**SOBRE BIFURCAÇÃO E SIMETRIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES**

Monica Fürkötter

Orientador: *Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universida
de de São Paulo, para a obtenção do Títu
lo de Doutor em Ciências (Matemática).

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, pela orientação segura, que tornou possível a elaboração desta tese.

À minha família, por sua paciência e compreensão durante os longos períodos de estudo.

À Silvia Helena Franchin, por seu excelente trabalho datilográfico.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Para Glenda

A B S T R A C T

Consider the equation $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$, where p, μ are small parameters, g is an odd smooth nonlinear function of u , f is an even continuous function, either $2\pi/m$ -periodic or π/m -odd-harmonic (i.e., $f(t + \pi/m) = -f(t)$, for every t in $\mathbb{R}$), and $m \geq 2$ is an integer. Under certain conditions, the small 2π -periodic solutions maintain some symmetry properties of the forcing function $f(t)$, when $\mu \neq 0$. Some other interesting results describe the changes of the number of such solutions, as p and μ vary in a small neighborhood of the origin. It was also proved that a central assumption, which was required in the main results, is generic. The main tool used in this work is the Liapunov-Schmidt Method.

ÍNDICE

Introdução	1
1. Aplicação do Método Alternativo e Propriedades da Equação Auxiliar .	1
2. Equações de Bifurcação no Caso $\frac{2\pi}{m}$ -Periódico	35
3. Equações de Bifurcação no Caso π/m -Harmônico-Ímpar	45
4. A Genericidade da Condição $\rho \neq 0$ no Caso $2\pi/m$ -Periódico	48
5. A Genericidade da Condição $\rho \neq 0$ no Caso π/m -Harmônico-Ímpar	54
6. Exemplos e Comentários Finais	56
Bibliografia	61

INTRODUÇÃO

Consideremos a equação diferencial

$$(1.1) \quad \ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$$

onde p, μ são pequenos parâmetros, f é uma função contínua, par e 2π -periódica e g é uma função suficientemente diferenciável.

Discutimos neste trabalho a variação do número de soluções 2π -periódicas pequenas da equação (1.1) e mostramos que essas soluções mantêm algumas propriedades de simetria de $f(t)$, quando impomos determinadas condições sobre as funções f e g e $\mu \neq 0$.

Para garantir que as soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) mantêm alguma simetria de $f(t)$ é preciso supor que um determinado coeficiente, que depende de f e de $g(\cdot, 0)$, é não nulo. Uma das contribuições deste trabalho é mostrar que, se f e g satisfazem certas condições, o citado coeficiente é genericamente não nulo.

Provamos aqui também uma conjectura que foi estabelecida em Furkotter-Rodrigues [2].

O exemplo que motivou este trabalho foi $\ddot{u} + u = pu + u^3 + \mu h(mt)$ onde $m \geq 3$ é um inteiro e h é 2π -periódica e par.

Hale-Rodrigues [3] estudaram a equação de Duffing $\ddot{u} + u = pu - u^3 + \mu \cos t$ e mostraram que para $\mu \neq 0$ as únicas soluções 2π -periódicas pequenas dessa equação são funções pares de t . Eles também entenderam o mesmo resultado para um termo forçante par e 2π -periódico genérico que satisfaz a condição $\rho = \rho(f) = \int_0^{2\pi} f(s) \cos s ds \neq 0$.

Rodrigues-Vanderbauwhede [4] generalizaram esse resultado para equações do tipo (1.1) onde f satisfaz a hipótese acima e $g(u, p) = O(|pu| + |u|^2)$ quando (u, p) tende a $(0, 0)$. Eles consideraram equações em espaços de Banach, da forma $Lx = N(x) + \mu f$ onde L é um ope

rador linear não inversível, $N(x)$ é um operador não linear satisfazendo certas condições de pequenez e μ é um pequeno parâmetro.

Vanderbauwhede [6] também considera problemas relacionados com os citados acima, numa forma abstrata.

Fürkotter-Rodrigues [2] estudaram as soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) assumindo que f tem período mínimo π e que f é $\pi/2$ -harmônica-ímpar (isto é, $f(t + \pi/2) = -f(t)$ para todo t em $\mathbb{R}$). Neste caso a condição de Hale-Rodrigues, $\rho = \rho(f) \neq 0$, não está satisfeita e é preciso supor que um determinado coeficiente $\rho = \rho(f, g)$ é não nulo para provar que, além das soluções pares, aparecem soluções com outras simetrias.

Muitos autores procuram soluções de equações não lineares em classes de funções definidas por condições de simetria. Por exemplo, alguns consideram equações do tipo de (1.1) com f 2π -periódica, e mostram que existem soluções 2π -periódicas $u(t)$ que são funções pares de t , ou equivalentemente, tais que $\dot{u}(0) = 0$. Mas Hale, Vanderbauwhede, Rodrigues e Fürkotter, nos trabalhos citados acima, foram mais adiante e provaram que, em certas condições, as soluções que tem um certo tipo de simetria são as únicas soluções 2π -periódicas pequenas.

Neste trabalho supomos que f tem período mínimo $2\pi/m$, onde $m \geq 2$ é um inteiro. A condição $\rho \neq 0$ de Hale-Rodrigues [3] e Fürkotter-Rodrigues [2] não está satisfeita.

Se f é π/m -harmônica-ímpar (isto é, $f(t + \pi/m) = -f(t)$ para todo t em $\mathbb{R}$) e m é inteiro par, como uma consequência do fato de f ter mais simetrias, o problema se torna tecnicamente mais difícil e mais degenerado que no caso m ímpar.

As principais contribuições deste trabalho são encontrar um conjunto de soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) com um certo tipo de simetria, supondo que um certo coeficiente que depende de f e de g é não nulo, mostrar que essas são as únicas soluções possíveis e que o coeficiente

é genericamente não nulo, isto é, é não nulo para a maioria das equações do tipo (1.1) com f e g satisfazendo determinadas hipóteses.

A técnica que utilizamos é o Método Alternativo ou Método de Liapunov-Schmidt, que reduz o estudo de (1.1) ao estudo de duas equações de nominadas equação auxiliar e equação de bifurcação, respectivamente, que são analisadas por meio do Teorema das Funções Implícitas.

Este trabalho é constituído de seis capítulos.

No Capítulo 1 enunciamos todas as hipóteses que utilizamos e mostramos que simetrias em (1.1) implicam simetrias das soluções da equação auxiliar. Os principais resultados deste capítulo são os Teoremas 1.1 e 1.2, mas a parte mais difícil está nos Lemas 1.8 e 1.11.

No Capítulo 2, sob certas condições de $g(u,p)$ e se f é $2\pi/m$ -periódica, analisamos as equações de bifurcação. Provamos que se $u(t)$ é uma solução 2π -periódica pequena de (1.1) então existe $k, -m/2 < k \leq m/2$, tal que $u(t + k\pi/m)$ é par em t . Isto está estabelecido no Teorema 2.2. O Teorema 2.3 dá uma descrição completa das curvas de bifurcação e do número de soluções 2π -periódicas pequenas. Todos esses resultados são válidos se $\mu \neq 0$ e se um coeficiente $\rho = \rho(f,g)$ for diferente de zero.

No Capítulo 3, analisamos as equações de bifurcação supondo que g tem uma determinada forma e que f é π/m -harmônica-ímpar. Temos então os Teoremas 3.2 e 3.3 que dão informações sobre as simetrias das soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) e sobre a variação do número de soluções de (1.1). Aqui consideramos também que (p,μ) varia numa vizinhança da origem, $\mu \neq 0$ e o coeficiente $\rho = \rho(f,g) \neq 0$.

Nos Capítulos 4 e 5 provamos que a condição $\rho = \rho(f,g) \neq 0$, que é uma condição central deste trabalho, é genérica. Isso é feito para o caso em que f é $2\pi/m$ -periódica no Capítulo 4, e π/m -harmônica-ímpar, no Capítulo 5. Os Teoremas 4.1 e 5.1 dão alguns dos nossos principais resulta-

dos, mas os Lemas 4.1 e 5.1 são muito interessantes e foram muito úteis na demonstração dos teoremas acima.

No Capítulo 6 discutimos alguns exemplos e apresentamos alguns problemas motivados por esse trabalho.

Uma aplicação que pode ser reduzida a equação (1.1) é a equação $\ddot{v} + \omega_0^2 [v + G(v)] = \tau f(\omega t)$ onde $G(v) = O(v^2)$ quando v tende a zero, f é uma função par, π/m -harmônica-ímpar ou $2\pi/m$ -periódica, e procuramos soluções $2\pi/\omega$ -periódicas para ω próximo de ω_0 . Isso inclui a equação do pêndulo e muitos outros osciladores mecânicos e elétricos. Fazendo $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t/\omega)$, $\omega_0^2/\omega^2 = 1 - p$ e $\mu = \tau/\omega^2$ obtemos uma equação como (1.1).

Os resultados deste trabalho indicam que se a série de Taylor da não linearidade for truncada no lugar errado, as informações dadas por nos teoremas podem ser perdidas. Por exemplo, se quisermos usar nossos resultados na equação do pêndulo $\ddot{v} + \frac{g}{L} \text{sen} v = \mu \cos \omega t$, para ω próximo de $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, devemos conhecer todos os termos do desenvolvimento de Taylor de $\text{sen} v$, em torno de $v=0$, até a ordem v^{101} .

Em [7] é considerado um problema relacionado ao nosso caso $2\pi/m$ -periódico, com um outro método e em uma situação diferente àquela que foi tratada neste trabalho.

CAPÍTULO 1

APLICAÇÃO DO MÉTODO ALTERNATIVO E PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO AUXILIAR

Sejam p, μ pequenos parâmetros e $m \geq 2$ um inteiro.

Consideremos a equação

$$(1.1) \quad \ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$$

e as seguintes hipóteses:

(H₀) g é uma função real definida numa vizinhança de $(u, p) = (0, 0)$, ímpar em u , $g \in C^{2k+3}$,

$$g(u, p) = pu + \sum_{i=1}^k \alpha_{2i+1} u^{2i+1} + O(|pu^3| + |u^{2k+3}|) \text{ e } k \geq 1 \text{ é um inteiro.}$$

(H₁) g é uma função real definida numa vizinhança de $(u, p) = (0, 0)$, ímpar em u , $g \in C^{m+2}$,

$$g(u, p) = pu + \sum_{i=1}^{(m-1)/2} \alpha_{2i+1} u^{2i+1} + O(|pu^3| + |u^{m+2}|) \text{ se } m \text{ é ím-}$$

par, e $g \in C^{m+3}$,

$$g(u, p) = pu + \sum_{i=1}^{m/2} \alpha_{2i+1} u^{2i+1} + O(|pu^3| + |u^{m+3}|) \text{ se } m \text{ é par.}$$

(OH₁) g é uma função real definida numa vizinhança de $(u, p) = (0, 0)$, ímpar em u , $g \in C^{m+2}$,

$$g(u, p) = pu + \sum_{i=1}^{(m-1)/2} \alpha_{2i+1} u^{2i+1} + O(|pu^3| + |u^{m+2}|) \text{ se } m \text{ é ím-}$$

par e $g \in C^{2m+3}$,

$$g(u, p) = pu + \sum_{i=1}^m \alpha_{2i+1} u^{2i+1} + O(|pu^3| + |u^{2m+3}|) \text{ se } m \text{ é par.}$$

(H₂) f é uma função real, $2\pi/m$ -periódica, par e contínua em $\mathbb{R}$.

(OH₂) f é uma função real contínua, par e π/m -harmônica-ímpar, isto é, $f(t+\pi/m) = -f(t)$ para todo t em $\mathbb{R}$.

Seja $P_{2\pi}$ o espaço de Banach definido por

$$P_{2\pi} = \{w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; w \text{ contínua e } 2\pi\text{-periódica}\}$$

munido da norma $\|w\| = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |w(t)|$.

Definimos em $P_{2\pi}$ a projeção

$$(1.2) \quad (Pw)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} w(s) \cos s ds + \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} w(s) \sin s ds.$$

Temos pela Alternativa de Fredholm que a equação $\ddot{u} + u = h(t)$, com h em $P_{2\pi}$, tem uma solução em $P_{2\pi}$ se, e somente se, $Ph = 0$. Além disso, se $Ph = 0$ então existe uma única solução u em $P_{2\pi}$ tal que $Pu = 0$. Indiquemos essa solução por Kh . Segue pela fórmula da variação das constantes que

$$(1.3) \quad Kh = (I-P) \left[-\cos(\cdot) \int_0^{(\cdot)} h(s) \sin s ds + \sin(\cdot) \int_0^{(\cdot)} h(s) \cos s ds \right].$$

Seguindo o procedimento usual do Método de Liapunov-Schmidt, o problema de encontrar uma solução 2π -periódica u de (1.1) fica reduzido ao de encontrar uma solução w em $P_{2\pi}$ do seguinte sistema de equações:

$$(1.4) \quad (a) \quad w = K(I-P)[g(r \cos(\cdot - \phi) + w, p) + \mu f(\cdot)]$$

$$(b) \quad P[g(r \cos(\cdot - \phi) + w, p) + \mu f(\cdot)] = 0$$

onde $u(t) = r \cos(t - \phi) + w(t)$, $r \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$.

As equações (a) e (b) são ditas equação auxiliar e de bifurcação, respectivamente.

Segue do Teorema das Funções Implícitas que a equação (1.4.a) tem uma única solução pequena para (p, μ) numa vizinhança pequena da ori-

gem. Indiquemos essa solução por $w^*(t) = w^*(r, \phi, p, \mu)(t)$.

Substituindo w^* na equação (1.4.b), e usando a definição de P , obtemos as seguintes equações:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (a) \quad \bar{F}(r, \phi, p, \mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(s-\phi) + w^*(r, \phi, p, \mu)(s), p) \cos s ds = 0 \\ (b) \quad \bar{G}(r, \phi, p, \mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(s-\phi) + w^*(r, \phi, p, \mu)(s), p) \sin s ds = 0 \end{aligned}$$

Sejam

$$(1.6) \quad \begin{aligned} (a) \quad F(r, \phi, p, \mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + w^*(r, \phi, p, \mu)(s+\phi), p) \cos s ds = 0 \\ (b) \quad G(r, \phi, p, \mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + w^*(r, \phi, p, \mu)(s+\phi), p) \sin s ds = 0 \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

$$\text{Temos também que } \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{se, e somente se,}$$

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, analisar (1.5) é equivalente a analisar (1.6).

