ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

INVARIANÇA, CONJUNTOS LIMITES E ESTABILIDADE
EM SISTEMAS SEMI-DINÂMICOS GERADOS POR
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS RETARDADAS
AUTÔNOMAS

Rosa Lucia Sverzut Baroni

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

INVARIANÇA, CONJUNTOS LIMITES E ESTABILIDADE
EM SISTEMAS SEMI-DINÂMICOS GERADOS POR
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS RETARDADAS
AUTÔNOMAS

Rosa Lucia Sverzut Baroni

Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Dos Reis

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universida-
de de São Paulo, para obtenção do título
de Doutor em Ciências (Matemática)

Departamento de Matemática

São Carlos

1984

Aos meus filhos

Carlos Eduardo e Luís Felipe

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Geraldo Dos Reis pela orientação segura e confiança em nós depositada, fatores que contribuíram muito para que este trabalho se realizasse.

Ao Prof. Dr. Antonio Fernandes Izê pelo apoio e atenção que sempre nos dispensou desde os momentos iniciais no I.C.M.S.C..

Ao Prof. Dr. Waldyr Muniz Oliva pelas valiosas críticas e oportunas sugestões apresentadas.

Aos colegas do I.C.M.S.C. e do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto pela amizade, compreensão e incentivo nos momentos difíceis.

À Sonia, Beth e Laura da secretaria de Pós-Graduação do I.C.M.S.C. pela dedicação e solicitude com que sempre me atenderam.

Nossos agradecimentos também àqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

SUMMARY

This work is devoted to the study of Dynamical Systems defined by Autonomous Retarded Functional Differential Equations. In general, we don't have backward continuation of solutions then, we must work with Semy-Dynamical Systems.

There is an extensive literature on Semy-Dynamical Systems but, usually, it is supposed that the phase space is of finite dimension or, at least, locally compact, wich it is not the case here, because we work with an infinite dimensional space.

We try to present all the concepts of the classical theory of Dynamical Systems like, for instance, trajectories, invariant sets, critical and periodic points, limit sets, recursiveness, dispersiveness, attraction and stability of sets.

We also prove a theorem about existence of periodic solution for equations in $\mathbb{R}^2$ that lives S^1 invariant.

ÍNDICE

	Página
Introdução	1
Notações	3
Cap. I. Sistemas Semi Dinâmicos gerados por Equações	
Diferenciais Funcionais Retardadas Autônomas	5
1. Sistemas Dinâmicos	5
2. Pontos de Equilíbrio, Pontos Periódicos	
e Invariança	11
3. Teorema sobre existência de soluções periódicas	
não triviais em $C([-r,0], S^1)$	26
Cap.II. Conjuntos Limites e Conjuntos Minimais	35
1. Conjuntos Limites	35
2. Conceitos Recursivos	51
3. Conjuntos Minimais	57
4. Conceitos Dispersivos	66
Cap.III. Teoria de Estabilidade	71
1. Atratores	71
2. Estabilidade	85
3. Estabilidade Relativa	94
Bibliografia	104

INTRODUÇÃO

Até fins do século 19, o estudo das Equações Diferenciais esteve mais voltado para as resoluções de certas equações e foi por volta de 1875, com Peano, Lipschitz e Picard, que começaram a aparecer trabalhos provando existência e unicidade de soluções. Ao mesmo tempo, Poincaré e Lyapunov começaram a se preocupar com um outro aspecto, assumindo a existência de soluções e explorando as propriedades topológicas do espaço de fase para se determinar o comportamento das soluções.

Muitos avanços importantes foram feitos na teoria qualitativa das Equações Diferenciais e os trabalhos de Birkhoff [5] e Nemytskii e Stepanov [12] serviram de referência para um desenvolvimento maior na teoria dos Sistemas Dinâmicos (S.D.).

Uma das principais motivações para o estudo dos S.D. é que eles descrevem completamente uma certa classe de Equações Diferenciais e nossa particular preocupação foi explorar os S.D. gerados por Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Autônomas (E.D.F.R.A.). Em geral, para este tipo de equações diferenciais, não temos extensão à esquerda das soluções e trabalhamos então com os Sistemas Semi Dinâmicos (S.S.D.).

Embora já exista uma teoria para S.S.D., em toda literatura por nós consultada, em geral se admite dimensão finita ou compacidade local do espaço de fase, o que não ocorre no nosso caso, pois, sempre trabalharemos em C_H .

Por outro lado, o fato da aplicação solução π^t ser compacta em alguns casos, nos permite conclusões que podem não ser válidas para S.S.D. em geral.

Vários resultados foram conseguidos fazendo-se certas

mudanças e algumas adaptações foram necessárias em certas definições, como por exemplo na de conjunto relativamente denso e movimentos recorrentes.

No primeiro capítulo introduzimos os S.S.D. gerados por E.D.F.R.A. e apresentamos alguns conceitos básicos, como por exemplo os de trajetória, ponto de equilíbrio, ponto periódico e invariança. Neste capítulo ainda demonstramos um teorema sobre existência de soluções periódicas não triviais em $C([-r, 0], S'(a))$ onde $S'(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = a\}$, utilizando a teoria de pontos fixos em cones. Este é um dos resultados mais importantes que obtivemos no nosso trabalho pois, embora existam vários exemplos de S.S.D. gerados por E.D.F.R.A. para os quais as esferas são invariantes, isto todavia não implica, em geral, a existência de soluções periódicas em $C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$.

O Capítulo II é dedicado aos conjuntos limites e minimais e aos conceitos recursivos e dispersivos. Os conjuntos limites (ω limite, prolongamento e limite prolongacional) são conjuntos de grande interesse, podendo ser usados, por exemplo, na caracterização de certos conceitos recursivos, conjuntos minimais e estabilidade.

A teoria de atração e estabilidade está desenvolvida no Capítulo III e introduzimos os conceitos de atração de uma maneira diferente, porém equivalente à teoria clássica e a conveniência maior desta colocação foi a obtenção de resultados que geralmente estão provados apenas para espaços localmente compactos.

Finalmente devemos ressaltar que o estudo realizado neste trabalho é válido para S.S.D. que, embora não gerados por E.D.F.R.A., tenham propriedades semelhantes a estes.

NOTAÇÕES

Durante todo o texto serão seguidas as seguintes nota
ções:

$\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais.

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais.

$\mathbb{R}^+$ = conjunto dos números reais não negativos.

$\mathbb{R}^-$ = conjunto dos números reais não positivos.

S^n = n-esfera

E^n = n-bola

$d(M, \phi) = \inf \{ ||\phi - \psi|| \mid \psi \in M \}$

$d(M, N) = \inf \{ d(M, \phi) \mid \phi \in N \}$

$\bar{A}$ = fecho do conjunto A

$\overset{\circ}{A}$ = interior do conjunto A

∂A = fronteira do conjunto A

$\complement A$ = complementar do conjunto A

$S(M, \epsilon)$ = vizinhança de raio ϵ do conjunto M.

Dizemos que A é vizinhança do conjunto M se existe aberto

U tal que $M \subset U \subset A$.

CAPÍTULO I

SISTEMAS SEMI DINÂMICOS GERADOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS RETARDADAS AUTÔNOMAS

1. SISTEMAS DINÂMICOS

Seja X um espaço topológico.

Definição 1.1: O par (X, π) é um Sistema Dinâmico (S.D.) se π é uma aplicação definida em $X \times \mathbb{R}$ com valores em X e que satisfaz:

- (a) $\pi(x, 0) = x, \forall x \in X$ (axioma da identidade)
- (b) $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2), \forall x \in X, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (axioma de grupo).
- (c) π é contínua (axioma da continuidade).

O espaço X é chamado espaço de fase e π a aplicação de fase.

Quando trabalhamos em $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$ ao invés de $\mathbb{R}$, temos então um Sistema Semi Dinâmico (S.S.D.). Assim, o S.S.D. difere do S.D. essencialmente trocando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$, e o desenvolvimento é específico para $t \geq 0$ ou $t \leq 0$.

Se $M \subset X$ e $T \subset \mathbb{R}$, indicamos por

$$\pi(M, T) = \{\pi(x, t) \mid x \in M \text{ e } t \in T\}.$$

As propriedades seguintes são de fácil demonstração.

Propriedades:

$$(a) \quad \pi\left(\bigcup_i M_i, \bigcup_j T_j\right) = \bigcup_{i,j} \pi(M_i, T_j) ; \quad M_i \subset X; T_j \subset \mathbb{R}.$$

$$(b) \quad \pi\left(\bigcap_i M_i, t\right) \subset \bigcap_i \pi(M_i, t) ; \quad M_i \subset X ; t \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \quad \pi(M-N, t) \supset \pi(M, t) - \pi(N, t) ; \quad M, N \subset X ; t \in \mathbb{R}.$$

Um S.D. (X, π) determina duas outras aplicações:

se $t \in \mathbb{R}$ é fixo, a aplicação $\pi^t: X \rightarrow X$ tal que $\pi^t(x) = \pi(x, t)$ é chamada aplicação de transição

se $x \in X$ é fixo, a aplicação $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\pi_x(t) = \pi(x, t)$ é chamada aplicação movimento (através de x).

Uma vez que π é contínua, as aplicações de transição e movimento são contínuas e um resultado imediato é o seguinte:

Teorema 1.1: Sejam $x \in X$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então o conjunto $\{\pi(x, t) \mid a \leq t \leq b\}$ é compacto e conexo.

Prova: Basta observar que o conjunto acima é a imagem, pela aplicação π_x , do intervalo $[a, b]$ que é compacto e conexo.

O nosso objetivo, a partir de agora, é trabalhar com Sistemas Semi Dinâmicos gerados por Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Autônomas. Passemos então às definições:

Sejam $0 \leq r < \infty$ e $0 < H \leq \infty$.

$$C_H = \{ \phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \mid \|\phi\| < H \}$$

onde $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$, com a norma $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| \mid -r \leq \theta \leq 0\}$ e $|\cdot|$ denota uma norma usual do $\mathbb{R}^n$.

Vamos sempre indicar por d a métrica em C_H definida pela norma $\|\cdot\|$.

Sejam $A > 0$ e $x: [-r, A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Para cada $t \in [0, A)$, definimos a aplicação $x_t: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Seja $f: C_H \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos por Equação Diferencial Funcional Retardada Autônoma (E.D.F.R.A) a equação

$$(1.1) \quad \dot{x}(t) = f(x_t).$$

Uma função $x: [-r, A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua, é uma solução de (1.1) se existir a derivada de x em $[0, A)$ e $\dot{x}(t) = f(x_t)$ para $0 \leq t < A$.

Vamos agora formular o problema da função inicial para as E.D.F.R.A.

Sejam $\phi \in C_H$ e f como acima. O problema

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t) \\ x_0 = \phi \end{cases}$$

consiste em determinar uma função x , contínua em $[-r, A)$ e diferenciável em $[0, A)$, satisfazendo as seguintes condições:

$$x_t \in C_H ; \quad x_0 = \phi \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = f(x_t) \quad \text{para} \quad t \in [0, A)$$

Uma tal função x é chamada solução de (1.2) em $[-r, A)$ e podemos usar as seguintes notações para indicar esta solução:

$$x(t, 0, \phi) ; \quad x(t, \phi) ; \quad x_t(0, \phi) ; \quad x_t(\phi).$$

Vamos sempre supor que f seja uma função contínua, que leva conjuntos limitados em conjuntos limitados e também que sempre vale alguma condição de unicidade relativamente ao problema da função inicial, isto é, se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções definidas em algum intervalo comum $[-r, \delta)$, $0 < \delta < \infty$, com $x_0 = y_0$, então $x(t) = y(t)$, $\forall t \in [-r, \delta)$. Em particular, tudo isto é garantido se f satisfaz uma condição de Lipschitz.

Admitiremos também que as soluções existam para $t \rightarrow \infty$. Em [13] são dadas algumas condições para as quais as soluções são definidas no futuro.

Uma E.D.F.R.A., sob as condições acima e que tenha continuidade e unicidade em relação às condições iniciais, gera um S.S.D. da seguinte forma:

Tomamos $X = C_H$ e $\pi : C_H \times \mathbb{R}^+ \rightarrow C_H$ tal que $\pi(\phi, t) = x_t(\phi)$, ou seja, $\pi(\phi, t)$ é a solução que na origem vale ϕ .

Devemos trabalhar em $\mathbb{R}^+$ pois, em geral, não temos extensão à esquerda das soluções.

Em [3], pg. 144, teor. 13.4, é mostrado com detalhes que (C_H, π) define um S.S.D.

A partir de agora, o espaço de fase será C_H e, por comodidade, vamos nos referir ao S.S.D. (C_H, π) simplesmente por π .

Assim, π sempre indicará um S.S.D. gerado por uma E.D.F.R.A.

Devemos observar também que, como trabalharemos sempre em $\mathbb{R}^+$, as definições de trajetória, invariância, ponto de equilíbrio, ponto periódico, conjuntos limites, conceitos recursivos e estabilidade serão colocadas apenas para $t \geq 0$, embora na teoria geral de S.D. sejam dadas para $t \in \mathbb{R}$.

Um dos conceitos mais elementares é o seguinte:

Definição 1.2: Seja $\phi \in C_H$. O conjunto $\gamma(\phi) = \{\pi(\phi, t) \mid t \geq 0\}$ é chamado trajetória de ϕ .

Notemos que $\gamma(\phi) = \pi_\phi(\mathbb{R}^+)$ e portanto é um conjunto conexo.

Os lemas 1.1 ; 1.2 e 1.3 que daremos a seguir, são resultados que não valem, em geral, para S.S.D. que não sejam gerados por E.D.F.R.A.

Lema 1.1: Seja $V \subset C_{H_1}$ tal que $\|\pi(\phi, t)\| \leq H_1 < H$, $\forall \phi \in V$ e $t \geq r$, onde r é o retardamento da equação. Então o conjunto $\pi(V, [r, \infty))$ é relativamente compacto.

Prova: Como f leva C_{H_1} em um conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, então $\pi(V, [r, \infty))$ é um conjunto de funções limitadas com derivadas limitadas e portanto é equicontínuo em $[-r, 0]$. Além disso, para cada $\theta \in [-r, 0]$, o conjunto $\{\pi(\phi, t)(\theta) \mid \phi \in V, t \geq r\}$ é limitado em $\mathbb{R}^n$ e portanto relativamente compacto. Logo, pelo Teorema de Arzelá-Áscoli, o conjunto $\pi(V, [r, \infty))$ é relativamente compacto.

Lema 1.2: Seja $\phi \in C_H$ tal que $\|\pi(\phi, t)\| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$. Então a trajetória de ϕ é um conjunto relativamente compacto.

Prova: Podemos escrever

$$\gamma(\phi) = \{\pi(\phi, t) \mid 0 \leq t \leq r\} \cup \{\pi(\phi, t) \mid t \geq r\} = B_1 \cup B_2.$$

Pelo teorema 1.1, B_1 é compacto e pelo lema 1.1, B_2 é relativamente compacto, bastando tomar $V = \{\phi\}$. Logo $B_1 \cup B_2 = \gamma(\phi)$ é relativamente compacto.

Lema 1.3: Seja $t \geq r$ fixo e suponhamos que $\|\pi(\phi, t)\| \leq H_1 < H$, $\forall \phi \in C_H$. Então o operador π^t é um operador compacto.

Prova: Seja $V \subset C_H$ limitado. Pelo lema 1.1, conjunto $\pi^t(V) = \{\pi(\phi, t) \mid \phi \in V\}$ é relativamente compacto em C_H . Logo π^t é compacto.

O lema seguinte é muito utilizado, principalmente na teoria dos atratores.

Lema 1.4: Sejam $M \subset C_H$ compacto e $\phi \in C_H$ tais que, para cada vizinhança V de M , existe $T = T(\phi, V) \geq 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in V$, $\forall t \geq T$. Então $\gamma(\phi) \cup M$ é compacto.

Prova: Basta usar o seguinte resultado topológico: Sejam X um espaço de Hausdorff e $M \subset X$ compacto. Se uma sequência $\{x_n\} \subset X$ é tal que para toda vizinhança V de M , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$, $\forall n \geq n_0$, então toda subsequência $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ tem um ponto de acumulação em M .

2. PONTOS DE EQUILÍBRIO; PONTOS PERIÓDICOS E INVARIANÇA.

Vamos primeiramente apresentar um teorema que nos levará à definição de pontos de equilíbrio e pontos periódicos.

Teorema 2.1: Se $\phi \in C_H$, então existe um subgrupo aditivo $G \subset \mathbb{R}$ e um $\lambda \geq 0$ tais que $\pi(\phi, t_1) = \pi(\phi, t_2)$ se e somente se $t_1 - t_2 \in G$; $t_1, t_2 \geq \lambda$

Prova: Para cada $t \geq 0$, definimos os conjuntos

$$A_t = \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \pi(\phi, t) = \pi(\phi, t + s)\}$$

$$\text{e } G_t = \{s - r \in \mathbb{R} \mid s, r \in A_t\}$$

É fácil mostrar que:

$$(i) \quad s_1, s_2 \in A_t \implies s_1 + s_2 \in A_t$$

$$(ii) \quad s_1, s_2 \in A_t; s_1 \geq s_2 \implies s_1 - s_2 \in A_t$$

$$(iii) \quad A_t \text{ é fechado}$$

$$(iv) \quad G_t \text{ é um subgrupo de } \mathbb{R}.$$

$$(v) \quad A_t = G_t \cap \mathbb{R}^+, \text{ ou seja, } A_t \text{ é o traço de } G_t \text{ em } \mathbb{R}^+.$$

Assim, $s \in G_t \iff |s| \in A_t$ e se $s \in G_t$, então $n.s \in G_t$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos agora que se $t \leq \theta$ em $\mathbb{R}^+$ e $G_t \neq \{0\}$, então $G_t = G_\theta$.

De fato:

$$s \in G_t \implies |s| \in A_t \implies \pi(\phi, t) = \pi(\phi, t + |s|) \implies \pi(\phi, \theta) = \pi(\phi, t + (\theta - t))$$

$$= \pi(\pi(\phi, t), \theta - t) = \pi(\pi(\phi, t + |s|), \theta - t) = \pi(\phi, \theta + |s|) \implies |s| \in A_\theta \implies$$

$$\implies s \in G_\theta. \text{ Logo } G_t \subset G_\theta.$$

Por outro lado, como $G_t \neq \{0\}$, existe $s > 0$ em G_t . Assim, se $\sigma \in G_\theta$, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\theta < t + ns$, e portanto $\sigma \in G_\theta \subset G_{t+ns}$. Logo $\pi(\phi, t + ns) = \pi(\phi, t + ns + |\sigma|)$, e como $ns \in G_t$, então $ns + \sigma \in G_t \Rightarrow \sigma \in G_t \Rightarrow G_\theta \subset G_t$.

Finalmente, diante destes resultados, podemos concluir que podem ocorrer duas situações: ou $G_t = \{0\}$ e neste caso a aplicação π_ϕ é 1 - 1 (e então colocamos $G = \{0\}$ e $\lambda = 0$ para satisfazer o teorema), ou existem $\lambda \geq 0$ e um subgrupo aditivo fechado G de $\mathbb{R}$ tais que

$$G_t = \begin{cases} \{0\} & \text{para } 0 \leq t < \lambda \\ G & \text{para } t > \lambda \end{cases}$$

Agora basta mostrarmos que para $t = \lambda$, $G_\lambda = G$. Temos que $G_\lambda \subset G$ e se $s \in G$, então $s \in G_t$, $\forall t > \lambda$. Logo $\pi(\phi, t) = \pi(\phi, t + |s|)$, $\forall t > \lambda$. Como π é contínua, tomando o limite para $t \rightarrow \lambda_+$, temos $\pi(\phi, \lambda) = \pi(\phi, \lambda + |s|)$ e então $s \in G_\lambda$.

O teorema que acabamos de demonstrar nos leva às seguintes definições:

Definição 2.1: Segundo as notações do teorema anterior, seja

$\phi \in C_H$.

- (a) Se $G = \{0\}$, $\gamma(\phi)$ é chamada trajetória não auto interceptável.
- (b) Se $\lambda = 0$ e G é cíclico, $\gamma(\phi)$ é chamada trajetória periódica com período primitivo.
- (c) Se $\lambda = 0$ e $G = \mathbb{R}$, ϕ é chamado ponto crítico.
- (d) Se $\lambda > 0$ e G é cíclico, $\gamma(\phi)$ é dita ser levada a um ciclo.

(e) Se $\lambda > 0$ e $G = \mathbb{R}$, $\gamma(\phi)$ é dita ser levada a um ponto crítico.

Tendo em vista as definições acima podemos enunciar o teorema seguinte que é bastante importante no desenvolvimento da teoria. Devemos observar também que os resultados obtidos neste teorema são próprios para os S.S.D., não valendo para os S.D. em geral. (vide [12], teorema 2.09, pg. 331).

Teorema 2.2: Seja $\phi \in C_H$. Então

(a) $\gamma(\phi)$ é não auto interceptável $\iff \gamma(\phi)$ não é compacto.

(b) Se $\gamma(\phi)$ é auto interceptável, então

(b₁) $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a S^1 se $\gamma(\phi)$ é periódico com período primitivo.

(b₂) $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a $\{\phi\}$ se ϕ é ponto crítico.

(b₃) $\gamma(\phi)$ é homeomorfo à figura do seis se $\gamma(\phi)$ é levado a um ciclo.

(b₄) $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a E^1 se $\gamma(\phi)$ é levado a um ponto crítico.

Prova: Primeiramente consideremos $\gamma(\phi)$ auto interceptável. Tomemos a fatorização canônica da aplicação π_ϕ , que é contínua e sobre $\gamma(\phi)$.

A relação de equivalência em $\mathbb{R}^+$ é definida por $t \sim s \iff \pi(\phi, t) = \pi(\phi, s)$. f é a aplicação que leva cada $t \in \mathbb{R}^+$ na respectiva classe de equivalência e como π_ϕ é sobre, g fica determinada de modo único impondo a comutatividade, $g \circ f = \pi_\phi$. Todas as aplicações são contínuas e sobre e além disso, g é 1-1.

