) \cup B(\alpha, \beta) \subseteq \langle 0 \rangle \cup \overline{A(\alpha, \beta)} \cup \overline{B(\alpha, \beta)}$, e isto demonstra (a). Se $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$ então $B(\alpha, \beta) = \emptyset$ e no mais a demonstração de (b) é semelhante.

4.6 Corolário:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0;1]$ com $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $A(\alpha, \beta)$ como no Teorema 4.5. Se $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, então $A(\alpha, \beta)$ atrai $I_0(\omega) \setminus (\langle 0 \rangle \cup \gamma_-(\alpha, B(\alpha, \beta)))$ por F_α .

- Demonstração:

Pelo Teorema 4.5 existe $k(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\theta \in I_0(\omega) \setminus (\langle 0 \rangle \cup \gamma_-(\alpha, B(\alpha, \beta)))$, $F_\alpha^i(\theta) \in A(\alpha, \beta)$, $i = k(\alpha, \beta), k(\alpha, \beta) + 1, \dots$. Logo, o resultado segue.

Note que, pela definição de $B(\alpha, \beta), \gamma_-(\alpha, B(\alpha, \beta)) \cap I_0(\omega)$ é aberto. Logo, $A(\alpha, \beta)$ atrai $\partial \gamma_-(\alpha, B(\alpha, \beta)) \cap I_0(\omega)$ por F_α . Se $\beta_2 \leq 2\beta_1$ então $B(\alpha, \beta) = \emptyset$ e $A(\alpha, \beta)$ atrai $I_0(\omega) \setminus \langle 0 \rangle$.

4.7 Observações:

a) Uma vez que $F_\nu(\beta_1) = \beta_1 - \nu_0$ e que $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ implica $\nu_0 + \alpha_2 < \beta_1 + \beta_2$, temos que, se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ então $\alpha_2 - \beta_2 < F_\nu(\beta_1) = \beta_1 - \nu_0 < \beta_1 - \nu_1$. Logo $F_\nu(\beta_1) \notin \omega(\omega)$. Como $\beta_1 \in \omega(\omega)$, concluímos daí que $\overline{F_\alpha(\omega(\omega))} \setminus \omega(\omega) \neq \emptyset$, pois, do contrário seria $F_\alpha^i(\omega(\omega)) \subseteq \omega(\omega)$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Note que, neste caso temos $\partial \omega(\omega) \cap D(\omega) \neq \emptyset$. De fato, $\beta_1 \in \partial \omega(\omega) \cap D(\omega)$.

b) Se $2\beta_1 \leq \beta_2$ então $\omega(\omega)$ contém dois conjuntos invariantes estáveis, $A_0(\alpha, \beta)$ e $-A_0(\alpha, \beta)$, e dois conjuntos invariantes

instáveis, $\langle 0 \rangle$ e $B(\alpha, \beta)$, para todo $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$. Mas, se $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$, o único subconjunto invariante instável de $\omega(\alpha)$ é $\langle 0 \rangle$.

c) Não é difícil demonstrar que, se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ então $P(\alpha, 2(n_1+1)) = B(\alpha, \beta) = \bigcup_{i=0}^{2n_1+1} F_\alpha^i((\beta_1, \nu_1 - \beta_1))$. Portanto, quando $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, existe $\theta \in I_0(\alpha)$ com $\gamma_+(\alpha; \theta)$ periódica.

Obteremos agora resultados fundamentais referentes à dinâmica de F_α onde, agora, $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ ou $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$, conforme seja $2\beta_1 \leq \beta_2$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, respectivamente.

4.8 Lema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0; 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^3$ e $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$. Seja $N_0(\alpha) = |\alpha_2 - \nu_0 + \nu_1|$, para $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$. Então:

a) Se $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta)$ e $\beta_2 \leq \theta_0 \leq \beta_2 + \nu_0 - \nu_1$ então, para todo $\theta \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$, $\{i \in \mathbb{N} \mid F_\nu^i(\theta) \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]\} \neq \emptyset$. Vale um resultado semelhante se $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta)$.

b) Se $2\beta_1 < \beta_2$, $\alpha \in U_1(\beta)$ e $\beta_2 - \alpha_2 + N_0(\alpha) \leq \theta_0 \leq \beta_2$ então, para todo $\theta \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$, $\{i \in \mathbb{N} \mid F_\nu^i(\theta) \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]\} \neq \emptyset$. Um resultado semelhante é válido quando $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_1(\beta)$.

c) Em qualquer dos casos acima, $\{i \in \mathbb{N} \mid F_\nu^i(\theta) \in (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]\} \neq \emptyset$, para todo $\theta \in (\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1] \cup (\beta_2 - \alpha_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$.

- Demonstração:

i) Seja $\theta \in (\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1] \cup (\beta_2 - \alpha_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$. Se

$\beta_2 < \theta \leq \beta_2 + \nu_0 - \nu_1$, não é difícil demonstrar, por indução, que $F_\nu^{aj}(\theta) = \theta - jN_0(\alpha)$, $j = 0, \dots, [(\theta - \beta_2)/N_0(\alpha)] + 1$. Logo existe $\rho_0 \in N$ tal que, para todo $\theta \in (\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$, $F_\nu^{ai}(\theta) \in (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$ para algum $i \in \{1, \dots, \rho_0\}$. Como $F_\nu((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) = (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$ se $\alpha \in U_0(\beta)$, $F_\nu((\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]) = (\beta_2 + N_0(\alpha); \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$ se $\alpha \in U_1(\beta)$ e $F_\nu((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2]) = (\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]$, isto demonstra (c).

ii) Suponhamos $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta)$. (os demais casos são semelhantes). Dado $\theta_0 \in [\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$, seja $\theta \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$. É fácil ver, por indução, que $F_\nu^{ai}(\theta) = \theta - iN_0(\alpha)$, $i = 0, \dots, [(\nu_0 - \nu_1)/N_0(\alpha)]$. Sejam $l = [(\nu_0 - \nu_1)/N_0(\alpha)]$ e $\delta = ((\nu_0 - \nu_1)/N_0(\alpha)) - l$. Se $\delta = 0$, $F_\nu^{al+2}(\theta) = \theta$, e se $0 < \delta < 1$ temos $F_\nu^{al+5}(\theta) = \theta - (1-\delta)N_0(\alpha)$ para $\theta_0 - \delta N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0$ e $F_\nu^{al+2}(\theta) = \theta + \delta N_0(\alpha)$ para $\theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 - \delta N_0(\alpha)$. Daí obtemos (a) e a demonstração de (b) é semelhante.

4.9 Definição:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0; 1]$ e $N_0(\alpha)$ como no Lema 4.8.

a) Seja $\alpha(\alpha, \beta, \theta_0, \theta) = \text{Min}\{j \in N \mid F_\nu^j(\theta) \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]\}$ para $\theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0$, onde:

$\beta_2 \leq \theta_0 \leq \beta_2 + \nu_0 - \nu_1$ se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta)$

$\beta_2 - \alpha_2 + N_0(\alpha) \leq \theta_0 \leq \beta_2$ se $2\beta_1 \leq \beta_1$ e $\alpha \in U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_1(\beta)$.

b) Seja $g(\alpha, \theta_0): (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0] \rightarrow (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$ o operador de

primeiro retorno definido por $g(\alpha, \theta_0; \theta) = F_\nu^{\alpha(\alpha, \beta, \theta_0, \theta)}(\theta)$, onde:

$\beta_2 \leq \theta_0 \leq \beta_2 + \nu_0 - \nu_1$, se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta)$

$\beta_2 + \alpha_2 - N_0(\alpha) \leq \theta_0 \leq \beta_2$ se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_1(\beta)$

4.10 Lema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ e α como antes. Então:

a) Quando $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta)$, $g(\alpha, \theta_0)$ é dado por:

$$g(\alpha, \theta_0; \theta) = \begin{cases} F_{\nu}^{\beta l+2}(\theta) = \theta + \delta N_0(\alpha), & \theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 - \delta N_0(\alpha) \\ F_{\nu}^{\beta l+5}(\theta) = \theta - (1-\delta)N_0(\alpha), & \theta_0 - \delta N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

Onde $l = \lfloor (\nu_0 - \nu_1) / N_0(\alpha) \rfloor$, $\delta = ((\nu_0 - \nu_1) / N_0(\alpha)) - l$ e $\beta_2 \leq \theta_0 \leq \beta_0 + \nu_0 - \nu_1$

b) Quando $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_1(\beta)$, $g(\alpha, \theta_0)$ é dado por:

$$g(\alpha, \theta_0; \theta) = \begin{cases} F_{\nu}^{\beta l+4}(\theta) = \theta + \delta N_0(\alpha), & \theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 - \delta N_0(\alpha) \\ F_{\nu}^{\beta l+1}(\theta) = \theta - (1-\delta)N_0(\alpha), & \theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

onde, agora, $l = \lfloor \alpha_2 / N_0(\alpha) \rfloor$, $\delta = (\alpha_2 / N_0(\alpha)) - l$ e $\beta_2 - \alpha_2 - N_0(\alpha) \leq \theta_0 \leq \beta_2$

c) Em qualquer um dos casos acima, $\gamma_+(g(\alpha; \theta_0); \theta) = \gamma_+(\alpha; \theta) \cap (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$ e $\gamma_-(g(\alpha; \theta_0); \theta) = \gamma_-(\alpha; \theta) \cap (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$, para todo $\theta \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$.

- Demonstração:

Calculando os valores $F_{\nu}^{\beta i}(\theta)$, $F_{\nu}^{\beta i+1}(\theta)$, $F_{\nu}^{\beta i+2}(\theta)$, $i=0, \dots, l+1$ e $\theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0$, obtemos (a) e (b). Do Lema 3.15, (c) segue.

