**Forma Assintótica de
Soluções Periódicas de uma
Equação Diferencial no Plano com
Retardamento**

Mara Sueli Simão Moraes

Orientador: Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas

*Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos,
Universidade de São Paulo,
para obtenção do
Título de Doutor em Ciências - Área: Matemática - Análise*

São Carlos – S.P.

1994

Aos Meus Pais
Ao Saulo e
Ao Bruno

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas, pela seriedade profissional, dedicação e paciência com que conduziu a orientação deste trabalho.

À Prof^a Dr^a Sandra M. Semensato de Godoy, pela solicitude e prontidão com que sempre nos ouviu e deu sugestões.

Ao Prof. Dr. Clodoaldo G. Ragazzo, pela colaboração para a realização das simulações.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UNESP-Bauru, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas da pós-graduação, como também, aos funcionários e professores do ICMSC-USP, pela gentileza e carinho com que nos acolheram nestes anos todos.

Enfim, agradeço a todos aqueles que direta, ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Abstract

The singularly perturbed differential-delay equation

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + F(x(t-1)) \quad (1)$$

is studied, with $\varepsilon > 0$, $x = (x_1, x_2)$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odd and differentiable up to order two at the origin.

For small ε and $f = -f_1 = f_2$ monotone in some interval $[-A, A]$, $A > 0$, the slowly spiralling periodic solutions $x(t)$ of the equation (1) are proved to have a square-wave shape, and are related to periodic points of the mapping $F = (f_1, f_2)$.

As it is pointed out in [1], for the scalar case, when f is not monotone the convergence of $x(t)$ to the square-wave typically is not uniform, and a phenomenon similar to the Gibbs one of classical Fourier series, must occur.

Resumo

A equação diferencial com retardamento perturbada singularmente

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + F(x(t-1)) \quad (1)$$

é estudada, com $\varepsilon > 0$, $x = (x_1, x_2)$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares.

Para ε pequeno e $f = -f_1 = f_2$ monótona num intervalo $[-A, A]$, $A > 0$, é provado que a solução periódica lentamente espiralante $x(t)$ da equação (1) tem a forma de uma “onda quadrada”, e está relacionada aos pontos periódicos da função $F = (f_1, f_2)$.

Como é destacado em [1], para o caso escalar, quando f não é monótona a convergência de $x(t)$ para a “onda quadrada” é tipicamente não uniforme, e ocorre um fenômeno similar ao de Gibbs, da clássica série de Fourier.

Conteúdo

Introdução	1
1 Existência de um contínuo global de soluções periódicas	6
2 Estimativas assintóticas para o período quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$	10
3 Equações de camada de transição	29
4 Forma assintótica das soluções periódicas quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$	36
Observações finais	56
Bibliografia	73

Introdução

Consideremos o sistema de equações diferenciais com retardamento autônomas

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + f_1(x_2(t-1)) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + f_2(x_1(t-1)) \end{cases} \quad (1)_\varepsilon$$

onde $\varepsilon > 0$, $x = (x_1, x_2)$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f_1, f_2 são diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares.

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento assintótico de certas soluções periódicas não triviais de $(1)_\varepsilon$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

Observemos que $(1)_\varepsilon$ é justamente o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_1(t) + \alpha f_1(x_2(t-1)) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) + \alpha f_2(x_1(t-1)) \end{cases} \quad (2)_\alpha$$

com $\varepsilon = \alpha^{-1}$.

Através de uma mudança na escala do tempo o sistema é equivalente à:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) + f_1(y_2(t-\alpha)) \\ \dot{y}_2(t) = -y_2(t) + f_2(y_1(t-\alpha)). \end{cases}$$

Portanto, estudar o comportamento assintótico das soluções periódicas quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$ de $(1)_\varepsilon$ é equivalente ao estudo do caso para grandes retardamentos, isto é, $\alpha \rightarrow \infty$, no sistema acima.

Em [1], Mallet-Paret e Nussbaum tratam o problema no caso escalar,

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \alpha f(x(t-1))$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nosso problema é determinar como a dinâmica do sistema $(1)_\varepsilon$, quanto ε é pequeno, se relaciona com a dinâmica do sistema limite, para $\varepsilon \rightarrow 0_+$

$$\begin{cases} x_1(t) = f_1(x_2(t-1)) \\ x_2(t) = f_2(x_1(t-1)). \end{cases} \quad (3)$$

Exemplificando, suponhamos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, tal que, $f(-a) = -f(a)$ e $f(a) = a$.

Definamos a função $x_4(t) = (x_1^4(t), x_2^4(t))$ por:

$$\begin{aligned} x_4(t) &= (a, a) & \text{se } -1 \leq t < 0, \\ x_4(t) &= (a, -a) & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ x_4(t) &= (-a, -a) & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ x_4(t) &= (-a, a) & \text{se } 2 \leq t < 3 \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$x_4(t+4) = x_4(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então, $x_4(t)$ é uma solução de período 4 de (3), com $f_1 = f$ e $f_2 = -f$.

Veja a Figura 1.

Uma pergunta natural é se, para $\varepsilon > 0$ pequeno, o sistema $(1)_\varepsilon$ tem soluções periódicas $x_\varepsilon(t) = (x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t))$ com período próximo de 4, tais que, $x_\varepsilon(t)$ se aproxima da solução $x_4(t)$ de (3), em algum sentido, quando ε se aproxima de zero. Esse é o problema que vamos considerar.

Figura 1: Uma solução de (3), com $f_1 = f$ e $f_2 = -f$.

Para isso, iremos seguir os seguintes passos:

- (I) - Verificar a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas de $(1)_\varepsilon$ que emanam a partir de uma bifurcação de Hopf.
- (II) - Determinar uma estimativa do período dessas soluções quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$.
- (III) - Estudar o comportamento assintótico das soluções de $(1)_\varepsilon$ quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Vamos mostrar que $x_\varepsilon \rightarrow x_4$ quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, uniformemente nas partes compactas de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
- (IV) - Através de uma mudança de variável determinar certas equações denominadas equações camada de transição, úteis no estudo do comportamento das soluções de $(1)_\varepsilon$ nos pontos de descontinuidade das soluções de (3).

Suponhamos as seguintes hipóteses:

$$(H.1) \quad x f_1(x) > 0, \quad x \neq 0,$$

$$x f_2(x) < 0, \quad x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \delta = \sqrt{-\delta_1 \delta_2} > 1,$$

$$\text{onde } \delta_1 = f_1'(0), \quad \delta_2 = f_2'(0).$$

$$(H.2) \quad \exists M > 0; \quad |f_1(x)|, \quad |f_2(x)| \leq M, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(H.3) \quad x \cdot F(x) < |x|^2 \quad \text{se} \quad x \in \overline{B}_M - \{0\},$$

onde “ $\cdot$ ” denota o produto escalar usual do $\mathbb{R}^2$ e “ $\overline{B}_M$ ” denota a bola fechada de centro na origem e raio M do $\mathbb{R}^2$.

$$(H.4) \quad |\delta_1 + \delta_2| < 2.$$

Sendo f_1, f_2 diferenciáveis até ordem 2 na origem, f_1 é monótona crescente e f_2 é monótona decrescente, numa vizinhança de $x = 0$. E da limitação de f_1 e f_2 , segue-se do Lema 2.2 de [2] e sua demonstração, que se $x(t)$ é solução periódica de $(1)_\varepsilon$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, então

$$|x_1(t)|, |x_2(t)| \leq M, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Denotaremos por $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ o espaço de Banach definido por

$$C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2) = \{\varphi : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2; \varphi \text{ é contínua}\}$$

munido da norma

$$\|\varphi\| = \sup_{-1 \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$$

onde $|\cdot|$ denota a norma usual de $\mathbb{R}^2$.

Dados $t_0 \geq 0$, $A \geq 0$ e uma função $x \in C([t_0 - 1, t_0 + A], \mathbb{R}^2)$, para cada $t \in [t_0, t_0 + A]$, denotaremos por $x_t \in C$ a função definida por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -1 \leq \theta \leq 0.$$

Se $\phi \in C$, uma solução de $(1)_\varepsilon$ que coincida com ϕ em $[-1, 0]$ deve satisfazer:

$$\begin{aligned}x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-1, 0] \\x(t) &= e^{-\alpha t} \phi(0) + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} F(x(s-1)) ds, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

e reciprocamente. Por um processo recursivo em intervalos de comprimento um, a partir dessa expressão, mostra-se a existência e unicidade da solução em $[-1, \infty]$. Veja [4], para maiores informações sobre a teoria geral dessas equações.

Capítulo 1

Existência de um contínuo global de soluções periódicas

Consideremos os seguintes subconjuntos convexos e fechados de C :

$$K = \{\varphi \in C \mid \varphi_1(-1) = 0, \varphi_1, \varphi_2 \geq 0\},$$

$$K_\alpha = \{\varphi \in K \mid e^{\alpha\theta} \varphi_j(\theta) \text{ monótona crescente em } [-1, 0], j = 1, 2\}, \text{ com } \alpha > 0.$$

Ainda, seja α_0 o primeiro valor onde ocorre uma bifurcação de Hopf de $(2)_\alpha$:

$$\alpha_0 := \frac{b_0}{\sqrt{\delta^2 - 1}}, \quad 0 < b_0 := \arcsin \frac{1}{\delta} < \frac{\pi}{2}. \quad (1.1)$$

Chamamos de $x(\cdot; \alpha, \varphi)$ a solução de $(2)_\alpha$ definida em $[-1, \infty)$, a qual coincide com φ em $[-1, 0]$, $\varphi \in C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$.

Em [2], M.Z. Baptistini, estudando um caso mais geral de $(2)_\alpha$ prova, sob as hipóteses (H.1) e (H.2), o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Suponhamos válidas as hipóteses (H.1) e (H.2) e seja α_0 como em (1.1). Então para todo $\alpha > \alpha_0$, $(2)_\alpha$ tem solução periódica não trivial $x(\cdot; \alpha, \varphi) = (x_1(\cdot; \alpha, \varphi), x_2(\cdot; \alpha, \varphi))$, $\varphi \in K_\alpha$, com período $T > 4$.*

A prova desse resultado segue da existência de um ponto fixo não trivial de um operador de retorno A_α definido pelo fluxo no conjunto K_α e é consequência de um resultado devido a Nussbaum [5], que usa o conceito de ejetividade de acordo com Browder [6].

Mais precisamente é mostrada a existência de uma aplicação contínua

$$\tau_\alpha : C \rightarrow [4, \infty) ,$$

tal que, se $A_\alpha : K_\alpha \rightarrow C$ é o operador definido por

$$\begin{aligned} A_\alpha(\varphi) &= x_{\tau_\alpha(\varphi)}(\cdot; \alpha, \varphi), \quad \varphi \neq 0 \\ A_\alpha(0) &= 0 \end{aligned}$$

então A_α é completamente contínuo, $A_\alpha K_\alpha \subset K_\alpha$ e possui um ponto fixo $\varphi \in K_\alpha - \{0\}$, isto é, $A_\alpha \varphi = \varphi$, para $\alpha > \alpha_0$.

O conceito de solução periódica lentamente espiralante de acordo com M.Z. Baptistini [2] é dado a seguir.

Definição 1.1 *Uma solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2)_\alpha$ é chamada solução periódica lentamente espiralante se $\exists q_1, q_2, q_3, q_4 > 0$, $q_j > q_{j-1} + 1$ para $j = 2, 3, 4$, tais que*

- (i) $x_1(-1) = 0$, $x_1(t) > 0$ se $-1 < t < q_2$ e $x_1(t) < 0$ se $q_2 < t < q_4$,
- (ii) $x_2(t) > 0$ se $-1 < t < q_1$ e se $q_3 < t < q_4$, $x_2(t) < 0$ se $q_1 < t < q_3$, e
- (iii) $x(t) = x(t + q_4 + 1)$, para todo t .

Sob as hipóteses (H.1) e (H.2), M.Z. Baptistini em [2], mostra que há uma correspondência biunívoca entre soluções periódicas lentamente espiralantes de $(2)_\alpha$ e pontos fixos não triviais de A_α .

