UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

**DECAIMENTO DO POTENCIAL DE UM PLASMA NUMA
MATRIZ SÓLIDA EM GEOMETRIA PLANA**

Alcione Silva Fernandes

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física e Química de São Carlos, para
obtenção do título de mestre em Física
Aplicada.

Orientador: Dr. Guilherme F. Leal Ferreira

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

— 1 9 8 0 —

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

DECAIMENTO DO POTENCIAL DE UM PLASMA NUMA
MATRIZ SÓLIDA EM GEOMETRIA PLANA

ALCIONE SILVA FERNANDES

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física e Quí-
mica de São Carlos, para
obtenção do título de mes-
tre em Física Aplicada.

Orientador:

Dr. Guilherme F. Leal Ferreira

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
- 1980 -

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE de
ALCIONE SILVA FERNANDES

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNI
VERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 27 DE maio DE 1980.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira - Orientador
DFCM/IFQSC - USP

Dr. Renê Armando Moreno Alfaro
DFCM/IFQSC - USP

Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues
ICMSC - USP

Ao meu pai, Alziro

À memória de minha mãe, Alzira

À Nelma,

companheira em todos os momentos.

À Maria Luiza e

Maria Alice.

**Este trabalho contou com o apoio financeiro do Programa
PICD - CAPES e da Universidade Federal do Paraná.**

INDICE

AGRADECIMENTOS	I
APROVAÇÃO	III
RESUMO	IV
ABSTRACT	V
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E O MÉTODO DAS CARAC- TERÍSTICAS	1
I.1 - A formulação do problema	1
I.2 - O método das características	6
CAPÍTULO II - EMPREGO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS NA SO- LUÇÃO DO CASO GERAL: RECOMBINAÇÃO ENTRE OS PORTADORES POSITIVOS E NEGATIVOS	9
II.1 - Solução para um tempo menor que o tem <u>p</u> o de cruzamento	10
II.1.a - Região central de recombina- ção	10
II.1.b - Região de carga espacial ne- gativa	14
II.1.c - Região de carga espacial po- sitiva	19
II.2 - Solução para um tempo maior que o tem <u>p</u> o de cruzamento	22
II.2.a - Região central sem carga es- pacial	23
II.2.b - Região de carga espacial ne- gativa	24
II.2.c - Região de carga espacial po- sitiva	26

CAPÍTULO III - CÁLCULO DA DIFERENÇA DE POTENCIAL INSTANTÂNEA ENTRE OS ELETRODOS E DA CARGA RESIDUAL NOS ELETRODOS	29
III.1 - Cálculo da diferença de potencial instantânea $V(t)$ entre os eletrodos para um tempo menor que o tempo de cruzamento	29
III.2 - Cálculo da diferença de potencial instantânea $V(t)$ entre os eletrodos para um tempo maior que o tempo de cruzamento	37
III.3 - Cálculo da carga residual nos eletrodos	43
 CAPÍTULO IV - SOLUÇÕES PARA DOIS CASOS PARTICULARES DO PROBLEMA PROPOSTO: RELAÇÃO DE LANGEVIN E AUSÊNCIA DE RECOMBINAÇÃO ENTRE OS PORTADORES	 48
IV.1 - Solução para um caso particular: relação de Langevin	48
IV.1.1 - Tempo menor que o tempo de cruzamento	49
IV.1.1.a - Região central de recombinação	49
IV.1.1.b - Região de carga espacial negativa	50
IV.1.1.c - Região de carga espacial positiva	51
IV.1.2 - Tempo maior que o tempo de cruzamento	52
IV.1.2.a - Região central sem carga espacial	53