Note que $\alpha(\alpha, \beta, \theta_0, \theta)$ da Definição 4.9 não depende de β nem de θ_0 . A função $g(\alpha, \theta_0)$ depende de θ_0 devido ao fato de ser

$(\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$ o domínio (e o contradomínio) desta função.

4.11 Observação:

Temos que $g(\alpha, \theta_0)$ é topologicamente conjugada à soma modulo 1 em $(0;1]$ definida por:

$$\tilde{f}(\delta; \theta) = \begin{cases} \theta + \delta, & 0 < \theta \leq 1-\delta \\ \theta - (1-\delta), & 1-\delta < \theta \leq 1 \end{cases}$$

com efeito, $\psi: (\theta_0 - N_0; \theta_0] \rightarrow (0;1]: t \mapsto (1/N_0)(t - \theta_0 + N_0)$ (onde $N_0 = N_0(\alpha)$) é um homeomorfismo que estabelece a conjugação.

Seja $\varphi(\delta): S^1 \rightarrow S^1 : x \mapsto x \exp(2\pi i \delta)$. É fácil ver que, se $h: (0;1] \rightarrow S^1: t \mapsto \exp(2\pi i t)$, então $h \circ \tilde{f}(\delta) = \varphi(\delta) \circ h$. Portanto $\tilde{f}(\delta) \in \overline{\varphi(\delta)}$ são topologicamente conjugadas quando $(0;1]$ tem a topologia co-induzida por $\varphi(\delta)$.

Como $\varphi^{-1}(\delta)$ é dada por:

$$\varphi^{-1}(\delta; x) = \text{Min}\{\theta \in (0; \omega) \mid x = |x| \exp(2\pi i \theta)\},$$

temos que todo intervalo aberto contido em $(0;1]$ é um aberto da topologia co-induzida por $\varphi(\delta)$. Visto que todo intervalo $(t;1]$ com $0 < t < 1$ contém o intervalo $(t;1)$, temos, pelo Teorema de Jacobi ([6], pag. 21) que, se $\gamma_+(\tilde{f}(\delta); \theta)$ é infinita para algum $\theta \in (0;1]$, então $\gamma'_+(\tilde{f}(\delta); t) = \overline{\gamma_+(\tilde{f}(\delta); t)} = [0;1]$, para todo $t \in (0;1]$.

Como $g(\alpha, \theta_0)$ é topologicamente conjugada a $\tilde{f}(\delta)$, segue que se $\gamma_+(g(\alpha; \theta_0); t)$ é infinita para algum $t \in (\theta_0 - N_0; \theta_0]$, então $\gamma'_+(g(\alpha; \theta_0); \theta) = \overline{\gamma_+(g(\alpha; \theta_0); \theta)} = [\theta_0 - N_0; \theta_0]$, $\theta_0 - N_0 < \theta \leq \theta_0$.

Note também que se δ é racional, $\delta = p/q$ irredutível, então o período das órbitas $\gamma_+(\varphi(\delta); x)$ (e portanto, das órbitas $\gamma_+(g(\alpha; \theta_0); \theta)$) é q .

4.12 Lema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ e α como antes e $A_0(\alpha, \beta)$ como no Teorema 4.3. Se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$ e $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$ então, para todo $\theta, t \in A_0(\alpha, \beta)$, vale:

$$t \in \gamma'_+(\alpha; \theta) \Rightarrow \gamma'_+(\alpha; t) \subseteq \gamma'_+(\alpha; \theta)$$

- Demonstração:

Suponhamos $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ (o caso no qual $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$ é semelhante). De acordo com os Lemas 3.15, 3.16 e 4.8 podemos, sem perda de generalidade, supor $\beta_2 - N_0(\alpha) < \theta \leq \beta_2$.

De fato, segue destes lemas que, para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$, existe $j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F_\alpha^j(\theta) \in (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$.

Seja então $\theta \in (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$. Afirmamos que se $\gamma'_+(\alpha; \theta) \neq \emptyset$ então existe uma sequência $i_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, \dots$, com $\lim_{j \rightarrow \infty} i_j = \infty$ e

$\beta_2 - N_0(\alpha) < F_\alpha^{i_j}(\theta) < F_\alpha^{i_{j+1}}(\theta) < \beta_2$. Com efeito, β_2 é o único ponto de descontinuidade de F_α em $\overline{A_0(\alpha, \beta)}$ e $\gamma'_+(\alpha; \theta) \subseteq A_0(\alpha, \beta)$.

Logo, pelo Teorema 3.7, $\beta_2 \in \gamma'_+(\alpha; \theta)$. Portanto, ou bem $\gamma'_+(\alpha; \theta) \cap (\beta_2; \beta_2 + N_0(\alpha)]$ é infinita ou bem $\gamma'_+(\alpha; \theta) \cap (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$ é infinita. Mas $F_\alpha|_{A_0(\alpha, \beta)}$ é bijetiva e, de acordo com os Lemas 3.14

e 4.8, $F_\alpha((\beta_2; \beta_2 + N_0(\alpha)]) = F_\alpha^{n_0 + n_1 + 3}((\beta_2; \beta_2 + N_0(\alpha))) = (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$.

Consequentemente, $\gamma'_+(\alpha; \beta_2) = \gamma'_+(\alpha; \theta) \cap (\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$ é infinita, e a afirmação acima segue da Observação 4.11 e do Lema 4.10.

ii) Sejam $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$ e $t \in \gamma'_+(\alpha; \theta)$. Se $t \neq \beta_2$ então $F_\alpha(t) \in \gamma'_+(\alpha; \theta)$, pois F_α é contínua em $A_0(\alpha, \beta) \setminus \{\beta_2\}$. Se $t = \beta_2$ então, como $F_\alpha(t)$ é contínua à esquerda de β_2 , obtemos do item (i) que $F_\alpha(t) \in \gamma'_+(\alpha; \theta)$.

Logo, $F_\alpha(\gamma'_+(\alpha; \theta)) \subseteq \gamma'_+(\alpha; \theta)$, e o resultado segue

4.13 Observação:

Note que, pelo Lema 4.12, as funções F_α têm, sob certas condições, uma propriedade das funções contínuas: Se t é ponto de acumulação de uma órbita $\gamma_+(\alpha; \theta)$ então $F_\alpha^j(t) \in \gamma_+(\alpha; \theta)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Observe-se também que, como F_α é ímpar, valem resultados semelhantes aos dos Lemas 4.8, 4.10 e 4.11 quando $A_0(\alpha, \beta)$ é substituído por $-A_0(\alpha, \beta)$.

O resultado que deduziremos a seguir contém a descrição da dinâmica das funções F_α quando $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$: ou bem toda órbita $\gamma_+(\alpha; \theta)$, $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$, é finita ou bem F_α é pseudocaótica em $A_0(\alpha, \beta)$.

4.14 Teorema:

Seja $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^3$. Se $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$, seja $G_\alpha = F_\alpha|_{A_0(\alpha, \beta)}$. Se existe $t \in A_0(\alpha, \beta)$ tal que $\gamma_+(\alpha; t)$ é infinita, então:

- a) Para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$, $\gamma_+(\alpha; \theta) = \overline{\gamma_+(\alpha; \theta)} = \overline{A_0(\alpha, \beta)}$
- b) F_α e G_α^{-1} são pseudocaóticas em $A_0(\alpha, \beta)$.

- Demonstração:

1) Suponhamos $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta)$ (os demais casos são semelhantes). Seja $t \in A_0(\alpha, \beta)$. Temos, como consequência dos Lemas 4.8 e 4.11 que $\gamma_+(\alpha; t)$ é infinita se e somente se existe $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma_+(g(\alpha, \beta_2); F_\alpha^{j_0}(t))$ é infinita. Logo, decorre da observação 4.11 e do Lema 4.8 que $\gamma_+(\alpha; t)$ é infinita para algum $t \in A_0(\alpha, \beta)$ se, e somente se, $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é infinita para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$. Da Observação 4.11 e do Lema 4.10

obtemos que, se $\gamma_+(\alpha; t)$ é infinita para algum $t \in A_0(\alpha, \beta)$ então $[\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2] \subseteq \gamma'_+(\alpha; \theta)$ para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$.

Seja $l = [(\nu_0 - \nu_1)/N_0(\alpha)]$. É fácil demonstrar, por indução, que $(\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1] \subseteq \bigcup_{i=0}^l F_\nu^{9i+2}((\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2])$. Como $F_\nu((\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]) = (\beta_2 - \alpha_2; \beta_2 - N_0(\alpha))$, e $F_\nu((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2]) = (\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \nu_1]$, segue dos Lemas 3.15, 4.11 e da definição de $A_0(\alpha, \beta)$ que $A_0(\alpha, \beta) \subseteq \gamma'_+(\alpha; \theta)$. Uma vez que $\overline{A_0(\alpha, \beta)} \subseteq \gamma'_+(\alpha; \theta) \subseteq \subseteq \overline{\gamma_+(\alpha; \theta)}$ e $\overline{\gamma_+(\alpha; \theta)} \subseteq \overline{A_0(\alpha, \beta)}$, (pois $A_0(\alpha, \beta)$ é invariante por F_α) isto demonstra (a).

ii) Afirmamos que, se $\gamma_+(\alpha; t)$ é infinita para algum $t \in A_0(\alpha, \beta)$ então $\beta_2 \in \gamma_+(\alpha, (t_1, t_2))$ para todo intervalo não vazio $(t_1, t_2) \subseteq A_0(\alpha, \beta)$. Pois do contrário seria $\gamma_+(\alpha, (t_1, t_2)) \subseteq A_0(\alpha, \beta) \setminus \langle \beta_2 \rangle \subseteq \mathbb{R} \setminus D(\alpha)$ e Pelo Lema 3.1, $\gamma_+(\alpha, (t_1, t_2)) = \bigcup_{j=0}^{\infty} (F_\alpha^j(t_1); F_\alpha^j(t_2))$. Logo, teríamos, para $t_0 = (t_1 + t_2)/2$, $\rho(\gamma_+(\alpha, t_0), D(\alpha)) \geq \frac{1}{2}|t_2 - t_1| \geq 0$, contra o fato de que $\beta_2 \in \gamma'_+(\alpha, t_0)$.