Analisaremos então (1.6).

O lema seguinte fornece uma determinada representação para $w^*(r, \phi, p, \mu)(t)$, que será utilizada nos Capítulos 4 e 5.

LEMA 1.1:

Se as hipóteses (H_0) e (H_2) (ou (OH_2)) estão satisfeitas então existem funções contínuas $W_1 = W_1(\alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{2k-1}, r, \phi, \mu, f)$ e

$W_2 = W_2(r, \phi, \mu, f)(t)$ tais que W_1 independe de α_{2i+1} para $i > k-1$,

$W_1 = O((|r| + |\mu|)^3)$, W_2 independe de α_{2i+1} para todo i ,

$W_2 = O((|r| + |\mu|)^{2k+1})$ e

$$w^*(r, \phi, 0, \mu)(t) = \mu(Kf)(t) + W_1 + \alpha_{2k+1} W_2 + O((|r| + |\mu|)^{2k+3})$$

PROVA:

Faremos a prova por indução sobre k .

Consideremos o caso $k=1$.

Como $w^*(r, \phi, p, \mu) = O(|r| + |\mu|)$, se $w^* \stackrel{\text{def}}{=} w^*(r, \phi, 0, \mu)$ temos, para $p=0$, que

$$\begin{aligned} w^* &= \mu Kf + \alpha_3 K(I-P)[(r \cos(\cdot - \phi) + w^*)^3] + O((|r| + |\mu|)^5) = \\ &= \mu Kf + \alpha_3 K(I-P)[(r \cos(\cdot - \phi) + \mu Kf)^3] + O((|r| + |\mu|)^5). \end{aligned}$$

Se $W_2 \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P)[(r \cos(\cdot - \phi) + \mu Kf)^3]$ temos que

$$w^*(r, \phi, 0, \mu)(t) = \mu(Kf)(t) + \alpha_3 W_2 + O((|r| + |\mu|)^5)$$

e, neste caso, $W_1 = 0$.

Suponhamos que o resultado é válido para $k-1$. Então

$$g(u, 0) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{2i+1} u^{2i+1} + O(|u|^{2k+1}) \quad \text{e} \quad w^* = \mu Kf + W_1 + \alpha_{2k-1} W_2 + O((|r| + |\mu|)^{2k+1}),$$

onde W_1 depende de $\alpha_3, \dots, \alpha_{2k-3}$ e independe de α_{2i+1} para $i \geq k-1$,

$$W_1 = O((|r|+|\mu|)^3) \quad \text{e} \quad W_2 = O((|r|+|\mu|)^{2k-1}).$$

Então

$$\begin{aligned} w^* &= K(I-P) \left[\sum_{i=1}^k \alpha_{2i+1} (\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + w^*)^{2i+1} + O((|r|+|\mu|)^{2k+3}) + \mu f \right] = \\ &= \mu Kf + K(I-P) \left[\sum_{i=1}^k \alpha_{2i+1} (\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf + W_1 + \alpha_{2k-1} W_2)^{2i+1} \right] + \dots = \\ &= \mu Kf + \alpha_{2k+1} K(I-P) [(\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf + W_1 + \alpha_{2k-1} W_2)^{2k+1} + \\ &+ K(I-P) \left[\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{2i+1} (\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf + W_1 + \alpha_{2k-1} W_2)^{2i+1} \right] + \dots = \\ &= \mu Kf + \alpha_{2k+1} K(I-P) [(\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf)^{2k+1}] + \\ &+ K(I-P) \left[\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{2i+1} (\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf + W_1 + \alpha_{2k-1} W_2)^{2i+1} \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Se } \bar{W}_2 \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P) [(\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf)^{2k+1}] \quad \text{e}$$

$$\bar{W}_1 \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P) \left[\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{2i+1} (\operatorname{rcos}(\cdot - \phi) + \mu Kf + W_1 + \alpha_{2k-1} W_2)^{2i+1} \right]$$

temos $w^* = \mu Kf + \bar{W}_1 + \alpha_{2k+1} \bar{W}_2 + \dots$ onde $\dots = O((|r|+|\mu|)^{2k+3})$,

$\bar{W}_1 = \bar{W}_1(\alpha_3, \dots, \alpha_{2k-1}, r, \phi, \mu)(t)$, $\bar{W}_2 = \bar{W}_2(r, \phi, \mu)(t)$, $\bar{W}_1$ independe de

α_{2i+1} para todo $i > k-1$, $\bar{W}_1 = O((|r|+|\mu|)^3)$, $\bar{W}_2$ independe de α_{2i+1} para todo i e $\bar{W}_2 = O((|r|+|\mu|)^{2k+1})$. $\square$

Os próximos lemas dão informações sobre simetrias e estimativas de w^* .

LEMA 1.2:

Suponhamos que as hipóteses (H_1) (ou (OH_1)) e (H_2) estão satisfeitas. Então a solução $w^* = w^*(r, \phi, p, \mu)$ satisfaz o seguinte:

$$(1.7) \quad w^*(r, \phi, p, \mu)(\cdot + \Psi) \text{ é solução da equação}$$

$$w = K(I-P)[g(r \cos(\cdot + \Psi - \phi) + w, p) + \mu f(\cdot + \Psi)] \text{ para todo } \Psi \text{ em } \mathbb{R}.$$

$$(1.8) \quad w^*(0, \phi, p, \mu)(t) \text{ é uma função par e } 2\pi/m\text{-periódica em } t, \text{ independente de } \phi.$$

$$(1.9) \quad w^*(r, k\pi/m, p, \mu)(t + k\pi/m) \text{ é par em } t \text{ para } -m/2 < k \leq m/2.$$

$$(1.10) \quad w^*(r, \phi, p, 0)(t + \phi) \text{ é par em } t.$$

$$(1.11) \quad w^*(0, \phi, p, \mu) = \mu K f + O(|p\mu| + |\mu^3|) \text{ quando } (p, \mu) \rightarrow (0, 0).$$

$$(1.12) \quad w^*(r, \phi, p, \mu) = w^*(0, \phi, p, \mu) + rS(r, \phi, p, \mu)$$

onde $S(r, \phi, p, \mu) = O(r^2 + |\mu|)$ quando $(r, p, \mu) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Se m é par então valem

$$(1.13) \quad w^*(r, \phi, p, \mu)(t) = w^*(-r, \phi, p, \mu)(t - \pi)$$

$$(1.14) \quad w^*(r, \phi, p, \mu)(t) = -w^*(r, \phi, p, -\mu)(t - \pi)$$

Se $m=3$ temos também que:

$$(1.15) \quad w^*(r, -\pi/3, p, \mu)(t - \pi/3) = w^*(r, \pi/3, p, \mu)(t + \pi/3)$$

$$(1.16) \quad w^*(-r, \pi/3, p, \mu)(t - 2\pi/3) = w^*(r, 0, p, \mu)(t)$$

Se as hipóteses (H_1) (ou (OH_1)), e (OH_2) estão satisfeitas então $w^*(0, \phi, p, \mu)(t)$ é uma função π/m -harmônica-ímpar de t e

(1.17) $w^*(r, k\pi/2m, p, \mu)(t+k\pi/2m)$ é par em t se k é par e
 $w^*(r, k\pi/2m, p, \mu)(t+k\pi/2m-\pi/2)$ é ímpar em t se k é ímpar e m é par.

PROVA:

Provemos que (1.7) está satisfeita.

Sejam $y(t) = w^*(r, \phi, p, \mu)(t)$ e $z(t) = y(t+\Psi)$

Então $y(t)$ satisfaz

$$\ddot{y}(t) + y(t) = (I-P)[g(r\cos(\cdot-\phi) + y(\cdot), p) + \mu f(\cdot)](t)$$

Assim, para todo $\Psi \in \mathbb{R}$,

$$\ddot{y}(t+\Psi) + y(t+\Psi) = (I-P)[g(r\cos(\cdot-\phi) + y(\cdot), p) + \mu f(\cdot)](t+\Psi)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + z(t) &= g(r\cos(t+\Psi-\phi) + z(t), p) + \mu f(t+\Psi) - \\ &- \frac{\cos(t+\Psi)}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r\cos(s-\phi) + y(s), p) + \mu f(s)] \cos s ds - \\ &- \frac{\sin(t+\Psi)}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r\cos(s-\phi) + y(s), p) + \mu f(s)] \sin s ds. \end{aligned}$$

Fazendo $s = \tau + \Psi$ temos

$$\begin{aligned} &\cos(t+\Psi) \int_0^{2\pi} [g(r\cos(s-\phi) + y(s), p) + \mu f(s)] \cos s ds + \\ &+ \sin(t+\Psi) \int_0^{2\pi} [g(r\cos(s-\phi) + y(s), p) + \mu f(s)] \sin s ds = \\ &= (\cos t \cos \Psi - \sin t \sin \Psi) \int_0^{2\pi} [g(r\cos(\tau+\Psi-\phi) + z(\tau), p) + \mu f(\tau+\Psi)] [\cos \tau \cos \Psi - \sin \tau \sin \Psi] d\tau + \\ &+ (\sin t \cos \Psi + \sin \Psi \cos t) \int_0^{2\pi} [g(r\cos(\tau+\Psi-\phi) + z(\tau), p) + \mu f(\tau+\Psi)] [\sin \tau \cos \Psi + \sin \Psi \cos \tau] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \cos t \int_0^{2\pi} [g(r \cos(\tau + \Psi - \phi) + z(\tau), p) + \mu f(\tau + \Psi)] \cos d\tau + \\ + \sin t \int_0^{2\pi} [g(r \cos(\tau + \Psi - \phi) + z(\tau), p) + \mu f(\tau + \Psi)] \sin \tau d\tau.$$

Logo,

$$\ddot{z}(t) + z(t) = g(r \cos(t + \Psi - \phi) + z(t), p) + \mu f(t + \Psi) - \\ - \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos(\tau + \Psi - \phi) + z(\tau), p) + \mu f(\tau + \Psi)] \cos \tau d\tau - \\ - \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos(\tau + \Psi - \phi) + z(\tau), p) + \mu f(\tau + \Psi)] \sin \tau d\tau.$$

Temos então

$$\ddot{z} + z = (I-P)[g(r \cos(\cdot + \Psi - \phi) + z, p) + \mu f(\cdot + \Psi)]$$

e daí, z é solução da equação

$$w = K(I-P)[g(r \cos(\cdot + \Psi - \phi) + w, p) + \mu f(\cdot + \Psi)]$$

como queríamos provar.

Para provar (1.9) basta observar que, por (1.7),

$w^*(r, k\pi/m, p, \mu)(\cdot + k\pi/m)$ é solução da equação

$$\ddot{w} + w = (I-P)[g(r \cos(\cdot) + w, p) + \mu f(\cdot + k\pi/m)]$$

Consideremos $y(t) = w^*(r, k\pi/m, p, \mu)(t + k\pi/m)$ e $z(t) = y(-t)$.

Então $y(t)$ satisfaz

$$\ddot{y}(t) + y(t) = (I-P)[g(r \cos(\cdot) + y, p) + \mu f(\cdot + k\pi/m)](t)$$

Logo,

$$\ddot{y}(-t) + y(-t) = (I-P)[g(r \cos(\cdot) + y, p) + \mu f(\cdot + k\pi/m)](-t)$$

Como $f(\cdot + k\pi/m)$ é par em t , obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + z(t) &= g(\text{rcost} + z(t), p) + \mu f(t + k\pi/m) - \\ &- \frac{\text{cost}}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(\text{rcoss} + y(s), p) + \mu f(s + k\pi/m)] \text{coss} ds + \\ &+ \frac{\text{sents}}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(\text{rcoss} + y(s), p) + \mu f(s + k\pi/m)] \text{sens} ds. \end{aligned}$$

Fazendo $s = -\tau$, temos que

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + z(t) &= g(\text{rcost} + z(t), p) + \mu f(t + k\pi/m) - \\ &- \frac{\text{cost}}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(\text{rcost} + z(\tau), p) + \mu f(\tau + k\pi/m)] \text{cos} \tau d\tau - \\ &- \frac{\text{sents}}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(\text{rcost} + z(\tau), p) + \mu f(\tau + k\pi/m)] \text{sen} \tau d\tau \end{aligned}$$

e daí,

$$\ddot{z} + z = (I-P)[g(\text{rcos}(\cdot) + z, p) + \mu f(\cdot + k\pi/m)] .$$

Portanto,

$$z = K(I-P)[g(\text{rcos}(\cdot) + z, p) + \mu f(\cdot + k\pi/m)] .$$

Logo, y e z são soluções da equação acima. Como a solução é única devemos ter $y=z$, o que implica que $y(-t) = y(t)$ e então $w^*(r, k\pi/m, p, \mu)(t + k\pi/m)$ é par em t .

A fim de provar (1.11) é suficiente observar que

$$\begin{aligned} w^*(0, \phi, 0, 0) &\equiv 0 & \frac{\partial w^*}{\partial \mu}(0, \phi, 0, 0) &= Kf \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial \mu^2}(0, \phi, 0, 0) &\equiv 0 & \frac{\partial w^*}{\partial p}(0, \phi, 0, 0) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Para obter (1.12) definimos

$$S(r, \phi, p, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{w^*(r, \phi, p, \mu) - w^*(0, \phi, p, \mu)}{r} & \text{se } r \neq 0 \\ \frac{\partial w^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

e observamos que $S(r, \phi, p, 0) = 0(r^2)$.

Para provar (1.15) utilizamos (1.7).

Temos então que $w^*(r, \pi/3, p, \mu)(\cdot + \pi/3)$ é solução da equação

$$w = K(I-P)[g(r \cos(\cdot) + w, p) + \mu f(\cdot + \pi/3)]$$

e $w^*(r, -\pi/3, p, \mu)(\cdot - \pi/3)$ é solução de

$$w = K(I-P)[g(r \cos(\cdot) + w, p) + \mu f(\cdot - \pi/3)].$$

Como f é $2\pi/3$ -periódica, para todo t em $\mathbb{R}$,

$$f(t + \pi/3) = f(t + \pi/3 - 2\pi/3) = f(t - \pi/3).$$

Logo, $w^*(r, \pi/3, p, \mu)(\cdot + \pi/3)$ e $w^*(r, -\pi/3, p, \mu)(\cdot - \pi/3)$

são soluções da mesma equação, que tem uma única solução.

Portanto,

$$w^*(r, \pi/3, p, \mu)(t + \pi/3) = w^*(r, -\pi/3, p, \mu)(t - \pi/3)$$

A prova de (1.16) é análoga a de (1.15).

