I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

INSTRUÇÃO DE PARAMETRIZES E HIPOELITICIDADE
DE CERTOS PROBLEMAS DE FRONTEIRA

Gerson Petronilho

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

CONSTRUÇÃO DE PARAMETRIZES E HIPOELITICIDADE
DE CERTOS PROBLEMAS DE FRONTEIRA

Gerson Petronilho

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

Tese apresentada ao Instituto de Matemática de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS - SP
1985

Dedico este trabalho à minha
esposa Wilma Magali e aos
meus filhos Andre e Arianne.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco, pela orientação segura e assistência constante, bem como pela confiança em mim depositada, meus mais sinceros agradecimentos.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos e do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, pelo incentivo.

À Célia Maria Guastaldi Zaninetti e Neube Elisabeth Dias Guillen Stabili, pela realização de um excelente trabalho de datilografia.

A todos os funcionários da Gráfica pelo excelente trabalho de impressão.

Este trabalho foi possível graças ao apoio das entidades: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

ABSTRACT

In this work we give an explicit construction of parametrices for certain elliptic and degenerate - elliptic boundary value problems.

In what follows, $t \in [0, T)$ with $T > 0$, $x \in X =$ unit open ball in R^n , and $\xi \in R^n \setminus \{0\}$.

When the roots $\lambda_j(x, t, \xi)$, $j = 1, \dots, m$, of the principal symbol of the elliptic operator under study are C^∞ with respect to (x, ξ) , at $t = 0$, we present a new construction of a parametrix by means of pseudodifferential operators.

Still in the elliptic situation, when the roots are not of constant multiplicity but do coincide when $t = 0$, we construct a new parametrix built up of Fourier integral operators with complex phase functions.

We also construct a parametrix for a class of degenerate - elliptic boundary value problems, once again expressed by pseudodifferential operators.

By using these parametrices and especially the pseudolocal property of pseudodifferential operators, we prove the regularity of the solutions.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 0: PRÉ-REQUISITOS	1
CAPÍTULO 1: PROBLEMAS ELÍTICOS E OPERADORES PSEUDODIFEREN	
CIAIS	13
1.1: O Problema Homogêneo	13
1.1.1: Procedimento Formal	14
1.1.2: Estimativas para as funções $U_{j,0}$, $j=1,\dots,m$.	18
1.1.3: Estimativas para as funções $U_{j,\ell}$, $j=1,\dots,m$; $\ell \geq 1$	22
1.1.4: Conclusão	28
1.2: Problema Não-Homogêneo.....	28
CAPÍTULO 2: PROBLEMAS ELÍTICOS E OPERADORES INTEGRAIS DE	
FOURIER	34
2.1: O Problema Homogêneo	35
2.1.1: Equações de transporte para as amplitudes...	35
2.1.2: Estimativas para as soluções das equações de transporte.....	40
2.1.3: Conclusão	46
2.2: Conclusão	50

CAPÍTULO 3: PROBLEMAS ELÍTICOS DEGENERADOS	51
3.1: Introdução e enunciado do Teorema.....	51
3.2: A solução u é C^∞ no cone $0 \times R^+$ com de- pendência C^∞ de t	53
3.2.1: Construção de uma solução aproximada.....	55
3.2.1.1: Procedimento formal	55
3.2.1.2: Estimativas para as soluções das equações de transporte.....	57
3.2.1.3: Conclusões	60
3.2.2: Regularidade da solução exata u	65
3.3: A solução u é C^∞ no cone $0 \times R^-$ com depen- dência C^∞ de t	68
3.3.1: Solução aproximada	69
3.3.2: Regularidade de u	73
3.4: Conclusão	82
APÊNDICE	83
BIBLIOGRAFIA	101

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é construir parametrizes e usá-las para provar a regularidade, até a fronteira, das soluções de certos problemas de fronteira elípticos e elípticos degenerados. Utilizamos, de modo essencial, a teoria dos operadores pseudodiferenciais; em especial, a propriedade pseudocal foi utilizada para provar a regularidade das soluções.

Ressaltamos que um método tradicional para mostrar a regularidade das soluções é através de estimativas a priori. (Ver Lions-Magenes [8]).

Em [12], Treves construiu uma parametriz, através de operadores pseudodiferenciais, para a equação do calor generalizada e aplicou os resultados obtidos para provar a regularidade até a fronteira das soluções dos problemas de fronteira elípticos satisfazendo a condição de Lopatinski-Shapiro.

Em [1], Bergamasco construiu parametrizes, expressas por meio de operadores integrais de Fourier com fase complexa, para uma subclasse dos problemas de fronteira elípticos estudados em [12]; mais precisamente, tal construção é feita no caso em que as raízes do símbolo principal são simples ou são múltiplas com multiplicidade constante.

Em [4], Gerszonowicz usou a existência, garantida em [13], de parametrizes para certos problemas de valor inicial, para provar a regularidade até a fronteira das soluções do problema de Dirichlet para um operador elítico degenerado da

seguinte forma:

$$L = (\partial_t - a(x,t)D_x)(\partial_t + b(x,t)D_x)$$

onde as funções a e b são C^∞ em $(-1,1) \times [0,T]$; $T > 0$, e satisfazem as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} a(x,t) = t^k \tilde{a}(x,t) \\ \tilde{a}(x,t) > 0 \quad \text{se} \quad (x,t) \in (-1,1) \times [0,T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(x,t) = t^k \tilde{b}(x,t) \\ \tilde{b}(x,t) > 0 \quad \text{se} \quad (x,t) \in (-1,1) \times [0,T) \end{cases}$$

com k um inteiro não negativo.

Este trabalho está relacionado com os três resultados mencionados acima.

No Capítulo 0 reunimos alguns resultados básicos necessários para a compreensão do trabalho.

No que segue X é a bola unitária de R^n .

No Capítulo 1, com hipóteses mais fortes do que as usadas por Treves em [12], a saber, as raízes $\lambda_j(x,t,\xi)$, $j=1,\dots,m$ do símbolo principal do operador elítico em estudo são C^∞ com relação a $(x,\xi) \in X \times (R^n \setminus \{0\})$, em $t = 0$, construímos uma parametriz que, apesar de também ser representada por operadores pseudodiferenciais, é por nós construída de ma

neira diferente e mais explícita do que a de [12].

No final do capítulo indicamos como provar a regularidade até a fronteira das soluções.

No Capítulo 2 continuamos a estudar o caso elítico. Supondo que as raízes não são de multiplicidade constante mas coincidem em $t = 0$, o qual é um caso não abordado por Bergamasco em [1], construímos uma parametriz representada por operadores integrais de Fourier com fase complexa.

No Capítulo 3, utilizando técnicas de Treves [12] e Gerszonowicz [4], provamos a regularidade até a fronteira das soluções do problema de Dirichlet para o seguinte operador elítico degenerado:

$$P = (\partial_t - a(x,t)D_x)(\partial_t + b(x,t)D_x)$$

onde as funções a e b são C^∞ em $(-1,1) \times [0,T)$ com valores complexos e satisfazem as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} a(x,t) = t^k \tilde{a}(x,t) \\ \tilde{a}(x,t) > 0 \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} b(x,t) = t^\ell \tilde{b}(x,t) \\ \tilde{b}(x,t) > 0 \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} a(x,t) = -\operatorname{Im} b(x,t)$$

com k e ℓ inteiros não negativos e $k, \ell \geq 4$.

Observe que essas condições permitem que $\operatorname{Re} a(x,t)$ e $\operatorname{Re} b(x,t)$ se anulem de ordem infinita em $t = 0$.

Outro exemplo que satisfaz nossas hipóteses e não satisfaz as hipóteses de [4] é dada por:

$$a(x,t) = b(x,t) = t^4(t^2+x^2)$$

A condição $k, l \geq 4$ é uma condição técnica que precisamos utilizar por causa do nosso método de demonstração da hipoeliticidade.

CAPÍTULO 0

PRÉ-REQUISITOS

Definição 0.1:

Uma função $f(x, t, \xi)$ é t-chata em $t = 0$ se f se anula de ordem infinita com relação a t em $t = 0$.

Definição 0.2

Uma função $g(x, \xi)$ é dita positiva homogênea de grau m com relação a ξ se $g(x, \lambda \xi) = \lambda^m g(x, \xi)$ para todo $\lambda > 0$.

TEOREMA 0.1: (Paley-Wiener - Schwartz)

1. A transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição T com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ é uma função inteira $F(\zeta)$ em $\mathbb{C}^n$ satisfazendo a seguinte propriedade:

(P_1) Existem constantes C e A e um inteiro $N \geq 0$ tal que

$$|F(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^N e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n$$

Inversamente, toda função inteira em $\mathbb{C}^n$ satisfazendo a propriedade (P_1) é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição pertencente a $E'(\mathbb{R}^n)$.

2. A transformada de Fourier-Laplace de uma função infinitamente diferenciável com suporte compacto em R^n é uma função inteira $F(\zeta)$ em C^n satisfazendo a seguinte propriedade:

(P₂) Existe uma constante $A > 0$ tal que para todo inteiro $N \geq 0$ podemos encontrar uma constante C tal que

$$|F(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^{-N} e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \forall \zeta \in C^n$$

Inversamente, toda função inteira em C^n satisfazendo a propriedade (P₂) é a transformada de Fourier Laplace de uma função C^∞ com suporte compacto em R^n (Ver Barros- Neto [2]).

TEOREMA 0.2: (Fluxo Tubular)

Seja L um campo vetorial real dado por:

$$L = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde $a_i(x) \in C^\infty(R^n, R)$ e seja

$$\Sigma = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) \mid x_n = 0\}.$$

Suponhamos que Σ seja não característica, isto é,

$$L_1(x', 0, 0, 1) = a_n(x', 0) \neq 0,$$

onde $L_1(x', x_n, \xi, \tau) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x', x_n) \xi_i + a_n(x', x_n) \tau$.

Então, existe um sistema local de coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ tal que

$$\Sigma = \{y \mid y_n = 0\} \text{ e } L = \frac{\partial}{\partial y_n}$$

Definição 0.3:

Seja Ω um subconjunto aberto de R^n . Se m, ρ e δ são números reais com $\rho > 0$ e $\delta \geq 0$, denotamos por $S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ o conjunto de todas $a \in C^\infty(\Omega \times R^n)$ que satisfazem

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

para $x \in K \subset \subset \Omega$ e $\xi \in R^n$, onde a constante C depende de α, β e K .

A união e a interseção dos $S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ para todo $m \in R$ denotamos por $S_{\rho, \delta}^\infty(\Omega)$ e $S_{\rho, \delta}^{-\infty}(\Omega)$ (ver [5] e [11]).

No que segue Ω é um subconjunto aberto de R^n e $T > 0$.

Definição 0.4:

Se $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$, definimos o operador pseudodiferencial (O.ψ.D.) A associado a $a(x, \xi)$ por

$$Ah(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{h}(\xi) d\xi, \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

Definição 0.5:

Uma função $a(x, t, \xi) \in S_{t, \rho, \delta}^m(\Omega)$

se

$a \in C^\infty(\Omega \times [0, T) \times R^n)$ e satisfaz

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta a(x, t, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m+k-\rho} |\beta| + \delta |\alpha|$$

para $(x, t) \in K \subset \subset \Omega \times [0, T)$ e $\xi \in R^n$, onde $C = C(\alpha, k, \beta, K)$.

Quando $\rho = 1$ e $\delta = 0$ denotamos por $S_t^m(\Omega)$.

$S_{t, \rho, \delta}^{-\infty}(\Omega)$ é a interseção de todos $S_{t, \rho, \delta}^m(\Omega)$ com $m \in R$.

Definição 0.6

Se $a(x, t, \xi) \in S_{t, \rho, \delta}^m(\Omega)$, definimos o operador pseudodiferencial A , dependendo de modo C^∞ de t , associado a $a(x, t, \xi)$ por:

$$A(t)h(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, t, \xi) \hat{h}(\xi) d\xi, \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

Observação 0.1

Se $a \in S_{t, \rho, \delta}^{-\infty}(\Omega)$ então A é um operador regularizante, isto é, $Au \in C^\infty(\Omega)$ para toda $u \in E'(\Omega)$.

Sejam A e B dois operadores pseudodiferenciais com símbolos $a(x, t, \xi)$ e $b(x, t, \xi)$ respectivamente. Então o símbolo formal do composto $A \circ B$ é dado pela fórmula

$$a \circ b = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a D_x^\alpha b$$

Definição 0.7

Dizemos que uma distribuição u em Ω é C^∞ numa vizinhança de um ponto (x_0, ξ_0) , $x_0 \in \Omega$, $0 \neq \xi_0 \in R^n$, se existe uma função $g \in C_c^\infty(\Omega)$ igual a um em uma vizinhança U de x_0 e um cone aberto Γ_0 em R^n , contendo ξ_0 , tal que vale:

Para todo número $M \geq 0$ existe uma constante $C_M \geq 0$ tal que

$$|(\widehat{gu})(\xi)| \leq C_M(1+|\xi|)^{-M}, \quad \forall \xi \in \Gamma_0.$$

Um cone, Γ , em R^n é um conjunto que satisfaz: se $\xi \in \Gamma$ então $\rho\xi \in \Gamma$ para todo $\rho > 0$.

Um cone, Γ , em $\Omega \times (R^n \setminus \{0\})$ é um conjunto que satisfaz: se $(x, \xi) \in \Gamma$ então $(x, \rho\xi) \in \Gamma$ para todo $\rho > 0$.

Definição 0.8

Uma distribuição u em Ω é dita ser C^∞ em um cone aberto, Γ , de $\Omega \times (R^n \setminus \{0\})$ se ela é C^∞ em uma vizinhança de todo ponto de Γ .

Notação: $u \in C^\infty(\Gamma)$

O complemento em $\Omega \times (R^n \setminus \{0\})$ da união de todos os cones abertos onde u é C^∞ é chamado o conjunto frente de onda de u e será denotado por $WF(u)$.

Definição 0.9

Dizemos que um operador pseudodiferencial A em Ω é regularizante em uma vizinhança de (x_0, ξ_0) , $x_0 \in \Omega$, $0 \neq \xi_0 \in \mathbb{R}^n$, se existe uma função g e um cone Γ_0 como na Definição 0.7 tal que o símbolo $a(x, \xi)$ de A tem a seguinte propriedade

Para todo $M \geq 0$ e todo par de n -uplas α, β , existe um constante $C_{\alpha, \beta, M} \geq 0$ tal que

$$\sup_x |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [g(x) a(x, \xi)]| \leq C_{\alpha, \beta, M} (1 + |\xi|)^{-M}, \quad \forall \xi \in \Gamma_0$$

Definição 0.10

Um operador pseudodiferencial A em Ω é dito ser regularizante em um cone aberto Γ de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ se é regularizante em uma vizinhança de todo ponto de Γ .

O complemento em $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ da união de todos os cones abertos onde A é regularizante é chamado o micro suporte de A e é denotado por $\mu \text{ supp } A$.

PROPOSIÇÃO 0.1

Se $u \in D'(\Omega)$, a projeção base do $WF(u)$ é exatamente o suporte singular de u .

PROPOSIÇÃO 0.2

Um operador pseudodiferencial propriamente suportado A em Ω é regularizante num cone aberto Γ de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

se e somente se Au é C^∞ em Γ para toda $u \in D'(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 0.3

Operadores pseudodiferenciais diminuem o conjunto frente de onda: se A é um operador pseudodiferencial e u uma distribuição, ambos em Ω , e se A é propriamente suportado ou $u \in E'(\Omega)$, então $WF(Au) \subset WF(u)$.

Seja $A(x, t, D_x)$ um operador pseudodiferencial, dependendo de modo C^∞ de $t \in [0, T]$, cujo símbolo $a(x, t, \xi) \in S_t^m(X; C^\infty)$ e suponhamos que $U(t, t')$ seja um operador pseudodiferencial, propriamente suportado, dependendo de modo C^∞ de t e t' que satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t, t') - A(x, t, D_x) U(t, t') = R(t, t'), & \text{em } X \times [t', T] \\ U(t', t') = I + R_1(t'), & \text{em } X \end{cases}$$

onde $0 \leq t' \leq T$, $R(t, t')$ e $R_1(t')$ são operadores pseudodiferenciais propriamente suportados regularizantes que dependem de modo C^∞ de t e t' .

Então,

$$\begin{aligned} (0.1) \quad w(x, t) &= U(t, 0)w(x, 0) + \\ &+ \int_0^t U(t, t') [\partial_t w(x, t') - A(x, t', D_x) w(x, t')] dt' + \\ &+ S_0(t)w(x, t) + \int_0^t S_1(t, t')w(x, t') dt' \end{aligned}$$

para toda $w \in C^\infty([0, T]; D'(X, C^\infty))$, onde $S_0(t)$ e $S_1(t, t')$ são regularizantes e dependem de modo C^∞ de t e t' . (ver [12])

Observação 0.2

Se $R(t, t')$ e $R_1(t')$ são regularizantes num cone aberto Γ então os operadores $S_0(t)$ e $S_1(t, t')$ são regularizantes em Γ .

Se $V(t, t')$ tem as mesmas propriedades de $U(t, t')$ e satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t, t') - A(x, t, D_x)V(t, t') = R_2(t, t'), \text{ em } X \times [0, t'] \\ V(t', t') = I + R_3(t'), \text{ em } X \end{cases}$$

onde $0 \leq t' \leq T$ e os operadores $R_2(t, t')$ e $R_3(t')$ tem as mesmas propriedades de $R(t, t')$ e $R_1(t')$, respectivamente então,

$$(0.2) \quad w_1(x, t) = V(t, T)w_1(x, T) -$$

$$\begin{aligned} & - \int_t^T V(t, t') [\partial_t w_1(x, t') - A(x, t', D_x)w_1(x, t')] dt' \\ & + S'_0(t)w_1(x, t) + \int_t^T S'_1(t, t')w_1(x, t') dt' \end{aligned}$$

para toda $w_1 \in C^\infty([0, T]; D'(X, C^m))$, onde $S'_0(t)$ e $S'_1(t, t')$ são regularizantes e dependem de modo C^∞ de t e t' . (Ver [12])

Vale um resultado análogo ao da Observação 0.2.

Nos capítulos 1 e 2 estudamos o problema de fronteira elítico:

$$Pu = f \text{ em } \bar{\Omega}$$

$$\frac{\partial^{p-1} u}{\partial \nu^{p-1}} = g_p \text{ em } \partial\Omega; \quad p = 1, \dots, m$$

onde, $\bar{\Omega}$ é uma variedade C^∞ com bordo $\partial\Omega$, de dimensão $n + 1$, compacta, P é um operador diferencial parcial linear com coeficientes C^∞ de ordem $2m > 0$ (no capítulo 2, $m = 2$), propriamente elítico e $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada na direção normal.

Com o uso de cartas locais, o nosso problema fica localizado em $X \times [0, T)$, onde X é a bola unitária de R^n e $T > 0$. Podemos também supor que $P_0 = \tau^{2m} + \dots$

O significado de P ser propriamente elítico é o seguinte:

"Para $0 \leq t < T$ e $(x, \xi) \in X \times (R^n \setminus \{0\})$, o símbolo principal $P_0(x, t, \xi, \tau)$ de P , considerado como polinômio em τ , tem m raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ com parte imaginária positiva e m raízes $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2m}$ com parte imaginária negativa".