iii) Suponhamos que $\gamma_+(\alpha, t)$ é infinita para algum $t \in A_0(\alpha, \beta)$. Do ítem (i), do Lema 4.10 e de 4.11 obtemos que, para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$ existe $j_0 = j_0(\theta) \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma'_-(g(\alpha, \beta_2); F_\alpha^{j_0}(\theta)) = \overline{\gamma'_-(g(\alpha, \beta_2); F_\alpha^{j_0}(\theta))} = [\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$. Como $F_\alpha|_{A_0(\alpha, \beta)} = G_\alpha$, temos $\gamma'_-(g(\alpha, \beta_2); G_\alpha^{j_0}(\theta)) = [\beta_2 - N_0(\alpha); \beta_2]$. Logo, pelo Lema 4.10, $\beta_2 \in \gamma'_-(G_\alpha; G_\alpha^{j_0}(\theta))$. Uma vez que $\gamma'_-(G_\alpha; G_\alpha^{j_0}(\theta)) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{G_\alpha^{j_0-i}(\theta)\} = \{G_\alpha(\theta), \dots, G_\alpha^{j_0}(\theta)\} \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \langle G_\alpha^{-i}(\theta) \rangle = \{G_\alpha(\theta), \dots, G_\alpha^{j_0}(\theta)\} \cup \gamma'_-(G_\alpha; \theta)$, concluímos daí que $\beta_2 \in \gamma'_-(\alpha; \theta)$.

iv) Sejam $t_1, t_2 \in R$, $t_1 < t_2$ (os quais existem) tais que $J = (t_1; t_2) \subseteq A_0(\alpha, \beta)$. Se $\beta_2 \in J$, então, pelo item (iii), $\gamma_-(\alpha; \theta) \cap J \neq \emptyset$ para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$. Se $\beta_2 \notin J$, dado $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$ sejam $p_0 = p_0(\theta) = \text{Min}\{i \in N \mid \beta_2 \in F_\alpha^i(J)\}$ (o qual existe, conforme o item (ii)). Pelo Lema 3.1, $F_\alpha^{p_0}(J) = G_\alpha^{p_0}(J)$ é um intervalo aberto que contém β_2 . Logo, pelo item (iii), $\gamma_-(G_\alpha; \theta) \cap G_\alpha^{p_0}(J) \neq \emptyset$. Como G_α é bijetiva, temos $G_\alpha^{-p_0}(\gamma_-(G_\alpha; \theta)) \subseteq \gamma_-(G_\alpha; \theta)$. Uma vez que $G_\alpha^{-p_0}(\gamma_-(G_\alpha; \theta) \cap G_\alpha^{p_0}(J)) = G_\alpha^{-p_0}(\gamma_-(G_\alpha; \theta)) \cap G_\alpha^{-p_0}(G_\alpha^{p_0}(J)) = G_\alpha^{-p_0}(\gamma_-(G_\alpha; \theta) \cap J)$, obtemos que $\gamma_-(G_\alpha; \theta) \cap J \neq \emptyset$. Como J é arbitrário, concluímos daí que, para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$, $\gamma_-(\alpha, \beta) = \overline{\gamma_-(G_\alpha; \theta)} = \overline{A_0(\alpha, \beta)}$. Pelo Corolário 3.8 e pela Observação 4.4, F_α e G_α^{-1} são sensíveis às condições iniciais em $A_0(\alpha, \beta)$. Logo, (b) segue.

4.15 Corolário:

Sejam $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, α e $A_0(\alpha, \beta)$ como antes. Se existe $t \in A_0(\alpha, \beta)$ tal que $\gamma_+(\alpha; t)$ é infinita, $K \subseteq A_0(\alpha, \beta)$ é invariante por F_α e $K \neq A_0(\alpha, \beta)$, então K é denso em $\overline{A_0(\alpha, \beta)}$ e $\text{Int}(K) = \emptyset$.

- Demonstração:

Como consequência do Teorema 4.14, temos que K é denso em $\overline{A_0(\alpha, \beta)}$. Suponhamos que $\text{Int}(K) \neq \emptyset$ e sejam $t \in A_0(\alpha, \beta) \setminus K$ e $t_1, t_2 \in R$, $t_1 < t_2$ (os quais existem) tais que $(t_1; t_2) \subseteq K$. pelo Teorema 4.14, $\gamma_-(G_\alpha; t) \cap (t_1; t_2) \neq \emptyset$. Logo existe $t_0 \in K$ tal que $F_\alpha^{j_0}(t_0) = t$ para algum $j_0 \in N$, contra a hipótese de ser K invariante. Disto segue o resultado.

4.16 Observações:

a) Como F_α é ímpar, valem resultados semelhantes aos do Teorema

4.13 e do Corolário 4.14 para $F_\alpha|_{(-A_0(\alpha,\beta))}$.

b) Como $A_0(\alpha,\beta)$ é invariante por F_α e $\partial A_0(\alpha,\beta) \subseteq R \setminus D(\alpha)$ temos pelo Corolário 2.5, que $A_0(\alpha,\beta)$ é estável. Mas se $\gamma_+(\alpha;t)$ é infinita para algum $t \in A_0(\alpha,\beta)$, então as órbitas $\gamma_+(\alpha,\theta)$, $\theta \in A_0(\alpha,\beta)$, são instáveis.

c) Se $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ é uma partição de $[0;1]$ com $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ e $\gamma_+(\alpha;t)$ é infinita para $t \in A_0(\alpha,\beta)$ então, para todo $\theta \in R \setminus \{0\}$, $\gamma_+(\alpha;\theta)$ é infinita, e portanto, instável. De fato, para todo $\theta \in R \setminus \{0\}$ existe $p_0 = p_0(\theta) \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F_\alpha^{p_0}(\theta) \in A_0(\alpha,\beta)$. Concluimos daí que, dada uma partição $\langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ de $[0;1]$ e $\alpha \in R_+^m$, podemos ter $P(\alpha,n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., não existe $\theta \in R$ com $\gamma_+(\alpha;\theta)$ periódica.

d) Seja $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0;1]$. Se $\beta_1 \leq 2\beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$, temos que F_α é periódica em $A_0(\alpha,\beta)$ (e em $-A_0(\alpha,\beta)$) se e somente se, o parâmetro δ do Lema 4.10 é racional.

e) Sejam $\beta_1 = 1/3$, $\beta_2 = 2/3$, $\alpha_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e α_2 racional tal que $\sqrt{2}/6 < \alpha_2 < 1 - [\sqrt{2}/2]$. Temos que $2\beta_1 = \beta_2$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in U_0(\beta)$ e que $\alpha_0 - \alpha_1 = \nu_0 - \nu_1$ é irracional. Como $\alpha_0 - \alpha_1 = ((l+\delta)/\lambda(l+\delta-1))\alpha_2$, (onde l e δ são como no Lema 4.10) segue que δ é irracional. Logo F_α é pseudocaótica em $A_0(\alpha,\beta)$. Mas, se $r_0 = \frac{3}{2}$, $r_1 = -2$ e $r_2 = 0$, obtemos $\sum_{i=0}^2 r_i \alpha_i = 0$. Portanto, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ são

racionalmente dependentes. Com este exemplo vemos que o fato de serem $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ racionalmente dependentes não implica, necessariamente, que toda órbita $\gamma_+(\alpha;\theta)$ seja finita.

f) Como consequência do Corolário 4.15 temos que, se F_α é pseudocaótica em $A_0(\alpha, \beta)$ então $F_\alpha|_{A_0(\alpha, \beta)}$ tem propriedades assemelhadas à condição de minimalidade de [14], i.e., (1) Para todo $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$, $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é infinita, e (2) se $J \subseteq A_0(\alpha, \beta)$ é a reunião de uma classe finita de intervalos semi-abertos cujos extremos pertencem a $\gamma_+(\alpha; D(\alpha)) \cup \partial A_0(\alpha, \beta)$ então $F_\alpha(J) = J$ implica $J = \emptyset$ ou $J = A_0(\alpha, \beta)$. De fato, decorre do Corolário 4.14 que $J \subseteq A_0(\alpha, \beta)$, $J \neq A_0(\alpha, \beta)$, $J \neq \emptyset$ e $F_\alpha(J) = J$ implica $\bar{J} = \overline{A_0(\alpha, \beta)}$ e $\text{Int}(J) = \emptyset$.

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0; 1]$ e $A_0(\alpha, \beta)$ como no Teorema 4.3. De acordo com o Teorema 3.2, existem no máximo 3 períodos possíveis para as órbitas $\gamma_+(\alpha; \theta)$, $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$ (ou $\theta \in -A_0(\alpha, \beta)$). Demonstraremos agora que existe no máximo um período possível para $\gamma_+(\alpha; \theta)$, quando $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$ ou $\theta \in -A_0(\alpha, \beta)$.

Precisamos do lema abaixo, que é consequência imediata do Lema 3.14 e das definições de $U_i(\beta)$, $V_i(\beta)$ e $A_0(\alpha, \beta)$.