As demais propriedades seguem essencialmente do fato de a equação auxiliar ser invariante segundo certas transformações.

Por exemplo, para provar (1.8) basta observar que $w^*(0, \phi, p, \mu)(t)$

é solução da equação

$$w = K(I-P)[g(w,p) + \mu f(\cdot)]$$

que independe de ϕ e não se altera quando fazemos as transformações $t \rightarrow -t$ e $t \rightarrow t+2\pi/m$. $\square$

Seja

$$P_{2\pi \times 2\pi} = \{f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(t+2\pi, \phi) = f(t, \phi) = f(t, \phi+2\pi) \text{ para} \\ \text{todo } (t, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$$

munido da norma $\|f\| = \max_{(t, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(t, \phi)|$.

Sejam m e n inteiros positivos com $m \geq 2$.

(1.18) Se n é par consideramos as funções $y \in P_{2\pi \times 2\pi}$ tais que $y(t, \phi)$ pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=0}^{n/2} [a_{n,2j}(t) \cos 2j(t-\phi) + b_{n,2j}(t) \sin 2j(t-\phi)]$$

onde $a_{n,2j}$ é par e $b_{n,2j}$ é ímpar, para $j = 0, \dots, n/2$.

(1.19) Se n é ímpar consideramos as funções $y \in P_{2\pi \times 2\pi}$ tais que $y(t, \phi)$ pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=0}^{(n-1)/2} [a_{n,2j+1}(t) \cos(2j+1)(t-\phi) + b_{n,2j+1}(t) \sin(2j+1)(t-\phi)]$$

onde $a_{n,2j+1}$ é par e $b_{n,2j+1}$ é ímpar, para $j = 0, \dots, (n-1)/2$.

Se $n \leq m-1$ definimos F_n como o espaço das funções $y \in P_{2\pi \times 2\pi}$ que satisfazem (1.18) se n é par e (1.19), se n é ímpar, onde $a_{n,2j}$, $b_{n,2j}$, $a_{n,2j+1}$, $b_{n,2j+1}$ são $2\pi/m$ -periódicas, para $j = 0, \dots, n/2$ e $j = 0, \dots, (n-1)/2$.

Se $n \leq 2m-1$ e n é par definimos O_n (resp. $\tilde{O}_n$) como o espaço das funções $y \in P_{2\pi \times 2\pi}$ que satisfazem (1.18) com as funções $a_{n,2j}$, $b_{n,2j}$ π/m -harmônicas-ímpares (resp. π/m -periódicas), para $j = 0, \dots, n/2$.

Se $n \leq 2m-1$ e n é ímpar, O_n (resp. $\tilde{O}_n$) é definido como o espaço das funções $y \in P_{2\pi \times 2\pi}$ que satisfazem (1.19) com as funções $a_{n,2j+1}$ e $b_{n,2j+1}$ π/m -periódicas (resp. π/m -harmônicas-ímpares), para $j = 0, \dots, (n-1)/2$.

OBSERVAÇÃO 1.1:

Se $y \in O_n$ e $a(t)$ é par e π/m -harmônica-ímpar então $a(t)y \in \tilde{O}_n$.

Os próximos lemas fornecem informações sobre os espaços $(I-P)F_n$, $(I-P)O_n$, F_n , O_n e $\tilde{O}_n$.

LEMA 1.3:

Suponhamos que m, n são inteiros positivos e $n \leq m-1$.

- i) Se $n < m-1$, n par então $(I-P)F_n = F_n$.
- ii) Se $n < m-1$, n ímpar então os elementos de $(I-P)F_n$ satisfazem as mesmas propriedades que definem F_n e a condição adicional que o valor médio de $a_{n,1}$, $Ma_{n,1}$, é zero.
- iii) Se $n = m-1$, n par então os elementos de $(I-P)F_n$ tem as mesmas propriedades dos elementos de F_n e

$$(1.20) \quad \int_0^{2\pi} [a_{n,m-1}(t)\cos mt + b_{n,m-1}(t)\sin mt] dt = 0$$

- iv) Se $n = m-1$, n ímpar, os elementos de $(I-P)F_n$ satisfazem as condições que definem F_n , (1.20) e $Ma_{n,1} = 0$.

PROVA:

Suponhamos inicialmente que n é par e que y é um elemento de F_n . Então y satisfaz (1.18) e

$$\begin{aligned}
 & [Py(\cdot, \phi)](t) = \\
 & = \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{n/2} [a_{n,2j}(s) \cos 2j(s-\phi) + b_{n,2j}(s) \sin 2j(s-\phi)] \cos s \, ds + \\
 & + \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{n/2} [a_{n,2j}(s) \cos 2j(s-\phi) + b_{n,2j}(s) \sin 2j(s-\phi)] \sin s \, ds = \\
 & = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n/2} \{ \cos t \cos 2j\phi \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) \cos 2js + b_{n,2j}(s) \sin 2js] \cos s \, ds + \\
 & + \sin t \sin 2j\phi \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) \sin 2js - b_{n,2j}(s) \cos 2js] \sin s \, ds \} = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n/2} \{ \cos t \cos 2j\phi \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) (\cos(2j+1)s + \cos(2j-1)s) + \\
 & + b_{n,2j}(s) (\sin(2j+1)s + \sin(2j-1)s)] \, ds + \\
 & + \sin t \sin 2j\phi \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) (-\cos(2j+1)s + \cos(2j-1)s) - \\
 & - b_{n,2j}(s) (\sin(2j+1)s - \sin(2j-1)s)] \, ds \} = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n/2} \{ \cos(t+2j\phi) \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) \cos(2j+1)s + b_{n,2j}(s) \sin(2j+1)s] \, ds + \\
 & + \cos(t-2j\phi) \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) \cos(2j-1)s + b_{n,2j}(s) \sin(2j-1)s] \, ds \}.
 \end{aligned}$$

Como $t+2j\phi = (2j+1)t - 2j(t-\phi)$ e $t-2j\phi = -[(2j-1)t - 2j(t-\phi)]$

obtemos

$$\begin{aligned}
 (1.21) \quad [Py(\cdot, \phi)](t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n/2} \left\{ \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) \cos(2j+1)s + \right. \\
 &+ b_{n,2j}(s) \sin(2j+1)s] ds [\cos(2j+1)t \cos 2j(t-\phi) + \sin(2j+1)t \sin 2j(t-\phi)] + \\
 &+ \int_0^{2\pi} [a_{n,2j}(s) \cos(2j-1)s + b_{n,2j}(s) \sin(2j-1)s] ds [\cos(2j-1)t \cos 2j(t-\phi) + \\
 &+ \sin(2j-1)t \sin 2j(t-\phi)] \}.
 \end{aligned}$$

Consideremos a afirmação (i). Se $n < m-1$ e $0 \leq j \leq n/2 < (m-1)/2$ então $2\pi/(2j+1) > 2\pi/m$. Como $a_{n,2j}$ é $2\pi/m$ -periódica temos que $\int_0^{2\pi} a_{n,2j}(s) \cos(2j+1)s ds = 0$. O mesmo procedimento mostra que todas as integrais de (1.21) são nulas.

Portanto, se n é par, $n < m-1$ e $y(t, \phi)$ pertence a F_n então $Py(\cdot, \phi) = 0$. Isto mostra que (i) vale.

Para provar (ii) consideramos um elemento $y(t, \phi)$ de F_n que satisfaz (1.19). Efetuando alguns cálculos, como na obtenção de (1.21), obtemos

$$\begin{aligned}
 (1.22) \quad [Py(\cdot, \phi)](t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \left\{ \int_0^{2\pi} [a_{n,2j+1}(s) \cos 2(j+1)s + \right. \\
 &+ b_{n,2j+1}(s) \sin 2(j+1)s] ds [\cos 2(j+1)t \cos(2j+1)(t-\phi) + \\
 &+ \sin 2(j+1)t \sin(2j+1)(t-\phi)] + \int_0^{2\pi} [a_{n,2j+1}(s) \cos 2js + \\
 &+ b_{n,2j+1}(s) \sin 2js] ds [\cos 2jt \cos(2j+1)(t-\phi) + \sin 2jt \sin(2j+1)(t-\phi)] \}.
 \end{aligned}$$

Se $0 \leq j \leq (n-1)/2$ e $n < m-1$ então $2\pi/2(j+1) > 2\pi/m$. Portanto, a primeira integral de (1.22) é nula e a segunda é nula para $0 < j \leq (n-1)/2$. Temos então nesse caso

$$[Py(\cdot, \phi)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{n,1}(s) ds \cdot \cos(t-\phi) = Ma_{n,1} \cos(t-\phi)$$

e (ii) segue facilmente.

Para analisar (iii) usamos novamente (1.21) e mostramos que nes
se caso

$$[Py(\cdot, \phi)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a_{n,m-1}(s) \cos ms + \\ + b_{n,m-1}(s) \sin ms] ds [\cos mt \cos(m-1)(t-\phi) + \sin mt \sin(m-1)(t-\phi)]$$

pois todas as outras integrais de (1.21) são nulas.

A fim de provar (iv) usamos (1.22) para $n = m-1$ e mostramos
que se $y \in F_n$ é dado por (1.19) então

$$[Py(\cdot, \phi)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a_{n,m-1}(s) \cos ms + \\ + b_{n,m-1}(s) \sin ms] ds [\cos mt \cos(m-1)(t-\phi) + \sin mt \sin(m-1)(t-\phi)] + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{n,1}(s) ds \cos(t-\phi).$$

A afirmação (iv) segue então facilmente. $\square$

LEMA 1.4:

Se m e n são inteiros positivos tais que $n \leq m-1$ se m é
ímpar e $n \leq 2m-1$ se m é par, então

a) Se n é par e $n \neq m-1$ então $(I-P)\theta_n = 0_n$.

b) Se n é ímpar e $n < 2m-1$ então uma função pertence a

$(I-P)\theta_n$ se e somente se tem a forma (1.19), satisfaz as con-
dições que definem θ_n e o valor médio de $a_{n,1}$, $Ma_{n,1}$, é
igual a zero.

c) Se $n = m-1$, n par, então os elementos de $(I-P)O_n$ tem as mesmas propriedades que definem O_n e satisfazem (1.20).

d) Se $n = 2m-1$, e m é par então os elementos de $(I-P)O_n$ satisfazem as condições que definem O_n , $Ma_{n,1}=0$ e

$$(1.23) \quad \int_0^{2\pi} [a_{n,2m-1}(s)\cos 2ms + b_{n,2m-1}(s)\sin 2ms] ds = 0.$$

PROVA:

Se n é par e $y(t, \phi)$ é um elemento de O_n que satisfaz (1.18) então $Py(\cdot, \phi)$ é dado por (1.21).

Consideremos a afirmação (a). Como $a_{n,2j}$ e $b_{n,2j}$ são funções π/m -harmônicas-ímpares, quando m é par elas são π -periódicas e então todas as integrais de (1.21) são zero. Isto mostra que $Py(\cdot, \phi) = 0$ neste caso.

Se m é ímpar, e $0 \leq j \leq n/2 < (m-1)/2$ temos que $2\pi/(2j+1) > 2\pi/m$ e então todas as integrais de (1.21) são zero pois $a_{n,2j}$ e $b_{n,2j}$ são $2\pi/m$ -periódicas.

Portanto, se m é par, $n \neq m-1$ e $y(t, \phi)$ pertence a O_n então $Py(\cdot, \phi) = 0$. Isto mostra que (a) vale.

A prova das outras três afirmações é análoga as do Lema 1.3. $\square$

OBSERVAÇÃO 1.2:

Nos lemas e teoremas deste capítulo admitimos que ϕ varia em $\mathbb{R}$. A fim de evitar considerarmos duas vezes a mesma solução, nos capítulos 3 e 4 restringiremos ϕ ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$.

LEMA 1.5:

F_n e O_n são fechados em $P_{2\pi \times 2\pi}$.

PROVA:

Suponhamos que n é par e que y está em F_n . Então y tem a forma (1.18).

É possível provar que

$$a_{n,2j}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t, \phi) \cos 2j(t-\phi) d\phi \quad e \quad b_{n,2j}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t, \phi) \sin 2j(t-\phi) d\phi$$

Segue desse fato que se uma sequência $y_k \in F_n$ converge em $P_{2\pi \times 2\pi}$ então seu limite está em F_n .

Se n é ímpar a prova é semelhante.

O caso O_n é análogo. $\square$

LEMA 1.6:

Se n, q são inteiros positivos tais que $1 \leq n+q \leq m-1$, $y \in F_n$ e $z \in F_q$ então $yz \in F_{n+q}$.