Se $\gamma(\phi)$ é trajetória periódica, então $\lambda = 0$ e G é cíclico. Logo $t \sim s \iff \pi(\phi, t) = \pi(\phi, s) \iff t - s \in G \iff s = t + nT$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e algum $T > 0$. Assim $\mathbb{R}^+/\sim$ é homeomorfo a S^1 . Se ϕ é ponto crítico, então $\lambda = 0$ e $G = \mathbb{R}$. Logo $t \sim s \iff \pi(\phi, t) = \pi(\phi, s) \iff t - s \in \mathbb{R}$ e portanto todos os elementos de $\mathbb{R}^+$ são equivalentes entre si. Assim $\mathbb{R}^+/\sim$ é homeomorfo a $\{\phi\}$. Se $\gamma(\phi)$ é levado a um ciclo, então $\lambda > 0$ e G é cíclico. Logo $t \sim s \iff \pi(\phi, t) = \pi(\phi, s) \iff t - s \in G, t \geq \lambda \iff s = t + nT, t \geq \lambda$. Assim $\mathbb{R}^+/\sim$ é homeomorfo à figura do seis. Se $\gamma(\phi)$ é levado a um ponto crítico, então $\lambda > 0$ e $G = \mathbb{R}$. Logo $t \sim s \iff \pi(\phi, t) = \pi(\phi, s) \iff t - s \in \mathbb{R}, t \geq \lambda$, ou seja, todos os elementos maiores ou iguais a λ estão relacionados entre si. Assim, $\mathbb{R}^+/\sim$ é homeomorfo a E^1 .

Provamos então que $\mathbb{R}^+/\sim$ é de fato um dos espaços S^1 , $\{\phi\}$, E^1 ou figura do seis, e em particular, ele é compacto e portanto g é um homeomorfismo. Como os espaços acima são mutua

mente não homeomorfos, temos provado o ítem (b).

Suponhamos agora que $\gamma(\phi)$ seja compacto e não auto interceptável. Então π_ϕ é 1-1 e existe sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \rightarrow \infty$, tal que $\{\pi(\phi, t_n)\}$ converge necessariamente para algum ponto de $\gamma(\phi)$, ou seja, existe $\bar{t} \geq 0$ ^{tal} que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$. Pela mesma razão, existe subsequência convergente de $\{\pi(\phi, t_n - \bar{t} - 1)\}$ em $\gamma(\phi)$, isto é, existe $s \geq 0$ tal que $\pi(\phi, t_n - \bar{t} - 1) \rightarrow \pi(\phi, s)$. Como $\pi(\phi, t_n) = \pi(\pi(\phi, t_n - \bar{t} - 1), \bar{t} + 1)$, então $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \pi(\pi(\phi, s), \bar{t} + 1) = \pi(\phi, s + \bar{t} + 1)$. Pela unicidade do limite, $\pi(\phi, s + \bar{t} + 1) = \pi(\phi, \bar{t})$ e como π_ϕ é 1-1, então $s + \bar{t} + 1 = \bar{t}$ o que é um absurdo. Logo, se $\gamma(\phi)$ é não auto interceptável, então $\gamma(\phi)$ não é compacto e temos provado (a).

Vamos apresentar um exemplo de trajetória que é levada a um ponto crítico. Para maiores detalhes, ver [9], pg. 60.

Exemplo 2.1: Consideremos a equação

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = -x(t-1) [1-x^2(t)]$$

Para todo t , $x(t) = 1$ é solução da equação (2.1) e além disso, se tomarmos $\phi \in C = C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$, então existe uma única solução $x(0, \phi)$ da equação (2.1) que depende continuamente de ϕ . Seja $\phi \in C$ tal que $\phi(0) = 1$. Então $x(0, \phi)(t) = 1$, $\forall t \geq 0$ e portanto, para tais condições iniciais $\phi \in C$, temos que $x_t(0, \phi) = 1$ para $t \geq 1$.

Definição 2.2: Um conjunto $M \subset C_H$ é invariante se para todo $t \geq 0$, $\pi(M, t) \subset M$.

Um exemplo trivial de conjunto invariante é a trajetória $\gamma(\phi)$ de qualquer $\phi \in C_H$. Um outro exemplo de conjunto invariante, que pode ser encontrado em [9], pg. 326, ex. 3.1, é o seguinte:

Exemplo 2.2:

Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o seguinte sistema de E.D.F.R.A.:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = -x(t-1)y(t) - z(t) \\ \dot{y} = x(t-1)x(t) - z(t) \\ \dot{z} = x(t) + y(t) \end{cases}$$

Se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução do sistema (2.2), é fácil ver que $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$, $\forall t \geq 0$ e isto implica que $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = a^2$, a constante. Assim, se uma condição inicial ϕ é tal que $\phi(\theta) \in S^2$, $\forall \theta \in [-1, 0]$, podemos concluir que a solução $(x, y, z)(t; 0, \phi)$ tem valores em S^2 , $\forall t \geq 0$. No espaço $C([-1, 0], \mathbb{R}^3)$, o conjunto $C([-1, 0], S^2)$ é invariante, ou seja, se $\phi \in C([-1, 0], S^2)$, então $x_t(\phi) \in C([-1, 0], S^2)$, $\forall t \geq 0$.

Lema 2.1:

- (a) O conjunto vazio e C_H são invariantes.
- (b) A reunião e a intersecção de conjuntos invariantes são invariantes.
- (c) Para cada $M \subset C_H$, existe o menor conjunto invariante contendo M (chamado envoltória invariante de M) e existe o maior subconjunto invariante de M (chamado núcleo invariante de M).
- (d) Se M é invariante, então $\bar{M}$ também é invariante.

Prova: Os ítems (a) e (b) são de prova imediata. No ítem (c), é fácil verificar que a envoltória invariante de M é o conjunto $\pi(M, \mathbb{R}^+)$ e o núcleo invariante de M é a reunião de todos os elementos da família $F = \{A \subset C_H \mid A \subset M \text{ e } A \text{ é invariante}\}$.

Observa-se que F é não vazia pois o conjunto vazio sempre pertence a F .

(d) Sejam $\phi \in \bar{M}$ e $t_0 \geq 0$ fixados arbitrariamente. Então existe sequência $\{\phi_n\} \subset M$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ e pela continuidade de π ,

$\pi(\phi_n, t_0) \rightarrow \pi(\phi, t_0)$. Como M é invariante, $\pi(\phi_n, t_0) \in M$, $\forall n$ e portanto $\pi(\phi, t_0) \in \bar{M}$. Logo $\bar{M}$ é invariante.

Para os S.D. em geral, mostra-se que M é invariante $\iff M$ é invariante (vide [4], pg. 13, teor. 1.4). No entanto, para os S.S.D. isto já não ocorre, nem mesmo para casos simples de S.S.D. gerados por Equações Diferenciais Ordinárias, pois definimos invariância apenas no sentido positivo, ou seja, para $t \geq 0$.

Exemplo 2.3: Consideremos a seguinte equação ordinária definida na reta:

$$(2.3) \quad \dot{x} = -x$$

Então $\pi(x_0, t) = x_0 e^{-t}$, $t \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. O conjunto $[0, x_0]$ é invariante e no entanto seu complementar não é, pois $\pi(x_0, t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Devemos observar também que para os S.S.D., se M for invariante, não podemos garantir a invariância de $\hat{M}$ e ∂M .

Enunciaremos alguns resultados importantes, porém omitiremos as provas por serem bastante fáceis.

Teorema 2.4: $M \subset C_H$ é invariante $\iff$ cada uma de suas componentes conexas tem a mesma propriedade.

Teorema 2.5: Um conjunto fechado $M \subset C_H$ é invariante $\iff$ pa
ra todo $\phi \in \partial M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in M$, $\forall 0 \leq t < \varepsilon$.

Definição 2.4: Um elemento $\phi \in C_H$ é um ponto de equilíbrio se
 $\pi(\phi, t) = \phi$, $\forall t \geq 0$.

Lema 2.2: Se $\phi \in C_H$ e $\phi = \pi(\phi, t)$ para algum $t \geq 0$, então
 $\phi = \pi(\phi, nt)$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Algumas caracterizações de ponto de equilíbrio são da
das no seguinte teorema:

Teorema 2.6: Seja $\phi \in C_H$. As seguintes proposições são equivalen
tes:

- (a) ϕ é um ponto de equilíbrio.
- (b) $\gamma(\phi) = \{\phi\}$
- (c) $\{\phi\} = \{\pi(\phi, t) \mid a \leq t \leq b\}$ para algum par (a, b) , com
 $a < b$.
- (d) existe sequência $\{t_n\}$, $t_n > 0$, $t_n \rightarrow 0_+$, tal que
 $\phi = \pi(\phi, t_n)$, para cada n .

Prova:

(a) $\iff$ (b) é imediato.

(a) $\implies$ (c) é imediato.

(c) $\implies$ (d) Tomamos $t_n = \frac{b-a}{n}$

(d) $\implies$ (a) Seja $t > 0$ fixado arbitrariamente. Sabemos que existe sequência $\{t_n\} \subset (0, \infty)$, $t_n \rightarrow 0_+$ tal que $\phi = \pi(\phi, t_n)$ para cada n e existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_n t_n \leq t \leq (k_n + 1) t_n, \text{ para cada } n.$$

Além disso, existe $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, tal que

$$k_n t_n \leq k_m t_m \leq t \leq (k_m + 1) t_m \leq (k_n + 1) t_n$$

A sequência $\{k_n t_n\}$, assim construída, converge para t , e pela continuidade de π , $\pi(\phi, k_n t_n) \rightarrow \pi(\phi, t)$. Logo $\pi(\phi, t) = \phi$, pois $\pi(\phi, k_n t_n) = \phi$, $\forall n$.

Vamos agora demonstrar que os conceitos de ponto de equilíbrio e ponto crítico são equivalentes.

Teorema 2.7: As definições 2.4 e 2.1(c) são equivalentes.

Prova: Se ϕ é um ponto de equilíbrio, então $\pi(\phi, t) = \phi$, $\forall t \geq 0$. Assim, dados $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 > t_2 \geq 0$, então $\pi(\phi, t_1) = \pi(\phi, t_2)$. Logo $G = \mathbb{R}$ e $\lambda = 0$ e consequentemente ϕ é ponto crítico. Por outro lado, se ϕ é ponto crítico, pelo teorema 2.2 (b₂), $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a $\{\phi\}$. Logo ϕ é ponto de equilíbrio (pelo teorema

anterior).

Lema 2.3: Se $\phi \neq \pi(\phi, t_0)$ para algum $\phi \in C_H$ e $t_0 \geq 0$ (isto é, se ϕ não é ponto de equilíbrio), então existem vizinhanças abertas U de ϕ e V de $\pi(\phi, t_0)$ tais que $\pi(U, t_0) \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Prova: Como $\phi \neq \pi(\phi, t_0)$ e C_H é de Hausdorff, existem abertos disjuntos W_1 e W_2 contendo ϕ e $\pi(\phi, t_0)$ respectivamente.

Tomemos $V = W_2$ e $U = \{\psi \in W_1 \mid \pi(\psi, t_0) \in V\}$.

U é aberto pois $U = [(\pi^{t_0})^{-1}(V)] \cap W_1$. Além disso, $U \cap V = \emptyset$, U é vizinhança de ϕ , V é vizinhança de $\pi(\phi, t_0)$ e $\pi(U, t_0) \subset V$ pois se $\xi \in \pi(U, t_0)$ então $\xi = \pi(\psi, t_0)$ para algum $\psi \in U$. Assim $\xi = \pi(\psi, t_0) \in V$.

Uma outra caracterização de ponto de equilíbrio é dada no seguinte teorema:

Teorema 2.8: Um elemento $\phi \in C_H$ é ponto de equilíbrio $\iff$ toda vizinhança de ϕ contém alguma trajetória.

Prova: A condição necessária é imediata pois se ϕ é um ponto de equilíbrio, $\gamma(\phi) = \{\phi\}$. Suponhamos agora que ϕ não seja um ponto de equilíbrio. Então existe $t_0 > 0$ tal que $\pi(\phi, t_0) \neq \phi$. Pelo lema anterior, existem vizinhanças abertas e disjuntas U de ϕ e V de $\pi(\phi, t_0)$ tais que $\pi(U, t_0) \subset V$. Assim, para cada $\psi \in U$, $\pi(\psi, t_0) \in V$ e portanto U não contém trajetória alguma pois se existisse $\psi_0 \in U$ tal que $\gamma(\psi_0) \in U$, então $\pi(\psi_0, t) \in U$, $\forall t \geq 0$. Mas isto é uma contradição pois $\pi(\psi_0, t_0) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.9: O conjunto de todos os pontos de equilíbrio em C_H é fechado.

Teorema 2.10: Sejam ϕ e ψ em C_H tais que $\|\pi(\psi, t) - \phi\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Então ϕ é ponto de equilíbrio.

Prova: Seja U vizinhança de ϕ . Então existe $T = T(U) \geq 0$ tal que $\pi(\psi, t) \in U$, $\forall t \geq T$. Logo U contém a trajetória $\gamma(\pi(\psi, T))$ e pelo teorema 2.8, ϕ é um ponto de equilíbrio.

Uma definição mais clássica para pontos periódicos é a seguinte:

Definição 2.5: Um ponto $\phi \in C_H$ é dito periódico se existir $T > 0$ tal que $\pi(\phi, t) = \pi(\phi, t + T)$, $\forall t \geq 0$.

Um número $T > 0$ para o qual vale a igualdade acima é chamado um período de ϕ e se ϕ é periódico, é costume dizer que a aplicação movimento π_ϕ e a trajetória $\gamma(\phi)$ são periódicos.

Observações

(i) Se ϕ é um ponto de equilíbrio, então todo número real positivo $T > 0$ satisfaz a condição de ser período de ϕ .

(ii) ϕ é periódico se e somente se existe $T > 0$ tal que $\phi = \pi(\phi, T)$.

(iii) Se ϕ é periódico com período $T > 0$, então $\pi(\phi, t)$ é periódico de mesmo período T , para todo $t \geq 0$.

Teorema 2.11: Se ϕ é ponto periódico mas não de equilíbrio, então existe $T > 0$ tal que T é o menor período positivo de ϕ .

Além disso, se τ é um outro período qualquer de ϕ , então $\tau = nT$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Tomamos $P = \{t > 0 \mid t \text{ é período de } \phi\}$ que é não vazio e mostra-se que $T = \inf P > 0$ satisfaz as condições do teorema.

Além disso, se $\tau > 0$ é um período qualquer de ϕ , e se $\tau \neq nT$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 T < \tau < (n_0 + 1)T$. Como T é período de ϕ , então $n_0 T$ também o é e portanto $\phi = \pi(\phi, \tau) = \pi(\phi, n_0 T)$.

Além disso, $\tau - n_0 T > 0$ e $\pi(\phi, \tau - n_0 T) = \pi(\pi(\phi, n_0 T), \tau - n_0 T) = \pi(\phi, \tau) = \phi$, ou seja, $\tau - n_0 T$ é período de ϕ . Mas $0 < \tau - n_0 T < T$ e como T é o menor período de ϕ , temos uma contradição. Logo $\tau = nT$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

O teorema acima motiva a seguinte definição:

Definição 2.6: Se ϕ é periódico mas não de equilíbrio, então o menor período de ϕ é chamado período fundamental ou primitivo.

Teorema 2.12: Se $\phi \in C_H$ não é um ponto de equilíbrio, então as definições 2.5 e 2.1(b) são equivalentes.

Prova: Suponhamos que ϕ seja periódico segundo a definição 2.6. Como ϕ não é de equilíbrio, pelo teorema 2.11, existe o período primitivo $T > 0$ e se τ é um outro período de ϕ , então $\tau = nT$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\pi(\phi, t) = \pi(\phi, \tau + t)$, $\forall t > 0$. Como $\tau + t > t$ e $\tau + t - t = \tau \in G$, $t > 0$ (pelo teorema 2.1), então $\lambda = 0$ e os elementos de G são da forma nT , $n \in \mathbb{N}$. Logo G é cíclico e a definição 2.1(b) está satisfeita.

Suponhamos agora que ϕ é periódico segundo a definição 2.1(b). Então $\lambda = 0$ e G é cíclico e portanto existe $T \in G$ tal que $G = \{nT \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $\pi(\phi, t_1) = \pi(\phi, t_2)$, $t_1 > t_2$ se e somente se $t_1 - t_2 = nT$, $t_2 \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Como $t_1 > t_2 \Rightarrow t_1 - t_2 = nT > 0 \Rightarrow t_1 = nT + t_2$. Logo $\pi(\phi, t_2) = \pi(\phi, nT + t_2)$, $\forall t_2 \geq 0$, ou seja, ϕ é periódico segundo a definição 2.6.

Teorema 2.13: Se $\{\phi_n\}$ é uma sequência de pontos periódicos, com períodos $t_n \rightarrow 0$, e se existir subsequência de $\{\phi_n\}$ convergindo para $\phi \in C_H$, então ϕ é um ponto de equilíbrio.

Prova: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi_n \rightarrow \phi$. Seja $t \geq 0$ qualquer e $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_n t_n \leq t \leq (k_n + 1) t_n$$

Para cada n , $\pi(\phi_n, k_n t_n) = \phi_n$ pois t_n é período de ϕ_n .

Além disso,

$$\begin{aligned} ||\pi(\phi, t) - \phi|| &\leq ||\pi(\phi, t) - \pi(\phi, k_n t_n)|| + \\ &+ ||\pi(\phi, k_n t_n) - \pi(\phi_n, k_n t_n)|| + ||\phi_n - \phi||. \end{aligned}$$

Como $k_n t_n \rightarrow t$, pois $t_n \rightarrow 0$, e $\phi_n \rightarrow \phi$, o lado direito da desigualdade acima se aproxima de zero quando $n \rightarrow \infty$.

Logo $\pi(\phi, t) = \phi$, $\forall t \geq 0$.

Em geral não é verdade que o conjunto dos pontos periódicos é fechado, como acontece com pontos de equilíbrio.

Todavia, vale o seguinte resultado:

Teorema 2.14: Sejam $\alpha > 0$ e F um conjunto definido da seguinte maneira: $F = \{\phi \in C_H \mid \phi \text{ é periódico com período } \leq \alpha\}$. Então F é fechado.

Teorema 2.15: Se ϕ é periódico com período primitivo $T > 0$, então $\gamma(\phi) = \{\pi(\phi, t) \mid 0 \leq t \leq T\}$.

Para os S.D. em geral, vale que

$\gamma(\phi) = \gamma(\pi(\phi, t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Todavia, para os S.S.D., a igualdade é válida se e somente se ϕ é um ponto periódico ou crítico.

Teorema 2.16: A igualdade $\gamma(\phi) = \gamma(\pi(\phi, t))$ é válida para todo $t \geq 0$ se e somente se ϕ é um ponto periódico ou crítico.

Prova: Suponhamos que $\gamma(\phi) = \gamma(\pi(\phi, t))$, $t \geq 0$.

Como $\phi = \pi(\phi, 0) \in \gamma(\phi)$, então $\phi = \pi(\pi(\phi, t), s)$ para algum $s \geq 0$, ou seja, $\phi = \pi(\phi, t + s) = \pi(\phi, T)$, com $T = t + s$. Logo ϕ é periódico com período $t + s$.

Por outro lado, se ϕ é ponto crítico, a igualdade é imediata. Suponhamos então que ϕ seja um ponto periódico com período fundamental $T > 0$. Temos dois casos a considerar:

(i) $t < T$. Como ϕ tem período T , então $\pi(\phi, t)$ também tem período T , e pelo teorema 2.15,

$$\begin{aligned} \gamma(\pi(\phi, t)) &= \{\pi(\pi(\phi, t), s) \mid 0 \leq s \leq T\} = \\ &= \{\pi(\phi, t + s) \mid 0 \leq s \leq T\} = \{\pi(\phi, \tau) \mid t \leq \tau \leq t + T\}. \end{aligned}$$

Assim, se $\psi \in \gamma(\phi)$, então $\psi = \pi(\phi, t_0)$ para algum t_0 ,

$0 \leq t_0 \leq T$. Se $t \leq t_0 \leq T$, então $t \leq t_0 \leq T + t$ e portanto $\psi \in \gamma(\pi(\phi, t))$ (tomando $\tau = t_0$).

Se $0 \leq t_0 < t$, então $T \leq t_0 + T \leq t + T$ e portanto

$$\psi = \pi(\phi, t_0) = \pi(\phi, t_0 + T) \in \gamma(\pi(\phi, t)). \quad (\text{tomando } \tau = t_0 + T).$$

Logo $\gamma(\phi) \subset \gamma(\pi(\phi, t))$, $t < T$.

(ii) $t \geq T$. Neste caso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = nT + \bar{t}$,

$0 \leq \bar{t} \leq T$. Assim,

$\pi(\phi, t) = \pi(\phi, nT + \bar{t}) = \pi(\phi, \bar{t})$. Pelo caso (i) ,

$$\gamma(\phi) \subset \gamma(\pi(\phi, \bar{t})) = \gamma(\pi(\phi, t)).$$

Assim por (i) e (ii) temos que $\gamma(\phi) \subset \gamma(\pi(\phi, t)), \forall t \geq 0$.

Como $\gamma(\pi(\phi, t)) \subset \gamma(\phi), \forall t \geq 0$, a igualdade fica estabelecida.

3. TEOREMA SOBRE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS NÃO TRIVIAIS EM $C([-r, 0], S^1)$.

Existem vários exemplos de S.S.D. gerados por E.D.F.R.A. para os quais as esferas são invariantes. Entretanto isto não implica, em geral, nem mesmo para o caso $n = 2$, a existência de soluções periódicas em $C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$. Neste parágrafo, usando a teoria de pontos fixos em cones, apresentamos um teorema que garante a existência de solução periódica não trivial, quando temos uma esfera invariante em $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.1: Seja E um espaço de Banach. Um conjunto $K \subset E$ é um cone se satisfaz às seguintes condições:

- (a) K é fechado e convexo.
- (b) Se $\phi \in K$, então $\lambda\phi \in K, \forall \lambda \geq 0$
- (c) Para todo $\phi \neq 0$ em E , então ϕ e $-\phi$ não podem ambos pertencer a K .

Definição 3.2: $K \subset E$ é um cone truncado se é a intersecção de um cone com uma vizinhança convexa do zero.

Devemos observar que a vizinhança pode ser fechada ou não.

Definição 3.3: Um operador $T: K \rightarrow K$, linear ou não, tem um auto vetor ϕ se existe constante μ tal que $T\phi = \mu\phi$.

Teorema 3.1: ([11] , pg 144, teor. 27.1).