Definindo

$$(0.3) \quad M_0^+(x, t, \xi, \tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \lambda_k(x, t, \xi))$$

e

$$(0.4) \quad M_0^-(x, t, \xi, \tau) = \prod_{k=m+1}^{2m} (\tau - \lambda_k(x, t, \xi))$$

temos

$$(0.5) \quad P_0(x, t, \xi, \tau) = M_0^-(x, t, \xi, \tau) M_0^+(x, t, \xi, \tau)$$

Usaremos a seguinte fatoração do operador P (devida a Treves [12]).

$$(0.6) \quad P = M^- M^+ + R$$

onde

$$(0.7) \quad M^\pm = D_t^m + \sum_{j=1}^m M_j^\pm(x, t, D_x) D_t^{m-j}$$

onde $M_j^\pm$ são operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem $\leq j$ em X , dependendo de modo C^∞ de t , e R é um operador regularizante sobre X , dependendo de modo C^∞ de t . Além disso, os símbolos principais dos operadores $M^\pm$ são dados por (0.3) e (0.4) respectivamente.

Podemos escrever o símbolo

$$(0.8) \quad M_j^\pm(x, t, \xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} M_{j\ell}^\pm(x, t, \xi)$$

onde $M_{j\ell}^\pm(x, t, \xi)$ é C^∞ e positiva homogênea de grau $j - \ell$ com relação a ξ .

Definição 0.11

Uma função $\phi: \Omega \times [0, T) \times R^n \rightarrow R$ é uma *fase real* (dependendo de modo C^∞ de t) se

- a) ϕ é uma função C^∞ em $\Omega \times [0, T) \times (R^n \setminus \{0\})$

b) ϕ é positiva homogênea de grau um com relação a ξ .

c) o gradiente de ϕ com relação a (x, ξ) , $\partial_{x, \xi} \phi$, é diferente de zero em todos os pontos de $\Omega \times (R^n \setminus \{0\})$.

Definição 0.12

Um operador integral de Fourier (O.I.F.) de ordem m , dependendo de modo C^∞ de t , é um operador da forma:

$$(0.9) \quad E(t)h(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\phi(x, t, \xi)} a(x, t, \xi) \hat{h}(\xi) d\xi,$$

onde $h \in C_c^\infty(\Omega)$, ϕ é uma fase real e $a \in S_{t, \rho, \delta}^m(\Omega)$ com $\rho > 0$ e $\delta < 1$.

Definição 0.13

Uma função $\phi: \Omega \times [0, T) \times R^n \rightarrow C$ é uma fase complexa (dependendo de modo C^∞ de t) se

i) ϕ é uma função C^∞ em $\Omega \times [0, T) \times (R^n \setminus \{0\})$

ii) ϕ é positiva homogênea de grau um com relação a ξ .

iii) $\text{Im} \phi \geq 0$

iv) $\text{Im} \phi = 0$ implica que o gradiente de ϕ com relação a (x, ξ) é diferente de zero.

No Capítulo 2 trabalhamos com operadores do tipo (0.9) onde a função ϕ tem as seguintes propriedades:

- a) ϕ é uma função C^∞ em $\Omega \times [0, T) \times (R^n \setminus \{0\})$, a valores complexos.
- b) ϕ é positiva homogênea de grau um com relação ξ .
- c) $\text{Im}\phi(x, 0, \xi) = 0$; $\text{Im}\phi(x, t, \xi) \geq ct|\xi|$ ($c > 0$)
- d) $\text{Im}\phi = 0$ implica que o gradiente de ϕ com relação a (x, ξ) é diferente de zero.
- e) $\text{Re } \phi$ é uma fase real

e a amplitude $a(x, t, \xi)$ tem um certo crescimento exponencial com ξ , como já apareceu em [1], [3] e [15].

CAPÍTULO 1

PROBLEMAS ELÍTICOS E OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS

Seja X a bola unitária no R^n e $T > 0$. Nesse capítulo obteremos as soluções do problema:

$$(1.1) \quad P(x, t, D_x, D_t)u(x, t) = f(x, t), \quad \text{em } X \times [0, T)$$

$$(1.2) \quad D_t^{p-1}u(x, t)|_{t=0} = g_p(x), \quad \text{em } X; \quad p = 1, 2, \dots, m$$

com as seguintes hipóteses:

(1.3) $P = P(x, t, D_x, D_t)$ é um operador diferencial parcial, linear, propriamente elítico, de ordem $2m$, com coeficientes C^∞ em $X \times [0, T)$.

(1.4) As raízes $\lambda_1(x, t, \xi), \dots, \lambda_{2m}(x, t, \xi)$ do polinômio em τ , $P_0(x, t, \xi, \tau)$, são funções C^∞ com relação a $(x, \xi) \in X \times (R^n \setminus \{0\})$, em $t = 0$.

(1.5) Os dados f e g_p ($p = 1, \dots, m$) são funções C^∞ com suporte compacto.

1.1 - O PROBLEMA HOMOGÊNEO

Para resolver o problema homogêneo, a menos de um o perador regularizante,

$$\begin{cases} P(x,t,D_x,D_t)u(x,t) = 0 & \text{em } X \times [0,T) \\ D_t^{p-1}u(x,t)|_{t=0} = g_p(x) & \text{em } X, \quad p = 1, \dots, m \end{cases}$$

basta resolver,

$$(1.6) \quad \begin{cases} M^+(x,t,D_x,D_t)u(x,t) = 0 & \text{em } X \times [0,T) \\ D_t^{p-1}u(x,t)|_{t=0} = g_p(x) & \text{em } X, \quad p = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Para isso, construiremos operadores, $E_j(t)$, $j=1, \dots, m$; tais que

$$(1.7) \quad M^+ \circ E_j(t) = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

$$(1.8) \quad D_t^{p-1}E_j(t)|_{t=0} = \delta_{pj}I \quad p, j = 1, \dots, m$$

onde δ_{pj} é o símbolo de Kronecker e portanto,

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^m E_j(t)g_j(x)$$

1.1.1 - PROCEDIMENTO FORMAL

Procuramos $E_j(t)$ da forma

$$E_j(t)h(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} U_j(x,t,\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

com $E_j(t)$ regularizante para $t > 0$ e

$$U_j(x, t, \xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} U_{j, \ell}(x, t, \xi)$$

Se $D_t^{p-1} U_j(x, t, \xi) \big|_{t=0} = \delta_{pj}$; $p, j = 1, \dots, m$ tere-

mos $D_t^{p-1} E_j(t) \big|_{t=0} = \delta_{pj} I$

$$(M^+(x, t, D_x, D_t) E_j(t)) h(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \{ D_t^m U_j + \sum_{q=1}^m [\sum_{\ell=0}^{\infty} M_{q, \ell}^+(x, t, \xi, D_x) (D_t^{m-q} U_j)] \} \hat{h}(\xi) d\xi$$

onde,

$$M_{q, 0}^+ = M_{q, 0}^+(x, t, \xi) \quad (q = 1, \dots, m) \quad e$$

$M_{q, \ell}^+$ são operadores diferenciais parciais, lineares em D_x de ordem $\leq \ell$, com coeficientes positivos-homogêneos de grau $q-\ell$ com relação a ξ .

Observação 1.1

$$\begin{aligned} M_{q, 0}^+(x, t, \xi) &= M_{q, 0}^+(x, 0, \xi) + M_{q, 0}^+(x, t, \xi) - M_{q, 0}^+(x, 0, \xi) = \\ &= M_{q, 0}^+(x, 0, \xi) + t \cdot m_{q, 0}^+(x, t, \xi) \end{aligned}$$

com $m_{q,0}^+(x,t,\xi) \in C^\infty$ e positiva-homogênea de grau q com relação a ξ .

Seja L o seguinte operador:

$$L = D_t^m + \sum_{q=1}^m M_{q,0}^+(x,0,\xi) D_t^{m-q}$$

Então,

$$\begin{aligned} D_t^m U_j + \sum_{q=1}^m \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} M_{q,\ell}^+ (D_t^{m-q} U_j) \right] &= \\ &= D_t^m U_j + \sum_{q=1}^m M_{q,0}^+(x,0,\xi) D_t^{m-q} U_j + \\ &+ t \cdot \sum_{q=1}^m M_{q,0}^+(x,t,\xi) D_t^{m-q} U_j + \sum_{q=1}^m \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} M_{q,\ell}^+ (D_t^{m-q} U_j) \right] = \\ &= L U_j + t \cdot \sum_{q=1}^m M_{q,0}^+(x,t,\xi) D_t^{m-q} U_j + \\ &+ \sum_{q=1}^m \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} M_{q,\ell}^+ (D_t^{m-q} U_j) \right]. \end{aligned}$$

Para resolver

$$D_t^m U_j + \sum_{q=1}^m \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} M_{q,\ell}^+ (D_t^{m-q} U_j) \right] = 0, \text{ resolveremos:}$$

$$L U_{j,0} = 0 \text{ e para } \ell \geq 1$$

$$L U_{j,\ell} = - \sum_{k=0}^{\ell-1} \left[\sum_{q=1}^m M_{q,\ell-k}^+ (D_t^{m-q} U_{j,k}) \right] -$$

$$- t \cdot \sum_{q=1}^m M_{q,0}^+ D_t^{m-q} (U_{j,\ell-1})$$

e vamos escolher as condições iniciais como segue

$$\begin{cases} D_t^{p-1} u_{j,0}|_{t=0} = \delta_{pj} & (p, j = 1, \dots, m) \\ D_t^{p-1} u_{j,\ell}|_{t=0} = 0 & (p, j = 1, \dots, m) \quad \ell \geq 1 \end{cases}$$

Analisemos o seguinte problema

$$\begin{cases} L u_{j,0} = 0 \\ D_t^{p-1} u_{j,0}|_{t=0} = \delta_{pj} & (j, p = 1, \dots, m) \end{cases}$$

Para cada x e ξ fixos, $\lambda_1(x, 0, \xi), \dots, \lambda_m(x, 0, \xi)$ (contadas com suas multiplicidades) são as raízes da equação característica, associada à equação diferencial acima.

Sejam $Q_p(D_t) = D_t^{p-1}$ $p = 1, \dots, m$ e $Q_p(\tau) = \tau^{p-1}$.

Definamos,

$$R(L; Q_1, \dots, Q_m) = \frac{\det Q_p(\tau_q)}{\prod_{\ell < q} (\tau_q - \tau_\ell)} \quad (\text{Ver Hörmander [7]})$$

e portanto,

$$u_{j,0}(x, t, \xi) = R(L; Q_1, \dots, Q_{j-1}, e^{it\tau}, Q_{j+1}, \dots, Q_m)$$

e além disso é C^∞ em $x \times [0, T) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.1.2 - ESTIMATIVAS PARA AS FUNÇÕES $u_{j,0}(x,t,\xi) (j=1,\dots,m)$

$$U_{1,0}(x,t,\xi) = R(L; e^{it\tau}, Q_2, \dots, Q_m) =$$

$e^{it\lambda_1(x,0,\xi)}$	$e^{it\lambda_2(x,0,\xi)}$	...	$e^{it\lambda_m(x,0,\xi)}$
$\lambda_1(x,0,\xi)$	$\lambda_2(x,0,\xi)$	...	$\lambda_m(x,0,\xi)$
$\lambda_1^2(x,0,\xi)$	$\lambda_2^2(x,0,\xi)$	...	$\lambda_m^2(x,0,\xi)$
.....			
$\lambda_1^{m-1}(x,0,\xi)$	$\lambda_2^{m-1}(x,0,\xi)$		$\lambda_m^{m-1}(x,0,\xi)$

$$\prod_{\ell < q} (\lambda_q(x,0,\xi) - \lambda_\ell(x,0,\xi))$$

Pelo Lema A.1, existem abertos $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_m$ (abertos em $X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), que por simplicidade vamos supor conexos, com as seguintes propriedades

$$X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \overline{\mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_m} \quad (\text{fêcho em } X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

e em $\mathcal{O}_k$ existem k raízes distintas duas a duas que vamos denotá-las por:

$$\lambda_{k,1}(x,0,\xi), \dots, \lambda_{k,k}(x,0,\xi).$$

Usaremos a notação $\tau_k(x,\xi)$ para indicar as raízes que coincidem em $\mathcal{O}_k$.

Análise de $U_{1,0}(x,t,\xi)$ em $O_1 \times [0,T)$

Observemos que $\tau_1(x,\xi) \in C^\infty$ em $X \times (R^n \setminus \{0\})$. Sabemos que

$$\begin{aligned} U_{1,0}^1(x,t,\xi) &= U_{1,0} \big|_{O_1 \times [0,T)} = \\ &= (C_1(x,\xi) + C_2(x,\xi)t + \dots + C_m(x,\xi)t^{m-1}) e^{it\tau_1(x,\xi)} \end{aligned}$$

Usando as condições iniciais $D_t^{p-1} U_{1,0} \big|_{t=0} = \delta_{p1}$ ($p = 1, \dots, m$) temos:

$$\begin{aligned} U_{1,0}^1(x,t,\xi) &= (1 + d_1 \tau_1(x,\xi)t + d_2 \tau_1^2(x,\xi)t^2 + \dots + \\ &+ d_{m-1} \tau_1^{m-1}(x,\xi)t^{m-1}) e^{it\tau_1(x,\xi)} \end{aligned}$$

onde $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$ são constantes.

Análise de $U_{1,0}(x,t,\xi)$ em $O_k \times [0,T)$ ($k \geq 2$)

Em O_k temos:

$$\begin{aligned}
U_{1,0}^k(x,t,\xi) &= U_{1,0}|_{\partial_K \times [0,T]} = \\
&= C_0^1(x,\xi) e^{i\lambda_{k,1}(x,0,\xi)t} + C_0^2(x,\xi) e^{i\lambda_{k,2}(x,0,\xi)t} + \dots \\
&+ C_0^{k-1}(x,\xi) e^{i\lambda_{k,k-1}(x,0,\xi)t} + \\
&+ (d_0^k(x,\xi) + d_1^k(x,\xi)t + \dots + d_{m-k}^k(x,\xi)t^{m-k}) e^{i\tau_k(x,\xi)t}
\end{aligned}$$

e usando as condições iniciais concluímos que as funções $C_0^1, C_0^2, \dots, C_0^{k-1}$ são C^∞ e positivas-homogêneas de grau zero com relação a ξ e as funções $d_p^k(x,\xi)$ são C^∞ e positivas-homogêneas de grau p ($p = 0, \dots, m-k$) com relação a ξ .

Observemos, como em $U_{1,0}^1(x,t,\xi)$, que as funções que aparecem em $U_{1,0}^k(x,t,\xi)$ só dependem das raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, em $t = 0$ e portanto são C^∞ em $X \times (R^n \setminus \{0\})$.

DEFINIÇÃO 1.1

Dizemos que uma função $a(x,t,\xi)$ pertence a $B_t^m(\Omega)$ se $a(x,t,\xi)$ é C^∞ em $\Omega \times [0,T) \times R^n$ e se existe uma constante $A > 0$ e $N \in N$ tais que para $\alpha, \beta \in N^n$, $k \in N$ e K um subconjunto compacto de $\Omega \times [0,T)$ dados, existe uma constante $C = C(\alpha, \beta, k, K)$ tal que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta a(x,t,\xi)| &\leq \\
&\leq C(1+t|\xi|)^{N+|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{m+k-|\beta|} e^{-At|\xi|}
\end{aligned}$$

para $(x,t) \in K$ e $\xi \in R^n$.

Observação 1.2

Se $a(x, t, \xi) \in B_t^m(\Omega)$ então valem

i) $- b(x, t, \xi) a(x, t, \xi) \in B_t^{m+m'}(\Omega)$, se $b(x, t, \xi) \in B_t^{m'}(\Omega)$

ii) $- \partial_t a(x, t, \xi) \in B_t^{m+1}(\Omega)$

iii) $t \cdot a(x, t, \xi) \in B_t^{m-1}(\Omega)$

iv) $\partial_x^\gamma a(x, t, \xi) \in B_t^m(\Omega)$

LEMA 1.1

$$U_{1,0}(x, t, \xi) \in B_t^0(X)$$

PROVA

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e K um subconjunto compacto de $X \times [0, T)$ dados.

1ª ETAPA: Como, por hipótese, $\text{Im } \lambda_j(x, t, \xi) > 0$ para $(x, t, \xi) \in X \times [0, T) \times \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, m$) temos $\text{Im } \lambda_j(x, 0, \xi) \geq A_j > 0$ para $(x, 0) \in K$ e $|\xi| = 1$ e portanto $\text{Im } \lambda_j(x, 0, \xi) \geq A_j |\xi|$ para $(x, 0) \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Seja $A = \min\{A_j : j = 1, \dots, m\} > 0$. Então, $\text{Im } \lambda_j(x, 0, \xi) \geq A |\xi|$ para $(x, 0) \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2ª ETAPA A partir da expressão de $U_{1,0}^p(x, t, \xi)$ prova-se que

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta U_{1,0}^p(x,t,\xi)| \leq$$

$$\leq C_p (1+t|\xi|)^{(m-p)+|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{k-|\beta|} e^{-At|\xi|}$$

para $p = 1, \dots, m$

3ª ETAPA: Prova-se, usando argumento de densidade,

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta U_{1,0}(x,t,\xi)| \leq$$

$$\leq C (1+t|\xi|)^{(m-1)+|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{k-|\beta|} e^{-At|\xi|}$$

para $(x,t) \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

CQD.

LEMA 1.2

$$U_{j,0}(x,t,\xi) \in B_t^{-j+1}(X) \quad (j = 2, \dots, m)$$

A prova é análoga a do Lema 1.1.

1.1.3 - ESTIMATIVAS PARA AS FUNÇÕES $U_{j,\ell}(x,t,\xi); j = 1, \dots, m,$

$\ell \geq 1$.

Lembremos que para $j = 1, \dots, m$ e $\ell \geq 1$,

$$LU_{j,\ell} = -t \sum_{k=0}^{\ell-1} \left[\sum_{q=1}^m M_{q,\ell-k}^+ (D_t^{m-q} U_{j,k}) \right]$$

$$-t \cdot \sum_{q=1}^m M_{q,0}^+ D_t^{m-q} (U_{j,\ell-1}) = F(U_{j,0}, \dots, U_{j,\ell-1})$$

$$= F(x,t,\xi)$$

Assim, a solução de (para $j = 1, \dots, m; \ell \geq 1$)

$$\begin{cases} L U_{j,\ell} = F(x,t,\xi) \\ D_t^{p-1} U_{j,\ell}|_{t=0} = 0, \quad p = 1, \dots, m \end{cases}$$

é dada por:

$$U_{j,\ell}(x,t,\xi) = \int_0^t U_{m,0}(x,t-t',\xi) F(x,t',\xi) dt' =$$

$$\int_0^t \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(x,0,\xi) & \dots & \lambda_m(x,0,\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-2}(x,0,\xi) & \dots & \lambda_m^{m-2}(x,0,\xi) \\ e^{i(t-t')\lambda_1(x,0,\xi)} F(x,t',\xi) & \dots & e^{i(t-t')\lambda_m(x,0,\xi)} F(x,t',\xi) \end{vmatrix} dt'$$

$$\prod_{\ell < q} (\lambda_q(x,0,\xi) - \lambda_\ell(x,0,\xi))$$

Observação 1.3

Seja $E(x, t, \xi) \in B_t^{-m+1}(\Omega)$ satisfazendo

$D_t^p E|_{t=0}$ para $p = 0, 1, \dots, m-2$. Então,

$E(x, t, \xi) = t^{m-1} \cdot G(x, t, \xi)$ onde $G(x, t, \xi) \in B_t^0(\Omega)$.