PROVA:

Sejam $n, q \leq m-1$ inteiros ímpares. Se $y \in F_n$ e $z \in F_q$ então existem funções $a_{n,2j+1}$, $a_{q,2k+1}$ pares e $2\pi/m$ -periódicas, $b_{n,2j+1}$, $b_{q,2k+1}$ ímpares e $2\pi/m$ -periódicas para $j = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$ e $k = 0, \dots, \frac{q-1}{2}$ tais que

$$y(t, \phi) = \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} [a_{n,2j+1}(t) \cos(2j+1)(t-\phi) + b_{n,2j+1}(t) \sin(2j+1)(t-\phi)] =$$

$$= a_{n,1}(t)\cos(t-\phi) + b_{n,1}(t)\sin(t-\phi) + \dots + a_{n,2j+1}(t)\cos(2j+1)(t-\phi) + \\ + b_{n,2j+1}(t)\sin(2j+1)(t-\phi) + \dots + a_{n,n}(t)\cos n(t-\phi) + b_{n,n}(t)\sin n(t-\phi)$$

$$z(t,\phi) = \sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}} [a_{q,2k+1}(t)\cos(2k+1)(t-\phi) + b_{q,2k+1}(t)\sin(2k+1)(t-\phi)] = \\ = a_{q,1}(t)\cos(t-\phi) + b_{q,1}(t)\sin(t-\phi) + \dots + a_{q,2k+1}(t)\cos(2k+1)(t-\phi) + \\ + b_{q,2k+1}(t)\sin(2k+1)(t-\phi) + \dots + a_{q,q}(t)\cos q(t-\phi) + b_{q,q}(t)\sin q(t-\phi)$$

Então,

$$y(t,\phi)z(t,\phi) = \frac{1}{2} \{ a_{n,1}(t)a_{q,1}(t)[1+\cos 2(t-\phi)] + a_{n,1}(t)b_{q,1}(t)\sin 2(t-\phi) + \dots + \\ + a_{n,1}(t)a_{q,2k+1}(t)[\cos(2k+2)(t-\phi) + \cos 2k(t-\phi)] + \\ + a_{n,1}(t)b_{q,2k+1}(t)[\sin(2k+2)(t-\phi) + \sin 2k(t-\phi)] + \dots + \\ + a_{n,1}(t)a_{q,q}(t)[\cos(q+1)(t-\phi) + \cos(q-1)(t-\phi)] + \\ + a_{n,1}(t)b_{q,q}(t)[\sin(q+1)(t-\phi) + \sin(q-1)(t-\phi)] + \dots + \\ + b_{n,1}(t)a_{q,1}(t)\sin 2(t-\phi) + b_{n,1}(t)b_{q,1}(t)[1-\cos 2(t-\phi)] + \dots + \\ + b_{n,1}(t)a_{q,2k+1}(t)[\sin(2k+2)(t-\phi) - \sin 2k(t-\phi)] - \\ - b_{n,1}(t)b_{q,2k+1}(t)[\cos(2k+2)(t-\phi) - \cos 2k(t-\phi)] + \\ + \dots + b_{n,1}(t)a_{q,q}(t)[\sin(q+1)(t-\phi) - \sin(q-1)(t-\phi)] - \\ - b_{n,1}(t)b_{q,q}(t)[\cos(q+1)(t-\phi) - \cos(q-1)(t-\phi)] + \\ + \dots +$$

$$\begin{aligned}
 & + a_{n,n}(t)a_{q,q}(t)[\cos(n+q)(t-\phi) + \cos(n-q)(t-\phi)] + \\
 & + a_{n,n}(t)b_{q,q}(t)[\sin(n+q)(t-\phi) - \sin(n-q)(t-\phi)] + \dots + \\
 & + b_{n,n}(t)a_{q,q}(t)[\sin(n+q)(t-\phi) + \sin(n-q)(t-\phi)] - \\
 & - b_{n,n}(t)b_{q,q}(t)[\cos(n+q)(t-\phi) - \cos(n-q)(t-\phi)] .
 \end{aligned}$$

Agrupando esses termos de forma conveniente, podemos escrever

$$y(t,\phi)z(t,\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\frac{n+q}{2}} [A_{n+q,2i}(t)\cos 2i(t-\phi) + B_{n+q,2i}(t)\sin 2i(t-\phi)]$$

onde $A_{n+q,2i}$, $B_{n+q,2i}$ são funções $2\pi/m$ -periódicas, $A_{n+q,2i}$ é par,

$B_{n+q,2i}$ é ímpar, para $i = 0, \dots, \frac{n+q}{2}$.

Logo, $yz \in F_{n+q}$.

Se n e q são pares ou, um deles é par e o outro é ímpar, a demonstração é semelhante. $\square$

COROLÁRIO 1.1:

Se q_i , n_i , β são inteiros positivos, $y_i \in F_{n_i}$ para $i = 1, \dots, \beta$ e $1 \leq n = \sum_{i=1}^{\beta} q_i n_i \leq m-1$, então $\prod_{i=1}^{\beta} y_i^{q_i} \in F_n$.

LEMA 1.7:

Sejam n , q inteiros positivos tais que $1 \leq n+q \leq m-1$ se m é ímpar, $1 \leq n+q \leq 2m-1$ se m é par. Temos que

- i) Se $y \in \mathcal{O}_n$ e $z \in \mathcal{O}_q$ então $yz \in \tilde{\mathcal{O}}_{n+q}$.
- ii) Se $y \in \mathcal{O}_n$ e $z \in \tilde{\mathcal{O}}_q$ então $yz \in \mathcal{O}_{n+q}$.
- iii) Se $y \in \tilde{\mathcal{O}}_n$ e $z \in \tilde{\mathcal{O}}_q$ então $yz \in \tilde{\mathcal{O}}_{n+q}$.

PROVA:

Semelhante a do Lema 1.6.

COROLÁRIO 1.2:

Se n, q são inteiros positivos tais que $nq \leq m-1$ se m é im par e $nq \leq 2m-1$ se m é par e $y \in \mathcal{O}_n$ então

- i) $y^q \in \tilde{\mathcal{O}}_{qn}$ se q é par.
- ii) $y^q \in \mathcal{O}_{qn}$ se q é ímpar.

COROLÁRIO 1.3:

Se n_i, β, m são inteiros positivos, $y_i \in \mathcal{O}_{n_i}$ para $i=1, \dots, \beta$, $n = \sum_{i=1}^{\beta} q_i n_i$, $1 \leq n \leq m-1$ se m é ímpar, $1 \leq n \leq 2m-1$ se m é par então

- i) $\prod_{i=1}^{\beta} y_i^{q_i} \in \mathcal{O}_n$ se $\sum_{i=1}^{\beta} q_i$ é ímpar.
- ii) $\prod_{i=1}^{\beta} y_i^{q_i} \in \tilde{\mathcal{O}}_n$ se $\sum_{i=1}^{\beta} q_i$ é par.

Os lemas 1.8 e 1.11, a seguir, desempenham um papel importante neste trabalho.

LEMA 1.8:

Se m e n são inteiros positivos com $m \geq 2$, $n \leq m-1$, e $f \in (I-P)F_n$ então Kf , isto é a função $(t, \phi) \rightarrow Kf(\cdot, \phi)(t)$, pertence a $(I-P)F_n$.

PROVA:

Suponhamos que n é par.

Nosso objetivo é provar que existem coeficientes $a_{n,2j}, b_{n,2j}$ tais que uma função $x(t)$ que satisfaz (1.18) é uma solução de $\ddot{x} + x = f(t, \phi)$

e $x \in (I-P)F_n$. Como $Kf(\cdot, \phi)$ é a única solução 2π -periódica que pertence a imagem de $I-P$, seguirá que $x = Kf(\cdot, \phi)$.

Se x satisfaz (1.18), substituindo em $\ddot{x} + x = f(t, \phi)$, onde $f(t, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n/2} [A_{n,2j}(t) \cos 2j(t-\phi) + B_{n,2j}(t) \sin 2j(t-\phi)]$ e igualando coeficientes, obtemos o sistema equivalente:

$$\ddot{a}_{n,2j} - (4j^2 - 1)a_{n,2j} + 4j\dot{b}_{n,2j} = A_{n,2j}(t)$$

$$\ddot{b}_{n,2j} - (4j^2 - 1)b_{n,2j} - 4j\dot{a}_{n,2j} = B_{n,2j}(t)$$

para $j = 0, \dots, n/2$.

Fazendo $y_1 = a_{n,2j}$, $\dot{y}_1 = y_2$, $y_3 = b_{n,2j}$, $\dot{y}_3 = y_4$ e $y = \text{col}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, obtemos a equação equivalente

$$\dot{y} = C_j y + F_j(t)$$

onde $F_j = \text{col}(0, A_{n,2j}, 0, B_{n,2j})$ e

$$(1.24) \quad C_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4j^2 - 1 & 0 & 0 & -4j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4j & 4j^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para $j = 0, \dots, n/2$.

Os autovalores de C_j são $\pm(2j+1)i$ e $\pm(2j-1)i$.

Se m é par o sistema $\dot{y} = C_j y$ é não crítico em relação a $P_{2\pi/m}$, isto é, a única solução $2\pi/m$ -periódica do sistema é a função nula. O mesmo ocorre se m é ímpar e $0 \leq j < n/2 \leq (m-1)/2$ ou $0 \leq j \leq n/2 < (m-1)/2$. Se $j = n/2 = (m-1)/2$ o sistema $\dot{y} = C_j y$ é crítico em relação a $P_{2\pi/m}$.

Nos casos não críticos a equação $\dot{y} = C_j y + F_j(t)$ tem uma única solução $2\pi/m$ -periódica $y(t) = \text{col}(y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$. Como $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(y_1(-t), -y_2(-t), -y_3(-t), y_4(-t))$ também é uma solução $2\pi/m$ -periódica segue que $y_1(t)$ é par e $y_3(t)$ é ímpar em t .

Para $j = n/2 = (m-1)/2$ temos um caso crítico. Seguindo Hale [5, p. 275] temos que

$$(1.25) \quad \phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \cos mt & \sin mt \\ -m \sin mt & m \cos mt \\ \sin mt & -\cos mt \\ m \cos mt & m \sin mt \end{bmatrix}$$

é uma matriz cujas colunas constituem uma base para o espaço das soluções $2\pi/m$ -periódicas de $\dot{y} = C_j y$, e

$$(1.26) \quad \psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -(m-2) \sin mt & \cos mt & (m-2) \cos mt & \sin mt \\ (m-2) \cos mt & \sin mt & (m-2) \sin mt & -\cos mt \end{bmatrix}$$

é uma matriz cujas linhas constituem uma base para o espaço das soluções $2\pi/m$ -periódicas da equação adjunta, $\dot{z} = -z C_j$.

Definindo projeções $\bar{P}, \bar{Q}$ como em Hale [5, p. 276, (2.5)], obtemos para as funções $2\pi/m$ -periódicas $G(t) = \text{col}(G_1(t), G_2(t), G_3(t), G_4(t))$:

$$(\bar{Q}G)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi'(t) \text{col}(\bar{A}, \bar{B})$$

onde,

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = \frac{m}{2\pi[(m-2)^2+1]} \int_0^{2\pi/m} \begin{bmatrix} -(m-2)G_1(s) \sin ms + G_2(s) \cos ms + (m-2)G_3(s) \cos ms + G_4(s) \sin ms \\ (m-2)G_1(s) \cos ms + G_2(s) \sin ms + (m-2)G_3(s) \sin ms - G_4(s) \cos ms \end{bmatrix} ds$$

$$(\bar{P}G)(t) = \phi(t) \text{col}(A, B), \text{ onde}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{m}{2\pi(1+m^2)} \int_0^{2\pi/m} \begin{bmatrix} G_1(s) \cos ms - mG_2(s) \sin ms + G_3(s) \sin ms + mG_4(s) \cos ms \\ G_1(s) \sin ms + mG_2(s) \cos ms - G_3(s) \cos ms + mG_4(s) \sin ms \end{bmatrix} ds$$

$$Pf(\cdot, \phi) = 0 \text{ implica que } \bar{Q}\bar{F}_j = 0, \text{ para } j = (m-1)/2.$$

Então a equação $\dot{y} = C_j y + F_j(t)$ tem uma única solução $2\pi/m$ -periódica $y(t)$ tal que $(\bar{P}y)(t) \equiv 0$.

Se $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(y_1(-t), -y_2(-t), -y_3(-t), y_4(-t))$ então $z(t)$ também é solução da mesma equação com $(\bar{P}z)(t) \equiv 0$. Isso implica que $y_1(t)$ é par e $y_3(t)$ é ímpar.

As informações acima fornecem uma solução $x(t)$ de $\ddot{x} + x = f(t, \phi)$, e a condição $\bar{P}y = 0$ implica que $Px = 0$. Isso mostra que $x \in (I-P)F_n$ e que $x(t) = Kf(\cdot, \phi)(t)$.

O procedimento acima, utilizado para tratar os casos crítico e não crítico será repetido diversas vezes neste teorema, mas não repetiremos os detalhes.

Consideremos agora o caso n ímpar. Seguindo as idéias acima, se

$$f(t, \phi) = \sum_{j=0}^{(n-1)/2} [A_{n,2j+1}(t) \cos(2j+1)(t-\phi) + B_{n,2j+1}(t) \sin(2j+1)(t-\phi)]$$

procuramos uma solução $x(t)$ que satisfaz (1,19) e obtemos a equação

$$\dot{y} = C_j y + F_j(t)$$

onde $y = \text{col}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $y_1 = a_{n,2j+1}$, $\dot{y}_1 = y_2$, $y_3 = b_{n,2j+1}$, $\dot{y}_3 = y_4$,

$$(1.27) \quad C_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (2j+1)^2-1 & 0 & 0 & -2(2j+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2(2j+1) & (2j+1)^2-1 & 0 \end{bmatrix}$$

e os autovalores de C_j são $\lambda = \pm 2ji$, $\lambda = \pm 2(j+1)i$ para $j = 0, 1, \dots, (n-1)/2$.

Os casos críticos são $j = 0$, para todo m e $j = (m-2)/2$, quando $n = m-1$ e m é par. Todos os outros casos são não críticos.

Se $j = 0$ e $m = 2$ então as colunas (respectivamente linhas) de $\phi(t)$ (respectivamente $\psi(t)$) formam uma base para o espaço das soluções π -periódicas de $\dot{y} = C_0 y$ (respectivamente $\dot{z} = -z C_0$), onde

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 0 & -1 & \sin 2t & -\cos 2t \\ 0 & 0 & 2\cos 2t & 2\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & (-1/2)\sin 2t & 0 & (1/2)\cos 2t \\ 0 & (1/2)\cos 2t & 0 & (1/2)\sin 2t \end{bmatrix}$$

As projeções consideradas nesse caso, para $G = \text{col}(G_1, G_2, G_3, G_4)$, função π -periódica, são:

$$(\overline{PG})(t) = \begin{bmatrix} MG_1 + A \cos 2t + B \sin 2t \\ -2A \sin 2t + 2B \cos 2t \\ MG_3 + A \sin 2t - B \cos 2t \\ 2A \cos 2t + 2B \sin 2t \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \frac{1}{5\pi} \int_0^\pi [G_1(s) \cos 2s - 2G_2(s) \sin 2s + G_3(s) \sin 2s + 2G_4(s) \cos 2s] ds$$

$$B = \frac{1}{5\pi} \int_0^\pi [G_1(s) \sin 2s + 2G_2(s) \cos 2s - G_3(s) \cos 2s + 2G_4(s) \sin 2s] ds$$

$$(\overline{QG})(t) = \frac{4}{\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \int_0^\pi [G_1(s) - \frac{1}{2} G_4(s)] ds \\ \frac{1}{10} \int_0^\pi [\frac{1}{2} G_2(s) + G_3(s)] ds - \frac{\overline{A}}{2} \sin 2t + \frac{\overline{B}}{2} \cos 2t \\ \frac{1}{5} \int_0^\pi [\frac{1}{2} G_2(s) + G_3(s)] ds \\ - \frac{1}{10} \int_0^\pi [G_1(s) - \frac{1}{2} G_4(s)] ds + \frac{\overline{A}}{2} \cos 2t + \frac{\overline{B}}{2} \sin 2t \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \begin{bmatrix} -G_2(s) \sin 2s + G_4(s) \cos 2s \\ G_2(s) \cos 2s + G_4(s) \sin 2s \end{bmatrix} ds$$

Se $i = 0$ e $m > 2$ consideramos

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{P}G)(t) = \begin{bmatrix} MG_1 \\ 0 \\ MG_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{Q}G)(t) = \frac{2m}{5\pi} \int_0^{2\pi/m} \begin{bmatrix} G_1(s) - \frac{1}{2} G_4(s) \\ \frac{1}{4} G_2(s) + \frac{1}{2} G_3(s) \\ \frac{1}{2} G_2(s) + G_3(s) \\ -\frac{1}{2} G_1(s) + \frac{1}{4} G_4(s) \end{bmatrix} ds$$

O caso $j = (m-2)/2$, $n = m-1$ pode ser tratado como o caso n par, $n = m-1$ e $j = (m-1)/2$ descrito acima, com as mesmas projeções. $\square$

Seja $\mathcal{O}H_T$ o espaço das funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(t+T) = -f(t)$ para todo t em $\mathbb{R}$ munido da norma do sup. Seus elementos serão chamados funções T -harmônicas-ímpares.