Sejam $K \subset E$ um cone ou um cone truncado e ∂G a fronteira de um conjunto aberto e limitado $G \subset E$, com $0 \in G$. Se $T: \partial G \cap K \rightarrow K$ é um operador completamente contínuo e

$$\inf \{ |T\phi| : \phi \in \partial G \cap K \} > 0 ,$$

então T tem um auto vetor em $\partial G \cap K$.

Vamos adotar as seguintes notações:

$$C = C([-r, 0], \mathbb{R}^2) ; S^1(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = a\} \quad (a > 0)$$

$$C_a = C([-r, 0], S^1(a)).$$

Passemos então ao principal objetivo deste parágrafo que é o seguinte teorema:

Teorema 3.2: Seja π o S.S.D. gerado pela E.D.F.R.A.

$$\dot{x}(t) = f(x_t)$$

onde $f: C \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua e leva limitado em limitado. Suponhamos que valem as seguintes condições:

- (i) C_a é invariante
- (ii) Existe um número finito de pontos de equilíbrio em C_a .
- (iii) Se $\phi \in C_a$ não é ponto de equilíbrio, então

$$S^1(a) \subset \bigcup_{t \geq 0} \pi(\phi, t)(0).$$

Então existe solução periódica não trivial em C_a .

Prova: Como existe um número finito de pontos de equilíbrio em C_a , então sempre é possível escolher $k_1 < k_2 \in \mathbb{R}$, de modo que o conjunto

$$K_0 = \left\{ \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in C \mid 0 \leq k_1 \phi_1(0) \leq \phi_2(0) \leq k_2 \phi_1(0) \right\}$$

defina um cone em C que não contenha pontos de equilíbrio em C_a .

$$\text{Seja } F = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq k_1 x_1 \leq x_2 \leq k_2 x_1\}$$

Então podemos escrever que

$$K_0 = \{\phi \in C \mid \phi(0) \in F\}.$$

Seja K o cone truncado definido por $K = K_0 \cap \overline{B(0, a)}$, onde $B(0, a)$ é a bola aberta de raio a em C .

Consideremos o conjunto

$$A = \{\phi \in C \mid |\phi(t)| < a, \text{ para algum } t \in [-r, 0]\}$$

e seja $G = A \cap B(0, 2a)$, que é aberto e limitado.

Além disso, $\partial G \cap B(0, a) = \emptyset$ pois $B(0, a) \subset G$ e G é aberto.

Mostremos que $K \cap \partial G = K \cap C_a$.

Temos que $K \cap C_a \subset K \cap \partial G$ pois $C_a \subset \partial G$, e se $\phi \in K \cap \partial G$, então $\phi \notin G$ pois G é aberto e portanto $|\phi(t)| \geq a$, $\forall t$. Além disso, $\phi \in K$ e então $|\phi(t)| \leq a$, $\forall t$. Logo $|\phi(t)| = a$, $\forall t \Rightarrow \phi \in K \cap C_a$.

Consideremos a aplicação $\tau: K \cap C_a \rightarrow [r, \infty)$ definida por $\tau(\phi) = \min \{t \geq r \mid \pi(\phi, t) \in K \cap C_a\}$ e mostremos que τ é contínua.

Seja então $\phi \in K \cap C_a$ e tomemos $\{\phi_n\} \subset K \cap C_a$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$. Devemos mostrar que $\{\tau(\phi_n)\}$ admite subsequência convergente para $\tau(\phi)$.

Vamos denotar por $t_n = \tau(\phi_n)$ e $\bar{t} = \tau(\phi)$ e mostremos que $\{t_n\}$ é limitada.

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\pi(\phi, \bar{t} + \delta)(o) \in \bar{F}$. Notemos que isto sempre ocorre pois $\pi(\phi, \bar{t})(o) \in F$ e vale (iii), ou seja, se uma solução atinge o cone, ela não pode "voltar" ou "parar" pois não existe ponto de equilíbrio no cone.

Como $[0, \bar{t} + \delta]$ é compacto, então $\pi_{\phi_n} \rightarrow \pi_\phi$ uniformemente neste intervalo, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos que

$||\pi(\phi, t) - \pi(\phi_n, t)|| < \varepsilon$, $\forall t \in [0, \bar{t} + \delta]$. Logo $t_n < \bar{t} + \delta$ para $n \geq n_0$ pois t_n é o menor dos $t \geq r$ para o qual $\pi(\phi_n, t) \in K \cap C_a$ e sendo assim, $\{t_n\}$ é limitada e portanto admite subsequência $\{t_{n_k}\}$ convergente para um certo t_1 .

Assim, como $\phi_{n_k} \rightarrow \phi$, então $\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow \pi(\phi, t_1)$ e

por construção temos que $\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$. Logo

$$\pi(\phi, \bar{t}) = \pi(\phi, t_1).$$

Se $t_1 \neq \bar{t}$ nada mais temos a fazer pois $\pi(\phi, \bar{t})$ é ponto periódico não trivial em C_a e o teorema está assim demonstrado. Com efeito, se supusermos que $t_1 > \bar{t}$ então existe $T > 0$ tal que $t_1 = \bar{t} + T$.

Logo $\pi(\phi, \bar{t}) = \pi(\phi, t_1) = \pi(\phi, \bar{t} + T) = \pi(\pi(\phi, \bar{t}), T)$. Analogamente se $\bar{t} > t_1$.

Se $t_1 = \bar{t}$ fica provado a continuidade da aplicação τ em ϕ e então definimos o operador $T : K \cap C_a \rightarrow C$ por $T(\phi) = \pi(\phi, \tau(\phi))$.

Então $T(K \cap C_a) \subset K \cap C_a$ e além disso, T é completamente contínuo pois, desde que $\pi(\phi, t)$ é contínua em t e ϕ e $\tau(\phi)$ é contínua, então T é contínuo e como $\tau(\phi) \geq r$, $\forall \phi \in K \cap C_a$, então T é compacto.

Temos ainda que $\inf \{\|T(\phi)\| : \phi \in K \cap C_a\} > 0$ pois $\phi \in K \cap C_a \Rightarrow T(\phi) \in K \cap C_a \Rightarrow \|T(\phi)\| = a > 0$.

Estamos então nas condições do teor. 3.1 e portanto T tem um auto vetor ϕ em $K \cap C_a$, ou seja, existe μ tal que $T(\phi) = \mu\phi$. Como $\mu\phi \in K \cap C_a$ então $\|T(\phi)\| = \|\mu\phi\| = \|\phi\| \Rightarrow |\mu| = 1$. Mas ϕ e $\mu\phi$ estão em K e portanto $\mu = 1$.

Logo ϕ é ponto fixo de T , ou seja, $T(\phi) = \phi$. Como ϕ não pode ser ponto de equilíbrio, então ϕ é periódico com período fundamental maior do que zero.

Exemplo 3.1: Consideremos a equação

$$(I) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2y(t)x(t-1) [x(t-1) + y(t-1)] + y(t) y^2(t-1) \\ \dot{y}(t) = -2x(t)x(t-1) [x(t-1) + y(t-1)] - x(t) y^2(t-1) \end{cases}$$

Seja $f : C([-1, 0], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(\phi) = \begin{pmatrix} 2 \phi_2(0) \phi_1(-1) [\phi_1(-1) + \phi_2(-1)] + \phi_2(0) \phi_2^2(-1) \\ -2 \phi_1(0) \phi_1(-1) [\phi_1(-1) + \phi_2(-1)] - \phi_1(0) \phi_2^2(-1) \end{pmatrix}$$

onde $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$.

Se $\phi = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$, podemos escrever

$$(I) \quad \dot{\phi}(0) = f(\phi)$$

Mostremos que:

a) f leva limitado em limitado.

$$\begin{aligned} |f(\phi)| &\leq 2 |\phi_2(0) \phi_1^2(-1)| + 2 |\phi_2(0) \phi_1(-1) \phi_2(-1)| + \\ &+ |\phi_2(0) \phi_2^2(-1)| + 2 |\phi_1(0) \phi_1^2(-1)| + 2 |\phi_1(0) \phi_1(-1) \phi_2(-1)| + \\ &+ |\phi_1(0) \phi_2^2(-1)| \leq 10 ||\phi||^3. \end{aligned}$$

b) $C_1 = C([-1, 0], S^1)$ é invariante e as soluções com condições iniciais em C_1 estão definidas no futuro.

Se $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ é uma solução de (I), é fácil ver

ficar que $x(t) \dot{x}(t) + y(t) \dot{y}(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Assim $x^2(t) + y^2(t) = k^2$; $k = \text{constante}$, e portanto, para toda condição inicial em C_1 , a solução $X(t)$ permanecerá em C_1 , ou seja, C_1 é invariante.

Além disso, como C_1 é fechado e limitado $C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, então $X(t)$ está definida no futuro.

c) Não existem pontos de equilíbrio em C_1 .

Resolvendo $f(\phi) = 0$ para $\phi = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ e lembrando que um

ponto de equilíbrio deve ser uma função constante, então

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ será ponto de equilíbrio se e somente se

$x(t) = y(t) = 0, \forall t$. Logo, em C_1 não temos ponto de equilíbrio.

d) Se $\phi \in C_1$, então $\pi(\phi, t)(0)$ percorre S^1 quando t cresce.

A equação (I) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \left[(x(t-1) + y(t-1))^2 + x^2(t-1) \right] \\ \dot{y}(t) = -x(t) \left[(x(t-1) + y(t-1))^2 + x^2(t-1) \right] \end{cases}$$

Se $\phi \in C_1$, então $\pi(\phi, t)(0) = \begin{pmatrix} x_t(\phi)(0) \\ y_t(\phi)(0) \end{pmatrix} \in S^1$ pois C_1 é invariante. Além disso, como

$[(x(t-1) + y(t-1))^2 + x^2(t-1)] > 0$, então $\dot{x}(t)$ tem mesmo sinal de $y(t)$ e $\dot{y}(t)$ tem sinal contrário de $x(t)$, ou seja, $\pi(\phi, t)(0)$ percorre S^1 sempre no sentido horário.

Suponhamos agora que $S^1 \not\subset \bigcup_{t \geq 0} \pi(\phi, t)(0)$.

Então existe $Z \in S^1$ tal que $\pi(\phi, t)(0) \rightarrow Z$ quando $t \rightarrow \infty$, e portanto, dada uma vizinhança qualquer V de Z , existe $T = T(V) > 0$ tal que $\pi(\phi, t)(0) \in V$, $\forall t \geq T$. Logo, pelo teor. 1, 2.8, a função constante $\psi \in C_1$ tal que $\psi(0) = Z$, $\forall Z \in [-1, 0]$ é ponto de equilíbrio pois toda vizinhança V de ψ contém a trajetória $\gamma(\pi(\phi, T))$. Mas isto é um absurdo pois contraria o ítem C) e portanto $S^1 \subset \bigcup_{t \geq 0} \pi(\phi, t)(0)$.

Sendo assim, as condições (i), (ii) e (iii) do teor. 3.2 estão satisfeitas e portanto (I) admite solução periódica não trivial.

Observação: No caso de S.S.D. com um número finito de pontos de equilíbrio $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, devemos garantir adicionalmente que para cada $i = 1, 2, \dots, n$ temos que $\phi_i \notin \Omega(\psi)$, $\forall \psi \neq \phi_1, \dots, \phi_n$.

OBSERVAÇÕES FINAIS

Com relação ao Capítulo 1, devemos ressaltar que os lemas 1.1; 1.2 e 1.3 não valem para os S.D. nem para os S.S.D. em geral, mas valem para os casos específicos dos S.D. gerados por E.D.F.R.A..

Já os teoremas 2.1 e 2.2 não valem para os S.D. mas apenas para os S.S.D..

Não encontramos, para os S.S.D., resultados similares aos lemas 2.3 e teorema 2.16, embora estes sejam válidos para os S.D. de maneira mais ampla, porém necessitamos impor alguma restrição por não termos extensão à esquerda das soluções.

Ainda neste capítulo se encontra um dos resultados mais significativos do trabalho que é o teorema 3.2 o qual garante, sob certas condições, a existência de solução periódica não trivial em $\mathcal{C}([-r, 0], S^1)$.

CAPÍTULO II

CONJUNTOS LIMITES E CONJUNTOS MINIMAIS

1. CONJUNTOS LIMITES

Um dos conceitos mais importantes na teoria de S.D. é o de conjunto ômega limite $\Omega(\phi)$ cuja definição foi formalizada por G.D. Birkhoff [5].

Na teoria clássica de S.D. mostra-se que $\Omega(\phi)$ é não vazio, compacto e conexo se a trajetória $\gamma(\phi)$ estiver contida em um compacto. Todavia, para S.S.D. gerados por E.D.F.R.A. vimos que toda trajetória limitada é relativamente compacta e portanto podemos obter este resultado e alguns outros assumindo apenas que $\gamma(\phi)$ seja limitada.

Outros conceitos importantes são os de prolongamento, formalizado por Taro Ura em [14] e limite prolongacional, introduzido por Auslander, Bhatia e Seibert em [2], conceitos estes que estão relacionados intimamente com a teoria de atração e estabilidade.

Devemos observar novamente que as definições que daremos são todas para $t \geq 0$, enquanto que para os S.D. em geral, são dadas para $t \in \mathbb{R}$ e quando coloca-se para $t \geq 0$, é acrescentado o adjetivo positivo, por exemplo, conjunto ômega limite positivo.

Definição 1.1: Se $\phi \in C_H$, definimos o conjunto ômega limite de ϕ por

$\Omega(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in C_H \mid \text{existe sequência } \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+,$

$t_n \rightarrow \infty \text{ e } \pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$

ou equivalentemente:

$$\Omega(\phi) = \bigcap \{\gamma(\psi) \mid \psi \in \gamma(\phi)\} = \bigcap \{\gamma(\pi(\phi, n)) \mid n = 0, 1, \dots\}$$

Teorema 1.1: Para todo $\phi \in C_H$, o conjunto $\Omega(\phi)$ é fechado e invariante.

Prova: Mostremos primeiramente que $\Omega(\phi)$ é fechado.

Seja $\{\psi_n\}$ sequência em $\Omega(\phi)$ tal que $\psi_n \rightarrow \psi$. Assim, para cada k , existe sequência $\{t_n^k\} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n^k \rightarrow \infty$ e $\pi(\phi, t_n^k) \rightarrow \psi_k$, quando $n \rightarrow \infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\|\psi_k - \pi(\phi, t_n^k)\| < 1/k \text{ e } t_n^k \geq k \text{ para } n \geq k.$$

Tomemos $t_n = t_n^n$. Então $t_n \rightarrow \infty$ e

$$\|\psi - \pi(\phi, t_n)\| \leq \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n - \pi(\phi, t_n)\| \leq \|\psi - \psi_n\| + 1/n$$

Como $\psi_n \rightarrow \psi$, então $\|\psi - \pi(\phi, t_n)\| \rightarrow 0$ e portanto $\psi \in \Omega(\phi)$.

Mostremos agora que $\Omega(\phi)$ é invariante. Sejam $\psi \in \Omega(\phi)$ e $\bar{t} \geq 0$ fixados arbitrariamente. Então existe sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \rightarrow \infty$ e $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$. Tomando $\tau_n = t_n + \bar{t}$ temos que $\tau_n \rightarrow \infty$ e

$$\pi(\phi, \tau_n) = \pi(\phi, t_n + \bar{t}) = \pi(\pi(\phi, t_n), \bar{t}) \rightarrow \pi(\psi, \bar{t})$$

Logo $\pi(\psi, \bar{t}) \in \Omega(\phi)$.

Teorema 1.2: Para todo $\phi \in C_H$, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi).$

(b) $\Omega(\phi) = \Omega(\pi(\phi, t))$ para $t \geq 0$.

Prova:

(a) Seja $\psi \in \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi)$. Se $\psi \in \gamma(\phi)$, então $\psi \in \overline{\gamma(\phi)}$.

Se $\psi \in \Omega(\phi)$, existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$.

Como $\pi(\phi, t_n) \in \gamma(\phi)$, $\forall n$, então $\psi \in \overline{\gamma(\phi)}$. Por outro lado, se $\psi \in \overline{\gamma(\phi)}$, então existe sequência $\{\psi_n\}$ em $\gamma(\phi)$ tal que $\psi = \lim \psi_n$, ou seja, existe sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\psi = \lim \pi(\phi, t_n)$. Se $t_n \rightarrow \infty$, então $\psi \in \Omega(\phi)$. Se existir subsequência $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \rightarrow \bar{t} \in \mathbb{R}^+$, então $\pi(\phi, t_{n_k}) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$.

Pela unicidade do limite, $\psi = \pi(\phi, \bar{t}) \in \gamma(\phi)$.

Logo $\overline{\gamma(\phi)} \subset \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi)$.

(b) Se $\xi \in \Omega(\phi)$, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \xi$.

Seja $\bar{t} \geq 0$ fixado arbitrariamente. Podemos supor que $t_n \geq \bar{t}$ para todo n (tomando subsequência se for necessário) e assim

$$\tau_n = t_n - \bar{t} \geq 0, \quad \tau_n \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$\pi(\pi(\phi, \bar{t}), \tau_n) = \pi(\phi, \bar{t} + \tau_n) = \pi(\phi, t_n) \rightarrow \xi. \text{ Logo } \xi \in \Omega(\pi(\phi, \bar{t})).$$

Por outro lado, se $\xi \in \Omega(\pi(\phi, \bar{t}))$, então $\exists t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\pi(\phi, \bar{t}), t_n) \rightarrow \xi$. Assim $\xi \in \Omega(\phi)$, bastando tomar $\tau_n = \bar{t} + t_n$.

Teorema 1.3: Se ϕ e ψ estão numa mesma trajetória, então $\Omega(\phi) = \Omega(\psi)$.

Teorema 1.4: Se F é um conjunto invariante, então $\Omega(\phi) \subset \bar{F}$, $\forall \phi \in F$.

Teorema 1.5: Seja $\phi \in C_H$ tal que $\gamma(\phi)$ seja relativamente compacto. Então $\Omega(\phi)$ é um conjunto não vazio, compacto e conexo.

Prova: $\Omega(\phi)$ é compacto pois é subconjunto fechado de $\overline{\gamma(\phi)}$ que é compacto.

Tomemos agora uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \rightarrow \infty$. Como $\{\pi(\phi, t_n)\} \subset \gamma(\phi)$ que é relativamente compacto, então existe subsequência $\{\pi(\phi, t_{n_k})\}$ que converge para algum $\psi \in \overline{\gamma(\phi)}$.

vazio.

Finalmente, suponhamos que $\Omega(\phi)$ não seja conexo. Como $\Omega(\phi)$ é compacto, podemos escrever $\Omega(\phi) = P \cup Q$, com P e Q compactos e disjuntos. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $d(P, Q) = \delta$. Sejam $S(P, \delta/2) = \{\xi \mid d(\xi, P) < \delta/2\}$ e

$$S(Q, \delta/2) = \{\xi \mid d(\xi, Q) < \delta/2\}$$

vizinhanças disjuntas e abertas de P e Q respectivamente e tomemos $\xi \in P$ e $\psi \in Q$. Então existem sequências $\{t_n\}$ e $\{\tau_n\}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $t_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow \infty$, $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \xi$ e $\pi(\phi, \tau_n) \rightarrow \psi$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\pi(\phi, t_n) \in S(P, \delta/2); \pi(\phi, \tau_n) \in S(Q, \delta/2) \text{ e } t_n < \tau_n, \text{ para cada } n.$$

Os conjuntos $\{\pi(\phi, t) \mid t_n \leq t \leq \tau_n\}$ são compactos e conexos para cada n (teorema 1, 1.1) e como $\pi(\phi, t_n) \in S(P, \delta/2)$ e

$$\pi(\phi, \tau_n) \in S(Q, \delta/2), \text{ deve existir } T_n, t_n < T_n < \tau_n, \text{ tal que}$$

$$\pi(\phi, T_n) \in \partial(S(P, \delta/2)). \text{ Deste modo, construímos uma sequência}$$

$\{\pi(\phi, T_n)\} \subset \partial(S(P, \delta/2))$. Como $\{\pi(\phi, T_n)\} \subset \gamma(\phi)$ que é relativamente compacto, então existe subsequência $\{\pi(\phi, T_{n_k})\}$ convergente, ou seja, existe α tal que $\pi(\phi, T_{n_k}) \rightarrow \alpha$ e $\alpha \in \partial(S(P, \delta/2))$ pois este conjunto é fechado. Todavia, pela construção, observa-se que $\alpha \in \Omega(\phi)$, pois $T_n \rightarrow \infty$, e isto é um absurdo pois $\alpha \notin P \cup Q$. Logo $\Omega(\phi)$ é conexo.

A hipótese do teorema acima pode ser enfraquecida tomando a trajetória apenas limitada pois, pelo lema 1, 1.2, toda trajetória limitada é relativamente compacta. Deste modo, temos o seguinte resultado:

Corolário: Se $\phi \in C_H$ é tal que $||\pi(\phi, t)|| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$, então $\Omega(\phi)$ é não vazio, compacto e conexo.

O mesmo comentário feito com relação ao teorema 11,1.5, pode ser feito para o seguinte teorema:

Teorema 1.6: Seja $\phi \in C_H$ tal que $||\pi(\phi, t)|| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$. Então, para toda vizinhança U de $\Omega(\phi)$, existe $T = T(U) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in U$, $\forall t \geq T$, ou seja, $d(\pi(\phi, t), \Omega(\phi)) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Suponhamos que $d(\pi(\phi, t), \Omega(\phi)) \not\rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Então existem $\varepsilon > 0$ e sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \rightarrow \infty$, tais que $d(\pi(\phi, t_n), \Omega(\phi)) \geq \varepsilon$, para todo n . Como $\gamma(\phi)$ é relativamente compacto e $\{\pi(\phi, t_n)\} \subset \gamma(\phi)$, existe subsequência $\{\pi(\phi, t_{n_k})\}$ convergente em $\overline{\gamma(\phi)}$, ou seja, existe $\phi_0 \in \overline{\gamma(\phi)}$ tal que $\pi(\phi, t_{n_k}) \rightarrow \phi_0$. Por construção, $\phi_0 \in \Omega(\phi)$ e como $d(\pi(\phi, t_{n_k}), \phi_0) \geq d(\pi(\phi, t_{n_k}), \Omega(\phi))$, então

$d(\pi(\phi, t_{n_k}), \Omega(\phi)) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, e isto é um absurdo.