Como f_1, f_2 são funções ímpares é natural estudarmos soluções periódicas lentamente espiralantes simétricas, isto é, que satisfaçam a seguinte condição:

$$x(t + p) = -x(t), \quad \text{para todo } t, \tag{1.2}$$

onde p é a metade do período mínimo de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

De fato, definamos $\tau_\alpha^* > 0$, tal que, $x_{\tau_\alpha^*}(\cdot; \alpha, \varphi) \in -K_\alpha$. Consideremos $x(t) = x(t; \alpha, \varphi)$ uma solução periódica lentamente espiralante de $(2)_\alpha$, tal que, $x_{\tau_\alpha^*}(\cdot; \alpha, \varphi) = -\varphi$. Seja $y(t) = -x(t)$. Então $y(t)$ é solução de $(2)_\alpha$, para todo t , e do fato de $(2)_\alpha$ ser autônomo, $y(t + \tau_\alpha^*)$ também é solução. Ainda $y(\theta + \tau_\alpha^*) = \varphi(\theta)$, para $-1 \leq \theta \leq 0$. Portanto, $x(t) = -x(t + \tau_\alpha^*)$, $p = \tau_\alpha^*$ e condição (1.2) é verificada.

Seguindo Saupe [5], [6], definamos uma S^* -solução a seguir.

Definição 1.2 *Uma solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2)_\alpha$ é chamada de uma S^* -solução se é uma solução periódica lentamente espiralante satisfazendo (1.2).*

Inspirados em [2] e devido à simetria das S^* -soluções, temos a existência da aplicação contínua

$$\tau_\alpha^* : C \rightarrow [2, \infty),$$

tal que, se $S_\alpha^* : K_\alpha \rightarrow C$ é o operador definido por

$$\begin{aligned} S_\alpha^*(\varphi) &= -x_{\tau_\alpha^*(\varphi)}(\cdot; \alpha, \varphi), \quad \varphi \neq 0 \\ S_\alpha^*(0) &= 0 \end{aligned}$$

então S_α^* é completamente contínuo, $S_\alpha^* K_\alpha \subset K_\alpha$.

Analogamente ao estudo feito por M.Z. Baptistini em [2], S_α^* tem um ponto fixo não nulo e portanto $(2)_\alpha$ possui uma S^* -solução para cada $\alpha > \alpha_0$.

Seja:

$$\mathcal{S} = \{ (\alpha, \varphi) \in (0, \infty) \times K \mid \varphi \in K_\alpha - \{0\}, S_\alpha^*(\varphi) = \varphi \} \quad (1.3)$$

e consideremos, em adição, as hipóteses (H.3) e (H.4).

Pequenas adaptações das demonstrações de M.Z. Baptistini em [2], levam ao seguinte resultado.

Teorema 1.2 *Sejam $\mathcal{S}$ definido como (1.3) e α_0 como em (1.1). Então valem as afirmações*

- (i) $\exists \bar{\alpha} > 0$ tal que se $(\alpha, \varphi) \in \mathcal{S}$ então $\alpha \geq \bar{\alpha}$ e $\|\varphi\| \leq M$.
- (ii) O fecho $\overline{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ em $(0, \infty) \times K$ é $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{(\alpha_0, 0)\}$.
- (iii) Seja $\mathcal{S}_0$ a componente conexa de $\overline{\mathcal{S}}$ contendo $(\alpha_0, 0)$. Então $\mathcal{S}_0$ é um subconjunto ilimitado de $(0, \infty) \times K$, mais especificamente, para cada $\alpha > \alpha_0$, existe S^* -solução $x(t; \alpha, \varphi)$ de $(2)_\alpha$ tal que $(\alpha, \varphi) \in \mathcal{S}_0$ e $|x(t; \alpha, \varphi)| \leq M$ para todo t .

Capítulo 2

Estimativas assintóticas para o período quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$

Consideremos o sistema de equações diferenciais com retardamento autônomas:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + f_1(x_2(t-1)) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + f_2(x_1(t-1)) \end{cases}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.1)_\varepsilon$$

Neste capítulo vamos iniciar o estudo do comportamento assintótico das S^* -soluções, $x = (x_1, x_2)$, de $(2.1)_\varepsilon$, onde:

$F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares.

Iniciaremos o capítulo com um lema técnico sobre as S^* -soluções, $x = (x_1, x_2)$, de $(2.1)_\varepsilon$.

Lema 2.1 *Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, funções ímpares, satisfazendo as hipóteses (H.1) e (H.2). Então os pontos extremos da coordenada $x_2(t)$ pertencem ao intervalo $I = (q_j, q_j + 1)$, $j = 2, 4$. Um resultado análogo é válido para $x_1(t)$.*

Prova: Seja $t_2 \in [q_1, q_3]$.

Afirmamos que se t_2 é ponto extremo de $x_2(t)$, então $t_2 \in (q_2, q_2 + 1)$.

Suponhamos, por contradição, que $t_2 \geq q_2 + 1$.

Da segunda equação de $(2.1)_\varepsilon$ e da definição de soluções periódicas lentamente espiralantes, segue que $\dot{x}_2(t_2) > 0$, o que contradiz o fato de t_2 ser ponto extremo de $x_2(t)$.

Agora, suponhamos, por contradição, que $t_2 \leq q_2$ e consideremos

$$(e^{\alpha t} x_2(t))' = \alpha e^{\alpha t} f_2(x_1(t-1)), \quad t \in (q_1, q_2].$$

Da definição de soluções periódicas lentamente espiralantes e de (H.1), segue que $e^{\alpha t} x_2(t)$ e, portanto, $x_2(t)$, é estritamente decrescente para todo $t, t \in (q_1, q_2)$, o que contradiz o fato de t_2 ser ponto extremo de $x_2(t)$.

Analogamente provamos o resultado para $x_1(t), t \in [q_2, q_4]$.

Devido a simetria de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, o resultado é verdadeiro para todo $t \in [0, q_4 + 1]$, sendo $P = q_4 + 1$ o período mínimo de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. $\square$

Realizados estudos numéricos, notamos que S^* -soluções $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2.1)_\varepsilon$, apresentam um bom comportamento ao longo de seu período. Não obstante o número de extremos relativos que suas coordenadas apresentam, existem números $c, d > 0$, de modo que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ oscilam em volta do zero de forma monótona, para todos os valores de t , tais que

$$-c < x_1(t) < c \quad \text{e} \quad -d < x_2(t) < d.$$

A seguinte definição é semelhante à propriedade M , dada por Mallet-Paret e Nussbaum em [1]. Inspira-se no comportamento descrito acima.

Para melhor compreensão dessa definição é conveniente referir-se à Figura 2.1.

Figura 2.1: Uma S^* -solução satisfazendo a propriedade J .

Definição 2.1 Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$ com $-1, q_2$ e q_4 os primeiros zeros de $x_1(t)$ e q_1 e q_3 os primeiros zeros de $x_2(t)$.

Fixemos números $c, d > 0$.

Dizemos que $x(t)$ satisfaz a propriedade J para c e d se:

(1.1) $x_1(t)$ é monótona crescente em $[-1, a_1]$

(1.2) $x_1(t) \geq c$, se $a_1 < t < b_1$

(1.3) $x_1(t)$ é monótona decrescente em $[b_1, c_1]$

(1.4) $x_1(t) \leq -c$, se $c_1 < t < d_1$

(1.5) $x_1(t)$ é monótona crescente em $[d_1, q_4]$

(2.1) $x_2(t)$ é monótona crescente em $[-1, a_2]$

(2.2) $x_2(t) \geq d$, se $a_2 < t < b_2$

(2.3) $x_2(t)$ é monótona decrescente em $[b_2, c_2]$

(2.4) $x_2(t) \leq -d$, se $c_2 < t < d_2$

(2.5) $x_2(t)$ é monótona crescente em $[d_2, q_4]$

onde os números $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$ e d_2 são definidos como segue.

Sejam $t_1, t_2 \in [-1, q_4]$, tais que

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= \max \{ x_1(t); q_1 < t < q_1 + 1 \}, \quad e \\ x_2(t_2) &= \min \{ x_2(t); q_2 < t < q_2 + 1 \}. \end{aligned}$$

— Se $x_1(t_1) > c$ e $x_2(t_2) < -d$, defina

$$\begin{cases} a_1 = \inf \{ t \in [q_1, q_1 + 1]; x_1(t) = c \}, \\ b_1 = \sup \{ t \in [q_1, q_1 + 1]; x_1(t) = c \}, \quad e \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = \inf \{ t \in [q_2, q_2 + 1]; x_2(t) = -d \}, \\ d_2 = \sup \{ t \in [q_2, q_2 + 1]; x_2(t) = -d \}. \end{cases}$$

— Se $x_1(t_1) > c$ e $x_2(t_2) \geq -d$, defina

$$\begin{cases} a_1, b_1 \text{ como em (2.2), e} \\ c_2 = d_2 = t_2. \end{cases}$$

— Se $x_1(t_1) \leq c$ e $x_2(t_2) < -d$, defina

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = t_1, \quad e \\ c_2, d_2 \text{ como em (2.3)}. \end{cases}$$

— Se $x_1(t_1) \leq c$ e $x_2(t_2) \geq -d$, defina

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = t_1, \quad e \\ c_2 = d_2 = t_2. \end{cases}$$

Similarmente, devido a simetria das S^* -soluções de (2.1)_ε definimos c_1, d_1, a_2 e b_2 .

Observação 2.1 Embora t_1 e t_2 possam não ser determinados de modo único, a propriedade J está bem definida. Ainda, se $a_1 = b_1$ e $c_2 = d_2$, condições (1.2) e (2.4), respectivamente, da propriedade J estão satisfeitas por vacuidade.

Para provarmos o próximo teorema faremos uso do seguinte lema dado em [1].

Lema 2.2 *Seja $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 tal que $x(\alpha) = x(\beta) = 0$ e $x(t) > 0$ quando $\alpha < t < \beta$. Suponhamos que c seja um número positivo e que existam números $t_1 < t_2 < t_3$ em (α, β) tais que*

$$\begin{cases} x(t_2) < x(t_j) \text{ para } j = 1, 3, \text{ e} \\ x(t_2) < c. \end{cases}$$

Então existem números $t'_1 < t'_2 < t'_3$ em (α, β) tais que

$$\begin{cases} x(t'_2) < x(t'_j) \leq c \text{ e } \dot{x}(t'_j) \geq 0 \text{ para } j = 1, 3, \text{ e} \\ x(t'_2) \leq x(t_2) \text{ e } \dot{x}(t'_2) = 0. \end{cases}$$

Prova: Ver Lema 3.1 de [1]. □

A Figura 2.2 ilustra o Lema 2.2.

Observação 2.2 Sem perda de generalidade podemos definir a propriedade J usando apenas uma constante positiva c . Isto é, podemos tomar $c = d$ na Definição 2.1. Desse modo, nos próximos resultados faremos uso dessa observação.

Figura 2.2

Ainda, precisamos da seguinte hipótese:

(H.5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \inf |f_j(x)| > 0$, $j = 1, 2$, e

$f_1 = -f_2$ numa vizinhança da origem.

Observação 2.3 Seja $F = (f_1, f_2)$ satisfazendo (H.1) e (H.2) e suponhamos que exista $0 < A \leq M$, tal que, $f = f_1 = -f_2$ em $I = [-A, A]$, $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$, $f(-A) = -f(A)$ e $f(A) = A$. Nessas condições, o conjunto $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -A \leq x_1 \leq A \text{ e } -A \leq x_2 \leq A\}$ é invariante para o sistema (2.1) _{ϵ} , e, para o estudo das soluções periódicas $x(t) \in Q$, a hipótese (H.5) é dispensável. De fato,

definamos

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(-A), & \text{se } x \leq -A \\ f_1(x), & \text{se } -A \leq x \leq A \\ f_1(A), & \text{se } x \geq A \end{cases}$$

e $\bar{f}_1 = -\bar{f}_2$, para todo x . A função $\bar{F} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ satisfaz (H.1), (H.2) e (H.5) e segue-se que toda S^* -solução de $\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + \bar{F}(x(t-1))$, satisfaz $|x_1(t)|, |x_2(t)| \leq A$. Ela é portanto uma S^* -solução de $(2.1)_\varepsilon$, com $F = (f_1, f_2)$ satisfazendo as condições pedidas.