LEMA 1.3

$U_{j,\ell}(x, t, \xi) \in B_t^{-j+1-\ell}(X)$, $j = 1, \dots, m$; $\ell \geq 0$

PROVA

Já sabemos que $U_{j,0} \in B_t^{-j+1}(X)$ ($j = 1, \dots, m$)

Suponhamos que $U_{j,k} \in B_t^{-j+1-k}(X)$ para

$k = 0, \dots, \ell - 1$.

Pela Observação 1.2 temos

$$D_t^{m-q} U_{j,k} \in B_t^{-j+1-k+m-q}(X);$$

$$M_{q,\ell-k}^+(D_t^{m-q} U_{j,k}) \in B_t^{-j+m+1-\ell}(X);$$

$$D_t^{m-q} U_{j,\ell-1} \in B_t^{-j+1-\ell+1+m-q}(X);$$

$$t \cdot M_{q,0}^+(D_t^{m-q} U_{j,\ell-1}) \in B_t^{-j+m+2-\ell-1}(X) = B_t^{-j+m+1-\ell}(X);$$

e portanto, $F(x, t, \xi) \in B_t^{-j+m+1-\ell}(X)$.

Como $U_{m,0}(x, t, \xi) \in B_t^{-m+1}(X)$, $D_t^p U_{m,0}|_{t=0} = 0$ para $p = 0, 1, \dots, m-2$ e

$$U_{j,\ell}(x, t, \xi) = \int_0^t U_{m,0}(x, t-t', \xi) F(x, t', \xi) dt',$$

usando a observação 1.3 com $U_{m,0}$ no lugar de E , podemos aplicar o Lema A.2 e concluir que,

$$U_{j,\ell}(x, t, \xi) \in B_t^{-j+m+1-\ell-m}(X) = B_t^{-j+1-\ell}(X)$$

CQD.

LEMA 1.4

Para cada $j = 1, \dots, m$; considere a série formal $\sum_{\ell=0}^{\infty} U_{j,\ell}(x, t, \xi)$, onde as funções $U_{j,\ell}(x, t, \xi)$ satisfazem: existem $A > 0$ e $N_\ell \in \mathbb{N}$ tais que para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e K subconjunto compacto de $X \times [0, T)$ dados, existe uma constante $C_\ell = C_\ell(\alpha, \beta, k, K)$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta U_{j,\ell}(x, t, \xi) \right| \leq \\ & \leq C_\ell (1+t|\xi|)^{N_\ell+|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{-j+1-\ell+k-|\beta|} e^{-At|\xi|} \end{aligned}$$

para $(x, t) \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Então é possível encontrar uma sequência de números reais positivos, ρ_ℓ , tais que

$$\tilde{U}_j(x, t, \xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} U_{j, \ell}(x, t, \xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \text{ é uma função } C^\infty \text{ e}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta \tilde{U}_j(x, t, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-j+1+k-|\beta|} e^{-\frac{A}{2}t|\xi|}$$

para $(x, t) \in K$ e $\xi \in R^n$; onde $\chi: R \rightarrow R$, $0 \leq \chi \leq 1$
 $\chi \in C^\infty(R)$,

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } |s| \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } |s| \geq 1 \end{cases}$$

Além disso, dados $\alpha, \beta \in N^n$, $k \in N$, $N \in N$ e K um subconjunto compacto de $X \times [0, T)$, existe uma constante $C = C(\alpha, \beta, k, K)$ tal que

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta (\tilde{U}_j - \sum_{\ell=0}^{N-1} U_{j, \ell})| \leq C(1+|\xi|)^{-N-j+1+k-|\beta|} e^{-\frac{A}{2}t|\xi|}$$

para $(x, t) \in K$ e $\xi \in R^n$.

Observação 1.4

Absorvendo as potências de $(t|\xi|)$ na exponencial, a demonstração do Lema 1.4 é análoga à do Lema A.5.

LEMA 1.5

Cada operador

$$\tilde{E}_j(t)h(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{U}_j(x, t, \xi) \hat{h}(\xi) d\xi \quad (j=1, \dots, m)$$

é pseudodiferencial sobre X , dependendo de modo C^∞ de $t \in [0, T)$, de ordem $-j + 1$ e para $t > 0$ é regularizante.

PROVA

i) Do Lema 1.4 sabemos que

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta \tilde{U}_j(x, t, \xi)| &\leq C(1+|\xi|)^{-j+1+k-|\beta|} e^{-\frac{A}{2}t|\xi|} \leq \\ &\leq C(1+|\xi|)^{-j+1+k-|\beta|} \end{aligned}$$

para $(x, t) \in K$ e $\xi \in R^n$. Logo, $\tilde{E}_j(t)$ é um operador pseudodiferencial sobre X , de ordem $-j + 1$, com dependência C^∞ de t .

ii) $\tilde{E}_j(t_0)h(x) \in \dot{C}^\infty$ se $h \in E'(R^n)$ e $t_0 > 0$.

De fato, usando o Teorema de Paley-Wiener temos

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha [\tilde{E}_j(t_0)h(x)] &= (2\pi)^{-n} \int \partial_x^\alpha (e^{ix \cdot \xi} \tilde{U}_j(x, t_0, \xi)) \hat{h}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha', \alpha} (\partial_x^{\alpha-\alpha'} e^{ix \cdot \xi}) (\partial_x^{\alpha'} \tilde{U}_j(x, t_0, \xi)) \hat{h}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 & \left| \partial_x^\alpha [\tilde{E}_j(t_0)h(x)] \right| \leq \\
 & \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq N} C_{\alpha, \alpha} \int (1+|\xi|)^{|\alpha|-j+1+N+n+1} e^{-\frac{A}{2} t_0 |\xi|} (1+|\xi|)^{-(n+1)} d\xi \leq \\
 & \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq N} C_{\alpha, \alpha} \int (1+|\xi|)^{-(n+1)} d\xi < +\infty.
 \end{aligned}$$

CQD.

1.1.4 - CONCLUSÃO

Os operadores $\tilde{E}_j(t)$, $j = 1, \dots, m$; satisfazem

$$M^+ \circ \tilde{E}_j(t) \sim 0$$

o que resolve o problema homogêneo, módulo operador regularizante em X .

1.2 - PROBLEMA NÃO-HOMOGÊNEO

Como em Treves [12], transformamos o problema:

$$(1.9) \quad \begin{cases} Pu = f \Leftrightarrow M^- M^+ u + Ru = f \\ D_t^{p-1} u|_{t=0} = g_p(x), \quad p = 1, \dots, m \end{cases}$$

no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + A^-(x, t, D_x) \tilde{u} + \tilde{R}(x, t, D_x) \tilde{u} = |D_x|^{-m+1} \tilde{f} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + A^+(x, t, D_x) \tilde{u} = |D_x|^{-m+1} N \tilde{u} \end{array} \right.$$

Como estamos interessados em estudar a regularidade da solução u , podemos esquecer do operador $\tilde{R}(x, t, D_x)$ e trabalhamos com

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + A^-(x, t, D_x) \tilde{u} = |D_x|^{-m+1} \tilde{f} \\ \tilde{u}|_{t=T} = \tilde{u}_T \end{array} \right.$$

e

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + A^+(x, t, D_x) \tilde{u} = |D_x|^{-m+1} N \tilde{u} \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0 \end{array} \right.$$

onde,

$$A^+(x, t, D_x) = \begin{pmatrix} 0 & -|D_x| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -|D_x| & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -|D_x| \\ A_1^+(x, t, D_x) & \cdot & \cdot & \dots & A_m^+(x, t, D_x) \end{pmatrix}$$

com,

$$A_i^+(x, t, D_x) = |D_x|^{1-m} M_{m-i+1}^+(x, t, D_x) |D_x|^{i-1}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u} = (u^1, \dots, u^m)$$

$$u^{j+1} = |D_x|^{-j} D_t^j u, \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$\tilde{u}_0 = (g_1(x), |D_x|^{-1} g_2(x), \dots, |D_x|^{-m+1} g_m(x))$$

$$A^-(x, t, D_x) = \begin{pmatrix} 0 & -|D_x| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -|D_x| & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -|D_x| \\ A_1^-(x, t, D_x) & \cdot & \cdot & \dots & A_m^-(x, t, D_x) \end{pmatrix}$$

com,

$$A_i^-(x, t, D_x) = |D_x|^{i-m} M_{m-i+1}^-(x, t, D_x) |D_x|^{i-1}$$

$$\tilde{f} = (0, \dots, 0, f)$$

$$\tilde{u} = (u^{m+1}, \dots, u^{2m})$$

$$u^{m+j+1} = |D_x|^{-j} D_t^j v, \text{ onde } v = M^+(x, t, D_x, D_t) u, \text{ e } j = 0, \dots, m-1$$

$$\tilde{u}_T = (M^+ u, |D_x|^{-1} D_t (M^+ u), \dots, |D_x|^{-m+1} D_t^{m-1} (M^+ u))_{t=T}$$

Sabemos que os operadores $\tilde{E}_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) satisfazem

$$M^+ \circ \tilde{E}_j(t) \sim 0 \text{ em } X \times [0, T) \text{ e}$$

$$D_t^{p-1} \tilde{E}_j|_{t=0} \sim \delta_{pj} I \text{ em } X$$

Então,

$$E^+(t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(t) & \dots & \tilde{E}_m(t) |D_x|^{m-1} \\ |D_x|^{-1} D_t \tilde{E}_1(t) & \dots & |D_x|^{-1} D_t \tilde{E}_m(t) |D_x|^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ |D_x|^{-m+1} D_t^{m-1} \tilde{E}_1(t) & \dots & |D_x|^{-m+1} D_t^{m-1} \tilde{E}_m(t) |D_x|^{m-1} \end{pmatrix}$$

satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t E^+(t) + A^+(x, t, D_x) E^+(t) \sim 0 & \text{em } X \times [0, T) \\ E^+(0) \sim I & \text{em } X \end{cases}$$

Definindo, $E^+(t, t') = E^+(t - t')$ temos

$$\begin{cases} \partial_t E^+(t, t') + A^+(x, t, D_x) E^+(t, t') \sim 0 & \text{em } X \times [t', T) \\ E^+(t', t') \sim I & \text{em } X \end{cases}$$

De modo análogo construímos um operador $E^-(t, t')$ que satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t E^-(t, t') + A^-(x, t, D_x) E^-(t, t') \sim 0 & \text{em } X \times [0, t'] \\ E^-(t', t') \sim I & \text{em } X \end{cases}$$

Assim,

$$u^-(t) = E^-(t, T) \tilde{u}_T - \int_t^T E^-(t, t') |D_x|^{-m+1} \tilde{f}(t') dt'$$

é uma solução aproximada (isto é, é uma solução módulo operadores regularizantes agindo nos dados) do problema (1.10) e

$$u^+(t) = E^+(t, 0) \tilde{u}_0 + \int_0^t E^+(t, t') |D_x|^{-m+1} N u^-(t') dt'$$

é uma solução aproximada do problema (1.11).

Aplicando as técnicas de Treves [12], as quais usaremos com detalhes no capítulo 3, vale o seguinte

TEOREMA 1.1

Seja Ω um subconjunto aberto de X , e
 $u \in C^\infty([0, T]; D'(X))$ tal que

$$P u(x, t) \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$$

e $u(x, 0) \in C^\infty(\Omega)$

Então, $u \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$.

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS ELÍTICOS E OPERADORES INTEGRAIS DE FOURIER

Seja X a bola unitária no R^n e $T > 0$.

Desejamos estudar o problema

$$(2.1) \quad \begin{cases} Pu = f & \text{em } X \times [0, T) \\ u|_{t=0} = g_1(x) & \text{em } X \\ D_t u|_{t=0} = g_2(x) & \text{em } X \end{cases}$$

onde $P = P(x, t, D_x, D_t)$ é um operador diferencial parcial linear, propriamente elítico, de ordem 4.

Denotemos por $\lambda_1(x, t, \xi)$ e $\lambda_2(x, t, \xi)$ as raízes, do símbolo principal, com parte imaginária positiva e por $\lambda_3(x, t, \xi)$ e $\lambda_4(x, t, \xi)$ as raízes com parte imaginária negativa.

Suponhamos que vale a condição:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \lambda_1(x, 0, \xi) \equiv \lambda_2(x, 0, \xi) = \lambda(x, \xi) \\ \lambda_3(x, 0, \xi) \equiv \lambda_4(x, 0, \xi) = r(x, \xi) \end{cases}$$

Por exemplo, para $|x| < \frac{1}{2}$ e $0 \leq t < \frac{1}{2}$, podemos ter:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i(1+x+\sqrt{t})|\xi|, & \lambda_2 &= i(1+x-\sqrt{t})|\xi| \\ \lambda_3 &= -i(1+x+\sqrt{t})|\xi|, & \lambda_4 &= -i(1+x-\sqrt{t})|\xi|. \end{aligned}$$

Lembremos que em [1], Bergamasco já construiu parâmetros se λ_1 coincide com λ_2 (não apenas em $t = 0$) o mesmo ocorrendo com λ_3 e λ_4 .

Observemos que a condição (2.2) implica que as funções λ e r são C^∞ em $X \times (R^n \setminus \{0\})$.

2.1 - O PROBLEMA HOMOGÊNEO

Vamos resolver o problema (2.1) quando $f = 0$. Para isso, procuramos operadores $E_j(t)$ ($j = 1, 2$) tal que

$$(2.3) \quad M^+ \circ E_j(t) \sim 0, \text{ em } X \times [0, T) \quad (j = 1, 2)$$

$$(2.4) \quad D_t^{p-1} E_j|_{t=0} \sim \delta_{pj} I, \text{ em } X \quad (p, j = 1, 2)$$

onde os operadores $E_j(t)$ ($j=1,2$) serão construídos como um operador integral de Fourier com fase complexa, ϕ :

$$E_j(t)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\phi(x,t,\xi)} a_j(x,t,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

onde a_j será uma amplitude que terá um crescimento exponencial em ξ (como já ocorreu em [1] e [3]).

2.1.1 - EQUAÇÕES DE TRANSPORTE PARA AS AMPLITUDES

Procuramos a solução de (2.3) e (2.4) da forma:

$$E_j(t)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x \cdot \xi + \lambda(x,\xi)t)} a_j(x,t,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

$$j = 1, 2 \text{ e } u \in C_c^\infty(X).$$

$$\text{onde } a_j(x,t,\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{j\ell}(x,t,\xi).$$

As funções $a_{j\ell}(x, t, \xi)$ serão determinadas por certas equações diferenciais (parciais) de segunda ordem, tendo ξ como parâmetro tal que

$$e^{-\text{Im}\lambda(x, \xi)t} a_{j, \ell}(x, t, \xi) \in S_{t,}^{-m_j - \ell}(X)$$

As funções $a_{j\ell}(x, t, \xi)$ serão escolhidas tal que

$$(2.5) \quad M^+(e^{i(x \cdot \xi + \lambda(x, \xi)t}) a_j) \sim 0$$

As condições iniciais (2.4) serão satisfeitas se

$$(2.6) \quad a_j(x, 0, \xi) \sim \delta_{1j} \quad (j = 1, 2)$$

e

$$(2.7) \quad D_t a_j(x, 0, \xi) + \lambda(x, \xi) a_j(x, 0, \xi) \sim \delta_{2j} \quad (j = 1, 2)$$

Assim, escolhemos:

$$(2.8) \quad \begin{cases} a_{10}(x, 0, \xi) = 1 \text{ e } \partial_t a_{10}(x, 0, \xi) = -i\lambda(x, \xi) \\ a_{1\ell}(x, 0, \xi) = \partial_t a_{1\ell}(x, 0, \xi) = 0 \text{ para } \ell \geq 1 \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} a_{20}(x, 0, \xi) = 0 \text{ e } \partial_t a_{20}(x, 0, \xi) = i \\ a_{2\ell}(x, 0, \xi) = \partial_t a_{2\ell}(x, 0, \xi) = 0 \text{ para } \ell \geq 1 \end{cases}$$

Para obter (2.5) usaremos a fórmula da expansão assintótica para fase complexa (ver [12]).

$$(2.10) \quad b_i = M^+(e^{i\rho w} a_i) \sim e^{i\rho w} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2-j} P_j(M^+) a_i \quad (i=1,2)$$

onde, $\rho = |\dot{\xi}|$, $w(x,t,\xi) = x \cdot \dot{\xi} + \lambda(x,\dot{\xi})t$, $\dot{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$

e portanto, $\phi(x,t,\xi) = x \cdot \xi + \lambda(x,\xi)t = \rho w(x,t,\xi)$ e além disso, $P_j(M^+)$ são operadores diferenciais parciais de ordem $\leq j$, dependendo de M^+ e de $\phi(x,t,\xi)$.

Temos (conf. [12]):

$$\begin{aligned} P_0(M^+) &= M_0^+(x,t,w_x,w_t) = (w_t - \lambda_1(x,t,w_x))(w_t - \lambda_2(x,t,w_x)) = \\ &= (\lambda(x,\dot{\xi}) - \lambda_1(x,t,\dot{\xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x,\dot{\xi})t))(\lambda(x,\dot{\xi}) - \lambda_2(x,t,\dot{\xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x,\dot{\xi})t)) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } P_0(M^+) \big|_{t=0} = (\lambda(x,\dot{\xi}) - \lambda_1(x,0,\dot{\xi}))(\lambda(x,\dot{\xi}) - \lambda_2(x,0,\dot{\xi})) = 0$$

e portanto,

$$P_0(M_0^+) = t \cdot p_0^+(x,t,\dot{\xi})$$

$$\begin{aligned} P_1(M^+) &= \sum_{|\alpha|=1} M_0^{+(\alpha)}(x,t,w_x,w_t) D^\alpha + M_{-1}^+(x,t,w_x,w_t) + \\ &+ i \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} M_0^{+(\alpha)}(x,t,w_x,w_t) D^\alpha w \end{aligned}$$

Assim,

$$P_1(M^+) = \frac{\partial M_0^+}{\partial \tau} (x, t, w_x, w_t) D_t + \sigma_1$$

onde σ_1 é um operador diferencial parcial de ordem ≤ 1 em D_x e de ordem zero em D_t .