Teorema 1.7: Seja $\phi \in C_H$ tal que $||\pi(\phi, t)|| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$. Então $\gamma(\phi)$ é auto interceptável $\iff \Omega(\phi) \subset \gamma(\phi)$.

Prova: $(\implies)$

Se $\gamma(\phi)$ é auto interceptável, então é compacto e portanto fechado. Assim, $\Omega(\phi) \subset \gamma(\phi)$ pois $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi)$.

$(\impliedby)$

Pelo lema 1, 1.2, $\gamma(\phi)$ é relativamente compacto.

Como $\Omega(\phi) \subset \gamma(\phi)$ e $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi)$, então $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi)$.

Assim, $\gamma(\phi)$ é compacto e consequentemente auto interceptável.

Vamos definir conjuntos prolongamento e limite prolongacional.

Definição 1.2: Para cada $\phi \in C_H$, definimos o conjunto prolongamento de ϕ por

$$D(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in C_H \mid \text{existem sequências } \{\phi_n\} \text{ em } C_H \\ \text{e } \{t_n\} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ tais que } \phi_n \rightarrow \phi \text{ e } \pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi\}.$$

ou equivalentemente:

$$D(\phi) = \overline{\{\pi(U, \mathbb{R}^+) \mid U \text{ é vizinhança de } \phi\}}$$

e o conjunto limite prolongacional de ϕ por

$$J(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in C_H \mid \text{existem sequências } \{\phi_n\} \text{ em } C_H \text{ e } \{t_n\} \text{ em } \mathbb{R}^+ \\ \text{tais que } t_n \rightarrow \infty, \phi_n \rightarrow \phi \text{ e } \pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi\} \subset \bigcap \{D(\psi) \mid \psi \in \gamma(\phi)\}$$

É imediato que, para todo $\phi \in C_H$,

$$\gamma(\phi) \subset D(\phi) \quad \text{e} \quad \Omega(\phi) \subset J(\phi) \subset D(\phi).$$

Exemplo 1.1: [2] , pg. 58

Consideremos o S.D. no plano, definido pela seguinte equação diferencial (em coordenadas polares):

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\theta} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

As trajetórias são mostradas na figura abaixo:

A origem $(0,0)$ e o ponto $(1,0)$ são pontos críticos.

Para todo $p \neq (0,0)$, temos que $\Omega(p) = \{(1,0)\}$.

Para todo $p = (\alpha, 0)$, $\alpha > 0$, temos que $J(p) = S^1 =$ círculo unitário e $D(p) = \gamma(p) \cup S^1$.

Lema 1.1: Seja $\alpha \geq 0$ fixado arbitrariamente e seja $\phi \in C_H$.

Então $J(\phi) \subset \overline{\cap \{\pi(U, [\alpha, \infty)) \mid U \text{ é vizinhança de } \phi\}}$.

Prova: Se $\psi \in J(\phi)$, então existem sequências $\phi_n \rightarrow \phi$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$.

Como $\phi_n \rightarrow \phi$, dada vizinhança U de ϕ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_n \in U$, $\forall n \geq n_0$ e como $t_n \rightarrow \infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq \alpha$, $\forall n \geq n_1$.

Tomando $N = \max \{n_0, n_1\}$, então $\pi(\phi_n, t_n) \in \pi(U, [\alpha, \infty))$, $\forall n \geq N$.

Como $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$, então $\psi \in \overline{\pi(U, [\alpha, \infty))}$.

A relação que existe entre o conjunto limite prolongacional $J(\phi)$ e o conjunto prolongamento $D(\phi)$ é, de uma certa forma, análoga à relação existente entre o conjunto ômega limite $\Omega(\phi)$ e a trajetória $\gamma(\phi)$, que pode ser observado através de uma comparação do teorema seguinte com o teorema 11,1.2.

Teorema 1.9: Para todo $\phi \in C_H$, valem as seguintes proposições:

- (a) $D(\phi) = \gamma(\phi) \cup J(\phi)$.
- (b) $J(\phi)$ é fechado e invariante.
- (c) $D(\phi)$ é fechado e invariante.
- (d) $J(\phi) \subset J(\pi(\phi, t))$ para todo $t \geq 0$.

Prova:

(a) Como $\gamma(\phi) \subset D(\phi)$ e $J(\phi) \subset D(\phi)$, então $\gamma(\phi) \cup J(\phi) \subset D(\phi)$.

Seja agora $\psi \in D(\phi)$. Então existem sequências $\{\phi_n\}$ em C_H e $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$.

Se $t_n \rightarrow \infty$, então $\psi \in J(\phi)$.

Se existir subsequência $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \rightarrow \bar{t} \in \mathbb{R}^+$, então

$\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$ e pela unicidade do limite, $\psi = \pi(\phi, \bar{t}) \in \gamma(\phi)$.

Assim, $\psi \in J(\phi) \cup \gamma(\phi)$.

(b) Mostremos primeiramente que $J(\phi)$ é fechado. Seja $\{\psi_n\}$ sequência em $J(\phi)$ tal que $\psi_n \rightarrow \psi$. Para cada k , como $\psi_k \in J(\phi)$, existem sequências $\{\psi_n^k\} \subset C_H$ e $\{t_n^k\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\psi_n^k \rightarrow \phi$, $t_n^k \rightarrow \infty$ e

$\pi(\psi_n^k, t_n^k) \rightarrow \psi_k$, quando $n \rightarrow \infty$. Podemos supor, sem perda de gene

ralidade, que $t_n^k \geq k$; $d(\psi_n^k, \phi) \leq 1/k$ e $d(\pi(\psi_n^k, t_n^k), \psi_k) \leq 1/k$

para $n \geq k$. Assim, tomando as sequências $\{\psi_n^n\}$ e $\{t_n^n\}$ temos que

$\psi_n^n \rightarrow \phi$, $t_n^n \rightarrow \infty$ e $\pi(\psi_n^n, t_n^n) \rightarrow \psi_n$.

Logo $\psi \in J(\phi)$ pois como $\psi_n \rightarrow \psi$, então $\pi(\psi_n^n, t_n^n) \rightarrow \psi$.

Mostremos agora que $J(\phi)$ é invariante. Sejam $\psi \in J(\phi)$ e $\bar{t} \geq 0$ fixados arbitrariamente. Então existem sequências $\phi_n \rightarrow \phi$, $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Tomando $\tau_n = t_n + \bar{t} \geq 0$, $\tau_n \rightarrow \infty$ e

$$\pi(\phi_n, \tau_n) = \pi(\pi(\phi_n, t_n), \bar{t}) \rightarrow \pi(\psi, \bar{t}).$$

Então $\pi(\psi, \bar{t}) \in J(\phi)$.

(c) $D(\phi)$ é fechado pois, pelo teorema II, 1.8, $D(\phi)$ pode ser escrito como intersecção de conjuntos fechados e $D(\phi)$ é invariante pois é reunião de dois invariantes, $\gamma(\phi)$ e $J(\phi)$.

(d) Se $\psi \in J(\phi)$, existem sequências $\phi_n \rightarrow \phi$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Seja $\bar{t} \geq 0$ fixado arbitrariamente. Podemos supor $t_n \geq \bar{t}$, $\forall n$, e como $\phi_n \rightarrow \phi$, então $\pi(\phi_n, \bar{t}) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$. Assim, $\pi(\pi(\phi_n, \bar{t}), t_n - \bar{t}) = \pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$, ou seja, $\psi \in J(\pi(\phi, \bar{t}))$.

Para os S.S.D. definidos em espaços localmente compactos, mostra-se que $D(\phi)$ e $J(\phi)$ são compactos e conexos impondo a hipótese de existir vizinhança V de ϕ que satisfaça $\overline{\pi(V, \mathbb{R}^+)}$ compacto.

No nosso caso, como o espaço de fase é C_H , nunca $\pi(V, \mathbb{R}^+)$ pode ser relativamente compacto mas, sob certas condições, podemos ter $\overline{\pi(V, [r, \infty))}$ compacto, e é supondo isto que obtemos o seguinte teorema:

Teorema 1.10: Sejam $\phi \in C_H$ e V vizinhança de ϕ tais que

$$||\pi(\psi, t)|| \leq H_1 < H, \quad \forall \psi \in V \text{ e } t \geq r. \text{ Então } J(\phi) \text{ e } D(\phi) \text{ são}$$

compactos e conexos.

Prova: Seja $P = \pi(V, [r, \infty))$ que é relativamente compacto (lema 1, 1.1).

Seja $A = \overline{\cap \{\pi(U, [r, \infty)) \mid U \text{ é vizinhança de } \phi\}}$. Então $J(\phi) \subset A \subset \bar{P}$ (lema 11, 1.1). Como $J(\phi)$ é fechado e $\bar{P}$ compacto, temos prova do a compacidade de $J(\phi)$.

Mostremos que $D(\phi)$ é compacto. Seja W uma vizinhança qualquer de $J(\phi)$, que é compacto. Como $\Omega(\phi) \subset J(\phi)$, então W é vizinhança de $\Omega(\phi)$ e pelo teorema 11, 1.6, existe $T = T(W) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in W$, $\forall t \geq T$. Logo $\gamma(\phi) \cup J(\phi) = D(\phi)$ é compacto, pelo lema 1, 1.4.

Mostremos agora que $D(\phi)$ e $J(\phi)$ são conexos.

Suponhamos primeiramente que $D(\phi)$ não seja conexo. Como $D(\phi)$ é compacto, então existem compactos disjuntos P e Q tais que $D(\phi) = P \cup Q$.

Como $P \cap Q = \emptyset$, então $d(P, Q) > 0$ e podemos tomar vizinhanças disjuntas $U(P)$ e $U(Q)$ de P e Q respectivamente.

Temos que $\phi \in D(\phi)$ (basta tomar $\phi_n = \phi$ e $t_n = 0$) e vamos supor que $\phi \in P$.

Tomemos $\psi \in Q$. Então $\psi \in D(\phi)$ e portanto existem sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\phi_n \rightarrow \phi$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi_n \in (U(P) \cap V)^\circ = \text{interior de } U(P) \cap V$ e que $\pi(\phi_n, t_n) \in U(Q)^\circ = \text{interior de } U(Q)$, $\forall n$.

Assim, para cada n , o conjunto $\pi(\phi_n, [0, t_n])$, que é

conexo, intercepta $U(P)$, ou seja, existe s_n , $0 < s_n < t_n$ tal que $\pi(\phi_n, s_n) \in \partial U(P)$. Com a sequência $\{s_n\}$ assim construída, podem ocorrer 2 situações:

(a) existe subsequência $\{s_{n_k}\}$ de $\{s_n\}$ tal que $s_{n_k} \geq r$, $\forall k$. Neste caso, $\{\pi(\phi_{n_k}, s_{n_k})\} \subset \partial U(P) \cap \overline{\pi(V, [r, \infty))}$ que é um conjunto compacto, pois $\partial U(P)$ é fechado e $\overline{\pi(V, [r, \infty))}$ é compacto. Então existe subsequência da sequência $\{\pi(\phi_{n_k}, s_{n_k})\}$ que converge para algum $\xi \in \partial U(P) \cap \overline{\pi(V, [r, \infty))}$.

Por construção, $\xi \in D(\phi) = P \cup Q$ e isto contradiz o fato de $\xi \in \partial U(P)$.

(b) existe subsequência $\{s_{n_k}\}$ tal que $s_{n_k} \leq r$, $\forall k$. Neste caso, como $0 \leq s_{n_k} \leq r$, existe subsequência $\{s_{n_j}\}$ de $\{s_{n_k}\}$ que converge para algum $s_0 \in [0, r]$.

Assim, $\pi(\phi_{n_j}, s_{n_j}) \rightarrow \pi(\phi, s_0)$ e como $\partial U(P)$ é fechado, então $\pi(\phi, s_0) \in \partial U(P)$. Mas $\gamma(\phi) \subset D(\phi)$ e como $\gamma(\phi)$ é conexo e $\phi \in P$, então $\gamma(\phi) \subset P$ e temos uma contradição, pois $\pi(\phi, s_0) \in \gamma(\phi)$ e mostramos que $\pi(\phi, s_0) \in \partial U(P)$. Deste modo, $D(\phi)$ é conexo.

Suponhamos agora que $J(\phi)$ não seja conexo. Então existem compactos não vazios e disjuntos, P e Q , tais que $J(\phi) = P \cup Q$. Como $D(\phi) = \gamma(\phi) \cup J(\phi)$ e $D(\phi)$ e $J(\phi)$ são compactos, então $\overline{\gamma(\phi)}$ é compacto e consequentemente $\Omega(\phi)$ é não vazio, compacto e conexo. (teorema II, 1.5).

Além disso, como $\Omega(\phi) \subset J(\phi)$, então $\Omega(\phi) \subset P-Q$ ou $\Omega(\phi) \subset Q-P$.

Suponhamos que $\Omega(\phi) \subset P$.

Temos que $D(\phi) = \overline{\gamma(\phi)} \cup J(\phi) = (\overline{\gamma(\phi)} \cup P) \cup Q$ e $D(\phi)$ é conexo.

Logo $(\overline{\gamma(\phi)} \cup P) \cap Q \neq \emptyset$. Usando também que $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi)$ e que $\Omega(\phi) \subset P$, podemos escrever:

$$(\overline{\gamma(\phi)} \cup P) \cap Q = (\gamma(\phi) \cup \Omega(\phi) \cup P) \cap Q = (\gamma(\phi) \cup P) \cap Q = (\gamma(\phi) \cap Q) \cup (P \cap Q) \neq \emptyset$$

Logo $\gamma(\phi) \cap Q \neq \emptyset$, pois $P \cap Q = \emptyset$, e assim, existe $t \geq 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in Q$. Como Q é invariante (teorema I, 2.4), então

$\gamma(\pi(\phi, t)) \subset Q$ e consequentemente $\Omega(\pi(\phi, t)) \subset Q$ pois Q é fechado e $\overline{\gamma(\pi(\phi, t))} = \gamma(\pi(\phi, t)) \cup \Omega(\pi(\phi, t))$, onde $\gamma(\pi(\phi, t)) \subset \overline{\gamma(\pi(\phi, t))} \subset Q$.

Mas $\Omega(\phi) = \Omega(\pi(\phi, t))$ e foi admitido que $\Omega(\phi) \subset P$. Portanto temos uma contradição.

Lema 1.2: Se $\{\xi, \psi\} \subset \Omega(\phi)$, para algum $\phi \in C_H$, então $\{\xi, \psi\} \subset J(\xi) \cap J(\psi)$. Consequentemente, $D(\xi) = J(\xi)$, $\forall \xi \in \Omega(\phi)$.

Lema 1.3: Seja $\phi \in C_H$ e $\psi \in \Omega(\phi)$. Então $J(\phi) \subset J(\psi)$.

Lema 1.4: Sejam $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\psi_n \rightarrow \psi$.

(a) Se $\psi_n \in D(\phi_n)$, para cada n , então $\psi \in D(\phi)$.

(b) Se $\psi_n \in J(\phi_n)$, para cada n , então $\psi \in J(\phi)$.

Prova:

(a) Suponhamos que, para cada n , $\psi_n \in D(\phi_n)$ e que $\psi \notin D(\phi)$.

Então existe vizinhança aberta U de ϕ tal que $\psi \notin \overline{\pi(U, \mathbb{R}^+)}$.

Como $\psi_n \rightarrow \psi$, $\phi_n \rightarrow \phi$ e U é vizinhança de ϕ , então existe subsequência $\{\phi_{n_k}\} \subset U$ tal que $\psi_{n_k} \notin \overline{\pi(U, \mathbb{R}^+)}$.

Como U é aberto e é vizinhança de cada ϕ_{n_k} , então

$$D(\phi_{n_k}) \subset \overline{\pi(U, \mathbb{R}^+)}, \forall k.$$

Mas $\psi_{n_k} \in D(\phi_{n_k})$ e assim $\psi_{n_k} \in \overline{\pi(U, \mathbb{R}^+)}$, para cada k , e temos então uma contradição.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k \in J(\phi_k)$, ou seja, existem sequências

$$\{\phi_n^k\} \subset C_H \text{ e } \{t_n^k\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tais que } \phi_n^k \rightarrow \phi_k; \quad t_n^k \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$\pi(\phi_n^k, t_n^k) \rightarrow \psi_k, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Sejam $\theta_n = \phi_n^n$ e $t_n = t_n^n$. Então $\theta_n \rightarrow \phi$, $t_n \rightarrow \infty$ e $\pi(\theta_n, t_n) \rightarrow \psi$

$$\text{pois } ||\theta_n - \phi|| \leq ||\theta_n - \phi_n|| + ||\phi_n - \phi||$$

$$\text{e } ||\pi(\theta_n, t_n) - \psi|| \leq ||\pi(\theta_n, t_n) - \psi_n|| + ||\psi_n - \psi||.$$

Logo $\psi \in J(\phi)$.

Para finalizar este parágrafo, vamos apresentar os conceitos de prolongamento relativo e limite prolongacional relativo, os quais tem muita aplicação na teoria de estabilidade relativa.

Definição 1.3: Sejam $M \subset C_H$ compacto e $U \subset C_H$ qualquer.

Definimos o conjunto prolongamento de M relativamente a U por

$$D(M, U) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\phi \in M} \{\psi \in C_H \mid \text{existem sequências } \{\phi_n\} \subset U$$

$$\text{e } \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tais que } \phi_n \rightarrow \phi \text{ e } \pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi\}.$$

o conjunto limite prolongacional de M relativamente a U por

$$J(M, U) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\phi \in M} \{ \psi \in C_H \mid \text{existem sequências } \{\phi_n\} \subset U \text{ e } \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \}$$

tais que $\phi_n \rightarrow \phi$, $t_n \rightarrow \infty$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$.

É imediato que $J(M, U) \subset D(M, U)$.

Teorema 1.11: Se $M \subset C_H$ é compacto e $U \subset C_H$, então valem as seguintes proposições:

(a) $D(M, U)$ e $J(M, U)$ são fechados e invariantes.

(b) $D(M, U) \subset \gamma(M) \cup J(M, U)$. Se U for fechado,

$$D(M, U) = \gamma(M \cap U) \cup J(M, U).$$

(c) Se U é vizinhança de M , então $D(M, U) = D(M)$ e

$$J(M, U) = J(M), \text{ onde } D(M) = \bigcup \{D(\phi) \mid \phi \in M\} \text{ e}$$

$$J(M) = \bigcup \{J(\phi) \mid \phi \in M\}.$$

Prova:

(a) Mostremos primeiramente que $D(M, U)$ é invariante. Para isto, tomemos $\psi \in D(M, U)$ e $t_0 \geq 0$ fixados arbitrariamente. Então existem $\phi \in M$ e sequências $\{\phi_n\} \subset U$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Consideremos a sequência $\tau_n = t_0 + t_n \geq 0$.

Então $\pi(\phi_n, \tau_n) = \pi(\pi(\phi_n, t_n), t_0) \rightarrow \pi(\psi, t_0)$ e deste modo,

$\pi(\psi, t_0) \in D(M, U)$. De modo análogo mostra-se que $J(M, U)$ é invariante.

Mostremos agora que $D(M, U)$ é fechado. Seja $\{\psi_n\}$ se-

quência em $D(M, U)$ tal que $\psi_n \rightarrow \psi$. Para cada k , $\psi_k \in D(M, U)$, e assim, existem sequências $\{\phi_n^k\} \subset U$ e $\{t_n^k\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$\phi_n^k \rightarrow \phi^k, \text{ para algum } \phi^k \in M, \text{ e } \pi(\phi_n^k, t_n^k) \rightarrow \psi_k.$$

Como $\{\phi^k\} \subset M$ e M é compacto, existe subsequência, que continuaremos indicando por $\{\phi^k\}$, que é convergente em M , ou seja, existe $\phi \in M$ tal que $\phi^k \rightarrow \phi$. Sejam $t_n = t_n^n$ e $\phi_n = \phi_n^n$. Então $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$ pois

$$||\phi_n - \phi|| \leq ||\phi_n^n - \phi^n|| + ||\phi^n - \phi|| \quad e$$

$$||\pi(\phi_n, t_n) - \psi|| \leq ||\pi(\phi_n, t_n) - \psi_n|| + ||\psi_n - \psi||.$$

Logo $\psi \in D(M, U)$. De modo análogo mostra-se que $J(M, U)$ é fechado.

(b) Seja $\psi \in D(M, U)$. Então existem sequências $\{\phi_n\} \subset U$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$, para algum $\phi \in M$, e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Se $t_n \rightarrow \infty$, então $\psi \in J(M, U)$. Se existe subsequência $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \rightarrow \bar{t} \geq 0$, então $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$, pois $\phi_n \rightarrow \phi$ e π é contínua. Pela unicidade do limite, $\psi = \pi(\phi, \bar{t})$ e assim, $\psi \in \gamma(M)$. Logo $D(M, U) \subset \gamma(M) \cup J(M, U)$.

Suponhamos agora que U seja fechado.

Se $\psi \in D(M, U)$, então $\psi \in J(M, U)$ ou $\psi = \pi(\phi, \bar{t})$, com $\phi \in M$ e $\bar{t} \geq 0$. Como U é fechado e $\{\phi_n\} \subset U$, então $\phi \in U$.

Assim $\psi \in \gamma(M \cap U) \cup J(M, U)$.

Por outro lado, se $\psi \in \gamma(M \cap U) \cup J(M, U)$, então, ou

$\psi \in J(M, U)$, e neste caso, $\psi \in D(M, U)$, ou $\psi \in \gamma(M \cap U)$. Neste caso, $\psi = \pi(\phi, \bar{t})$ para algum $\phi \in M \cap U$ e $\bar{t} \geq 0$. Assim, basta tomar $\phi_n = \phi$ e $t_n = \bar{t}$ e teremos que $\psi \in D(M, U)$. Logo $\gamma(M \cap U) \cup J(M, U) \subset D(M, U)$.

(c) É imediato que $D(M, U) \subset D(M)$. Seja $\psi \in D(M)$. Então existem $\phi \in M$ e sequências $\{\phi_n\} \subset C_H$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Se $\phi \in M$, então $\phi \in U$ pois U é vizinhança de M , e como $\phi_n \rightarrow \phi$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\phi_n - \phi\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Assim, existe subsequência de $\{\phi_n\}$ em U que converge para ϕ e deste modo $\psi \in D(M, U)$. De modo análogo mostra-se que $J(M, U) = J(M)$.

