UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

[redacted]

"ESTUDO SISTEMÁTICO DE DESCARGA MONOPOLAR LIVRE EM DIELÉTRICOS COM EXCESSO DE CARGA"

Carlos Mauricio Lepienski

Trabalho apresentado ao Instituto de Física e Química de São Carlos, USP, para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada e Ciências dos Materiais.

Orientador: G.F.Leal Ferreira

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

1978

À Vera Lúcia

A meus pais

Este trabalho contou com o apoio financeiro CNPq e da Universidade Federal de Uberlândia.

INDICE

AGRADECIMENTOS I
APROVAÇÃO II
RESUMO III
ABSTRACT IV

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 01

CAPÍTULO II - A SOLUÇÃO DO PROBLEMA
II.1 - O problema e a solução 04
II.2 - Outra forma de expressar a densidade de corrente 08
II.3 - Previsão do comportamento da corrente para distribuições crescentes de carga 09
II.4 - Uma solução aproximada para a corrente externa 11
II.5 - Uma maneira de determinar a mobilidade dos portadores de carga num dielétrico 14

CAPÍTULO III - SOLUÇÕES PARA DISTRIBUIÇÕES ESPECÍFICAS
III.1 - Solução do problema para vários tipos de distribuições de carga 18
III.2 - Distribuições lineares de carga 19
III.3 -Distribuições crescentes não lineares 22
III.4 -Distribuições que apresentam um máximo ou um mínimo na parte central do dielétrico 23
III.5 - Inversões de corrente 27
III.6 - Distribuições lineares crescentes que tocam inicialmente um só elétródio..... 31

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DAS SOLUÇÕES OBTIDAS

IV.1 - Distribuições crescentes 37

IV.2 - Determinação das concavidades de distribuições de carga 38

IV.3 - Sobre a determinação da mobilidade 48

IV.4 - Análise das inversões de corrente 49

IV.5 - Distribuições que inicialmente tocam apenas um eletródio 52

IV.6 - Carga total que circula externamente 55

CAPÍTULO V - APLICAÇÕES DOS RESULTADOS OBTIDOS

V.1 - Os resultados experimentais do trabalho analisado 56

V.2 -- Análise das medidas de corrente 57

BIBLIOGRAFIA 63

AGRADECIMENTOS

Gostaria eu de colocar todos os nomes das pessoas que me ajudaram neste trabalho, o que infelizmente não é possível devido ao seu grande número.

Agradeço especialmente

ao Prof. Guilherme Fontes Leal Ferreira pela segura orientação durante todo o transcorrer do trabalho, pela atitude científica demonstrada, pelo incentivo, e principalmente pela amizade.

ao Professor Colega e Amigo Luis Ernesto Carrano de Almeida, pelo incentivo que sempre demonstrou pela minha formação e pela amizade que foi sempre uma constante.

ao Colega e Amigo Prof. Roberto Mendonça Faria pela ajuda e companheirismo desde minha chegada a São Carlos.

ao Prof. Paulo César de Camargo pela ajuda no início desta dissertação.

a todos os professores que contribuiram para minha formação.

aos colegas do Departamento de Física que sempre me apoiaram.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. GUILHERME FONTES LEAL FERREIRA
- Orientador- DFCM/IFQSC- USP

Prof. Dr. DJALMA MIRABELLI REDONDO
-DFCM/IFQSC- USP

Prof. Dr. ERNESTO RAFAEL GONZÁLEZ
-DQFM/IFQSC- USP

RESUMO

Neste trabalho analisamos o movimento de carga espacial monopolar livre em dielétricos, procurando fornecer subsídios para a interpretação de resultados experimentais.

São mostradas as soluções para diversos tipos de distribuições iniciais de carga. A partir daí são encontradas relações que nos levam a algumas conclusões a respeito da relação entre distribuição e corrente externa produzida.

São propostos métodos para a determinação da mobilidade dos portadores de carga no dielétrico e da concavidade de uma distribuição desconhecida. Analisamos também as condições para o aparecimento de inversão de corrente.

ABSTRACT

On this work, we study the monopolar space charge motion in dielectrics in the aim of providing general information about it to the experimentalist.

The electric current is obtained for many initial charge distributions and some relations are derived linking the behavior of the current to the initial charge distribution.

We propose methods for obtaining the mobility of the carriers from experimental results. Finally the conditions for observation of current reversals are analysed.

CAPÍTULO I

I. INTRODUÇÃO

O estudo do movimento de carga espacial monopolar no interior de dielétricos teve impulso significativo a partir do trabalho de A. Many e G. Rakavy[2]. Aí é apresentada uma ferramenta matemática muito útil, o método das características, que é utilizado em outros trabalhos para obtenção de soluções para o movimento de carga livre (ausência de traps) dentro de dielétricos.

Para carga livre, com distribuições tipo caixa, isto é, uniformes inicialmente, foram obtidas soluções exatas por H.Wintle[3], J. van Turnhout[4], G.F. Leal Ferreira e B. Gross[5]. J. van Turnhout resolveu numericamente o problema para distribuições não uniformes sem utilizar o método das características.

Distribuições de carga livre, sem traps, do tipo caixa, inicialmente uniforme, permanecem uniformes durante todo o processo.

Em circuito aberto a solução exata para distribuições não uniformes foi obtida por G.F. Leal Ferreira e L. Nunes de Oliveira[6]. Em circuito aberto o problema é em geral mais fácil de ser resolvido do que em circuito fechado.

Sob condição de circuito fechado o problema foi sendo resolvido por partes. Primeiramente foram estudados as distribuições que não tocassem nenhum dos eletródios. G.F. Leal Ferreira e B. Gross[7] determinaram a solução exata. A seguir L.E. Carrano de Almeida e G.F. Leal Ferreira[8] obtiveram a solução exata quando a

distribuição toca apenas um dos eletródios. Finalmente P.C. Camargo e G.F. Leal Ferreira[1] fecharam o problema obtendo a solução geral, sob qualquer condição de d.d.p., para distribuições de qualquer espécie.

Neste trabalho estudamos principalmente a relação entre a configuração da distribuição inicial de carga no interior do dielétrico e a corrente externa obtida. Procuramos estabelecer grupos de distribuições pela análise da corrente obtida e chegamos a obter informações a respeito de distribuições desconhecidas simplesmente analisando a corrente externa.

Inicialmente apresentamos sumariamente a solução e a maneira de utilizá-la. A seguir obtemos uma solução analítica aproximada para distribuições lineares, que se revela muito próxima dos resultados exatos. A importância desta solução é grande, visto ser a solução exata apenas possível de ser utilizada por meio de métodos numéricos, o que dificultava a análise dos resultados obtidos.

No final do Capítulo II é proposto um método para obtenção do valor da mobilidade dos portadores de carga. Tal método é baseado no conhecimento da corrente externa e da carga que existe inicialmente dentro do dielétrico.

No Capítulo III são mostradas as soluções exatas, gráficos corrente × tempo, para diversos tipos de distribuições crescentes, o aparecimento de inversões de corrente e distribuições que tocam apenas um eletródio.

No Capítulo IV são analisadas as soluções apresentadas

no Capítulo III. Mostramos que a solução aproximada, obtida no Capítulo II, é excelente aproximação para o caso de distribuições crescentes que não tenham um acúmulo de cargas perto dos eletródios.

O aparecimento de inversão de corrente é estudado e sugerimos um método aproximado para prever o surgimento da inversão.

Mostramos como determinar a concavidade de uma distribuição desconhecida de carga, a partir da corrente externa.

A forma do gráfico corrente × tempo é previsto para os casos de distribuições crescentes que toquem apenas um dos eletródios.

Uma expressão para a carga que circula externamente é obtida, baseando-se na aproximação feita no Capítulo II, e é válida para distribuições crescentes que toquem ambos os eletródios.

No Capítulo V fazemos a análise de uma medida experimental, utilizando os recursos aqui desenvolvidos. Chegamos a inferir uma forma para a distribuição de carga, supondo ausência de traps. O método que apresentamos pode servir de base para a análise de outras situações, a fim de descobrir a forma da distribuição que as produziram.

CAPÍTULO II

A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

II.1 - O problema e a solução

O movimento de carga espacial monopolar livre em um dielétrico, sob condição de simetria plana e ausência de traps, é regido pelo seguinte conjunto de equações:

$$\varepsilon \frac{\partial E'(x',t')}{\partial x'} = \rho'(x',t') \qquad \textit{Equação de Poisson} \tag{II.1}$$

$$-\frac{\partial J'_c(x',t')}{\partial x'} = \frac{\partial \rho'(x',t')}{\partial t'} \qquad \textit{Equação da continuidade} \tag{II.2}$$

$$J'_c(x',t') = \mu \cdot \rho'(x',t')E'(x',t') \qquad \textit{Densidade de corrente de condução} \tag{II.3}$$

$$J'(t') = \mu\, \rho'(x',t')E'(x',t') + \varepsilon \frac{\partial E'(x',t')}{\partial t'} \qquad \textit{Densidade de corrente total} \tag{II.4}$$

O caso que vamos estudar é o de circuito fechado, o que leva ao aparecimento da condição:

$$\int_0^d E'(x',t')dx' = V'(t') \quad . \tag{II.5}$$

Nas equações acima temos:

x' → coordenada espacial

t' → tempo

$\rho'(x',t')$ → densidade de campo na posição x' e no tempo t'

$E'(x',t')$ → campo elétrico na posição x' e no tempo t'

μ → mobilidade dos portadores de carga

ε → constante dielétrica do material

d → espessura do dielétrico utilizado

$V'(t')$ → diferença de potencial entre as faces do dielétrico.

A solução do problema consiste em determinar $\rho'(x',t')$ e $J'(t')$.

Para uma dada densidade inicial de carga $\rho'(x',0)$, P.C. Camargo e G.F. Leal Ferreira[1] determinaram a solução exata para o problema. Aqui apresentamos apenas os resultados.

A fim de simplificar a forma de tratamento das equações, unidades reduzidas são usadas. Escolhendo

$$x = \frac{x'}{d}\ ;\quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'_o}\ ;\quad t = \frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon}t'\ ;\quad E = \frac{\varepsilon}{d\,\rho'_o}E'\ ;\quad J = \frac{\varepsilon}{\mu\rho'^2_o d}J'\ \text{ e }\ V = \frac{\varepsilon}{d^2\rho'_o}V'$$

podemos escrever:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \rho(x,t) \tag{II.6}$$

$$-\frac{\partial J_c(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \tag{II.7}$$

$$J_c(x,t) = \rho(x,t)\,E(x,t) \tag{II.8}$$

$$J(t) = \rho(x,t)\,E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\ . \tag{II.9}$$

Nesta transformação dois parâmetros são utilizados: d é a espessura do dielétrico e ρ'_o pode ser escolhido conforme a con-

veniência, como por exemplo: a densidade média de carga.

A solução destas equações é obtida utilizando-se o método das características. A utilização de tal método faz surgir o conceito de linha de corrente que expressa a posição das cargas em função do tempo. O movimento das cargas em tais linhas de corrente é determinada pela equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x(t),t) \quad . \tag{II.10}$$

A densidade de carga sobre uma dessas linhas de corrente é expresso por:

$$\rho(x(t),t) = \frac{\rho(x_o,0)}{1 + \rho(x_o,0)t} \tag{II.11}$$

onde $\rho(x_o,0)$ é a densidade de carga na posição inicial x_o. Na linha de corrente a carga evolui de x_o em $t = 0$ para $x(t)$ em $t = t$.

Em circuito fechado a condição de contorno é expresso em unidades reduzidas por:

$$\int_0^1 E(x,t)\,dx = V(t) \quad . \tag{II.12}$$

Neste caso a corrente total é

$$J(t) = \frac{1}{2}\left[E^2(1,t) - E^2(0,t)\right] + \frac{dV(t)}{dt} \tag{II.13}$$

Define-se agora duas funções que serão utilizadas para determinar $J(t)$. São elas:

$y(t) \rightarrow$ coordenada espacial inicial ($t = 0$) daquelas cargas que após

um tempo t estarão em $x = 0$;

$z(t) \rightarrow$ coordenada espacial inicial $(t = 0)$ daquelas cargas que após um tempo t estarão em $x = 1$.

É claro que $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$ e que $y(\infty) = 1 - z(\infty)$

O campo elétrico em cada uma das faces do dielétrico é dado por:

$$E(1,t) = V(y) - V(z) + E(z) + \frac{t}{2}\left[E^2(y) - E^2(z)\right] + V(t) \qquad \text{(II.14)}$$

$$E(0,t) = V(y) - V(z) + E(y) + \frac{t}{2}\left[E^2(y) - E^2(z)\right] + V(t) \qquad \text{(II.15)}$$

onde

$$E(y) = E(y(t),0) = \int_0^y \rho(x,0)\,dx + E(0,0)$$

$$E(z) = E(z(t),0) = \int_0^{z(t)} \rho(x,0)\,dx + E(0,0)$$

e

$$V(y) = \int_0^{y(t)} E(y)\,dy \qquad V(z) = \int_0^{z(t)} E(z)\,dz \quad .$$

Ficamos então com

$$J(t) = \left(E(z) - E(y)\right)\left[V(y) - V(z) + V(t) + \frac{1}{2}\left(E(z) + E(y)\right) + \frac{t}{2}\left(E^2(z) - E^2(z)\right)\right] + \frac{dV(t)}{dt}$$

(II.16)

As evoluções de y(t) e z(t) no tempo são regidas pelas relações:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{-E(0,t)}{1+\rho(y(t),0)t} \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{-E(1,t)}{1+\rho(z(t),0)t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.17)}$$

A solução é obtida resolvendo-se o sistema de equações (II.17) que determina y(t) e z(t).

Uma solução analítica geralmente não é conseguida, o que nos leva a resolver o sistema por métodos numéricos e consequentemente o problema como um todo.

II.2 - Outra forma de expressar a densidade de corrente

A equação (II.13) pode ser escrita:

$$J(t) = \frac{1}{2}\left[E(1,t) - E(0,t)\right]\left[E(1,t) + E(0,t)\right] + \frac{dV(t)}{dt} \quad . \qquad \text{(II.18)}$$

Integrando a equação de Poisson (II.6), para um dado t, temos:

$$E(1,t) - E(0,t) = \int_0^1 \rho(x,t)\,dx \quad . \qquad \text{(II.19)}$$

Substituindo este resultado na expressão para J(t) teremos:

$$J(t) = \left[2E(1,t) - \int_0^1 \rho(x,t)\,dx\right] \times \frac{1}{2}\int_0^1 \rho(x,t)\,dx + \frac{dV(t)}{dt} \qquad \text{(II.20)}$$

Integrando por partes a condição de contorno (II.12) obtemos:

$$E(1,t) = V(t) + \int_0^1 x\,\rho(x,t)\,dx \quad . \qquad \text{(II.21)}$$

Substituindo em (II.20) e reordenando temos finalmente

$$J(t) = \left[\frac{V(t)}{q(t)} + \overline{X}(t) - \frac{1}{2}\right] q^2(t) + \frac{dV(t)}{dt} \qquad \text{(II.22)}$$

onde

$$q(t) = \int_0^1 \rho(x,t)\,dx$$

é a carga no interior do dielétrico no tempo t e

$$\overline{X}(t) = \frac{\int_0^1 x\,\rho(x,t)\,dx}{\int_0^1 \rho(x,t)\,dx}$$

é a posição média das cargas em relação a x, no tempo t.

II.3 - Previsão do comportamento da corrente para distribuições crescentes de carga

Vamos verificar que, para o caso de curto circuito, $V(t) = 0$, e distribuições de carga monotonamente crescentes, a corrente é uma função monotonamente decrescente no tempo. Para $V(t)=0$ a (II.22) fica

$$J(t) = \left[\overline{X}(t) - \frac{1}{2}\right] q^2(t) \quad . \qquad \text{(II.23)}$$

Para distribuições de carga monotonamente crescentes, em $t = 0$, temos:

$$\overline{X}(0) > \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad J(0) > 0 \quad .$$

Derivando a corrente em relação ao tempo vem:

$$\frac{dJ(t)}{dt} = q^2(t)\,\frac{d\overline{X}(t)}{dt} + \frac{2J(t)}{q(t)}\,\frac{dq(t)}{dt} \quad . \tag{II.24}$$

Como a carga se escoa do dielétrico

$\frac{dq(t)}{dt} < 0$ e o termo $\frac{2J(t)}{q(t)}\,\frac{dq(t)}{dt}$ é negativo, para o tempo $t = 0$ pelo menos, pois $J(0) > 0$.

Resta mostrar que

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} < 0 \qquad \text{e} \qquad \overline{X}(t) > \frac{1}{2}$$

para que a corrente seja sempre decrescente, porém positiva.

Na página 234 da referência (1)(equação (6.a)) podemos ver que a posição de uma linha de corrente pode ser expressa por:

$$x(t) = x_o - y + \left(E(x_o) - E(y)\right) t \tag{II.25}$$

onde x_o é a posição da carga na linha de corrente em $t = 0$. Diferenciando em relação a x_o temos

$$dx(t) = (1 + \rho(x_o,o)t)\, dx_o \quad . \tag{II.26}$$

Derivando a equação (II.6) em relação a $x(t)$

$$\frac{\partial\rho(x(t),t)}{\partial x(t)} = \frac{\partial}{\partial x(t)} \left(\frac{\rho(x_o,0)}{1 + \rho(x_o,0)t} \right) \tag{II.27}$$

e usando a relação vem:

$$\frac{\partial\rho(x(t),t)}{\partial x(t)} = \frac{\dfrac{\partial\rho(x_o,0)}{\partial x_o}}{(1+\rho(x_o,0)t)^3} \qquad \text{(II.28)}$$

Assim a derivada da densidade de carga não muda de sinal durante o processo. Se a distribuição é crescente assim continuará até o fim, porém com inclinação atenuada. Isto indica que $\overline{X}(t) > \frac{1}{2}$, para qualquer t, e $\frac{d\overline{X}}{dt} < 0$ pois a distribuição tende a ficar menos inclinada.

Provamos assim que $J(t) > 0$ para distribuições crescentes, para qualquer tempo, e que $J(t)$ é uma função monotonamente decrescente no tempo.

II.4 - Uma solução aproximada para a corrente externa

Vamos obter uma solução aproximada para a densidade de corrente para o caso de uma distribuição de carga que seja crescente e linear.

Suponhamos que a densidade de carga comporte-se no tempo como sendo sempre linear

$$\rho(x,t) = a(t) + b(t)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(II.29)}$$

$a(t)$ é a densidade de carga no ponto médio da amostra;

$b(t)$ é a inclinação da distribuição.

Pode-se notar na pág. 20 da referência (1.a) que tal suposição não é muito ruim em uma primeira aproximação, principalmente se a inclinação é pequena.