Indiquemos por P_T o espaço das aplicações T -periódicas.

LEMA 1.9:

Suponha que A está em P_T . A equação $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ tem uma solução Kf em OH_T para toda $f \in OH_T$ se e somente se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é não crítico em relação a OH_T . Além disso, se $\dot{x} = A(t)x$ é não crítico em relação a OH_T então Kf é a única solução de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ em OH_T e K é operador linear e contínuo em OH_T .

Usando o mesmo procedimento de Hale [5, p.275] é possível definir projeções $\bar{P}$, $\bar{Q}$ em OH_T e temos o seguinte lema:

LEMA 1.10:

Se f é um elemento de OH_T , então uma condição necessária e suficiente para que a equação $\dot{x} = B(t)x + f(t)$, com B em P_T tenha uma solução em OH_T é que $\bar{Q}f = 0$. Se $\bar{Q}f = 0$ então existe uma única solução em OH_T , Kf , tal que $\bar{P}Kf = 0$. Além disso, $K(I-\bar{Q}): OH_T \rightarrow OH_T$ é operador linear contínuo.

Os dois últimos lemas são utilizados na prova do lema seguinte, que é o análogo ao Lema 1.8 para $(I-P)O_n$.

LEMA 1.11:

Se m , n são inteiros positivos, com $m \geq 2$, $n \leq m-1$ se m é ímpar, $n \leq 2m-1$ se m é par e se $f \in (I-P)O_n$ então Kf , isto é, a função $(t, \phi) \rightarrow Kf(\cdot, \phi)(t)$, pertence a $(I-P)O_n$.

PROVA:

Suponhamos n par.

Seguindo o procedimento do Lema 1.8, se

$$f(t, \phi) = \sum_{j=0}^{n/2} [A_{n,2j}(t) \cos 2j(t-\phi) + B_{n,2j}(t) \sin 2j(t-\phi)]$$

procuramos uma solução $x(t)$ em $(I-P)\mathcal{O}_n$ e obtemos

$$\dot{y} = C_j y + F_j(t)$$

onde C_j é dada por (1.24), $y = \text{col}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $y_1 = a_{n,2j}$, $\dot{y}_1 = y_2$, $y_3 = b_{n,2j}$ e $\dot{y}_3 = y_4$, para $j = 0, \dots, n/2$.

Como os autovalores de C_j são $\pm(2j+1)i$ e $\pm(2j-1)i$, o caso crítico é $j = \frac{m-1}{2}$ quando $n = m-1$ e m é ímpar. Todos os outros casos são não críticos.

Para os casos não críticos, o Lema 1.9 garante a existência de uma única solução da equação $\dot{y} = C_j y + F_j(t)$ em $\mathcal{O}H_{\pi/m}$. Se

$y(t) = \text{col}(y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ é a solução e

$z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(y_1(-t), -y_2(-t), -y_3(-t), y_4(-t))$ é também uma solução em $\mathcal{O}H_{\pi/m}$ então $y_1(t)$ é par e $y_3(t)$ é ímpar.

Se $j = n/2 = (m-1)/2$ então as colunas (resp. linhas) de $\phi(t)$ (resp. $\Psi(t)$), dadas por (1.25) e (1.26) constituem uma base para o espaço das soluções harmônicas-ímpares de $\dot{y} = C_{(m-1)/2} y$ (resp. $\dot{z} = -z C_{(m-1)/2}$).

Para uma função $G = \text{col}(G_1, G_2, G_3, G_4)$ em $\mathcal{O}H_{\pi/m}$ as projeções a serem consideradas são

$$(\bar{P}G)(t) = \begin{bmatrix} A \cos mt + B \sin mt \\ -m A \sin mt + m B \cos mt \\ A \sin mt - B \cos mt \\ m A \cos mt + m B \sin mt \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{m}{\pi(1-m^2)} \int_0^{\pi/m} \begin{bmatrix} G_1(s) \cos ms - mG_2(s) \sin ms + G_3(s) \sin ms + mG_4(s) \cos ms \\ G_1(s) \sin ms + mG_2(s) \cos ms - G_3(s) \cos ms + mG_4(s) \sin ms \end{bmatrix} ds$$

$$(\bar{Q}G)(t) = \begin{bmatrix} (m-2)\bar{A} \sin mt - (m-2)\bar{B} \cos mt \\ \bar{A} \cos mt + \bar{B} \sin mt \\ (m-2)\bar{A} \cos mt + (m-2)\bar{B} \sin mt \\ -\bar{A} \sin mt + \bar{B} \cos mt \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = \frac{m}{\pi[(m-2)^2+1]} \int_0^{\pi/m} \begin{bmatrix} -(m-2)G_1(s) \sin ms + G_2(s) \cos ms + (m-2)G_3(s) \cos ms + G_4(s) \sin ms \\ (m-2)G_1(s) \cos ms + G_2(s) \sin ms + (m-2)G_3(s) \sin ms - G_4(s) \cos ms \end{bmatrix} ds$$

Para $j = (m-1)/2$ temos $Pf(\cdot + \phi) = 0$ implica

$$\bar{Q}F_j = 0.$$

Segue pelo Lema 1.10 que a equação $\dot{y} = C_j y + F_j(t)$ tem uma única solução $y(t)$ em $OH_{\pi/m}$ tal que $(\bar{P}y)(t) \equiv 0$.

Se $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(y_1(-t), -y_2(-t), -y_3(-t), y_4(-t))$ então $z(t)$ também é solução da equação em $OH_{\pi/m}$ e $(\bar{P}z)(t) \equiv 0$. Isso implica que $y_1(t)$ é par e $y_3(t)$ é ímpar.

Obtemos assim uma solução $x(t)$ de $\ddot{x} + x = f(t, \phi)$ e a condição $\bar{P}y = 0$ garante que $Px = 0$. Logo, $x \in (I-P)O_n$ e $x(t) = Kf(\cdot, \phi)(t)$.

Resta analisar o caso n ímpar. Se

$$f(t, \phi) = \sum_{j=0}^{(n-1)/2} [A_{n,2j+1}(t) \cos(2j+1)(t-\phi) + B_{n,2j+1}(t) \sin(2j+1)(t-\phi)]$$

procuramos uma solução $x(t)$ que satisfaz (1.19) e obtemos a equação
 $\dot{y} = C_j y + F_j(t)$ onde $y = \text{col}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $y_1 = a_{n,2j+1}$, $\dot{y}_1 = y_2$,
 $y_3 = b_{n,2j+1}$, $\dot{y}_3 = y_4$ e C_j é dada por (1.27).

Os casos críticos são $j = 0$ para todo m e $j = m-1$ quando
 $n = 2m-1$ e m é par.

Seja $G = \text{col}(G_1, G_2, G_3, G_4)$ uma função π/m -periódica.

Se $j = 0$ definimos

$$\bar{P}G = \begin{bmatrix} MG_1 \\ 0 \\ MG_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}G = \frac{4m}{5\pi} \int_0^{\pi/m} \begin{bmatrix} G_1(s) - \frac{1}{2} G_4(s) \\ \frac{1}{4} G_2(s) + \frac{1}{2} G_3(s) \\ \frac{1}{2} G_2(s) + G_3(s) \\ -\frac{1}{2} G_1(s) + \frac{1}{4} G_4(s) \end{bmatrix} ds$$

Se $j = (n-1)/2 = m-1$, definimos

$$(\bar{P}G)(t) = \begin{bmatrix} A \cos 2mt + B \sin 2mt \\ -2mA \sin 2mt + 2mB \cos 2mt \\ A \sin 2mt - B \cos 2mt \\ 2mA \cos 2mt + 2mB \sin 2mt \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{m}{\pi(1+4m^2)} \int_0^{\pi/m} \begin{bmatrix} G_1(s)\cos 2ms - 2mG_2(s)\sin 2ms + G_3(s)\sin 2ms + 2mG_4(s)\cos 2ms \\ G_1(s)\sin 2ms + 2mG_2(s)\cos 2ms - G_3(s)\cos 2ms + 2mG_4(s)\sin 2ms \end{bmatrix} ds$$

e

$$(\overline{QG})(t) = \begin{bmatrix} -2(m-1)\overline{A}\sin 2mt + 2(m-1)\overline{B}\cos 2mt \\ \overline{A}\cos 2mt + \overline{B}\sin 2mt \\ 2(m-1)\overline{A}\cos 2mt + 2(m-1)\overline{B}\sin 2mt \\ \overline{A}\sin 2mt - \overline{B}\cos 2mt \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix} = \frac{m}{\pi[4(m-1)^2+1]} \int_0^{\pi/m} \begin{bmatrix} -2(m-1)G_1(s)\sin 2ms + G_2(s)\cos 2ms + 2(m-1)G_3(s)\cos 2ms + G_4(s)\sin 2ms \\ 2(m-1)G_1(s)\cos 2ms + G_2(s)\sin 2ms + 2(m-1)G_3(s)\sin 2ms - G_4(s)\cos 2ms \end{bmatrix} ds \quad \square$$

LEMA 1.12:

Seja X um espaço de Banach e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $\xi: I \rightarrow X$ e $g: X \rightarrow X$ são funções com derivadas contínuas até ordem n e $H = g \circ \xi$ então, para $n \geq 1$, $\frac{\partial^n H}{\partial r^n}(r)$ pode ser escrito como uma soma de termos da forma

$$\gamma_i \frac{\partial^i g}{\partial u^i}(\xi(r)) \left(\frac{d^{\alpha_1^i} \xi}{dr^{\alpha_1^i}} \right)^{\beta_1^i} \dots \left(\frac{d^{\alpha_{k_i}^i} \xi}{dr^{\alpha_{k_i}^i}} \right)^{\beta_{k_i}^i}$$

onde $\alpha_1^i \beta_1^i + \dots + \alpha_{k_i}^i \beta_{k_i}^i = n$, $\beta_1^i + \dots + \beta_{k_i}^i = i$ e γ_i são constantes, para $i = 1, \dots, n$. Além disso, se $i > 1$ então $\alpha_j^i < n$ e $\frac{\partial g}{\partial u}(\xi(r)) \frac{d^n \xi}{dr^n}$ é o único termo que contém $\frac{d^n \xi}{dr^n}$.

Os dois próximos teoremas serão muito importantes na prova dos nossos principais resultados.

TEOREMA 1.1:

Suponhamos hipóteses (H_1) e (H_2) satisfeitas. Se $1 \leq n \leq m-1$ então $\frac{\partial^n w^*}{\partial r^n}(0, \cdot, p, \mu)(\cdot)$ pertence a $(I-P)F_n$. Além disso, tem a forma

(1.18) ou (1.19) para n par ou ímpar, respectivamente, com coeficientes $a_{nk}(t) = a_{nk}(p, \mu)(t)$ e $b_{nk}(t) = b_{nk}(p, \mu)(t)$ independentes de ϕ .

PROVA:

Faremos a prova por indução.

Se $n = 1$ então $\frac{\partial w^*}{\partial r}(0, \cdot, p, \mu)(\cdot)$ é a única solução de $Hy = y$, onde

$$(Hy)(t, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(\cdot), p)(y + \cos(\cdot - \phi)) \right](t)$$

é uma contração uniforme em relação a p, μ para (p, μ) em uma vizinhança suficientemente pequena de $(0, 0)$.

A demonstração de que H é contração uniforme depende essencialmente do fato que $K(I-P) : P_{2\pi \times 2\pi} \rightarrow P_{2\pi \times 2\pi}$ é linear limitado, que $g(u, p) = O(|pu| + |u|^3)$ e que $w^*(0, \phi, 0, 0) \equiv 0$.

Segue pelos Lemas 1.3 e 1.8 que se $y \in (I-P)F_1$ então $Hy \in (I-P)F_1$ e portanto H mantém $(I-P)F_1$ invariante.

O Lema 1.5 garante que F_1 é fechado e portanto $(I-P)F_1$ é subespaço de Banach de $P_{2\pi \times 2\pi}$.

O Teorema do Ponto Fixo garante que o único ponto fixo de H está em $(I-P)F_1$.

Suponhamos agora que o resultado é válido até ordem $n-1$. Provaremos que é válido para n .

Temos que $y = \frac{\partial^n w^*}{\partial r^n}(0, \cdot, p, \mu)(\cdot)$ é a única solução de $y = Hy$

onde

$$[Hy(\cdot, \phi)](t) \stackrel{\text{def}}{=} K(I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu), p)y + T(\phi, p, \mu) \right](t)$$

e $T(\phi, p, \mu)$, pelo Lema 1.12, pode ser escrito como uma soma de termos da forma

$$\gamma_i \frac{\partial^i g}{\partial u^i}(w^*, p) (\cos(\cdot - \phi) + \partial w^* / \partial r) \beta_1^i (\partial^{\alpha_2^i} w^* / \partial r^{\alpha_2^i}) \beta_2^i \dots (\partial^{\alpha_{k_i}^i} w^* / \partial r^{\alpha_{k_i}^i}) \beta_{k_i}^i$$

onde $i > 1$ e $\partial^\ell w^* / \partial r^\ell$ está indicando $\frac{\partial^\ell w^*}{\partial r^\ell}(0, \phi, p, \mu)$ para

$\ell = 0, 1, \dots, \alpha_{k_i}^i$. Além disso, $\alpha_j^i < n, \alpha_1^i \beta_1^i + \dots + \alpha_{k_i}^i \beta_{k_i}^i = n$ e

$\beta_1^i + \dots + \beta_{k_i}^i = 1$, para $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, n$.