Devemos observar que este teorema que acabamos de demonstrar é válido para os S.D., mas fizemos algumas mudanças nas hipóteses. Por exemplo, no ítem (a) não necessitamos de hipótese alguma sobre U e para os S.D. é usado U fechado. No ítem (b) usamos U fechado e para os S.D. é usado U invariante.

2. CONCEITOS RECURSIVOS

Apresentaremos primeiramente o conceito de conjunto re cursivo com relação a outro, a partir do qual obtemos estabilida de segundo Poisson e pontos não transgressores.

Definiremos ainda, neste parágrafo, estabilidade segun do Lagrange e movimentos recorrentes. Birkhoff mostrou que o con ceito de movimentos recorrentes está intimamente ligado ao de conjunto compacto minimal (vide [5]) e nós mostraremos isto no próximo parágrafo.

Definição 2.1: Um conjunto $A \subset C_H$ é recursivo com relação ao conjunto $B \subset C_H$ se, para cada $T \in \mathbb{R}^+$, existem $\bar{t} \geq T$ e $\phi \in B$ tais que $\pi(\phi, \bar{t}) \in A$.

Se A é recursivo com relação a êle mesmo, dizemos que A é auto recursivo.

Teorema 2.1: Se ϕ é um ponto periódico, então $\{\phi\}$ é auto recursivo.

Definição 2.2: Um elemento $\phi \in C_H$ é estável segundo Poisson se toda vizinhança de ϕ é recursiva com relação a $\{\phi\}$.

Algumas caracterizações do conceito acima estão no seguinte teorema que é de fácil demonstração:

Teorema 2.2: Se $\phi \in C_H$, as seguintes proposições são equivalentes:

- (a) ϕ é estável segundo Poisson.
- (b) dada vizinhança U de ϕ e $T > 0$, existe $\bar{t} > T$ tal que $\pi(\phi, \bar{t}) \in U$.
- (c) $\phi \in \Omega(\phi)$.
- (d) $\overline{\gamma(\phi)} = \Omega(\phi)$.
- (e) $\gamma(\phi) \subset \Omega(\phi)$.
- (f) para todo $\varepsilon > 0$, existe $\bar{t} \geq 1$ tal que $\pi(\phi, \bar{t}) \in S(\phi, \varepsilon)$.

Corolário: Se ϕ é estável segundo Poisson, então, para todo $t \geq 0$, $\pi(\phi, t)$ também o é.

Se ϕ é Poisson estável, dizemos que o movimento π_ϕ e a trajetória $\gamma(\phi)$ são Poisson estáveis.

O teorema seguinte nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma trajetória limitada seja igual ao conjunto Ω limite.

Teorema 2.3: Para cada $\phi \in C_H$ tal que $\gamma(\phi)$ é limitada, então $\gamma(\phi) = \Omega(\phi)$ se e somente se ϕ é um ponto crítico ou um ponto periódico.

Prova: ($\longleftarrow$)

Suponhamos então que ϕ seja periódico com período fundamental T_0 . Seja $t_n = nT_0$. Então $t_n \rightarrow \infty$ e $\pi(\phi, t_n) = \pi(\phi, nT_0) = \phi$, $\forall n$. Logo $\phi \in \Omega(\phi)$ e como $\Omega(\phi)$ é invariante, então $\gamma(\phi) \subset \Omega(\phi)$. Por outro lado, como ϕ é periódico, então $\gamma(\phi)$ é compacto e assim, $\Omega(\phi) \subset \gamma(\phi)$.

($\implies$)

Pelo teorema II, 1.7, $\gamma(\phi)$ é auto interceptável pois $\gamma(\phi) = \Omega(\phi)$ e $\gamma(\phi)$ é limitada. Então $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a S^1 ou E^1 ou $\{\phi\}$ ou a figura do seis. Se $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a E^1 , então $\lambda > 0$ e $G = \mathbb{R}$ (segundo as notações do teorema I, 2.1). Assim, se $\psi \in \gamma(\phi)$ é tal que $\psi = \pi(\phi, t)$, com $0 < t < \lambda$, então $\psi \notin \Omega(\phi)$, pois se $\psi \in \Omega(\phi)$, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$. Como $t_n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > \lambda$, $\forall n \geq n_0$, e assim, $\pi(\phi, t_n) = \pi(\phi, t_{n_0})$, $\forall n \geq n_0$. Deste modo $\pi(\phi, t_n) \not\rightarrow \psi$ e temos uma contradição. Assim, se $\psi \notin \Omega(\phi)$, então $\gamma(\phi) \not\subset \Omega(\phi)$ e consequentemente $\gamma(\phi)$ não pode ser homeomorfo a E^1 . Usando o mesmo raciocínio, podemos mostrar que $\gamma(\phi)$ não é homeomorfo à figura do seis (exatamente porque $\lambda > 0$). Logo, $\gamma(\phi)$ é homeomorfo a S^1 ou a $\{\phi\}$, ou seja, ϕ é um ponto periódico ou um ponto crítico.

Corolário : Seja $\phi \in C_H$ tal que $\gamma(\phi)$ é compacto. Então ϕ é Poisson estável $\iff \phi$ é periódico ou crítico.

A hipótese de $\gamma(\phi)$ ser compacto não pode ser subtraída do corolário anterior, pois em [12], pg. 345, exemplo 4.4, temos exemplo de pontos Poisson estáveis que não são periódicos ou de equilíbrio.

Devemos observar ainda que para os S.D. vale o teorema 11, 2.3, inclusive sem utilizar a hipótese de $\gamma(\phi)$ ser limitada, mas para a prova é utilizado o fato de $\pi(\phi, t)$ ser definida para todo $t \in \mathbb{R}$, o que não ocorre no nosso caso.

Definição 2.3: Um elemento $\phi \in C_H$ é não transgressor se toda vizinhança de ϕ é auto recursiva.

Uma caracterização importante do conceito acima é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.4: Um elemento $\phi \in C_H$ é não transgressor se e somente se $\phi \in J(\phi)$.

Prova: ($\implies$)

Tomemos duas seqüências $\{\varepsilon_n\}$ e $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $t_n \rightarrow \infty$. Como ϕ é não transgressor, cada vizinhança $S(\phi, \varepsilon_n)$ é auto recursiva, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\phi_n \in S(\phi, \varepsilon_n)$ e $\tau_n > t_n$ tais que $\pi(\phi_n, \tau_n) \in S(\phi, \varepsilon_n)$.

Assim, $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, \tau_n) \rightarrow \phi$ pois $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Como $\tau_n \rightarrow \infty$, então $\phi \in J(\phi)$.

($\impliedby$)

Se $\phi \in J(\phi)$, existem seqüências $\phi_n \rightarrow \phi$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \phi$. Sejam U vizinhança de ϕ e $T > 0$ quaisquer.

Tomando subsequência se necessário, podemos supor que $t_n > T$, $\phi_n \in U$ e $\pi(\phi_n, t_n) \in U$, $\forall n$. Logo U é auto recursivo e portanto ϕ é não transgressor.

Lema 2.1: Se ϕ é não transgressor, então para todo $t \geq 0$, $\pi(\phi, t)$ também o é.

Se ϕ é um ponto não transgressor, então a trajetória

$\gamma(\phi)$ e o movimento π_ϕ são ditos não transgressores.

Lema 2.2: Sejam $\phi \in C_H$ e $\psi \in \Omega(\phi)$. Então ψ é não transgressor.

Prova: Pelo lema II, 1.3, temos que $J(\phi) \subset J(\psi)$. Como $\Omega(\phi) \subset J(\phi)$, então $\psi \in J(\psi)$, ou seja, ψ é não transgressor.

Uma consequência imediata do lema acima é que $\Omega(\phi) \subset T \subset J(\Omega(\phi))$, onde T é o conjunto dos pontos não transgressores e $J(\Omega(\phi)) = \bigcup \{J(\psi) \mid \psi \in \Omega(\phi)\}$.

Um resultado que mostra a ligação que existe entre os pontos Poisson estáveis e os não transgressores é o seguinte:

Teorema 2.5: Sejam P o conjunto dos pontos Poisson estáveis e T o conjunto dos pontos não transgressores. Então $\bar{P} \subset T$.

Prova: Se $\phi \in \bar{P}$, existe sequência $\{\phi_n\}$ em P tal que $\phi_n \rightarrow \phi$. Para cada k , $\phi_k \in \Omega(\phi_k)$, ou seja, existe sequência $t_n^k \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi_k, t_n^k) \rightarrow \phi_k$, quando $n \rightarrow \infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n^k > k$ e $||\pi(\phi_k, t_n^k) - \phi_k|| \leq 1/k$, $\forall n$. Tomando $t_n = t_n^n$, então $t_n \rightarrow \infty$ e

$$||\pi(\phi_n, t_n) - \phi|| \leq ||\pi(\phi_n, t_n) - \phi_n|| + ||\phi_n - \phi|| \leq ||\phi_n - \phi|| + 1/n.$$

Logo $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \phi$ e portanto $\phi \in J(\phi)$, ou seja $\phi \in T$.

Teorema 2.6: T é um conjunto fechado.

Prova: Seja $\{\phi_n\} \subset T$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$.

Para cada n , $\phi_n \in J(\phi_n)$ e pelo lema II, 1.4, $\phi \in J(\phi)$. Logo $\phi \in T$.

Vamos introduzir o conceito de ponto recorrente, que como já dissemos, está muito relacionado com os conjuntos compactos minimais.

Definição 2.4: Seja $\phi \in C_H$. A aplicação movimento π_ϕ é chamada recorrente se para cada $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que

$$\gamma(\phi) \subset S(\pi(\phi, [t, t + T]), \epsilon), \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 2.3: Sejam $\phi \in C_H$ e $\psi \in \gamma(\phi)$. Se π_ϕ é recorrente, então π_ψ também o é.

Se o movimento π_ϕ é recorrente, dizemos que o ponto $\phi \in C_H$ e a trajetória $\gamma(\phi)$ são recorrentes.

Teorema 2.7: Todo movimento recorrente é Poisson estável.

Prova: Suponhamos π_ϕ recorrente. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que

$$\gamma(\phi) \subset S(\pi(\phi, [t, t + T]), \epsilon/2) = S, \quad \forall t \geq 0.$$

Sejam $U = S(\phi, \epsilon)$ e $\tau > 0$.

Como $\gamma(\phi) \subset S$, então $\phi \in S$, ou seja,

$$d(\phi, \pi(\phi, [t, t + T])) < \epsilon/2, \quad \forall t \geq 0 \text{ e em particular para } t \geq T.$$

Assim, existe t_0 , $t \leq t_0 \leq t + T$ tal que

$$d(\phi, \pi(\phi, t_0)) < \epsilon, \quad \forall t \geq T. \text{ Além disso, } t_0 \geq \tau \text{ pois:}$$

se $\tau \geq T$, podemos tomar $t = \tau$ e se $\tau < T$, qualquer $t \geq T$ satisfaz pois $\tau < T \leq t \leq t_0 \leq t + T$, $\forall t \geq T$.

Assim, existe $t_0 > \tau$ tal que $\pi(\phi, t_0) \in U$, ou seja, ϕ é Poisson estável.

Um outro teorema importante referente a movimento recorrente é o seguinte:

Teorema 2.8: O fecho de qualquer trajetória recorrente é um conjunto compacto.

Prova: Seja $\gamma(\phi)$ uma trajetória recorrente. Então $\gamma(\phi)$ é limitada, pois está contida num conjunto limitado. Logo, pelo lema I, 1.2, $\gamma(\phi)$ é compacto.

O último conceito que apresentaremos neste parágrafo é o de estabilidade segundo Lagrange.

Definição 2.5: Seja $\phi \in C_H$. Dizemos que a aplicação movimento π_ϕ é estável segundo Lagrange se $\overline{\gamma(\phi)}$ é compacto.

Os seguintes resultados são imediatos.

(i) Se $||\pi(\phi, t)|| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$, então π_ϕ é estável segundo Lagrange.

(ii) Se π_ϕ é estável segundo Lagrange, então $\Omega(\phi)$ é não vazio, compacto e conexo. Além disso, $\pi(\phi, t) \rightarrow \Omega(\phi)$, quando $t \rightarrow \infty$.

3. CONJUNTOS MINIMAIS

Definição 3.1: Um conjunto $M \subset C_H$ é minimal se M é não vazio, fechado e invariante e nenhum subconjunto próprio de M tem estas propriedades.

Um ponto crítico e a trajetória de um movimento periódico

dico são os exemplos mais simples de conjuntos minimais e a teoria de Poincaré-Bendixson mostra que para um espaço de fase X homeomorfo a um subconjunto do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, se $M \subset X$ é compacto minimal, então M é um ponto crítico ou é uma trajetória periódica. (mais detalhes em [11], pg. 185, teorema 12.1). No entanto, isto nem sempre ocorre, ou seja, existe exemplo de conjunto minimal que contém mais de uma trajetória ([4]), pg. 40, teorema 3.13).

Os dois teoremas seguintes nos fornecem caracterizações importantes de conjuntos minimais.

Teorema 3.1: Um conjunto não vazio M é minimal se e somente se $M = \overline{\gamma(\phi)}$, $\forall \phi \in M$.

Prova: $(\implies)$

Se M é minimal e $\phi \in M$, então $\overline{\gamma(\phi)} \subset M$, pois M é fechado e invariante. Por outro lado, $\overline{\gamma(\phi)}$ é um conjunto não vazio, fechado e invariante e como M é minimal, então $M \subset \overline{\gamma(\phi)}$.

$(\impliedby)$

Se $M = \overline{\gamma(\phi)}$, $\forall \phi \in M$, então M é não vazio, fechado e invariante. Se M não for minimal, existe $P \subsetneq M$, P não vazio, fechado e invariante. Assim, se $\phi \in P$, então $\overline{\gamma(\phi)} \subset P$. Além disso, $\phi \in M$ pois $P \subset M$ e portanto $M = \overline{\gamma(\phi)}$. Logo $M \subset P$, o que é um absurdo.

Teorema 3.2: Um conjunto não vazio e compacto M é minimal

$$\iff M = \Omega(\phi), \forall \phi \in M.$$

Prova: $(\implies)$

Se M é minimal, pelo teorema anterior, $M = \overline{\gamma(\phi)}$, $\forall \phi \in M$.

Como $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi)$, então $\Omega(\phi) \subset M$. Por outro lado, $\Omega(\phi)$ é não vazio, fechado e invariante e M é minimal. Então $M \subset \Omega(\phi)$.

$$(\impliedby)$$

Suponhamos que $M = \Omega(\phi)$, $\forall \phi \in M$. Então M é fechado e invariante e se $\phi \in M$, então $\overline{\gamma(\phi)} \subset M$.

Por outro lado, $\overline{\gamma(\phi)} = \gamma(\phi) \cup \Omega(\phi) = \gamma(\phi) \cup M$. Então $M \subset \overline{\gamma(\phi)}$ e pelo teorema anterior, M é minimal.

Teorema 3.3: Seja $M \subset C_H$ minimal. Então M é compacto se e somente se existe alguma trajetória em M que seja limitada.

Prova: $(\implies)$

Se M é compacto e minimal, então $M = \overline{\gamma(\phi)}$, $\forall \phi \in M$, ou seja, toda trajetória em M é limitada.

$$(\impliedby)$$

Suponhamos que existe $\phi \in M$ tal que $\gamma(\phi)$ seja limitada. Então

$\overline{\gamma(\phi)}$ é compacto (lema 1, 1.2) e como M é minimal, $M = \overline{\gamma(\phi)}$.

Logo M é compacto.

Um resultado imediato, mas que convém ressaltar é que todo ponto em um compacto minimal M é Poisson estável, pois se $\phi \in M$, então $\overline{\gamma(\phi)} = M = \Omega(\phi)$.

O conceito de recorrência é básico na teoria de conjuntos compactos minimais e o teorema seguinte, devido a Birkhoff, mostra isto.

Teorema 3.4: Um conjunto compacto M é minimal se e somente se é o fecho de uma trajetória recorrente.

Prova: $(\implies)$

Mostremos que toda trajetória em M é recorrente. Suponhamos então que isto não aconteça, ou seja, existe $\phi \in M$ tal que π_ϕ não é recorrente. Então, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $\{T_n\}$, $\{t_n\}$ e $\{\tau_n\}$ em $\mathbb{R}^+$ que satisfazem:

$T_n \rightarrow \infty$ e $\pi(\phi, \tau_n) \notin S(\pi(\phi, [t_n, t_n + T_n]), \varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots$ e

assim $||\pi(\phi, \tau_n) - \pi(\phi, t_n + t)|| \geq \varepsilon$, se $t_n \leq t \leq T_n$. Como $\phi \in M$ e

M é invariante, as sequências $\{\pi(\phi, t_n)\}$ e $\{\pi(\phi, \tau_n)\}$ estão em M . Como M é compacto, podemos supor, tomando subsequências se necessário, que estas sequências convergem. Então, existem ξ, ψ em M tais que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \xi$ e $\pi(\phi, \tau_n) \rightarrow \psi$, ou seja, ξ e ψ es

tão em $M = \overline{\gamma(\phi)}$. Consideremos agora o movimento π_ξ . Para todo $t \geq 0$, vale a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} ||\pi(\xi, t) - \psi|| &\geq ||\pi(\phi, t_n + t) - \pi(\phi, \tau_n)|| - \\ &- ||\pi(\xi, t) - \pi(\phi, t_n + t)|| - ||\pi(\phi, \tau_n) - \psi|| \geq \varepsilon \quad \text{pois} \\ \pi(\phi, t_n + t) &\rightarrow \pi(\xi, t) \quad \text{e} \quad \pi(\phi, \tau_n) \rightarrow \psi. \end{aligned}$$

Logo $||\pi(\xi, t) - \psi|| \geq \varepsilon$, ou seja, $\psi \notin \overline{\gamma(\xi)} = M$ e isto é um absurdo.

($\Leftarrow$)

Mostremos agora que o fecho de uma trajetória recorrente é um conjunto minimal. Seja $M = \overline{\gamma(\phi)}$, onde $\gamma(\phi)$ é recorrente. Pelo teorema II, 2.8, M é compacto. Se M não é minimal, então existe subconjunto $N \subsetneq M$, N não vazio, compacto e invariante. Além disso, $\phi \notin N$ pois se $\phi \in N$, então $\overline{\gamma(\phi)} \subset N$, ou seja, $M \subset N$, e isto é uma contradição. Assim, $d(\phi, N) = \varepsilon > 0$ e como π_ϕ é recorrente, existe $T > 0$ tal que $\gamma(\phi) \subset S(\pi(\phi, [t, t+T]), \varepsilon/3) = S$, $\forall t \geq 0$. Seja $\psi \in N$. Então $\psi \notin \gamma(\phi)$ pois se $\psi = \pi(\phi, t_0)$, para algum $t_0 \geq 0$, então $\pi(\phi, t) \in N$, $\forall t \geq t_0$. Como $\gamma(\phi) \subset S$, então $\psi \in S$. Mas $\pi(\phi, [t_0, t_0 + T]) \subset N$ e portanto $d(\phi, N) < \varepsilon/3$, pois $\phi \in S$. Assim, chegamos a um absurdo, pois $d(\phi, N) = \varepsilon$. Logo, se $\psi \in N$, então $\psi \in M = \overline{\gamma(\phi)}$ pois $N \subset M$. Como $\psi \notin \gamma(\phi)$, então $\psi \in \Omega(\phi)$ e assim, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$. Além disso, pela continuidade de π , existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $||\pi(\psi, t) - \pi(\xi, t)|| < \varepsilon/3$, desde que $||\psi - \xi|| < \delta$ e $t \in [0, T]$.

Para cada n , seja $\phi_n = \pi(\phi, t_n)$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\pi(\psi, t) - \pi(\phi, t_n + t)|| < \varepsilon/3$, para $t \in [0, T]$, pois $\phi_n \rightarrow \psi$. Logo $||\phi - \pi(\phi, t_n + t)|| \geq ||\phi - \pi(\psi, t)|| - ||\pi(\psi, t) - \pi(\phi, t_n + t)|| \geq \varepsilon - \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3$, para $0 \leq t \leq T$.

Mas $\phi \in \gamma(\phi)$ e chegamos então a uma contradição.

Sabemos que existem conjuntos minimais não compactos que contêm mais do que uma trajetória, mas, nesses casos, os movimentos não são recorrentes. Isto mostra que o teorema acima não é necessariamente verdadeiro para conjuntos minimais não compactos.

Teorema 3.5: Todo conjunto não vazio, compacto e invariante contém um conjunto compacto minimal.

Prova: Seja $A \neq \emptyset$, A compacto e invariante. Consideremos a família F de todos os subconjuntos não vazios, compactos e invariantes de A . F é não vazia pois $A \in F$, e F é parcialmente ordenada pela inclusão. Assim, o lema de Zorn garante a existência de $M \in F$ que não contém subconjuntos compactos e invariantes. Portanto M é minimal.

Teorema 3.6: Um conjunto $A \subset C_H$ fechado e invariante contém um conjunto compacto minimal se e somente se existe $\phi \in A$ que seja Lagrange estável.

Prova: $(\implies)$

Se A contém algum conjunto M compacto e minimal então

$$M = \overline{\gamma(\phi)}, \quad \forall \phi \in M.$$

Como $M \subset A$, então existe $\phi \in A$ tal que $\overline{\gamma(\phi)}$ é compacto.

$(\impliedby)$

Suponhamos que existe $\phi \in A$ com $\overline{\gamma(\phi)}$ compacto. Pelo teorema II, 1.5, $\Omega(\phi)$ é não vazio, compacto e invariante e pelo teorema anterior, então $\Omega(\phi)$ contém um conjunto compacto minimal M . Além disso, $\overline{\gamma(\phi)} \subset A$, pois $\phi \in A$ e portanto, $M \subset \Omega(\phi) \subset \overline{\gamma(\phi)} \subset A$.

Teorema 3.7: Seja $\phi \in C_H$ tal que $M = \gamma(\phi)$ é compacto. Então M é minimal $\iff M$ é periódico ou um ponto crítico.

Prova: Se M é minimal, então $M = \gamma(\phi) = \Omega(\phi)$. Como $\gamma(\phi)$ é limitada, pelo teorema II, 2.3, então $\gamma(\phi)$ é periódico ou um ponto crítico. A recíproca é imediata.