Integrando a equação de Poisson (II.6), para um dado tempo t, obtém-se:

$$E(x,t) - E(x_o,t) = a(t)x + \frac{b(t)}{2}\left(x^2 - \frac{x}{}\right) - a(t)x_o - b(t)\left(\frac{x_o^2}{2} - \frac{x_o}{2}\right) \qquad \text{(II-30)}$$

Escolhendo a condição de curto circuito

$$\int_o^1 E(x,t)dx = 0 \qquad \text{vem}$$

$$E(x,t) = \left(a(t) - \frac{b(t)}{2}\right) x + \frac{b(t)x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(a(t) - \frac{b(t)}{2}\right) - \frac{b(t)}{6} \qquad \text{(II.31)}$$

Substituindo (II.3) em (II.2) e usando (II.1) chegamos a

$$\rho^2(x,t) + E(x,t)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} \quad . \qquad \text{(II.32)}$$

Substituindo os valores encontrados acima obtemos

$$a^2(t) - \frac{3a(t)\,b(t)}{2} - \frac{b^2(t)}{3} + \frac{da(t)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{db(t)}{dt} + 3a(t)\,b(t)x -$$

$$- \frac{3b^2(t)}{2}x + \frac{db(t)}{dt}x + \frac{3b^2(t)x^2}{2} = 0 \quad . \qquad \text{(II.33)}$$

Temos aqui um polinômio em x. Teremos a igualdade se os coeficientes de cada termo x^o, x^1, x^2 forem nulos. Se tivermos $b^2(t)$ pequeno comparado a a(t) e b(t) podemos desprezar o termo $b^2(t)$ e então obter:

coeficiente de x^o $\quad \frac{da(t)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{db(t)}{dt} + a^2(t) - \frac{3a(t)\,b(t)}{2} = 0 \qquad$ (II.34)

coeficiente de x^1 $\quad \frac{db(t)}{dt} + 3a(t)\,b(t) = 0 \qquad$ (II.35)

Isto nos dá finalmente o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{da(t)}{dt} + a^2(t) = 0 \\[2ex] \dfrac{db(t)}{dt} + 3a(t)b(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.36)}$$

Tal sistema tem como solução:

$$a(t) = \frac{a_o}{1 + a_o t} \qquad \text{onde } a_o \text{ é o valor de } a(t) \text{ em } t = 0$$

$$b(t) = \frac{b_o}{(1 + a_o t)^3} \qquad \text{onde } b_o \text{ é o valor de } b(t) \text{ em } t = 0 \quad .$$

A densidade de corrente é dada por (II.13)

$$J(t) = \frac{1}{2}\left[E^2(1,t) - E^2(0,t)\right] . \qquad \text{(II.13)}$$

Como

$$E(0,t) = -\frac{a(t)}{2} + \frac{b(t)}{12} \qquad \text{(II.37)}$$

$$E(1,t) = \frac{a(t)}{2} + \frac{b(t)}{12} \qquad \text{(II.38)}$$

vem

$$J(t) = \frac{a(t)\,b(t)}{12} \qquad \text{(II.39)}$$

e finalmente

$$J(t) = \frac{J_o}{(1 + a_o t)^4} \qquad \text{(II.40)}$$

onde

$$J_o = \frac{a_o b_o}{12} \qquad \text{(II.41)}$$

Utilizaremos nos capítulos seguintes a carga inicial dentro do dielétrico como sendo igual a um, a fim de observar as diferenças com respeito aos formatos das distribuições de carga, sem as influências devido as quantidades de carga.

Para o caso de carga inicial igual a um, temos que o valor da densidade de carga no meio da amostra para distribuições lineares é igual a um e então $a_o = 1$.

Isto nos leva a escrever a (II.40) na forma:

$$J(t) = \frac{J_o}{(1 + t)^4} \qquad \text{(II.42)}$$

É interessante adiantar que, apesar de ser deduzida para o caso em que $b^2(t)$ é pequeno comparado a $a(t)$ e $b(t)$, esta expressão é aproximadamente válida mesmo para grandes inclinações iniciais, conforme veremos nos capítulos seguintes.

II.5 - Uma maneira de determinar a mobilidade dos portadores de carga num dielétrico

Se conhecermos a carga total dentro de uma amostra e supuzermos que a distribuição é linear, poderemos determinar a mobilidade dos portadores e a inclinação da distribuição de carga a partir da corrente produzida em curto circuito.

Utilizaremos a relação (II.42) como a forma de comportamento da densidade de corrente para os casos de distribuições lineares.

Utilizando $q(0) = 1$ segue de (II.23):

$$J(0) = J_o = \overline{X}(0) - \frac{1}{2} \qquad \text{(II.43)}$$

Para uma distribuição linear temos:

$$\rho(x,0) = a_o + b_o \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad .$$

Neste caso

$$a_o = 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{X}(0) = \frac{b_o}{12} + \frac{1}{2} \quad .$$

Então

$$J_o = \frac{b_o}{12} \quad . \qquad \text{(II.44)}$$

Voltamos agora às unidades reais. Temos as relações

$$\rho(x,t) = \frac{\rho'(x',t')}{\rho'_o} \;;\; x = \frac{x'}{d} \;;\; t = \frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon} t' \quad \text{e} \quad J'(t') = \frac{\mu\rho'^2_o d}{\varepsilon} J(t)$$

que foram utilizadas para simplificar a solução do problema.

A condição que estamos utilizando até o momento é que carga inicial, em unidades reduzidas, seja igual a 1. Podemos fazer a substituição e obter:

$$q(0) = \int_o^d \frac{\rho'(x',0)}{\rho'_0} \frac{dx'}{d} = 1 \quad \therefore \quad \rho'_0 = \frac{\int_o^d \rho'(x',0)dx'}{d} = \frac{q'(0)}{d} \qquad \text{(II.45)}$$

onde $q'(0)$ é a carga inicial em unidades reais. O parâmetro ρ'_o é portanto a densidade média de carga. Para distribuições lineares a densidade média é igual a densidade do ponto médio. Portanto:

$$\rho'_o = \rho'\left(\frac{d}{2}, o\right) \quad .$$

Fazendo as substituições necessárias a equação (II.42), em unidades reais, toma a forma:

$$J'(t') = \frac{\mu\rho_o'^2 d}{\varepsilon} \; \frac{b_o}{12} \; \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon} t'\right)^4}$$

$$J'(t') = \frac{J'(0)}{\left(1 + \frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon} t'\right)^4} \qquad \text{(II.46)}$$

onde

$$J'(0) = \frac{\mu\rho'_o \, d}{\varepsilon} \; \frac{b_o}{12} \qquad \text{(II.47)}$$

ou em outra forma

$$\sqrt[4]{\frac{J'(0)}{J'(t')}} = 1 + \frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon} t' \quad . \qquad \text{(II.48)}$$

A curva obtida, ao representarmos num gráfico $\sqrt[4]{\frac{J'(0)}{J'(t')}}$ contra t', será uma reta cuja inclinação é dada por $\frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon}$.

A carga inicial sendo conhecida nos permite determinar ρ'_o. Determinando ε por outros meios podemos então calcular μ.

Depois de determinar a mobilidade μ dos portadores voltamos a (II.47), e então obtemos a inclinação inicial b_o da distribuição de carga.

A distribuição inicial passa a ser então completamente determinado:

$$\rho'(x',0) = \rho'_o \left[1 + b_o \left(\frac{x'}{d} - \frac{1}{2}\right)\right] . \qquad \text{(II.49)}$$

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES PARA DISTRIBUIÇÕES ESPECÍFICAS

III.1 - Solução do problema para vários tipos de distribuições de carga

Neste capítulo vamos mostrar o comportamento da corrente em função do tempo para diferentes tipos de distribuições espaciais de carga. Esta amostragem visa oferecer subsídios para obter relações gerais que possam ser utilizadas na análise de resultados experimentais.

Abordaremos distribuições crescentes, distribuições que possuam máximos e mínimos no interior do dielétrico, os casos de inversão de corrente e distribuições que toquem inicialmente apenas um eletródio.

A condição de contorno utilizada em quase todo o capítulo é o curto circuito $V(t) = 0$. As exceções serão mencionadas.

A corrente que circula externamente, calculada por método numérico, é determinada para as diferentes distribuições de carga escolhidas.

Em todos os casos aqui apresentados a carga inicial no interior do dielétrico é normalizada a um. Isto faz com que haja uma desvinculação da corrente com a carga e permite comparar as correntes fornecidas por diferentes distribuições de mesma carga inicial.

De acordo com as condições acima: $V(t) = 0$ e $q(0) = 1$ a equação (II.22) toma a forma:

$$J(t) = \left(\overline{X}(t) - \frac{1}{2}\right) q^2(t) \qquad \text{(III.1)}$$

e vale a (II.43)

$$J(0) = J_o = \overline{X}(0) - \frac{1}{2} \qquad \text{(II.43)}$$

A corrente inicial está então ligada unicamente à posição inicial média das cargas.

III.2 - Distribuições lineares de carga

Nesta seção mostramos o comportamento da corrente, sob condição de curto circuito, para os casos de distribuições de carga que sejam crescentes e lineares.

O método de solução numérica está descrito na referência (1).

Na figura 1 temos três distribuições lineares de carga que apresentam diferentes inclinações, sendo a carga total porém a mesma e igual a um. Tais distribuições têm posições médias, $\overline{X}(0)$, e correntes iniciais, J_o, dadas por:

Distribuição	$\overline{X}(0)$	J_o
1-a	0,66	0,16
1-b	0,60	0,10
1-c	0,52	0,02

Na figura 2 apresentamos os gráficos da corrente contra o tempo para cada uma das distribuições.

Verificamos já aqui que a corrente é uma função monotonamente decrescente conforme previmos na seção II.3.

Um fato que a princípio não pode ser deduzido da observação da figura 2 é a semelhnaça entre os decaimentos obtidos para as tres distribuições. Na tabela I fazemos a comparação entre as relações J(t)/J(0) para as distribuições da figura 1. Pode-se notar que a corrente segue uma mesma lei de decaimento para as três distribuições, apesar de elas serem diferentes.

Esse fato foi o que nos levou a procurar uma relação que descrevesse o comportamento de J(t) no tempo, para distribuições lineares. Uma relação aproximada foi obtida na seção II.4 . No Capítulo IV vamos mostrar que tal relação nos dá uma boa aproximação para a corrente nestes casos.

TABELA I

Valores comparativos de J(t)/J(0) para distribuições lineares

Tempo t	$\frac{J(t)}{J(0)}$ para J(0)=0,16	$\frac{J(t)}{J(0)}$ para J(0)=0,10	$\frac{J(t)}{J(0)}$ para J(0)=0,02
0,3	0,3488	0,3497	0,3501
0,6	0,1544	0,1534	0.1526
0,9	0,0779	0,0771	0,0726
1,2	0,0425	0,0428	0,0426
1,5	0,0254	0,0255	0,0256
1,8	0,0159	0,0161	0,0162
2,1	0,0104	0,0106	0,0108
2,4	0,0071	0,0073	0,0074
2,7	0,0050	0,0052	0,0053
3,0	0,0036	0,0037	0,0038

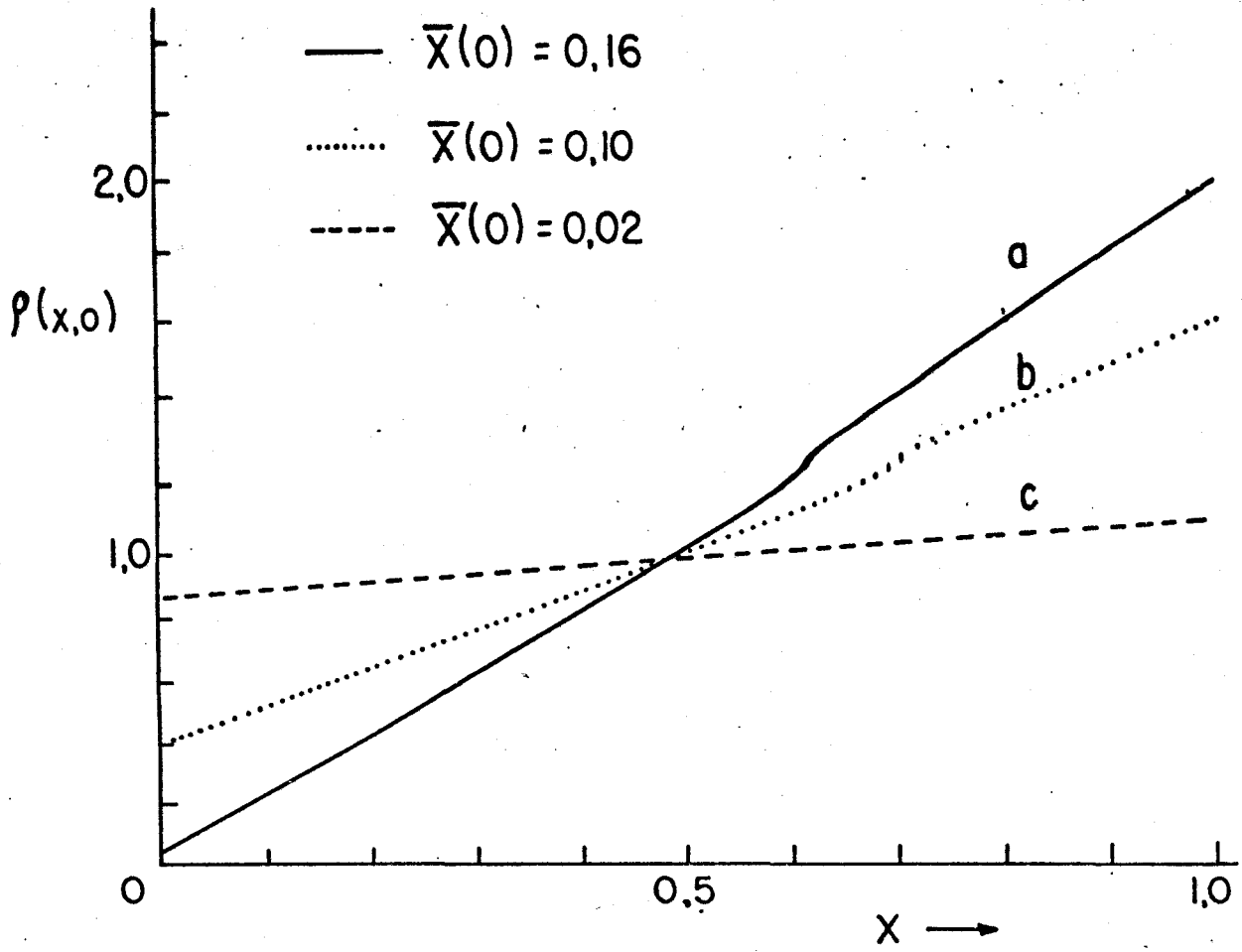

$\overline{X}(0) = 0,16$
$\overline{X}(0) = 0,10$
$\overline{X}(0) = 0,02$
2,0
1,0
$\rho(x,o)$
a
b
c
0
0,5
1,0
X

Fig. : 1

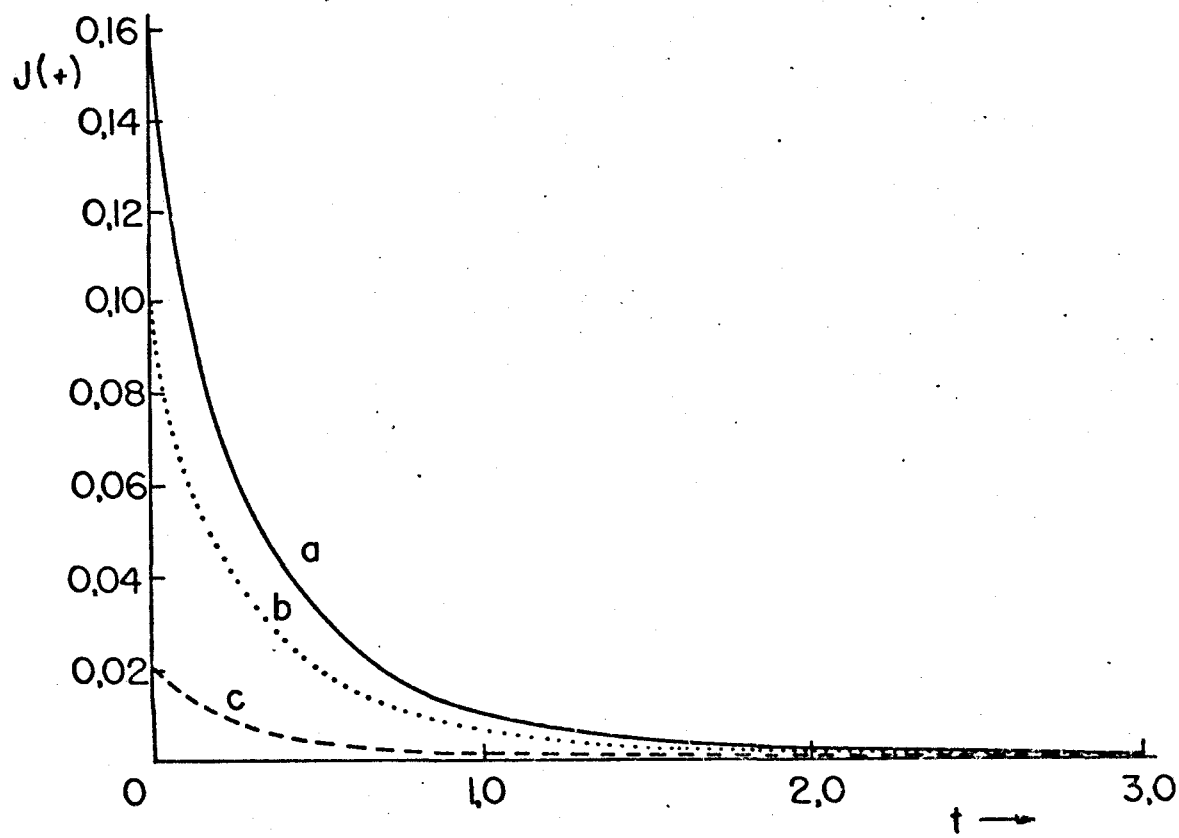

0,16
J(+)
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
a
b
c
0
1,0
2,0
3,0
t

Fig. : 2

III.3 - Distribuições crescentes não lineares

Mostraremos aqui as correntes obtidas para distribuições crescentes que não são lineares e a comparação com a obtida de uma distribuição linear.

As distribuições apresentadas na figura 3 se referem a situações nas quais $J_o = 0,10$. Elas são regidas pelas relações:

3-a $\rho(x,0) = b\left[\text{sen}(1,719x) + 0,2\right]$

3-b $\rho(x,0) = b\ x^{0,5}$

3-c linear

O parâmetro b serve para normalizar a carga e é diferente para cada distribuição.

Na figura 4 apresentamos o comportamento de J(t) para cada uma das distribuições acima. Podemos notar uma boa semelhança no comportamento da corrente, que já era esperada devido às pequenas diferenças apresentadas pelas distribuições. Modificações maiores são observadas quando comparamos as correntes obtidas das distribuições apresentadas na figura 5:

5-a linear

5-b $\rho(x,0) = b(1-x)^{-0,485}$

Em ambos os casos temos $J_o = 0,16$.

Aqui a diferença reside na grande concentração de cargas perto do eletródio em $x = 1$, no caso 5-b.

As correntes obtidas são representadas na figura 6. Pode-se notar que as correntes são bem diferentes. Tal fato pode ser ligado, em uma primeira aproximação, à uma saída maior de cargas pelo eletródio $x = 1$ para o caso b. A saída de uma quantidade apre-

ciável de carga pelo eletrôdio em $x = 1$ faz com que a posição média das cargas, após um tempo t, fique bastante diferente da posição média inicial. Observando a equação (III.1) temos que $J(t)$ diminui rapidamente se $\overline{X}(t)$ diminui. Além disto há a própria perda de carga mas que não influi tanto quanto a variação de $\overline{X}(t)$.