Observemos que

$$\frac{\partial M_0^+}{\partial \tau} (x, t, \xi, \tau) = (\tau - \lambda_2(x, t, \xi)) + (\tau - \lambda_1(x, t, \xi))$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0^+}{\partial \tau} (x, t, w_x, w_t) &= (\lambda(x, \dot{\xi}) - \lambda_2(x, t, \dot{\xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x, \dot{\xi})t)) + \\ &+ (\lambda(x, \dot{\xi}) - \lambda_1(x, t, \dot{\xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x, \dot{\xi})t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \quad \frac{\partial M_0^+}{\partial \tau} (x, 0, w_x(x, 0, \xi), w_t(x, 0, \xi)) &= \\ &= (\lambda(x, \dot{\xi}) - \lambda_2(x, 0, \dot{\xi})) + (\lambda(x, \dot{\xi}) - \lambda_1(x, 0, \dot{\xi})) = 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$P_1(M^+) = t P_1^+(x, t, \dot{\xi}) D_t + \sigma_1$$

$$\begin{aligned} P_2(M^+) &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} M_0^{+(\alpha)}(x, t, w_x, w_t) D^\alpha + \\ &+ \sum_{|\alpha|=1} \left[M_{-1}^{+(\alpha)}(x, t, w_x, w_t) + \right. \\ &\left. + i \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} M_0^{+(\alpha+\beta)}(x, t, w_x, w_t) D^\beta w \right] D^\alpha + \end{aligned}$$

+ termo de ordem zero.

Assim,

$$P_2(M^+) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0^+}{\partial \tau^2} (x, t, w_x, w_t) D_t^2 + \sigma_2$$

onde $\sigma_2 = \sigma_{2,2}(x, t, \dot{\xi}, D_x) + \sigma_{2,1}(x, t, \dot{\xi}, D_x) \partial_t$ com $\sigma_{2,2}$ um operador de ordem ≤ 2 em D_x e $\sigma_{2,1}$ de ordem ≤ 1 em D_x .

$$\text{Como } \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0^+}{\partial \tau^2} (x, t, w_x, w_t) = 1 \text{ temos:}$$

$$P_2(M^+) = D_t^2 + \sigma_2.$$

Seja,

$$L = D_t^2 + \sigma_2 + \rho t p_1^+(x, t, \dot{\xi}) D_t + \rho \sigma_1 + \rho^2 t p_0^+(x, t, \dot{\xi})$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{i\rho w} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2-j} P_j(M^+) a_i &= \\ &= e^{i\rho w} [\rho^2 P_0(M^+) a_i + \rho P_1(M^+) a_i + P_2(M^+) a_i] + \\ &+ e^{i\rho w} \sum_{j=3}^{\infty} \rho^{2-j} P_j(M^+) a_i = \\ &= e^{i\rho w} L(a_i) + e^{i\rho w} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j} P_{2+j}(M^+) a_i. \end{aligned}$$

Escolhendo as funções a_{il} de modo que

$$(2.11) \quad L(a_{i0}) = 0$$

$$(2.12) \quad L(a_{i\ell}) = - \sum_{j=1}^{\ell} \rho^{-j} P_{2+j}(M^+) a_{i,\ell-j}, \quad \ell \geq 1$$

teremos:

$$e^{i\rho w} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2-j} P_j(M^+) a_i = 0$$

2.1.2 - ESTIMATIVAS PARA AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE TRANSPOR

TE

Para resolver o problema:

$$\begin{cases} L(a_{10}) = 0 \\ a_{10}|_{t=0} = 1 \\ \partial_t a_{10}|_{t=0} = -i\lambda(x, \xi), \text{ isto é,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 a_{10} + i\rho t p_1^+(x, t, \xi) \partial_t a_{10} - \rho^2 t p_0^+(x, t, \xi) a_{10} - \rho \sigma_1 a_{10} - \\ - \sigma_2 a_{10} = 0 \\ a_{10}|_{t=0} = 1 \\ \partial_t a_{10}|_{t=0} = -i\lambda(x, \xi) = -i\rho \lambda(x, \xi) \end{cases}$$

$$\text{Procuremos } a_{10}(x, t, \xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{10v}(x, \xi) t^v$$

Assim,

$$a_{100}(x, \xi) = a_{10}(x, 0, \xi) = 1$$

$$a_{101}(x, \xi) = \partial_t a_{10}(x, 0, \xi) = -i\rho \lambda(x, \xi)$$

$$\begin{aligned} 2! a_{102}(x, \xi) &= \partial_t^2 a_{10}|_{t=0} = (\rho \sigma_1 a_{10} + \sigma_2 a_{10})|_{t=0} = \\ &= (\rho \sigma_1 a_{10} + \sigma_{2,2} a_{10} + \sigma_{2,1} \partial_t a_{10})|_{t=0} \end{aligned}$$

Observe que a maior potência de ρ que aparece é 1.

Se $v > 2$, mostraremos que a maior potência de ρ que aparece na expressão de $a_{10v}(x, \xi)$ é $\leq v - [\frac{v+1}{3}]$, onde $[\frac{v+1}{3}]$ denota o maior inteiro que não excede $\frac{v+1}{3}$. (Nas fórmulas abaixo, omitiremos algumas constantes que aparecem devido a utilização da regra de Leibniz, o que não acarreta problema, pois estamos interessados só nas potências de ρ .)

De fato, por indução,

$$\begin{aligned} v! a_{10v}(x, \xi) &= \partial_t^v a_{10}|_{t=0} = \partial_t^{v-2} (\partial_t^2 a_{10})|_{t=0} = \\ &= \left\{ \partial_t^{v-2} [-i\rho t p_1^+ \partial_t a_{10} + \rho^2 t p_0^+ a_{10} + \rho \sigma_1 a_{10} + \sigma_{2,2} a_{10} + \sigma_{2,1} \partial_t a_{10}] \right\}|_{t=0} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{v-2} \partial_t^k (-i\rho t) \left[\sum_{s=0}^{v-2-k} (\partial_t^s p_1^+) (\partial_t^{v-2-k-s} \partial_t a_{10}) \right] \right\}|_{t=0} + \\ &+ \left\{ \sum_{k=0}^{v-2} \partial_t^k (\rho^2 t) \left[\sum_{s=0}^{v-2-k} (\partial_t^s p_0^+) (\partial_t^{v-2-k-s} a_{10}) \right] \right\}|_{t=0} + \\ &+ \left[\rho \sum_{k=0}^{v-2} \tilde{\sigma}_{1,k} \partial_t^k a_{10} \right]|_{t=0} + \left[\sum_{k=0}^{v-2} \tilde{\sigma}_{2,2,k} \partial_t^k a_{10} \right]|_{t=0} + \\ &+ \left[\sum_{k=0}^{v-2} \tilde{\sigma}_{2,1,k} \partial_t^{k+1} a_{10} \right]|_{t=0} = I + II + III + IV + V \end{aligned}$$

onde $\tilde{\sigma}_{1,k}$ é um operador semelhante a σ_1 , etc...

Seja $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ definida por:

$$h(v) = v - \left\lfloor \frac{v+1}{3} \right\rfloor.$$

Valem as seguintes propriedades para h ;

- 1 - $h(v) \leq h(v+1), \quad \forall v \in \mathbb{Z}_+$
- 2 - $h(v) \leq h(v+2)-1, \quad \forall v \in \mathbb{Z}_+$
- 3 - $h(v) \leq h(v+3)-2, \quad \forall v \in \mathbb{Z}_+$

Mostraremos agora que a maior potência de p que aparece é:

$$\text{Em I: } 1 + (v-2) - \left\lfloor \frac{v-2+1}{3} \right\rfloor = 1+h(v-2) \leq 1+h(v)-1 = h(v)$$

$$\text{Em II: } 2 + (v-3) - \left\lfloor \frac{v-3+1}{3} \right\rfloor = 2 + h(v-3) \leq 2 + h(v) - 2 = h(v)$$

$$\text{Em III: } 1 + (v-2) - \left\lfloor \frac{v-2+1}{3} \right\rfloor \leq h(v)$$

$$\text{Em IV: } (v-2) - \left\lfloor \frac{v-2+1}{3} \right\rfloor = h(v-2) \leq h(v) - 1 < h(v)$$

$$\text{Em V: } (v-1) - \left\lfloor \frac{v-1+1}{3} \right\rfloor = h(v-1) \leq h(v)$$

C.Q.D.

Um cálculo análogo, mostra que a maior potência de ρ que aparece na expressão de $a_{j\ell v}(x, \xi)$ é $\leq (-j+1) - \ell + v - [\frac{v+1}{3}]$, onde

$$a_{j\ell}(x, t, \xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{j\ell v}(x, \xi) t^v \quad (j=1, 2; \quad \ell \geq 1)$$

Em geral, as séries

$$(2.13) \quad a_{j\ell}(x, t, \xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{j\ell v}(x, \xi) t^v$$

não convergem. Essa dificuldade é contornada, usando-se funções cortes na variável t , que em termos mais precisos é a validade do Lema abaixo, cuja prova omitiremos por ser semelhante a do Lema B.1 de [1].

Seja $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $0 \leq X(t) \leq 1$, $X(t) = 1$ para $|t| \leq \frac{1}{2}$, $X(t) = 0$ para $|t| \geq 1$.

LEMA 2.1

Para cada $j = 1, 2$ e para cada $\ell = 0, 1, \dots$, consideremos a série formal

$$a_{j\ell}(x, t, \xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{j\ell v}(x, \xi) t^v$$

onde cada $a_{j\ell v} \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e

$$a_{j\ell v}(x, \xi) = \sum_{r=0}^{v - [\frac{v+1}{3}]} a_{j\ell v r}(x, \xi)$$

onde cada $a_{j\ell\nu r}$ é positiva homogênea de grau $-j + 1 - \ell + r$ com relação a ξ . Então, existe uma seqüência de números reais ϵ_ν , rapidamente decrescente para zero, tal que

$$\tilde{a}_{j\ell}(x, t, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{j\ell\nu}(x, \xi) t^\nu \chi(t/\epsilon_\nu)$$

é uma função C^∞ e satisfaz

$$(2.14) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k \tilde{a}_{j\ell}(x, t, \xi) \right| \leq \\ \leq C_\ell (1+t|\xi|)^s (1 + |\xi|)^{-j+1-\ell-|\beta|+k-\lfloor \frac{k+1}{3} \rfloor} e^{A_\ell t} |\xi|^{1-\epsilon}$$

para $(x, t) \in K \subset \subset X \times [0, T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e onde

$$C_\ell = C_\ell(\alpha, \beta, k, K, \ell), \quad A_\ell = A_\ell(\alpha, \beta, k, K, \ell), \quad s \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Assim, as equações (2.11) e (2.12) com condições iniciais (2.8) e (2.9) tem soluções, $\tilde{a}_{j\ell}$, módulo funções t -chatas, onde $\tilde{a}_{j\ell}(x, t, \xi)$ satisfazem (2.14).

Em virtude de (2.10), (2.11) e (2.12) temos:

$$\tilde{b}_j(x, t, \xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{b}_{j\ell}(x, t, \xi), \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad \tilde{b}_{j\ell}(x,t,\xi) &= \partial_t^2 \tilde{a}_{j\ell} + i \rho t p_1^+(x,t,\xi) \partial_t \tilde{a}_{j\ell} - \\
 &- \rho^2 t p_0^+(x,t,\xi) \tilde{a}_{j\ell} - \rho \sigma_1 \tilde{a}_{j\ell} - \sigma_2 \tilde{a}_{j\ell} - \\
 &- \sum_{i=1}^{\ell} \rho^{-i} p_{2+i}^{(M^+)} \tilde{a}_{j,\ell-i}
 \end{aligned}$$

(para $\ell = 0$ não existe a última soma).

LEMA 2.2

As funções $\tilde{b}_{j\ell}(x,t,\xi)$ em (2.15) satisfazem:

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad &|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k \tilde{b}_{j\ell}(x,t,\xi)| \leq \\
 &\leq C_\ell t^N (1+t|\xi|)^q (1+|\xi|)^{2-j+1-\ell-|\beta|+k-\lfloor \frac{k+1}{3} \rfloor + N - \lfloor \frac{N+1}{3} \rfloor} e^{A_\ell t |\xi|^{1-\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

para $N \in \mathbb{N}$, arbitrário, para $(x,t) \in K \subset \subset X \times [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, com constantes C_ℓ e A_ℓ dependendo de α, β, k, K, N e $q \geq 0$, $0 < \varepsilon < 1$.

PROVA: Análoga a do Lema 2.2 de [1].

Observemos que (2.16) implica a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad &|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k \tilde{b}_{j\ell}(x,t,\xi)| \leq \\
 &\leq C_\ell (1+t|\xi|)^{q+N} (1+|\xi|)^{3-j-\ell-|\beta|+k-\lfloor \frac{k+1}{3} \rfloor - \lfloor \frac{N+1}{3} \rfloor} e^{A_\ell t |\xi|^{1-\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

para $N \in \mathbb{N}$, arbitrário.

2.1.3 - CONCLUSÃO

Mostraremos agora que podemos resolver (2.3) e (2.4) módulo operador regularizante.

Em primeiro lugar precisamos usar funções cortes em ξ , para que as funções a_j sejam amplitudes verdadeiras.

Para isso usaremos o Lema abaixo, cuja prova é análoga a do Lema B.2 de [1].

Seja $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $0 \leq \psi(y) \leq 1$, $\psi(y) = 0$ para $|y| \leq \frac{1}{2}$, $\psi(y) = 1$ para $|y| \geq 1$.

LEMA 2.3

Para cada $j = 1, 2$, consideremos a série formal

$\sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{a}_{j\ell}(x, t, \xi)$, onde cada $\tilde{a}_{j\ell}$ é uma função C^∞ e satisfaz (2.14).

Então, podemos encontrar uma sequência de números reais positivos, ρ_ℓ , rapidamente crescente para $+\infty$, tais que

$$(2.18) \quad \tilde{a}_j(x, t, \xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{a}_{j\ell}(x, t, \xi) \psi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right)$$

é uma função C^∞ e existe δ , $0 < \delta \leq \epsilon$, tal que

$$(2.19) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k \bar{a}_j(x, t, \xi) \right| \leq \\ \leq C(1+t|\xi|)^s e^{At|\xi|^{1-\delta}} (1+|\xi|)^{-j+1-|\beta|+k-\lceil \frac{k+1}{3} \rceil}$$

para $(x, t) \in K \subset X \times [0, T)$, $\xi \in R^n$, onde C e A dependem de α, β, k e K .

LEMA 2.4

$$(2.20) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k e^{-\text{Im}\lambda(x, \xi)t} \right| \leq \\ \leq C(1+t|\xi|)^{|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{k-|\beta|} e^{-c_1 t|\xi|}$$

para $(x, t) \in K \subset X \times [0, T)$, $\xi \in R^n$.

PROVA

Basta lembrar que $\lambda(x, \xi) = \lambda_1(x, 0, \xi)$ e que $\text{Im}\lambda_1(x, t, \xi) > 0$.

Assim,

$\text{Im}\lambda_1(x, 0, \xi) \geq c_1 > 0$ para $(x, 0) \in K$, $|\xi| = 1$ e portanto,

$\text{Im}\lambda(x, \xi) = \text{Im}\lambda_1(x, 0, \xi) \geq c_1|\xi|$ para $(x, 0) \in K, \xi \in R^n$
C.Q.D.

Combinando o Lema 2.4 com (2.19) obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k (e^{-\text{Im}\lambda(x,\xi)t} \tilde{a}_j(x,t,\xi)) \right| \leq \\
 & \leq \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} \sum_{k' \leq k} C_{\alpha', \beta', k'} \left| \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} \partial_t^{k'} e^{-\text{Im}\lambda(x,\xi)t} \right| \times \\
 & \times \left| \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^{k-k'} \tilde{a}_j(x,t,\xi) \right| \leq \\
 & \leq C (1+t|\xi|)^{|\alpha'|+|\beta'|} (1+|\xi|)^{k'-|\beta'|} e^{-c_1 t|\xi|} (1+t|\xi|)^{s_x} \\
 & \times (1+|\xi|)^{-j+1-|\beta|+|\beta'|+k-k'-[\frac{k-k'+1}{3}]} e^{At|\xi|^{1-\delta}} \leq \\
 & \leq C(1+|\xi|)^{-j+1-|\beta|+k}
 \end{aligned}$$

Assim, podemos ver $E_j(t)$ como um operador Integral de Fourier com fase real: $x \cdot \xi + \text{Re}\lambda(x,\xi)t$ e amplitude:

$$e^{-\text{Im}\lambda(x,\xi)t} \tilde{a}_j(x,t,\xi) \text{ pertencente a } S_t^{-j+1}(x)$$

Podemos também ver $M^+ \circ E_j(t)$ como um operador Integral de Fourier com fase real: $x \cdot \xi + \text{Re}\lambda(x,\xi)t$ e amplitude:

$$e^{-\text{Im}\lambda(x,\xi)t} \tilde{b}_j(x,t,\xi).$$

Mostraremos agora que essa amplitude pertence a $S_t^{-\infty}(x)$ e portanto, $M^+ \circ E_j(t)$ será regularizante.

De fato, combinando o Lema 2.4 com (2.17) temos:

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k (e^{-i\text{Im}\lambda(x,\xi)t} \tilde{b}_{j\ell}(x,t,\xi)) \right| \leq \\
& \leq C_\ell (1+t|\xi|)^{|\alpha'|+|\beta'|} (1+|\xi|)^{k'-|\beta'|} e^{-c_1 t|\xi|} (1+t|\xi|)^{q+N_x} \\
& \times (1+|\xi|)^{3-j-\ell-|\beta|+|\beta'|+k-k'-[\frac{k-k+1}{3}] - [\frac{N+1}{3}]} e^{A_\ell t|\xi|^{1-\epsilon}} \\
& \leq C_\ell (1+|\xi|)^{3-j-\ell-|\beta|+k - [\frac{N+1}{3}]}
\end{aligned}$$

C.Q.D.

Assim, as fórmulas

$$E_j(t)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x \cdot \xi + \lambda(x,\xi)t)} \tilde{a}_j(x,t,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (j=1,2)$$

forneem-nos uma parametriz para o problema (2.1) homogêneo por meio de operadores Integrais de Fourier com fase complexa.

LEMA 2.5

Os operadores $E_j(t)$ são na verdade operadores pseudodiferenciais em X , dependendo de modo C^∞ de t , com símbolo

$$e^{i\lambda(x,\xi)t} \tilde{a}_j(x,t,\xi) \in S_t^{-j+1}(X)$$

PROVA

Observemos que

$$(2.21) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k e^{i\lambda(x,\xi)t} \right| \leq \\ \leq C(1+|\xi|)^{k-|\beta|} (1+t|\xi|)^{|\alpha|+|\beta|} e^{-c_1 t|\xi|}$$

para $(x,t) \in K \subset \subset X \times [0,T)$ e $\xi \in R^n$.

Assim,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^k (e^{i\lambda(x,\xi)t} \tilde{a}_j(x,t,\xi)) \right| \leq \\ \leq C(1+|\xi|)^{k'-|\beta'|} (1+t|\xi|)^{|\alpha'|+|\beta'|} e^{-c_1 t|\xi|} (1+t|\xi|)^s e^{At|\xi|^{1-\delta}} \times \\ \times (1+|\xi|)^{-j+1-|\beta|+|\beta'|+k-k' - [\frac{k-k'+1}{3}]} \leq \\ \leq C(1+|\xi|)^{-j+1-|\beta|+k}$$

C.Q.D.

2.2 - CONCLUSÃO

O estudo do problema não-homogêneo e a regularidade até a fronteira segue como no Capítulo 1.