IV.1.2.b - Região de carga <u>es</u> pacial negativa	53
IV.1.2.c - Região de carga <u>es</u> pacial positiva	54
IV.1.3 - Carga residual nos eletrodos ..	57
IV.2 - Solução para um caso particular, au- sência de recombinação entre os por- tadores positivos e negativos	58
IV.2.1 - Tempo menor que o tempo de cruzamento	58
IV.2.1.a - Região central ele tricamente neutra.....	58
IV.2.1.b - Região de carga <u>es</u> pacial negativa	60
IV.2.1.c - Região de carga <u>es</u> pacial positiva	60
IV.2.2 - Tempo maior que o tempo de cruzamento	61
IV.2.2.a - Região central sem carga espacial	61
IV.2.2.b - Região de carga <u>es</u> pacial negativa	62
IV.2.2.c - Região de carga <u>es</u> pacial positiva	63
IV.2.3 - Carga residual nos eletrodos ..	66
CAPÍTULO V - ANÁLISE GRÁFICA DAS SOLUÇÕES OBTIDAS	68
APÊNDICE	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77

AGRADECIMENTOS

É com grande satisfação que agradeço a todas as pessoas que, de uma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho. De modo especial, agradeço

- ao Dr. Guilherme F.L. Ferreira, professor e orientador, pela orientação dedicada que me proporcionou, a par de grande amizade demonstrada;

- ao Dr. Bernard Gross e sua esposa Sra. Gertrudes Gross, pela confiança com que me distinguiram num momento crucial da realização deste trabalho;

- ao Dr. Luiz E. Carrano de Almeida, pelo incentivo constante e pela amizade;

- ao Prof. Marco Antonio S. Leite, colega e amigo, pelo otimismo encorajador que sempre me transmitiu;

- aos Profs. Cleide Roberto Alves e Jordão Mader Netto, do Departamento de Física da UFP, pelo companheirismo e boa vontade;

- aos Profs. Rene Moreno; Milton Campos; Hari Gupta; José Giacometti; Roberto Faria e Mariangela Figueiredo, do Laboratório de Eletretos, pelo cordial ambiente de trabalho proporcionado;

- à Srta. Marta Regina Bastos Pereira pela solicitude e presteza com que datilografou este trabalho;

- ao Paulo Roberto S. Beatrice responsável pelas figuras;

- aos colegas, demais professores e funcionários do
DFCM;

- a todos aqueles que, embora ausentes, sempre tiveram
uma palavra de apoio e estímulo.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o decaimento do potencial de um plasma, inicialmente distribuído de maneira uniforme num sólido dielétrico, submetido a um potencial inicial conhecido. A possibilidade de recombinação entre os portadores positivos e negativos constituintes do plasma é considerada.

Usando o método das características obtemos o potencial e a configuração espacial de portadores para qualquer instante bem como, a carga residual nos eletrodos ao final do processo.

Dois casos particulares são igualmente resolvidos: no primeiro, a mobilidade relativa dos portadores é relacionada ao coeficiente de recombinação entre eles através da relação de Langevin e, no segundo, considera-se que os portadores não se recombinaem.

No desenvolvimento da solução ao problema surge, também, uma considerável quantidade de informações à respeito da dinâmica dos portadores no interior do dielétrico.

ABSTRACT

In the present work we studied the decay of the potential of a plasma which is initially uniformly distributed in a solid dielectric and the potential is initially known. The possibility of recombination between the positive and negative charge carriers of the plasma is also considered.

Using the method of characteristics, we obtained the potential and space distribution of charge carriers for any time and also residual charge in the electrodes at end of the process.

Two particular cases are considered. In the first case, the relative mobility of charge carriers is related to their recombination coefficient through Langevin's relation and, in the second case, the recombination of charge carrier is absent.

In the development of the solution of the above problem, a considerable information about the dynamics of the charge carriers in the interior of the solid, is also obtained.

INTRODUÇÃO

No presente trabalho estuda-se o decaimento no potencial de uma mistura de cargas positivas e negativas (plasma) submetidas ao campo de um condensador plano carregado inicialmente a um dado potencial (circuito aberto, modo carga). Como se verá no desenvolvimento que segue, ele é suscetível de uma análise completa empregando-se o método das características⁶. Já o mesmo problema sob a condição de voltagem aplicada (modo corrente) constante é muito mais difícil, senão impossível, de tratamento analítico.