Teorema 2.1 *Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$, para um dado $\varepsilon > 0$, $F = (f_1, f_2), f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, funções ímpares, satisfazendo as hipóteses (H.1), (H.2) e (H.5). Então $x(t)$ satisfaz a propriedade J para alguma constante c , independente de ε .*

Prova: Consideremos o sistema $(2.1)_\varepsilon$. As hipóteses (H.1) e (H.5) garantem a existência de uma constante positiva c , tal que

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ é monótona crescente em } [-c, c] \\ f_1(x) \geq c, \text{ se } x \geq c \\ f_1(x) \leq -c, \text{ se } x \leq -c \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} f_2(x) \text{ é monótona decrescente em } [-c, c] \\ f_2(x) \geq c, \text{ se } x \leq -c \\ f_2(x) \leq -c, \text{ se } x \geq c. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ainda, a hipótese (H.1) implica a existência de uma constante $\gamma > 1$, tal que

$$|f_1(f_1(x))| \geq \gamma|x| \text{ e } |f_2(f_2(x))| \geq \gamma|x|, \quad (2.6)$$

$x \in [-c, c]$.

Assumamos, por contradição, que alguma S^* -solução $x(t)$ não satisfaça a propriedade J entre $-c$ e c .

Vamos supor que as condições da propriedade J para a coordenada $x_1(t)$ não estão satisfeitas, pois para $x_2(t)$ o procedimento é análogo e omitiremos a demonstração.

Para simplificarmos, devido à simetria das S^* -soluções faremos a demonstração considerando $x_1(t)$ com t variando num intervalo de comprimento igual a meio período, isto é, t pertencente a $[-1, q_2]$.

O Lema 2.1 garante que $x_1(t)$ é monótona crescente em $[-1, q_1]$ e monótona decrescente em $[q_1 + 1, q_2]$.

Suponhamos por contradição que $x_1(t)$ não seja monótona crescente em $[q_1, a_1]$. Então existem números t_1, t_2 pertencentes a (q_1, a_1) , tais que

$$\begin{aligned} q_1 &< t_1 < t_2 < a_1, \\ c &> x_1(t_1) > x_1(t_2), \end{aligned}$$

e definimos

$$t_3 = a_1.$$

Do mesmo modo, existem números t_j , $j = 1, 2, 3$, satisfazendo as condições acima, se $x_1(t)$ não for monótona decrescente em $[b_1, q_1 + 1]$.

Agora, se existe $t_0 \in (a_1, b_1) \subseteq [q_1, q_1 + 1]$, tal que, $x_1(t_0) < c$, definimos

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1, \\ t_3 &= b_1, \end{aligned}$$

e t_2 , tal que, $x_1(t_2) = \min x_1(t), t \in (a_1, b_1) \subset [q_1, q_1 + 1]$.

Desse modo, acabamos de estabelecer a existência de três números $t_1 < t_2 < t_3$ pertencentes a $[-1, q_2]$ os quais satisfazem as hipóteses do Lema 2.2 para $x_1(t)$ com $[\alpha, \beta] = [-1, q_2]$.

Definimos

$$\begin{aligned} S = \{ t \in [q_1, q_1 + 1] \subset [-1, q_2] \mid 0 < x_1(t) < c; \\ \exists t_1, t_3 \in (q_1, q_1 + 1) \mid t_1 < t < t_3 \text{ e} \\ x_1(t_j) > x_1(t), j = 1, 3 \} . \end{aligned}$$

Seja

$$\xi = \inf \{ x_1(t); t \in S \} . \quad (2.7)$$

Notemos que $\xi > 0$, pois $x_1(t) \neq 0$, para todo $t \in [q_1, q_1 + 1]$ e também que $\xi < c$.

Fixemos $t_2 \in S$, tal que

$$x_1(t_2) < \gamma\xi, \quad \gamma > 1 \quad (2.8)$$

e seja $t_1 < t_2 < t_3$ como na definição de S .

O Lema 2.2 agora implica que existem pontos $t'_1 < t'_2 < t'_3$ em $(-1, q_2)$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t'_2) < x_1(t'_j) \leq c, \text{ para } j = 1, 3, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x_1(t'_2) \leq x_1(t_2), \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t'_2) = 0 \text{ e } \dot{x}_1(t'_j) \geq 0, \text{ para } j = 1, 3. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

A primeira equação de (2.1)_ε e condições (2.9) e (2.11) implicam que

$$0 < x_1(t'_2) = f_1(x_2(t'_2 - 1)) < x_1(t'_j) \leq f_1(x_2(t'_j - 1)), \text{ para } j = 1, 3 \quad (2.12)$$

e portanto, $t'_j - 1 \in (-q_3 + 2q_1, q_1)$ para $j = 1, 2, 3$, pois $x_2(t'_j - 1) > 0$ por (H.1). Ainda, (2.4) juntamente com (2.9) e (2.12) implicam que $0 < x_2(t'_2 - 1) < c$ e $x_2(t'_2 - 1) < x_2(t'_j - 1)$, para $j = 1, 3$.

Chamamos $s_j = t'_j - 1 + q_3 - q_1$, para $j = 1, 2, 3$. Então $s_j \in (q_1, q_3)$, $s_1 < s_2 < s_3$ e pela simetria das soluções $x_2(t'_j - 1) = -x_2(s_j)$, $j = 1, 2, 3$.

Logo, $x_2(s_2) > x_2(s_j)$, $j = 1, 3$ e, pelo Lema 2.1, $s_j \in (q_2, q_2 + 1) \subset [q_1, q_3]$, $j = 1, 2, 3$.

Ainda, $0 > x_2(s_2) > -c$.

Portanto os três números, s_1, s_2, s_3 , satisfazem as hipóteses do Lema 2.2 para $-x_2(t)$, com $[\alpha, \beta] = [q_1, q_3]$.

Dessa forma obtemos pontos $s'_1 < s'_2 < s'_3$ pertencentes ao intervalo (q_1, q_3) satisfazendo

$$\begin{cases} -c \leq x_2(s'_j) < x_2(s'_2), & \text{para } j = 1, 3, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} x_2(s_2) \leq x_2(s'_2) < 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(s'_2) = 0 \text{ e } \dot{x}_2(s'_j) \leq 0, & \text{para } j = 1, 3. \end{cases} \quad (2.15)$$

Chamamos $r_j = s'_j - 1$, para $j = 1, 2, 3$. De modo análogo ao procedimento anterior e usando a segunda equação de $(2.1)_\varepsilon$ provamos que $r_1 < r_2 < r_3$ pertencem ao intervalo $[q_1, q_1 + 1] \subset [-1, q_2]$, $x_1(r_2) < x_1(r_j)$, para $j = 1, 3$, e $0 < x_1(r_2) < c$.

Dessa forma, estamos em condição de obter uma contradição, pois

$$x_1(r_2) \geq \xi \quad (2.16)$$

onde ξ é dado em (2.7).

Usando o fato de f_1, f_2 serem funções ímpares, $f_1 = -f_2$ em $I \supseteq [-c, c]$, suas propriedades estabelecidas em (2.4), (2.5) e (2.6), mais as propriedades dos pontos t_2, t'_2, s_2, s'_2 e r_2 , obtidas acima, temos

$$\begin{aligned} x_1(t_2) &\geq x_1(t'_2) = f_1(x_2(t'_2 - 1)) \\ &= -f_1(x_2(s_2)) = f_2(x_2(s_2)) \\ &\geq f_2(x_2(s'_2)) = f_2(f_2(x_1(s'_2 - 1))) \\ &= f_2(f_2(x_1(r_2))) \\ &\geq \gamma x_1(r_2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Portanto, de (2.16) e (2.17) obtemos $x_1(t_2) \geq \gamma\xi$, $\gamma > 1$, o que contraria (2.8) e prova o teorema. $\square$

Nosso próximo resultado descreve um caso particular do Teorema 2.1, quando consideramos f_1, f_2 monótonas, em toda a imagem de uma S^* -solução.

Obtemos nesse caso um comportamento monotônico para estas soluções, descrito no corolário seguinte.

Corolário 2.1 *Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, funções ímpares, satisfazendo as hipóteses (H.1) e (H.2). Suponhamos que exista $A > 0$, $0 < A \leq M$, tal que f_1 é monótona crescente e $f_1 = -f_2$ em $[-A, A]$. Ainda, que f_1, f_2 satisfaçam*

$$|f_1(f_1(x))| > |x| \quad \text{e} \quad |f_2(f_2(x))| > |x| \quad (2.18)$$

para todo $x \in (-A, A)$, $x \neq 0$ e $f_1(x), f_2(x) \in [-A, A]$, se $x \in [-A, A]$. Então se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma S^ -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$, e se $|x_1(t)|, |x_2(t)| \leq A$, para todo t , $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ satisfaz a propriedade J para qualquer constante positiva $c \leq A$.*

Prova: Precisamos fazer uso das seguintes desigualdades

$$f_1(-m_2) \geq M_1 \quad \text{e} \quad f_2(M_1) \leq m_2, \quad (2.19)$$

para $x_1, x_2 \in [-A, A]$, onde $M_1 = \max_t x_1(t)$ e $m_2 = \min_t x_2(t)$.

Provemos a primeira delas. Suponhamos que $x_1(\xi) = M_1$, $\xi \in [-A, A]$. Logo $\dot{x}_1(\xi) = 0$ e, pela primeira equação do sistema $(2.1)_\varepsilon$ e monotonicidade de f_1 nesse intervalo, temos

$$M_1 = x_1(\xi) = f_1(x_2(\xi - 1)) \leq f_1(M_2)$$

onde, $M_2 = \max_t x_2(t)$, $x_2(t) \in [-A, A]$. Ainda, com a hipótese da simetria de f_1 em $[-A, A]$ temos que $M_2 = -m_2$, o que prova o resultado. A segunda desigualdade de (2.19) é provada similarmente.

Sejam c_{1n}, c_{2n} seqüências crescentes de números positivos satisfazendo

$$c_{1n} \rightarrow M_1, \quad c_{2n} \rightarrow -m_2, \quad (2.20)$$

$$f_2(c_{1n}) \leq -c_{2n} \quad \text{e} \quad f_1(c_{2n}) \geq c_{1n}. \quad (2.21)$$

Para assegurarmos (2.20) e (2.21), usamos (2.19) e tomamos $\{c_{1n}\}$ estritamente crescente, $c_{1n} \rightarrow M_1$ e $c_{2n} < \min\{-f_2(c_{1n}), -m_2\}$. Essa última condição é possível, uma vez que $-f_2(c_{1n}) \rightarrow -f_2(M_1) \geq -m_2$.

Como $f_1 = -f_2$ em $[-A, A]$, podemos tomar $c_{1n} = c_{2n} = c_n$.

Observamos que as condições (2.4) e (2.5) do Teorema 2.1 estão satisfeitas para $c = c_n$, $n = 1, 2, \dots$.

A condição (2.6) do Teorema 2.1 está garantida para $x_1, x_2 \in [-c_n, c_n]$, $n = 1, 2, \dots$, pela hipótese (2.18).

Agora, olhando a Observação 2.3 estamos em condições de aplicar o Teorema 2.1 para $x_1, x_2 \in [-c_n, c_n]$, $n = 1, 2, \dots$, onde c_n converge para os extremos das funções $x_1, x_2 \in [-A, A]$. Dessa forma, Teorema 2.1 implica o resultado. $\square$

Nosso objetivo agora é obter estimativas para o período das S^* -soluções. O Lema 2.3 dá uma primeira limitação para o período mínimo das S^* -soluções fornecidas pelo Teorema 1.2.

Lema 2.3 *Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução do sistema $(2)_\alpha$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, funções ímpares, satisfazendo as hipóteses (H.1)–(H.4). Então, existe um número $\bar{P} > 0$, dependendo somente da $F = (f_1, f_2)$, tal que, se $x(t)$ é uma S^* -solução de $(2)_\alpha$, então seu período mínimo, $P = q_4 + 1$, satisfaz $P < \bar{P}$.*

Prova: As hipóteses (H.1) e (H.2) implicam na existência de uma constante positiva $\Omega > 1$ que depende somente de $F = (f_1, f_2)$, tal que

$$\begin{cases} |f_1(x)| \leq \Omega |x|, & x \in \mathbb{R}, \\ |f_2(x)| \leq \Omega |x|, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Sejam $\bar{\alpha}$ dado no Teorema 1.2, $\alpha > \bar{\alpha}$ e $x(t)$ uma S^* -solução do sistema $(2)_\alpha$.