III.4 - Distribuições que apresentam um máximo ou um mínimo na parte central do dielétrico

Vamos fazer nesta seção a comparação das correntes obtidas de tres tipos diferentes de distribuições, apresentadas na figura 7:

7-a	linear
7-b	com um pico (máximo no interior do dielétrico)
7-c	com um vale (mínimo no interior do dielétrico)

Todos os casos se referem a uma corrente inicial $J_o = 0,02$.

Podemos observar na figura 8 as diferenças de comportamento da corrente. Pode-se notar algumas diferenças de comportamento principalmente no caso c, onde a corrente se desvia bastante do comportamento do caso linear.

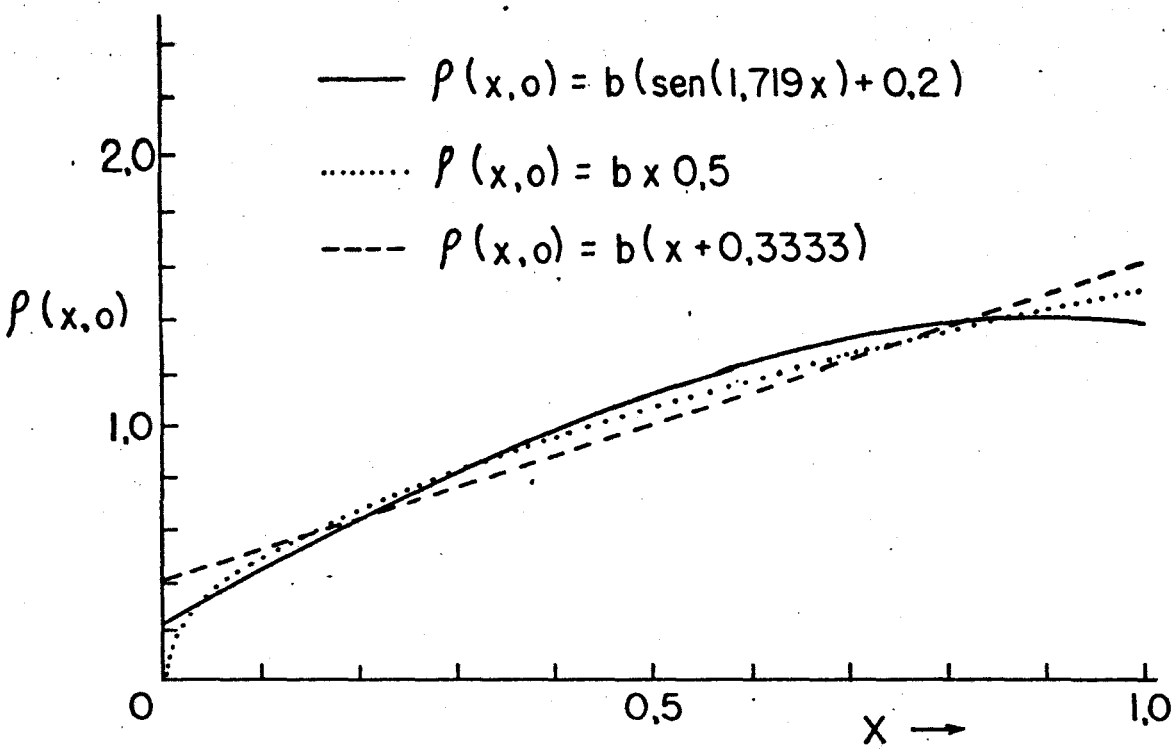

ρ(x,o) = b(sen(1,719x)+0,2)
ρ(x,o) = b x 0,5
ρ(x,o) = b(x+0,3333)
ρ(x,o)
2,0
1,0
0
0,5
1,0
X

Fig. : 3

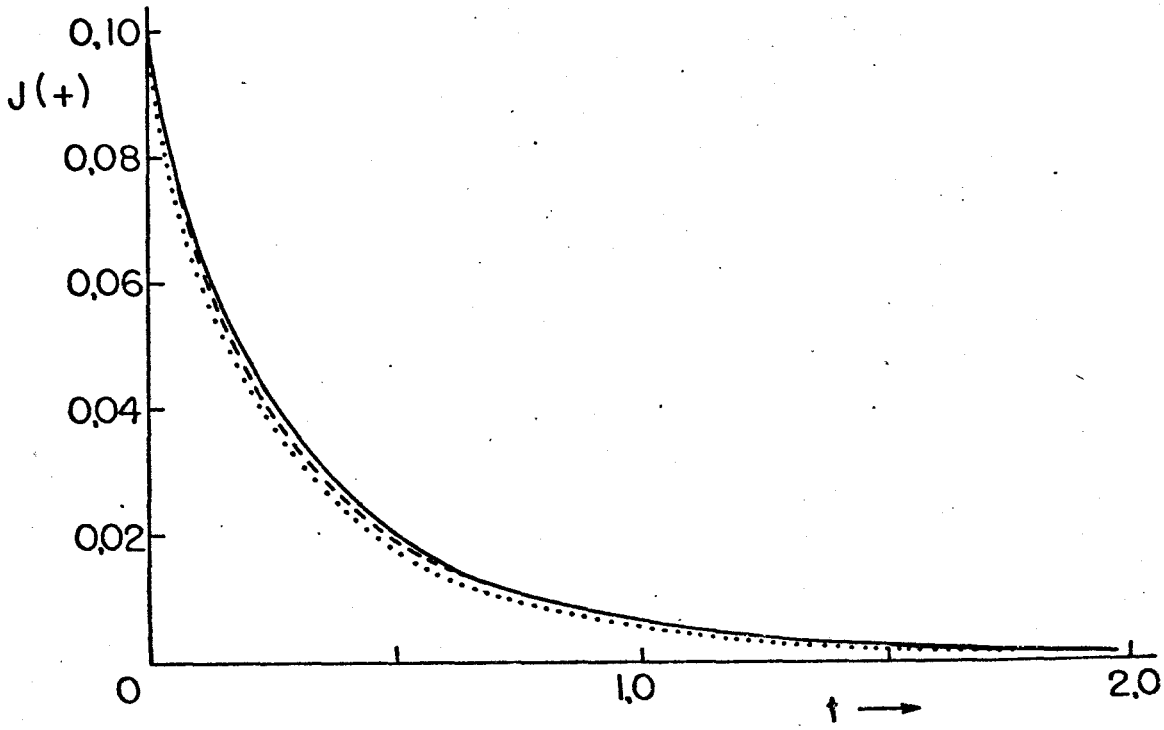

0,10
J(+)
0,08
0,06
0,04
0,02
0
1,0
2,0
t

Fig. : 4

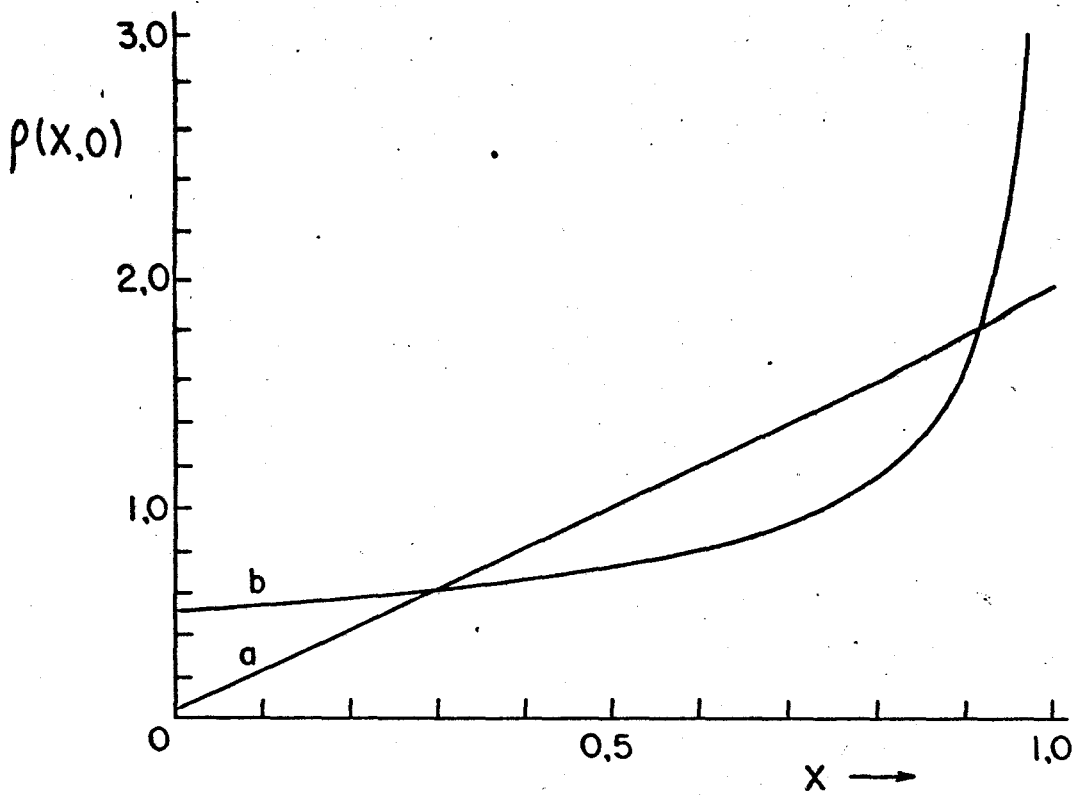

3,0
ρ(X,0)
2,0
1,0
b
a
0
0,5
1,0
X

Fig. : 5

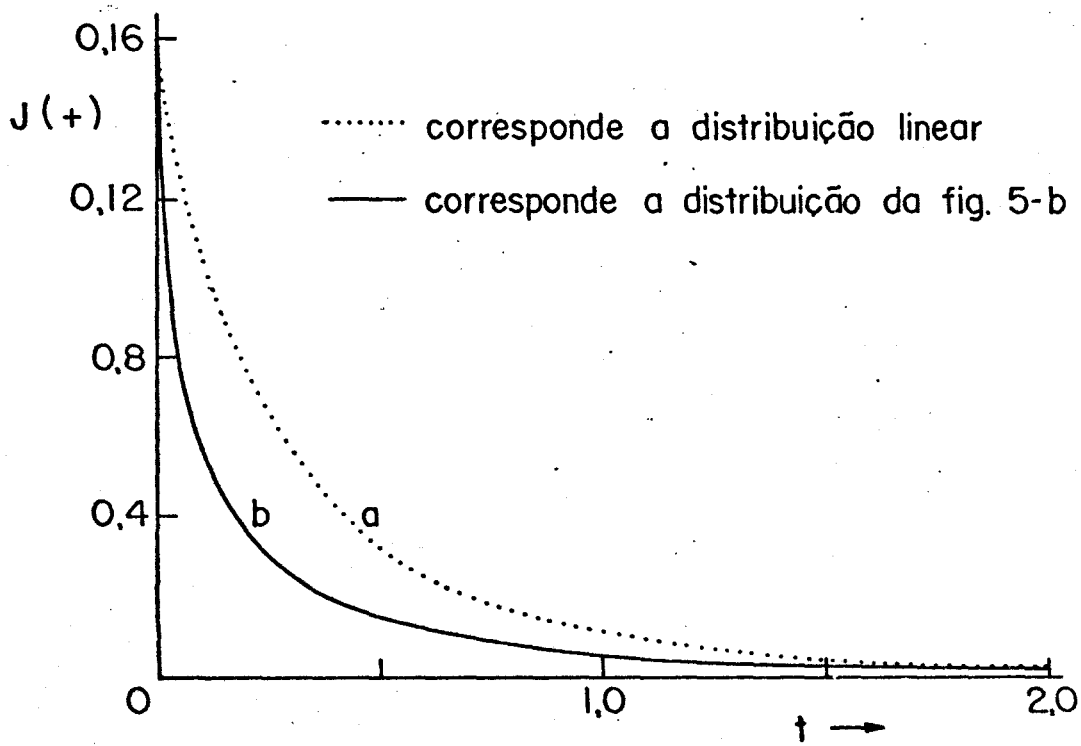

0,16
J(+)
0,12
0,8
0,4
0
1,0
2,0
t
b
a
corresponde a distribuição linear
corresponde a distribuição da fig. 5-b

Fig. : 6

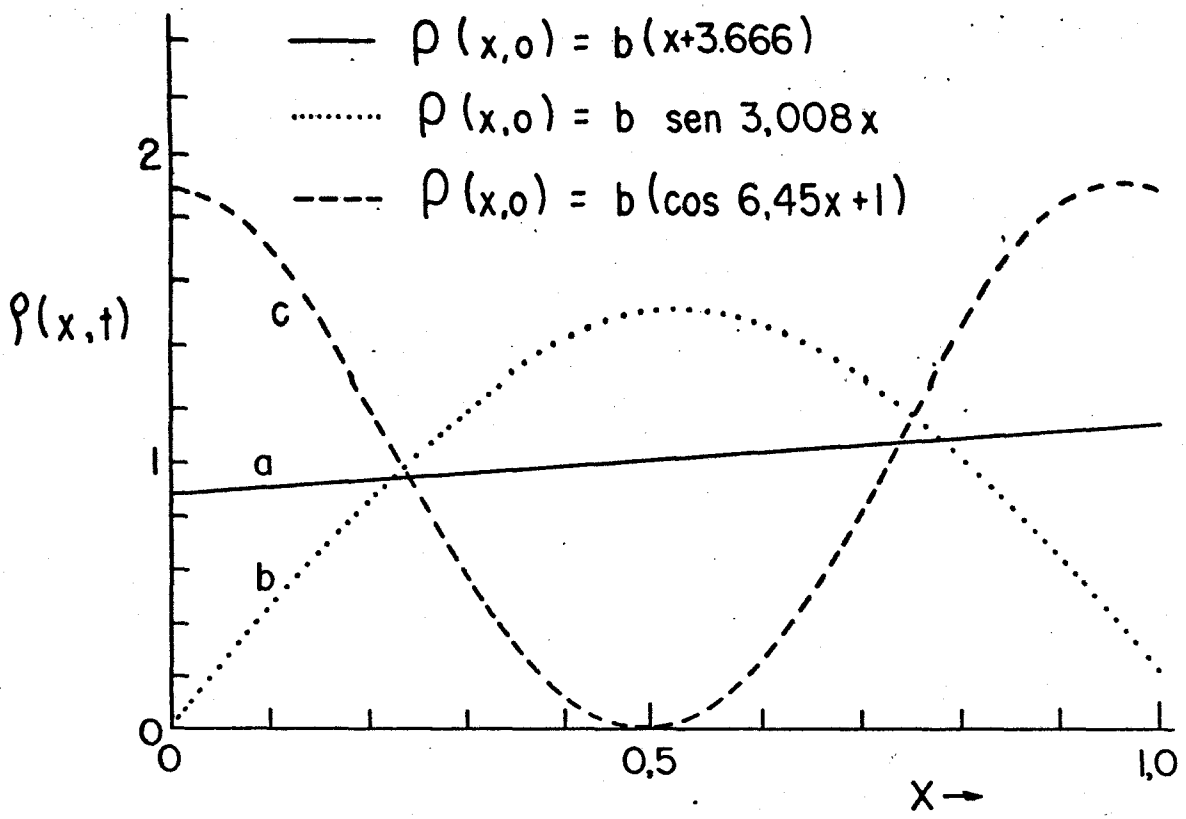

ρ (x,o) = b (x+3.666)
ρ (x,o) = b sen 3,008 x
ρ (x,o) = b (cos 6,45x + 1)
ρ(x,t)
2
1
0
a
b
c
0
0,5
1,0
X →

Fig. : 7

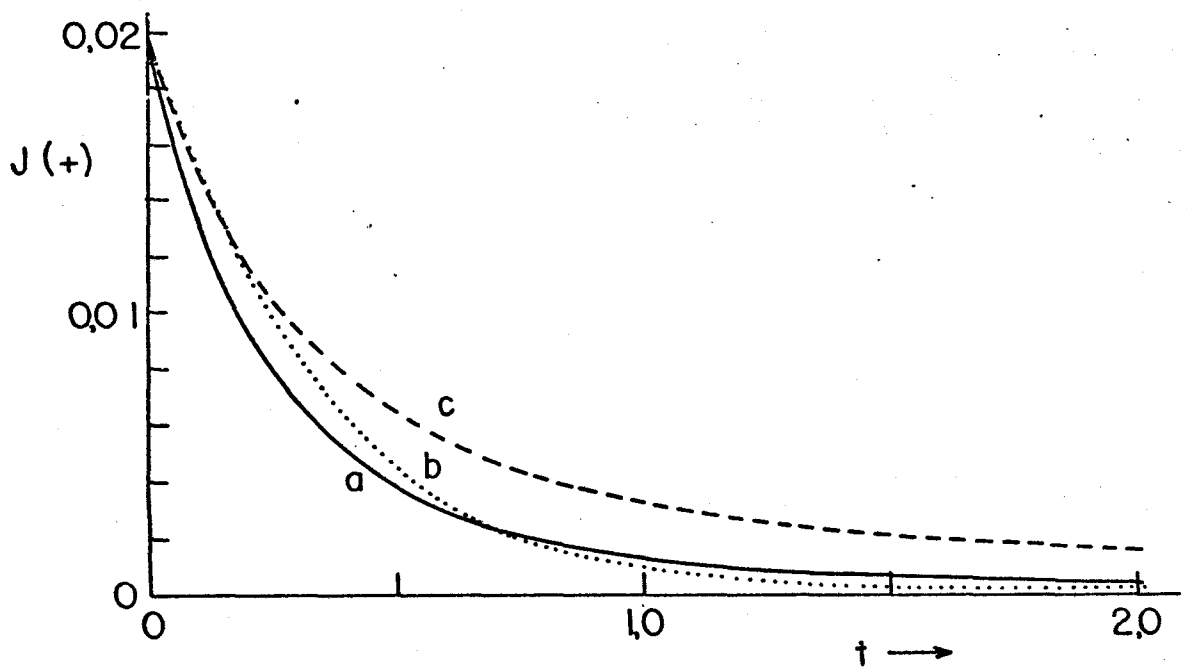

0,02
J (+)
0,01
0
a
b
c
0
1,0
2,0
t →

Fig. : 8

III.5 - Inversões de corrente

A inversão de corrente será estudada nesta seção.

Mostramos no Capítulo II que distribuições crescentes levavam a correntes que não mudavam de sinal. Aqui vamos verificar que a inversão está ligada à presença de máximos ou mínimos no interior do dielétrico.

Primeiramente vamos apresentar distribuições que levam a inversões. Tais distribuições são as mostradas nas figuras 9.A e 9.B. Pode-se notar a presença de picos e vales múltiplos. A distribuição 9.A-a vai apresentar uma única inversão (de positivo para negativo) de corrente, enquanto que a 9.A-b apresenta duas inversões (positivo-negativo-positivo). As correntes podem ser observadas nas figuras 10.A e 10.B.

Convém adiantar que apenas distribuições que apresentem picos e vales levam a inversões. Porém só por apresentarem tais condições não se pode dizer que levem a inversões no sentido da corrente.

Ao fazermos a análise das inversões, chegamos à conclusão que a melhor maneira de interpretar tais fatos seria estudar distribuições que tivessem a forma de 4 caixas contíguas com diferentes alturas, conforme mostramos nas figuras 11 e 12. Tal escolha se fez devido à facilidade de entendermos o aparecimento das inversões.

As correntes para as distribuições da figura 11, para as quais $J_o = 0,10$, são apresentadas na figura 12.