Vamos voltar um pouco aos movimentos recorrentes fornecendo um outro caminho para caracterizá-los, com o auxílio dos conjuntos de números relativamente densos.

Definição 3.2: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^+$ é relativamente denso se existir $T > 0$ tal que

$$D \cap (t, t + T) \neq \emptyset, \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 3.9: Seja $\phi \in C_H$ tal que $\|\pi(\phi, t)\| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$. Então π_ϕ é recorrente se e somente se, dado $\epsilon > 0$, o conjunto

$$K_\epsilon = \{t \geq 0 \mid \|\phi - \pi(\phi, t)\| < \epsilon\}$$

é relativamente denso.

Prova: $(\implies)$

Se π_ϕ é recorrente, dado $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que $\gamma(\phi) \subset S(\pi(\phi, [t, t + T]), \epsilon)$, $\forall t \geq 0$.

Logo $K_\epsilon \cap (t, t + T) \neq \emptyset$, $\forall t \geq 0$, pois se existisse $\bar{t} \geq 0$ tal que $\|\phi - \pi(\phi, t_0)\| \geq \epsilon$, $t_0 \in (\bar{t}, \bar{t} + T)$, então,

$\phi \notin S(\pi(\phi, [\bar{t}, \bar{t} + T]), \epsilon)$ e isto não ocorre pois

$\gamma(\phi) \subset S(\pi(\phi, [t, t + T]), \epsilon)$, $\forall t \geq 0$. Logo K_ϵ é relativamente denso.

$(\impliedby)$

Suponhamos que, dado $\epsilon > 0$, K_ϵ é relativamente denso.

Então existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que $K_\epsilon \cap (t, t + T) \neq \emptyset$, $\forall t \geq 0$.

Pelo lema I, 1.2, $\overline{\gamma(\phi)}$ é compacto. Então, para mostrarmos que π_ϕ é recorrente, basta mostrarmos que $\overline{\gamma(\phi)}$ é minimal. (pelo teorema II, 3.4). Suponhamos então que $\overline{\gamma(\phi)}$ não seja minimal. Então existe subconjunto minimal $M \subset \overline{\gamma(\phi)}$, com $M \neq \overline{\gamma(\phi)}$ (teorema II, 3.5).

Assim, $\phi \notin M$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(\phi, M) = 3\varepsilon > 0$.

Seja $\psi \in M$. Como π é contínua, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$||\pi(\psi, t) - \pi(\xi, t)|| < \varepsilon$, desde que $||\psi - \xi|| < \delta$ e $t \in [0, T]$, $T = T(\varepsilon)$. Então $\psi \notin \gamma(\phi)$. De fato:

Suponhamos que $\psi = \pi(\phi, t_0)$, para algum $t_0 \geq 0$. Como M é invariante e $\psi \in M$, então $\pi(\phi, t) \in M$, $\forall t \geq t_0$.

Com $K_\varepsilon \cap (t, t + T) \neq \emptyset$, $\forall t \geq 0$, existe $t_1 = t_1(t)$, $t < t_1 < t + T$ tal que $||\phi - \pi(\phi, t_1)|| < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$. Tomando $t = t_0$ temos que $||\phi - \pi(\phi, t_1)|| < \varepsilon$ para $t_0 < t_1 < t_0 + T$.

Como $t_0 < t_1$, então $\pi(\phi, t_1) \in M$ e chegamos num absurdo, pois $d(\phi, M) = 3\varepsilon$. Logo $\psi \notin \gamma(\phi)$.

Como $\psi \in M = \overline{\gamma(\phi)}$, então $\psi \in \Omega(\phi)$ e assim, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$. Logo, para n suficientemente grande,

$$||\pi(\psi, t) - \pi(\phi, t_n + t)|| < \varepsilon, \quad t \geq 0 \quad (*)$$

Sendo assim, para $t \in [t_n, t_n + T]$, temos

$$\begin{aligned} ||\phi - \pi(\phi, t)|| &\geq ||\phi - \pi(\psi, t - t_n)|| - ||\pi(\phi, t) - \pi(\psi, t - t_n)|| > \\ &> 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon, \quad \text{pois} \end{aligned}$$

$\pi(\psi, t - t_n) \in M$ e $||\pi(\phi, t) - \pi(\psi, t - t_n)|| < \varepsilon$, tomando $t - t_n$ ao invés de t em (*).

Logo $K_\varepsilon \cap [t_n, t_n + T] = \emptyset$ e isto é um absurdo.

Assim $\overline{\gamma(\phi)}$ é minimal e portanto π_ϕ é recorrente.

4. CONCEITOS DISPERSIVOS

Vamos falar rapidamente sobre os conceitos dispersivos, que são, de uma certa forma, a negação dos conceitos recursivos.

Definição 4.1: Seja $\phi \in C_H$. Dizemos que

- a) π_ϕ é Lagrange instável se $\overline{\gamma(\phi)}$ não é compacto.
- b) ϕ é Poisson instável se $\phi \notin \Omega(\phi)$.
- c) ϕ é transgressor se $\phi \notin J(\phi)$.

É imediato que se ϕ é transgressor então é Poisson instável pois $\Omega(\phi) \subset J(\phi)$, $\forall \phi \in C_H$.

Estamos agora em condições de definir formalmente alguns conceitos de dispersividade de um S.S.D. π .

Definição 4.2: Um S.S.D. π é dito

- a) Lagrange instável se π_ϕ é Lagrange instável, para todo $\phi \in C_H$.
- b) Poisson instável se ϕ é Poisson instável, $\forall \phi \in C_H$.
- c) completamente instável se ϕ é transgressor, $\forall \phi \in C_H$.
- d) dispersivo se dados ϕ e ψ quaisquer em C_H , existem vizinhanças U_ϕ de ϕ e U_ψ de ψ tais que U_ϕ não é recursiva com relação a U_ψ .

Teorema 4.1: Seja $\phi \in C_H$. O movimento π_ϕ é transgressor $\iff$ existem vizinhança U de ϕ e $T = T(\phi) > 0$ tais que $U \cap \pi(U, t) = \emptyset$, $\forall t \geq T$.

Prova: ϕ é transgressor $\iff \phi \notin J(\phi) \iff$ existe vizinhança U de ϕ tal que U não é auto recursiva $\iff$ existe $T > 0$ tal que, para todo $t \geq T$ e todo $\psi \in U$, temos que $\pi(\psi, t) \notin U \iff U \cap \pi(U, t) = \emptyset$, $\forall t \geq T$.

Teorema 4.2: Valem as seguintes implicações, com relação à definição 4.2:

$$(d) \implies (c) \implies (b)$$

Prova:

(d) $\implies$ (c) Se π é dispersivo, dados ϕ e ψ em C_H , existem vizinhanças $U(\phi)$ e $U(\psi)$ tais que $U(\psi)$ não é recursivo com relação a $U(\phi)$. Tomando $\phi = \psi$, pelo teorema anterior, ϕ é transgressor. Como ϕ é arbitrário, π é completamente instável.

(c) $\implies$ (b) é imediato pois todo movimento transgressor é Poisson instável.

Devemos observar que para os S.D. ainda vale (b) $\implies$ (a) (vide [12], pg. 405), o que porém já não ocorre em nosso caso. Consideremos por exemplo uma trajetória $\gamma(\phi)$ que alcance um ponto de equilíbrio em tempo finito (exemplo 1, 2.1) ou ainda uma trajetória homeomorfa à figura do seis. Se tomarmos um elemento

$\psi = \pi(\phi, t) \in \gamma(\phi)$, com $0 \leq t < \lambda$, então $\gamma(\psi)$ é compacto mas $\psi \notin \Omega(\psi)$.

Existem exemplos que mostram que nenhum dos conceitos (a), (b), (c), (d) implica o próximo. (vide [4], pg. 44).

Teorema 4.3: As seguintes proposições são equivalentes:

(a) π é dispersivo

(b) Dados ϕ e ψ em C_H , existem vizinhanças $U(\phi)$ e $U(\psi)$ e constante $T > 0$ tais que

$$U(\phi) \cap \pi(U(\psi), t) = \emptyset, \quad \forall t \geq T.$$

(c) $\phi \notin J(\psi)$, para quaisquer ϕ, ψ em C_H .

Prova:

(a) $\implies$ (b). Se π é dispersivo, dados ϕ e ψ em C_H , existem vizinhanças $U(\phi)$ e $U(\psi)$ tais que $U(\phi)$ não é recursiva com relação a $U(\psi)$. Assim, existe $T > 0$ tal que, para todo $t \geq T$ e todo $\xi \in U(\psi)$, temos $\pi(\xi, t) \notin U(\phi)$. Mas $\xi \in U(\psi)$, portanto $\pi(\xi, t) \in \pi(U(\psi), t)$, $\forall t \geq 0$. Logo $U(\phi) \cap \pi(U(\psi), t) = \emptyset$, $\forall t \geq T$.

(b) $\implies$ (c). Sejam ϕ e ψ em C_H tais que $\phi \in J(\psi)$. Então existem sequências $\psi_n \rightarrow \psi$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\pi(\psi_n, t_n) \rightarrow \phi$. Assim, dada vizinhança $U(\psi)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n \in U(\psi)$, $\forall n \geq n_0$ e dada vizinhança $U(\phi)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(\psi_n, t_n) \in U(\phi)$, $\forall n \geq n_1$.

Além disso, como $t_n \rightarrow \infty$, dado $T > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > T$, $\forall n \geq n_2$.

Tomando $N = \max \{n_0, n_1, n_2\}$, então

$\psi_n \in U(\psi)$; $\pi(\psi_n, t_n) \in U(\phi)$ e $t_n \geq T$, $\forall n \geq N$.

Assim $\pi(\psi_n, t_n) \in U(\phi) \cap \pi(U(\psi), t_n)$, $\forall n \geq N$, ou seja, (b) não é válido.

(c) $\implies$ (a) Suponhamos que π não seja dispersivo. Então existem ϕ e ψ em C_H tais que para toda vizinhança U_ϕ de ϕ e U_ψ de ψ , temos que U_ϕ é recursiva com relação a U_ψ .

Assim, para todo $T > 0$, existem $t > T$ e $\xi \in U_\psi$ tais que $\pi(\xi, t) \in U_\phi$. Deste modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $T = n$, existem $t_n > n$ e $\xi_n \in U_\psi$ tais que $\pi(\xi_n, t_n) \in U_\phi$. Logo, construímos seqüências $t_n \rightarrow \infty$ e $\xi_n \rightarrow \psi$ tais que $\pi(\xi_n, t_n) \rightarrow \phi$, ou seja, $\phi \in J(\psi)$.

Teorema 4.4: Se π é dispersivo, então $D(\phi) = \gamma(\phi)$, $\forall \phi \in C_H$ e além disso, não existem pontos de equilíbrio ou trajetórias periódicas.

Prova: Se π é dispersivo, então $J(\phi) = \emptyset$, $\forall \phi \in C_H$.

Assim, $D(\phi) = \gamma(\phi) \cup J(\phi) = \gamma(\phi)$. Além disso, se existisse ϕ tal que $\gamma(\phi)$ seja periódico ou ϕ seja ponto de equilíbrio, então $\gamma(\phi)$ é compacto. Pelo teorema II, 1.5, $\Omega(\phi) \neq \emptyset$ e pelo teorema II, 2.3, $\gamma(\phi) = \Omega(\phi)$. Mas $\Omega(\phi) \subset J(\phi) = \emptyset$ e chegamos a um absurdo.

OBSERVAÇÕES FINAIS

De um modo geral, os conceitos recursivos e dispersivos são válidos para os S.D. mas não encontramos esta teoria para os S.S.D.

O teorema 2.3 não está provado para os S.S.D., embora seja válido para os S.D., inclusive sem utilizar a hipótese de limitação da trajetória $\gamma(\phi)$. Necessitamos desta condição pois trabalhamos apenas com $t \geq 0$.

Já os teoremas 1.6 ; 1.10 ; 3.9 e o corolário do teorema 1.5 valem para os S.D. mas com hipóteses mais fortes e conseguimos enfraquecê-las porque trabalhamos com S.S.D. gerados por E.D.F.R.A. Devemos inclusive ressaltar que a prova do teorema 1.10 é peculiar a este tipo de S.S.D., ou seja, só pode ser adaptada se o S.S.D. tiver todas as características dos S.S.D. gerados por E.D.F.R.A.

Em [4, pg. 29] existe um resultado análogo ao teorema 1.11 para os S.D., todavia no ítem (a) é utilizado U fechado e no ítem (b) U invariante. Nós eliminamos qualquer hipótese em (a) e usamos U fechado em (b).

CAPÍTULO III

TEORIA DE ESTABILIDADE

Este capítulo está voltado para o estudo de várias noções de estabilidade e atração para conjuntos, noções estas mais amplas e que englobam estabilidade e atração de soluções, sendo portanto de estudo mais interessante.

Utilizaremos intensamente os conjuntos limites para mostrar equivalências e as várias implicações que existem entre os conceitos que serão apresentados.

Vamos sempre considerar que A é uma vizinhança do conjunto M se existe aberto U tal que $M \subset U \subset A$. Assim, se M é compacto e A é vizinhança de M , então existe $\delta > 0$ tal que $M \subset S(M, \delta) \subset A$.

1. ATRADORES

Definição 1.1: Sejam $\phi \in C_H$, U vizinhança de ϕ e $M \subset C_H$. Dizemos que

(a) $\gamma(\phi)$ está frequentemente em M se para cada $t \geq 0$ existe $\tau \geq t$ tal que $\pi(\phi, \tau) \in M$.

(b) $\gamma(\phi)$ está ultimamente em M se existe $T = T(\phi) \geq 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in M$, $\forall t \geq T$.

(c) $\gamma(U)$ está ultimamente em M se existe $T = T(U) \geq 0$ tal que $\pi(U, t) \subset M$, $\forall t \geq T$.

Definição 1.2: Seja $M \subset \mathbb{C}_H$. Definimos

(a) Região de atração fraca de M por

$$A_w(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \mathbb{C}_H \mid \gamma(\phi) \text{ está frequentemente em toda vizinhança de } M\}.$$

(b) Região de atração de M por

$$A(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \mathbb{C}_H \mid \gamma(\phi) \text{ está ultimamente em toda vizinhança de } M\}.$$

(c) Região de atração uniforme de M por

$$A_u(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \mathbb{C}_H \mid \text{existe vizinhança } U \text{ de } \phi \text{ tal que } \gamma(U) \text{ está ultimamente em toda vizinhança de } M\}.$$

É imediato que $A_u(M) \subset A(M) \subset A_w(M)$ para todo $M \subset \mathbb{C}_H$ e se $M \subset N \subset \mathbb{C}_H$, então $A_w(M) \subset A_w(N)$; $A(M) \subset A(N)$ e $A_u(M) \subset A_u(N)$.

Exemplo 1.1: No exemplo 11, 1.1, se tomarmos

$$M = \{(1,0)\}, \text{ então}$$

$$A_w(M) = A(M) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$A_u(M) = \mathbb{R}^2 - \{(\alpha,0) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \geq 0\}$$

Vamos agora dar algumas caracterizações de regiões de atração.

Teorema 1.1: Seja $M \subset \mathbb{C}_H$. Então $\phi \in A_w(M)$ se e somente se existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $d(\pi(\phi, t_n), M) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Prova: Suponhamos que $\phi \in A_w(M)$.

Então dados vizinhança V de M e $t \geq 0$, existe $\tau \geq t$ tal que $\pi(\phi, \tau) \in V$.

Assim, para cada n , tomando $V_n = S(M, 1/n)$, podemos construir se-

quência $\{\tau_n\}$, $\tau_n \geq n$, tal que $\pi(\phi, \tau_n) \in V_n$, ou seja, $d(\pi(\phi, \tau_n), M) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos agora que existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow M$. Então, dada vizinhança V de M , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(\phi, t_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$. Assim, dado $t \geq 0$, existe $t_n \geq t$ tal que $\pi(\phi, t_n) \in V$ e portanto $\phi \in A_w(M)$.

Teorema 1.2: Seja $M \subset C_H$ compacto. Então $\phi \in A_w(M) \iff \Omega(\phi) \cap M \neq \emptyset$.

Prova: $(\implies)$

Pelo teorema anterior, se $\phi \in A_w(M)$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\pi(\phi, t_n), M) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ e pela compacidade de M , existe $\psi \in M$ tal que $d(\pi(\phi, t_n), \psi) < \varepsilon$.

Assim $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$ e como $t_n \rightarrow \infty$, então $\psi \in \Omega(\phi)$. Logo $\Omega(\phi) \cap M \neq \emptyset$.

$(\impliedby)$

Se existe algum elemento $\psi \in \Omega(\phi) \cap M$, então existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$. Como $\psi \in M$, então

$d(\pi(\phi, t_n), M) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e pelo teorema anterior, $\phi \in A_w(M)$.

Lema 1.1: Seja $M \subset C_H$ compacto e $\phi \in A_w(M)$. Então

$$J(\phi) \subset J(M) \subset D(M).$$

Prova: Imediata, usando o teorema anterior e o lema II, 1.3.

Teorema 1.3: Sejam $\phi \in C_H$ e $M \subset C_H$ compacto e invariante tais que $\Omega(\phi) \neq \emptyset$ e $\Omega(\phi) \subset M$.

Então $||\pi(\phi, t)|| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq 0$ e consequentemente $\gamma(\phi)$ é relativamente compacto.

Prova: $\Omega(\phi)$ é compacto pois está contido em M . Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(\bigcup M, \Omega(\phi)) = 2\varepsilon$. Se $\psi \in \Omega(\phi)$, então existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$ e se $V = S(\Omega(\phi), \varepsilon)$, então $\Omega(\phi) \subset V \subset M$ e V é vizinhança de ψ . Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(\phi, t_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$. Logo $\pi(\phi, t_{n_0}) \in M$ e como M é invariante, $\pi(\phi, t) \in M$, $\forall t \geq t_{n_0}$.

Como M é compacto, existe $K_1 < H$ tal que

$$||\pi(\phi, t)|| \leq K_1 < H, \forall t \geq t_{n_0}.$$

Para $0 \leq t \leq t_{n_0}$, temos que $\gamma(\phi, [0, t_{n_0}])$ é compacto e assim, existe $K_2 < H$ tal que

$$||\pi(\phi, t)|| \leq K_2 < H, \forall 0 \leq t \leq t_{n_0}.$$

Tomando $H_1 = \min \{K_1, K_2\}$ temos que

$$||\pi(\phi, t)|| \leq H_1 < H, \forall t \geq 0.$$

Teorema 1.4: Seja $M \subset C_H$ compacto. Se $\phi \in A(M)$, então $\gamma(\phi)$ é relativamente compacto.

Prova: Se $\phi \in A(M)$, então dada vizinhança V de M , existe $T = T(\phi, V) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in V$, $t \geq T$.

Pelo lema 1, 1.4, $\gamma(\phi) \cup M$ é compacto e como $\overline{\gamma(\phi)} \subset \gamma(\phi) \cup M$, então $\overline{\gamma(\phi)}$ é compacto.

Teorema 1.5: Seja $M \subset C_H$ compacto e invariante. As seguintes proposições são equivalentes:

- (a) $\phi \in A(M)$.
- (b) $d(\pi(\phi, t), M) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.
- (c) $\Omega(\phi) \neq \emptyset$ e $\Omega(\phi) \subset M$.

Prova:

(a) $\implies$ (b) Se $\phi \in A(M)$, dada vizinhança V de M , existe $T = T(\phi, V) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in V$, $\forall t \geq T$.

Logo $\pi(\phi, t) \rightarrow M$, quando $t \rightarrow \infty$.

(b) $\implies$ (c) Se $d(\pi(\phi, t), M) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, então existe $\psi \in M$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que $d(\pi(\phi, t), \psi) < \varepsilon$, $\forall t \geq T$.

Assim, existe sequência $\{t_n\} \subset [T, \infty)$, $t_n \rightarrow \infty$, tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$ e portanto $\Omega(\phi) \neq \emptyset$, pois $\psi \in \Omega(\phi)$.

Seja agora $\xi \in \Omega(\phi)$ qualquer.

Então existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \xi$.

Como $\pi(\phi, t) \rightarrow M$, quando $t \rightarrow \infty$, e M é compacto, então $\xi \in M$.

Logo $\Omega(\phi) \subset M$.

(c) $\implies$ (a).

Suponhamos que $\Omega(\phi) \neq \emptyset$, $\Omega(\phi) \subset M$ e que $\phi \notin A(M)$. Então existe vizinhança V de M tal que, para todo $T \geq 0$, existe $t \geq T$ tal que $\pi(\phi, t) \notin V$. Assim, podemos construir sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \rightarrow \infty$, tal que $\pi(\phi, t_n) \notin V$. Como $\Omega(\phi) \subset M$, pelo teorema III, 1.3, $\gamma(\phi)$ é relativamente compacto e portanto a sequência

$\{\pi(\phi, t_n)\} \subset \gamma(\phi)$ tem subsequência convergente, a qual continuaremos indicando por $\{\pi(\phi, t_n)\}$. Assim, existe ψ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$, e por construção, $\psi \in \Omega(\phi) \subset M$, ou seja, $\psi \in M$. Deste modo chegamos a uma contradição pois $\pi(\phi, t_n) \notin V$, $\forall n$ e V é vizinhança de M .

Notemos que a hipótese de M ser invariante foi usada apenas na prova de (c) $\implies$ (a).

Teorema 1.6: Se M é compacto e $\phi \in A_U(M)$, então $J(\phi) \neq \emptyset$ e $J(\phi) \subset M$. Se f for uniformemente limitada, vale a recíproca. (f é a aplicação que define a E.D.F.R.A. que gera o S.S.D. π).

Prova: Se $\phi \in A_U(M)$, então dada vizinhança V de M , existem vizinhança U de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(U, t) \subset V$, $\forall t \geq T$. Seja $\{\phi_n\} \subset C_H$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\phi_n \in U$, $\forall n$.

Como $\pi(U, t) \subset V$, para toda vizinhança V de M e todo $t \geq T$, então, para cada n , dada vizinhança $V_n = S(M, 1/n)$, existe $T_n > 0$ tal que $\pi(\phi_n, t_n) \in S(M, 1/n)$, $\forall t_n \geq T_n$. A sequência $\{\pi(\phi_n, t_n)\}$ assim construída, converge para o compacto M e então existe $\psi \in M$ tal que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Por construção, $\psi \in J(\phi)$ e portanto $J(\phi) \neq \emptyset$.