Da primeira equação de $(2)_\alpha$, temos que

$$\left(e^{\alpha(t-(q_1+1))} x_1(t) \right)' \leq 0, \quad \text{se } q_1 + 1 \leq t \leq q_2$$

e portanto,

$$0 < x_1(t) \leq e^{-\alpha(t-(q_1+1))} x_1(q_1 + 1) < e^{-\bar{\alpha}(t-(q_1+1))} M_1, \quad (2.23)$$

se $q_1 + 1 \leq t \leq q_2$,

onde

$$M_1 = \max_{q_1 < t < q_1 + 1} x_1(t).$$

A relação (2.23), implica

$$0 < x_1(t) < e^{-\bar{\alpha}(q_2 - (q_1 + 2))} M_1, \text{ se } q_2 - 1 \leq t \leq q_2.$$

Observando que se $t \in [q_2 - 1, q_1 + 1]$ esta desigualdade segue de $0 < x_1(t) \leq M_1$ e $-\bar{\alpha}(q_2 - (q_1 + 2)) > 0$.

Usando essa desigualdade e (2.22), e integrando a segunda equação de $(2)_\alpha$ de q_2 a t , $t \in [q_2, q_2 + 1]$, temos

$$\begin{aligned} e^{\alpha(t - q_2)} |x_2(t)| &\leq \int_{q_2}^t e^{\alpha(s - q_2)} |f_2(x_1(s - 1))| ds \\ &\leq [e^{\alpha(t - q_2)} - 1] \Omega e^{-\bar{\alpha}[q_2 - (q_1 + 2)]} M_1. \end{aligned}$$

Essa relação implica

$$|m_2| < e^{-\bar{\alpha}[q_2 - (q_1 + 2)]} \Omega M_1,$$

onde

$$m_2 = \min_{q_2 < t < q_2 + 1} x_2(t).$$

Pela simetria, temos

$$M_2 < e^{-\bar{\alpha}[q_2 - (q_1 + 2)]} \Omega M_1. \quad (2.24)$$

Um argumento semelhante mostra que

$$M_1 < e^{-\bar{\alpha}(q_1 - 1)} \Omega M_2. \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25), temos

$$M_1 < e^{-\bar{\alpha}((q_2 + 1) - 4)} \Omega^2 M_1.$$

Como $M_1 > 0$, temos que $e^{-\bar{\alpha}((q_2 + 1) - 4)} \Omega^2 > 1$,

portanto

$$(q_2 + 1) - 4 < \frac{2 \ln \Omega}{\bar{\alpha}},$$

$$q_2 + 1 < \frac{2 \ln \Omega}{\bar{\alpha}} + 4.$$

Chamando

$$\bar{p} = \frac{2 \ln \Omega}{\bar{\alpha}} + 4, \quad (2.26)$$

temos que $p = q_2 + 1$ é tal que

$$p < \bar{p}.$$

E, portanto,

$$P < \bar{P}$$

onde

$$\bar{P} = \frac{4 \ln \Omega}{\bar{\alpha}} + 8. \quad (2.27)$$

□

O próximo teorema fornece estimativas mais finas para o período. É oportuno observarmos que a hipótese (H.5) contém (H.4).

Teorema 2.2 *Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$, $F = (f_1, f_2)$, $f_1 f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, funções ímpares, satisfazendo as hipóteses (H.1) – (H.3) e (H.5). Existe constante positiva $\bar{C}$, dependendo somente de $F = (f_1, f_2)$, tal que, se $x(t)$ é uma S^* -solução de $(2.1)_\varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$, então seu período mínimo $P = P_\varepsilon$ satisfaz a desigualdade*

$$4 < P_\varepsilon < 4(1 + \bar{C}\varepsilon). \quad (2.28)$$

Prova: Da definição de S^* -solução, seguem as cotas inferiores $P_\varepsilon = q_4 + 1 > 4$ e $p_\varepsilon = q_2 + 1 > 2$.

Portanto, todo nosso esforço será concentrado para obter a cota superior $p_\varepsilon < 2(1 + \bar{C}\varepsilon)$ e consequentemente a cota superior $P_\varepsilon < 4(1 + \bar{C}\varepsilon)$.

As hipóteses (H.1), (H.2) e (H.5) implicam na existência de constantes positivas $c, \gamma > 1$ e $\Omega > 1$ que dependem somente de $F = (f_1, f_2)$, tais que valem

(2.4), (2.5), (2.6) e (2.22) e, além disso,

$$\begin{cases} |f_1(x)| \geq \gamma c, & |x| \geq c, \\ |f_2(x)| \geq \gamma c, & |x| \geq c. \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} |f_1(x)| \geq \gamma c, & |x| \geq c, \\ |f_2(x)| \geq \gamma c, & |x| \geq c. \end{cases} \quad (2.30)$$

Sejam $x(t)$ uma S^* -solução de (2.1) $_{\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$, $M_1 = \max_t x_1(t)$ e $|m_2| = |\min_t x_2(t)|$.

Definimos

$$\Lambda = \max \left\{ \frac{M_1}{\Omega}, \frac{|m_2|}{\Omega} \right\} \quad (2.31)$$

e

$$\bar{c} = \min \left\{ c, \frac{\Lambda}{2\Omega} \right\}. \quad (2.32)$$

Consequentemente $x(t)$ satisfaz a Propriedade J entre $-\bar{c}$ e $\bar{c}$ e $|f_1(x)|, |f_2(x)| \geq \gamma \bar{c}$, se $|x| \geq \bar{c}$.

Afirmamos que se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma S^* -solução do sistema (2.1) $_{\varepsilon}$, para algum $\varepsilon > 0$, então

$$M_1 \leq \Omega |m_2|. \quad (2.33)$$

De fato, suponhamos que $x_1(t)$ alcança seu máximo no ponto t_{1M} . Então a primeira equação de (2.1) $_{\varepsilon}$ e a simetria das S^* -soluções implicam que

$$M_1 = x_1(t_{1M}) = f_1(x_2(t_{1M} - 1)) \leq \Omega |x_2(t_{1M} - 1)| \leq \Omega |m_2|.$$

Analogamente, temos

$$|m_2| \leq \Omega M_1. \quad (2.34)$$

Portanto, se $\Lambda = \frac{M_1}{\Omega}$ ou $\Lambda = \frac{|m_2|}{\Omega}$, considerando-se (2.33) ou (2.34), respectivamente, temos

$$M_1 \geq \Lambda > \bar{c}, \quad (2.35)$$

$$m_2 \leq -\Lambda \leq -\bar{c}. \quad (2.36)$$

Logo, pela simetria das soluções $x(t)$, essas contém o intervalo $[-\bar{c}, \bar{c}]$ para todo $t \in [-1, q_4]$.

Sejam a_1 e b_1 o primeiro e último tempo respectivamente em $[q_1, q_1 + 1]$, tais que $x_1(a_1) = x_1(b_1) = \bar{c}$; e similarmente sejam c_2 e d_2 o primeiro e último tempo em $[q_2, q_2 + 1]$, tal que $x_2(c_2) = x_2(d_2) = -\bar{c}$, como na definição da propriedade J , com $c = d = \bar{c}$. Observe-se que $x_1(t) \geq \bar{c}$, se $a_1 \leq t \leq b_1$ e $x_2(t) \leq -\bar{c}$, se $c_2 \leq t \leq d_2$.

Afirmamos que existe uma constante C_* , independente de ε e da solução $x(t)$, tal que

$$b_1 - a_1 \geq C_* \varepsilon \implies [1 + a_1 + C_* \varepsilon, 1 + b_1] \subseteq [c_2, d_2] \quad (2.37)$$

e similarmente,

$$d_2 - c_2 \geq C_* \varepsilon \implies [1 + c_2 + C_* \varepsilon, 1 + d_2] \subseteq [a_1 + (q_2 + 1), b_1 + (q_2 + 1)]. \quad (2.38)$$

Provaremos (2.37). Analogamente prova-se (2.38).

Seja

$$C_* = \max \left\{ \ln \frac{\overline{M}_1 + \gamma c}{(\gamma - 1)c}, \ln \frac{|\overline{m}_2| + \gamma c}{(\gamma - 1)c}, \ln \frac{2\Omega^2 + \gamma}{\gamma - 1} \right\}$$

onde $\overline{M}_1 = \sup_{\varepsilon} M_1$ e $|\overline{m}_2| = \sup_{\varepsilon} |m_2|$.

Suponhamos que $b_1 - a_1 \geq C_* \varepsilon$.

Então para $t \in [1 + a_1, 1 + a_1 + C_* \varepsilon]$ temos $x_1(t - 1) \geq \bar{c}$ e portanto, da segunda equação de (2.1) e de (2.30), temos

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) \leq -x_2(t) - \gamma \bar{c}. \quad (2.39)$$

Integrando (2.39) em t , $t \in [1 + a_1, 1 + a_1 + C_* \varepsilon]$, temos

$$x_2(1 + a_1 + C_* \varepsilon) \leq x_2(1 + a_1) e^{-C_*} - (1 - e^{-C_*}) \gamma \bar{c} \quad (2.40)$$

e usando (2.31) e (2.32), obtemos

$$x_2(1 + a_1 + c_* \varepsilon) \leq -\bar{c}. \quad (2.41)$$

Da propriedade J e da definição de c_2 , segue que

$$1 + a_1 + c_* \varepsilon \geq c_2. \quad (2.42)$$

Vamos mostrar que

$$1 + b_1 \leq d_2. \quad (2.43)$$

Se (2.43) não fosse verdadeira, então teríamos

$$d_2 < 1 + b_1 \leq q_1 + 1 + 1 < q_2 + 1,$$

o que implica, pela definição de d_2 , que

$$x_2(1 + b_1) \geq -\bar{c}, \text{ e} \quad (2.44)$$

$$\dot{x}_2(1 + b_1) \geq 0. \quad (2.45)$$

Como $x_1(b_1) = \bar{c}$, teríamos da segunda equação de $(2.1)_\varepsilon$, de (2.44) e (2.30) que

$$\varepsilon \dot{x}_2(1 + b_1) < 0.$$

Contradizendo (2.45), provando-se assim (2.43).

De (2.42) e (2.43) temos a inclusão (2.37).

Consideremos agora dois casos:

Caso I:

$$b_1 - a_1 \geq 2C_* \varepsilon \quad \text{ou} \quad d_2 - c_2 \geq 2C_* \varepsilon.$$

De acordo com o que acabamos de ver, valem (2.37) e (2.38).

De modo que

$$p_\varepsilon \leq 2(1 + C_* \varepsilon), \quad (2.46)$$

o que prova o teorema nesse caso.

Caso II:

$$b_1 - a_1 < 2C_* \varepsilon, \quad e \quad (2.47)$$

$$d_2 - c_2 < 2C_* \varepsilon. \quad (2.48)$$

Quando $2C_* \varepsilon > 1$ usamos o limite (2.26) do Lema 2.3, para obtermos

$$p_\varepsilon < 2(1 + p' C_* \varepsilon) \quad (2.49)$$

onde $p' = \bar{p} - 2$.

Assumamos agora $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$2c_* \varepsilon \leq 1. \quad (2.50)$$

Vamos mostrar primeiro que:

$$c_2 - b_1 \leq 1, \quad e \quad (2.51)$$

$$a_1 + (q_2 + 1) - d_2 \leq 1, \quad (2.52)$$

assumindo as condições (2.47) e (2.48).

Provemos (2.51).

Assumamos, por contradição, que $1 + b_1 < c_2$ e seja $t_{2m} \in [c_2, d_2]$, tal que $x_2(t_{2m}) = m_2$.

A desigualdade (2.48) implica que o comprimento do intervalo $[c_2, d_2]$ é menor que 1, portanto, $t_{2m} - 1 < c_2$.

Também $t_{2m} - 1 \geq c_2 - 1 > b_1$ e portanto, pela propriedade J , $|x_1(t - 1)| \leq \bar{c}$ para $1 + b_1 \leq t \leq t_{2m}$.

Portanto, da segunda equação de (2.1) $_\varepsilon$ e de (2.22), para $1 + b_1 \leq t \leq t_{2m}$ vem

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) \geq -x_2(t) - \Omega \bar{c}. \quad (2.53)$$

Integrando (2.53) de $1 + b_1$ a t_{2m} , temos

$$x_2(t_{2m}) \geq e^{-k} x_2(1 + b_1) - (1 - e^{-k}) \Omega \bar{c} > -(1 + \Omega) \bar{c}$$

onde $k = (t_{2m} - b_1 - 1)/\varepsilon > 0$. Portanto,

$$|x_2(t_{2m})| < (1 + \Omega)\bar{c}.$$

Por outro lado, (2.36) implica que $|x_2(t_{2m})| \geq \Lambda$ e portanto,

$$\Lambda < (1 + \Omega)\bar{c}. \quad (2.54)$$

Agora (2.54) e a definição (2.32) são inconsistentes com o fato de que $\Omega > 1$. Essa contradição prova (2.51).