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS ELÍTICOS DEGENERADOS

3.1. INTRODUÇÃO E ENUNCIADO DO TEOREMA

Seja $X = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ e $T > 0$. Consideremos o operador $P(x,t,D_x,\partial_t)$ dado por

$$P = P(x,t,D_x,\partial_t) = (\partial_t - a(x,t)D_x)(\partial_t + b(x,t)D_x), \text{ onde}$$

$a(x,t)$ e $b(x,t)$ são funções C^∞ em $X \times [0,T)$ com valores complexos

DEFINIÇÃO 3.1. O problema

$$(*) \quad \begin{cases} Pu(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

é hipoelítico se dado qualquer subconjunto aberto $\emptyset$ de X e quaisquer $f \in C^\infty([0,T); D'(\emptyset))$, $g \in D'(\emptyset)$ cuja restrição a $\emptyset$ é C^∞ , isto é, $f \in C^\infty(\emptyset \times [0,T))$ e $g \in C^\infty(\emptyset)$, então toda solução u de $(*)$ tal que $u \in C^\infty([0,T); D'(\emptyset))$, também satisfaz $u \in C^\infty(\emptyset \times [0,T))$.

Estamos interessados em provar o

TEOREMA 3.1. Seja P o operador dado acima.

Suponhamos que as funções $a(x,t)$ e $b(x,t)$ satisfazem as seguintes hipóteses:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} a(x,t) = t^k \tilde{a}(x,t) \\ \tilde{a}(x,t) > 0 \text{ para } t > 0 \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} b(x,t) = t^{\ell} \tilde{b}(x,t) \\ \tilde{b}(x,t) > 0 \quad \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \operatorname{Im} a(x,t) = -\operatorname{Im} b(x,t)$$

onde k e ℓ são inteiros não negativos e $k, \ell \geq 4$.

Então, o problema

$$\begin{cases} Pu(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

é hipoeelítico.

Observemos que nas hipóteses acima não exigimos $\tilde{a}(x,0) \neq 0$ e $\tilde{b}(x,0) \neq 0$; por exemplo, podemos ter

$$a(x,t) = \phi(t) \quad \text{e} \quad b(x,t) = \psi(t)$$

onde ϕ e ψ são chatas em $t = 0$ e positivas para $t > 0$.

Usando a hipótese (3.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} P &= (\partial_t - a(x,t)D_x)(\partial_t + b(x,t)D_x) = \\ &= (\partial_t + \operatorname{Im} b(x,t)\partial_x + i\operatorname{Re} a(x,t)\partial_x) \circ \\ &\quad \circ (\partial_t + \operatorname{Im} b(x,t)\partial_x - i\operatorname{Re} b(x,t)\partial_x) \end{aligned}$$

e definindo os campos reais,

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_t + \operatorname{Im} b(x,t)\partial_x \\ L_2 &= \operatorname{Re} a(x,t)\partial_x \\ L_3 &= \operatorname{Re} b(x,t)\partial_x, \quad \text{temos} \end{aligned}$$

$$P = (L_1 + iL_2)(L_1 - iL_3).$$

Aplicando o Teorema do Fluxo Tubular para o campo vetorial L_1 , isto é, endireitando as características, e denotan

do por $\tilde{L}_1$ o campo L_1 nas novas coordenadas (y,s) temos

$$\tilde{L}_1 = \partial_s$$

Assim, o operador P nas novas coordenadas é dado por

$$\tilde{P} = (\partial_s - a_1(y,s)D_y)(\partial_s + b_1(y,s)D_y),$$

onde a_1 e b_1 têm as mesmas propriedades de $Re a$ e $Re b$ respectivamente.

Como a hipoeleticidade do problema

$$(*) : \begin{cases} Pu(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

é equivalente à hipoeleticidade do problema

$$(**) : \begin{cases} \tilde{P}(u \circ G)(y,s) = (f \circ G)(y,s) \\ (u \circ G)(y,0) = g(y) \end{cases}$$

onde $G(y,s) = (x,t)$, podemos supor daqui em diante que

$$P = (\partial_t - a(x,t)D_x)(\partial_t + b(x,t)D_x),$$

onde,

$$(3.4) \quad \begin{cases} a(x,t) = t^k \cdot \tilde{a}(x,t) \\ \tilde{a}(x,t) > 0, \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} b(x,t) = t^\ell \cdot \tilde{b}(x,t) \\ \tilde{b}(x,t) > 0, \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

A prova do Teorema 3.1 será feita mostrando que $WF(u) = \emptyset$; onde $WF(u)$ indica conjunto frente de onda de u . (Ver Definição 0.8).

3.2. A SOLUÇÃO $u \in C^\infty$ NO CONE $0 \times \mathbb{R}^+$, COM DEPENDENCIA C^∞ DE t

Seja $\emptyset$ um subconjunto aberto de X . Nesta seção mos traremos que se $u(x,t) \in C^\infty([0,T];D'(X))$ e satisfaz

$$I: \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x)(\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t) = f(x,t), \text{ em } X \times [0,T) \\ u(x,0) = g(x), \text{ em } X \end{cases}$$

onde $f(x,t) \in C^\infty([0,T]; C^\infty(\emptyset \times \mathbb{R}^+))$ e $g(x) \in C^\infty(\emptyset \times \mathbb{R}^+)$, então $u(x,t) \in C^\infty([0,T]; C^\infty(\emptyset \times \mathbb{R}^+))$.

Suponhamos que $u(x,t) \in C^\infty([0,T];D'(X))$ seja uma solução exata de I.

Definindo,

$$v(x,t) = (\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t) \quad \text{temos,}$$

$$(\partial_t - a(x,t)D_x)v(x,t) = f(x,t).$$

Assim, u satisfaz I se e somente se (v,u) satisfaz:

$$I-1: \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x)v(x,t) = f(x,t) \\ v|_{t=T} = (\partial_t + b(x,t)D_x)u|_{t=T} \end{cases}$$

e

$$I-2: \begin{cases} (\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t) = v(x,t) \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

Observemos que estamos cometendo um abuso de notação na fórmula I-1, pois estamos calculando em $t = T$, o que na verdade deveria ser em $T' < T$.

Para provar o Teorema 3.1, basta mostrar que $u \in C^\infty(\emptyset \times [0,T'])$, onde $T' < T$ pois, o nosso operador P é elítico em $X \times (0,T)$, o que permite concluir que $u \in C^\infty(\emptyset \times (0,T))$.

3.2.1. CONSTRUÇÃO DE UMA SOLUÇÃO APROXIMADA

Observemos que os problemas I-1 e I-2 são acoplados. Uma maneira de torná-los "desacoplados" é a seguinte: no problema I-1 damos uma condição inicial, $v_T^+(x) \in D'(X)$, arbitrária, o que para o estudo da regularidade não traz problemas, como veremos nos Lemas 3.3, 3.4 e 3.5.

O objetivo inicial é construir uma solução aproximada para o problema:

$$I'-1: \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x)v(x,t) = f(x,t) \\ v(x,T) = v_T^+(x) \end{cases}$$

através de um operador $V(t,t')$ que satisfaz:

$$(3.6) \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x)_0 V(t,t') = 0, \text{ em } X \times [0,t'] \quad (t \leq t' \leq T) \\ V(t',t') = I, \text{ em } X \end{cases}$$

onde,

$$V(t,t')h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} V(x,t,t',\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$e \quad V(x,t,t',\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} V_j(x,t,t',\xi)$$

3.2.1.1. PROCEDIMENTO FORMAL

$$[(\partial_t - a(x,t)D_x)_0 V(t,t')]h(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} [\partial_t V - a(x,t)\xi V - a(x,t)D_x V] \hat{h}(\xi) d\xi$$

e

$$V(t',t')h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} V(x,t',t',\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

Para resolvermos (3.6) é suficiente resolvermos:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \partial_t V - a(x,t) \xi V - a(x,t) D_x V = 0 \\ V(x,t',t',\xi) = 1 \end{cases}$$

Como estamos procurando $V = \sum_{j=0}^{+\infty} V_j(x,t,t',\xi)$, faremos o seguinte agrupamento:

$$(\partial_t V_0 - a(x,t) \xi V_0) + (\partial_t V_1 - a(x,t) \xi V_1) + (\partial_t V_2 - a(x,t) \xi V_2) + \dots$$

$$-a(x,t) D_x V_0 \quad -a(x,t) D_x V_1 \quad - \dots = 0$$

e vamos procurar resolver:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \partial_t V_0 - a(x,t) \xi V_0 = 0 \\ V_0|_{t=t'} = 1 \end{cases}$$

e para $j \geq 1$

$$(3.9)_j \quad \begin{cases} \partial_t V_j - a(x,t) \xi V_j = a(x,t) D_x V_{j-1} \\ V_j|_{t=t'} = 0 \end{cases}$$

A solução de (3.8) é dada por

$$V_0(x,t,t',\xi) = e^{-\xi \int_t^{t'} a(x,s) ds}$$

Como sô para $\xi > 0$ que V_0 é temperada, definimos

$$\tilde{V}_0(x,t,t',\xi) = \phi(\xi) e^{-\xi \int_t^{t'} a(x,s) ds} = \phi(\xi) V_0(x,t,t',\xi)$$

onde,

$$\phi: R \rightarrow R, \phi \in C^\infty(R), 0 \leq \phi \leq 1$$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } \xi > 1 \end{cases}$$

Logo, $\tilde{V}_0$ é uma função C^∞ e $\tilde{V}_0 = 0$ para $\xi < \frac{1}{2}$.

3.2.1.2. ESTIMATIVAS PARA AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

Sejam $t' \in R$ tal que $0 \leq t' \leq T$ e

$$G_T = \{(t, t') \in R^2 \mid 0 \leq t \leq t' \leq T\}$$

DEFINIÇÃO 3.2. Uma função $h(x, t, t', \xi) \in A_{t, t', 1, \frac{1}{2}}^{m, \lambda, D}(\Omega)$, onde

Ω é um subconjunto aberto de R , se h é C^∞ em $\Omega \times G_T \times R$ e se existe uma constante $D > 0$ e uma função C^∞ , $\lambda(x, t) \geq 0$ tais que para α, k, k' e $\beta \in N$ e K um subconjunto compacto de $\Omega \times G_T$ dados, existe uma constante $C = C(\alpha, k, k', \beta, K)$ tal que

$$\begin{aligned} & |\partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta h(x, t, t', \xi)| \leq \\ & \leq C(1+|\xi|)^{m+k+k'+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D|\xi| \int_t^{t'} \lambda(x, s) ds} \end{aligned}$$

para $(x, t, t') \in K$ e $\xi \in R$.

A notação para este nosso espaço de amplitudes é muito sobrecarregada. Quando estiver claro quem é a função λ e a constante D , usaremos a notação $A_{1, \frac{1}{2}}^m(\Omega)$

Observação 3.1. a) Se $h \in A_{t,t',1,\frac{1}{2}}^{m,\lambda,D}(\Omega)$ então,

$$\partial_t^q \partial_x^\gamma \partial_\xi^p h \in A_{t,t',1,\frac{1}{2}}^{(m+\frac{1}{2}\gamma-p+q)}(\Omega)$$

$$b) A_{t,t',1,\frac{1}{2}}^{m,\lambda,D}(\Omega) \subset S_{t,t',1,\frac{1}{2}}^m(\Omega), \forall \lambda \text{ e } \forall D$$

As funções V_j ($j \geq 1$) satisfazem:

$$\begin{cases} \partial_t V_j - a(x,t)\xi V_j = a(x,t)D_x V_{j-1} \\ V_j|_{t=t'} = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$V_j(x,t,t',\xi) = - \int_t^{t'} V_0(x,t,s,\xi) a(x,s) D_x V_{j-1}(x,s,t',\xi) ds$$

Como observado na definição da função V_0 definamos:

$$\tilde{V}_j(x,t,t',\xi) = \phi(\xi) V_j(x,t,t',\xi), \text{ isto é,}$$

$$\tilde{V}_j(x,t,t',\xi) = - \phi(\xi) \int_t^{t'} V_0(x,t,s,\xi) a(x,s) D_x V_{j-1}(x,s,t',\xi) ds =$$

$$= - \int_t^{t'} V_0(x,t,s,\xi) a(x,s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x,s,t',\xi) ds =$$

$$= - \int_t^{t'} \tilde{V}_0(x,t,s,\xi) a(x,s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x,s,t',\xi) ds$$

$$- \int_t^{t'} (V_0 - \tilde{V}_0)(x, t, s, \xi) a(x, s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x, s, t', \xi) ds$$

Observemos que para $\xi < \frac{1}{2}$, $\tilde{V}_{j-1} = 0$ e para $\xi > 1$, $V_0 - \tilde{V}_0 = 0$, então,

$$\int_t^{t'} (V_0 - \tilde{V}_0)(x, t, s, \xi) a(x, s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x, s, t', \xi) ds \neq 0$$

para $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$.

Assim, para analisar as estimativas que as funções $\tilde{V}_j$ satisfazem podemos supor

$$\tilde{V}_j(x, t, t', \xi) = - \int_t^{t'} \tilde{V}_0(x, t, s, \xi) a(x, s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x, s, t', \xi) ds$$

LEMA 3.1. $\tilde{V}_j(x, t, t', \xi) \in A_{t, t', 1, \frac{1}{2}}^{-\frac{j}{2}, a, D_j}(x)$, $j \geq 0$; onde

$$D_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{j \cdot 4}$$

PROVA: A prova será feita por indução sobre j . Pelo Lema A.3,

$$\tilde{V}_0 \in A_{t, t', 1, \frac{1}{2}}^{0, a, \frac{3}{4}}(x).$$

Como já observado, para $j \geq 1$, podemos supor que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_j(x, t, t', \xi) &= - \int_t^{t'} \tilde{V}_0(x, t, s, \xi) a(x, s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x, s, t', \xi) ds = \\ &= - \int_t^{t'} \tilde{V}_0(x, t, s, \xi) f_j(x, s, t', \xi) ds \end{aligned}$$

onde $f_j(x, s, t', \xi) = a(x, s) D_x \tilde{V}_{j-1}(x, s, t', \xi)$.

Suponhamos $\tilde{V}_{j-1} \in A_{1, \frac{1}{2}}^{-(\frac{j-1}{2})}(X)$. Pela Observação 3.1 ,
 $D_x \tilde{V}_{j-1} \in A_{1, \frac{1}{2}}^{-(\frac{j}{2} + 1)}(X)$ e portanto, pelo Lema A.4, $\tilde{V}_j \in A_{1, \frac{1}{2}}^{-(\frac{j}{2})}(X)$.

CQD

Como $D_j > \frac{1}{2}$ temos:

$$A_{t, t', 1, \frac{1}{2}}^{-(\frac{j}{2}, a, D_j)}(X) \subset A_{t, t', 1, \frac{1}{2}}^{-(\frac{j}{2}, a, \frac{1}{2})}(X)$$

e portanto $\tilde{V}_j \in A_{1, \frac{1}{2}}^{-(\frac{j}{2})}(X)$.

Aplicando o Lema A.5 com $A = \frac{1}{2}$, é possível escolher uma sequência ρ_j , de números reais tais que

$$\tilde{V}(x, t, t', \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{V}_j(x, t, t', \xi) \chi_{(\frac{|\xi|}{\rho_j})}$$

pertence ao espaço $A_{1, \frac{1}{2}}^0(X)$.

3.2.1.3. CONCLUSÕES

Definamos

$$\tilde{V}(t, t') h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \tilde{V}(x, t, t', \xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

Como $A_{1, \frac{1}{2}}^0(X) \subset S_{1, \frac{1}{2}}^0(X)$ então,

$\tilde{V}(t, t')$ é um operador pseudodiferencial sobre X , dependendo de modo C^∞ de t e t' , de ordem zero.

LEMA 3.2. Seja $0 < t' \leq T$ fixo. Então, o operador $\tilde{V}(t, t')$ é regularizante para $t < t'$.

PROVA: Seja $h \in E'(X)$. Pelo Teorema de Paley-Wiener, existe uma constante $C > 0$ e um inteiro $M \geq 0$ tal que

$$|\hat{h}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M, \quad \forall \xi \in R.$$

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha (\tilde{V}(t, t') h)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^\alpha (e^{ix\xi} \tilde{V}(x, t, t', \xi)) \hat{h}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha, \alpha'} e^{ix\xi} (i\xi)^{\alpha - \alpha'} \partial_x^{\alpha - \alpha'} \tilde{V}(x, t, t', \xi) \hat{h}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Assim,

$$|\partial_x^\alpha (\tilde{V}(t, t') h)(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha, \alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^\alpha C_1 (1 + |\xi|)^{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha'} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}|\xi| \int_t^{t'} a(x, s) ds} C(1 + |\xi|)^M d\xi \leq$$

$$\leq C_2 \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha, \alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{\frac{3}{2}\alpha + M + 2} e^{-\frac{C_0}{2}|\xi|} (1 + |\xi|)^{-2} d\xi < +\infty$$

CQD.

Observemos que, pela construção do operador $\tilde{V}(t, t')$,

$$(\partial_t - a(x, t) D_x) \circ \tilde{V}(t, t') = R_1(t, t') \quad \text{em } X \times [0, t']$$

onde $R_1(t, t')$ é um operador pseudodiferencial, regularizante, com dependência C^∞ de t e t' .

Observemos também que

$$\tilde{V}(t', t') h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \tilde{V}(x, t', t', \xi) \hat{h}(\xi) d\xi.$$

$$\text{e } \tilde{V}(x, t', t', \xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{V}_j(x, t', t', \xi) \chi_j(\xi), \quad (\chi_j(\xi) = \chi(\frac{|\xi|}{\rho_j}))$$

Como $\tilde{V}_j(x, t', t', \xi) = 0$ para $j \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, t', t', \xi) &= \tilde{V}_0(x, t', t', \xi) \chi_0(\xi) = V_0(x, t', t', \xi) \phi(\xi) \chi_0(\xi) = \\ &= 1 \phi(\xi) \chi_0(\xi) = \tilde{\chi}_0(\xi) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t', t') h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \tilde{\chi}_0(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{h}(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} (\tilde{\chi}_0(\xi) - 1) \hat{h}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} (\tilde{V}(t', t') - I) h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} (\tilde{\chi}_0(\xi) - 1) \hat{h}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{ix\xi} (\tilde{\chi}_0(\xi) - 1) \hat{h}(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho_0} e^{ix\xi} (\tilde{\chi}_0(\xi) - 1) \hat{h}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} H(-\xi) \hat{h}(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} H(\xi) (\tilde{\chi}_0(\xi) - 1) \hat{h}(\xi) d\xi,$$

onde $H(\xi)$ é a função de Heaviside.