4.17 Lema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0; 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^s$. Temos:

a) Se $2\beta_2 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta)$ então, para $\beta_2 \leq \theta_0 \leq \beta_2 + \nu_0 - \nu_1$,

$$g(\alpha, \theta_0; \theta) = \begin{cases} F_\alpha^{(l+1)(n_0+n_1)+3l+2}(\theta), & \theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 - \delta N_0(\alpha) \\ F_\alpha^{(l+2)(n_0+n_1)+3l+5}(\theta), & \theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

Onde $N_0(\alpha) = \alpha_2 - \nu_0 + \nu_1$, $l = [(\nu_0 - \nu_1)/N_0(\alpha)]$, $\delta = ((\nu_0 - \nu_1)/N_0(\alpha)) - l$

b) Se $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_1(\beta)$, então para $\beta_2 - \alpha_2 + N_0(\alpha) \leq \theta_0 \leq \beta_2$,

$$g(\alpha, \theta_0; \theta) = \begin{cases} F_{\alpha}^{(l+1)(n_0+n_1)+3l+4}(\theta), & \theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 - \delta N_0(\alpha) \\ F_{\alpha}^{l(n_0+n_1)+3l+1}(\theta), & \theta_0 - \delta N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

onde $N_0(\alpha) = \nu_0 - \nu_1 - \alpha_2$, $l = [\alpha_2 / N_0(\alpha)]$, $\delta = (\alpha_2 / N_0(\alpha)) - l$.

4.18 Teorema:

Sejam $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e α como acima, e $A_0(\alpha, \beta)$ como no Teorema 4.3. Se $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$ e $\gamma_+(\alpha; \theta)$ é finita para $\theta \in A_0(\alpha, \beta)$ então existe $n = n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que toda órbita $\gamma_+(\alpha; \theta)$ contida em $A_0(\alpha, \beta)$ é n -periódica.

- Demonstração:

Suponhamos $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta)$ (os demais casos são semelhantes). Sejam então, $\theta_0 \in [\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$ e $\theta \in (\theta_0 - N_0(\alpha); \theta_0]$. Escrevendo, para simplificar, $k_1 = (l+1)(n_0+n_1) + 3l+2$ e $k_2 = (l+2)(n_0+n_1) + 3l+5$, temos, pelo Lema 4.17, $g(\alpha, \theta_0; \theta) = F_{\alpha}^{k_1}(\theta)$ ou $g(\alpha, \theta_0; \theta) = F_{\alpha}^{k_2}(\theta)$, conforme seja $\theta_0 - N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0 - \delta N_0(\alpha)$ ou $\theta_0 - \delta N_0(\alpha) < \theta \leq \theta_0$. Portanto é fácil ver, por indução, que para todo $j \in \mathbb{N}$ existem $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$ tais que $p_1 + p_2 = j$ e $g^j(\alpha, \theta_0; \theta) = F_{\alpha}^{p_1 k_1 + p_2 k_2}(\theta)$. Logo, se $j \in \mathbb{N}$ e $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid F_{\alpha}^i(\theta) = g^j(\alpha, \theta_0; \theta)\}$, então n não depende de θ_0 . Dado $\theta_0 \in [\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1]$, se j_0 é período de $\gamma_+(g(\alpha, \theta_0; \theta_0))$ e $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid F_{\alpha}^i(\theta) = g^{j_0}(\alpha, \theta_0; \theta)\}$, então n é período de $\gamma_+(\alpha; \theta_0)$. Portanto $\gamma_+(\alpha; \theta_0)$ é n -periódica para $\beta_2 \leq \theta_0 \leq \beta_2 + \nu_0 - \nu_1$. Uma vez que $(\beta_2 - \alpha_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1] = \bigcup_{j=0}^B F_{\nu}^j((\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1])$ e $(\beta_2 - \alpha_2 - \nu_1; \beta_2 - \alpha_2] = F_{\nu}((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2]) = F_{\alpha}^{n_1+1}((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2])$, o resultado segue do Lema 3.14 e da definição $A_0(\alpha, \beta)$.

4.19 Observação:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ e α como antes. Quando for $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$ temos, pelos Teorema 4.5 e 4.17, que existe no máximo um período possível para as órbitas $\gamma_+(\alpha; \theta)$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, dados $m \in \mathbb{N}$, uma partição $\langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ de $[0;1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$, nem sempre temos uma relação de ordem $\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}$ tal que a existência de um ponto de período n_1 para F_α implica a existência de um ponto de período $n_2 > n_1$ segundo $\mathcal{R}$. Logo, nem sempre é válido, para a classe das funções F_α , um resultado análogo ao Teorema de Sarkovskii ([6], Teorema 10.2, pag. 62).

Os teoremas abaixo são consequência da observação 4.11 e do fato de que, se (d_i) é uma sequência de números racionais que tem um ponto de acumulação e $d_i = p_i/q_i$, $i = 1, 2, \dots$, então existe uma sequência (d_{i_j}) de (d_i) tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} q_{i_j} = \infty$.

4.20 Teorema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ uma partição de $[0;1]$. Se $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ ou $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$, então:

a) Existe uma sequência $\alpha(i) \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ (resp. $\alpha(i) \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$), $i = 1, 2, \dots$, tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(i) = \alpha$ e $F_{\alpha(i)}$ é pseudocaótica em $A_0(\alpha(i), \beta)$.

b) Existe uma sequência $\alpha(j) \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ (resp. $\alpha(j) \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$), $j = 1, 2, \dots$, tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha(j) = \alpha$, as órbitas $\gamma_+(\alpha(j); \theta)$, $\theta \in A_0(\alpha(j), \beta)$ são n_j -periódicas, e $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j = \infty$.

- Demonstração:

Suponhamos $2\beta_1 \leq \beta_2$ e $\alpha \in U_0(\beta)$ (os demais casos são semelhantes). Sejam l, δ como no Lema 4.16 e $\delta_i \in (0;1)$, $i=1, 2, \dots$,

uma sequência tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = \delta$.

Sejam $\alpha_2(i) = ((1+\delta_i+1)/(1+\delta_i))(\nu_0 - \nu_1)$ e $\alpha(i) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2(i))$, $i = 1, 2, \dots$. Temos que $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(i) = \alpha$. Como $l(\alpha(i)) = [(\nu_0 - \nu_1) / (\alpha_2(i) - \nu_0 + \nu_1)] = l$ para i suficientemente grande e $U_0(\beta)$ é aberto em R_+^3 , podemos supor $l(\alpha(i)) = l$ e $\alpha(i) \in U_0(\beta)$, $i = 1, 2, \dots$, e portanto, que $\delta(\alpha(i)) = \delta_i$, $i = 1, 2, \dots$. Se os δ_i são irracionais então $F_{\alpha(i)}$ é pseudocaótica em $A_0(\alpha(i), \beta)$ e (a) segue. Se os δ_i são racionais, da observação acima obtemos (b).

4.21 Teorema:

Sejam $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ e α como no Teorema 4.19 e l, δ , como no Lema 4.16. Seja $p_0 \in \mathbb{N}$, $p_0 \geq 2$. Se $2\beta_1 \leq \beta_2$, $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ (resp. $\beta_2 < 2\beta_1$, $\alpha \in V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$) e δ tem expansão infinita na base p_0 dada por $\delta = \sum_{i=0}^{\infty} [b_i / p_0^{i_0+i}]$ onde $i_0 \geq 1$, $b_i \in \{0, \dots, p_0-1\}$ e $b_i \neq 0$ para índices i arbitrariamente grandes, seja $\delta_j = \sum_{i=0}^j [b_i / p_0^{i_0+i}]$, $j = 0, 1, \dots$. Então existe uma sequência $\delta_k \in \{\delta_j \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{Z}_+\}$, $k = 1, 2, \dots$, com a seguinte propriedade: Existe uma sequência $\alpha(k) \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$ (resp. $V_0(\beta) \cup V_1(\beta)$) tal que: (1) $\delta(\alpha(k)) = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$. (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = \alpha$. (3) As órbitas $\gamma_+(\alpha(k); \theta)$, $\theta \in A_0(\alpha(k), \beta)$ são n_k -periódicas e $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.

Note que os invariantes $A_0(\alpha(k), \beta)$ dos Teoremas 4.19 e 4.20 são, em geral, distintos entre si e diferentes de $A_0(\alpha, \beta)$. Mas, da definição de $A_0(\alpha, \beta)$ segue que $[\beta_2; \beta_2 + \nu_0 - \nu_1] \subseteq A_0(\alpha, \beta) \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} A_0(\alpha(k), \beta)$.

4.22 Lista dos símbolos frequentemente usados.

- a) Para toda partição $\langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ de $[0;1]$ seja $\beta = (\beta_1, \beta_2)$.
 b) Para $\alpha \in R_+^3$, sejam $n_i = [\alpha_i]$, $v_i = \alpha_i - [\alpha_i]$, $i=0,1,2$, e $v = (v_0, v_1, v_2)$
 c) $U_0(\beta)$ é o conjunto dos $\alpha \in R_+^3$ tais que:

$$\beta_2 < v_1 < v_0 < \min(1, \beta_1 + \beta_2), \quad v_0 - v_1 < \alpha_2 < \min(\beta_2 - \beta_1, 2(v_0 - v_1), 1 - v_1, \beta_1 + \beta_2 - v_1)$$

- d) $U_1(\beta)$ é o conjunto dos $\alpha \in R_+^3$ que satisfazem:

$$\beta_2 < v_1 < v_0 < \min(1, \beta_1 + \beta_2), \quad v_0 - v_1 < 2\alpha_2 < 2(v_0 - v_1)$$

- e) Se $\beta_2 < 2\beta_1$, então $V_i(\beta) = U_i(\beta) \cap \{\alpha \in R_+^3 \mid v_i < 2\beta_1 < v_0\}$, $i = 0, 1$

- f) Se $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, então:

$$A_0(\alpha, \beta) = (\beta_2; \beta_2 + v_0 - v_1] \cup \bigcup_{i=0}^{n_0} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2 - v_1; \beta_2 - v_1]) \cup \bigcup_{i=0}^{n_1} F_\alpha^i((\beta_2 - \alpha_2; \beta_2])$$

$$B(\alpha, \beta) = \bigcup_{i=0}^{2n_1+1} F_\alpha^i((\beta_1; v_1 - \beta_1))$$

$$A(\alpha, \beta) = A_0(\alpha, \beta) \cup (-A_0(\alpha, \beta))$$

- g) Para todo $\alpha \in U_0(\beta) \cup U_1(\beta)$, seja $N_0(\alpha) = |\alpha_2 - v_0 + v_1|$

- h) Se $\alpha \in U_0(\beta)$, sejam $l = [(v_0 - v_1)/N_0(\alpha)]$ e $\delta = ((v_0 - v_1)/N_0(\alpha)) - l$

$$\text{se } \alpha \in U_1(\beta), \text{ sejam } l = [\alpha_2/N_0(\alpha)] \text{ e } \delta = (\alpha_2/N_0(\alpha)) - l$$

CAPÍTULO 5

A EQUAÇÃO $\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x(t))$

Estudaremos neste capítulo, com a ajuda dos resultados obtidos nos capítulos anteriores, a relação do comportamento das soluções $x(\alpha, c_0)$ do problema de condições iniciais:

$$\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = c_0 \quad (i)$$

com a dinâmica gerada pela classe das funções F_{α} .