Analogamente provamos (2.52).

Para completarmos a prova, basta adicionarmos as desigualdades (2.47), (2.48), (2.51) e (2.52), obtendo-se

$$p_\varepsilon < 2(1 + 2C_*\varepsilon). \quad (2.55)$$

Finalizando, os limites (2.46), (2.49) e (2.55) para p_ε implicam que $P_\varepsilon < 4(1 + \bar{C}\varepsilon)$, com $\bar{C} \geq \max\{2C_*, p'C_*\}$. $\square$

Capítulo 3

Equações de camada de transição

Consideremos o sistema de equações diferenciais autônomas

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1(t) = h_1(x_1(t), x_2(t-1)) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) = h_2(x_2(t), x_1(t-1)) \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ solução periódica de (3.1), para $\varepsilon \neq 0$, de período mínimo P , e definamos $r \in \mathbb{R}$ por

$$p = 2(1 + \varepsilon r) \quad (3.2)$$

onde p é metade do período mínimo P .

Definamos as funções $y_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(-\varepsilon t), \\ y_2(t) &= x_2(p/2 - \varepsilon t), \\ y_3(t) &= x_1(p - \varepsilon t), \\ y_4(t) &= x_2(3/2 p - \varepsilon t). \end{aligned}$$

É fácil verificar que as funções $y_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, satisfazem o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -h_1(y_1(t), y_4(t-r)) \\ \dot{y}_2(t) = -h_2(y_2(t), y_1(t-r)) \\ \dot{y}_3(t) = -h_1(y_3(t), y_2(t-r)) \\ \dot{y}_4(t) = -h_2(y_4(t), y_3(t-r)) \end{cases} \quad (3.3)$$

Notemos que o parâmetro r definido em (3.2), está ligado ao período da solução, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, de (3.1).

Aplicando esta mudança de variável ao nosso sistema $(2.1)_\varepsilon$, considerando que f_1, f_2 são ímpares e a simetria das S^* -soluções de $(2.1)_\varepsilon$, temos (3.3) reduzido a apenas duas equações. De fato, devido à simetria das S^* -soluções, temos,

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_1(p - \varepsilon t) = -x_1(-\varepsilon t) = -y_1(t), \\ y_4(t) &= x_2(3/2 p - \varepsilon t) = -x_2(p/2 - \varepsilon t) = -y_2(t). \end{aligned}$$

Substituindo essas relações em (3.3), vem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -h_1(y_1(t), -y_2(t-r)), \\ \dot{y}_2(t) &= -h_2(y_2(t), y_1(t-r)), \\ \dot{y}_1(t) &= h_1(-y_1(t), y_2(t-r)), \\ \dot{y}_2(t) &= h_2(-y_2(t), -y_1(t-r)). \end{aligned}$$

Este raciocínio aplicado ao sistema $(2.1)_\varepsilon$ leva a

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_1(t) - f_1(-y_2(t-r)), \\ \dot{y}_2(t) &= y_2(t) - f_2(y_1(t-r)), \\ \dot{y}_1(t) &= y_1(t) + f_1(y_2(t-r)), \\ \dot{y}_2(t) &= y_2(t) + f_2(-y_1(t-r)). \end{aligned}$$

Devido às simetrias das funções f_1 e f_2 , as equações acima se reduzem a

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + f_1(y_2(t-r)) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) - f_2(y_1(t-r)) \end{cases} \quad (3.4)$$

Definição 3.1 O sistema (3.4) é denominado sistema de equações de camada de transição associado ao sistema $(2.1)_\varepsilon$.

O resultado seguinte, que é análogo à Proposição 3.1 de [1], deixa clara a relação entre as equações $(2.1)_\varepsilon$ e as equações (3.4).

Proposição 3.1 Suponhamos que $F = (f_1, f_2)$, satisfaça as hipóteses (H.1) – (H.3) e (H.5) com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares.

a) Sejam $\varepsilon > 0$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma S^* -solução das equações $(2.1)_\varepsilon$, de período mínimo $P = q_4 + 1$, q_4 um zero de x_1 , $\theta \in \mathbb{R}$.

Definamos

$$y_1(t) = x_1(\theta - \varepsilon t), \quad (3.5)$$

$$y_2(t) = x_2(\theta + p/2 - \varepsilon t), \quad (3.6)$$

onde p é metade do período P .

Então $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ satisfaz as equações de camada de transição (3.4) onde $r > 0$ é dado por

$$p = 2(1 + \varepsilon r).$$

b) Sejam $\varepsilon_n > 0$, $x_n(t) = (x_{1n}(t), x_{2n}(t))$, p_n e $\theta_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, seqüências tais que $\varepsilon_n \rightarrow 0$, e $x_n(t)$ é uma S^* -solução do sistema $(2.1)_{\varepsilon_n}$ de período mínimo P_n e p_n metade do período mínimo. Sejam $r_n > 0$, $y_n(t) = (y_{1n}(t), y_{2n}(t))$ definidos por:

$$p_n = 2(1 + \varepsilon_n r_n), \quad (3.7)$$

$$y_{1n}(t) = x_{1n}(\theta_n - \varepsilon_n t), \quad e \quad (3.8)$$

$$y_{2n}(t) = x_{2n}(\theta_n + p_n/2 - \varepsilon_n t). \quad (3.9)$$

Então r_n é uma sequência limitada, e as sequências de funções $y_{1n}(t)$ e $y_{2n}(t)$ são equicontínuas e uniformemente limitadas.

Tomando os limites

$$r_n \rightarrow r \geq 0, \\ y_{1n}(t) \rightarrow y_1(t) \quad \text{e} \quad y_{2n}(t) \rightarrow y_2(t),$$

uniformes em intervalos compactos, para alguma subsequência $n = n_j \rightarrow \infty$, as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são C^1 e satisfazem as equações de camada de transição (3.4), para todo $t \in \mathbb{R}$. Ainda, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$|y_1(t)| \leq M \quad \text{e} \quad |y_2(t)| \leq M,$$

onde $M > 0$ é dado em (H.2).

Também, a subsequência pode ser tomada de modo que $\dot{y}_{1n}(t)$ e $\dot{y}_{2n}(t)$ converjam, respectivamente, para $\dot{y}_1(t)$ e $\dot{y}_2(t)$, uniformemente em intervalos compactos.

- c) Se $y_1(t)$ é obtida como em b) então $y_1(t)$ tem no máximo uma troca de sinal sobre o eixo real. Isto é, não existem $t_1 < t_2 < t_3$ tais que $y_1(t_1)y_1(t_2) < 0$ e $y_1(t_2)y_1(t_3) < 0$. O mesmo é verdadeiro para $y_2(t)$, se obtida como em b).
- d) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são obtidas como em b) elas têm sinais opostos quando $t \rightarrow \infty$. Do mesmo modo, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ têm sinais opostos quando $t \rightarrow -\infty$.
- e) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são obtidas como em b) e se $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = L$ existe para algum número real L , então $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = f_2(L)$ e $f_1(f_2(L)) = -L$. O correspondente resultado é válido quando $t \rightarrow -\infty$. Podemos também permutar $y_1(t)$ com $y_2(t)$ e f_1 com f_2 , respectivamente.

Prova: Embora e) no nosso caso se apresente com uma leve modificação, a prova segue análoga à Proposição 3.1 de [1]. $\square$

Observação 3.1 Em d), notemos que os sinais de $y_1(t)$, quando $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$, podem ou não ser diferentes, dependendo se $y_1(t)$ passou ou não por uma mudança de sinal. O mesmo é verdadeiro para $y_2(t)$.

Definição 3.2 *Sejam $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$, $x_n(t) = (x_{1n}(t), x_{2n}(t))$, uma S^* -solução do sistema $(2.1)_{\varepsilon_n}$, $\theta_n \in \mathbb{R}$ e $F = (f_1, f_2)$, satisfazendo (H.1) – (H.3) e (H.5), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares. Sejam ainda, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ e r , obtidos pelo processo limite da segunda parte da Proposição 3.1. Então $(y(t), r)$ é chamada uma solução das equações de camada de transição associada a sequência $(\varepsilon_n, x_n(t), \theta_n)$.*

Observação 3.2 Notemos que essa definição admite a possibilidade de $(y(t), r)$ não ser única.

As considerações apresentadas a seguir estão na linha dos comentários de Mallet-Paret e Nussbaum [1], referentes ao enfoque dado no estudo das equações da camada de transição.

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + \delta y_2(t - r) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) + \delta y_1(t - r) \end{cases} \quad (3.10)$$

obtido das equações de camada de transição (3.4), linearizados na origem, lembrando que nossas hipóteses sobre f_1 e f_2 implicam $\delta = \delta_1 = -\delta_2 > 0$.

No próximo lema as equações de camada de transição são vistas como uma perturbação não-autônoma do sistema linear (3.10), isto é, como

$$\dot{W}(t) = L(W_t) + \rho(t) \quad (3.11)$$

onde

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad W_t(s) = W(t+s) \quad \text{para } -r \leq s \leq 0,$$

$L : C([-r, 0], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o operador linear

$$L \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) + \delta \psi(-r) \\ \psi(0) + \delta \varphi(-r) \end{pmatrix} \quad \text{para } \varphi, \psi \in C[-r, 0], \quad (3.12)$$

onde $\rho(t)$ é dado por

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} R_1(y_2(t-r)) \\ -R_2(y_1(t-r)) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

e,

$$\begin{cases} f_1(y_2) = \delta y_2 + R_1(y_2) \\ f_2(y_1) = -\delta y_1 + R_2(y_1) \end{cases}.$$

Seguindo Hale (4), podemos associar a qualquer autosolução $W(t) = \omega e^{\xi t}$, da equação diferencial com retardamento linear autônoma em $\mathbb{R}^n$, uma projeção canônica sobre o autoespaço de $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Aplicando tal projeção a solução W_t , da equação linear não-homogênea da forma (3.11), essa equação se reduz a uma equivalente equação diferencial ordinária linear autônoma, com um termo forçante não homogêneo, relativo a $\rho(t)$. A prova do lema segue essa linha.

Desse modo, o próximo lema é essencialmente um resultado de perturbação linear, o qual descreve o comportamento das soluções das equações de camada de transição (3.4) nas variedades estável e instável do zero.

É um caso particular do Lema 4.2 de [1] e será útil para o Teorema 4.1.

Lema 3.1 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaz as hipóteses (H.1) – (H.3) e (H.5), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares. Suponhamos que*

$$y_{1+}, y_{2+} : [-r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

são funções C^1 satisfazendo as equações de camada de transição (3.4) para todo $t \geq 0$, e que, para o mesmo $r \geq 0$,

$$y_{1-}, y_{2-} : [-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$$

são funções C^1 satisfazendo as equações de camada de transição (3.4) para todo $t \leq 0$. Suponhamos ainda, que existam constantes $T_+ \geq 0$ e $T_- \geq 0$, tais que

$$\begin{cases} y_{1+}(t) \leq 0, \dot{y}_{1+}(t) \geq 0, & e \quad y_{2+}(t) \geq 0, & \text{se } t \geq T_+, \\ y_{1-}(t) \geq 0, \dot{y}_{1-}(t) \geq 0, & e \quad y_{2-}(t) \leq 0, & \text{se } t \leq -T_-, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{1+}(t), y_{2+}(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (y_{1-}(t), y_{2-}(t)) = (0, 0). \end{cases}$$

Então, ou $(y_{1+}(t), y_{2+}(t)) = (0, 0)$ para todo $t \geq -r$ ou $(y_{1-}(t), y_{2-}(t)) = (0, 0)$ para todo $t \leq 0$.

Prova: A prova do Lema 3.1 é análoga a do Lema 4.2 de [1]. □

Observação 3.3 As hipóteses do Lema 3.1 e o fato de f_2 ser monótona decrescente num intervalo contendo a origem implicam na monotonicidade de $y_{2+}(t)$ e $y_{2-}(t)$, para $t \geq T_+$ e $t \leq -T_-$, respectivamente, conforme Figura 3.1. A prova desse fato é apresentada, com ligeiras adaptações, em [1 (observação 4.1)].