Suponhamos agora que existe $\xi \in J(\phi)$ tal que $\xi \notin M$. Como M é compacto, existe vizinhança V de M tal que $\xi \notin \bar{V}$ e como $\xi \in J(\phi)$, existem sequências $\phi_n \rightarrow \phi$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \xi$. Temos ainda que $\phi \in A_U(M)$, ou seja, dada vizinhança V de M , existe $T = T(\phi, V) > 0$ tal que $\pi(\phi_n, t) \in V$, $\forall t \geq T$ (pois $\phi_n \in U$, $\forall n$). Como $t_n \rightarrow \infty$, podemos supor que $t_n \geq T$, $\forall n$ e assim, $\pi(\phi_n, t_n) \in V$, $\forall n$. Mas isto é um absurdo pois $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \xi \notin \bar{V}$.

Suponhamos agora que f seja uniformemente limitada e que $\phi \notin A_U(M)$. Então, dada vizinhança U de ϕ , existe vizinhança V de M tal que $\gamma(U)$ não está ultimamente em V , ou seja, para todo $T \geq 0$, existe $t \geq T$ tal que $\pi(U, t) \not\subset V$. Então podemos construir sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $\phi_n \rightarrow \phi$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \notin V$. Como $t_n \rightarrow \infty$, podemos supor que $t_n \geq r$, $\forall n$ e assim, a sequência $\{\pi(\phi_n, t_n)\}$ é de aplicações limitadas com derivadas limita

das (pela limitação uniforme de f). Portanto, pelo teorema de Ascoli, esta sequência possui subsequência convergente, que ainda indicaremos por $\{\pi(\phi_n, t_n)\}$. Deste modo, existe ψ tal que $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$ e por construção $\psi \in J(\phi)$.

Mas $\psi \notin M$ pois $\pi(\phi_n, t_n) \notin V$ e V é vizinhança de M e assim, $J(\phi) \not\subset M$.

Definição 1.3: Se $M \subset C_H$, dizemos que

- (a) M é um atrator fraco se $A_w(M)$ é vizinhança de M .
- (b) M é um atrator se $A(M)$ é vizinhança de M .
- (c) M é um atrator uniforme se $A_u(M)$ é vizinhança de M .
- (d) M é um semi atrator fraco se dado $\phi \in M$, existe $\delta_\phi > 0$ tal que para cada $\psi \in S(\phi, \delta_\phi)$ existe sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \rightarrow \infty$ e tal que $d(\pi(\psi, t_n), M) \rightarrow 0$.
- (e) M é um semi atrator se dado $\phi \in M$, existe $\delta_\phi > 0$ tal que para cada $\psi \in S(\phi, \delta_\phi)$, temos que $d(\pi(\psi, t), M) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Para $M \subset C_H$ compacto, temos as seguintes caracterizações:

Teorema 1.7: Seja $M \subset C_H$ compacto. Então valem:

- (a) M é um atrator fraco $\iff$ existe $\delta > 0$ tal que para

cada $\phi \in S(M, \delta)$, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $d(\pi(\phi, t_n), M) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

(b) M invariante é um atrator $\iff$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $\phi \in S(M, \delta)$ temos que $d(\pi(\phi, t), M) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

(c) M é um atrator uniforme $\iff$ M é um atrator e para cada $\phi \in A(M)$ e cada vizinhança V de M , existem vizinhança U de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(U, t) \subset V$, $\forall t \geq T$.

Prova:

(a) M é atrator fraco $\iff A_w(M)$ é vizinhança de M $\iff$ existe $\delta > 0$ tal que $M \subset S(M, \delta) \subset A_w(M)$ $\iff$ para cada $\phi \in S(M, \delta)$, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $d(\pi(\phi, t_n), M) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ (pelo teorema III, 1.1).

(b) análogo ao item (a), usando o teorema III, 1.5.

(c) $(\implies)$

Se M é atrator uniforme, então M é um atrator e podemos então tomar $A_u(M) = A(M)$. Assim, dado $\phi \in A(M)$, existe vizinhança U de ϕ tal que $\gamma(U)$ está ultimamente em toda vizinhança V de M , ou seja, dada vizinhança V de M , existe $T = T(\phi, V) > 0$ tal que $\pi(U, t) \subset V$, $\forall t \geq T$.

$(\impliedby)$

Se M é um atrator, então $A(M)$ é vizinhança de M .

Sejam $\phi \in A(M)$ e V vizinhança de M .

Por hipótese, existe vizinhança U de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(U, t) \subset V$, $\forall t \geq T$.

Assim, $\gamma(U)$ está ultimamente em V e portanto $\phi \in A_U(M)$. Logo $A(M) \subset A_U(M)$ e portanto $A_U(M)$ é vizinhança de M .

Teorema 1.8: Seja $M \subset C_H$ compacto e invariante. M é um atrator uniforme $\iff$ existe vizinhança V de M tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que $\pi(V, [T, \infty)) \subset S(M, \varepsilon)$.

Prova: $(\implies)$

Se M é um atrator uniforme, então $A_U(M)$ é vizinhança de M .

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\phi \in M$ quaisquer.

Logo $\phi \in A_U(M)$, e como $S(M, \varepsilon)$ é vizinhança de M , então existem vizinhança U_ϕ de ϕ e $T = T(\varepsilon) > 0$ tais que

$\pi(U_\phi, t) \subset S(M, \varepsilon)$, $\forall t \geq T$. Seja $\{U_\phi \mid \phi \in M\}$ cobertura de M .

Então existem $\phi_1, \dots, \phi_n$ em M tais que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\phi_i} = V.$$

Temos então que V é vizinhança de M e

$$\pi(V, t) = \pi\left(\bigcup_{i=1}^n U_{\phi_i}, t\right) = \bigcup_{i=1}^n \pi(U_{\phi_i}, t) \subset S(M, \varepsilon), \quad \forall t \geq T.$$

$(\impliedby)$

Suponhamos que dado $\varepsilon > 0$, existem vizinhança V de M e $T = T(\varepsilon) > 0$ tais que $\pi(V, t) \subset S(M, \varepsilon)$ $\forall t > T$. Como M é compacto, então existe $\delta = \delta(V) > 0$ tal que $S(M, \delta) \subset V$. Assim, $\pi(S(M, \delta), t) \subset S(M, \varepsilon)$, $\forall t > T$ e portanto, se $\phi \in S(M, \delta)$, então $d(\pi(\phi, t), M) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Logo M é um atrator.

Além disso, sejam $\phi \in A(M)$ e W vizinhança qualquer de M . Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $M \subset S(M, \varepsilon_0) \subset W$, e por hipótese, existem vizinhança V de M e $T = T(\varepsilon_0) > 0$ tais que $\pi(V, t) \subset S(M, \varepsilon_0)$, $\forall t \geq T$. Tomando $U = A(M) \cap V$, temos que U é vizinhança de ϕ e $\pi(U, t) \subset \pi(V, t) \subset S(M, \varepsilon_0) \subset W$, $\forall t \geq T$. Assim, pelo teorema III, 1.7 (c), temos que M é um atrator uniforme.

Teorema 1.9: Para $M \subset C_H$ compacto, os conceitos de semi atrator fraco e atrator fraco são equivalentes.

Prova: É imediato que atrator fraco implica semi atrator fraco (pelo teorema III, 1.7 (a)).

Mostremos que semi atrator fraco implica atrator fraco. Para isto, basta mostrarmos que existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\xi \in S(M, \delta)$, existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $d(\pi(\xi, t_n), M) \rightarrow 0$ (usando novamente o teorema III, 1.7 (a)). Como M é semi atrator fraco, dado $\phi \in M$, existe $\delta_\phi > 0$ tal que para cada $\psi \in S(\phi, \delta_\phi)$, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $d(\pi(\psi, t_n), M) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $\{S(\phi, \delta_\phi) \mid \phi \in M\}$ cobertura de M . Então existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in M$ tais que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^n S(\phi_i, \delta_{\phi_i}) = A$$

Como A é aberto e $M \subset A$, então $d(M, \mathbb{C}A) = \varepsilon > 0$.

Tomando $\delta = \varepsilon/2$, então $M \subset S(M, \delta) \subset A$ e se $\xi \in S(M, \delta)$, então $\xi \in S(\phi_i, \delta_{\phi_i})$ para algum $i = 1, \dots, n$.

Logo, existe sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $d(\pi(\xi, t_n), M) \rightarrow 0$.

Teorema 1.10: Para $M \subset C_H$ compacto e invariante, os conceitos de semi atrator e atrator são equivalentes.

Prova: Análoga à prova do teorema anterior, usando o teorema III, 1.7 (b).

O teorema seguinte nos fornece algumas propriedades das regiões de atração e atração fraca.

Teorema 1.11: Seja $M \subset C_H$.

(a) $A_w(M)$ e $A(M)$ são invariantes.

(b) Se M é atrator fraco, então $A_w(M)$ é aberto.

(c) Se M é atrator, então $A(M)$ é aberto.

Prova:

(a) Mostremos primeiramente que $A_w(M)$ é invariante.

Sejam $\phi \in A_w(M)$, $t_0 \geq 0$, V vizinhança de M e $T \geq 0$ fixados arbitrariamente. Vamos mostrar que $\pi(\phi, t_0) \in A_w(M)$.

Como $\phi \in A_w(M)$, dado $t = T + t_0$, existe $\tau \geq t$ tal que $\pi(\phi, \tau) \in V$. Temos que $\tau \geq t = T + t_0$, ou seja, $\tau - t_0 \geq T$.

Então $\pi(\phi, \tau) = \pi(\phi, t_0 + (\tau - t_0)) = \pi(\phi, t_0 + \bar{t}) = \pi(\pi(\phi, t_0), \bar{t})$, ou seja, dado $T \geq 0$, encontramos $\bar{t} = \tau - t_0 \geq T$ tal que $\pi(\pi(\phi, t_0), \bar{t}) \in V$. Logo $\pi(\phi, t_0) \in A_w(M)$.

Mostremos agora que $A(M)$ é invariante.

Sejam $\phi \in A(M)$, $t_0 \geq 0$ e V vizinhança de M fixados arbitrariamente.

Então existe $T = T(\phi, V) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in V$, $\forall t \geq T$, e assim $\pi(\pi(\phi, t_0), t) = \pi(\phi, t_0 + t) \in V$, $\forall t \geq T$.

Logo $\pi(\phi, t_0) \in A(M)$.

(b) Mostremos que $A_w(M)$ é aberto.

Como M é atrator fraco, então $A_w(M)$ é vizinhança de M , ou seja, existe aberto A tal que $M \subset A \subset A_w(M)$.

Como A é aberto, basta mostrarmos que, se $\phi \in A_w(M) - A$, então existe aberto U contendo ϕ tal que $U \subset A_w(M)$.

Seja $t_0 \geq 0$. Como $\phi \in A_w(M)$, existe $\tau_0 \geq t_0$ tal que $\pi(\phi, \tau_0) \in A$.

Consideremos a aplicação movimento $\pi_{t_0}^T$, que é contínua em ϕ .

Então, dado aberto A contendo $\pi(\phi, \tau_0) = \pi_{t_0}^{\tau_0}(\phi)$, existe aberto

U contendo ϕ tal que $\pi^{\tau_0}(U) = \pi(U, \tau_0) \subset A$.

Assim, se $\psi \in U$, então $\pi(\psi, \tau_0) \in A \subset A_w(M)$.

Tomando $\theta = \pi(\psi, \tau_0) \in A_w(M)$, dada vizinhança V de M e $t_0 \geq 0$, existe $\tau_1 \geq t_0$ tal que $\pi(\theta, \tau_1) \in V$, ou seja $\pi(\psi, \tau_0 + \tau_1) \in V$. Deste modo, $\psi \in A_w(M)$, $\forall \psi \in U$.

(c) Mostremos que $A(M)$ é aberto.

Como $A(M)$ é vizinhança de M , existe aberto A tal que $M \subset A \subset A(M)$.

Analogamente ao item (b), seja $\phi \in A(M) - A$ e mostremos que existe aberto U contendo ϕ tal que $U \subset A(M)$. Se $\phi \in A(M) - A$, dada vizinhança W de M , existe $T = T(\phi, W) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in W$, $\forall t \geq T$. Tomemos $W = A$.

Então existe $T_0 = T_0(\phi, A) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in A$, $\forall t \geq T_0$.

Consideremos a aplicação π^{T_0} , que é contínua em ϕ . Então, dada vizinhança aberta A de $\pi(\phi, T_0)$, existe vizinhança aberta U de ϕ tal que $\pi(U, T_0) \subset A \subset A(M)$.

Assim, se $\psi \in U$, $\theta = \pi(\psi, T_0) \in A(M)$ e portanto, dada vizinhança V de M , existe $T_1 = T_1(\theta, V) > 0$ tal que $\pi(\theta, t) \in V$, $\forall t \geq T_1$.

Logo, $\pi(\pi(\psi, T_0), t) = \pi(\psi, T_0 + t) \in V$, $\forall t \geq T_1$.

Então $U \subset A(M)$ pois se $\psi \in U$, existe $T = T_0 + T_1 > 0$ tal que $\pi(\psi, t) \in V$, $\forall t \geq T$.

É necessário ressaltar que, ao contrário do que ocorre para os S.D., a região de atração uniforme $A_u(M)$ não é invariante para todo $M \subset C_H$ pois não temos que a aplicação de transição π^t é um homeomorfismo.

2. ESTABILIDADE

Neste parágrafo vamos definir várias condições de estabilidade para conjuntos, mas a maior parte dos resultados serão obtidos para conjuntos compactos e invariantes (que de uma certa forma podem ser considerados como uma generalização de pontos críticos e órbitas periódicas).

Os conceitos que mais se destacam são de estabilidade (também chamada estabilidade segundo Lyapunov) e estabilidade assintótica e usaremos os conjuntos prolongamento e limite prolongacional para esclarecer a conexão entre atração e estabilidade.

É interessante ressaltar que existem autores que distinguem estabilidade topológica e estabilidade métrica, onde, um conjunto M é dito topologicamente estável se dada vizinhança W de M , existe vizinhança V de M tal que $\gamma(V) \subset W$, e M é dito métricamente estável se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(S(M, \delta)) \subset S(M, \epsilon)$. Mesmo para M fechado, um conceito não implica o outro (vide [1]), mas para M compacto são equivalentes.

As definições fundamentais de estabilidade que passaremos a utilizar são as seguintes:

Definição 2.1: Se $M \subset C_H$, dizemos que:

- (a) M é estável se dados $\epsilon > 0$ e $\phi_0 \in M$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \phi_0) > 0$ tal que $\pi(S(\phi_0, \delta), \mathbb{R}^+) \subset S(M, \epsilon)$.

- (b) M é assintoticamente estável se é estável e um atrator.
- (c) M é uniformemente estável se dados $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\pi(S(M, \delta), \mathbb{R}^+) \subset S(M, \epsilon)$.
- (d) M é uniformemente assintoticamente estável se é uniformemente estável e um atrator uniforme.
- (e) M é instável se não é estável.

Devemos observar que as definições dadas de estabilidade e estabilidade uniforme para conjuntos, diferem, na maneira de ser colocadas, da estabilidade e estabilidade uniforme de ponto de equilíbrio em equações diferenciais não autônomas, pois neste último caso, temos que o δ da definição de estabilidade depende de ϵ e t , enquanto que o δ da estabilidade uniforme depende apenas de ϵ . No nosso caso, como trabalhamos com equações autônomas, as definições diferem pelo fato do δ depender ou não de ϕ , onde ϕ é um elemento de M .

É claro que estabilidade uniforme sempre implica estabilidade. No entanto, se M for compacto, os dois conceitos são equivalentes.

Teorema 2.1: Se $M \subset C_H$ é compacto, então estabilidade implica estabilidade uniforme.

Prova: Se M é estável, dados $\varepsilon > 0$ e $\phi \in M$, existe

$\delta_\phi = \delta(\varepsilon, \phi) > 0$ tal que $\pi(S(\phi, \delta_\phi), \mathbb{R}^+) \subset S(M, \varepsilon)$.

Seja $\{S(\phi, \delta_\phi) \mid \phi \in M\}$ cobertura de M .

Então, pela compacidade de M , esta cobertura admite um número de Lebesgue $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ tal que, se $\psi \in M$, então

$S(\psi, \lambda) \subset S(\phi, \delta_\phi)$, para algum $\phi \in M$.

Assim, $\pi(S(\psi, \lambda), \mathbb{R}^+) \subset \pi(S(\phi, \delta_\phi), \mathbb{R}^+) \subset S(M, \varepsilon)$, $\forall \psi \in M$.

Logo M é uniformemente estável.

Teorema 2.2: Seja $M \subset C_H$ compacto e uniformemente estável. Então, para cada $\psi \in \bigcap M$ e $\phi \in M$ existem vizinhanças U de ψ e V de ϕ tais que $U \cap \pi(V, \mathbb{R}^+) = \emptyset$.

Prova: Sejam $\psi \notin M$ e $\phi \in M$ quaisquer.

Então $d(\psi, M) = \varepsilon > 0$ e pela estabilidade uniforme de M , existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\pi(S(M, \delta), \mathbb{R}^+) \subset S(M, \varepsilon/4)$.

Tomando $V = S(\phi, \delta)$ e $U = S(\psi, \varepsilon/4)$ temos que $\pi(V, \mathbb{R}^+) \subset S(M, \varepsilon/4)$.

Como $d(\psi, M) = \varepsilon > 0$, então $U \cap S(M, \varepsilon/4) = \emptyset$ e portanto

$\pi(V, \mathbb{R}^+) \cap U = \emptyset$.

Teorema 2.3: Seja $M \subset C_H$ e suponhamos que toda vizinhança de M contém uma vizinhança de M invariante. Então M é uniformemente estável.

Prova: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

Por hipótese, $S(M, \epsilon)$ contém uma vizinhança V de M invariante.

Então existe $\delta > 0$ tal que $S(M, \delta) \subset V$.

Sejam $\phi \in M$, $\xi \in S(\phi, \delta) \subset V$ e $t_0 \geq 0$ quaisquer.

Deste modo, $\pi(\xi, t_0) \in V \subset S(M, \epsilon)$ e portanto $\pi(S(\phi, \delta), \mathbb{R}^+) \subset S(M, \epsilon)$, ou seja, M é uniformemente estável.

Teorema 2.4: Se $M \subset C_H$ é fechado e estável, então M é invariante. Assim, se $M = \{\phi\}$, então ϕ é um ponto de equilíbrio.

Prova: Sejam $\phi \in M$ e $\epsilon > 0$ fixados arbitrariamente. Como M é estável, $\pi(\phi, t) \in S(M, \epsilon)$, $\forall t \geq 0$ e portanto

$\pi(\phi, t) \in \bigcap_{\epsilon > 0} S(M, \epsilon) = M$, $\forall t \geq 0$. Logo M é invariante.

Vamos dar um exemplo de atrator instável. Todavia, se M for compacto e invariante, será mostrado que atração uniforme implica estabilidade uniforme.

Exemplo 2.1: No exemplo 11, 1.1, temos que $(0,0)$ e $(1,0)$ são pontos de equilíbrio e $\Omega(p) = \{(1,0)\}$, $\forall p \neq (0,0)$. Então $\{(1,0)\}$ é um atrator, mas não é estável e nem um atrator uniforme pois $A_u(M) = \mathbb{R}^2 - \{(\alpha, 0) | \alpha \geq 0\}$, ou seja, $A_u(M)$ não é vizinhança de M .

Se tomarmos $M = S^1 \cup \{p\}$, onde p é um ponto qualquer tal que $p \neq (0,0)$ e $p \notin S^1$, então M é atrator uniforme pois $A_u(M) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, mas não é estável.

Teorema 2.5: Para M compacto e invariante, temos que atração uniforme implica estabilidade uniforme.

Prova: Suponhamos que M não seja uniformemente estável. Então $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ temos que $\gamma(S(M, \delta)) \not\subset S(M, \epsilon_0)$, ou seja, para cada $\delta > 0$, $\exists t_\delta \geq 0$ tal que

$$\pi(S(M, \delta), t_\delta) \not\subset S(M, \epsilon_0) \quad (*)$$

Por hipótese, M é atrator uniforme e pelo teorema III, 1.8, existem vizinhança V de M e $T = T(\epsilon_0) > 0$ tais que $\pi(V, t) \subset S(M, \epsilon_0)$, $\forall t \geq T$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que $M \subset S(M, \delta_0) \subset V$, e portanto $\pi(S(M, \delta_0), t) \subset \pi(V, t) \subset S(M, \epsilon_0)$, $\forall t \geq T$. Deste modo, para $\delta < \delta_0$ temos que $t_\delta \in [0, T)$.

Seja $\delta_n = \frac{\delta_0}{n} < \delta_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por (*), existe $\phi_n \in S(M, \delta_n)$ tal que $\pi(\phi_n, t_{\delta_n}) \not\subset S(M, \epsilon_0)$. A sequência $\{\phi_n\}$ é tal que $\phi_n \rightarrow M$ pois $\delta_n \rightarrow 0$, e como M é compacto, existe $\bar{\phi} \in M$ tal que $\phi_n \rightarrow \bar{\phi}$.

Seja $t_n = t_{\delta_n}$. Então $t_n \in [0, T)$, $\forall n$ e assim, existe $\bar{t} \in [0, T]$ tal que $t_n \rightarrow \bar{t}$. Logo $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \pi(\bar{\phi}, \bar{t})$ e como M é invariante, $\pi(\bar{\phi}, \bar{t}) \in M$. Deste modo chegamos a um absurdo pois $\pi(\phi_n, t_n) \not\subset S(M, \epsilon_0)$, $\forall n$.

Corolário: Para M compacto e invariante temos que atração uniforme é equivalente à estabilidade uniforme assintótica.

A definição que demos de estabilidade é também chamada estabilidade segundo Lyapunov. Taro Ura, que introduziu os conjuntos prolongamento $D(\phi)$, define o conceito de D -estabilidade por:

M é D -estável se $D(M) = M$. Para espaços localmente compactos e M compacto, mostra-se que D -estabilidade e estabilidade segundo

Lyapunov são conceitos equivalentes. (vide [4], teorema 1.12, pg. 61).