Como antes, H é uma contração uniforme em $P_{2\pi \times 2\pi}$ para (p, μ) numa vizinhança suficientemente pequena da origem.

Temos pela Lema 1.2, Lema 1.6 e Corolário 1.1 que $T(\phi, p, \mu) \in F_n$. Logo, se $y \in (I-P)F_n$ então $Hy \in (I-P)F_n$ e portanto $(I-P)F_n$ é invariante segundo H .

Como, pelo Lema 1.5, F_n é fechado em $P_{2\pi \times 2\pi}$, temos que $(I-P)F_n$ é fechado em $P_{2\pi \times 2\pi}$ e portanto, um subespaço de Banach de $P_{2\pi \times 2\pi}$.

Segue pelo Teorema do Ponto Fixo que o único ponto fixo de H está em $(I-P)F_n$. $\square$

TEOREMA 1.2:

Suponhamos hipóteses (OH_1) e (OH_2) satisfeitas. Se $1 \leq n \leq m-1$ para m ímpar e $1 \leq n \leq 2m-1$ para m par então $\frac{\partial w^*}{\partial r^n}(0, \cdot, p, \mu)(\cdot)$ pertence a $(I-P)O_n$. Além disso, tem a forma (1.18) ou (1.19) para n par ou ímpar, respectivamente, com coeficientes $a_{nk}(t) = a_{nk}(p, \mu)(t)$ e $b_{nk}(t) = b_{nk}(p, \mu)(t)$ independentes de ϕ .

PROVA:

Análoga a do Teorema 1.1.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DE BIFURCAÇÃO NO CASO $2\pi/m$ -PERIÓDICO

Analisaremos agora as equações de bifurcação (1.6) supondo que as hipóteses (H_1) e (H_2) estão satisfeitas. Usaremos os resultados obtidos, no Capítulo 1, para a solução da equação auxiliar.

LEMA 2.1:

Se as hipóteses (H_1) e (H_2) estão satisfeitas, então

- (i) $G(r, \phi, p, 0) \equiv 0$.
- (ii) Se m é par então F e G são funções ímpares em r e pares em μ .

PROVA:

A primeira parte segue de (1.10) e a segunda parte, de (1.13) e (1.14). $\square$

TEOREMA 2.1:

Suponhamos (H_1) e (H_2) satisfeitas. Para (r, p, μ) numa vizinhança pequena da origem,

$$G(r, \phi, p, \mu) = \begin{cases} r^{m-1} \mu \sin m\phi(\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ r^{m-1} \mu^2 \sin m\phi(\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

onde $\rho = \rho(f, g(\cdot, 0))$ é uma constante que independe de r, ϕ, p, μ e ... indica termos da ordem $O(|p| + |\mu| + |r|)$ quando (r, p, μ) tende a $(0, 0, 0)$.

PROVA:

Provaremos que

$$\frac{\partial^{\ell} G}{\partial r^{\ell}}(0, \phi, p, \mu) = 0 \quad \ell = 1, 2, \dots, m-2$$

Se $H(r, s) \stackrel{\text{def}}{=} g(r \cos(s-\phi) + w^*(r, \phi, p, \mu)(s), p)$ então

$$\frac{\partial^{\ell} G}{\partial r^{\ell}}(0, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{\ell} H}{\partial r^{\ell}}(0, s) \sin(s-\phi) ds$$

Temos pelo Lema 1.12 que $\frac{\partial^{\ell} H}{\partial r^{\ell}}(0, s)$ é uma soma de termos da forma

$$\gamma_i \frac{\partial^i}{\partial u^i} (w^*, p) (\cos(\cdot - \phi) + \partial w^* / \partial r)^{\beta_1^i} (\partial^{\alpha_2^i} w^* / \partial r^{\alpha_2^i})^{\beta_2^i} \dots (\partial^{\alpha_{k_i}^i} w^* / \partial r^{\alpha_{k_i}^i})^{\beta_{k_i}^i}$$

onde $\frac{\partial^q w^*}{\partial r^q} = \frac{\partial^q w^*}{\partial r^q}(0, \phi, p, \mu)(s), \quad q = 0, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{k_i}^i,$

$$\alpha_1^i \beta_1^i + \dots + \alpha_{k_i}^i \beta_{k_i}^i = \ell \quad \text{e} \quad \beta_1^i + \dots + \beta_{k_i}^i = i$$

Se ℓ é par, segue pelo Corolário 1.1 e Teorema 1.1 que

$$\frac{\partial^{\ell} H}{\partial r^{\ell}}(0, s) \text{ é uma soma de termos de } F_{\ell}, \text{ e portanto } \frac{\partial^{\ell} G}{\partial r^{\ell}}(0, \phi, p, \mu) \text{ é uma so-}$$

ma de integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} [a(s) \cos 2j(s-\phi) + b(s) \sin 2j(s-\phi)] \sin(s-\phi) ds$$

onde $0 \leq j \leq \ell/2 < (m-1)/2$ e a, b são funções $2\pi/m$ -periódicas, a é

par e b é ímpar.

Essa integral pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \{ -\text{sen}(2j+1)\phi \int_0^{2\pi} [a(s)\cos(2j+1)s + b(s)\text{sen}(2j+1)s] ds + \\ + \text{sen}(2j-1)\phi \int_0^{2\pi} [a(s)\cos(2j-1)s + b(s)\text{sen}(2j-1)s] ds \}.$$

Como $j < (m-1)/2$ temos $(2j+1) < m$ e, portanto, as integrais acima se anulam, pois a e b são funções $2\pi/m$ -periódicas.

O caso ℓ ímpar, $\ell < m-1$ é análogo.

A mesma idéia mostra que $\frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}} G(0, \phi, p, \mu)$ é soma de integrais da forma

$$- \frac{\text{sen} m\phi}{2} \int_0^{2\pi} [a(s)\cos ms + b(s)\text{sen} ms] ds$$

onde $a(s) = a(p, \mu)(s)$, $b(s) = b(p, \mu)(s)$ são funções $2\pi/m$ -periódicas de s, a par e b ímpar em s.

Temos por (1.9) que $w^*(r, k\pi/m, p, \mu)(t+k\pi/m)$ é par em t e decorre desse fato que $G(r, k\pi/m, p, \mu) \equiv 0$.

Segue do Lema 2.1 que $G(r, \phi, p, \mu) = 0(|\mu|)$ se m é ímpar e $G(r, \phi, p, \mu) = 0(\mu^2)$ se m é par.

Para completar a prova do teorema basta utilizar os resultados acima. $\square$

TEOREMA 2.2:

Se (H_1) e (H_2) estão satisfeitas e $\rho \neq 0$ então as únicas soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) são tais que $u(t+k\pi/m)$ é par em

t, para algum k, $-\pi/2 < k \leq \pi/2$, (p, μ) pequeno e $\mu \neq 0$.

PROVA:

Como $G(r, \phi, p, \mu) = r^{m-1} \mu \sin m\phi (\rho + \dots)$ se m é ímpar, temos que $G=0$, $\mu \neq 0$ implica $r=0$ ou $\sin m\phi = 0$. Mas,

$u(t) = r \cos(t-\phi) + w^*(r, \phi, p, \mu)(t)$ e segue portanto pelo Lema 1.2 que $u(t)$ é par se $r=0$. Se $\sin m\phi = 0$ então $\phi = k\pi/m$, $-\pi/2 < k \leq \pi/2$. Segue ainda pelo Lema 1.2 que $u(t+k\pi/m) = r \cos t + w^*(r, k\pi/m, p, \mu)(t+k\pi/m)$ é par em t.

Se m é par a prova é análoga. $\square$

Suporemos a seguir que $\rho \neq 0$.

Analisaremos a primeira equação de bifurcação (1.6.a)

$$F(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + w^*(r, \phi, p, \mu)(s+\phi), p) \cos s ds = 0.$$

Como $F(0, \phi, p, \mu) \equiv 0$, considerando

$g(u, p) = pu + \alpha_3 u^3 + O(|pu^3| + |u^5|)$ e efetuando alguns cálculos obtemos para $m \geq 3$,

$$F(r, \phi, p, \mu) = r(p + \frac{3}{4} \alpha_3 r^2 + 3\alpha_3 \eta r \mu + 3\alpha_3 \lambda \mu^2 + \dots) = 0$$

$$\text{onde } \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(t)]^2 dt \quad \text{e} \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos 3\phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} (Kf)(t) \cos 3t dt$$

e ... indica termos de ordem superior.

Temos que $r=0$ é solução de $F=0$ e $u(t) = w^*(0, \phi, p, \mu)(t)$ é $2\pi/m$ -periódica em t.

A fim de encontrar outras soluções, consideramos $J \stackrel{\text{def}}{=} F/r$.

Para achar as raízes múltiplas de $J=0$ consideramos o sistema

$$J(r, \phi, p, \mu) = p + \frac{3}{4} \alpha_3 r^2 + 3\alpha_3 \eta r \mu + 3\alpha_3 \lambda \mu^2 + \dots = 0$$

$$J_r(r, \phi, p, \mu) = \frac{3}{2} \alpha_3 r + 3\alpha_3 \eta \mu + \dots = 0$$

$$\text{Como } \det \frac{\partial(J, J_r)}{\partial(p, r)} = \frac{3}{2} \alpha_3 \quad \text{para } r = p = \mu = 0,$$

se $\alpha_3 \neq 0$ segue pelo Teorema das Funções Implícitas que p e r podem ser determinados em função de μ em uma vizinhança pequena da origem, para cada ϕ fixado.

A análise no caso $m=3$ difere da análise no caso $m>3$.

Se $m=3$ então $\phi=0$ e $\phi = \pm\pi/3$.

Segue por (1.15) que $F(r, -\pi/3, p, \mu) = F(r, \pi/3, p, \mu)$, o que implica que a equação de bifurcação é a mesma para $\phi = \pi/3$ e $\phi = -\pi/3$.

Por (1.16), $F(-r, \pi/3, p, \mu) = -F(r, 0, p, \mu)$ e portanto a curva de bifurcação $p = p(\mu)$ para $\phi = 0$ é a mesma que para $\phi = \pi/3$, enquanto $r = r(\mu)$ muda de sinal.

Para $\phi = 0$, a curva de bifurcação é dada por $p = 3\alpha_3(\eta^2 - \lambda)\mu^2 + O(|\mu|^3)$. O valor de r onde a bifurcação ocorre é dado por $r = -2\eta\mu + O(\mu^2)$.

Se $m > 3$ temos que $J_r(0, \phi, p, \mu) \equiv 0$.

De fato, pelo Teorema 1.1,

$$\begin{aligned} J_r(0, \phi, p, \mu) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) (\cos(t-\phi) + \frac{\partial w^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t))^2 \cos(t-\phi) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu)(t) \cos(t-\phi) dt \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) [1 + a_{11}(t)] \cos(t - \phi) + b_{11}(t) \sin(t - \phi) \right\}^2 \cos(t - \phi) dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) (a_{20}(t) + a_{22}(t) \cos 2(t - \phi) + b_{22}(t) \sin 2(t - \phi)) \cos(t - \phi) dt \} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) (1 + a_{11}(t))^2 \frac{\cos 3(t - \phi) + 3 \cos(t - \phi)}{4} dt + \right. \\
&+ \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) (1 + a_{11}(t)) b_{11}(t) \frac{\sin 3(t - \phi) + \sin(t - \phi)}{2} dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) b_{11}^2(t) \frac{\cos(t - \phi) - \cos 3(t - \phi)}{4} dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) a_{20}(t) \cos(t - \phi) dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) a_{22}(t) \frac{\cos 3(t - \phi) + \cos(t - \phi)}{2} dt + \\
&+ \left. \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) b_{22}(t) \frac{\sin 3(t - \phi) + \sin(t - \phi)}{2} dt \right\}
\end{aligned}$$

Temos por (1.8) e pelo Teorema 1.1 que $w^*(0, \phi, p, \mu)(t)$, $a_{ij}(t)$ e $b_{ij}(t)$ são $2\pi/m$ -periódicas. Portanto $J_r(0, \phi, p, \mu) \equiv 0$.

Cálculos semelhantes mostram que $J(0, \phi, p, \mu)$ independe de ϕ .

De fato, temos pelo Teorema 1.1 que

$$J(0, \phi, p, \mu) = F_r(0, \phi, p, \mu) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) (\cos(t-\phi) + \frac{\partial w^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t)) \cos(t-\phi) dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) \cos 2(t-\phi) dt + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) a_{11}(t) (1 + \cos 2(t-\phi)) dt + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) b_{11}(t) \sin 2(t-\phi) dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial u}(w^*(0, \phi, p, \mu)(t), p) (1 + a_{11}(t)) dt .
 \end{aligned}$$

Como $J_r(0, \phi, p, \mu) \equiv 0$ e $J(0, \phi, p, \mu)$ independe de ϕ , a solução $p = p(\mu)$ obtida resolvendo $J(0, \phi, p, \mu) = 0$ e $r = 0$ é a única solução de $J(0, \phi, p, \mu) = 0$, $J_r(0, \phi, p, \mu) = 0$ de p e r como funções de μ . Portanto, para $m > 3$ temos uma única curva de bifurcação, que é dada por

$$p = -3\alpha_3 \lambda \mu^2 + O(|\mu^3|)$$

O teorema seguinte descreve a variação do número de soluções $2\pi/m$ -periódicas pequenas de (1.1) quando (p, μ) atravessa a curva de bifurcação.

TEOREMA 2.3:

Suponhamos que (H_1) e (H_2) estão satisfeitas, $m \geq 3$, $\alpha_3 \neq 0$ e ρ , dado no Teorema 2.1 é não nulo. Então existe uma curva de bifurcação Γ_m , dada por $p = 3\alpha_3(\eta^2 - \lambda)\mu^2 + O(|\mu^3|)$ onde $\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(t)]^2 dt$,

$\eta = \frac{\cos 3\phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} (Kf)(t) \cos 3t dt$ e Kf é a solução $2\pi/m$ -periódica de

$\ddot{u} + u = f(t)$. A curva Γ_m divide uma vizinhança da origem em regiões como mostram as Figuras 2.1 e 2.2 para $m > 3$ e $m = 3$, respectivamente, para $\alpha_3 > 0$, $\eta^2 - \lambda < 0$ e $\mu \neq 0$. O número de soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) está indicado nas figuras.