Figura 3.1

Capítulo 4

Forma assintótica das soluções periódicas quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$

Neste capítulo, vamos estudar a forma assintótica das soluções $x_\varepsilon(t)$ de $(2.1)_\varepsilon$ quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, para $F = (f_1, f_2)$, satisfazendo as hipóteses (H.1) – (H.3) com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares. Vamos nos ater ao caso particular de existir uma constante positiva $A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$ e as S^* -soluções com condições iniciais em $C([-1, 0], Q)$, onde Q é dado na Observação 2.3.

Em alguns momentos vamos assumir a seguinte hipótese:

(H.6) Existe uma constante positiva $a \leq A$, tal que, se $x_0 \in (0, A]$ e $x_n = f^n(x_0)$ é a n -ésima iterada de f em x_0 , para cada $n \geq 0$, então $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Consideramos dois casos.

Caso I

$f_1 = -f_2 = f$ monótona em $[-A, A]$ e $|ff(x)| > |x|$, $x \in (-A, A)$ e $x \neq 0$. Nesse caso o ponto A é 2 periódico para a função f .

Caso II

$f_1 = -f_2 = f$ satisfaz a hipótese adicional (H.6). Nesse caso o ponto $a \leq A$ é 2 periódico para a função f .

Se $a \in \mathbb{R}$ é dado em (H.6), seja a função descontínua $oq(t) = (oq_1(t), oq_2(t))$ dada por:

$$oq_1(t) = \begin{cases} a, & \text{se } 4n - 1 < t < 4n + 1 \\ -a, & \text{se } 4n + 1 < t < 4n + 3, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

e $oq_2(t) = oq_1(t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Veja a Figura 4.1.

Quando $a = A$, denotamos $oq = o\bar{q} = (o\bar{q}_1, o\bar{q}_2)$.

Nessas condições o sistema limite

$$\begin{cases} x_1(t) = f(x_2(t - 1)) \\ x_2(t) = -f(x_1(t - 1)) \end{cases}$$

tem uma solução descontínua $o\bar{q}(t)$ no primeiro caso e $oq(t)$ no segundo caso.

Nosso objetivo é mostrar que a função $oq(t)$ descreve o comportamento assintótico de $x_\varepsilon(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Mais precisamente, mostraremos que $x_\varepsilon(t) \rightarrow oq(t)$ nas partes compactas de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Em vizinhanças de amplitude $\mathcal{O}(\varepsilon)$, dos pontos inteiros $t = -1, 0, 1$ e 2 , estudaremos o comportamento de $x_\varepsilon(t)$ através de uma solução das equações de camada de transição.

No segundo caso, perto dos inteiros, onde a função $oq(t)$ é descontínua, o comportamento de $x_\varepsilon(t)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, pode ser um tanto complicado. Pode ocorrer um fenômeno similar ao fenômeno de Gibbs da série de Fourier, nessas

$\mathcal{O}(\varepsilon)$ -vizinhança de $t = -1, 0, 1$ e 2 .

Figura 4.1: Gráfico das coordenadas de uma função $oq(t)$.

Nosso primeiro resultado diz que as normas das S^* -soluções não se aproximam do zero quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. É um caso particular do Lema 4.1 de [1].

Seja $\|x_n\| = \max_t |x_n(t)|$.

Lema 4.1 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaça (H.1)–(H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, ímpares e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Se $x_n(t)$ é uma S^* -solução do sistema $(2.1)_{\varepsilon_n}$, então não existe sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$, tal que, $\|x_n\| \rightarrow 0$, com $n \rightarrow \infty$.*

Prova: Pode ser dada por ligeira adaptação da prova do Lema 4.1 de [1]. $\square$

O próximo teorema mostra que a solução permanece afastada do zero, uniformemente em ε , quando $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$, nas partes compactas de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Ainda, o teorema a seguir, junto com o Corolário 4.1 e 4.2, descreve a convergência mais delicada de $x_\varepsilon(t) = (x_{1\varepsilon}(t), x_{2\varepsilon}(t))$, solução de $(2.1)_\varepsilon$, perto dos inteiros, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Observe-se que, de acordo com o teorema da estimativa do período, os segundos zeros $q_{2\varepsilon}$ e $q_{3\varepsilon}$ de $x_{1\varepsilon}$ e $x_{2\varepsilon}$ tendem a 1 e 2, respectivamente, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Devido à simetria das S^* -soluções resultados análogos são obtidos nas vizinhanças de -1 e 0 , em relação aos primeiros zeros de $x_{1\varepsilon}(t)$ e $x_{2\varepsilon}(t)$, respectivamente.

Teorema 4.1 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaça (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares, e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Seja $0 < c \leq A$ satisfazendo as condições do Teorema 2.1 e $\gamma > 1$ satisfazendo a condição (2.6). Ainda, seja $c_0 > 0$ satisfazendo $c_0 < c$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $x(t)$ é uma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$ temos*

$$\max_t x_1(t) > c_0, \quad (4.1)$$

$$\min_t x_2(t) < -c_0. \quad (4.2)$$

Ainda, existe uma constante $K > 0$, tal que, se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma S^ -solução de $(2.1)_\varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, então*

$$\{t \in [b_1, c_1] : -c_0 \leq x_1(t) \leq c_0\} \subseteq [q_2 - K\varepsilon, q_2 + K\varepsilon], \quad (4.3)$$

$$\{t \in [d_2, a_2 + P] : -c_0 \leq x_2(t) \leq c_0\} \subseteq [q_3 - K\varepsilon, q_3 + K\varepsilon], \quad (4.4)$$

onde b_1, c_1, a_2 e d_2 estão definidos na propriedade J e P é o período mínimo de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

As constantes ε_0 e K dependem de c_0 , mas não da solução $x(t)$; além disso, K não depende de ε .

Prova: Fixemos um número k satisfazendo $c_0 < kc$ e $0 < k < 1$.

Se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é alguma S^* -solução do sistema $(2.1)_\varepsilon$, definamos quantidades c_* dependendo da solução $x(t)$ por

$$c_* = \min \left\{ c_0, \max_t k x_1(t) \right\} > 0 \quad (4.5)$$

e, portanto,

$$-c_* = \max \left\{ -c_0, \min_t k x_2(t) \right\} < 0. \quad (4.6)$$

Com a finalidade de provarmos o teorema, é suficiente mostrarmos que existem $\varepsilon_0 > 0$ e $K_0 > 0$ que não dependem da solução, tais que, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então

$$\{t \in [b_1, c_1] : -c_* \leq x_1(t) \leq c_*\} \subseteq [q_2 - K_0\varepsilon, q_2 + K_0\varepsilon], \quad (4.7)$$

$$\{t \in [d_2, a_2 + P] : -c_* \leq x_2(t) \leq c_*\} \subseteq [q_3 - K_0\varepsilon, q_3 + K_0\varepsilon], \quad (4.8)$$

$$\max x_1(t) > k^{-1}c_0, \quad (4.9)$$

$$\min x_2(t) < -k^{-1}c_0, \quad (4.10)$$

sempre que $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma S^* -solução de $(2.1)_\varepsilon$ com os dois segundos zeros, q_2 e q_3 de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente, b_1, c_1, a_2 e d_2 como na propriedade J e P período mínimo de $x(t)$.

Se (4.9) e (4.10) são válidas, então $c_* = c_0$ e portanto (4.7) e (4.8) implicam (4.3) e (4.4) com $K = K_0$.

Suponhamos (4.7) e (4.8) não verdadeiras. Então existem sequências $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$ e $K_n \rightarrow +\infty$, e uma sequência $x_n(t)$ de S^* -soluções de $(2.1)_\varepsilon$, tais que

$$\{t \in [b_{1n}, c_{1n}] : -c_n^* \leq x_{1n}(t) \leq c_n^*\} \not\subseteq [q_{2n} - K_n \varepsilon_n, q_{2n} + K_n \varepsilon_n] \quad (4.11)$$

ou

$$\{t \in [d_{2n}, a_{2n} + P_n] : -c_n^* \leq x_{2n}(t) \leq c_n^*\} \not\subseteq [q_{3n} - K_n \varepsilon_n, q_{3n} + K_n \varepsilon_n] \quad (4.12)$$

onde c_n^* são dados por (4.5)-(4.6), com $x_n(t) = (x_{1n}(t), x_{2n}(t))$ no lugar de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Suponhamos (4.11) verdadeira, o que implica, para cada n

$$\tau_{1n} - \sigma_{1n} > k_n \varepsilon_n, \quad (4.13)$$

onde τ_{1n} é o menor $t \in [q_{2n}, c_{2n}]$, tal que, $x_1(t) = -c_n^*$ e σ_{1n} é o maior $t \in [b_{1n}, q_{2n}]$, tal que, $x_1(t) = c_n^*$, c_{2n} dado na propriedade J . Veja a Figura 4.2.

Notemos que $x_{1n}(t)$ é monótona decrescente em $[\sigma_{1n}, \tau_{1n}] \subseteq [b_{1n}, c_{1n}]$, $c_{2n} \leq c_{1n}$.

Agora, sejam $(y_{1+}(t), y_{2+}(t), r)$ e $(y_{1-}(t), y_{2-}(t), r)$ soluções das equações de camada de transição associadas as sequências $(\varepsilon_n, x_n(t), \tau_{1n})$ e $(\varepsilon_n, x_n(t), \sigma_{1n})$ respectivamente, como descrito na Proposição 3.1 e na Definição 3.2.

A monotonicidade de $x_{1n}(t)$ em $[\sigma_{1n}, \tau_{1n}]$, as definições de σ_{1n} , τ_{1n} , $y_{1+}(t)$, $y_{1-}(t)$ e a equação (4.13), implicam que

$$\begin{cases} -c \leq y_{1+}(t) \leq c, & \text{se } t > 0, \\ -c \leq y_{1-}(t) \leq c, & \text{se } t < 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_{1+}(t) \geq 0, & \text{se } t \geq 0, \\ \dot{y}_{1-}(t) \geq 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Portanto os limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{1\pm}(t) = L_+$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} y_{1\pm}(t) = L_-$ existem, com $L_+, L_- \in [-c, c] \subseteq [-A, A]$, onde $L_+ = L$ e $L_- = -L$.

Pela parte e) da Proposição 3.1 vemos que L_+ e L_- são tais que

$$\begin{cases} f_1 \circ f_2(L_+) = L_- , \\ f_2 \circ f_1(L_+) = L_- , \\ f_2 \circ f_1(L_-) = L_+ , \\ f_1 \circ f_2(L_-) = L_+ . \end{cases} \quad (4.16)$$

Como $f_1 = -f_2$ em $[-A, A]$ e $\gamma > 1$ segue que, (4.16) está apenas satisfeita para $L_+ = L_- = 0$.

Logo,

$$\begin{cases} -c \leq y_{1+}(t) \leq 0, & t \geq 0, \\ 0 \leq y_{1-}(t) \leq c, & t \leq 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Figura 4.2

Além disso, partes d) e e) da Proposição 3.1 implicam que existem $T_+ \geq 0$ e $T_- \geq 0$, tais que

$$\begin{cases} y_{2+}(t) \geq 0, & t \geq T_+, \\ y_{2-}(t) \leq 0, & t \leq -T_- \end{cases} \quad (4.18)$$

e, portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (y_{1+}(t), y_{2+}(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (y_{1-}(t), y_{2-}(t)) = (0, 0). \quad (4.19)$$

Notamos que nem $(y_{1+}(t), y_{2+}(t))$ e nem $(y_{1-}(t), y_{2-}(t))$ são identicamente nulas; pois por definição temos

$$\begin{cases} y_{1+}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{1n}(\tau_{1n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} -c_n^*, \\ y_{1-}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{1n}(\sigma_{1n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} +c_n^*, \end{cases} \quad (4.20)$$

para alguma subsequência, e por (2.33), (2.34) e Lema 4.1, segue-se que para algum $\Omega > 1$, temos

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf c_n^* \geq \min \left\{ c_0, \liminf \frac{k}{\Omega} \|x_n\| \right\} > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup -c_n^* \leq \max \left\{ -c_0, -\limsup \frac{k}{\Omega} \|x_n\| \right\} < 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Portanto, de (4.20) e (4.21), concluímos que

$$\begin{cases} y_{1+}(0) < 0, \\ y_{1-}(0) > 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Agora estamos aptos a obter uma contradição. Das desigualdades (4.15), (4.17), (4.18) e (4.19), vemos que as soluções $(y_{1\pm}(t), y_{2\pm}(t))$ satisfazem as hipóteses do Lema 3.1. Isso contradiz (4.22). A partir dessa contradição, temos as inclusões (4.7) e (4.8) como desejávamos.