Devido à utilidade na descrição de fenômenos físicos, econômicos e biológicos, e às aplicações na teoria do controle, tem crescido, durante os últimos 10 anos, o interesse pelo estudo de equações diferenciais ordinárias e funcionais, tanto com segundo membro não contínuo quanto com argumento seccionalmente constante.

A bifurcação das soluções da família de equações

$$\dot{x}(t) = -f_{\alpha}(x(t-1)) \quad (ii)$$

onde $m = 1$ e $\alpha \in R$, foi estudada por H. Peters, [19] que demonstrou a existência de $\alpha^* \in R$ tal que para $\alpha \geq \alpha^*$ as soluções de (ii) exibem dinâmica complicada.

Equações diferenciais lineares com argumento seccionalmente constante foram abordadas por A.R. Aftabizadeh e J. Wiener [1,2] e por K. Cooke e J. Wiener [5], que estabeleceram condições para que as soluções de tais problemas sejam oscilatórias.

K. Gopalsamy, I. Györi e G. Ladas [8] investigaram o

comportamento oscilatório da seguinte equação diferencial da forma logística:

$$\dot{N}(t) = N(t)(a - bN(t-\tau) - cN(t-k)) \quad (iii)$$

enquanto que o comportamento assintótico e qualitativo de duas equações diferenciais também da forma logística, que são:

$$\dot{x}(t) = \mu x(t)(1 - x(t)) \quad (iv)$$

$$\dot{x}(t) = \mu x(t)(1 - x(2[(t+1)/2])) \quad (v)$$

foi pesquisado por L.A.V. Carvalho e K. Cooke [4]. Entre os resultados obtidos por estes autores, podemos citar: (1) Existência e unicidade das soluções do problema de condições iniciais (iv) com $x(0) = c_0$ (2) Existência e unicidade das soluções $x(\mu, c_0)$ de (v) para $x(0) = c_0$ (3) A equação (iv) pode exibir dinâmica complicada (4) A solução $x(t) \equiv 1$ de (v) é assintoticamente estável para todo $\mu > 0$, e atrai toda solução positiva de (v).

I. I. Györi e G. Ladas [9] descreveram as propriedades oscilatórias da equação não linear:

$$\dot{y}(t) + \sum_{i=1}^m P_i(t) f_i(y(t - k_i)) = 0 \quad (vi)$$

onde P_i, f_i , $i = 1, \dots, m$, são funções reais contínuas em R_+ e R respectivamente, obtendo condições suficientes, e também necessárias e suficientes, para a oscilação das soluções de (vi), em termos da oscilação das soluções da equação linear associada:

$$\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^m p_i x(t - k_i) = 0 \quad (vii)$$

onde p_i , $i = 1, \dots, m$, são constantes. K.N. Jayasree e S.G. Deo [13] estabeleceram uma fórmula de variação de parâmetros para a equação:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + c(t)x(2[(t+1)/2]) + f(t) \quad (\text{viii})$$

e A. Bernui, [3] usando funções de Lyapunov, estudou a estabilidade das soluções triviais de uma classe de equações diferenciais retardadas de segunda ordem com segundo membro não contínuo, que são, especificamente,

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) - 2\alpha \dot{x}(t) - 4\alpha \sum_{k=1}^m \theta(t-t_k) \dot{x}(g_k(t)) \quad (\text{ix})$$

onde $\theta(t) = 1$ se $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$ se $t \leq 0$ e g_k , $k = 1, \dots, n$, são funções de classe C^2 em $[t_k; \infty)$.

5.1 Definição:

a) Sejam $g: R \rightarrow R$ e $c_0 \in R$. Uma solução $x(g, c_0)$ do problema de condições iniciais:

$$\dot{x}(t) = g(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = c_0 \quad (5.1.1)$$

é uma função contínua em R_+ e diferenciável em $R_+ \setminus W$ que satisfaz a equação (5.1.1) acima.

b) Dizemos que uma solução de (5.1.1) é continuável à esquerda quando é possível estender à esquerda o intervalo de definição deste solução de modo que a mesma satisfaça (5.1.1) neste novo domínio ([4], Definição 2, pag. 361).

Quando for $g = -f_\alpha$ escreveremos, para abreviar, $x(\alpha, c_0)$ em lugar de $x(-f_\alpha; c_0)$.

5.2 Teorema:

Seja $g: R \rightarrow R$. Para todo $c_0 \in R$ existe uma única solução $x(g, c_0)$ para o problema de condições iniciais (5.1.1).

- Demonstração:

Dado $c_0 \in R$, seja $x(g, c_0)$ definida em R_+ por:

$x(g, c_0; t) = x(g, c_0; k) + g(x(g, c_0; k))(t-k)$, $k \leq t \leq k+1$, $k = 0, 1, \dots$ onde $x(g, c_0; k+1) = x(g, c_0; k) + g(x(g, c_0; k))$, $k = 0, 1, \dots$. Então $x(g, c_0)$ é contínua em R_+ , diferenciável em $R_+ \setminus N$ e satisfaz (5.1.1).

Suponhamos que existe uma outra solução $y(g, c_0)$ de (5.1.1). Temos $\dot{x}(g, c_0; t) = \dot{y}(g, c_0; t) = g(c_0)$, $0 \leq t < 1$, e $x(g, c_0; 0) = y(g, c_0; 0) = c_0$. Portanto, $\dot{y}(g, c_0; t) - \dot{x}(g, c_0; t) = 0$, $0 \leq t < 1$, e $y(g, c_0; 0) - x(g, c_0; 0) = 0$. Daí obtemos $y(g, c_0; t) = x(g, c_0; t)$, $0 \leq t < 1$ e, por continuidade, $x(g, c_0; t) = y(g, c_0; t)$, $0 \leq t \leq 1$. Dado $k \in N$, suponhamos $y(g, c_0; t) = x(g, c_0; t)$, $0 \leq t \leq k$. Procedendo como acima, obtemos $y(g, c_0; t) = x(g, c_0; t)$, $k \leq t \leq k+1$ e portanto, $y(g, c_0; t) = x(g, c_0; t)$, $0 \leq t \leq k+1$. Do Teorema da Indução segue $y(g, c_0; t) = x(g, c_0; t)$, $t \geq 0$, como queríamos.

5.3 Corolário I:

Sejam $g: R \rightarrow R$, $c_0 \in R$, $x_j \in R$, $j = 0, 1, \dots$ uma sequência em R e $y(g, c_0)$ definida em R_+ por:

$$y(g, c_0; t) = x_j + g(x_j)(t-j), \quad j \leq t \leq j+1, \quad j = 0, 1, \dots$$

$$y(g, c_0; t) = c_0 \quad .$$

Então $y(g, c_0)$ é a solução $x(g, c_0)$ de (5.1.1) se, e somente se, (x_j) satisfaz a seguinte equação de diferenças finitas:

$$x_{j+1} = x_j + g(x_j) = (I + g)(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, \quad x_0 = c_0 \quad (5.3.1)$$

onde I é a função identidade de R .

- Demonstração:

Temos $\dot{y}(g, c_0; t) = g(x_j) = g(x([t]))$, $j < t < j+1$, $j = 0, 1, \dots$, e $y(g, c_0; 0) = c_0$. Como $y(g, c_0)$ é contínua se, e somente se, $x_{j+1} = x_j + g(x_j)$, $j = 0, 1, \dots$, o resultado segue.

5.4 Corolário II:

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$. Se $x(g_i, c_i)$, $i = 0, \dots, n$, é a solução de (5.1.1) com $g = g_i$ e

$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; j) \mid j \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ é limitado, então

$$a) \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; t) \mid t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; j) \mid j \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$b) \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; t) \mid t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; j) \mid j \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$c) \inf \left\{ \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; t) \right| \mid t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \inf \left\{ \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; j) \right| \mid j \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$d) \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i) \right\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; j) \right| \mid j \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

- Demonstração:

Do Teorema 5.2, segue que $x(g_i, c_i; t) = x(g_i, c_i; j) + g_i(x(g_i, c_i; j))(t-j)$, $j \leq t \leq j+1$, $j = 0, 1, \dots$, para $i = 0, \dots, n$. Logo,

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; t) = a_j + b_j t, \quad j \leq t \leq j+1, \quad j = 0, 1, \dots, \text{ onde:}$$

$$a_j = \sum_{i=0}^n \lambda_i (x(g_i, c_i; j) - j g_i(x(g_i, c_i; j))), \quad b_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x(g_i, c_i; j))$$

Temos portanto que, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, a restrição de $\sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i)$

a $[j; j+1]$ é não crescente ou não decrescente, logo (a) e (b)

seguem. Visto que $\left| \sum_{i=0}^n \lambda_i x(g_i, c_i; t) \right| = |a_j + b_j t|$, $j \leq t \leq j+1$, $j = 0, 1, \dots$,

a prova de (c) e (d) é semelhante.