$m > 3$

Fig. 2.1

$m = 3$

Fig. 2.2

OBSERVAÇÃO 2.1:

Vejamos como é que se analisa a variação do número de soluções.

A curva Γ_m divide uma vizinhança da origem em duas regiões A_1 e A_2 como mostra a Figura 2.3, para $\alpha_3 > 0$ e $\eta^2 - \lambda < 0$.

Para cada valor de p , tal que $p < 0$, tem-se dois valores pa-

ra μ . Se $p > 0$ então não existe nenhum valor de μ tal que $J(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Fig. 2.3

Como $r=0$ é solução de $F(r, \phi, p, \mu) = 0$, concluímos que a equação tem três soluções em A_1 e uma solução em A_2 .

Consideremos o ponto P_0 sobre a curva Γ_m e suponhamos que estamos cruzando a curva na direção indicada na Figura 2.3. Seja

$$P_0 = (\mu_0, p_0), \quad p_0 = 3\alpha_3(\eta^2 - \lambda)\mu_0^2 + \dots, \quad r_0 = -2\eta\mu_0 + \dots$$

Como $J(r_0, \phi, p_0, \mu_0) = 0$ e $J(r_0, \phi, p, \mu_0)$ é crescente em p , pois $\frac{\partial J}{\partial p}(0, \phi, 0, 0) = 1$, temos que:

$$p < p_0 \Rightarrow J(r_0, \phi, p, \mu_0) < 0$$

$$p = p_0 \Rightarrow J(r_0, \phi, p_0, \mu_0) = 0$$

$$p > p_0 \Rightarrow J(r_0, \phi, p, \mu_0) > 0$$

Como temos também que $\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(r_0, \phi, p_0, \mu_0) > 0$, concluímos que, quando se cruza a curva Γ_m , no sentido indicado na Figura 2.3, o gráfico de $J(r, \phi, p, \mu)$ varia de acordo com as Figuras 2.4, 2.5 e 2.6.

Então, em cada fase ϕ , o número de soluções é dado pela Figura 2.7.

Se $m > 3$, é possível provar que $\eta = 0$. A curva Γ_m independe de ϕ e é dada por $p = -3\alpha_3 \lambda \mu^2 + O(|\mu^3|)$. Como $\phi = k\pi/m$ e $-m/2 < k \leq m/2$, temos m fases. Portanto, o número de soluções é o descrito na Figura 2.1.

Se $m = 3$ temos as fases $\phi = 0$, $\phi = \pi/3$ e $\phi = -\pi/3$. Cada uma dessas fases fornece uma solução distinta $u(t) = r \cos(t - \phi) + w^*(r, \phi, p, \mu)(t)$ da equação (1.1) e obtemos portanto o número de soluções dado na Figura 2.2.

OBSERVAÇÃO 2.2:

O problema não é tão degenerado como pode parecer à primeira vista, através da análise das Figuras 2.1 e 2.2.

Na verdade, a prova acima mostra que, além da solução $2\pi/m$ -periódica, para cada valor admissível de ϕ temos uma bifurcação quadrática em r .

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DE BIFURCAÇÃO NO CASO π/m -HARMÔNICO-ÍMPAR

Suponhamos que as hipóteses (OH_1) e (OH_2) estão satisfeitas.. Analisaremos as equações de bifurcação (1.6), que são mais degeneradas neste caso pois mais simetrias estão presentes em (1.1). As provas dos teoremas que enunciaremos utilizam os resultados obtidos, no Capítulo 1, para a equação auxiliar.

TEOREMA 3.1:

Se (OH_1) e (OH_2) estão satisfeitas e (r,p,μ) pertence a uma vizinhança pequena da origem,

$$G(r,\phi,p,\mu) = \begin{cases} r^{m-1} \mu \sin m\phi(\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ r^{2m-1} \mu^2 \sin 2m\phi(\rho + \dots) & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

onde $\rho = \rho(g(\cdot,0),f)$ é uma constante e ... indicam termos que se anulam para $(r,p,\mu) = (0,0,0)$.

PROVA:

Análoga a do Teorema 2.1.

TEOREMA 3.2:

Suponhamos as hipóteses (OH_1) e (OH_2) satisfeitas e $\rho \neq 0$. Se m é ímpar e $\mu \neq 0$ então as únicas soluções 2π -periódicas $u(t)$ de (1.1), suficientemente pequenas, são tais que $u(t+k\pi/m)$ é par em t , para algum k , $-m/2 < k \leq m/2$. Se m é par, $\mu \neq 0$ e se $u(t)$ é solução de (1.1), suficientemente pequena, então, ou $u(t+k\pi/2m)$ é par em t se k é par,

ou $u(t+k\pi/2m-\pi/2)$ é ímpar em t , se k é ímpar, para algum k , $-m < k \leq m$.

PROVA:

Consideraremos somente o caso m par. A prova do caso m ímpar é idêntica a do Teorema 2.2.

Temos pelo Teorema 3.1 que se $G=0$ e $\rho \neq 0$ então $r^{2m-1}\mu^2 \sin 2m\phi = 0$. Como $u(t) = r \cos(t-\phi) + w^*(r, \phi, p, \mu)(t)$, segue pelo Lema 1.2 que $u(t)$ é par em t se $r=0$. Paralelamente, $\sin 2m\phi = 0$ e $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$ implica que existe k , $-m < k \leq m$ tal que $\phi = k\pi/2m$. Decorre do Lema 1.2 que se k é par então $u(t+k\pi/2m) = r \cos t + w^*(r, k\pi/2m, p, \mu)(t+k\pi/2m)$ é par em t e, se k for ímpar, então $u(t) = r \sin t + w^*(r, k\pi/2m, p, \mu)(t+k\pi/2m-\pi/2)$ é ímpar em t . $\square$

Voltemos agora a análise da primeira equação de bifurcação.

Procedendo como na prova do Teorema 2.3, vemos que as curvas de bifurcação podem ser obtidas resolvendo o sistema

$$J(r, \phi, p, \mu) = p + \frac{3}{4} \alpha_3 r^2 + 3\alpha_3 \eta r \mu + 3\alpha_3 \lambda \mu^2 + \dots = 0$$

$$J_r(r, \phi, p, \mu) = \frac{3}{2} \alpha_3 r + 3\alpha_3 \eta \mu + \dots = 0$$

onde $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(t)]^2 dt$ e $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos 3\phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} (Kf)(t) \cos 3t dt$.

A análise no caso $m=3$ difere da análise no caso $m>3$ mas é análoga a do caso $2\pi/m$ -periódico. As equações de bifurcação são as mesmas e a variação do número de soluções 2π -periódicas pequenas de (1.1) quando (p, μ) atravessa a curva de bifurcação é diferente.

Temos então o seguinte teorema.

TEOREMA 3.3:

Suponhamos (OH_1) , (OH_2) satisfeitas, $m \geq 3$, $\rho \neq 0$ e $\alpha_3 \neq 0$. Então a curva de bifurcação Γ_m é dada por $p = 3\alpha_3(\eta^2 - \lambda)\mu^2 + O(|\mu^3|)$ onde $\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 ds$, $\eta = \frac{\cos 3\phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} (Kf)(t) \cos 3t dt$ e Kf é a única solução π/m -harmônica-ímpar de $\ddot{u} + u = f(t)$. A curva Γ_m divide uma vizinhança da origem em regiões conforme é mostrado nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3. O número de soluções 2π -periódicas é indicado no desenho, no caso $\eta^2 - \lambda < 0$ e $\alpha_3 > 0$.

$m > 3$, ímpar

Fig. 3.1

$m = 3$

Fig. 3.2

$m > 3$, par

Fig. 3.3

OBSERVAÇÃO 3.1:

Assim como no caso $2\pi/m$ -periódico, pode-se mostrar sem dificuldade que $\eta = 0$ se $m > 3$.

CAPÍTULO 4

A GENERICIDADE DA CONDIÇÃO $\rho \neq 0$ NO CASO $2\pi/m$ -PERIÓDICO

Como precisamos considerar $p=0$ para determinar ρ , usaremos neste capítulo $g(u)$ no lugar de $g(u,0)$.

Provaremos que $\rho = \rho(f,g) \neq 0$, genericamente. Isto é, que o conjunto das funções (f,g) tais que $\rho \neq 0$ é um conjunto aberto e denso em $P_{2\pi/m} \times C^{m+2}$ se m for ímpar ($P_{2\pi/m} \times C^{m+3}$ se m for par), onde $C^m = C^m([- \delta, \delta], R)$ para $\delta > 0$.

Para demonstrar esse fato utilizaremos a representação da solução da equação auxiliar (1.6.a), dada pelo Lema 1.1.

LEMA 4.1:

Suponhamos (H_1) , (H_2) satisfeitas e $m \geq 4$ inteiro par. Então $\rho = \rho(f,g)$ pode ser escrito na forma

$$\rho = - \frac{m(m+1)}{2^m \pi} \alpha_{m+1} \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms ds + K(\alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}, f)$$

onde K é contínua e independe de α_{2i+1} para $i \geq m/2$.

PROVA:

Pelo Lema 1.1 segue que

$$w^* = \mu Kf + W_1 + \alpha_{m+1} W_2 + \dots$$

onde $\dots \stackrel{\text{def}}{=} 0((|r| + |\mu|)^{m+3})$.

Temos então que

$$\begin{aligned}
 G(r, \phi, 0, \mu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\ell=1}^{m/2} \alpha_{2\ell+1} (r \cos s + w^*(s+\phi))^{2\ell+1} \text{sensds} + \dots = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{m+1} (r \cos s + w^*(s+\phi))^{m+1} \text{sensds} + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\ell=1}^{\frac{m-2}{2}} \alpha_{2\ell+1} (r \cos s + w^*(s+\phi))^{2\ell+1} \text{sensds} + \dots = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{m+1} [r \cos s + \mu(Kf)(s+\phi) + W_1 + \alpha_{m+1} W_2]^{m+1} \text{sensds} + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\ell=1}^{\frac{m-2}{2}} \alpha_{2\ell+1} [r \cos s + \mu(Kf)(s+\phi) + W_1 + \alpha_{m+1} W_2]^{2\ell+1} \text{sensds} + \dots = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{m+1} [r \cos s + \mu(Kf)(s+\phi)]^{m+1} \text{sensds} + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\ell=1}^{\frac{m-2}{2}} \alpha_{2\ell+1} [r \cos s + \mu(Kf)(s+\phi) + W_1]^{2\ell+1} \text{sensds} + \dots
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1, $G(r, \phi, p, \mu) = r^{m-1} \mu^2 \text{sen} m\phi [\rho + 0(|p| + |\mu| + |r|)]$.

Logo, para determinar ρ basta considerar a parte de G que contém termos envolvendo $r^{m-1} \mu^2$, para $p = 0$.

Consideremos inicialmente o termo

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} [r \cos s + \mu(Kf)(s+\phi)]^{m+1} \text{sensds} .$$

A parte desse termo que envolve $r^{m-1} \mu^2$ é dada por

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\pi} \frac{m(m+1)}{2} r^{m-1} \mu^2 \int_0^{2\pi} \cos^{m-1} s [(Kf)(s+\phi)]^2 \text{sensds} .$$

É possível mostrar, por indução, que

$$\begin{aligned}\cos^{m-1} s \sin s &= \frac{1}{2^{m-2}} \left[\cos(m-1)s + \sum_{j=1}^{\frac{m-2}{2}} \beta_j \cos(m-1-2j)s \right] \sin s = \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ [\sin ms - \sin(m-2)s] + \sum_{j=1}^{\frac{m-2}{2}} \beta_j [\sin(m-2j)s - \sin(m-2(j+1))s] \right\}\end{aligned}$$

onde os β_j são constantes.

Como Kf é $2\pi/m$ -periódica, temos que

$$\int_0^{2\pi} [(Kf)(s+\phi)]^2 \sin ks \, ds = 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq k < m. \quad \text{Portanto,}$$

$$\begin{aligned}& \frac{\alpha_{m+1}}{\pi} \frac{m(m+1)}{2} r^{m-1} \mu^2 \int_0^{2\pi} [(Kf)(s+\phi)]^2 \cos^{m-1} s \sin s \, ds = \\ &= \frac{\alpha_{m+1}}{\pi} \frac{m(m+1)}{2} r^{m-1} \mu^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^{m-1}} [(Kf)(s+\phi)]^2 \sin ms \, ds = \\ &= -\frac{\alpha_{m+1}}{2^m \pi} m(m+1) r^{m-1} \mu^2 \sin m\phi \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms \, ds\end{aligned}$$

Definindo $K(\alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}, f)$ como o coeficiente do termo $r^{m-1} \mu^2 \sin m\phi$, obtido de

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\ell=1}^{\frac{m-2}{2}} \alpha_{2\ell+1} [r \cos + \mu(Kf)(s+\phi) + W_1]^{2\ell+1} \sin s \, ds$$

concluimos que ρ tem a forma estabelecida no lema. $\square$

OBSERVAÇÃO 4.1:

No caso em que $m=2$ a expressão obtida para $\rho = \rho(f, g)$ é mais simples conforme cálculos feitos no Capítulo 6 deste trabalho. Temos

$$\rho = -\frac{3}{2\pi} \alpha_3 \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 2s ds$$

TEOREMA 4.1:

Suponhamos (H_1) e (H_2) satisfeitas e $m \geq 2$ inteiro par. Então $\rho \neq 0$, genericamente.

PROVA:

Segue pelo Lema 4.1 e pela Observação 4.1 que

$$\rho = \alpha_{m+1} c_m \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms ds + K(\alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}, f) \quad \text{onde } c_m \text{ é uma constante não nula, se } m \geq 4 \text{ e que } \rho = \alpha_3 c_2 \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 2s ds, \text{ onde } c_2 \text{ é constante não nula, se } m = 2.$$

$$\text{Suponhamos que } \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms ds \neq 0 \quad \text{para } m \geq 2 \text{ par}$$

e que $\rho = 0$.

Seja $\bar{g}(u) \stackrel{\text{def}}{=} g(u) + \epsilon u^{m+1}$ com ϵ suficientemente pequeno.