Provemos agora, as desigualdades (4.9) e (4.10) para ε pequeno.

Suponhamos que pelo menos uma delas não é verdadeira, isto é, para uma sequência $x_n(t)$ de S^* -soluções de (2.1) $_{\varepsilon}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$,

$$\max x_{1n}(t) \leq k^{-1}c_0 < c, \quad (4.23)$$

para cada n .

Como antes, consideremos os pontos σ_{1n} e τ_{1n} , tais que, $x_{1n}(\sigma_{1n}) = cn^*$ e $x_{1n}(\tau_{1n}) = -cn^*$.

Sabemos que

$$\dot{x}_{1n}(t) \leq 0, \quad t \in [\sigma_{1n}, \tau_{1n}]. \quad (4.24)$$

Ainda por (4.7), vemos que

$$\frac{\tau_{1n} - \sigma_{1n}}{\varepsilon_n}, \quad (4.25)$$

é uma sequência limitada.

Seja $(y_1(t), y_2(t), r)$ uma solução das equações de camada de transição associada a $(\varepsilon_n, x_n(t), \sigma_{1n})$.

Da definição de $y_1(t)$ e das condições (4.23), (4.24) e (4.25), vemos que

$$y_1(q_2) \leq y_1(t) < c, \quad \text{se } t \geq q_2. \quad (4.26)$$

Usando a primeira desigualdade de (4.21), temos

$$y_1(q_2) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{1n}(\sigma_{1n}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n^* > 0. \quad (4.27)$$

Portanto, de (4.26) e (4.27) temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = L$ existe e satisfaz $0 < L < c$.

Pela parte e) da Proposição 3.1 o número L é tal que, $f_1(f_2(L)) = -L$; mas como já notamos, f_1 o f_2 não tem valor que satisfaça essa igualdade em $(0, c]$.

Essa contradição completa a prova do teorema. $\square$

Corolário 4.1 *Assumamos as hipóteses e notações do Teorema 4.1, com relação a função $F = (f_1, f_2)$ e os números A , c e γ . Seja $x_n(t)$ uma S^* -solução do sistema $(2.1)_{\varepsilon_n}$, para alguma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$, e definamos $r_n > 0$ por $p_n = 2(1 + \varepsilon_n r_n)$, onde p_n é metade do período mínimo de $x_n(t) = (x_{1n}(t), x_{2n}(t))$, solução de $(2.1)_{\varepsilon_n}$.*

Então, tomando uma subsequência, temos

$$\begin{aligned} x_{1n}(q_{2n} - \varepsilon_n t) &\rightarrow y_1(t), \\ x_{2n}(q_{2n} + p_n/2 - \varepsilon_n t) &\rightarrow y_2(t), \end{aligned} \quad (4.28)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, para funções C^1 , $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Além disso, temos convergência das derivadas primeiras com respeito a t em (4.28), e as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazem as equações de camada de transição

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + f_1(y_2(t-r)) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) - f_2(y_1(t-r)) \end{cases} \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

para $t \in \mathbb{R}$, onde

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \text{ é estritamente positivo.} \quad (4.31)$$

Ainda, as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazem as limitações

$$|y_1(t)|, |y_2(t)| \leq A, \quad (4.32)$$

e têm as propriedades assintóticas,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf y_1(t) &\geq c \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \inf y_2(t) \geq c, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \sup y_1(t) &\leq -c \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup y_2(t) \leq -c, \end{aligned} \quad (4.33)$$

e,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup y_1(t) &> c \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \sup y_2(t) > c, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \inf y_1(t) &< -c \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf y_2(t) < -c. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Finalmente, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazem as condições de monotonicidade

$$\begin{aligned} -c < y_1(t) < c &\Rightarrow \dot{y}_1(t) \geq 0, \\ -c < y_2(t) < c &\Rightarrow \dot{y}_2(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Prova: Análoga a prova do Corolário 4.1 de [1]. □

Observação 4.1 Embora nosso problema seja bi-dimensional, o que leva a quatro equações de camada de transição, as hipóteses de simetria fazem com que as equações de camada de transição (4.29) e (4.30), aqui determinadas, sejam as mesmas de [1]. Assim, suas propriedades descritas nas proposições e observações a seguir estão basicamente contidas no Capítulo 4 de [1] e são apresentadas neste trabalho principalmente para tornar a leitura independente.

Figura 4.3: Soluções das equações de camada de transição do Corolário 4.1.

Observação 4.2 Observamos que no Corolário 4.1 não afirmamos que os limites (4.28) e (4.31) existem para a sequência ε_n , mas somente para alguma sub-sequência. Se conseguíssemos mostrar que, para alguma função F , o valor $r > 0$ e a solução $(y_1(t), y_2(t))$ das equações da camada de transição é única, satisfazendo as condições (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35), então os limites (4.28) e (4.31) existiriam para a sequência ε_n .

O corolário a seguir refina os resultados do Teorema 4.1.

Corolário 4.2 *Assumamos as hipóteses e notações do Teorema 4.1, com relação a função $F = (f_1, f_2)$ e os números A , c e γ .*

Ainda, seja $I = [-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha \leq A$, $0 \in I$, tal que

$$\begin{aligned} f'_1(x) &> 0, \quad x \in I, \\ f'_2(x) &< 0, \quad x \in I; \end{aligned}$$

e J um intervalo compacto; tal que

$$0 \in J \subseteq (-c, c) \cap f(I) \cap ff(I).$$

Então, existem constantes positivas ε_0 e K , tais que, se $x_\varepsilon(t)$ é uma S^ -solução de (2.1) $_\varepsilon$ para algum $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos que*

$$x_1(t), x_2(t) \in J \Rightarrow |\dot{x}_1(t)|, |\dot{x}_2(t)| \geq \frac{1}{K\varepsilon}. \quad (4.36)$$

Prova: Análoga a do Corolário 4.2 de [1]. □

O próximo corolário descreve as soluções das equações de camada de transição obtidas no Corolário 4.1 sob a hipótese adicional de monotonicidade para as coordenadas de $F = (f_1, f_2)$.

Corolário 4.3 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaça as hipóteses (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares, e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ é monótona em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Ainda, $|ff(x)| > |x|$ sempre que $x \in (-A, A)$ e $x \neq 0$.*

Seja $(y_1(t), y_2(t))$, e r como no Corolário 4.1.

Então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazem as condições de monotonicidade

$$\dot{y}_1(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}_2(t) \leq 0, \quad \text{para todo } t, \quad (4.37)$$

e existem os limites

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} (y_1(t), y_2(t)) &= (-A, A), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_1(t), y_2(t)) &= (A, -A). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Assim, $(y_1(t), y_2(t))$ é uma órbita heteroclínica ligando os pontos estacionários $(-A, A)$ e $(A, -A)$ das equações de camada de transição (4.29) e (4.30).

Prova: Análoga a do Corolário 4.3 de [1]. □

Observação 4.3 Sob as hipóteses do Corolário 4.3 vemos em que sentido as S^* -soluções de $(2.1)_\varepsilon$, se aproximam, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, da função descontínua $o\bar{q}(t) = (o\bar{q}_1(t), o\bar{q}_2(t))$, dada por:

$$\begin{aligned} o\bar{q}_1(t) &= \begin{cases} A, & \text{se } 4n - 1 < t < 4n + 1 \\ -A, & \text{se } 4n + 1 < t < 4n + 3, \end{cases} \\ o\bar{q}_2(t) &= \begin{cases} A, & \text{se } 4n - 1 < t < 4n \\ -A, & \text{se } 4n < t < 4n + 2 \\ A, & \text{se } 4n + 2 < t < 4n + 3, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$t \in \mathbb{R}$, $0 < A \leq M$.

Veja a Figura 4.4.

Figura 4.4: As coordenadas de uma função $o\bar{q}(t) = (o\bar{q}_1(t), o\bar{q}_2(t))$.

Realmente as coordenadas de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ têm a forma simples mostrada na Figura 4.5, quando ε é pequeno.

Isso segue da simetria das S^* -soluções $x(t)$ de $(2.1)_\varepsilon$, e do fato que para qualquer constante positiva $c \leq A$, a solução $x(t)$ satisfaz propriedade J entre $-c$ e c , devido à monotonicidade das funções coordenadas de F .

Antes de enunciarmos o Corolário 4.4 que, sob a hipótese adicional (H.6), descreve as soluções das equações de camada de transição, obtidas no Corolário 4.1, daremos um lema técnico, Lema 4.1, sobre essas soluções. Trata-se do Lema 3.3 de [1], que será útil para o Corolário 4.4 e o Teorema 4.2.

Ainda, é importante observar novamente, que os resultados aqui obtidos são para as soluções das equações de camada de transição dadas no Corolário 4.1 e,

portanto, considerando-se os segundos zeros das coordenadas de $x_\varepsilon(t)$, S^* -solução de $(2.1)_\varepsilon$. Devido à simetria de $x_\varepsilon(t)$, resultados análogos valem para as $O(\varepsilon)$ -vizinhanças dos primeiros zeros das coordenadas de $x_\varepsilon(t)$.

Figura 4.5

Lema 4.2 *Assumamos que $F=(f_1, f_2)$ satisfaça (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares, e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Ainda, suponhamos que F satisfaça (H.6). Sejam $r > 0$, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções das equações de camada de transição para $t \in \mathbb{R}$. Suponhamos que, para algum $c > 0$, essas soluções satisfaçam*

$$\begin{aligned} -A &\leq y_1(t) \leq -c, \\ c &\leq y_2(t) \leq A, \end{aligned} \tag{4.40}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então $y_1(t) = -a$ e $y_2(t) = a$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde a é dado em (H.6).

Prova: Ver Lema 3.3 de [1]. □

Corolário 4.4 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaça (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem e ímpares, e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Ainda, suponhamos que F satisfaça (H.6). Sejam $y_1(t)$, $y_2(t)$ e r como no Corolário 4.1. Então*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} (y_1(t), y_2(t)) &= (-a, a), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_1(t), y_2(t)) &= (a, -a), \end{aligned} \tag{4.41}$$

com a dado em (H.6).

Portanto, $(y_1(t), y_2(t))$ é uma órbita heteroclínica ligando os pontos estacionários $(-a, a)$ e $(a, -a)$ das equações de camada de transição (4.29) e (4.30).

Prova: Usando Lema 4.2 a prova é análoga à do Corolário 4.4 de [1]. □

Observação 4.4 A existência desses limites não dão informações sobre como uma solução de $(2.1)_\varepsilon$ comporta-se fora das camadas de transição quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Sem a hipótese da monotonicidade sob f_1, f_2 , os resultados até aqui não garantem que, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, solução de $(2.1)_\varepsilon$, está uniformemente próxima nos subconjuntos compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, da função $oq(t) = (oq_1(t), oq_2(t))$, dada por:

$$\begin{aligned} oq_1(t) &= \begin{cases} a, & \text{se } 4n - 1 < t < 4n + 1 \\ -a, & \text{se } 4n + 1 < t < 4n + 3, \end{cases} \\ oq_2(t) &= \begin{cases} a, & \text{se } 4n - 1 < t < 4n \\ -a, & \text{se } 4n < t < 4n + 3 \\ a, & \text{se } 4n + 2 < t < 4n + 3, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Isso será assegurado no Teorema 4.2, a seguir.

Teorema 4.2 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaça as hipóteses (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2, ímpares e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Ainda suponhamos que F satisfaça (H.6). Sejam α_1, α_2 números positivos tais que, $\alpha_1 < a < \alpha_2$ e $-\alpha_2 < -a < -\alpha_1$, onde a é dado em (H.6). Então existe um número $K > 0$ tal que, se $x(t)$ é uma S^* -solução de $(2.1)_\varepsilon$ para algum ε positivo, então*

$$\{t \in [-1, q_4]; x_1(t) \notin (-\alpha_2, -\alpha_1) \cup (\alpha_2, \alpha_1)\} \subseteq [-1, -1 + K\varepsilon] \cup [q_2 - K\varepsilon, q_2 + K\varepsilon] \cup [q_4 - K\varepsilon, q_4],$$

$$\{t \in [-1, q_4]; x_2(t) \notin (-\alpha_2, -\alpha_1) \cup (\alpha_1, \alpha_2)\} \subseteq [q_1 - K\varepsilon, q_1 + K\varepsilon] \cup [q_3 - K\varepsilon, q_3 + K\varepsilon],$$

onde q_1, q_3 e q_2, q_4 são os primeiros zeros de $x_2(t)$ e $x_1(t)$, respectivamente.