5.5 Corolário III:

Sejam $g: R \rightarrow R$, I a função identidade de R , $h = I+g$ e $j \in \mathbb{Z}_+$. Sejam U, V subconjuntos não vazios de R . Se V é limitado e $\bigcup_{i=j}^{\infty} h^i(U) \subseteq V$, então $\bigcup_{c_0 \in U} x(g, c_0)([j; \infty)) \subseteq [\inf(V), \sup(V)]$.

- Demonstração:

Seja $Z_j = \langle j, j+1, \dots \rangle = j + \mathbb{Z}_+$. Pelo Teorema 5.2, temos $\gamma_+(h; h^j(c_0)) = \langle x(g, c_0; j), x(g, c_0; j+1), \dots \rangle = x(g, c_0)(Z_j)$, para todo $c_0 \in R$. Logo, para todo $U \in R$, $U \neq \emptyset$, $\bigcup_{i=j}^{\infty} h^i(U) = \gamma_+(h; h^j(U)) =$
 $= \bigcup_{c_0 \in U} \gamma_+(h; h^j(c_0)) = \bigcup_{c_0 \in U} x(g, c_0)(Z_j)$.

Do Corolário 5.4, obtemos $\inf(x(g, c_0)([j; \infty))) = \inf(x(g, c_0)(Z_j))$ e $\sup(x(g, c_0)([j; \infty))) = \sup(x(g, c_0)(Z_j))$, para todo $c_0 \in R$. Portanto, $\inf\left[\bigcup_{c_0 \in U} x(g, c_0)([j; \infty))\right] = \inf\{\inf(x(g, c_0)([j; \infty))) \mid c_0 \in U\} = \inf\left[\bigcup_{c_0 \in U} x(g, c_0)(Z_j)\right] = \inf\left[\bigcup_{i=j}^{\infty} h^i(U)\right]$ e, de modo análogo, obtemos $\sup\left[\bigcup_{c_0 \in U} x(g, c_0)([j; \infty))\right] = \sup\left[\bigcup_{i=j}^{\infty} h^i(U)\right]$. Logo o resultado segue.

Como consequência do Corolário 5.5, temos que, para todo $m \in \mathbb{N}$, para toda partição $\langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ de $[0; 1]$, $\alpha \in R_+^m$, a solução $x(\alpha, c_0)$ de (5.1.1) com $g = -f_\alpha$ é limitada. De fato, pelo Corolário 2.11 existe $j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\bigcup_{i=j}^{\infty} \langle F_\alpha^i(c_0) \rangle \subseteq I_0(\alpha)$. Observa-se também que, pelos Corolários 2.11 e 5.5, para todo subconjunto limitado $V \subseteq R$ existe $n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{c_0 \in V} x(\alpha, c_0)([n_0; \infty)) \subseteq I_0(\alpha)$.

Deduzimos agora um resultado semelhante ao do Teorema 1

de [9].

5.6 Teoremas

Sejam $g: R \rightarrow R$ e $c_0 \in R$.

a) Se $x(g, c_0)$ é t_0 -periódica então $t_0 \in N$ e $t_0 \geq 2$.

b) $x(g, c_0)$ é n -periódica se, e somente se, $\gamma_+(I+g; c_0)$ é n -periódica.

- Demonstração:

i) Escrevendo, para abreviar, $x_j = x(g, c_0; j)$, $j = 0, 1, \dots$, temos que, ou bem $g(x_{j_0}) \neq g(x_{j_0+1})$, para algum $j_0 \in Z_+$, ou bem $g(x_j) = g(x_{j+1}) = g(c_0)$, $j = 0, 1, \dots$.

Suponhamos $g(x_j) = g(c_0)$, $j = 0, 1, \dots$. Como $x(g, c_0; t) = x_j + g(x_j)(t-j)$, $j \leq t \leq j+1$, $j = 0, 1, \dots$, temos $x(g, c_0; j) = x_j + g(c_0)(t-j)$, $j \leq t \leq j+1$, $j = 0, 1, \dots$, e portanto, $x(g, c_0; j) = c_0 + g(c_0)t$, $t \geq 0$. Logo, se $x(g, c_0)$ é t_0 -periódica, então $g(x_{j_0}) \neq g(x_{j_0+1})$, para algum $j_0 \in Z_+$.

Sejam $d_+x(t)$ e $d_-x(t)$ as derivadas à direita e à esquerda, respectivamente, de $x(g, c_0)$ no ponto t (as quais existem, para todo $t > 0$). Temos, então, que $d_-x(j+1) = g(x_j)$ e $d_+x(j+1) = g(x_{j+1})$, para todo $j \in Z_+$. Logo, se $x(g, c_0)$ é periódica, então existe $j_0 \in N$ tal que $d_-x(j_0) \neq d_+x(j_0)$.

ii) Suponhamos que $x(g, c_0)$ é t_0 -periódica, com t_0 não inteiro. Seja $p = \min\{j \in N \mid d_-x(j) \neq d_+x(j)\}$ (o qual existe). Temos que $p + t_0 \in (q; q+1)$ para algum $q \in N$, e que $x(g, c_0; p+t_0) = x(g, c_0; p)$. Seja $\varepsilon > 0$ (o qual existe) tal que $(p - \varepsilon; p + \varepsilon) \subseteq (p-1; p+1)$ e $(p + t_0 - \varepsilon; p + t_0 + \varepsilon) \subseteq (q; q+1)$. Uma vez que $x(g, c_0; t+t_0) = x(g, c_0; t)$ para todo $t \in R_+$, temos $x(g, c_0; p+t_0-h) = x(g, c_0; p-h)$ e $x(g, c_0; p+t_0+h) = x(g, c_0; p+h)$, para $0 < h < \varepsilon$. Portanto, $d_-x(p+t_0) =$

$d_-x(p)$ e $d_+x(p+t_0) = d_+x(p)$. Logo, $d_-x(p+t_0) \neq d_+x(p+t_0)$ enquanto que $p + t_0 \in (q; q+1)$, contra o fato de que $x(g, c_0; t) = x(g, c_0; q) + g(x(g, c_0; q))(t-q)$, $q \leq t \leq q+1$. Daí concluímos que t_0 é inteiro.

Como $x(g, c_0; t) = x_j + g(x_j)(t-j)$, $j \leq t \leq j+1$, $j = 0, 1, \dots$, se fosse $t_0 = 1$ teríamos $x_j = x_0 = c_0$, $j = 0, 1, \dots$, e portanto, $x(t) = c_0 + g(c_0)t$, $t \geq 0$, contra a hipótese de ser $x(g, c_0)$ t_0 -periódica.

Isto prova (a).

(iii) Suponhamos que $\gamma_+(I+g)$ é n -periódica, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema 5.2, $x(g, c_0; j+n) = (I+g)^n(x(g, c_0; j)) = x(g, c_0; j)$. Logo, $x(g, c_0; \theta) = x(g, c_0; j) + g(x(g, c_0; j))(\theta - j - n)$, $j+n \leq \theta \leq j+n+1$, $j = 0, 1, \dots$. Portanto $x(g, c_0; t+n) = x(g, c_0; j) + g(x(g, c_0; j))(t-j)$, $j \leq t \leq j+1$, $j = 0, 1, \dots$, e daí obtemos $x(g, c_0; t+n) = x(g, c_0; t)$, $t \geq 0$. Logo, $x(g, c_0)$ é n -periódica. Reciprocamente, suponhamos $x(g, c_0)$ n -periódica. Então $x(g, c_0; j+n) = x(g, c_0; j)$, $j = 0, 1, \dots$, e (b) segue.

5.7 Observações:

a) Como consequência dos Corolários 5.3, 5.4 e do Teorema 5.6 temos que a dinâmica de $I + g$ e portanto, o comportamento das soluções de $x_{n+1} = (I+g)(x_n)$, determina o comportamento das soluções $x(g, c_0)$, $c_0 \in \mathbb{R}$, de (5.1.1). De fato, temos: (1) $x(g, c_0)$ é limitada se, e somente se, $\gamma_+(I+g; c_0)$ é limitada (2) $x(g, c_0)$ é oscilatória se, e somente se, $\gamma_+(I+g; c_0)$ é oscilatória (3) $x(g, c_0)$ é n -periódica se, e somente se, $\gamma_+(I+g; c_0)$ é n -periódica (4) $x(g, c_0)$ é estável se, e somente se, $\gamma_+(I+g; c_0)$ é estável (5) Existe um intervalo limitado J que atrai $x(g, c_0)$ se e somente se existe um conjunto limitado K que atrai c_0 por $I+g$ (6) A solução de $\dot{x}(t) = g([t])$ é contínua em relação às condições iniciais se,

e somente se, a solução de $x_{n+1} = (I+g)(x_n)$ também o é.

b) Decorre do Teorema 3.5 e do Corolário 5.3 um resultado semelhante aos de [1,2,5,8,9], válido para a classe das equações $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x([t]))$: Toda solução não trivial $x(\alpha, c_0)$ é oscilatória se, e somente se, $\beta_1 < \alpha_0$ e, para todo $i \in \langle 1, \dots, m-1 \rangle$, $0 < \alpha_i \leq \beta_i$ ou $\beta_{i+1} < \alpha_i$. Com efeito, estas condições são necessárias e suficientes para que tenhamos $\alpha_i > 0$, $i=0, \dots, m-1$, e $F_\alpha^{-1}(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle$, e portanto, para que toda solução não trivial de $x_{n+1} = F_\alpha(x_n)$ seja oscilatória.

c) De acordo com o Corolário 3.9 e com o Teorema 5.3, dado $c_0 \in R$, a solução $x(\alpha, c_0)$ de $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x([t]))$, $t \geq 0$, $x(0) = c_0$, é estável se, e somente se, $\gamma_+(\alpha; c_0)$ é finita e está contida em $R \setminus D(\alpha)$.