Na figura 13 temos duas distribuições que não levam a

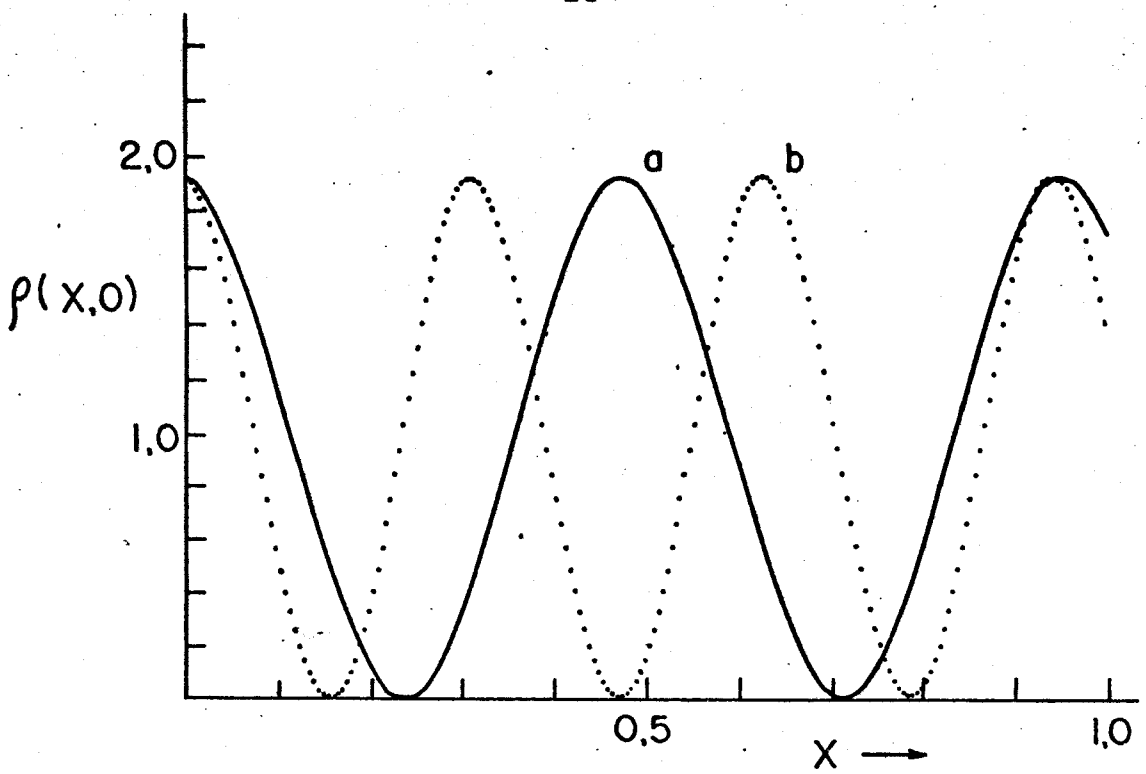


Fig. : 9 - A

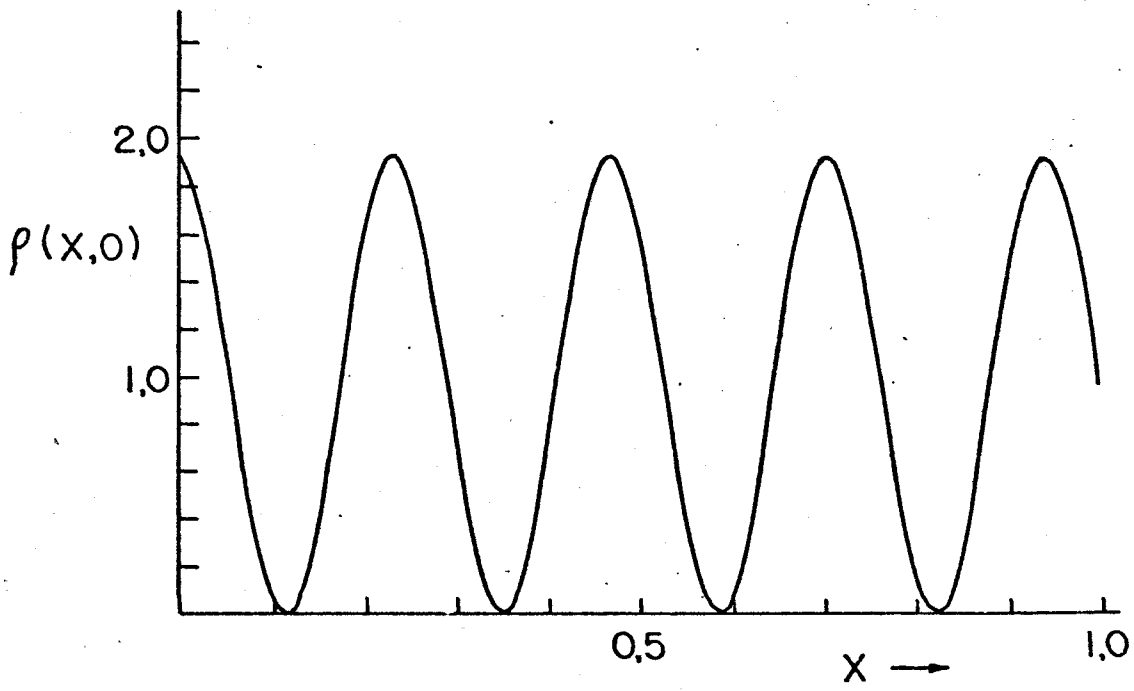


Fig. : 9 - B

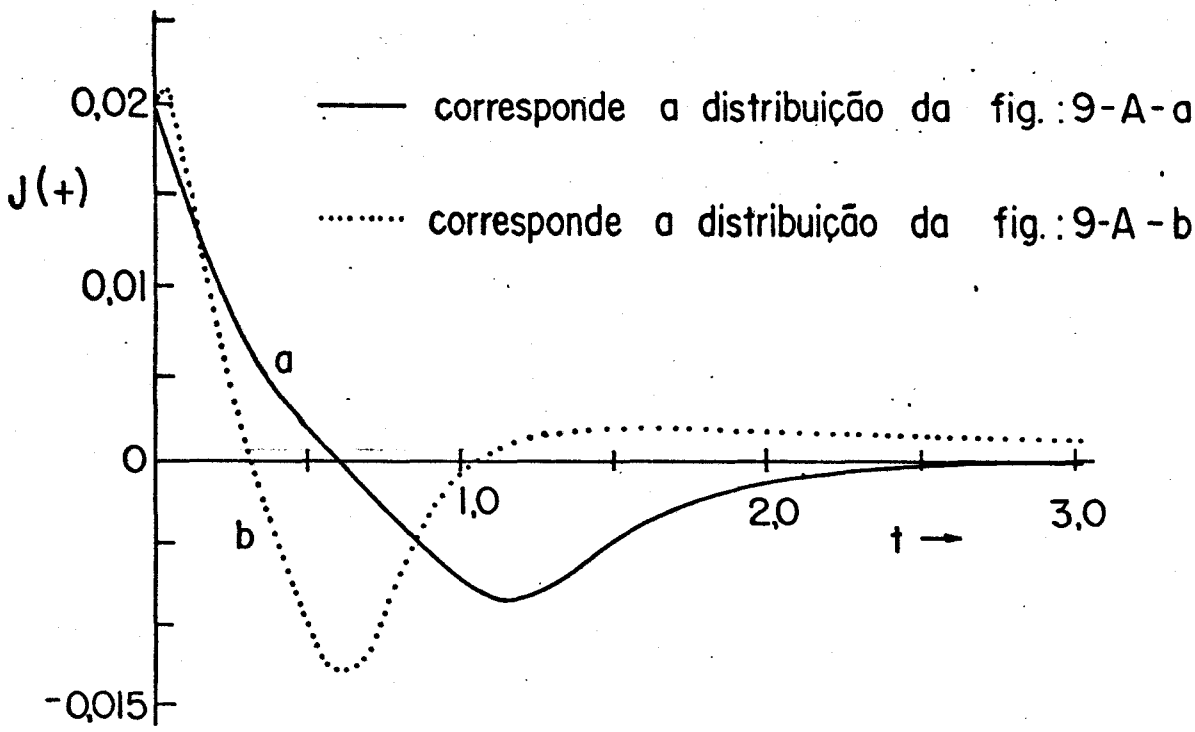


Fig.: 10-A

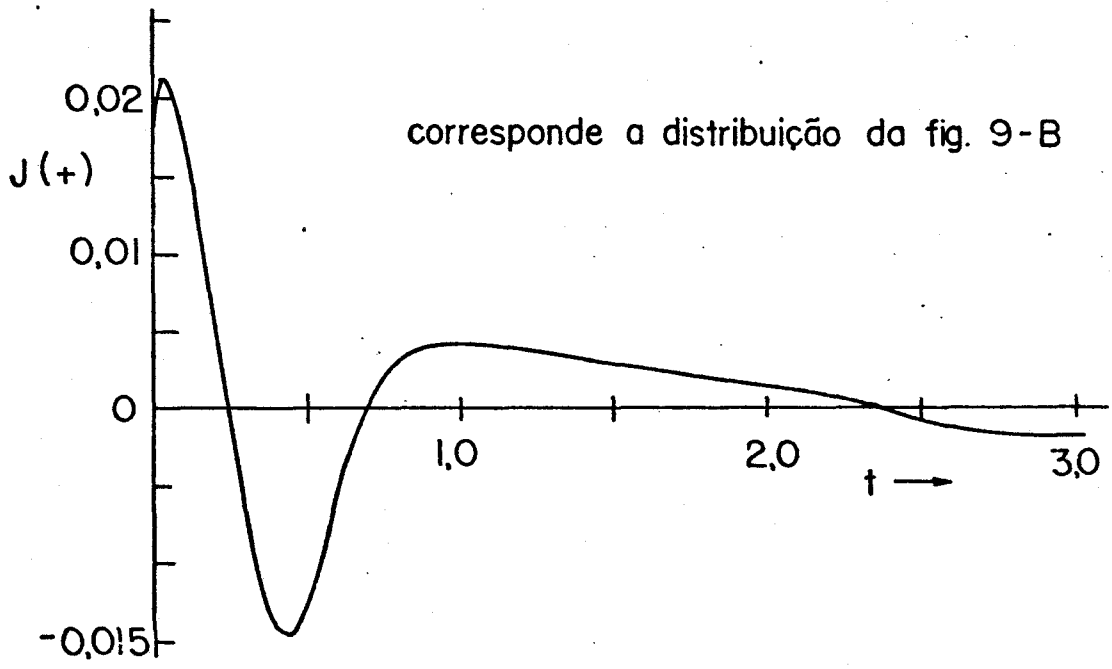


Fig.: 10-B

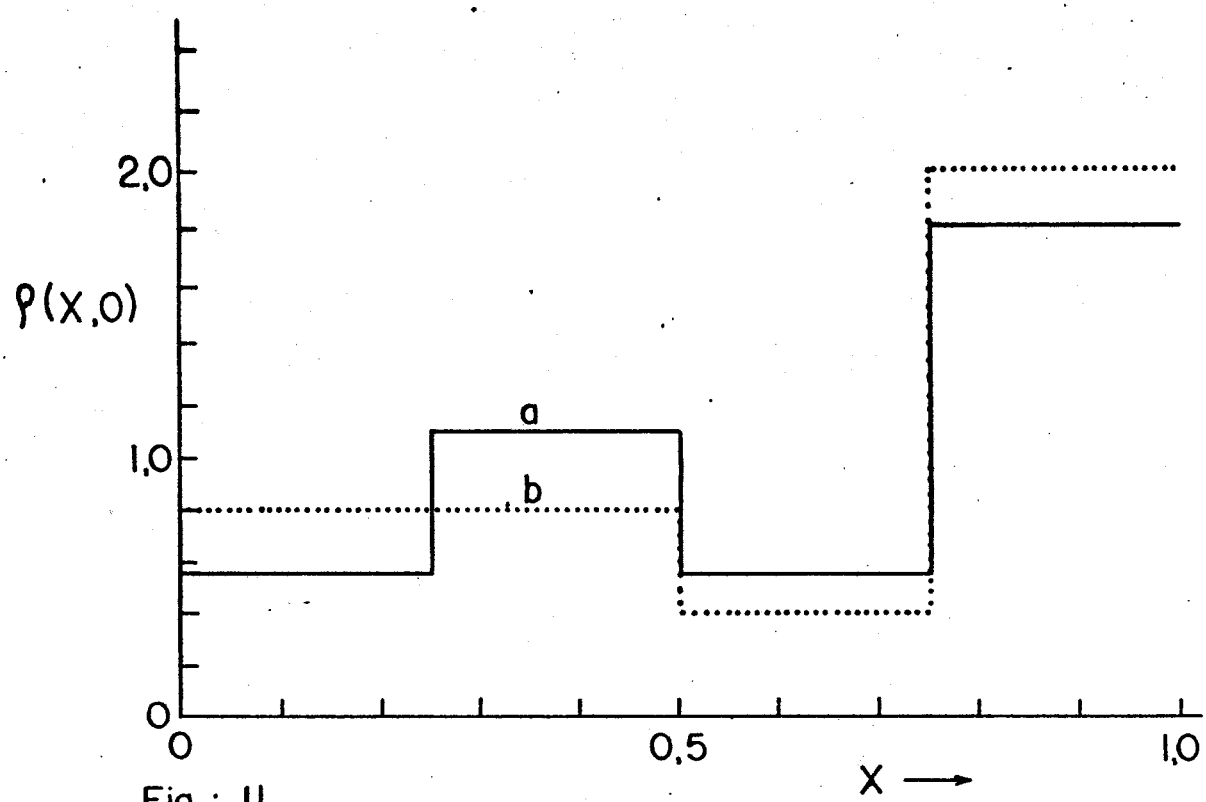
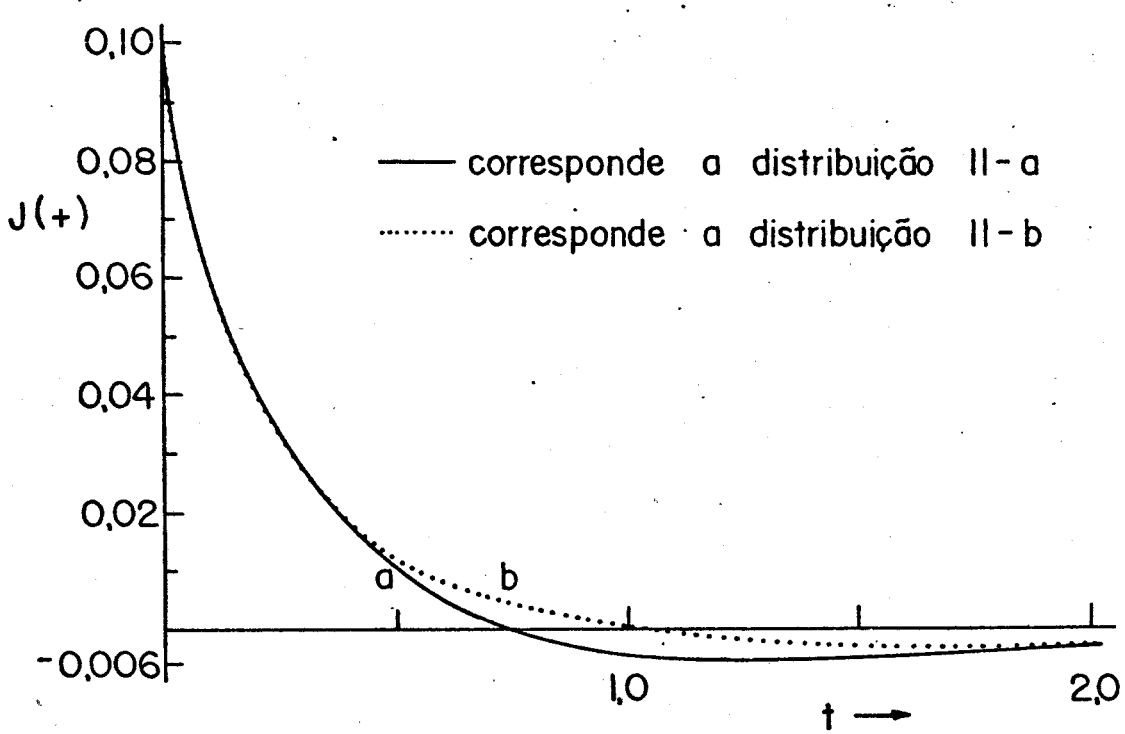

2,0
ρ(X,0)
1,0
0
a
b
0
0,5
1,0
X

Fig.: 11


0,10
0,08
J(+)
0,06
0,04
0,02
-0,006
corresponde a distribuição 11-a
corresponde a distribuição 11-b
a
b
1,0
2,0
t

inversões, cujos gráficos para corrente são mostrados na figura 14.

Uma outra distribuição que apresenta inversão é a da figura 15, cuja corrente é apresentada na figura 16.

A análise do aparecimento ou não da inversão, feita no Capítulo 4, tem como base a expressão (III.1)

$$J(t) = \left[\overline{X}(t) - \frac{1}{2}\right] q^2(t) \quad . \qquad \text{(III.1)}$$

Se $\overline{X}(t)$ passar de um valor superior a $\frac{1}{2}$ para um valor inferior, ou vice-versa, durante o desenvolvimento do processo, teremos então uma inversão. Como descobrir se haverá esta passagem será discutido no Capítulo IV.

III.6 - Distribuições lineares crescentes que tocam inicialmen- um só eletródio

Até o momento nos ocupamos apenas com distribuições que tocassem ambos os eletródios. Nesta seção trataremos do caso em que a distribuição toca apenas um eletródio, em $x = 0$.

O comportamento da corrente está agora ligado não só à posição média das cargas mas também à posição s_0 da frente das cargas.