Problema similar foi abordado na referência 1. Além disso, na literatura podem ser encontrados trabalhos que se constituem casos particulares do estudado aqui. Por exemplo, o trabalho de von Hippel et al², que ilustra a formação de uma barreira de potencial junto a um eletródio, considera a mobilidade de um dos portadores nula. Isto, aliás, permitiu que o problema fosse tratado no modo corrente embora seja relativamente simples aplicá-lo ao modo carga.

A interpretação de Hughes³ de suas experiências em antaceno excitado por um poderoso pulso de radiação X - ele mediu o decaimento da corrente induzida - envolvendo a criação de portadores, condução, recombinação e atrapamento, a menos deste último processo não incluído em nossa análise, também se constitui um caso particular do nosso em que o campo no interior da amostra pode ser considerado o campo aplicado. Alás, não se aconselharia, nesse caso, o uso do resultado por nós deduzido.

Os materiais eletrocromicos - óxidos de tungstênio e molibdênio hidrogenados em proporção variável - apresentam naturalmente um plama formado por prótons e eletrons. No entanto, medidas até agora sô foram realizadas no modo corrente⁴.

Pelo que foi dito vê-se que não pudemos conferir ou aplicar os resultados obtidos à situações práticas. Mas não é impossível que isto possa ser feito no futuro desde que a situação contemplada apresenta aspectos comumente empregados. Talvêz, para complementá-la, fosse necessário incluir o processo de *trapping* de cargas o que, no entanto, complica consideravelmente o problema.

No desenvolvimento deste trabalho iniciamos, no Capítulo I, com a formulação do problema e um rápido vôo conceitual sobre o método das características.

No Capítulo II atacamos o problema na sua forma ampla , que chamamos caso geral, onde as mobilidades dos portadores e o coeficiente de recombinação entre eles são considerados quaisquer . Analisamos os vários aspectos do problema bem como, um sistema de equações para a obtenção da configuração de portadores no dielétrico para um dado instante, é conseguido.

O decaimento do potencial com o tempo, ainda no caso geral, é analisado com detalhes no Capítulo III que também apresenta uma equação que fornece a carga residual nos eletrodos ao final do processo como função dos vários parâmetros do problema.

Dois casos particulares do problema proposto são analisados no Capítulo IV: no primeiro, as mobilidades dos portadores estão relacionadas ao coeficiente de recombinação entre eles atra

vés da relação de Langevin; no segundo, a ausência de recombinação entre os portadores é considerada.

No Capítulo V ilustramos graficamente o decaimento do potencial com o tempo para diferentes valores dos parâmetros envolvidos nos capítulos anteriores. A configuração espacial de portadores no dielétrico para um dado instante e num caso particular, é apresentada.

Todas as integrações numéricas do problema foram realizadas pelo método de Euler-Cauchy de primeira ordem, em uma calculadora Hp-9820.

CAPÍTULO I

A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

I.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Os aspectos gerais do problema que procuraremos resolver são os seguintes: consideremos um dielétrico de espessura d , com simetria plana e ausência de *traps* colocado entre dois eletrodos desconectados (circuito aberto) e inicialmente descarregados. O dielétrico apresenta densidades espaciais de cargas uniformemente distribuídas em todo o seu volume, $+\rho_0$ e $-\rho_0$, de tal forma que esteja eletricamente neutro (veja Fig. 1).

Por questão de generalidade vamos supor que as cargas positivas e negativas possam se recombinar proporcionalmente ao produto de suas densidades, em cada ponto. Isto permite abordar problemas em que as cargas em consideração foram criadas instantaneamente, por exemplo, por um pulso interno de radiação.

Em $t = 0$ os eletrodos são instantaneamente carregados a uma diferença de potencial conhecida e posteriormente mantidos em circuito aberto. Em consequência, os portadores positivos da distribuição espacial migrarão para o catodo ($x = d$) e os portadores negativos para o anodo ($x = 0$). Procuraremos determinar:

- a) a configuração espacial de portadores num dado instante;
- b) o decaimento do potencial entre os eletrodos como função do tempo;
- c) a carga residual nos eletrodos ao final do processo.