Como não temos compacidade local, foi possível mostrar que para M compacto, estabilidade implica D-estabilidade, mas a recíproca só será válida se f , a aplicação que define a E.D.F.R.A. que gera o S.S.D. π , for uma aplicação uniformemente limitada.

Teorema 2.6: Seja $M \subset C_H$ compacto. Se M é estável, então $D(M)=M$. Se, além disso, f for uniformemente limitada, a recíproca é verdadeira.

Prova: Suponhamos que M seja estável.

Pelo teorema III, 2.2, dados $\psi \notin M$ e $\phi \in M$, então existem vizinhanças U de ψ e V de ϕ tais que $U \cap \pi(V, \mathbb{R}^+) = \emptyset$.

Logo $\psi \notin \overline{\pi(V, \mathbb{R}^+)}$ e portanto

$$\psi \notin \bigcap \{ \overline{\pi(V, \mathbb{R}^+)} \mid V \text{ é vizinhança de } \phi \} = D(\phi).$$

Como $\phi \in M$ é arbitrário, então $\psi \notin D(M)$. Logo $D(M) \subset M$.

Por outro lado, se $\phi \in M$, então $\phi = \pi(\phi, 0) \in \pi(V, \mathbb{R}^+)$, para toda vizinhança V de ϕ .

Assim, $\phi \in \bigcap \{ \overline{\pi(V, \mathbb{R}^+)} \mid V \text{ é vizinhança de } \phi \} = D(\phi)$ e portanto $\phi \in D(M)$.

Suponhamos agora que M seja compacto, f uniformemente limitada e M não estável. Então existem $\phi_0 \in M$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para todo $\delta > 0$ temos que $\pi(S(\phi_0, \delta), \mathbb{R}^+) \not\subset S(M, \varepsilon_0)$. Assim,

para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $\delta_n = 1/n$, existem $t_n \in \mathbb{R}^+$ e $\phi_n \in S(\phi_0, \delta_n)$ tais que $\pi(\phi_n, t_n) \notin S(M, \varepsilon_0)$. As sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{\phi_n\} \subset C_H$ assim construídas, são tais que $\phi_n \rightarrow \phi_0$ e $\pi(\phi_n, t_n) \notin S(M, \varepsilon_0)$. Além disso, com a sequência $\{t_n\}$ podem ocorrer duas situações:

(a) existe subsequência $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \geq r$, para todo k .

Neste caso, como f é uniformemente limitada, a sequência

$\{\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k})\}$ admite subsequência convergente $\{\pi(\phi_{n_j}, t_{n_j})\}$ (pelo teorema de Ascoli). Então existe ψ tal que $\pi(\phi_{n_j}, t_{n_j}) \rightarrow \psi$ e

por construção $\psi \in D(\phi_0) \subset D(M)$. Mas $\pi(\phi_{n_j}, t_{n_j}) \notin S(M, \varepsilon_0), \forall j$ e

portanto $D(M) \neq M$.

(b) existe subsequência $\{t_{n_k}\}$ tal que $0 \leq t_{n_k} \leq r$, para todo

k . Neste caso, existe $\bar{t} \in [0, r]$ tal que $t_{n_k} \rightarrow \bar{t}$ e portanto

$\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow \pi(\phi_0, \bar{t}) \in \gamma(\phi_0)$.

Então $\pi(\phi_0, \bar{t}) \in D(\phi_0) \subset D(M)$. Mas $\pi(\phi_0, \bar{t}) \notin M$ pois

$\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \notin S(M, \varepsilon_0), \forall k$, e assim $D(M) \neq M$.

Teorema 2.7: Seja $M \subset C_H$ compacto, invariante, estável e um atrator fraco. Então M é um atrator e consequentemente assintoticamente estável.

Prova: Devemos mostrar que $A_w(M) \subset A(M)$.

Se $\phi \in A_w(M)$, então $\Omega(\phi) \neq \emptyset$, e pelo lema III, 1.11,

temos que $\Omega(\phi) \subset J(\phi) \subset D(M)$. Como M é estável, pelo teorema anterior, $D(M) = M$. Assim, $\Omega(\phi) \subset M$, e pelo teorema III, 1.5, $\phi \in A(M)$.

Vamos agora mostrar que para M compacto temos que estabilidade assintótica e estabilidade assintótica uniforme são equivalentes.

Teorema 2.8: Seja $M \subset C_H$ compacto. Se M é assintoticamente estável, então M é uniformemente assintoticamente estável.

Prova: Se M é assintoticamente estável, então M é estável e portanto invariante. Assim, pelo Corolário do teorema III, 2.5, basta mostrarmos que M é um atrator uniforme e para isto vamos usar o teorema III, 1.8.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Como M é atrator, $A(M)$ é vizinhança de M e se $\phi \in A(M)$, então, pelo teorema III, 1.4, $\|\pi(\phi, t)\| \leq H_1 < H$, $\forall t \geq r$, onde r é o retardamento da equação. Logo, pelo lema I, 1.1, o conjunto $B = \pi(A(M), t_0)$ é relativamente compacto para $t_0 \geq r$.

Assim, se $\psi \in B$, então $\psi = \pi(\phi, t_0)$ para algum $\phi \in A(M)$ e portanto, dada vizinhança $V = S(M, \epsilon)$ de M , existe $T(\phi) = T(\epsilon, \phi) > 0$ tal que $\pi(\phi, t) \in V$, $\forall t \geq T(\phi)$.

Deste modo, $\pi(\psi, t) = \pi(\phi, t + t_0) \in V$, $\forall t \geq T(\phi) + t_0 \geq T(\phi) + r$.

Seja $\tau(\phi) = T(\phi) + r$. A aplicação $\pi^{\tau(\phi)}$ é contínua em ψ , logo, dada vizinhança $S(M, \epsilon)$ de $\pi(\psi, \tau(\phi))$, existe vizinhança V_ψ de ψ tal que $\pi(V_\psi, \tau(\phi)) \subset S(M, \epsilon)$.

É claro que $B \subset U\{V_\psi \mid \psi \in B\}$ e como B é relativamente compacto, podemos tomar subcobertura finita $\{V_{\psi_1}, \dots, V_{\psi_n}\}$.

Seja $T(\varepsilon) = \max \{\tau(\phi_1), \dots, \tau(\phi_n)\}$.

Então, para vizinhança $A(M)$ de M temos que se $\phi \in A(M)$, então $\pi(\phi, t) \in S(M, \varepsilon)$, $\forall t \geq T(\varepsilon)$ e portanto, pelo teorema III, 1.8, M é atrator uniforme.

Para $M \subset C_H$ compacto, vale o seguinte esquema:

3. ESTABILIDADE RELATIVA

Neste parágrafo vamos apresentar alguns resultados sobre estabilidade e atração relativas de um conjunto compacto M , onde tais propriedades não estão definidas apenas numa vizinhança de M , mas em conjuntos mais gerais.

Durante todo este parágrafo, sempre consideraremos $M \subset C_H$ compacto, mesmo que isto não esteja explícito nos enunciados.

Definição 3.1: Sejam $M \subset C_H$ compacto e $U \subset C_H$.

Dizemos que:

- (a) M é estável com relação a U se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\gamma(S(M, \delta) \cap U) \subset S(M, \epsilon)$.
- (b) M é atrator fraco com relação a U se $U \subset A_w(M)$.
- (c) M é atrator com relação a U se $U \subset A(M)$.
- (d) M é atrator uniforme com relação a U se $U \subset A_u(M)$.
- (e) M é assintoticamente estável com relação a U se M é invariante e um atrator uniforme com relação a U .

Se U é vizinhança de M , as definições acima se reduzem às definições dadas nos parágrafos anteriores.

Algumas caracterizações importantes dos conceitos introduzidos são dadas através dos seguintes teoremas:

Teorema 3.1: M compacto é um atrator fraco com relação a $U \iff \Omega(\phi) \cap M \neq \emptyset, \forall \phi \in U$.

Prova: É imediata, bastando usar o teorema III, 1.2.

Teorema 3.2: M compacto e invariante é um atrator com relação a $U \iff \Omega(\phi) \neq \emptyset$ e $\Omega(\phi) \subset M, \forall \phi \in U$.

Prova: É imediata, bastando usar o teorema III, 1.5.

Teorema 3.3: M compacto é um atrator uniforme com relação a $U \iff M$ é um atrator com relação a U e para todo $\phi \in U$ e toda vizinhança V de M , existem vizinhança W de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(W \cap U, t) \subset V, \forall t \geq T$.

Prova: ($\implies$)

É imediato que M é um atrator com relação a U pois $U \subset A_U(M) \subset A(M)$. Além disso, se $\phi \in U$, então $\phi \in A_U(M)$, ou seja, dada vizinhança V de M , existe vizinhança W de ϕ tal que $\gamma(W)$ está ultimamente em V . Então existe $T = T(\phi, V) > 0$ tal que $\pi(W, t) \subset V, \forall t \geq T$. Como $W \cap U \subset W$, então $\pi(W \cap U, t) \subset \pi(W, t) \subset V, \forall t \geq T$.

($\impliedby$)

Mostremos que $U \subset A_U(M)$.

Seja $\phi \in U$. Por hipótese, dada vizinhança V de M , existem

vizinhança W de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(W \cap U, t) \subset V$, $\forall t \geq T$. Então $W \cap U$ é vizinhança de ϕ e portanto $\gamma(W \cap U)$ está ultimamente em V . Logo $\phi \in A_U(M)$.

Teorema 3.4: Se M é compacto e um atrator uniforme relativamente a U , então dados $\epsilon > 0$ e $K \subset U$ compacto, existe $T = T(K, \epsilon) > 0$ tal que $\pi(K, t) \subset S(M, \epsilon)$, $\forall t \geq T$.

Prova: Sejam $\phi \in K$ e $\epsilon > 0$ quaisquer, onde $K \subset U$ é compacto. Então $\phi \in U$, e pelo teorema anterior, existem vizinhança W_ϕ de ϕ e $T = T(\phi, \epsilon) > 0$ tais que $\pi(W_\phi \cap U, t) \subset S(M, \epsilon)$, $\forall t \geq T$. Tomando $\{W_\phi \mid \phi \in K\}$ cobertura de K , podemos extrair subcobertura finita $\{W_{\phi_1}, \dots, W_{\phi_n}\}$.

Assim, $K = K \cap U \subset \bigcup_{i=1}^n (W_{\phi_i} \cap U)$ e portanto

$$\pi(K, t) \subset \bigcup_{i=1}^n \pi(W_{\phi_i} \cap U, t).$$

Tomando $T = \max \{T(\phi_1, \epsilon), \dots, T(\phi_n, \epsilon)\}$, então

$$\pi(K, t) \subset S(M, \epsilon), \forall t \geq T.$$

Teorema 3.5: Sejam $M \subset C_H$ compacto e $U \subset C_H$ invariante. Se M é estável com relação a U e um atrator com relação a U , então M é um atrator uniforme com relação a U .

Prova: Pelo teorema III, 3.3, basta mostrarmos que dados $\phi \in U$ e V vizinhança de M , existem vizinhança W de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(W \cap U, t) \subset V$, $\forall t \geq T$.

Se $\phi \in U$, então $\phi \in A(M)$, ou seja,

$d(\pi(\phi, t), M) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Assim, dado $\delta > 0$, existe $T = T(\phi, \delta) > 0$ tal que

$d(\pi(\phi, t), M) < \delta$, $\forall t \geq T$.

Seja V vizinhança de M .

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $S(M, \varepsilon) \subset V$ e como M é estável com relação a U , existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\gamma(S(M, \delta) \cap U) \subset S(M, \varepsilon)$ (*)

Temos que U é invariante e $\phi \in U$.

Então $\pi(\phi, t) \in U$, $\forall t \geq 0$ e como $d(\pi(\phi, t), M) < \delta$, para todo $t \geq T$, então $\pi(\phi, t) \in S(M, \delta)$, $\forall t \geq T$.

Logo $\pi(\phi, t) \in S(M, \delta) \cap U$, $\forall t \geq T$.

Tomemos $t_0 \geq T$ fixado arbitrariamente.

Como a aplicação π^{t_0} é contínua em ϕ , dada vizinhança $S(M, \delta) \cap U$ de $\pi(\phi, t_0)$, existe vizinhança W de ϕ tal que $\pi(W, t_0) \subset S(M, \delta) \cap U$.

Assim, $\pi(W \cap U, t_0) \subset \pi(W, t_0) \subset S(M, \delta) \cap U \subset \gamma(S(M, \delta) \cap U) \subset S(M, \varepsilon)$ (por (*)). Como $t_0 \geq T$ é arbitrário, então

$\pi(W \cap U, t) \subset S(M, \varepsilon)$, $\forall t \geq T$.

Uma consequência imediata do teorema acima é o seguinte corolário:

Corolário: Sejam $M \subset C_H$ compacto e invariante e $U \subset C_H$ invariante. Se M é estável com relação a U e um atrator com relação a U , então M é assintoticamente estável com relação a U .

O teorema seguinte é de grande interesse na teoria de estabilidade relativa e encontramos este resultado provado para espaços localmente compactos sem usar hipótese alguma sobre o conjunto U . Como nos falta a compacidade local do espaço de fase, necessitamos da hipótese de U ser compacto e invariante para provarmos a recíproca.

Teorema 3.6: Seja $M \subset C_H$ compacto. Se M é estável com relação a U , então $D(M, U) \subset M$. Se além disso, U for compacto e invariante, vale a recíproca.

Prova: Como M é estável com relação a U , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\gamma(S(M, \delta) \cap U) \subset S(M, \epsilon)$.

Seja $\psi \in D(M, U)$. Então existem $\phi \in M$ e sequências $\{\phi_n\} \subset U$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi_n \in S(M, \delta)$, $\forall n$ e portanto $\phi_n \in U \cap S(M, \delta)$, $\forall n$.

Assim, $\pi(\phi_n, t_n) \in \gamma(U \cap S(M, \delta)) \subset S(M, \epsilon)$, $\forall n$.

Como $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$, então $\psi \in \overline{S(M, \epsilon)}$, $\forall \epsilon > 0$.

Logo $\psi \in \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{S(M, \epsilon)} = M$, pois M é compacto. Portanto, $D(M, U) \subset M$.

Suponhamos agora que, além de M ser compacto, U é compacto e invariante, $D(M, U) \subset M$ e M não é estável com relação a U . Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$,

$$\gamma(S(M, \delta) \cap U) \not\subset S(M, \varepsilon_0).$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $\delta_n = 1/n$, existem

$$\phi_n \in S(M, \delta_n) \cap U \text{ e } t_n \geq 0 \text{ tais que } \pi(\phi_n, t_n) \notin S(M, \varepsilon_0).$$

Então $\phi_n \rightarrow M$ e como M é compacto, existe $\phi \in M$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$.

Temos ainda que U é invariante e $\phi_n \in U$, $\forall n$.

Logo $\pi(\phi_n, t_n) \in U$, $\forall n$, e pela compacidade de U , a sequência $\{\pi(\phi_n, t_n)\}$ admite subsequência convergente $\{\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k})\}$, ou seja, existe $\psi \in U$ tal que $\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow \psi$.

Por construção, $\psi \in D(M, U)$ e como $D(M, U) \subset M$, então $\psi \in M$. Mas isto é um absurdo pois $\pi(\phi_n, t_n) \notin S(M, \varepsilon_0)$, $\forall n$ e

$$\pi(\phi_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow \psi.$$

Teorema 3.7: Seja $M \subset C_H$ compacto e invariante e seja $\tilde{M}$ o maior conjunto fechado e invariante contido em M . Então $\tilde{M}$ é estável com relação a M e um atrator com relação a M .

Prova: Para cada $\phi \in M$, $\gamma(\phi) \subset M$, pois M é invariante e como M é compacto, então $\gamma(\phi)$ é relativamente compacto e portanto $\Omega(\phi) \neq \emptyset$. Além disso, $\Omega(\phi) \subset M$ pois, se $\psi \in \Omega(\phi)$, então exis

te sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\pi(\phi, t_n) \rightarrow \psi$. Como M é invariante, $\pi(\phi, t_n) \in M$, $\forall n$ e portanto $\psi \in \tilde{M} = M$.

Assim, $\Omega(\phi) \neq \emptyset$, $\Omega(\phi) \subset M$ e como $\Omega(\phi)$ é invariante, então $\Omega(\phi) \subset \tilde{M}$. Logo $\tilde{M}$ é um atrator com relação a M .

Seja agora $\psi \in D(\tilde{M}, M)$.

Então existem $\phi \in \tilde{M}$ e sequências $\{\phi_n\} \subset M$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Como M é compacto e invariante, então $\psi \in M$ e portanto $D(\tilde{M}, M) \subset M$. Mas $D(\tilde{M}, M)$ é invariante e como $\tilde{M}$ é o maior invariante contido em M , então $D(\tilde{M}, M) \subset \tilde{M}$. Logo, pelo teorema anterior, $\tilde{M}$ é estável com relação a M .

Já foi observado anteriormente que existem atratores instáveis (exemplo III, 2.1). No entanto, se M e U forem compactos e invariantes, o teorema seguinte mostra que atração uniforme relativa implica estabilidade relativa.

Teorema 3.8: Sejam $M, U \subset C_H$ compactos e invariantes e suponhamos que M seja um atrator uniforme com relação a U . Então M é estável com relação a U .

Prova: Seja $\psi \in D(M, U)$.

Então existem $\phi \in M$ e sequências $\{\phi_n\} \subset U$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi$. Como $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, podem ocorrer duas situações (tomando subsequência, se necessário).

(i) $t_n \rightarrow \bar{t} \in \mathbb{R}^+$, e neste caso, $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \pi(\phi, \bar{t})$.

Então $\psi = \pi(\phi, \bar{t}) \in M$, pois $\phi \in M$ e M é invariante e portanto $D(M, U) \subset M$.

(ii) $t_n \rightarrow \infty$. Suponhamos que, neste caso, $\psi \notin M$. Como M é compacto, existe vizinhança V de M tal que $\psi \notin \bar{V}$.

Como M é um atrator uniforme com relação a U , então $U \subset A_U(M)$.

Como $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\phi_n \in U$, $\forall n$, então $\phi \in \bar{U} = U$ e consequentemente $\phi \in A_U(M)$. Então, dada vizinhança V de M , existem vizinhança W de ϕ e $T = T(\phi, V) > 0$ tais que $\pi(W, t) \subset V$, $\forall t \geq T$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi_n \in U \cap W$, $\forall n$ e sendo assim, $\pi(\phi_n, t) \in V$, $\forall t \geq T$.

Como $t_n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq T$, $\forall n \geq n_0$.

Logo $\pi(\phi_n, t_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$ e isto é um absurdo pois $\pi(\phi_n, t_n) \rightarrow \psi \notin \bar{V}$. Assim, $\psi \in M$ e portanto $D(M, U) \subset M$.

Pelo teorema III, 3.6, M é estável com relação a U .

Para $M \subset C_H$ compacto, vale o seguinte quadro de estabilidade e atração de M com relação a U :

OBSERVAÇÕES FINAIS

Os conceitos de atração e estabilidade introduzidos neste capítulo nos permitiram obter uma série de resultados que, em geral, se encontram provados apenas para espaços localmente compactos como, por exemplo, os teoremas 1.5; 1.6; 2.6; 2.8 e 3.6. Eventualmente necessitamos adicionar alguma hipótese, principalmente sobre f , a função que define a E.D.F.R.A. que gera o S, S, D, π , tornando assim as provas destes teoremas peculiares ao tipo de S.S.D. com o qual estamos trabalhando.

O conceito de estabilidade relativa existe para os S.D. em geral, cujo espaço de fase é localmente compacto, porém não encontramos uma teoria sobre o assunto para

os S.S.D. e achamos então conveniente introduzir alguns resultados, pois este conceito nos parece importante no estudo de S.S.D. que dependem de um parâmetro e, de acordo com a variação do parâmetro, um conjunto deixa de ser estável com o surgimento de um outro conjunto estável. (vide, por exemplo, [7]).

Finalmente devemos ressaltar que os teoremas 1.3; 1.4 e 3.8 não foram encontrados, tanto na teoria dos S.D. como na dos S.S.D., por nós consultada.

Bibliografia

- [1] - AUSLANDER, J. - On Stability of Closed Sets in Dynamical Systems. (Lectures Notes in Mathematics, vol. 144). Berlin - Heidelberg - New York, Springer, 1-4, 1970.
- [2] - AUSLANDER, J.; BHATIA, N.P.; SEIBERT, P. - Attractors in Dynamical Systems. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 9, 55-66, 1964.
- [3] - BHATIA, N.P.; HAJEK, O. - Local Semi-Dynamical Systems. (Lectures Notes in Mathematics, vol. 90). Berlin - Heidelberg - New York, Springer, 1969.
- [4] - BHATIA, N.P.; SZEGÖ, G.P. - Stability Theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.
- [5] - BIRKHOFF, G.D. - Dynamical Systems (American Math. Soc. Colloquium Publications, vol. IX). New York, 1927.
- [6] - DOS REIS, J.G. - Relações entre diferentes definições de estabilidade no sentido de Lyapunoff. Trabalho de Mestrado. Escola de Engenharia de S.Carlos, USP, S. Carlos, 1972.

- [7] - DOS REIS, J.G. - Bifurcação por perda de estabilidade em Equações Diferenciais Retardadas Autônomas. Tese de Livre Docência. Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, USP, Rib. Preto, 1980.
- [8] - DUGUNDJI, J. - Topology. Allyn and Bacon, Inc. Boston , 1970.
- [9] - HALE, J. - Theory of Functional Differential Equations. (Applied Math. Sciences, vol. 3). Springer-Verlag , New York - Heidelberg - Berlin, 1977.
- [10] - HALE, J. - Functional Differential Equations., (Applied Math. Sciences, vol. 3). Springer-Verlag , New York, 1971.
- [11] - HARTMAN, P. - Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons, Inc. New York - London - Sydney, 1964.
- [12] - NEMYTSKII, V.V.; STEPANOV, V.V. - Qualitative Theory of Differential Equations. Princeton University Press, 1960.
- [13] - ONUCHIC, N. - Equações Diferenciais com Retardamento. 8º Colóquio Bras. de Mat. , 1971.
- [14] - URA, T. - Sur les courbes définies par les Équations Différentielles dans l'espace à m dimensions. Ann. Sci. École Norm. Sup. , 70, 287-360, 1953.