Na figura 17 são apresentadas tres distribuições lineares diferentes, com frentes de carga em $s_0 = 0,65$; $s_0 = 0,75$ e $s_0 = 0,85$. Em todos os três casos continuamos com:

$$V(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad q(0) = 1 \quad .$$

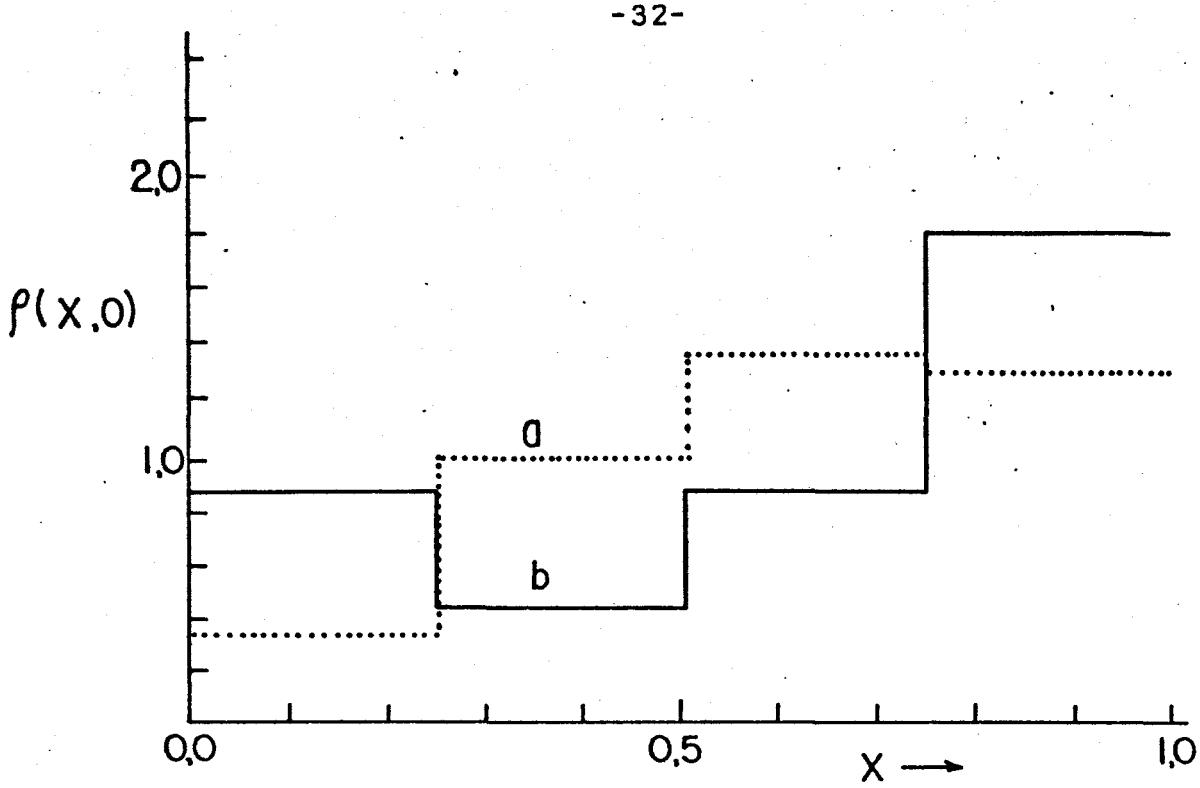

2,0
ρ(X,0)
1,0
a
b
0,0
0,5
X →
1,0

Fig. : 13

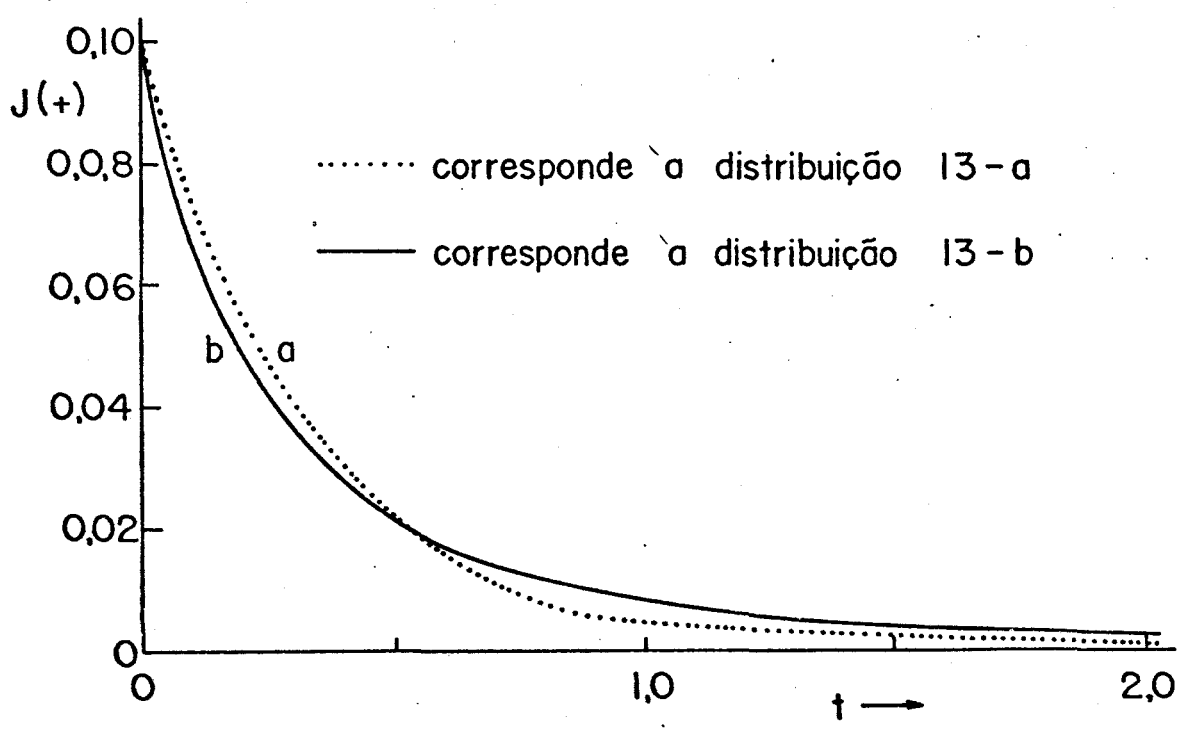

0,10
J(+)
0,0,8
0,06
0,04
0,02
0
corresponde à distribuição 13 - a
corresponde à distribuição 13 - b
b
a
0
1,0
t →
2,0

Fig. : 14

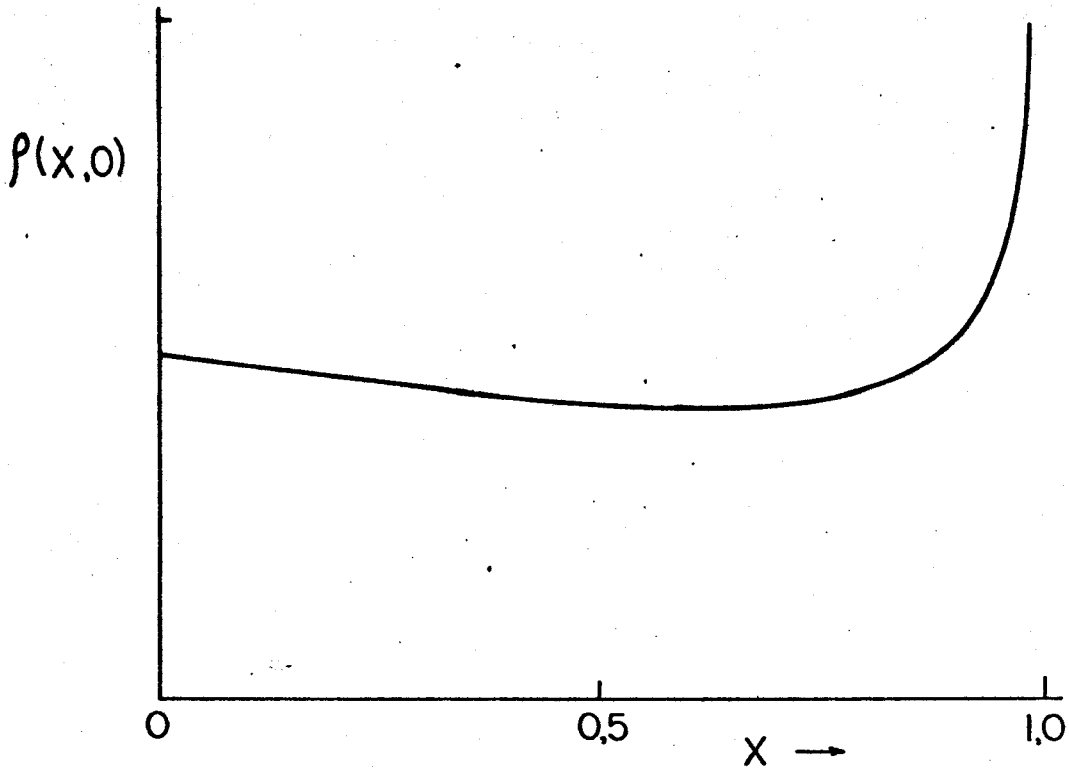


Fig. : 15

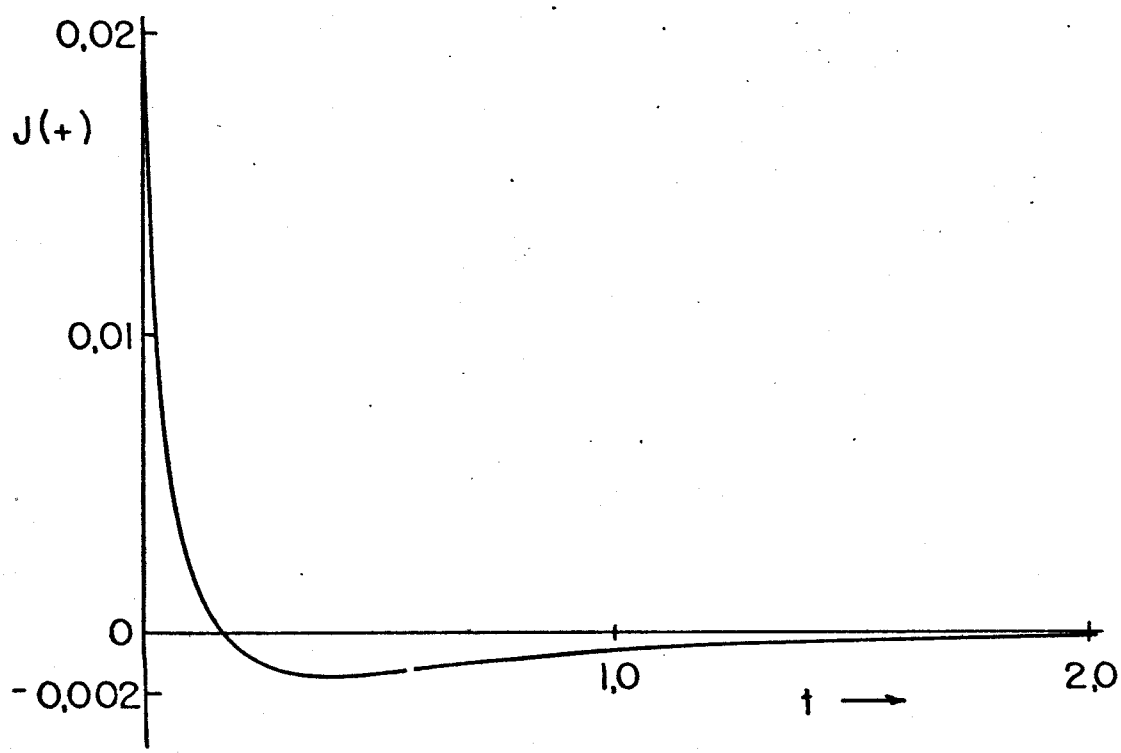


Fig. : 16

As correntes iniciais são diferentes

s_o	J_o
0,65	-0,067
0,75	0,000
0,85	+0,067

Os gráficos das correntes para as três distribuições são apresentados na figura 18.

Apesar de terem correntes iniciais muito diferentes, as formas são parecidas e um fato bastante interessante é a semelhança de comportamento na parte final, para grandes tempos.

O pico na corrente ocorre no instante em que a frente de cargas toca o eletródio em $x = 1$.

Na figura 19 apresentamos as correntes correspondentes a uma distribuição linear crescente com $s_o = 0,7$, porém com voltagens aplicadas iguais a $V(t) = 0$, $V(t) = -0,01$, $V(t) = -0,02$. Podemos verificar o aparecimento de dupla inversão quando a voltagem não é nula.

As análises para todos os casos aqui apresentados estão no Capítulo IV.

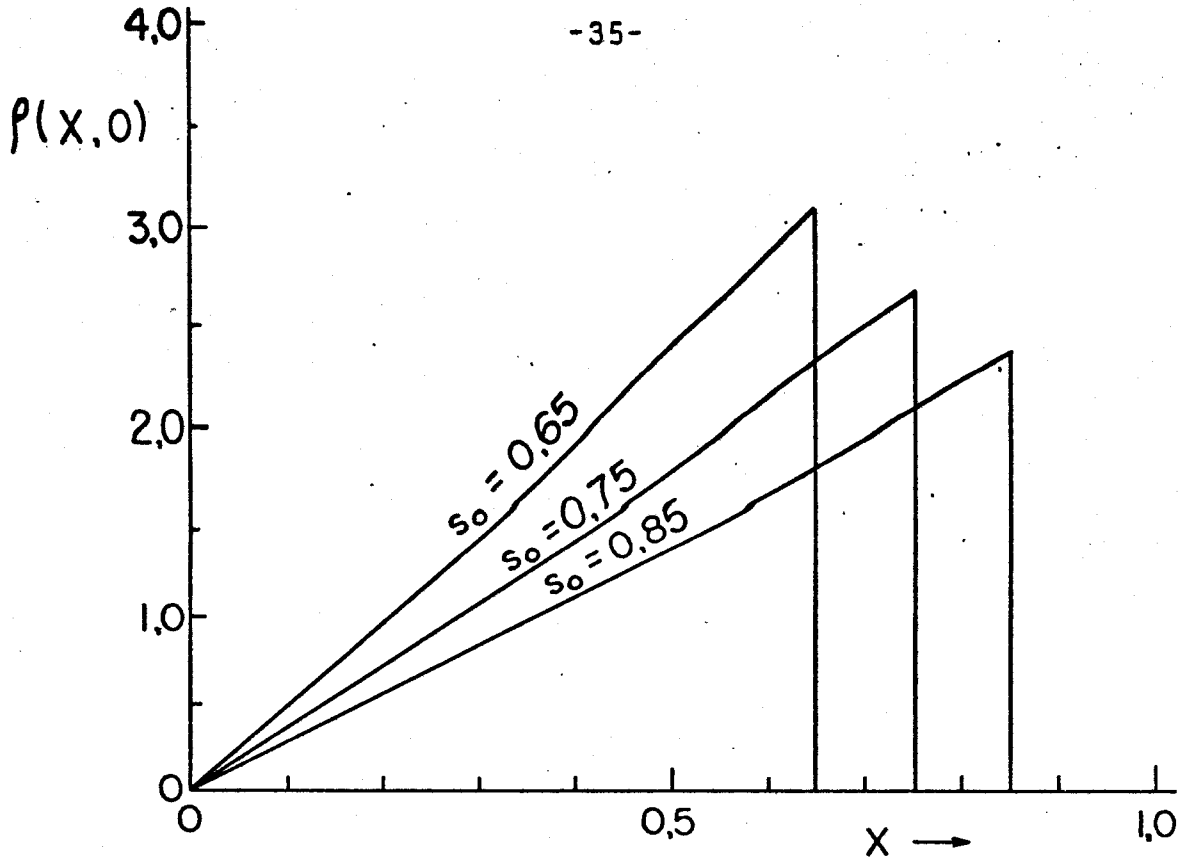

4,0
ρ(X,0)
3,0
2,0
1,0
0
0
0,5
1,0
X →
s₀ = 0,65
s₀ = 0,75
s₀ = 0,85

Fig. : 17

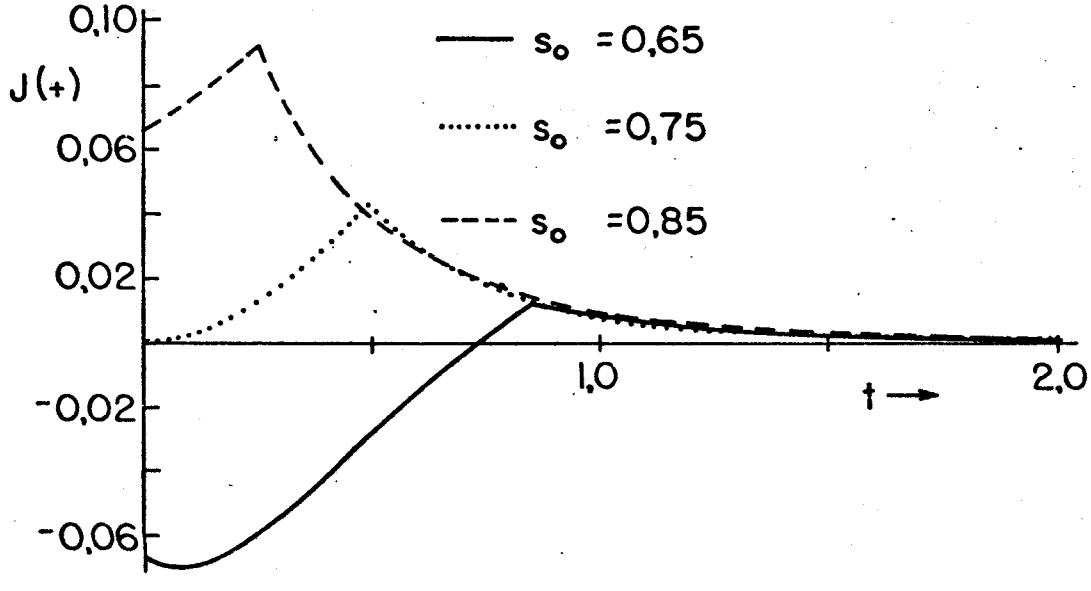

0,10
J(+)
0,06
0,02
-0,02
-0,06
1,0
2,0
t →
s₀ = 0,65
s₀ = 0,75
s₀ = 0,85

Fig. : 18

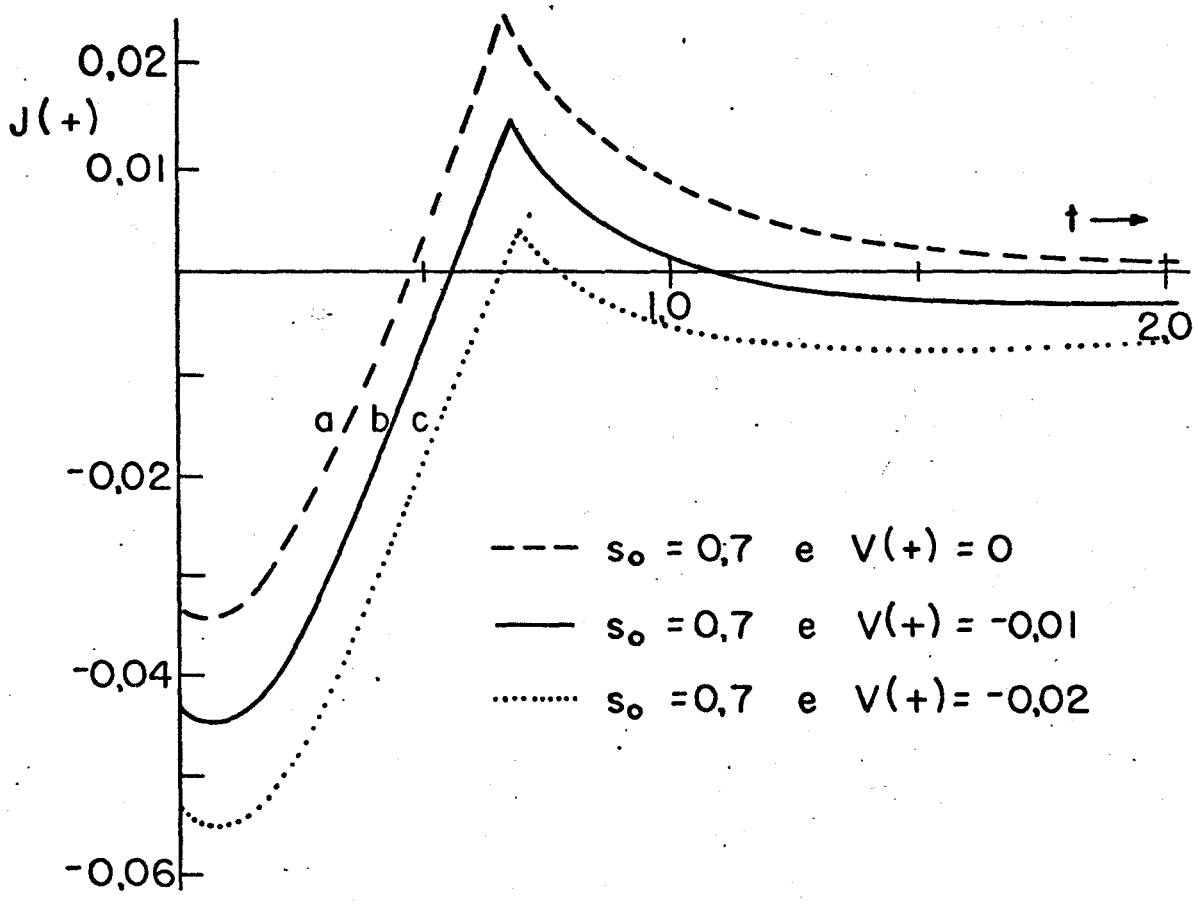


Fig. : 19

CAPÍTULO IV

ANÁLISES DAS SOLUÇÕES OBTIDAS

IV.1 - Distribuições crescentes

Quando observamos as correntes produzidas por distribuições lineares o fato que mais chama a atenção é a semelhança dos resultados condensados na Tabela I. Vemos que a razão $J(t)/J_o$ para cada tempo é quase a mesma para as diferentes distribuições.