Obteremos a seguir, condições suficientes para que toda solução não trivial de (5.1.1) seja oscilatória, bem como uma condição necessária e suficiente para que a solução $x(\alpha, c_0)$ de $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x([t]))$, $t \geq 0$, $x(0) = c_0$, tenha uma única continuação à esquerda.

5.8 Teorema:

Sejam $g: R \rightarrow R$ e I a função identidade de R . Se g tem as seguintes propriedades: (1) Existe um intervalo limitado K que atrai todo ponto $\theta \in R$ por $I + g$ (2) $\theta g(\theta) < 0$, para qualquer $\theta \in R \setminus \langle 0 \rangle$ (3) $\min\{\inf\{|g(\theta)| \in R \mid \theta \in R \setminus \langle 0 \rangle\}, \inf\{|\theta + g(\theta)| \in R \mid \theta \in R \setminus \langle 0 \rangle\}\} > 0$, então toda solução $x(g, c_0)$ não trivial de (5.1.1) é oscilatória.

- Demonstração:

Se g satisfaz as condições (1) e (3) acima então

$\gamma_+(I+g; c_0)$ é limitada para todo $c_0 \in R$ e $\gamma_+(I+g; c_0) \subseteq R \setminus \{0\}$ para todo $c_0 \in R \setminus \{0\}$. Seja, então, $c_0 \in R \setminus \{0\}$ e suponhamos que existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(I+g)^{n_0+j}(c_0) > 0$, $j=0,1,\dots$ (ou $(I+g)^{n_0+j}(c_0) < 0$, $j=0,1,\dots$, em cujo caso a demonstração é semelhante). Fazendo $t_0 = (I+g)^{n_0}(c_0)$, temos que $\gamma_+(I+g; t_0) \subseteq (0; \infty)$. Como $\theta g(\theta) < 0$ para $\theta \in R \setminus \{0\}$, isto acarreta $(I+g)^{j+1}(t_0) = (I+g)^j(t_0) + g((I+g)^j(t_0)) < (I+g)^j(t_0)$, $j = 0,1,\dots$. Logo, a sequência $(I+g)^j(t_0) \in R$, $j = 0,1,\dots$, é convergente. Consequentemente, $\lim_{j \rightarrow \infty} |(I+g)^{j+1}(t_0) - (I+g)^j(t_0)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |g((I+g)^j(t_0))| = 0$. Mas $|g((I+g)^j(t_0))| \geq \inf\{|g(\theta)| \mid \theta \in R \setminus \{0\}\} > 0$, $j = 0,1,\dots$, uma contradição. Logo, o resultado segue.

As condições (1), (2) e (3) do Teorema 5.8 são suficientes, mas não necessárias para que o resultado deste teorema seja válido. De fato, se $g(\theta) = -2\theta$, $\theta \in R$, temos $I + g = -I$ e portanto, para todo $c_0 \in R \setminus \{0\}$, $x(g, c_0)$ é oscilatória e tem período 2. Observa-se também que, quando $g = -f_\alpha$ e $\alpha_0 > 0$ temos $\inf\{|\theta + g(\theta)| \mid \theta \in R \setminus \{0\}\} > 0$.

5.9 Teorema:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\langle \beta_0, \dots, \beta_m \rangle$ uma partição de $[0;1]$, $\alpha \in R_+^m$ e $c_0 \in R$. Então:

- $x(\alpha, 0)$ tem uma única continuação à esquerda se, e somente se, $F_\alpha^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.
- Quando $c_0 > 0$, $x(\alpha, c_0)$ tem uma única continuação à esquerda se, e somente se, $F_\alpha^{-j}(\{c_0\}) = \{c_0 + j\}$, $j = 1, 2, \dots$.
- Quando $c_0 < 0$, $x(\alpha, c_0)$ tem uma única continuação à esquerda se, e somente se, $F_\alpha^{-j}(\{c_0\}) = \{c_0 - j\}$, $j = 1, 2, \dots$.

- Demonstração:

Sejam $c_0 \in R$, $y_n \in R$, $n = -1, -2, \dots$, uma sequência e

$y: (-\infty; 0] \rightarrow R$ definida por:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n - f_\alpha(y_n)(t-n), \quad n \leq t \leq n+1, \quad n = -1, -2, \dots \\ y(0) &= c_0. \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

Então y é contínua em $(-\infty; 0]$ e satisfaz $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x(t))$, $t \leq 0$, $x(0) = c_0$, se, e somente se, $y_{n+1} = y_n - f_\alpha(y_n) = F_\alpha(y_n)$, $n = -1, -2, \dots$. Logo, y é uma continuação à esquerda de $x(\alpha, c_0)$ se, e somente se, $y \in F_\alpha^{-1}(\langle y_{n+1} \rangle)$, $n = -1, -2, \dots$. Portanto, dado $c_0 \in R$, $x(\alpha, c_0)$ tem uma única continuação à esquerda se, e somente se $F_\alpha^{-1}(\langle y_{n+1} \rangle)$ tem um único elemento, para $n = -1, -2, \dots$. Como $0 \in F_\alpha^{-1}(\langle 0 \rangle)$, $c_0 + j \in F_\alpha^{-j}(\langle c_0 \rangle)$, $j = 1, 2, \dots$, e $c_0 - j \in F_\alpha^{-j}(\langle c_0 \rangle)$, $j = 1, 2, \dots$, se $c_0 < 0$, o resultado segue.

Para todo $c_0 \in R$, $x(\alpha, c_0)$ é continuável à esquerda. De fato, (1) $y(t) = 0$, $t \leq 0$, é uma continuação à esquerda de $x(\alpha, 0)$ (2) $y(t) = c_0 - t$, $t \leq 0$, é uma continuação à esquerda de $x(\alpha, c_0)$, se $c_0 > 0$ (3) quando $c_0 < 0$, $y(t) = c_0 + t$, $t \leq 0$, é uma continuação à esquerda de $x(\alpha, c_0)$.

5.10 Um Exemplo:

Seja g definida em $[-1; 1]$ por $g(t) = t/2$. Como g satisfaz as condições do Teorema 2.9 para $K = \langle 0 \rangle$, temos que $\langle 0 \rangle$ é um atrator global estável. Visto que $g^p(t) = t/2^p$, $-1 \leq t \leq 1$, $p = 0, 1, \dots$, $\gamma_+(g; t)$ é infinita para todo $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Como $|g^n(t) - g^n(\theta)| = 2^{-n}|t - \theta|$, $-1 \leq \theta, t \leq 1$, $n = 0, 1, \dots$, temos que toda órbita $\gamma_+(g; \theta)$ é uniformemente assintoticamente estável ([17], pag. 88, Definição 4.1.2). Dado $m \in N$, $m \geq 2$, sejam $\beta_j(m) = j/m$, $j = 0, \dots, m$, $\alpha(m) = (1/2m, \dots, 1/2)$ e $f_m = f_{\alpha(m)}|_{[-1; 1]}$. Uma vez que $I - g = g$, temos $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = g$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} (I - f_m) = I - g = g$. Mas $\gamma_+(\alpha(m); \theta)$ tem período 2 para todo $\theta \in [-1/2m; 0) \cup (0; 1/2m]$. Logo,

para todo $m \in \{2, 3, \dots\}$ existe um conjunto infinito $J_m \subseteq [-1; 1]$ tal que $\gamma_+(\alpha(m); \theta)$ tem 2 elementos, para todo $\theta \in J_m$. Temos também que: (1) $\{0\}$ não é atrator global e não é estável (2) As órbitas $\gamma_+(\alpha(m); j/m)$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$, são instáveis, e (3) Como consequência do Lema 3.1, não há órbitas uniformemente assintoticamente estáveis. Concluimos, portanto, que as dinâmicas de $1-f_m$, $m = 2, 3, \dots$, não tendem, em qualquer sentido, para a dinâmica gerada por $1-g$.

5.11 Descrição de um fenômeno oscilatório não linear por uma equação da forma $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x([t]))$.

Consideramos o movimento unidimensional de uma partícula submetida a um campo de força dado por:

$$T_\alpha(M, x, v, t) = -M \left(f_\alpha(x(t)) + v(t-1) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n)$$

onde M é a massa da partícula, x a posição, v a velocidade, δ é a distribuição de Dirac, ([16], pags. 250-251) e o sinal negativo indica que a força atua, em cada instante, no sentido contrário ao do deslocamento.

Suponhamos que a partícula esteja em repouso para $t < 0$ e ocupe, no instante $t=0$, a posição $x(0) = c_0$. Temos então, $x(t) = x(0) = c_0$, $t \leq 0$, e $\dot{x}(t) = 0$, $t < 0$.

Uma vez que $\int_{t_1}^{t_2} T_\alpha dt = Mx(t_2) - Mx(t_1)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, temos, pelas hipóteses acima e pela definição de T_α , que $\dot{x}(t_2) = \dot{x}(t_1)$, $j < t_1, t_2 < j+1$, $j = 0, 1, \dots$, e que $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = -f_\alpha(x(0)) = -f_\alpha(c_0)$, $0 \leq t \leq 1$. É fácil ver, por indução, que $\dot{x}(t) = -f_\alpha(x_n) = -f_\alpha(x([t]))$, $n < t < n+1$, $n = 0, 1, \dots$. Como a posição x é contínua, obtemos $x(t) = x(n) - f_\alpha(x_n)(t-n)$, $n \leq t \leq n+1$, $n=0, 1, \dots$, e

$x_{n+1} = x_n - f_\alpha(x_n) = F_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Logo, a posição $\tilde{x}(t)$ da partícula é solução do problema de condições iniciais $\dot{\tilde{x}}(t) = -f_\alpha([t])$, $t \geq 0$, $\tilde{x}(0) = c_0$.