Então $\epsilon c_m \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms ds \neq 0$, $\rho(f, \bar{g}) \neq 0$ e g está próxima de $\bar{g}$ na topologia de C^{m+3} .

$$\text{Se } \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms ds = 0 \quad \text{e} \quad \bar{f}(s) = f(s) + \tau(1 + \cos ms)$$

temos que $(K\bar{f})(s) = (Kf)(s) + \tau(1 + \frac{1}{1-m^2} \cos ms)$ e

$$\int_0^{2\pi} [(K\bar{f})(s)]^2 \cos ms ds = \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos ms ds + 2\tau \int_0^{2\pi} (Kf)(s) (1 + \frac{1}{1-m^2} \cos ms) \cos ms ds +$$

$$+ \tau^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{1-m^2} \cos ms\right)^2 \cos ms ds = 2\tau \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos ms ds - \frac{\tau}{1-m^2} \int_0^{2\pi} (Kf)(s)(1+\cos 2ms) ds - \frac{2\tau^2}{1-m^2} \pi$$

é diferente de zero e $\bar{f}$ está próxima de f se τ é suficientemente pequeno, na topologia de $P_{2\pi/m}$.

Como $\rho = \rho(f, g)$ depende continuamente de (f, g) podemos concluir que o conjunto $\{(f, g) \in P_{2\pi/m} \times C^{m+3}; \rho = \rho(f, g) \neq 0\}$ é aberto e denso. $\square$

Consideremos agora o caso m ímpar.

Utilizando o Lema 1.1 é possível provar o

LEMA 4.2:

Se (H_1) e (H_2) estão satisfeitas e $m \geq 5$ é inteiro ímpar então $\rho = \rho(f, g)$ pode ser escrito na forma

$$\rho = - \frac{m}{2^{m-1}\pi} \alpha_m \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos ms ds + K(\alpha_3, \dots, \alpha_{m-2}, f)$$

onde K é contínua e não depende de α_{2i+1} para $i \geq (m-1)/2$.

PROVA:

Análoga a do Lema 4.1.

OBSERVAÇÃO 4.2:

Se $m = 3$ temos

$$\rho = -\frac{3}{4\pi} \alpha_3 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 3s ds$$

conforme cálculos elaborados no Capítulo 6.

Utilizando o Lema 4.2 e as idéias do Teorema 4.1 prova-se o seguinte teorema.

TEOREMA 4.2:

Se (H_1) e (H_2) estão satisfeitas e $m \geq 3$ é inteiro ímpar então $\rho = \rho(f, g) \neq 0$ genericamente.

CAPÍTULO 5

A GENERICIDADE DA CONDIÇÃO $\rho \neq 0$ NO CASO π/m -HARMÔNICO-ÍMPAR

Neste Capítulo mostraremos que o conjunto das funções (f, g) tais que $\rho = \rho(f, g) \neq 0$ é um conjunto aberto e denso em $OH_{\pi/m} \times C^{m+2}$ se m for ímpar ($OH_{\pi/m} \times C^{2m+3}$ se m for par) onde $OH_{\pi/m} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(t+\pi/m) = -f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$. Seguirá desse resultado que $\rho = \rho(f, g) \neq 0$ genericamente.

LEMA 5.1:

Se (OH_1) e (OH_2) estão satisfeitas e $m \geq 2$ é inteiro par então $\rho = \rho(f, g)$ pode ser escrito na forma

$$\rho = -\frac{m(2m+1)}{2^{2m-1}\pi} \alpha_{2m+1} \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 2ms ds + K(\alpha_3, \dots, \alpha_{2m-1}, f)$$

onde K é contínua e independe de α_{2i+1} para $i \geq m$.

PROVA:

Basta utilizar o Lema 1.1 e as mesmas idéias do Lema 4.1.

TEOREMA 5.1:

Se (OH_1) e (OH_2) estão satisfeitas e $m \geq 2$ é inteiro par então $\rho \neq 0$, genericamente.

PROVA:

Análoga a do Teorema 4.1.

Analisemos agora o caso m ímpar.

Utilizando o Lema 1.1 prova-se que

LEMA 5.2:

Se (OH_1) e (OH_2) estão satisfeitas e $m \geq 5$ é inteiro ímpar então $\rho = \rho(f, g)$ pode ser escrito na forma

$$\rho = - \frac{m}{2^{m-1}} \alpha_m \int_0^{2\pi} (Kf(s) \cos ms ds + K(\alpha_3, \dots, \alpha_{m-2}, f))$$

onde K é contínua e não depende de α_{2i+1} para $i \geq \frac{m-1}{2}$.

Utilizando o Lema 5.1, a Observação 4.2 e as idéias da prova do Teorema 5.1 prova-se o próximo Teorema.

TEOREMA 5.2:

Se (OH_1) e (OH_2) estão satisfeitas e $m \geq 3$ é inteiro ímpar então $\rho = \rho(f, g) \neq 0$, genericamente.

CAPÍTULO 6

EXEMPLOS E COMENTÁRIOS FINAIS

6.1 EXEMPLOS:

Consideremos f $2\pi/m$ -periódica e par.

Calcularemos o valor de ρ nos casos $m=3, 4$ e 5 .

Temos por (1.11) e (1.12) que

$$w^*(r, \phi, p, \mu)(t) = \mu(Kf)(t) + O(|r|(r^2 + |\mu|) + |p\mu| + |\mu^3|).$$

Substituindo essa estimativa na equação auxiliar (1.6.a) obtemos

$$\begin{aligned} (6.1) \quad w^*(r, \phi, p, \mu) = & -\frac{\alpha_3 r^3}{32} \cos 3(\cdot - \phi) + \mu Kf + \\ & + \frac{3}{2} \alpha_3 r^2 \mu K(I-P)[Kf + \cos 2(\cdot - \phi) Kf] + \\ & + 3\alpha_3 r \mu^2 K(I-P)[\cos(\cdot - \phi)(Kf)^2] + \\ & + \frac{5}{2} \alpha_5 r^3 \mu^2 K(I-P)[(\cos 3(\cdot - \phi) + 3\cos(\cdot - \phi))(Kf)^2] + \\ & + \frac{5}{8} \alpha_5 r^4 \mu K(I-P)[(\cos 4(\cdot - \phi) + 4\cos 2(\cdot - \phi) + 3)(Kf)] + \dots \end{aligned}$$

onde ... indica termos de ordem superior.

Analisaremos agora (1.6.b).

$$\begin{aligned} (6.2) \quad G(r, \phi, p, \mu) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + w^*(r, \phi, p, \mu)(s + \phi), p) \sin s ds = \\ = & \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3}{4} \alpha_3 r^2 \int_0^{2\pi} w^*(s + \phi) \sin 3s ds + \frac{3}{2} \alpha_3 r \int_0^{2\pi} [w^*(s + \phi)]^2 \sin 2s ds + \right. \\ & + \alpha_3 \int_0^{2\pi} (w^*(s + \phi))^3 \sin s ds + \frac{5}{2} \alpha_5 r^2 \int_0^{2\pi} (w^*(s + \phi))^3 (\sin s + \sin 3s) ds + \\ & \left. + \frac{5}{16} \alpha_3 r^4 \int_0^{2\pi} w^*(s + \phi) (\sin 5s + 3\sin 3s) ds + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{4} \alpha_5 r^3 \int_0^{2\pi} (\text{sen} 4s + 2\text{sen} 2s) (w^*(s+\phi))^2 ds + \\
 & + \frac{5}{2} \alpha_5 r \int_0^{2\pi} \text{sen} 2s (w^*(s+\phi))^4 ds + \alpha_5 \int_0^{2\pi} (w^*(s+\phi))^5 \text{sen} s ds + \\
 & + 0((|r|+|\mu|)^7) \}.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1, se $m=2$ então $G(r, \phi, p, \mu) = r\mu^2 \text{sen} 2\phi (\rho + \dots)$

e por (6.1) e (6.2) segue que $\rho = -\frac{3}{2\pi} \alpha_3 \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 2s ds$.

Para $m=3$, como $G(r, \phi, p, \mu) = r^2 \mu \text{sen} 3\phi (\rho + \dots)$, decorre de

(6.1) e (6.2) que $\rho = -\frac{3}{4\pi} \alpha_3 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 3s ds$.

Analogamente, se $m=4$ então $G(r, \phi, p, \mu) = r^3 \mu^2 \text{sen} 4\phi (\rho + \dots)$ e por (6.1), (6.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 \rho = & -\frac{9}{4\pi} \alpha_3^2 \int_0^{2\pi} K(I-P) [\cos(\cdot) (Kf)^2](s) \cos 3s ds - \\
 & -\frac{9}{4\pi} \alpha_3^2 \left(\int_0^{2\pi} (Kf)(s) K[\cos 2(\cdot) Kf](s) \cos 2s ds - \right. \\
 & - \int_0^{2\pi} (Kf)(s) K[\text{sen} 2(\cdot) Kf](s) \text{sen} 2s ds + \\
 & + \frac{3}{64\pi} \alpha_3^2 \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 4s ds - \frac{5}{4\pi} \alpha_5 \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 4s ds \}.
 \end{aligned}$$

O caso $m=5$ segue as mesmas idéias dos anteriores, com

$$\begin{aligned}
 \rho = & \frac{45}{64\pi} \alpha_3^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 5s ds + \\
 & + \frac{3}{64\pi} \alpha_3^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 5s ds - \frac{5}{16\pi} \alpha_5 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 5s ds \}.
 \end{aligned}$$

Consideremos agora a equação $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$, onde
 $g(u, p) = pu + \alpha_3 u^3 + \alpha_5 u^5 + \dots$ para alguns exemplos específicos de $f(t)$:

- 1) Se $f(t) = 1 + \cos 2t$ então $\rho = \alpha_3$.
- 2) Se $f(t) = \cos 3t$ então $\rho = \frac{3}{32} \alpha_3$, $\lambda = \frac{1}{128}$ e $\eta = -\frac{1}{32} \cos 3\phi$.
- 3) Se $f(t) = 1 + \cos 4t$ então $\rho = -\frac{1}{8} \alpha_3^2 + \frac{1}{6} \alpha_5$, $\lambda = \frac{1}{450}$ e $\eta = 0$.
- 4) Se $f(t) = \cos 5t$ então $\rho = -\frac{5}{1024} \alpha_3^2 + \frac{5}{384} \alpha_5$, $\lambda = \frac{1}{1152}$ e $\eta = 0$.

Considerando f π/m -harmônica-ímpar e $m=2$ temos que
 $G(r, \phi, p, \mu) = r^3 \mu^2 \sin 4\phi (\rho + \dots)$ e por (6.1), (6.2),

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{12\pi} \left\{ -27\alpha_3^2 \int_0^{2\pi} K(I-P) [Kf]^2 \cos(\cdot) (s) \cos 3s ds - \right. \\ & - 27\alpha_3^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) K[(Kf) \cos 2(\cdot)](s) \cos 2s ds + \\ & + 27\alpha_3^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(s) K[(Kf) \sin 2(\cdot)](s) \sin 2s ds + \\ & \left. + \left(\frac{9}{16} \alpha_3^2 - 15\alpha_5 \right) \int_0^{2\pi} [(Kf)(s)]^2 \cos 4s ds \right\}. \end{aligned}$$

No caso específico em que $f(t) = \cos 2t$ e
 $g(u, p) = pu + \alpha_3 u^3 + \alpha_5 u^5 + \dots$ obtemos $\rho = -\frac{11}{96} \alpha_3^2 - \frac{5}{72} \alpha_5$ e $\lambda = \frac{1}{18}$.

6.2. COMENTÁRIOS FINAIS

6.2.1. Neste trabalho não temos a intenção de esgotar todos os casos possíveis para f e g , mas fornecemos abaixo algumas indicações do que se pode esperar quando algumas de nossas hipóteses não estão satisfeitas.

tas.

Alguns cálculos preliminares mostram que as idéias do nosso trabalho podem ser utilizadas para resolver casos não incluídos aqui.

Um caso que podemos citar é quando g não é ímpar em u , mas $g(u, p) = pu + \alpha u^2 + O(|pu^3| + |u^3|)$. Se f é $2\pi/m$ -periódica e par e $m \geq 2$ é inteiro, alguns cálculos indicam que as equações de bifurcação são dadas por

$$F(r, \phi, p, \mu) = r[p + \alpha \lambda \mu + \frac{5}{6} \alpha^2 r^2 + \alpha^2 \eta r \mu + \dots]$$

$$G(r, \phi, p, \mu) = r \mu \sin m\phi(\rho + \dots) = 0$$

onde
$$\lambda = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} (Kf)(s) ds + \cos 2\phi \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 2s ds \right]$$

$$\eta = -\frac{1}{6\pi} \left[\cos 3\phi \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 3s ds \right].$$

Se $m = 2$ obtemos
$$\lambda = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} (Kf)(s) ds + \cos 2\phi \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 2s ds \right\} \text{ e}$$

$$\rho = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} (Kf)(s) \cos 2s ds.$$

Para $m > 3$ temos que $\eta = 0$.

Então, se $\rho \neq 0$ as únicas soluções 2π -periódicas pequenas $u(t)$ de (1.1) são tais que $u(t + k\pi/m)$ é par em t , para $-m/2 < k \leq m/2$.

A análise da primeira equação de bifurcação fornece as curvas de bifurcação.

6.2.2. Dois problemas importantes são estender nossos resultados para sistemas de equações diferenciais ordinárias e analisar os correspondentes problemas para equações a derivadas parciais.

6.2.3. O estudo da estabilidade das soluções encontradas faz parte de um projeto a ser desenvolvido no futuro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. N. Chow and J. K. Hale: Methods of Bifurcation Theory,
Springer - Verlag, London - Heidelberg - Berlin - Tokio, 1982.
- [2] M. Fürkötter and H. M. Rodrigues: Periodic solutions of forced
nonlinear second order equations: symmetry and bifurcations.
SIAM J. Math. Anal., Vol. 17, n^o 6, November, 1986, pp.1319-1331.
- [3] J. K. Hale and H. M. Rodrigues: Bifurcation in the Duffing Equation
with independent parameters II. Proc. Royal Soc. Edinburgh A,
79(1977), pp. 317-326.
- [4] H. M. Rodrigues and A. Vanderbauwhede: Symmetric perturbations of
nonlinear equations: symmetry of small solutions. Nonlinear
Anal. TMA, 2(1978), pp. 27-46.
- [5] J. K. Hale: Ordinary Differential Equations. Krieger, New York, 1980.
- [6] A. Vanderbauwhede: Local Bifurcation and Symmetry. Pitman Advanced
Publishing Program, Boston - London - Melbourne, 1982.
- [7] A. Vanderbauwhede: Bifurcation of subharmonic solutions in time-reversible
systems. J. of Appl. Math. and Physics (ZAMP), Vol. 37, July 1986.