Vamos mostrar que a corrente para estes casos segue quase exatamente a relação (II.42)

$$J(t) = \frac{J_o}{(1+t)^4} \qquad \text{(II.42)}$$

para qualquer inclinação.

Nas figuras 20.A e 20.B apresentamos os valores reais para a corrente, obtidos da solução numérica, e os correspondentes valores aproximados pela relação (II.42), para os casos de distribuições lineares com $J_o = 0,16$ e $J_o = 0,02$, ambos para $V(t)=0$.

Vemos portanto que, mesmo deduzida para os casos em que o quadrado da inclinação era pequeno comparado ao valor da inclinação (seção II.4), a relação (II.42) continua válida para os casos que fogem desta condição como a distribuição linear que apresenta $J_o = 0,16$ (figura 1.a).

Devido a tais resultados vamos usar daqui para frente a corrente como sendo dada pela relação (II.42) para distribuições lineares crescentes.

Como foi visto na seção III.3, as distribuições crescentes não lineares tem um comportamento que se aproxima bastante do caso linear, exceto quando há um grande acúmulo de cargas perto de um dos eletródios, como a distribuição mostrada na figura 5.b. Esta distribuição tem um comportamento para a corrente que não pode ser expressa pela relação (II.42).

A relação (II.42) pode então ser estendida a quase todos os tipos de distribuições crescentes, sem muito erro, com exceção do caso mencionado acima.

A modificação do comportamento da corrente para distribuições com grande acúmulo de carga perto de um eletródio está ligada a uma rápida perda de carga do material para o eletródio, o que vem modificar rapidamente a posição média das cargas: $\overline{X}(t)$ diminui rapidamente e com isto o decaimento de J(t) é bastante rápido no início do processo.

IV.2 - Determinação das concavidades de distribuições de carga

Vamos indicar aqui um método para descobrir a concavidade de uma distribuição desconhecida nos baseando apenas na corrente externa.

As distribuições que apresentam um pico ou um vale, figura 7, não se enquadram na lei geral obtida para os casos de distribuições crescentes que, como já sabemos obedecem aproximadamente a relação (II.42)

$$\sqrt[4]{\frac{J_o}{J(t)}} = 1 + t \qquad \text{(IV.1)}$$

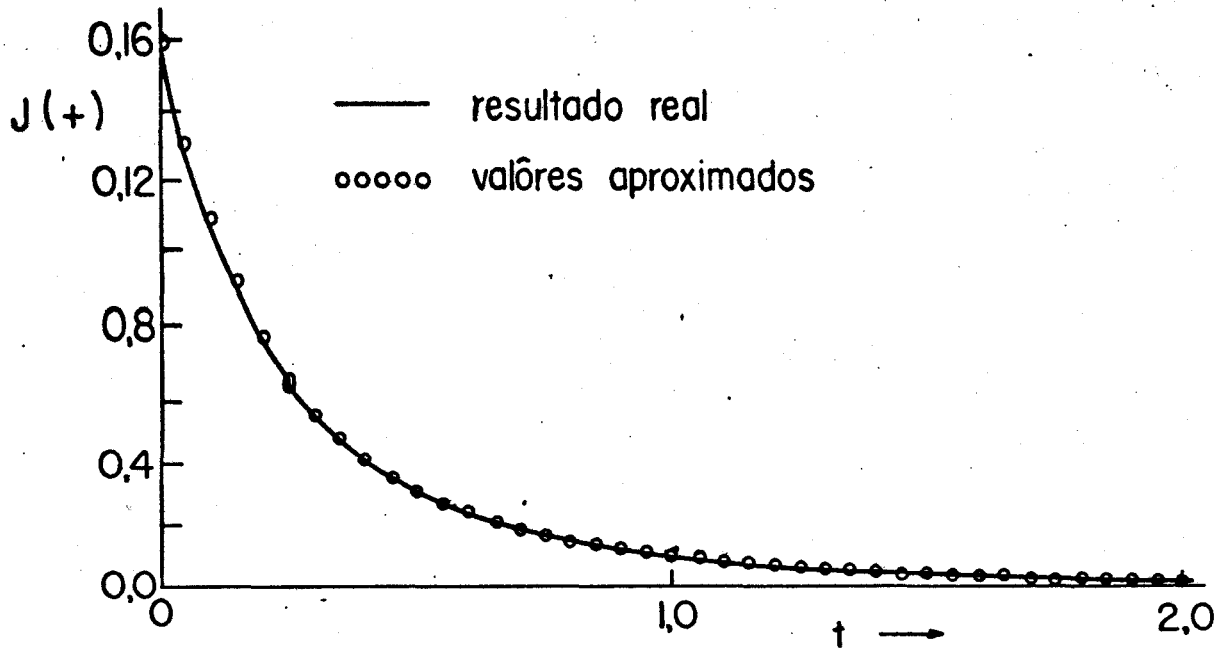


Fig. : 20-A

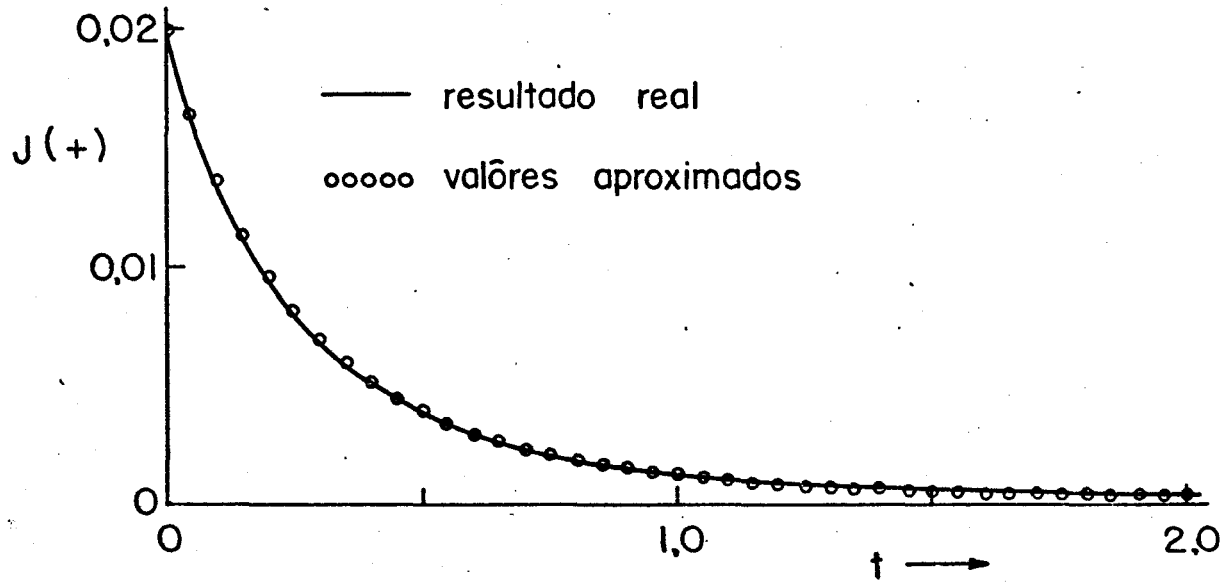


Fig. : 20-B

Entretanto, vamos utilizar o comportamento de $\sqrt[4]{J_o/J(t)}$ contra t para descobrir a concavidade de uma distribuição desconhecida. Utilizaremos os resultados obtidos para as distribuições da figura 7 como base para desenvolver o método de determinar a concavidade.

Na figura 21 estão os gráficos de $\sqrt[4]{J_o/J(t)}$ contra t para as três distribuições da figura 7. Pode-se notar que para grandes valores de t temos três retas aproximadas, cujos coeficientes de inclinação acham-se indicados na figura. A distribuição com um pico, 7.b, levou a uma reta com coeficiente de inclinação maior que um; a que apresentava um vale, 7.c, teve como resultado uma reta cuja inclinação é menor que um; finalmente o caso linear, como já era esperado, levou a uma reta com inclinação unitária. Convém lembrar que para os tres casos q(o) = 1.

Os resultados apresentados acima são muito significativos quando observamos que o coeficiente de inclinação a está ligado com a concavidade da distribuição. Para o caso linear a = 1 que é justamente o coeficiente a_o da relação (II.40), como já esperavamos. Notamos então que o coeficiente a está ligado ao valor da densidade de carga no meio do dielétrico. Isto nos faz pensar em utilizar os gráficos $\sqrt[4]{J_o/J(t)}$ contra t para determinar a concavidade de distribuições desconhecidas utilizando a corrente medida. Se a inclinação da reta aproximada obtida para grandes tempos fosse maior que um teríamos que a concavidade da distribuição seria para ~~cima~~ baixo. Caso a inclinação fosse menor que um teríamos uma distribuição com concavidade para ~~baixo~~ cima. Finalmente se a inclinação fosse unitária, teríamos uma distribuição aproximadamente li-

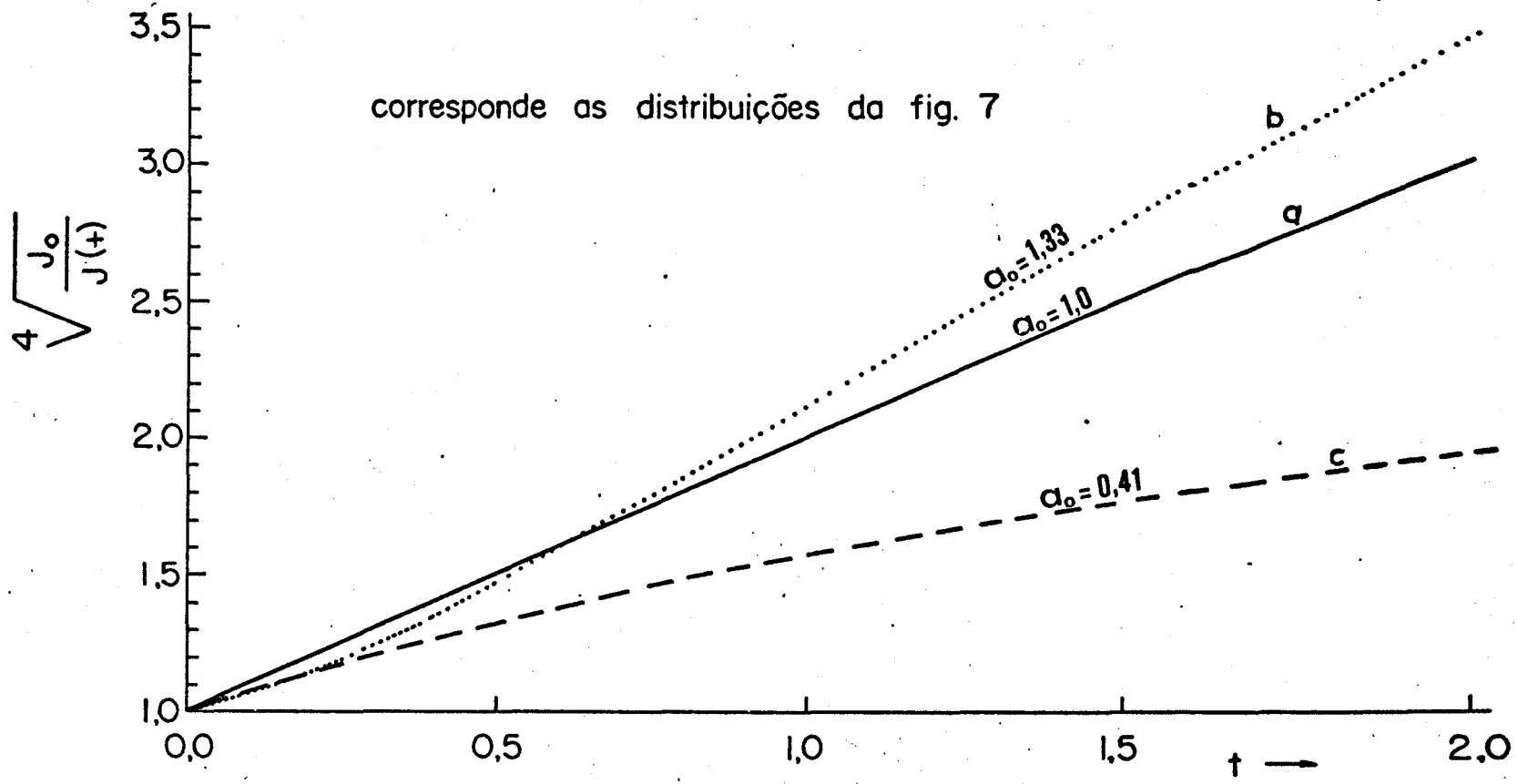

corresponde as distribuições da fig. 7
$\sqrt[4]{\frac{J_0}{J(t)}}$
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
t
b
a
c
$a_0=1,33$
$a_0=1,0$
$a_0=0,41$

Fig. : 21

near. Todavia isto não é tão simples quanto parece, pois estamos utilizando unidades reduzidas. Em unidades reais o problema se complica.

Podemos generalizar a equação (II.42) para descrever também o comportamento de distribuições com um pico ou um vale . Teremos então:

$$J(t) = \frac{J(0)}{(1 + at)^4} \qquad \text{(IV.2)}$$

a → ligada ao valor da densidade de carga no meio do dielétrico.

Distribuição linear $a = 1$

Distribuição com um pico no meio do dielétrico $a > 1$

Distribuição com um vale no meio do dielétrico $a < 1$

Ao passarmos de unidades reduzidas para unidades reais a equação (IV.2) fica

$$J'(t') = \frac{J'(0)}{\left(1 + a \dfrac{\mu\rho'_o}{\varepsilon} t'\right)^4} \qquad \text{(IV.3)}$$

Surgem então três parâmetros cujo conhecimento é imprescindível para utilizarmos o método descrito anteriormente.

Podemos escrever a (IV.3) sob a forma

$$\sqrt[4]{\frac{J'(0)}{J'(t')}} = 1 + a \frac{\mu\rho'_o}{\varepsilon} t' \qquad \text{(IV.4)}$$

Se conhecessemos $\dfrac{\mu\rho'_o}{\varepsilon}$ poderiamos determinar a concavi-

dade.

Lembramos que $\rho'_0 = \dfrac{q'(0)}{d}$ pois $q(0) = 1$.

O conhecimento de tais parâmetros pode ser dispensado se partirmos para uma outra forma de ataque.

A escolha da origem dos tempos é arbitrária neste processo. A única diferença está no fato da carga total diminuir de valor e a distribuição mudar um pouco sua forma, conservando porém suas características, como a concavidade por exemplo.

O método que vamos utilizar para determinar a concavidade, a partir de uma única medida, que é a corrente, vai se concentrar exatamente no fato da diminuição da carga. Melhor ainda seria dizer que vamos nos concentrar na maneira que a densidade de carga diminui no meio do dielétrico.

A mudança da origem dos tempos será analisado agora utilizando-se apenas unidades reduzidas. Após verificarmos como podemos chegar a um resultado utilizando tais unidades, estenderemos para unidades reais.

Sabemos que a densidade de carga sobre uma linha de corrente decai com o tempo segundo a relação (II.11)

$$\rho(x(t),t) = \frac{\rho(x_0,0)}{1 + \rho(x_0,0)t} \qquad \text{(II.11)}$$

onde $x(t)$ é a posição das cargas que no tempo $t = 0$ estavam em x_0. O movimento das linhas de corrente, equação (II.10), é dado por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x(t),t) \qquad \text{(II.10)}$$

Como o campo elétrico no meio do dielétrico, para $V(t) = 0$, é pequeno, temos que $x(t) \simeq x_o$. Portanto a evolução da densidade de carga no meio do dielétrico pode ser aproximada por:

$$\rho\left(\frac{1}{2},t\right) = \frac{\rho\left(\frac{1}{2},0\right)}{1 + \rho\left(\frac{1}{2},0\right) t} \qquad \text{(IV.5)}$$

O parâmetro a está ligado justamente com a densidade de carga no meio do dielétrico. Se fizermos uma mudança na origem dos tempos de $t = 0$ para $t = t_o$, teremos então que o novo parâmetro $a(t_o)$, densidade de carga no meio do dielétrico para a nova origem de tempo deverá ser

$$a(t_o) = \frac{a(0)}{1 + a(0)t_o} \qquad \text{(IV.6)}$$

Ficamos então com

$$\sqrt[4]{\frac{J(t_o)}{J(t_1)}} = 1 + \frac{a_o}{1 + a_o t_o} t_1 \qquad \text{(IV.7)}$$

com $t_1 = t - t_o$.

Na figura 22 temos o gráfico $\sqrt[4]{\frac{J(t_o)}{J(t_1)}} \times t_1$ para uma distribuição linear $(a(0) = 1)$ para os casos em que $t_o = 0,5$ e $t_o = 1,0$.

Calculando os coeficientes de inclinação esperados pela relação (IV.6) temos:

para $t_o = 0,5$ $\qquad a(0,5) = 0,67$

para $t_o = 1,0$ $\qquad a(1,0) = 0,50$.

Obtivemos no gráfico inclinações $a(0,5) = 0,68$ e $a(1,0) = 0,51$. Até aqui portanto os resultados são satisfatórios.

Vamos verificar agora o caso das distribuições não lineares da figura 7. Da figura 21.A temos que o coeficiente de inclinação, quando $t_o = 0$, para a distribuição que apresenta um vale, figura 7.C, é $a(0) = 0,41$. Depois da mudança de origem dos tempos os valores esperados para as inclinações, calculados por (IV.6) deveriam ser:

$t_o = 0,5$ $\qquad$ $t_o = 1,0$

$a(0,5) = 0,34$ $\qquad$ $a(1,0) = 0,29$

Os valores obtidos da figura 23.b são $a(0,5) = 0,31$ e $a(1,0) = 0,23$ menores portanto que os esperados pela relação (IV:6).

Para a distribuição com pico, figura 7.b, temos para $t_o = 0$ $a(0) = 1,33$, obtido da figura 21.b. As inclinações esperadas, deduzidas de (IV.6) são:

$t_o = 0,5$ $\qquad$ $t_o = 1,0$

$a(0,5) = 0,80$ $\qquad$ $a(1,0) = 0,57$

As inclinações obtidas da figura 23.a são

$a(0,5) = 0,91$ e $a(1,0) = 0,63$

maiores portanto que as esperadas pela relação (IV.6).

Temos agora em mãos um outro método que, como vamos confirmar, vai ser independente, em unidades reais, do conhecimento de quaisquer outros parâmetros.

Em unidades reais não podíamos utilizar o primeiro método pois desconhecendo $\mu\rho'_o/\varepsilon$ não chegavamos a um resultado.