As equações básicas que regem o problema são:

$$\epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial x'} = \rho'_+(x', t') - \rho'_-(x', t') \quad (\text{Eq. de Poisson}) \quad (\text{I.1})$$

$$\pm \frac{\partial J'_{C\pm}}{\partial x'} + \frac{\partial \rho'_{\pm}(x', t')}{\partial t'} = -\alpha' \rho'_{\pm}(x', t') \quad (\text{Eq. da continuidade}) \quad (\text{I.2})$$

$$J'_{C\pm}(x', t') = \mu_{\pm} \rho'_{\pm}(x', t') E'(x', t') \quad (\text{dens. cor. de condução}) \quad (\text{I.3})$$

$$0 = [\mu_+ \rho'_+(x', t') + \mu_- \rho'_-(x', t')] E'(x', t') + \epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'} \quad (\text{I.4})$$

(dens. corrente total em circ. aberto)

A equação (I.4) é obtida derivando-se parcialmente no tempo a eq. de Poisson, usando-se a equação de continuidade e integrando-se em x' , com a densidade de corrente total nula em circuito aberto.

A diferença de potencial entre os eletrodos é dada por

$$V(t) = \int_0^d E'(x', t') dx' \quad (\text{I.5})$$

Nas equações acima temos que:

x' - coordenada espacial;

t' - tempo;

$E'(x', t')$ - campo elétrico na posição x' e no instante t' ;

$\rho'_+(x', t')$ - densidade espacial de portadores positivos na posição x' e no instante t' ;

$\rho'_-(x', t')$ - densidade espacial de portadores negativos na posição x' e no instante t' ;

μ_+ - mobilidade dos portadores positivos;

μ_- - mobilidade dos portadores negativos;

ϵ - constante dielétrica do dielétrico;

α' - coeficiente de recombinação entre portadores positivos e negativos.

Podemos liberar o sistema de equações (I.1) a (I.5) de alguns parâmetros, introduzindo o seguinte conjunto de unidades reduzidas adimensionais:

$$x = \frac{x'}{d} \quad , \quad E = \frac{\epsilon}{\rho_0 d} E' \quad , \quad \rho_+ = \frac{1}{\rho_0} \rho'_+ \quad , \quad \rho_- = \frac{1}{\rho_0} \rho'_- \quad , \quad t = \frac{\mu_+ \rho_0}{\epsilon} t'$$

$$V = \frac{\epsilon}{\rho_0 d^2} V' \quad , \quad \kappa = \frac{\mu_-}{\mu_+} \quad , \quad \alpha = \frac{\epsilon}{\mu_+} \alpha' \quad , \quad \sigma = \frac{1}{\rho_0 d} \sigma'$$

onde $\pm \sigma'(t)$ é a densidade superficial de cargas existentes nos eletrodos no instante t .

As equações básicas em unidades reduzidas, tornam-se:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \rho_+(x,t) - \rho_-(x,t) \quad (\text{Eq. de Poisson}) \quad (I.6)$$

$$\pm \frac{\partial J_{C_{\pm}}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{\pm}(x,t)}{\partial t} = -\alpha \rho_+(x,t) \rho_-(x,t) \quad (\text{Eq. da continuidade}) \quad (I.7)$$

$$J_{C_+}(x,t) = \rho_+(x,t) E(x,t) \quad (\text{Dens. corrente condução p/ portadores positivos}) \quad (I.8)$$

$$J_{C_-}(x,t) = \kappa \rho_-(x,t) E(x,t) \quad (\text{Dens. corrente condução p/ portadores negativos}) \quad (I.9)$$

$$0 = [\rho_+(x,t) + \kappa \rho_-(x,t)] E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad , \quad (\text{Dens. corrente total em circ. aberto}) \quad (I.10)$$

e a diferença de potencial instantânea entre os eletrodos

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t) dx \quad . \quad (I.11)$$

Aplicada a diferença de potencial inicial $V_0 = \sigma_0$ entre os eletrodos, analisemos alguns aspectos do movimento dos portadores em direção aos respectivos eletrodos. Para isso, chamemos $S^+(t)$ à posição instantânea do plano trazeiro de portadores positivos, e $S^-(t)$ à posição instantânea do plano trazeiro de portadores negativos (veja Fig. 2).