Logo

$$\begin{aligned} (\tilde{V}(t', t') - I) h(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} H(-\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} H(\xi) (\tilde{\chi}_0(\xi) - 1) \hat{h}(\xi) d\xi \quad \text{que é regularizante, e como } \text{supp } H(-\xi) \subset X \times R^-, \text{ temos que} \end{aligned}$$

$$\mu \text{ supp } (\tilde{V}(t', t') - I) \subset X \times R^- \quad (\mu \text{ supp} = \text{micro suporte})$$

e portanto

$$\tilde{V}(t', t') - I \text{ é regularizante em } X \times R^+$$

Seja $\tilde{\tilde{V}}(t, t')$ um representante propriamente suportado de $\tilde{V}(t, t')$. Então,

$$(3.10) \quad (\partial_t - a(x, t) D_x) \circ \tilde{\tilde{V}}(t, t') = \tilde{R}_1(t, t') \text{ em } X \times [0, t']$$

e

$$(3.11) \quad \tilde{\tilde{V}}(t', t') = I + \tilde{R}_2(t') \text{ em } X$$

onde, $\tilde{R}_1(t, t')$ é um operador pseudodiferencial, propriamente suportado e regularizante; $\tilde{R}_2(t')$ é um operador pseudodiferencial, propriamente suportado e regularizante em $X \times R^+$. Por simplicidade de notação, daqui em diante usaremos $V(t, t')$ para indicar $\tilde{\tilde{V}}(t, t')$, $R_1(t, t')$ para indicar $\tilde{R}_1(t, t')$ e $R_2(t')$ para $\tilde{R}_2(t')$.

Definamos

$$(3.12) \quad v^+(x,t) = V(t,T) v_T^+(x) - \int_t^T V(t,t') f(x,t') dt'$$

De (3.10) e (3.11) segue a

Observação 3.2: Valem

$$(\partial_t - a(x,t)D_x) v^+(x,t) = f(x,t) + R_1(t,T) v_T^+(x) + R_2(t)f(x,t) - \\ - \int_t^T R_1(t,t') f(x,t') dt'$$

e

$$v^+(x,T) = v_T^+(x) + R_2(T) v_T^+(x)$$

Assim, podemos dizer que $v^+(x,t)$ é uma solução aproximada (isto é, é uma solução módulo operadores regularizantes agindo nos dados v_T^+ e f) de

$$I'-1: \quad \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x) v(x,t) = f(x,t) \\ v(x,T) = v_T^+(x) \end{cases}$$

De modo análogo à construção do operador $V(t,t')$, construímos um operador pseudodiferencial sobre X , propriamente suportado, $U(t,t')$ com as seguintes propriedades:

$$(3.13) \quad (\partial_t + b(x,t)D_x) U(t,t') = R_3(t,t') \text{ em } X \times [t', T] \\ (t' \geq 0)$$

e

$$(3.14) \quad U(t',t') = I + R_4(t') \text{ em } X$$

onde $R_3(t, t')$ é um operador pseudodiferencial, propriamente suportado e regularizante; $R_4(t')$ é um operador pseudodiferencial, propriamente suportado e regularizante em $X \times \mathbb{R}^+$.

Definamos

$$(3.15) \quad u^+(x, t) = U(t, 0)g(x) + \int_0^t U(t, t') v^+(x, t') dt'$$

De (3.13) e (3.14) segue a

Observação 3.3: Valem

$$\begin{aligned} (\partial_t + b(x, t)D_x) u^+(x, t) &= v^+(x, t) + R_3(t, 0)g(x) + R_4(t)v^+(x, t) \\ &\quad + \int_0^t R_3(t, t') v^+(x, t') dt' \end{aligned}$$

e

$$u^+(x, 0) = g(x) + R_4(0)g(x)$$

Assim, $u^+(x, t)$ é uma solução aproximada de

$$\begin{cases} (\partial_t + b(x, t)D_x) u(x, t) = v^+(x, t) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

3.2.2. REGULARIDADE DA SOLUÇÃO EXATA u

O objetivo agora é usar as Observações acima para mostrar que a solução exata u é C^∞ em $0 \times \mathbb{R}^+$, com dependência C^∞ de t .

Definamos

$$v_1(x, t) = v(x, t) - v^+(x, t) \quad \text{e} \quad u_1(x, t) = u(x, t) - u^+(x, t),$$

onde v é obtida da solução exata u , isto é,

$$v(x,t) = (\partial_t + b(x,t)D_x) u(x,t).$$

As Observações (3.1) e (3.2) implicam diretamente a validade de

$$(3.16) \quad \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x) v_1(x,t) = -R_1(t,T) v_T^+(x) - R_2(t)f(x,t) + \\ \quad + \int_t^T R_1(t,t') f(x,t') dt' \\ v_1(x,T) = v_T(x) - v_T^+(x) - R_2(T) v_T^+(x) \end{cases}$$

e

$$(3.17) \quad \begin{cases} (\partial_t + b(x,t)D_x) u_1(x,t) = v_1(x,t) - R_3(t,0)g(x) - \\ \quad - R_4(t) v^+(x,t) - \int_0^t R_3(t,t') v^+(x,t') dt' \\ u_1(x,0) = -R_4(0)g(x) \end{cases}$$

onde lembramos que todos os erros são regularizantes e

$$v_T(x) = [(\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t)]_{t=T}$$

Aplicando a fórmula (0.2) para $v_1(x,t)$ temos

$$\begin{aligned} v_1(x,t) &= V(t,T) v_1(x,T) - \\ &- \int_t^T V(t,t') \left[\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t') - a(x,t')D_x v_1(x,t') \right] dt' + \\ &+ S'_0(t) v_1(x,t) + \int_t^T S'_1(t,t') v_1(x,t') dt' \end{aligned}$$

Vamos usar esta expressão na demonstração do

LEMA 3.3: $v_1(x, t)$ é C^∞ em $X \times R^+$, com dependência C^∞ de $t \in [0, T)$.

PROVA: Os termos:

$$S'_0(t) v_1(x, t) \text{ e } \int_t^T S'_1(t, t') v_1(x, t') dt'$$

são C^∞ em $X \times R^+$ pois, os operadores que aparecem nestas expressões são regularizantes em $X \times R^+$.

De (3.16) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t') - a(x, t') D_x v_1(x, t') = & - R_1(t', T) v_T^+(x) - R_2(t') f(x, t') + \\ & + \int_t^T R_1(t', t'') f(x, t'') dt'' \end{aligned}$$

que também é C^∞ em $X \times R^+$ pelo mesmo argumento acima.

Como $V(t, t')$ é um operador pseudodiferencial e estes diminuem o conjunto frente de onda, concluimos que

$$\int_t^T V(t, t') \left[\frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t') - a(x, t') D_x v_1(x, t') \right] dt'$$

é C^∞ em $X \times R^+$.

Usando o fato de $V(t, T)$ ser regularizante para $t < T$ temos que $V(t, T) v_1(x, T)$ é C^∞ em $X \times R^+$

Logo, $v_1(x, t)$ é C^∞ em $X \times R^+$. A dependência C^∞ com relação a t segue da dependência C^∞ com relação a t e t' dos operadores envolvidos e da própria $v_1(x, t)$.

CQD.

Aplicando a fórmula (0.1) para $u_1(x, t)$ provamos de modo análogo ao Lema 3.3, o seguinte

LEMA 3.4: $u_1(x,t)$ é C^∞ em $X \times R^+$, com dependência C^∞ de $t \in [0,T)$.

LEMA 3.5: Sejam O um subconjunto aberto de X , $f(x,t)$ uma distribuição em x que é C^∞ em $O \times R^+$, com dependência C^∞ de t e $g(x)$ uma distribuição que é C^∞ em $O \times R^+$. Então, $u(x,t)$ é C^∞ em $O \times R^+$, com dependência C^∞ de t .

PROVA: Como um operador pseudodiferencial diminui o conjunto frente de onda e $V(t,T)$ é regularizante para $t < T$, concluímos que

$$v^+(x,t) = V(t,T) v_T^+(x) - \int_t^T V(t,t') f(x,t') dt'$$

é C^∞ em $O \times R^+$.

De modo análogo obtemos que

$$u^+(x,t) = U(t,0) g(x) + \int_0^t U(t,t') v^+(x,t') dt'$$

é C^∞ em $O \times R^+$.

A dependência C^∞ com relação a t segue da dependência C^∞ com relação a t e t' dos operadores envolvidos e de nossa hipótese sobre f .

Usando o Lema 3.4 e lembrando que $u(x,t) = u_1(x,t) + u^+(x,t)$ temos o desejado.

CQD.

3.3. A SOLUÇÃO u É C^∞ NO CONE $O \times R^-$, COM DEPENDÊNCIA C^∞ DE t

O objetivo agora é mostrar que a solução exata $u(x,t)$ é C^∞ em $O \times R^-$ com dependência C^∞ de t .

Para isso, consideremos os problemas:

$$\text{I-3: } \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x) v(x,t) = f(x,t) \\ v(x,0) = v_0^-(x) \end{cases}$$

e

$$\text{I-4: } \begin{cases} (\partial_t + b(x,t)D_x) u(x,t) = v(x,t) \\ u(x,T) = u_T^-(x) \end{cases}$$

onde $v_0^-(x)$ e $u_T^-(x)$ são distribuições arbitrárias.

3.3.1. SOLUÇÃO APROXIMADA

De modo análogo à seção 3.2.1 construímos os seguintes operadores pseudodiferenciais:

$$\tilde{V}_1(t,t')h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \tilde{V}_1(x,t,t',\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$\tilde{U}_1(t,t')h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \tilde{U}_1(x,t,t',\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

onde,

$$\tilde{V}_1(x,t,t',\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{V}_{1,j}(x,t,t',\xi) \chi_{1,j}(\xi),$$

$$V_{1,j}(x,t,t',\xi) = V_{1,j}(x,t,t',\xi) \psi(\xi)$$

com $\psi: R \rightarrow R$, C^∞ , $0 \leq \psi \leq 1$

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \geq -\frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } \xi \leq -1 \end{cases}$$

e

$$V_{1,0}(x,t,t',\xi) = e^{\xi \int_{t'}^t a(x,s) ds} \quad (t' \leq t).$$

Além disso, dados $\alpha, k, k', \beta, N \in \mathbb{N}$ e K um subconjunto compacto temos:

$$(3.18) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta (\tilde{V}_1 - \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{V}_{1,j}) \right| \leq e^{k+k' + \frac{1}{2} \alpha - \beta - \frac{N}{2} - \frac{1}{2} |\xi| \int_{t'}^t a(x,s) ds} \leq c(1+|\xi|)$$

para $(x, t, t') \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}$ e onde,

$$\tilde{U}_1(x, t, t', \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{U}_{1,j}(x, t, t', \xi) \chi_{1,j}(\xi),$$

$$\tilde{U}_{1,j}(x, t, t', \xi) = U_{1,j}(x, t, t', \xi) \psi(\xi)$$

e

$$U_{1,0}(x, t, t', \xi) = e^{\xi \int_t^{t'} b(x,s) ds} \quad (t \leq t')$$

Além disso, dados $\alpha, k, k', \beta, N \in \mathbb{N}$ e K um subconjunto compacto temos:

$$(3.19) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta (\tilde{U}_1 - \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{U}_{1,j}) \right| \leq e^{k+k' + \frac{1}{2} \alpha - \beta - \frac{N}{2} - \frac{1}{2} |\xi| \int_t^{t'} b(x,s) ds} \leq c(1+|\xi|)$$

para $(x, t, t') \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Observação 3.4: As estimativas (3.18) e (3.19) são provadas de modo análogo ao Lema A.5.

Daqui em diante, usaremos a notação $V_1(t, t'), U_1(t, t')$ para representantes propriamente suportado de $\tilde{V}_1(t, t')$ e $\tilde{U}_1(t, t')$, respectivamente.

Os operadores $V_1(t, t')$ e $U_1(t, t')$ satisfazem:

$$(3.20) \quad \begin{cases} (\partial_t - a(x, t)D_x)V_1(t, t') = R_5(t, t') & \text{em } X \times [t', T] \\ V_1(t', t') = I + R_6(t') & \text{em } X \end{cases}$$

e

$$(3.21) \quad \begin{cases} (\partial_t + b(x, t)D_x)U_1(t, t') = R_7(t, t') & \text{em } X \times [0, t'] \\ U_1(t', t') = I + R_8(t') & \text{em } X \end{cases}$$

respectivamente.

Os operadores R_5, R_6, R_7 e R_8 são propriamente suportados e regularizantes em $X \times R^-$. O operador $U(t, t')$ é regularizante para $t < t'$. Estes operadores são C^∞ com relação a t e t' .

Definindo

$$(3.22) \quad v^-(x, t) = V_1(t, 0)v_0^-(x) + \int_0^t V_1(t, t')f(x, t')dt'$$

e usando (3.20) temos

$$(3.23) \quad \begin{cases} (\partial_t - a(x, t)D_x)v^-(x, t) = f(x, t) + R_5(t, 0)v_0^-(x) + R_6(t)f(x, t) \\ \quad + \int_0^t R_5(t, t')f(x, t')dt' \\ v^-(x, 0) = v_0^-(x) + R_6(0)v_0^-(x) \end{cases}$$

Definindo

$$(3.24) \quad u^-(x, t) = U_1(t, T)u_T^-(x) - \int_t^T U_1(t, t')v^-(x, t')dt'$$

e usando (3.21) temos

$$(3.25) \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + b(x,t)D_x)u^-(x,t) = v^-(x,t) + R_7(t,T)u_T^-(x) + R_8(t)v^-(x,t) \\ \quad - \int_t^T R_7(t,t')v^-(x,t')dt' \\ u^-(x,T) = u_T^-(x) + R_8(T)u_T^-(x) \end{array} \right.$$

Lembrando que $u(x,t)$ é uma solução exata e $v(x,t) = (\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t)$, definimos

$v_0(x) = [(\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t)]|_{t=0}$, que é uma dis
tribuição.

Como $v^-(x,t)$ foi construída a partir de uma distri
buição arbitrária $v_0^-(x)$, se tomarmos $v_0^-(x) = v_0(x)$ temos:

$$(3.26) \quad v^-(x,t) = V_1(t,0)v_0(x) + \int_0^t V_1(t,t')f(x,t')dt'$$

e

$$(3.27) \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t - a(x,t)D_x)v^-(x,t) = f(x,t) + R_5(t,0)v_0(x) + R_6(t)f(x,t) \\ \quad + \int_0^t R_5(t,t')f(x,t')dt' \\ v^-(x,0) = v_0(x) + R_6(0)v_0(x) \end{array} \right.$$

Daqui em diante vamos usar a solução aproximada $u^-(x,t)$ construída a partir da solução aproximada $v^-(x,t)$ da
da por (3.26) e não mais a partir de (3.22).

3.3.2. REGULARIDADE DE u

Definamos

$$v_2(x,t) = v(x,t) - v^-(x,t) \quad \text{e} \quad u_2(x,t) = u(x,t) - u^-(x,t)$$

Observemos que (3.25) e (3.27) implicam diretamente a validade de

$$(3.28) \quad \begin{cases} (\partial_t - a(x,t)D_x)v_2(x,t) = -R_5(t,0)v_0(x) - R_6(t)f(x,t) \\ \quad - \int_0^t R_5(t,t')f(x,t')dt' \\ v_2(x,0) = -R_6(0)v_0(x) \end{cases}$$

e

$$(3.29) \quad \begin{cases} (\partial_t + b(x,t)D_x)u_2(x,t) = v_2(x,t) - R_7(t,T)u_T^-(x) - R_8(t)v^-(x,t) \\ \quad + \int_t^T R_7(t,t')v^-(x,t')dt' \\ u_2(x,T) = u_T(x) - u_T^-(x) - R_8(T)u_T^-(x) \end{cases}$$

onde $u_T(x)$ é o valor da solução exata $u(x,t)$ calculada em $t=T$.

Aplicando a fórmula (0.1) para $v_2(x,t)$ temos

$$\begin{aligned} v_2(x,t) &= V_1(t,0)v_2(x,0) + \\ &+ \int_0^t V_1(t,t') [\partial_t v_2(x,t') - a(x,t')D_x v_2(x,t')] dt' \\ &+ S_2''(t)v_2(x,t) + \int_0^t S_3''(t,t')v_2(x,t')dt' \end{aligned}$$

e aplicando a fórmula (0.2) para $u_2(x,t)$ temos:

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= U_1(t,T)u_2(x,T) - \\ &- \int_t^T U_1(t,t') [\partial_t u_2(x,t') + b(x,t') D_x u_2(x,t')] dt' \\ &+ S_0''(t)u_2(x,t) + \int_t^T S_1''(t,t')u_2(x,t') dt' \end{aligned}$$

Usando (3.28) e (3.29) prova-se, com argumentos análogos a do Lema 3.3, o seguinte

LEMA 3.6: $v_2(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são C^∞ em $X \times R^-$ com dependência C^∞ de $t \in [0,T)$.

Observação 3.5: Para provar que u é C^∞ em $O \times R^-$, onde O é um subconjunto aberto de X , surge uma dificuldade adicional, em relação a prova de que u era C^∞ em $O \times R^+$, isto é, aqui teremos de mostrar que $v_0(x)$ é C^∞ em $O \times R^+$.

LEMA 3.7: Se $f(x,t)$ é C^∞ em $O \times R^-$ com dependência C^∞ de t e $g(x)$ é C^∞ em $O \times R^-$ então,

$$\int_0^T U_1(0,t') V_1(t',0) v_0(x) dt' \text{ é } C^\infty \text{ em } O \times R^-.$$

PROVA: De (3.22) e (3.26) temos:

$$\begin{aligned} u^-(x,0) &= U_1(0,T)u_T^-(x) - \int_0^T U_1(0,t') v^-(x,t') dt' = U_1(0,T)u_T^-(x) - \\ &- \int_0^T U_1(0,t') \left[V_1(t',0) v_0(x) + \int_0^{t'} V_1(t',t'') f(x,t'') dt'' \right] dt' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_1(0,T)u_T^-(x) - \int_0^T U_1(0,t')V_1(t',0)v_0(x)dt' - \\
&- \int_0^T U_1(0,t') \left[\int_0^{t'} V_1(t',t'')f(x,t'')dt'' \right] dt'
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
(3.30) \quad &\int_0^T U_1(0,t')V_1(t',0)v_0(x)dt' = -u^-(x,0) + U_1(0,T)u_T^-(x) - \\
&- \int_0^T U_1(0,t') \left[\int_0^{t'} V_1(t',t'')f(x,t'')dt'' \right] dt'.
\end{aligned}$$

Observemos que $u^-(x,0)=u(x,0)-u_2(x,0)=g(x)-u_2(x,0)$. Como por hipótese $g(x)$ é C^∞ em $0 \times R^-$ e sabemos, pelo Lema 3.6, que $u_2(x,0)$ é C^∞ em $X \times R^-$, concluímos que $u^-(x,0)$ é C^∞ em $0 \times R^-$.

A prova de que os outros termos que aparecem no segundo membro de (3.30) são C^∞ em $0 \times R^-$ é imediata; basta usar a hipótese de f ser C^∞ em $0 \times R^-$ e os fatos dos operadores U_1 e V_1 serem pseudodiferenciais, logo diminuem o conjunto frente de onda, e de $U_1(0,T)$ ser regularizante.

Logo

$$\int_0^T U_1(0,t')V_1(t',0)v_0(x)dt' \quad \text{é } C^\infty \text{ em } 0 \times R^-$$

CQD

O que queremos provar mesmo é que $v_0(x)$ é C^∞ em $0 \times R^-$, o que será feito usando os próximos resultados.

PROPOSIÇÃO 3.1: O operador

$$\int_0^T U_1(0, t') V_1(t', 0) dt'$$

é um operador pseudodiferencial de ordem zero.