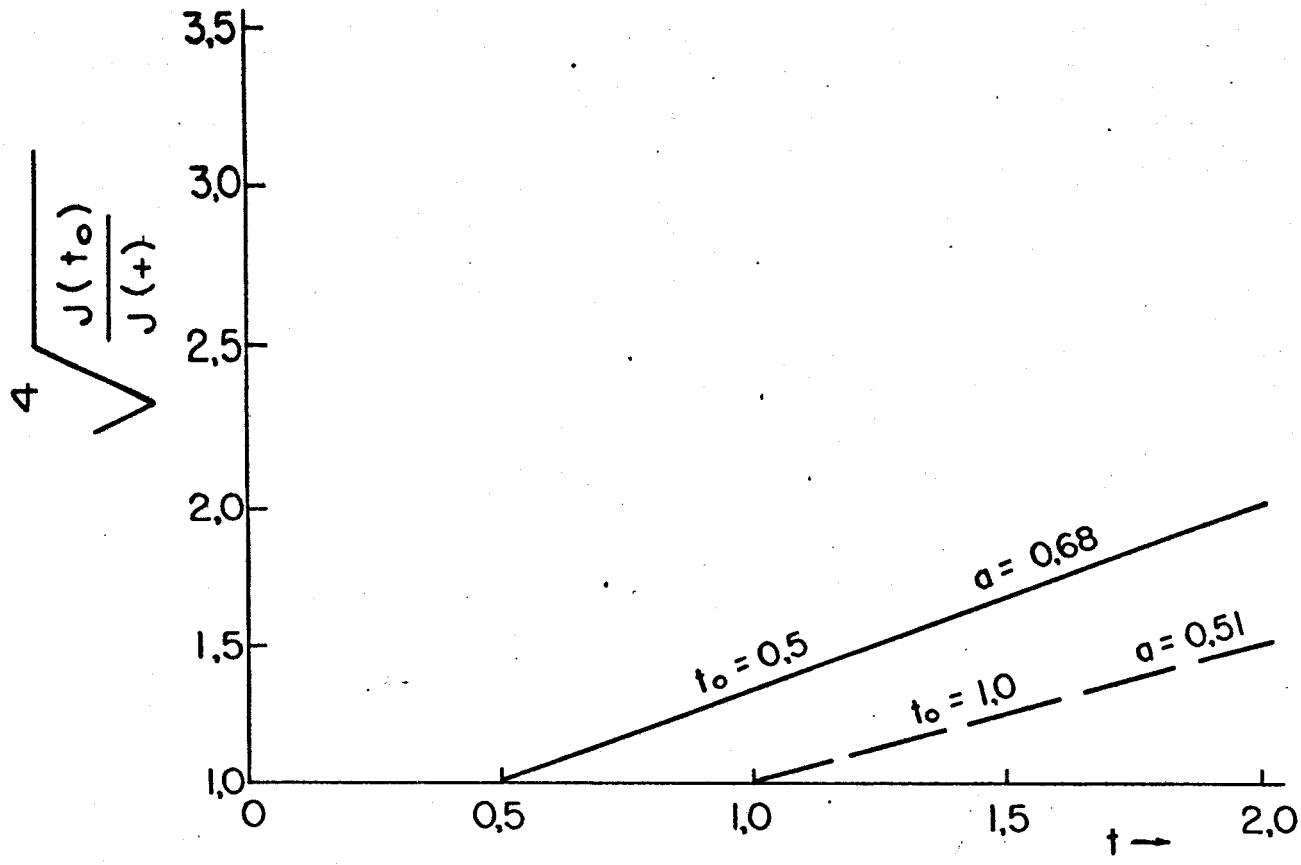

3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0
0,5
1,0
1,5
2,0
t →
a = 0,68
a = 0,51
t₀ = 0,5
t₀ = 1,0

Fig.: 22

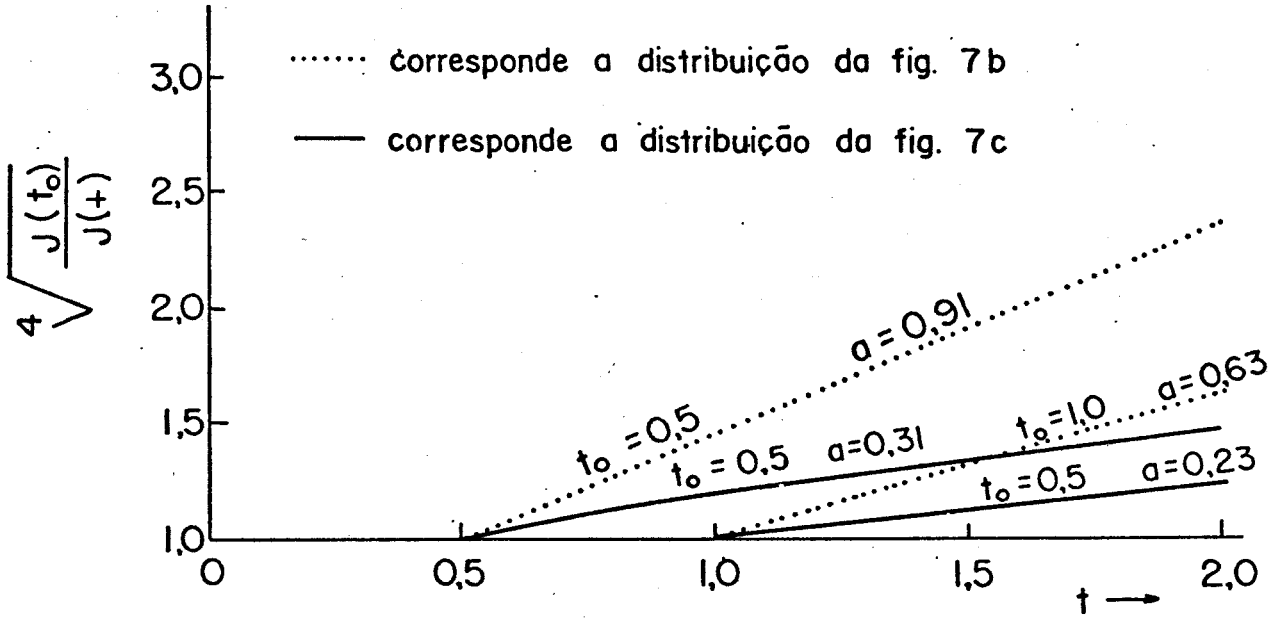

corresponde a distribuição da fig. 7b
corresponde a distribuição da fig. 7c
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0
0,5
1,0
1,5
2,0
t →
a = 0,91
a = 0,63
a = 0,31
a = 0,23
t₀ = 0,5
t₀ = 1,0
t₀ = 0,5
t₀ = 0,5

Fig. :23

A relação que é válida para a corrente total, no caso de distribuição linear a(0) = 1, em unidades reais é (II.46)

$$J'(t') = \frac{J'(0)}{\left(1 + \frac{\mu\rho_0'}{\varepsilon} t'\right)^4} \qquad \text{(II.46)}$$

Em unidades reais temos que o parâmetro que acompanha a distribuição linear é $\mu\rho_0'/\varepsilon$. Vamos utilizar o método da mudança da origem temporal verificando se tal parâmetro segue uma relação equivalente a (IV.6), com as mesmas implicações de a no caso de unidades reduzidas.

Chamando $\nu(0) = \frac{\mu\rho_0'}{\varepsilon}$ teremos em análogo a relação (IV.6)

$$\nu(t_0') = \frac{\nu(0)}{1 + \nu(0)\, t_0'} \qquad \text{(IV.8)}$$

Fazendo a mudança de origem de tempos ficamos então com:

$$\sqrt[4]{\frac{J'(t_0')}{J'(t_1')}} = 1 + \frac{\nu(0)}{1 + \nu(0)\, t_0'}\, t_1' \qquad \text{(IV.9)}$$

com $t_1' = t' - t_0'$.

Para determinar a concavidade vamos determinar $\nu(0)$ e $\nu(t_0')$ pelos gráficos $\sqrt[4]{J'(0)/J'(t')}$ x t' e $\sqrt[4]{J'(t_0')/J'(t_1')}$ x t_1' respectivamente. A seguir vamos calcular o valor esperado de $\nu(t_0')$ pela relação (IV.8). Se o valor esperado for maior que o encontrado temos uma distribuição com concavidade para baixo. Ocorrendo o oposto, valor esperado menor que o encontrado, tere -

mos concavidade para cima. Havendo coincidência entre valor esperado e valor encontrado teremos distribuição aproximadamente linear.

IV.3 - Sobre a determinação da mobilidade

Vamos falar agora do problema da determinação da mobilidade dos portadores de carga. Se a carga total for conhecida mostramos na seção II.5 que a mobilidade pode ser determinada, se supuzermos que a distribuição é linear. No caso de não o ser, a mobilidade será determinada a menos de um fator. Teremos

$$\mu c = c\,\mu \qquad \text{(IV.10)}$$

onde μc é a mobilidade calculada utilizando o processo mostrado na seção II.5 e μ é o valor real da mobilidade.

O aparecimento deste parâmetro c está ligado ao fato de que se a distribuição não é linear, a inclinação da reta obtida ao gráfico $\sqrt[4]{J'(0)/J'(t')}$ x t' será maior ou menor, respectivamente se a distribuição tenha concavidade para cima ou para baixo, que a obtida para uma distribuição linear, para uma mesma quantidade inicial de carga (mesmo ρ_0').

Caso a concavidade seja para baixo vamos encontrar um parâmetro $\mu\rho_0'/\varepsilon$ que é menor que o esperado para uma distribuição linear com a mesma carga. Portanto o valor calculado para a mobilidade, μc, usando o procedimento descrito na seção II.5 é menor que o real. Podemos então sintetizar:

$$\text{Distribuição} \begin{cases} \text{concavidade para baixo} & \mu c < \mu \\ \text{concavidade para cima} & \mu c > \mu \\ \text{linear} & \mu c = \mu \end{cases}$$

IV.4 - Análise das inversões de corrente

Nesta seção vamos mostrar uma maneira de prever inversões por observação das distribuições iniciais de carga.

Se tivermos $v(t) = 0$, a corrente é dada por (II.23)

$$J(t) = \left[\bar{X}(t) - \frac{1}{2}\right] q^2(t) \qquad \text{(II.23)}$$

Para haver inversão o que devemos ter é que $\bar{X}(t)$ passe de um valor maior que 1/2 para um valor menor que 1/2, ou vice-versa, durante o desenvolvimento do processo de escoamento das cargas.

As distribuições que vamos utilizar para analisar as inversões estão dadas nas figuras 11 e 13. As da figura 11 apresentam inversão enquanto que as outras não.

A carga existente no interior do dielétrico vai se escoando para os eletródios. A posição inicial das cargas que após um tempo t estarão passando para os eletródios é descrita pelas duas funções $y(t)$ e $z(t)$. A função $y(t)$ nos dá a posição inicial das cargas que após um tempo t estarão no eletródio $x = 0$; e $z(t)$ nos dá a posição das cargas que após um tempo t estarão em $x = 1$. Portanto, após um tempo t a carga no interior do dielétrico será aquela que se encontrava, em $t = 0$, entre y e z.

Na figura 24.A e 24.B podemos observar a semelhança nos comportamentos de $y(t)$ e $1-z(t)$ para as distribuições da figura 11. Devido a essa semelhança podemos dizer, em uma primeira aproximação, que cargas situadas a uma mesma distância dos eletródios chegam ao mesmo tempo ao eletródio correspondente.

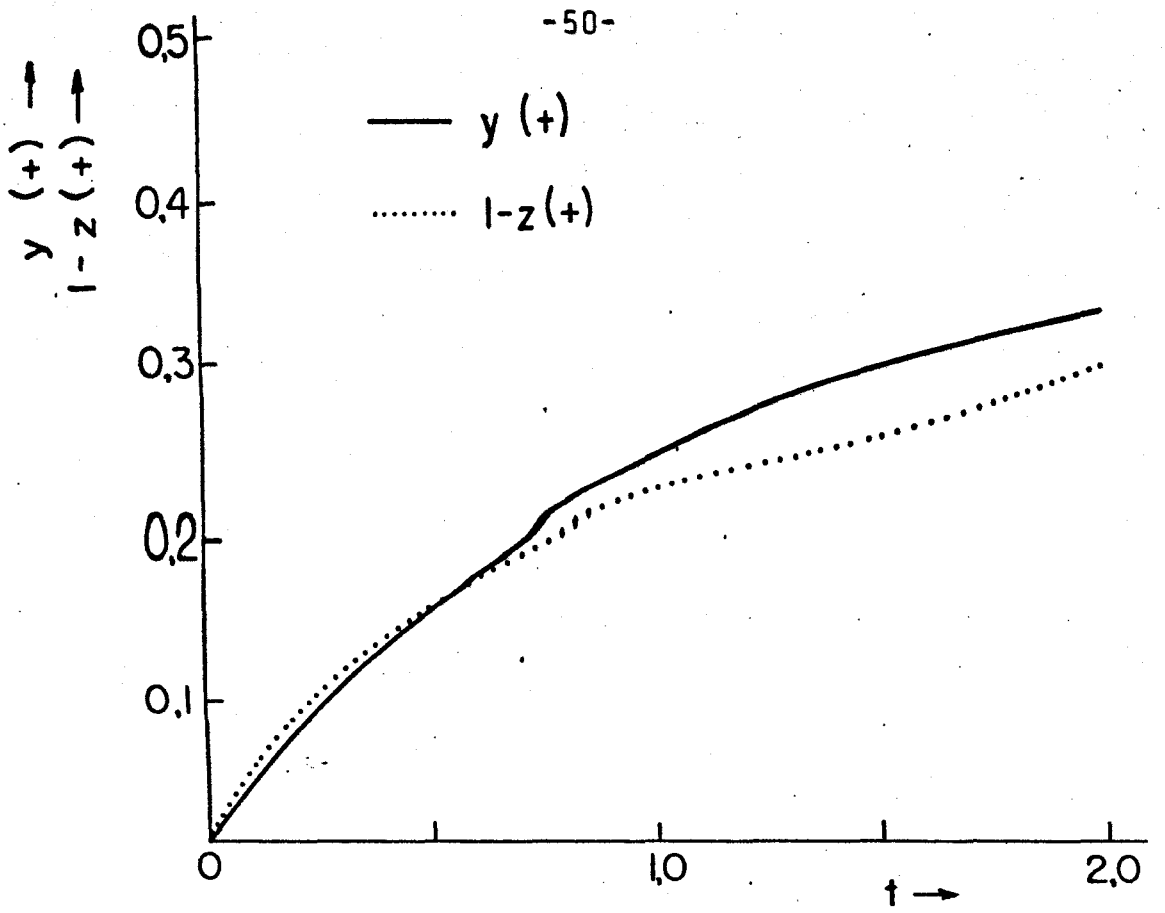


Fig. : 24-A

Corresponde a distribuição da figura II-A

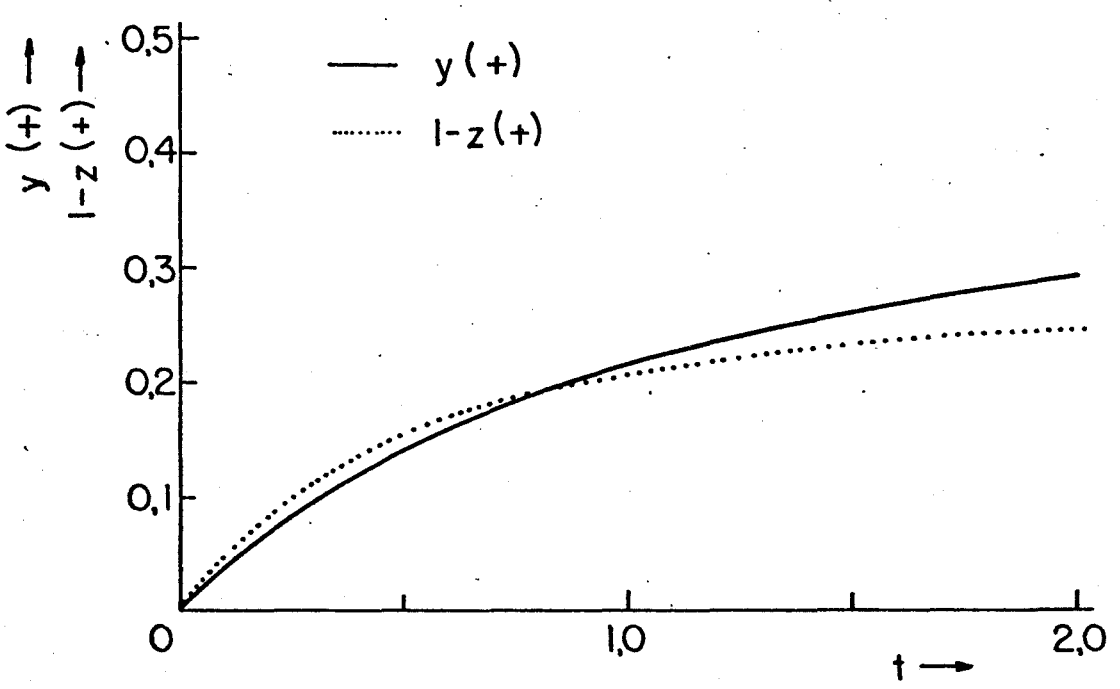


Fig. : 24-B

Corresponde a distribuição da figura II-B

Para casos em que $\overline{X}(t)$ é próximo de 0,5, isto é, com correntes pequenas, a coincidência das cargas equidistantes chegarem aos eletródios ao mesmo tempo se acentua pois existe uma maior uniformidade na distribuição.

Se fizermos um corte nas distribuições da figura 11, em $x = 0,3$ e $x = 0,7$ e supondo que tais cargas alcancem os eletródios correspondentes no mesmo instante, teremos uma situação em que $\overline{X}(t) < 0,5$. Deve-se notar ainda que as cargas em $x = 0,5$ não se afastam muito do meio da amostra pois o movimento nas linhas de corrente é regido por $\frac{dx(t)}{dt} = E(x(t),t)$.

Como $E(x(t),t)$ para $x(t) = \frac{1}{2}$ é pequeno $\frac{dx(t)}{dt} \simeq 0$, e confirmamos a hipótese $\overline{X}(t) < 0,5$, havendo portanto a inversão, já que tinhamos $\overline{X}(0) > 0,5$ para tais distribuições.

Já nas distribuições da figura 13 o corte $x = 0,3$ e $x = 0,7$ nos revela que teremos $\overline{X}(t) > 0,5$ e portanto a corrente não muda de sinal.

As análises das distribuições das figuras 9.A e 9.B podem ser feitas da mesma maneira. A existência de picos e vales multiplos no interior do dielétrico pode então levar a um número maior de inversões.

A inversão observada na figura 16 pode ser prevista, observando que um corte na distribuição da figura 15 em $x = 0,3$ e $x = 0,7$ faz com que tenhamos $\overline{X} < \frac{1}{2}$ e portanto a inversão.

O processo dos cortes equidistantes pode nos dar uma idéia razoável da existência ou não de inversão. Claro que numa distribuição de forma complicada o problema não é tão simples.

Todavia tal tipo de distribuição foge dos casos mais interessantes.

IV.5 - Distribuições que inicialmente tocam apenas um eletródio

O comportamento da corrente para as distribuições crescentes até um certo ponto s_o e que são nulas de s_o a 1 pode ser previsto qualitativamente conforme veremos a seguir.