5.12 Observação:

Note que embora o espaço de fase para a equação $\dot{\tilde{x}}(t) = g(\tilde{x}([t]))$ seja $\mathbb{R}$, esta equação é retardada e não autônoma. De fato, temos $\dot{\tilde{x}}(t) = g(\tilde{x}(t-r(t)))$, $t \geq 0$, onde $r(t) = t - [t]$ é a parte fracionária de t . Observa-se também que, dados $m \in \mathbb{N}$, uma partição $\{\beta_0, \dots, \beta_m\}$ de $[0;1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$, segue dos Teoremas 3.2 e 5.6 que há no máximo $3m+1$ períodos possíveis para as soluções $x(\alpha, c_0)$ $c_0 \in \mathbb{R}$. Temos também, como consequência dos resultados do Capítulo 4, que (1) Nem sempre existem soluções $x(\alpha, c_0)$ periódicas (2) Há casos nos quais toda solução não trivial $x(\alpha, c_0)$ é instável (3) As soluções $x(\alpha, c_0)$ podem exibir um comportamento complicado.

APÊNDICE

Apresentamos aqui a demonstração do Lema 2.1, por questão de completitude.

- Demonstração do Lema 2.1.

i) Sejam (X, ρ) um espaço métrico, $x \in X$, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Se $\rho(x, A) = 0$, então $B(x; \rho(x, A)) = \emptyset$ e nada mais há a demonstrar. Se $\rho(x, A) > 0$, suponhamos $B(x; \rho(x, A)) \cap A \neq \emptyset$ e seja $a_0 \in B(x; \rho(x, A)) \cap A$. Então $a_0 \in A$ e $\rho(x, a_0) < \rho(x, A)$, contra $\rho(x, A) \leq \rho(x, a)$ para todo $a \in A$. Logo, $B(x; \rho(x, A)) \cap A = \emptyset$.

Sejam, agora, E um espaço vetorial normado e A, B subconjuntos não vazios de E com $A \subseteq \text{Int}(B)$. Se $r_0 = \rho(A, \partial B) = 0$, então $B(A; r_0) = \emptyset$ e nada mais há a demonstrar. Se $r_0 > 0$, então, para todo $a \in A$, $r_0 \leq \rho(a, \partial B)$, logo $B(a; r_0) \cap \partial B = \emptyset$.

Afirmamos que $B(a; r_0) \subseteq \text{Int}(B)$, para $a \in A$. De fato, se fosse $B(a; r_0) \cap (E \setminus B) \neq \emptyset$, pela conexidade de $B(a; r_0)$ e pelo Teorema da Alfândega teríamos $B(a; r_0) \cap \partial B \neq \emptyset$, contradição. Como $a \in A$ é arbitrário, concluímos daí que $B(a, r_0) \subseteq \text{Int}(B)$ para todo $a \in A$ e, uma vez que $B(A; r_0) = \bigcup_{a \in A} B(a, r_0)$, (a) segue.

ii) Sejam (X, ρ) um espaço métrico e A, B subconjuntos não vazios de X . Dado $\varepsilon > 0$, sejam $a_0 = a_0(\varepsilon) \in \bar{A}$ e $b_0 = b_0(\varepsilon) \in \bar{B}$ (os quais existem) tais que $\rho(a_0, b_0) < \rho(\bar{A}, \bar{B}) + (\varepsilon/3)$. Como $a_0 \in \bar{A}$ e $b_0 \in \bar{B}$, existem $a \in A$, $b \in B$ tais que $\rho(a, a_0) < \varepsilon/3$ e $\rho(b, b_0) < \varepsilon/3$. Então $\rho(a, b) \leq \rho(a, a_0) + \rho(a_0, b) \leq \rho(a, a_0) + \rho(a_0, b_0) + \rho(b, b_0) < \rho(\bar{A}, \bar{B}) + (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) = \rho(\bar{A}, \bar{B}) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e

$\rho(A, B) \leq \rho(a, b)$, obtemos $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$. Logo, se A, B são subconjuntos não vazios de um espaço vetorial normado E , então $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

iii) Sejam, como acima, A, B subconjuntos não vazios de um espaço vetorial normado E . Para todo $a \in A$, $b \in B$, seja, como usual, $[a; b] = \{(1+t)a+tb \in E \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Como, por hipótese, $a \in A$ e $b \in B$, temos que $A \cap B = \emptyset$ acarreta $[a; b] \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$ e $[a; b] \cap (E \setminus B) \neq \emptyset$. Da conexidade de $[a; b]$ e do Teorema da Alfândega, temos $[a; b] \cap \partial A \neq \emptyset$ e $[a; b] \cap \partial B \neq \emptyset$. Portanto existem $a_0 \in [a; b] \cap \partial A$ e $b_0 \in [a; b] \cap \partial B$. Logo existem $t_0, t_1 \leq 1$, de modo que $(1-t_0)a+t_0b \in \partial A$ e $(1-t_1)a+t_1b \in \partial B$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} \rho(A, \partial B) &\leq \rho(a, (1-t_1)a+t_1b) = |t_1| \cdot \|a-b\| \leq \|a-b\| \\ \rho(\partial A, B) &\leq \rho((1-t_0)a+t_0b, b) = |1-t_0| \cdot \|a-b\| \leq \|a-b\| \\ \rho(\partial A, \partial B) &\leq \rho((1-t_0)a+t_0b, (1-t_1)a+t_1b) = |t_1-t_0| \cdot \|a-b\| \leq \|a-b\|. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Uma vez que (2.1.1) vale para todo $a \in A$, $b \in B$, temos que $\rho(A, \partial B)$, $\rho(\partial A, B)$ e $\rho(\partial A, \partial B)$ são cotas inferiores do conjunto $\{\rho(a, b) \in \mathbb{R} \mid a \in A, b \in B\}$, logo $\rho(A, \partial B) \leq \rho(A, B)$, $\rho(\partial A, B) \leq \rho(A, B)$ e $\rho(\partial A, \partial B) \leq \rho(A, B)$. Uma vez que $\partial A \subseteq \bar{A}$ e $\partial B \subseteq \bar{B}$, do item (ii) acima obtemos (b).

iv) Sejam $r > 0$ e $x \in B(A; r)$. Se $x \in B(A; r) \setminus A$, então $x \notin A$ e $\rho(x, A) < r$, logo, pelo item (iii) acima, $\rho(x, A) = \rho(x, \partial A) < r$. Daí concluímos $B(A; r) \setminus A \subseteq B(\partial A; r)$, e portanto, $B(A; r) = A \cup (B(A; r) \setminus A) \subseteq A \cup B(\partial A; r)$. Como $A \subseteq B(A; r)$ e $B(\partial A; r) \subseteq B(\bar{A}; r) = B(A; r)$, segue $A \cup B(\partial A; r) \subseteq B(A; r)$, e isto demonstra (c).

BIBLIOGRAFIA

- 01-A. R. Aftabizadeh, J. Wiener e J. M. Xu, *Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument*, Proc. Amer. Math. Soc. 99(1987) n° 4, 673-679.
- 02-A. R. Aftabizadeh e J. Wiener, *Oscillatory and periodic solutions for systems of two first order linear differential equations with piecewise constant argument*, Appl. Anal. 26(1988), 327-333.
- 03-A. Bernui, *Stability of discontinuous differential equations with finite number of retarded terms by Liapunov functions*, Appl. Anal. 42(1991), 157-174.
- 04-L. A. V. Carvalho e K. Cooke, *A nonlinear equation with piecewise continuous argument*, Differential and Integral Equations, 1(1988) n° 3, 359-367.
- 05-K. Cooke e J. Wiener, *An equation alternately of retarded and advanced type*, Proc. Amer. Math. Soc. 99(1987) n° 4, 726-732.
- 06-R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., (1986).
- 07-J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., (1966).
- 08-K. Gopalsamy, I. Györi e G. Ladas, *Oscillations of a class of delay equations with continuous and piecewise constant arguments*, Funkc. Ekvac. 32(1989), 395-406.
- 09-I. Györi e G. Ladas, *Linearized Oscillations for equations with piecewise constant arguments*, Differential and Integral Equations, 2(1989), 123-131.
- 10-J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs n° 25, Amer. Math. Soc., (1988).

- 11-P.Hartman, *Difference equations: Disconjugacy, principal solutions Green's functions, complete monotonicity*, Trans. Amer. Math. Soc., 246(1978), 1-30.
- 12-J.Henderson e L.Lee, *Continuous dependence and differentiation of solutions of finite difference equations*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 14(1991) n^o 4, 747-756.
- 13-K.N.Jayasree e S.G.Deo, *Variation of parameters formula for the equation of Cooke and Wiener*, Proc. Amer. Math. Soc., 112(1991) n^o 1, 75-80.
- 14-M.Keane, *Interval Exchange Transformations*, Math. Z., 141(1975) 25-31.
- 15-A.Lasota e J.Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., 186(1973), 481-487.
- 16-E.Lages Lima, *Espaços métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq., Rio de Janeiro, (1977).
- 17-V.Lakshmikanthan e D.Trigiant, *Theory of difference equations: Numerical methods and applications*, Academic Press Inc., (1988).
- 18-R.Mañé, *Introdução à teoria ergódica*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq., Rio de Janeiro, (1983).
- 19-H.Peters, *Chaotic behaviour of nonlinear differential - delay equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 7(1983) n^o 12, 1315-1334.
- 20-L.Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, (1970).
- 21-B.J. West, *Fractal physiology and chaos in medicine*, World Scientific, (1990).