PROVA: Daqui em diante usaremos a notação $t' = t$.

Observemos que

$$U_1(0, t) \circ V_1(t, 0) \sim Q(t)$$

onde o símbolo $q(x, t, \xi)$ do operador $Q(t)$ satisfaz

$$q(x, t, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} U_1(x, 0, t, \xi) D_x^{\alpha} V_1(x, t, 0, \xi)$$

Então, o símbolo $q_1(x, \xi)$ do operador

$$\int_0^T U_1(0, t) \circ V_1(t, 0) dt$$

tem a seguinte propriedade:

$$q_1(x, \xi) \sim \int_0^T q(x, t, \xi) dt \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \int_0^T \partial_{\xi}^{\alpha} U_1(x, 0, t, \xi) D_x^{\alpha} V_1(x, t, 0, \xi) dt$$

Segue de (3.19) e de (3.18) que

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} U_1(x, 0, t, \xi)| \leq C_1 (1 + |\xi|)^{-\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi| \int_0^t b(x, s) ds} \leq C_1 (1 + |\xi|)^{-\alpha}$$

e

$$|D_x^{\alpha} V_1(x, t, 0, \xi)| \leq C_2 (1 + |\xi|)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{1}{2}|\xi| \int_0^t a(x, s) ds} \leq C_2 (1 + |\xi|)^{\frac{\alpha}{2}},$$

respectivamente e portanto,

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} U_1(x, 0, t, \xi) D_x^{\alpha} V_1(x, t, 0, \xi)| \leq C_3 (1 + |\xi|)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

De maneira habitual, definimos

$$(3.31) \quad q_2(x, t, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} U_1(x, 0, t, \xi) D_x^{\alpha} V_1(x, t, 0, \xi) \chi_{\alpha}(\xi).$$

A amplitude $q_2(x, t, \xi)$ satisfaz

$$(3.32) \quad |\partial_x^{\gamma} \partial_t^k \partial_{\xi}^{\beta} q_2(x, t, \xi)| \leq C_4 (1 + |\xi|)^{k + \frac{1}{2}\gamma - \beta}$$

e além disso, dado $N \in \mathbb{N}$ e $K \subset \subset X \times [0, T]$,

$$(3.33) \quad |\partial_x^{\gamma} \partial_t^k \partial_{\xi}^{\beta} (q_2 - \sum_{\alpha < N} \partial_{\xi}^{\alpha} U_1 D_x^{\alpha} V_1)| \leq C_5 (1 + |\xi|)^{k + \frac{1}{2}\gamma - \beta - \frac{N}{2}}$$

para $(x, t) \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Logo

$$\int_0^T q(x, t, \xi) dt \sim \int_0^T q_2(x, t, \xi) dt$$

$$\text{Como } \int_0^T q_2(x, t, \xi) dt \in S_{1, \frac{1}{2}}^0(X)$$

e

$$q_1(x, \xi) \sim \int_0^T q_2(x, t, \xi) dt, \text{ concluimos que o operador}$$

$$\int_0^T U_1(0, t) \circ V_1(t, 0) dt \in \psi_{1, \frac{1}{2}}^0(X) \quad \text{CQD.}$$

LEMA 3.8: Seja K um suconjunto compacto de X e $k \geq 2$.

Então, existem $c > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\left| \int_0^T q_2(x, t, \xi) dt \right| \geq C |\xi|^{-\frac{1}{k+1}}$$

para $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^-$, $\xi \leq -R$, onde $q_2(x, t, \xi)$ é dado por (3.31).

PROVA: Consideremos $\xi \leq -1$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T q_2(x, t, \xi) dt \right| &= \left| \int_0^T U_1 V_1 dt - \int_0^T (U_1 V_1 - q_2) dt \right| \geq \\ &\geq \left| \int_0^T U_1 V_1 dt \right| - \int_0^T |U_1 V_1 - q_2| dt = \\ &= \left| \int_0^T U_{10} V_{10} dt - \int_0^T (U_{10} V_{10} - U_1 V_1) dt \right| - \int_0^T |U_1 V_1 - q_2| dt \geq \\ &\geq \left| \int_0^T U_{10} V_{10} dt \right| - \int_0^T |U_{10} V_{10} - U_1 V_1| dt - \int_0^T |U_1 V_1 - q_2| dt \geq \\ &\stackrel{(1)}{\geq} \left| \int_0^T U_{10} V_{10} dt \right| - C_1 |\xi|^{-\frac{1}{2}} - C_2 |\xi|^{-\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq \left| \int_0^T U_{10} V_{10} dt \right| - C_3 |\xi|^{-\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

(1) segue de (3.18), (3.19) e (3.33).

$$= \left| \int_0^T e^{\xi \int_0^t (a+b)(x,s) ds} dt \right| - C_3 |\xi|^{-\frac{1}{2}} \geq$$

$$\stackrel{(2)}{\geq} \int_0^T e^{C_0 \xi t^{k+1}} dt - C_3 |\xi|^{-\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq C_4 |\xi|^{-\frac{1}{k+1}} - C_3 |\xi|^{-\frac{1}{2}} \geq C |\xi|^{-\frac{1}{k+1}}$$

onde $\xi \leq -R$ e $C > 0$.

A hipótese $k \geq 2$ é uma condição técnica para garantir a última desigualdade.

LEMA 3.9: Seja $W \in \psi_{1, \frac{1}{2}}^0(X)$ o operador pseudodiferencial com símbolo

$$w(x, \xi) = \int_0^T q_2(x, t, \xi) dt \in S_{1, \frac{1}{2}}^0(X)$$

Seja O um subconjunto aberto de X tal que $\bar{O}$ é compacto em X .

(2) Como $a(x, s) = s^k \tilde{a}(x, s)$, $b(x, s) = s^\ell \tilde{b}(x, s)$ e por simplicidade vamos supor $k \leq \ell$ temos:

$$(a+b)(x, s) = s^k h(x, s) \leq C_0 s^k, \text{ com } C_0 > 0$$

Então, dado o cone $0 \times R^- \subset X \times R^-$ e supondo $k \geq 4$, existe um operador $E \in \psi_{\rho, \delta}^m(X)$ com $m = \frac{1}{k+1}$, $\rho = 1 - \frac{1}{k+1}$ e $\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}$ tal que

$E \circ W - I$ é regularizante em $0 \times R^-$.

PROVA: Procuremos $e(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(x, \xi)$. Usando,

$$e \circ w = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} e(x, \xi) D_x^{\alpha} w(x, \xi) = 1,$$

determinamos os "símbolos" $e_j(x, \xi)$, em $0 \times R^-$, pelas relações

$$e_0(x, \xi) w(x, \xi) = 1$$

$$e_j(x, \xi) w(x, \xi) = - \sum_{1 \leq \alpha \leq j} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} e_{j-\alpha}(x, \xi) D_x^{\alpha} w(x, \xi),$$

pois, pelo Lema 3.8 sabemos que

$$|w(x, \xi)| \geq C |\xi|^{-m}, \text{ para } (x, \xi) \in 0 \times R^-, \xi \leq -R$$

onde $C > 0$ e $R > 0$.

Usando-se funções cortes em ξ , prova-se que

$$e_j(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^{m-j(\rho-\delta)}(X) \quad (\text{aqui estamos pensando}$$

que os $e_j(x, \xi)$ já estão cortados). A hipótese $k \geq 4$ é uma condição técnica que implica $\rho - \delta > 0$.

Assim, $e(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(X)$ e o operador E com símbolo $e(x, \xi)$ satisfaz o Lema.

CQD.

A existência do operador E , garantida pelo Lema 3.9, implica que o operador W é hipoelítico em $0 \times R^-$.

Resumiremos os últimos resultados na seguinte

PROPOSIÇÃO 3.2: O operador

$$\int_0^T U_1(0,t) \circ V_1(t,0) dt$$

é um operador pseudodiferencial de ordem zero e hipoelítico em $0 \times R^-$.

LEMA 3.10: A distribuição $v_0(x)$ definida por:

$$v_0(x) = [(\partial_t + b(x,t)D_x)u(x,t)]|_{t=0}$$

é C^∞ em $0 \times R^-$.

PROVA: Segue diretamente do Lema 3.7 e da Proposição 3.2

LEMA 3.11: Sejam 0 um subconjunto aberto de X , $f(x,t)$ uma distribuição em x que é C^∞ em $0 \times R^-$ com dependência C^∞ de t e $g(x)$ uma distribuição que é C^∞ em $0 \times R^-$. Então, $u(x,t)$ é C^∞ em $0 \times R^-$ com dependência C^∞ de $t \in [0, T)$.

PROVA: Lembremos que a solução aproximada $v^-(x,t)$ é dada por

$$v^-(x,t) = V_1(t,0)v_0(x) + \int_0^t V_1(t,t')f(x,t')dt'.$$

Pelo Lema 3.10 sabemos que $v_0(x)$ é C^∞ em $0 \times R^-$ e como $V_1(t,0)$ é um operador pseudodiferencial concluímos que $V_1(t,0)v_0(x)$ é C^∞ em $0 \times R^-$.

De modo análogo, concluímos que o termo

$$\int_0^t v_1(t, t') f(x, t') dt' \quad \text{é } C^\infty \text{ em } 0 \times R^-.$$

Logo $v^-(x, t)$ é C^∞ em $0 \times R^-$. A dependência C^∞ com relação a t segue da dependência C^∞ com relação a t e t' dos operadores que aparecem na expressão de $v^-(x, t)$ e da hipótese sobre f .

Recordemos a expressão da solução aproximada $u^-(x, t)$;

$$u^-(x, t) = U_1(t, T) u_T^-(x) - \int_0^T U_1(t, t') v^-(x, t') dt'.$$

Usando a conclusão acima sobre $v^-(x, t)$ e lembrando que o operador U_1 é pseudodiferencial, logo diminui o conjunto frente de onda, e que $U_1(t, T)$ é regularizante para $t < T$, concluímos que $u^-(x, t)$ é C^∞ em $0 \times R^-$ com dependência C^∞ de $t \in [0, T)$.

Como $u(x, t) = u_2(x, t) + u^-(x, t)$, usando o Lema 3.6 concluímos o desejado.

CQD

3.4. CONCLUSÃO:

Sejam 0 um subconjunto aberto de X , $f(x, t) \in C^\infty([0, T]; D'(X))$ e $g(x) \in D'(X)$. Supondo que a restrição de f e g a 0 é C^∞ , isto é, $f(x, t) \in C^\infty(0 \times [0, T])$ e $g(x) \in C^\infty(0)$ e utilizando os Lemas (3.5) e (3.11) concluímos que a solução exata $u(x, t)$ é C^∞ em $0 \times R^+$ e em $0 \times R^-$ com dependência C^∞ de $t \in [0, T)$.

Assim, $WF(u) = \emptyset$ e portanto $u(x, t) \in C^\infty(0 \times [0, T))$ o que prova o Teorema 3.1.

APÊNDICE

Observação A.1:

Sejam $m \in \mathbb{N}$, V um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f: V \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(x, z) = z^m + a_1(x)z^{m-1} + \dots + a_{m-1}(x)z + a_m(x)$$

onde,

$a_i : V \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$; são funções contínuas em V .

Suponhamos que

$f(x_0, z) = z^m + a_1(x_0)z^{m-1} + \dots + a_m(x_0) = 0$ tem como raízes (distintas) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com multiplicidades $m_1, \dots, m_k$ respectivamente ($\sum_{i=1}^k m_i = m$). Seja $\epsilon > 0$ tal que $\bar{B}(\alpha_i, \epsilon)$, $i = 1, \dots, k$ são disjuntas.

Então, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que a equação $f(x, z) = 0$ tem exatamente m_i raízes (contadas com suas multiplicidades) na bola $B(\alpha_i, \epsilon)$. (a prova desse resultado é feita usando o Teorema de Rouché)

LEMA A.1

Seja $f(x, z) = z^m + a_1(x)z^{m-1} + \dots + a_m(x)$ como na observação acima.

Então, existe m subconjuntos $O_1, \dots, O_m$; abertos

de V , tal que

$$\overline{O_1 \cup \dots \cup O_m} = V \quad (\text{fêcho em } V)$$

e para cada $j = 1, \dots, m$ e todo $x \in O_j$ o polinômio na variável z , $f(x, z)$, tem exatamente j raízes distintas.

PROVA:

Para cada $x \in V$, definimos a seguinte função

$$d : V \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$$

$$x \rightarrow d(x) = \text{número de raízes distintas de } f(x, z) = 0$$

Afirmção: d é uma função semi-contínua inferiormente em V .

De fato, sejam $x_0 \in V$ e $\epsilon > 0$ dados. Então, $d(x_0) = j_0$ com $1 \leq j_0 \leq m$, isto é, a equação $f(x_0, z) = 0$ tem j_0 raízes distintas; $\alpha_1, \dots, \alpha_{j_0}$ com as multiplicidades $m_1, \dots, m_{j_0}$ ($\sum_{i=1}^{j_0} m_i = m$).

Sejam,

$$r = \min\{|\alpha_i - \alpha_k| : i, k = 1, \dots, j_0 \text{ e } i < k\} \text{ e}$$

$$\epsilon' = \min\left\{\frac{r}{3}, \epsilon\right\}$$

Assim, as bolas $\bar{B}(\alpha_i, \epsilon')$, $i = 1, \dots, j_0$ são disjun

tas. Pela Observação A.1, existe $\delta > 0$ tal que $|x-x_0| < \delta$ implica que a equação $f(x,z) = 0$ tem exatamente m_i raízes (contadas com suas multiplicidades) na bola $B(\alpha_i, \epsilon')$, em particular existe pelo menos uma raiz na bola $B(\alpha_i, \epsilon')$.

Portanto, se $|x-x_0| < \delta$ temos $d(x) \geq d(x_0) > d(x_0) - \epsilon$ e assim, d é semi-contínua inferiormente em x_0 . Como x_0 foi tomado arbitrário d é semi-contínua inferiormente em V , o que prova nossa afirmação.

Definamos os seguintes conjuntos:

$$O_m = \{x \in V : d(x) = m\}$$

$$O'_m = V - \overline{O_m}$$

$$O_{m-1} = \{x \in V : d(x) = m - 1\} \cap O'_m$$

$$O'_{m-1} = O'_m - \overline{O_{m-1}}$$

$$O_{m-2} = \{x \in V : d(x) = m - 2\} \cap O'_{m-1}$$

.

.

.

e assim por diante.

Verifica-se que os conjuntos $O_1, \dots, O_m$ construídos acima satisfazem as condições do Lema.

CQD.

LEMA A.2

Seja $G(x, t, \xi) \in B_t^0(X)$ e $g(x, t, \xi) \in B_t^q(X)$.

Então,

$$b(x, t, \xi) = \int_0^t (t-s)^{m-1} G(x, t-s, \xi) g(x, s, \xi) ds \in B_t^{q-m}(X)$$

PROVA

$$\begin{aligned} \partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x, t, \xi) &= \\ &= \partial_t^k \left\{ \int_0^t (t-s)^{m-1} (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G(x, t-s, \xi) g(x, s, \xi)) ds \right\} = \\ &= \partial_t^k \int_0^t w(x, t, s, \xi) ds \stackrel{(*)}{=} \int_0^t \partial_t^k w(x, t, s, \xi) ds + \\ &+ \left\{ k \partial_t^{k-1} w(x, t, s, \xi) + \frac{1}{2} k(k-1) \partial_t^{k-2} \partial_s w(x, t, s, \xi) + \right. \\ &+ \dots + \partial_s^{k-1} w(x, t, s, \xi) \left. \right\}_{s=t} \end{aligned}$$

Analisaremos só o termo mais complicado:

$$I = \int_0^t \partial_t^k w(x, t, s, \xi) ds$$

(*) Esta fórmula está provada em Treves [14] e em Petroni
lho [9].

Análise de I

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^t \partial_t^k w(x, t, s, \xi) ds = \\
 &= \int_0^t \partial_t^k [(t-s)^{m-1} (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (G(x, t-s, \xi) g(x, s, \xi)))] ds = \\
 &= \sum_{k' \leq k} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} C_{k', k} C_{\alpha', \alpha} C_{\beta', \beta} \int_0^t (\partial_t^{k'} (t-s)^{m-1}) \times \\
 &\times (\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^{k-k'} G) (\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} g) ds.
 \end{aligned}$$

Assim, (a menos de constantes)

$$\begin{aligned}
 |I| &\leq \int_0^t |\partial_t^{k'} (t-s)^{m-1}| |\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^{k-k'} G| |\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} g| ds \leq \\
 &\leq \int_0^t |\partial_t^{k'} (t-s)^{m-1}| [1+(t-s)|\xi|]^{N_0+|\alpha|-|\alpha'|+|\beta|-|\beta'|} \times \\
 &\times (1+|\xi|)^{k-k'-|\beta|+|\beta'|} e^{-A(t-s)|\xi|} \times \\
 &\times [1+s|\xi|]^{N_1+|\alpha'|+|\beta'|} (1+|\xi|)^{q-|\beta'|} e^{-As|\xi|} ds \leq \\
 &\leq (1+t|\xi|)^{M_0+M_1} (1+|\xi|)^{q-|\beta|+k-k'} e^{-At|\xi|} \int_0^t \partial_t^{k'} (t-s)^{m-1} ds =
 \end{aligned}$$

onde, $M_0 = N_0 + |\alpha| - |\alpha'| + |\beta| - |\beta'|$ e $M_1 = N_1 + |\alpha'| + |\beta'|$

$$\begin{aligned}
 &= (1+t|\xi|)^{N_0+N_1+|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{q-|\beta|+k-k'} e^{-At|\xi|} \times \\
 &\times t^{m-k'} |\xi|^{m-k'} |\xi|^{-m+k'} \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq (1+t|\xi|)^{N_0+N_1+m+|\alpha|+|\beta|} (1+|\xi|)^{q-m-|\beta|+k} e^{-At|\xi|}$$

CQD.

LEMA A.3:

Dados $\alpha, k, k', \beta \in \mathbb{N}$ e K um subconjunto compacto de $X \times G_T$, existe uma constante $C = C(\alpha, k, k', \beta, K)$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta \tilde{V}_0(x, t, t', \xi) \right| \leq \\ & \leq C(1+|\xi|)^{k+k'+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-\frac{3}{4}|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds \end{aligned}$$

para $(x, t, t') \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

PROVA:

Basta mostrar que

"Dados $\alpha, k, k', \beta \in \mathbb{N}$ com $\alpha + k + k' + \beta = m$ e K um subconjunto compacto de $X \times G_T$, existe uma constante $C = C(\alpha, k, k', \beta, K)$ tal que

$$(A.1) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta \tilde{V}_0(x, t, t', \xi) \right| \leq$$

$$\leq C(1 + |\xi|) e^{k+k' + \frac{1}{2} \alpha - \beta - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2m_4}\right) |\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds$$

para $(x, t, t') \in K$ e $|\xi| > 1$ (Na verdade para $\xi > 1$, pois para $\xi < 0$, $\tilde{V}_0 = 0$. Lembrando que $\tilde{V}_0 = V_0$ para $\xi > 1$, na prova, trocaremos $\tilde{V}_0$ por V_0).

A demonstração desse fato é feita por indução sobre m .