A situação que vamos analisar é a seguinte:

Distribuição crescente até s_o e nula de s_o a 1.

$V(t) = 0$ e $q(o) = 1$

A figura 17 apresenta distribuições desse tipo.

Temos a relação (II.10)

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x(t),t) \qquad \text{(II.10)}$$

A segunda derivada de x(t) é

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dE(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = \rho E + \frac{\partial E}{\partial t} \quad . \qquad \text{(IV.11)}$$

Comparando com a II.9 vemos que

$$\frac{dE(x(t),t)}{dt} = J(t) \quad . \qquad \text{(IV.12)}$$

Integrando por partes a condição de contorno

$$\int_0^1 E\,dx = 0$$

chegamos a

$$E(1,t) = \int_0^1 x\ \rho(x,t)\, dx$$

ou

$$E(1,t) = \overline{X}(t)\ q(t) \quad . \tag{IV.13}$$

Colocando em (IV.12) temos:

$$J(t) = q(t)\ \frac{d\overline{X}(t)}{dt} + \overline{X}(t)\ \frac{dq(t)}{dt} \tag{IV.14}$$

No tempo t = 0, como q(o) = 1

$$J(0) = \left.\frac{d\overline{X}}{dt}\right|_{t=0} + \overline{X}(0)\ \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \quad . \tag{IV.15}$$

A derivada da corremte é dada por (II.24)

$$\frac{dJ(t)}{dt} = q^2(t)\ \frac{d\overline{X}(t)}{dt} + \frac{2J(t)}{q(t)}\ \frac{dq(t)}{dt} \tag{II.24}$$

Para t = 0 temos:

$$\left.\frac{dJ(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\overline{X}(t)}{dt}\right|_{t=0} + 2J(0)\ \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \quad . \tag{IV.16}$$

Substituindo $\left.\frac{d\overline{X}(t)}{dt}\right|_{t=0}$ obtido em (IV.15) vem

$$\left.\frac{dJ(t)}{dt}\right|_{t=0} = J(0) + \left(J(0) + \frac{1}{2}\right)\ \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \quad . \tag{IV.17}$$

Se a perda de carga é pequena no início do processo $\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} \simeq 0$ teremos que

$$\left.\frac{dJ(t)}{dt}\right|_{t=0} = J(0) \qquad \text{(IV.18)}$$

Isto explica a inclinação para baixo no início do processo para a corrente mostrada na figura 18 para o caso de s_o=0,65. Como J(0) é negativo $\frac{dJ}{dt} < 0$ e a corrente desce.

Como as distribuições crescentes continuam crescentes, temos que após a frente de cargas que estava em $x_o = s_o$ atingir $x = 1$, a forma da distribuição será crescente tocando ambos os eletródios. Neste instante a corrente deve ser positiva permanecendo assim até o final e com valor que decresce, como provamos na seção II.3.

Comprovamos portanto os comportamentos das correntes mostradas na figura 18.

Deve-se acrescentar que o pico ocorre justamente quando a frente de cargas chega a $x = 1$.

Quando existe voltagem aplicada às curvas para correntes são apenas deslocadas, para baixo conforme vemos na figura 19 quando V(t) é negativa. Aparece aqui uma dupla inversão.

A voltagem não altera significativamente a forma da corrente mas faz aparecer a dupla inversão.

IV.6 - Carga total que circula externamente

Temos que a carga que circula externamente é determinada por

$$Q(t) = \int_0^t J(t)\, dt \quad . \qquad \text{(IV.19)}$$

Para distribuições lineares que tocam ambos os eletródios podemos chegar a uma expressão aproximada para a carga Q(t) usando a relação (II.16):

$$J(t) = \frac{J_o}{(1+t)^4} \qquad \text{(II.42)}$$

Substituindo a expressão e integrando obtemos:

$$Q(t) = \frac{J_o}{3}\left(1 - \frac{1}{(1+t)^3}\right) \quad . \qquad \text{(IV.20)}$$

Verificamos que tal expressão nos dá uma boa aproximação para o valor real.

Para $t = \infty$ temos a carga total que circula externamente. Neste caso

$$Q(\infty) = \frac{J_o}{3} \qquad \text{(IV.21)}$$

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo vamos analisar resultados experimentais com base nas idéias desenvolvidas nos capítulos anteriores.

O trabalho experimental que vamos utilizar, Irradiation Effects in Borosilicate Glass, realizado por B. Gross[9], mostra medidas de corrente de descarga provenientes de amostras de vidro que foram irradiadas com elétrons.

V.1 - Os resultados experimentais do trabalho analisado

As amostras utilizadas eram discos de vidro borosilicato com 1,75 cm de espessura e 4,4 cm de diâmetro. Tais amostras foram irradiadas com elétrons de energia igual a 2 MeV. Depois disso as amostras eram colocadas entre eletrodos em curto circuito e a corrente produzida era medida. O curto circuito só era aberto por breves instantes, justamente a fim de medir a corrente produzida.

A penetração dos elétrons no vidro era da ordem de 0,4 cm, como mostrava a cor amarelada que o vidro adquiria nessa profundidade.

Como à temperatura ambiente a corrente era muito pequena, às amostras eram aquecidas e as principais medidas foram realizadas durante o aquecimento. Foram feitas medidas de corrente para as amostras inteiras, espessura de 1,75 cm, bem como para seções da amostra, espessuras menores. Em algumas seções estava conservada a superfície pela qual penetravam os elétrons, superfície

irradiada. Em outras foi preservada a superfície oposta, superfície não irradiada.

Nas figuras* 5 e 6 da página 62 apresentamos os resultados obtidos no trabalho para as correntes contra o tempo, tanto para a amostra inteira bem como para as seções indicadas.

Os resultados inferidos pelo autor a respeito da distribuição de carga no vidro irradiado estão apresentados na figura*7 da página 62 . Chegou ele à conclusão de que haviam duas regiões de cargas diferentes: a negativa proveniente dos elétrons irradiados, com um máximo na profundidade de 0,4 cm, e a positiva, uma carga de compensação que aparecia como efeito do campo produzido pelas cargas negativas.

V.2 - Análise das medidas de corrente

Algumas das condições presentes no trabalho descrito acima não se emquadram nas que utilizamos no desenvolvimento do nosso trabalho. Porém o que queremos não é chegar a um resultado confiável, mas sim apresentar um método de análise que possa ser utilizado em situações semelhantes.

Muito provavelmente as cargas presentes na amostra não são livres mas devem estar presas nos traps. Isto a princípio invalidaria a nossa análise, que é feita tomando a carga como sendo livre. Isto porém é um fato que provavelmente vai acontecer em todos os estudos similares a este.

(*) Os números das figuras se referem ao trabalho experimental dadas a seguir.

A. Many e G. Rakavy[2] mostram que se o equilíbrio entre as cargas livres e as atrapadas for suficientemente rápido, comparado com os outros tempos característicos do sistema, teremos um caso que se aproxima do comportamento daquele de carga livre.

Vamos supor então que a carga ou seja livre ou se enquadre neste tipo de equilíbrio entre carga livre e carga atrapada descrito acima, e partir para a busca de resultados.

Outro fato que foge um pouco das nossas condições é o aumento da temperatura durante o processo. Isto faz com que a mobilidade dos portadores de carga não se mantenha constante. Rigidamente nosso método não engloba tais modificações. Porém ainda podemos chegar a algumas conclusões importantes.

Trabalhamos sempre com carga monopolar. A amostra porém, apresenta cargas dos dois tipos. Este sim é um problema que não poderíamos enfrentar se não houvessem medidas para seções da amostra. Vamos analisar apenas as seções em que temos a idéia da presença de um só tipo de carga. Não vai nos interessar portanto a corrente produzida pela amostra inteira. Estaremos interessados somente nas seguintes seções da amostra: figura* 5-III, 6-I, 6-II e 6-III, mostrado, na página 62 .

Na figura* 5-III temos a corrente produzida por uma seção de espessura igual a 0,55 cm em que uma das superfícies é a irradiada. Nessa seção provavelmente só existe carga negativa. A corrente obtida está realmente de acordo com a suposição de carga ne

---

(*) Os números das figuras se referem ao trabalho experimental dadas a seguir.

gativa. Escolhendo $x = 0$ na superfície irradiada (superfície superior na figura), a corrente obtida seria de uma distribuição com $\overline{X}(0) > \frac{d}{2}$, porque a carga é negativa.

A presença do pico na corrente é devida ao aumento da mobilidade dos portadores causado pelo aumento da temperatura. Como a corrente não sofre inversão pode-se pensar em uma distribuição crescente, ou até com um pico no interior do dielétrico. Esta última idéia parece satisfazer as duas observações o máximo de coloração em $x = 0,4$ cm e o fato de $\overline{X}(0) > \frac{d}{2}$. Podemos dizer então que a distribuição tem um pico nas proximidades de $x = 0,4$ cm. Tal observação está de acordo com aquela já inferida no próprio trabalho experimental (figura* 7).

As correntes mostradas na figura* 6 estão muito provavelmente ligadas a uma distribuição de carga positiva. Escolhendo $x=0$ na superfície superior, vemos que as correntes podem estar ligadas a uma distribuição com $\overline{X}(0) > \frac{d}{2}$, o que nos daria uma corrente positiva. O pico novamente está ligado à modificação da temperatura durante o processo.

A presença das inversões na corrente, para os tres casos, nos indica que não temos uma distribuição crescente, como foi sugerida pelo autor do trabalho (figura*7). Se o mecanismo principal de produção de corrente for o movimento de carga livre não podemos ter inversão se a distribuição for crescente. A variação da temperatura não influi neste caso pois não implica numa modificação da

---

(*) Os números das figuras se referem ao trabalho experimental dadas a seguir

posição média das cargas.

Como a corrente é inicialmente positiva e a seguir passa a negativa temos que a posição média das cargas passa de um valor $\overline{X} > \frac{d}{2}$ para $\overline{X} < \frac{d}{2}$.

Dois fatos interessantes podem ser observados: a diminuição do valor máximo da corrente com o aumento da espessura e o aumento do valor da corrente inversa com a diminuição da espessura.

Concluímos nós que se as seções contiverem apenas carga positiva, a distribuição deve ter um mínimo perto da superfície não irradiada, deve crescer rapidamente na direção da superfície não irradiada e mais lentamente na outra direção. Esquematicamente poderiamos pensar em algo parecido com a distribuição da figura 25 abaixo:

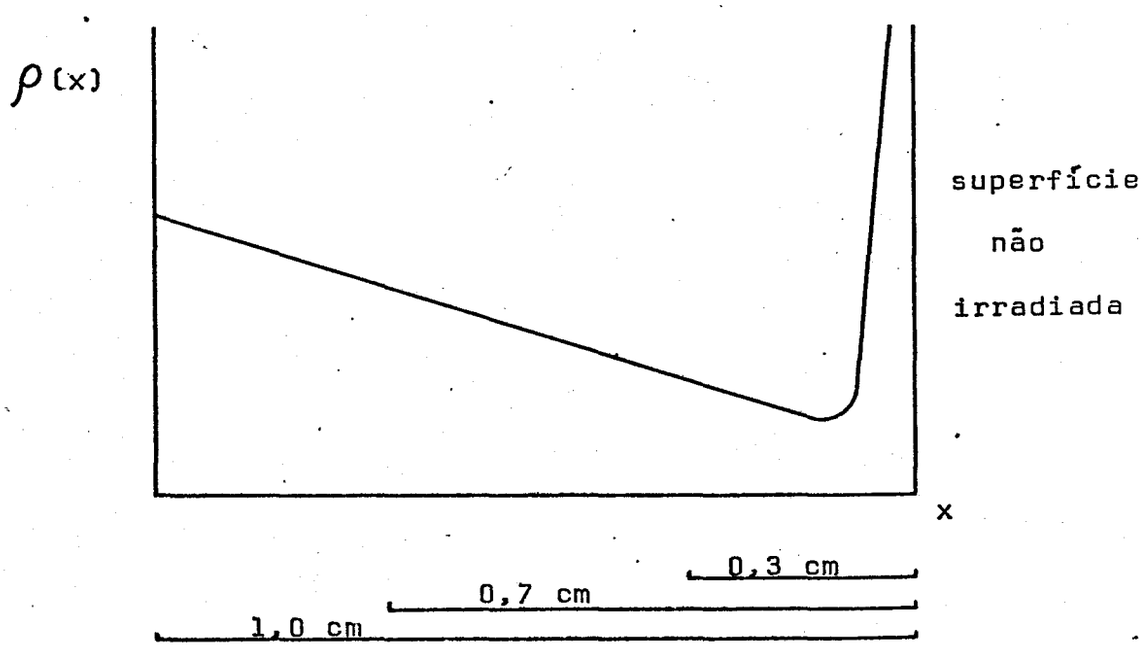


FIGURA 25

A distribuição não está com as proporções corretas porém nos dá uma boa idéia do esperado.

Não podemos inferir nada a respeito da região intermediária pois não temos outras medidas que possamos utilizar.

É isto o que podemos analisar utilizando os métodos um desenvolvemos. Não podemos ter uma idéia conclusiva mas temos uma maneira de proceder que pode ser utilizada em situações semelhantes.

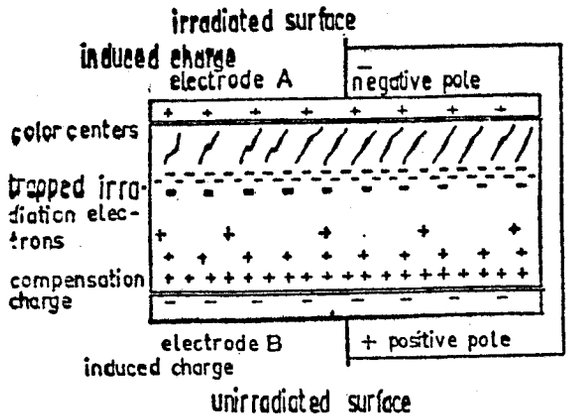


FIG. 2. Charges in sample and electrodes and polarity of currents.

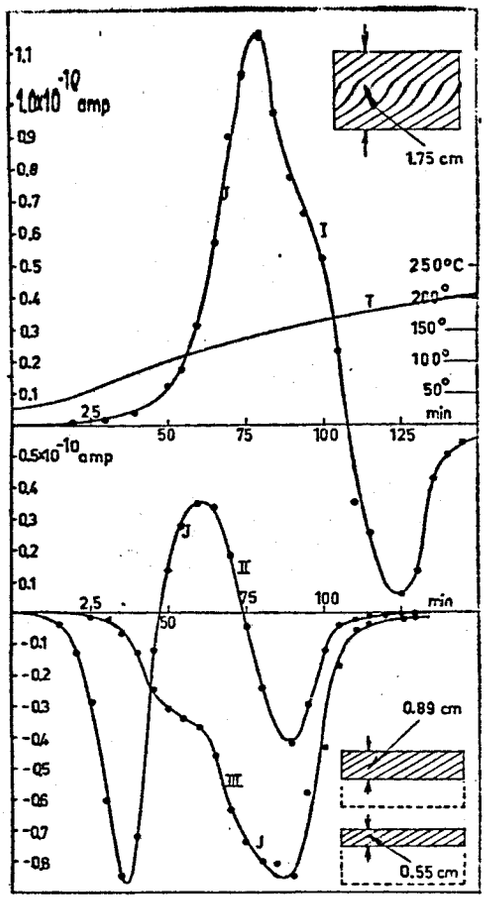


FIG. 5. Current J and temperature T during annealing of samples containing irradiated volume. Curve I—undivided sample. Curve II—section of sample of 0.89 cm thickness. Curve III—section of sample of 0.55 cm thickness. Insets show thickness and position of measured sections; irradiated surface at top.

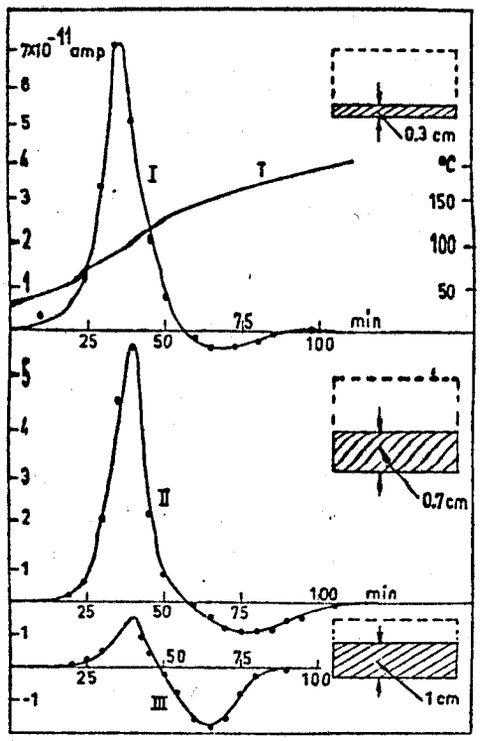


FIG. 6. Current J and temperature T during annealing of samples not containing irradiated volume. Curve I—section of sample of 0.3 cm thickness. Curve II—section of sample of 0.7 cm thickness. Curve III—section of sample of 1 cm thickness. Insets show thickness and position of measured sections; unirradiated surface at bottom.

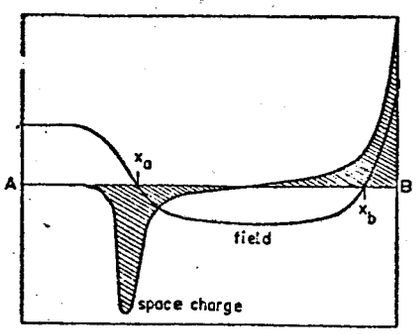


FIG. 7. Qualitative view of space charges and field in the irradiated dielectric.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) CAMARGO, P.C e FERREIRA, G.F.L - One-Carrier Free Space Charge Motion Under Applied Voltage: The General Solution Rev. Bras. Física, vol. 6, nº 2, 231-243, 1976.

(1a) CAMARGO, P.C - Estudo Teórico sobre Carga Espacial Monopolar Livre - Dissertação de Mestrado IFQSC/USP - São Carlos, 1975.

(2) MANY, A e RAKAVY, G. - Theory of Transient Space-charge Limited Currents in Solids in the Presence of Trapping. Phys. Rev., vol. 126, nº 4: 1980-88, 1962.

(3) WINTLE, H - Decay of Excess Charge in Dielectrics Having Shorted Electrodes, J. Appl. Phys. (12) 42: 4725-71, May 1971.

(4) TURNHOUT, J.V - Electrets M.M. Perlman, The Electrochemical So. Inc., 1975.

(5) FERREIRA, G.F.L. e GROSS, B. - Dissipation of charge Layers in Dielectrics. Rev. Bras. Física, vol. 2, nº 3: 205-213 , 1972.

(6) OLIVEIRA, L.N. e FERREIRA, G.F.L. - Exact Solutions for Space Charge Transport in Dielectrics with Non-Uniform Charge Distribution in Open Circuit. Journal of Electrostatics 2, 187-198, 1976.

(7) FERREIRA, G.F.L. e GROSS, B. - J. Noumetals, vol. 1, 129-131, 1973.

(8) ALMEIDA, L.E.C. e FERREIRA, G.F.L - One Carrier Free Space Charge Motion Under Applied Voltage. Rev. Bras. Física vol. 5, nº 3: 349-361, 1975.

(9) GROSS, B. - Irradiation Efects in Borosilicate Glass. Phys. Rev., vol. 107, nº 2: 368-373, july 1957.