Prova: Análoga a prova do Teorema 4.2 de [1]. □

Observação 4.5 O Corolário 4.4 e o Teorema 4.2, dão uma idéia precisa da convergência das S^* -soluções $x(t)$ de $(2.1)_\varepsilon$, para a função $oq(t) = (oq_1(t), oq_2(t))$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

No Corolário 4.3, onde f_1, f_2 são funções monótonas, as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ das equações de camada de transição são também funções monótonas de t . Aqui, é possível que $y_1(t)$ ou $y_2(t)$ não sejam funções monótonas de t . A imagem de $y_1(t)$ ou $y_2(t)$ pode conter propriamente o intervalo $[-a, a]$.

Se isso ocorrer, então o Corolário 4.4 e o Teorema 4.2 implicam, um tipo peculiar de convergência não uniforme de $x(t)$ para a função $oq(t)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, semelhante ao fenômeno de Gibbs da série de Fourier.

Vamos exemplificar. Suponhamos que

$$\inf_t y_2(t) = -a_* < -a$$

para algum número a_* . Consideremos uma sequência $x_n(t)$ de S^* -soluções de $(2.1)_{\varepsilon_n}$, quando $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$. Então, $y_2(t)$ é dado pelo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}(q_{2n} + p_n/2 - \varepsilon_n t),$$

como no Corolário 4.1.

Assumamos as hipóteses e notações do Teorema 4.2, com relação à função $F = (f_1, f_2)$. Então, $x_{2n}(t)$ converge uniformemente para o valor a em todo subconjunto compacto de $(2,3)$, e uniformemente para o valor $-a$ em todo subconjunto compacto de $(1,2)$.

Contudo, perto do ponto de transição $t = 2$, $x_2(t)$ passará do valor $-a$ por uma quantidade que não se torna pequena com $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$. Isto é, do fato $\inf_t y_2(t) = -a_* < -a$ e da definição de $y_2(t)$, temos, para $0 < \delta < 2$:

$$\lim \min_{|t-2| \leq \delta} x_{2n}(t) = -a_* < -a. \quad (4.43)$$

Do mesmo modo, se $\sup_t y_1(t) = a_* > a$ e $0 < \delta < 2$,

$$\lim \max_{|t-1| \leq \delta} x_{1n}(t) = a_* > a. \quad (4.44)$$

Resultados análogos são obtidos perto dos pontos de transição $t = -1$ e $t = 0$.

Veja a Figura 4.6.

Figura 4.6: Gráficos das Coordenadas de uma S^* -solução da Observação 4.5, exibindo o fenômeno de Gibbs.

O próximo resultado dá uma condição suficiente sobre $F = (f_1, f_2)$ para esses fenômenos de Gibbs ocorrerem.

Proposição 4.1 *Assumamos que $F = (f_1, f_2)$ satisfaça as hipóteses (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2, ímpares e que exista A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$ e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$. Ainda, suponhamos que F satisfaça (H.6) e que existe um número positivo $a_0 < a$, com a dado em (H.6), tal que*

$$a_0 \leq x < a \Rightarrow f_2(x) < -a \quad \text{e} \quad f_1(x) > a.$$

Sejam $y_1(t), y_2(t)$, e r como no Corolário 4.1.

Então

$$\sup_t y_1(t) > a$$

ou

$$\inf_t y_2(t) < -a$$

de modo que, o fenômeno de Gibbs (4.44) ou (4.43) descrito na Observação 4.5 ocorre.

Prova: Análoga a da Proposição 4.1 de [1].

□

Observações finais

Consideremos o sistema de equações diferenciais com retardamento $(2.1)_\varepsilon$.

Nosso trabalho consiste principalmente em estudar o comportamento assintótico de soluções periódicas não triviais de $(2.1)_\varepsilon$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

Além das hipóteses regularmente assumidas, se $f_1 = -f_2$ em uma vizinhança da origem, então as S^* -soluções de $(2.1)_\varepsilon$ têm período próximo de 4, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. É válida a seguinte estimativa: $4 < P < 4(1 + \overline{C}\varepsilon)$, onde P é o período das S^* -soluções de $(2.1)_\varepsilon$ e $\overline{C}$ uma constante positiva.

Usando essa estimativa, no contexto do capítulo 4, obtemos o sistema de equações de camada de transição e no *Teorema 4.1* e *Corolários 4.1* e *4.3* provamos que:

- (I) Se $F = (f_1, f_2)$ satisfaz as hipóteses (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, ímpares e se existe A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ é monótona em $[-A, A]$, $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$ e ainda, $|ff(x)| > |x|$ sempre que $x \in (-A, A)$ e $x \neq 0$ então, toda S^* -solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2.1)_\varepsilon$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, para a função $o\overline{q}(t)$, dada em (4.39).

A Figura I ilustra uma S^* -solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2.1)_\varepsilon$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, nesse caso.

No *Teorema 4.1*, *Corolários 4.1* e *4.4* e *Teorema 4.2*, provamos que:

- (II) Se $F = (f_1, f_2)$ satisfaz as hipóteses (H.1) – (H.3), com $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis até ordem 2 na origem, ímpares e se existe A , $0 < A \leq M$, tal que, $f_1 = -f_2 = f$ em $[-A, A]$, $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$ e ainda, F satisfaz a hipótese (H.6) então, toda S^* -solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2.1)_\varepsilon$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, para a função $oq(t)$, dada em (4.42).

Nesse caso, é possível ocorrer um tipo peculiar de convergência não uniforme de $x(t)$ para a função $oq(t)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, semelhante ao fenômeno de Gibbs da série de Fourier, como exemplificamos na Observação 4.5. Esse fenômeno foi detectado por Mallet-Paret e Nusbaum em [1] no caso escalar e o transportamos aqui para equações bi-dimensionais.

A Figura II ilustra uma S^* -solução, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(2.1)_\varepsilon$, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, para o caso da Observação 4.5.

Figura I

Figura II

Além disso, foram feitas algumas simulações no computador. A seguir, Exemplo 1 e Exemplo 2, são duas simulações que anexamos a este trabalho.

Exemplo 1:

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2 \operatorname{arctg} x_2(t-1) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 2 \operatorname{arctg} x_1(t-1) \end{cases}, \quad (I)_\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$.

É fácil ver que a hipótese (H.1) está satisfeita. Além disso, $F(x_1, x_2) = (2 \operatorname{arctg} x_2, -2 \operatorname{arctg} x_1)$ é limitada e portanto, vale (H.2).

A hipótese (H.3) também está satisfeita.

Temos que $f = -f_2 = f_1$ é monótona, onde f_1 e f_2 são as coordenadas da função F . A função f é de classe C^∞ e ímpar, e $f([-A, A]) \subseteq [-A, A]$, onde $A \cong 2,3311$. Ainda, $|ff(x)| > |x|$ sempre que $x \in (-A, A)$ e $x \neq 0$.

Portanto, esse exemplo satisfaz as hipóteses do primeiro caso.

Desse modo, para particulares valores de ε , determinamos numericamente as S^* -soluções $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(I)_\varepsilon$. As próximas figuras, obtidas em computador, são dessas S^* -soluções.

Podemos verificar que, quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ para a função “onda quadrada” $o\bar{q}(t) = (o\bar{q}_1(t), o\bar{q}_2(t))$, dada por:

$$o\bar{q}_1(t) = \begin{cases} 2,3311\dots, & 4n-1 < t < 4n+1 \\ -2,3311\dots, & 4n+1 < t < 4n+3 \end{cases},$$
$$o\bar{q}_2(t) = \begin{cases} 2,3311\dots, & 4n-1 < t < 4n \\ -2,3311\dots, & 4n < t < 4n+2 \\ 2,3311\dots, & 4n+2 < t < 4n+3 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}.$$

Figura 1.1: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$.

Figura 1.2: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$.

Figura 1.3: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,5$.

Figura 1.4: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,5$.

Figura 1.5: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$.

Figura 1.6: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$.

Figura 1.7: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,01$.

Figura 1.8: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,01$.

Figura 1.9: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$.

Figura 1.10: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,5$.

Figura 1.11: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,1$.

Figura 1.12: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(I)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,01$.

Exemplo 2:

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \frac{6}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + x_1^2(t-1) \cdot x_2^2(t-1)}{1 + 2 \cdot x_1^2(t-1) \cdot x_2^2(t-1)} \right) \cdot \arctg x_2(t-1) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - \frac{6}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + x_1^2(t-1) \cdot x_2^2(t-1)}{1 + 2 \cdot x_1^2(t-1) \cdot x_2^2(t-1)} \right) \cdot \arctg x_1(t-1), \end{cases} \quad (\text{II})_\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$.

Nesse exemplo as componentes de $F = (F_1, f_2)$ dependem efetivamente das duas variáveis x_1 e x_2 .

É fácil verificar que :

$$\begin{aligned} x_2 \cdot F_1(x) &> 0, \quad x_2 \neq 0 \\ x_1 \cdot F_2(x) &< 0, \quad x_1 \neq 0, \quad x = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad \delta = \sqrt{-\delta_1 \cdot \delta_2} > 1, \end{aligned}$$

onde $\delta_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0)$, $\delta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0)$.

Além disso,

$$F(x_1, x_2) = \left(\frac{6}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + x_1^2 \cdot x_2^2}{1 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2} \right) \cdot \arctg x_2, -\frac{6}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + x_1^2 \cdot x_2^2}{1 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2} \right) \cdot \arctg x_1 \right)$$

é limitada.

A hipótese (H.3) também está satisfeita.

Ainda, $\tilde{F} = F_1 = -F_2$ e $\tilde{F}(x_1, x_2) = -\tilde{F}(-x_1, -x_2)$.

O ponto (1,1) é quatro periódico para a função F , isto é, $F^4(1,1) = (1,1)$.

Desse modo, para particulares valores de ε , determinamos numericamente as S^* -soluções $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de $(\text{II})_\varepsilon$. As próximas figuras, obtidas em computador, são dessas S^* -soluções.

Esse exemplo indica que, resultados podem ser investigados, em situações mais gerais da que foi estudada aqui.

Figura 2.1: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$.

Figura 2.2: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$.

Figura 2.3: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,5$.

Figura 2.4: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,5$.

Figura 2.5: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$.

Figura 2.6: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$.

Figura 2.7: Gráfico da primeira coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,01$.

Figura 2.8: Gráfico da segunda coordenada de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,01$.

Figura 2.9: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$.

Figura 2.10: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0,5$.

Figura 2.11: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$.

Figura 2.12: Gráfico da órbita de $x(t)$, solução de $(II)_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 0.1$.

Bibliografia

- [1] J. MALLET-PARET; R. NUSSBAUM, *Global continuation and asymptotic behavior for periodic solutions of a differential-delay equation*, Ann. Mat. Pura IV, vol **CXLV** (1986), 33-128.
- [2] M.Z. BAPTISTINI, *Soluções de uma equação diferencial no plano com retardamento e continuação global*, Tese de doutorado (Brasil), Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1990.
- [3] P.Z. TÁBOAS, *Periodic solutions of a planar delay equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **116 A** (1990), 85-101.
- [4] J.K. HALE, *Theory of functional differential equations*. 1ª edição. New York, Springer-Verlag, 1977, 365 p.
- [5] R.D. NUSSBAUM, *Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **101** (1974), 263-306.
- [6] F.E. BROWDER, *On a generalization of the Schauder fixed point theorem*, Duke Mathematical Journal **26** (1959), 291-303.
- [7] D. SAUPE, *Global bifurcation of periodic solution of some autonomous differential delay equations*, Forschungschwerpunkt Dynamische Systeme, Report n° **71**, Univ. Bremen, July, 1982.

- [8] D. SAUPE, *Accelerated PL - Continuation methods and periodic solutions of parameterized differential-delay equations*, Ph.D. disseration (in German), Univ. Bremen, 1982.
- [9] S.A. CHAPIN; R.D. NUSSBAUM, *Asymptotic estimates for the periods of periodic solutions of a differential-delay equation*, Mich. Math. J. **31** (1984), 215-229.