Verifiquemos (A.1) para $m = 0$ e $m = 1$.

$$\begin{aligned} |V_0(x, t, t', \xi)| &= \left| e^{-\xi \int_t^{t'} a(x, s) ds} \right| = e^{-\xi \int_t^{t'} a(x, s) ds} = \\ &= e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x, s) ds} \end{aligned}$$

Como

$$\partial_x V_0(x, t, t', \xi) = e^{-\xi \int_t^{t'} a(x, s) ds} (-\xi) \cdot \int_t^{t'} \frac{\partial a}{\partial x}(x, s) ds$$

temos,

$$\begin{aligned} |\partial_x V_0(x, t, t', \xi)| &\leq e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x, s) ds} \cdot |\xi| \cdot \int_t^{t'} \left| \frac{\partial a}{\partial x}(x, s) \right| ds \\ &\leq e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x, s) ds} \cdot |\xi| \int_t^{t'} C_1 \sqrt{a(x, s)} ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq C_1 e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} \cdot |\xi| \cdot \sqrt{t'-t} \times \\
& \times \left(\int_t^{t'} a(x,s) ds \right)^{1/2} \leq \\
& \leq C_2 e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} (|\xi| \cdot \int_t^{t'} a(x,s) ds)^{1/2} |\xi|^{1/2} \leq \\
& \leq C_3 e^{-\frac{7}{8} |\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} \cdot |\xi|^{1/2}
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\partial_x V_0(x, t, t', \xi)| \leq C_3 \cdot |\xi|^{1/2} e^{-\frac{7}{8} |\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds}.$$

Como

$$\partial_\xi V_0(x, t, t', \xi) = e^{-\xi \int_t^{t'} a(x,s) ds} (-1) \int_t^{t'} a(x,s) ds$$

temos,

$$\begin{aligned}
|\partial_\xi V_0(x, t, t', \xi)| & \leq e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} \int_t^{t'} a(x,s) ds = \\
& = e^{-|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} \cdot (|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds) |\xi|^{-1} \leq \\
& \leq C_4 e^{-\frac{7}{8} |\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} \cdot |\xi|^{-1}
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\partial_{\xi} V_0(x, t, t', \xi)| \leq C_4 |\xi|^{-1} e^{-\frac{7}{8}|\xi| \int_t^{t'} a(x, s) ds}.$$

Como

$$\partial_t V_0(x, t, t', \xi) = e^{-\xi \int_t^{t'} a(x, s) ds} \cdot \xi \cdot a(x, t)$$

Concluimos que

$$|\partial_t V_0(x, t, t', \xi)| \leq C_5 |\xi| e^{-\frac{7}{8}|\xi| \int_t^{t'} a(x, s) ds}$$

A estimativa para $\partial_t V_0$ é análoga a de $\partial_t V_0$.

A indução segue observando que

$$\partial_x V_0(x, t, t', \xi) = V_0(x, t, t', \xi) \cdot (-\xi \cdot \int_t^{t'} \frac{\partial a}{\partial x}(x, s) ds)$$

$$\partial_{\xi} V_0(x, t, t', \xi) = V_0(x, t, t', \xi) \cdot (-\int_t^{t'} a(x, s) ds)$$

$$\partial_t V_0(x, t, t', \xi) = V_0(x, t, t', \xi) \cdot (\xi \cdot a(x, t))$$

$$\partial_{t'} V_0(x, t, t', \xi) = V_0(x, t, t', \xi) \cdot (-\xi \cdot a(x, t'))$$

CQD.

LEMA A.4

Sejam $D_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p \cdot 4}$ e $f(x, t, t', \xi) = a(x, t) g(x, t, t', \xi)$

onde $g \in A_{t,t',1,\frac{1}{2}}^{m,a,D_p}(X)$

Então,

$$h(x,t,t',\xi) = - \int_t^{t'} \tilde{V}_0(x,t,s,\xi) f(x,s,t',\xi) ds$$

pertence ao espaço de amplitudes $A_{t,t',1,\frac{1}{2}}^{m-1,a,D_{p+1}}(X)$.

PROVA

Nas estimativas abaixo não incluiremos a derivada em t' pois, ela desempenha um papel análogo a da derivada em t .

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_\xi^\beta h(x,t,t',\xi) &= \\ &= \partial_t^k \left\{ - \int_t^{t'} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\tilde{V}_0(x,t,s,\xi) f(x,s,t',\xi)] ds \right\} = \\ &= \partial_t^k \left\{ - \int_t^{t'} w(x,t,s,t',\xi) ds \right\} = - \int_t^{t'} \partial_t^k w(x,t,s,t',\xi) ds \\ &+ \{ k \partial_t^{k-1} w(x,t,s,t',\xi) + \frac{1}{2} k(k-1) \partial_t^{k-2} \partial_s w(x,t,s,t',\xi) + \\ &+ \frac{1}{3!} k(k-1)(k-2) \partial_t^{k-3} \partial_s^2 w(x,t,s,t',\xi) + \dots + \\ &+ \partial_s^{k-1} w(x,t,s,t',\xi) \}_{s=t} \end{aligned}$$

Analisaremos só o termo mais complicado:

$$I = \int_t^{t'} \partial_t^k w(x,t,s,t',\xi) ds$$

Análise de I: (Para simplicidade de redação omitiremos as constantes).

$$\begin{aligned}
 I &= \int_t^{t'} \partial_t^k w(x, t, s, t', \xi) ds = \\
 &= \int_t^{t'} \partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\tilde{V}_0(x, t, s, \xi) f(x, s, t', \xi)] ds = \\
 &= \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} \int_t^{t'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0(x, t, s, \xi) \times \\
 &\quad \times \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} (a(x, s) g(x, s, t', \xi)) ds = \\
 &= \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} \sum_{\alpha'' \leq \alpha} \int_t^{t'} (\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0) (\partial_x^{\alpha'-\alpha''} a) \partial_x^{\alpha''} \partial_\xi^{\beta'} g(\dots) ds \\
 &= \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} \int_t^{t'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0 \cdot a \cdot (\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} g) ds + \\
 &\quad + \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} \int_t^{t'} (\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) (\partial_x^{\alpha'-1} \partial_\xi^{\beta'} g) ds + \\
 &\quad + \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{\beta' \leq \beta} \sum_{\alpha'' \leq \alpha'-2} \int_t^{t'} (\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0) (\partial_x^{\alpha'-\alpha''} a) (\partial_x^{\alpha''} \partial_\xi^{\beta'} g) ds \\
 &= I-1 + I-2 + I-3.
 \end{aligned}$$

Análise de I-1:

$$\begin{aligned}
 |I-1| &\leq \int_t^{t'} |\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0| |a| |\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} g| ds \leq \\
 &\leq \int_t^{t'} (1+|\xi|)^{k+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha'-\beta+\beta'} e^{-D_0|\xi|} \left| \int_t^s a(x, s') ds' \right| \times \\
 &\quad \times a(x, s) (1+|\xi|)^{m+\frac{1}{2}\alpha'-\beta'} e^{-D_p|\xi|} \left| \int_s^{t'} a(x, s') ds' \right| ds \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq (1+|\xi|) e^{m+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_p|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds \int_t^{t'} a(x,s) ds$$

$$\leq (1+|\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_p|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds \cdot |\xi| \times$$

$$\times \int_t^{t'} a(x,s) ds =$$

$$= (1+|\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_{p+1}|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2^{p+1.4}}|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds \leq |\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds \leq$$

$$\leq (1+|\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_{p+1}|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds$$

Análise de I - 2

$$|I-2| \leq \int_t^{t'} |\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0| |\frac{\partial a}{\partial x}(x,s)| |\partial_x^{\alpha'-1} \partial_\xi^{\beta'} g| ds \leq$$

$$\leq \int_t^{t'} (1+|\xi|) e^{k+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha'-\beta+\beta'} e^{-D_0|\xi|} \int_t^s a(x,s') ds' \times$$

$$|\frac{\partial a}{\partial x}(x,s)| (1+|\xi|) e^{m+\frac{1}{2}\alpha'-\frac{1}{2}-\beta'} e^{-D_p|\xi|} \int_s^{t'} a(x,s') ds' ds \leq$$

$$\leq (1+|\xi|) e^{m+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta-\frac{1}{2}} e^{-D_p|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds \int_t^{t'} |\frac{\partial a}{\partial x}(x,s)| ds$$

$$= (1+|\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_p|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds \times$$

$$\begin{aligned}
& \times |\xi|^{\frac{1}{2}} \int_t^{t'} \left| \frac{\partial a}{\partial x} (x, s) \right| ds \leq \\
& \leq (1 + |\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_{p+1}|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds \\
& \times e^{-\frac{1}{2^{p+1} \cdot 4} |\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds \quad |\xi|^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t'} a(x, s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq (1 + |\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_{p+1}|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds
\end{aligned}$$

Análise de I-3:

$$\begin{aligned}
|I-3| & \leq \int_t^{t'} \left| \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_t^k \tilde{V}_0 \right| \left| \partial_x^{\alpha'-\alpha''} a \right| \left| \partial_x^{\alpha''} \partial_\xi^\beta g \right| ds \leq \\
& \leq \int_t^{t'} (1 + |\xi|) e^{k+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha'-\beta+\beta'} e^{-D_0|\xi|} \int_t^s a(x, s') ds' \times \\
& \times (1 + |\xi|) e^{m+\frac{1}{2}\alpha''-\beta'} e^{-D_p|\xi|} \int_s^{t'} a(x, s') ds' ds \leq \\
& \leq \int_t^{t'} (1 + |\xi|) e^{k+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha'-\beta+\beta'} e^{-D_p|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s') ds' \times \\
& \times (1 + |\xi|) e^{m+\frac{1}{2}\alpha'-1-\beta'} ds \quad (\text{Aqui usamos que } \alpha'' \leq \alpha'-2) \\
& = (1 + |\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_p|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds \int_t^{t'} ds \\
& \leq (1 + |\xi|) e^{(m-1)+k+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-D_{p+1}|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds
\end{aligned}$$

Assim,

$$|I| \leq (1+|\xi|)^{(m-1)+\frac{1}{2}\alpha+k-\beta} e^{-D_{p+1}|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds$$

CQD.

LEMA A.5:

Seja $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}(x,t,t',\xi)$ uma série formal. Suponhamos que existe uma função C^{∞} , $a(x,t) \geq 0$ e uma constante $A > 0$ tais que para $\alpha, k, k', \beta \in \mathbb{N}$ e K um subconjunto compacto de $X \times G_T$ dados, existe uma constante $C_{\ell} = C_{\ell}(\alpha, k, k', \beta, K)$ tal que

$$(A.2) \quad \left| \partial_x^{\alpha} \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_{\xi}^{\beta} a_{\ell}(x,t,t',\xi) \right| \leq e^{-\frac{\ell}{2}+k+k'+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-A|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds$$

$$\leq C_{\ell} (1+|\xi|)$$

para $(x,t,t') \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então, podemos encontrar uma sequência de números reais positivos, ρ_{ℓ} , tais que

$$a(x,t,t',\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}(x,t,t',\xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_{\ell}}\right) \text{ é } C^{\infty} \text{ e}$$

$$\left| \partial_x^{\alpha} \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_{\xi}^{\beta} a(x,t,t',\xi) \right| \leq e^{-\frac{\ell}{2}+k+k'+\frac{1}{2}\alpha-\beta} e^{-A|\xi|} \int_t^{t'} a(x,s) ds$$

$$\leq C(1+|\xi|)$$

para $(x,t,t') \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Além disso, dado $N \in \mathbb{N}$,

$$(A.3) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta \left(a - \sum_{\ell=0}^{N-1} a_\ell \right) \right| \leq e^{k+k'+\frac{1}{2}\alpha-\beta-\frac{N}{2}} - A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds \leq C(1+|\xi|)$$

para $(x, t, t') \in K$, $\xi \in \mathbb{R}$.

onde, $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi \leq 1$.

$$\chi(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

PROVA:

Afirmção:

Para cada $\ell = 0, 1, \dots$, escolhemos ρ_ℓ tal que para todos α, k, k' e β com $\alpha + k + k' + \beta + 2 \leq \ell$ temos

$$(A.4) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a_\ell(x, t, t', \xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| \leq e^{-\frac{\ell}{2} + k+k'+\frac{1}{2}\alpha-\beta+1} - A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds \leq 2^{-\ell}(1+|\xi|)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a_\ell(x, t, t', \xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| \leq \\
& \leq \sum_{\substack{\beta' \leq \beta \\ \beta' \neq 0}} C_{\beta', \beta} \left| \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} a_\ell \right| \left| \partial_\xi^{\beta'} \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| = \\
& = \left| \partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} a_\ell \right| \left| \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| + \sum_{\substack{\beta' \leq \beta \\ \beta' \neq 0}} C_{\beta', \beta} \left| \partial_\xi^{\beta-\beta'} \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} a_\ell \right| \times \\
& \times \left| \partial_\xi^{\beta'} \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| \leq \\
& \leq C_\ell (1+|\xi|)^{-\frac{\ell}{2} + k + k' + \frac{1}{2}\alpha - \beta} e^{-A|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds + \\
& + \sum_{\substack{\beta' \leq \beta \\ \beta' \neq 0}} C_{\beta', \beta} \left[C_\ell (1+|\xi|)^{-\frac{\ell}{2} + k + k' + \frac{1}{2}\alpha - \beta + \beta'} \times \right. \\
& \left. \times e^{-A|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds \right. \\
& \left. C_{\ell, \beta'} \rho_\ell^{-\beta'} \right]
\end{aligned}$$

(como $\beta' \neq 0$, no suporte de $\partial_\xi^{\beta'} \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right)$ temos $\frac{1}{2} \leq \frac{|\xi|}{\rho_\ell} \leq 1$ e portanto $\rho_\ell^{-\beta'} \leq |\xi|^{-\beta'}$)

$$\begin{aligned}
& \leq C_\ell (1+|\xi|)^{-\frac{\ell}{2} + k + k' + \frac{1}{2}\alpha - \beta + 1} (1+|\xi|)^{-1} e^{-A|\xi|} \int_t^{t'} a(x, s) ds \\
& + \sum_{\substack{\beta' \leq \beta \\ \beta' \neq 0}} C_{\beta', \beta} C_{\ell, \beta'} \left[(1+|\xi|)^{-\frac{\ell}{2} + k + k' + \frac{1}{2}\alpha - \beta + 1} (1+|\xi|)^{-1} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds} \Big] \leq \\
& \leq d_\ell(k, k', \alpha, \beta, K) (1 + \rho_\ell)^{-1} (1 + |\xi|)^{-\frac{\ell}{2} + k + k' + \frac{1}{2}\alpha - \beta + 1} \times \\
& \times e^{-A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds}
\end{aligned}$$

(no suporte de $\chi(\frac{|\xi|}{\rho_\ell})$ temos $|\xi| \geq \frac{\rho_\ell}{2}$ e portanto

$$(1 + |\xi|)^{-1} \leq 2(1 + \rho_\ell)^{-1})$$

Escolhemos ρ_ℓ tal que $d_\ell(k, k', \alpha, \beta, K) (1 + \rho_\ell)^{-1} \leq 2^{-\ell}$, o que é possível pois estamos com um número finito de condições sobre ρ_ℓ .

Assim,

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a_\ell(x, t, t', \xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| \leq \\
& \leq 2^{-\ell} (1 + |\xi|)^{-\frac{\ell}{2} + k + k' + \frac{1}{2}\alpha - \beta + 1} e^{-A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds}
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação feita.

Dados α, k, k' e $\beta \in \mathbb{N}$ e K compacto, seja $\ell_0 = \alpha + k + k' + \beta + 2$. Então,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a(x, t, t', \xi) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{\ell=0}^{\ell_0-1} \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a_\ell \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| + \sum_{\ell \geq \ell_0} \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a_\ell \chi\left(\frac{|\xi|}{\rho_\ell}\right) \right| \\
& \leq \sum_{\ell=0}^{\ell_0-1} d_{1,\ell} (1+|\xi|) e^{-\frac{\ell}{2} + k+k' + \frac{1}{2}\alpha-\beta} -A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds + \\
& + \sum_{\ell \geq \ell_0} 2^{-\ell} (1+|\xi|) e^{-\frac{\ell}{2} + k+k' + \frac{1}{2}\alpha-\beta+1} -A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds \\
& \leq C_1 (1+|\xi|) e^{k+k' + \frac{1}{2}\alpha-\beta} -A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds + \\
& + (1+|\xi|) e^{k+k' + \frac{1}{2}\alpha-\beta} -A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds \times \\
& \times \sum_{\ell \geq \ell_0} 2^{-\ell} (1+|\xi|) e^{-\frac{\ell}{2} + 1} \leq \\
& \leq C_2 (1+|\xi|) e^{k+k' + \frac{1}{2}\alpha-\beta} -A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_x^\alpha \partial_t^k \partial_{t'}^{k'} \partial_\xi^\beta a(x,t,t',\xi) \right| \leq \\
& \leq C_2 (1+|\xi|) e^{k+k' + \frac{1}{2}\alpha-\beta} -A|\xi| \int_t^{t'} a(x,s) ds .
\end{aligned}$$

Usando-se as estimativas (A.2) e (A.4) prova-se, de maneira habitual, a validade de (A.3).

CQD.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERGAMASCO, A.P. - Parametrices of elliptic boundary value problems; Thesis, Rutgers University, 1977.
- [2] BARROS - NETO, J. - An Introduction to the Theory of Distributions; Marcel Dekker, INC. New York, 1973.
- [3] GERSZONOWICZ, J.A. - Parametrices of the Forward Cauchy Problem for a Class of Operators with Double Characteristics; Thesis, Rutgers University, 1982.
- [4] GERSZONOWICZ, J.A. - Comunicação pessoal.
- [5] HÖRMANDER, L. - Pseudo-differential operators and Hypoelliptic Equations; Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math, 10(1966), Singular integral Operators, 138-183.
- [6] HÖRMANDER, L. - Fourier Integral Operators I; Acta Math 127, (1971) 79-183.
- [7] HÖRMANDER, L. - On the Regularity of the Solutions of Boundary Problems; Acta Math. 99, 225-264 (1958).
- [8] LIONS, J.L. e MAGENES, E. - Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer, 1972.
- [9] PETRONILHO, G. - Operadores Diferenciais Parciais Lineares Analítico - Hipoeĺítico de Tipo Principal; Dissertação de Mestrado, 1978.

- [10] STRAUSS, M. e TREVES, F. - First-Order PDEs and Uniqueness in the Cauchy Problem; Journal of Differential Equations, Vol.15, Nº 1, (1974), 195-209.
- [11] TAYLOR, M.E. - Pseudodifferential Operators; Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.
- [12] TREVES, F. - Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators; Plenum, N.Y., 1980.
- [13] TREVES, F. - Solutions of Cauchy problems modulo flat functions; Comm. P.D.E. 1 (1976) p.45.
- [14] TREVES, F. - Analytic-Hypoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type; Comm. on Pure and Appl. Math., Vol.24, (1971) 537-570.
- [15] TREVES, F. - Second-Order Fuchsian Elliptic Equations and Eigenvalue Asymptotics; Lecture Notes in Math, nº 459, Springer, 1974.