O plano $S^+(t)$, em seu movimento para a direita, deixa atrás de si uma região de carga espacial negativa que se estende até o anodo, enquanto que o movimento do plano $S^-(t)$ para a esquerda gera uma região de carga espacial positiva até o catodo.

Os movimentos destes planos trazeiros poderão apresentar diferentes situações dependendo do valor do potencial inicial V_0 entre os eletrodos, e do coeficiente de recombinação α . Assim, eles poderão ou não cruzar durante o processo e cruzando, atingirem os respectivos eletrodos no mesmo instante (se $\kappa=1$), ou em instantes diferentes (se $\kappa \neq 1$).

Desta forma, algumas previsões podem ser feitas com relação aos movimentos dos planos trazeiros, ou seja (suponhamos, para facilidade de raciocínio, que não haja recombinação entre os portadores, isto é, $\alpha = 0$):

$$\underline{\sigma_0 < 1} :$$

Neste caso, em que $V_0 < 1$, esperamos que os planos trazeiros não cruzem, mesmo para tempos suficientemente longos. Isto

deve-se ao fato de que, à medida que os portadores dianteiros das distribuições chegam aos eletrodos aí sendo neutralizados, diminui o campo elétrico no interior do dielétrico fazendo com que os portadores mais internos se desloquem mais e mais lentamente com o decorrer do tempo.

Além disso, como as quantidades de cargas depositadas nos eletrodos são menores que as correspondentes quantidades iniciais de cargas livres no dielétrico ($\sigma_0 < \rho_0 = 1$), podemos esperar também que a carga total em cada eletrodo seja totalmente neutralizada pelos portadores da distribuição que alcancem este eletrodo. Com isto, a diferença de potencial entre os eletrodos, que inicialmente era $V_0 = \sigma_0$, tenderá a um valor final nulo.

A configuração a que tendem as distribuições de portadores é mostrada na Fig.2-a, onde supôs-se maior mobilidade para os portadores negativos ($\kappa > 1$).

$\sigma_0 > 1$:

Neste caso, o campo elétrico no interior do dielétrico é suficiente para causar o cruzamento dos planos trazeiros. Isto ocorrerá no instante $t = t_c$ (instante de cruzamento), e na posição $S^+(t_c) = S^-(t_c)$ interior ao dielétrico.

Para $t > t_c$ os planos trazeiros prosseguem seus movimentos em direção aos eletrodos correspondentes, deixando entre eles uma região livre de portadores. Dependendo do valor da mobilidade relativa κ , um dos planos poderá atingir o respectivo eletrodo a que se dirige num tempo maior ou menor que o outro.

Fica evidente que a carga total em cada um dos eletrodos, inicialmente $\pm\sigma_0$, não será totalmente neutralizada, o que ocasionará uma diferença de potencial maior que zero entre os eletrodos ao final do processo.

A Figura 3, mostra a configuração espacial dos portadores para $t > t_c$, mas num instante em que os planos trazeiros ainda não atingiram os eletrodos; aqui é suposto mobilidades iguais para os portadores positivos e negativos ($\kappa = 1$).

Nota-se que se a recombinação entre os portadores for considerada ($\alpha > 0$) parte da carga inicialmente livre no dielétrico sofrerá recombinação até o instante $t = t_c$, quando os planos trazeiros cruzam; desta forma a quantidade total de portadores que alcançará os eletrodos será menor que a correspondente ao caso em que inexiste recombinação ($\alpha = 0$). Assim, para $\alpha > 0$ teremos uma maior quantidade de carga residual nos eletrodos ao final do processo e, conseqüentemente, uma maior diferença de potencial final entre eles.

Na seção III.3 voltamos a discutir estes aspectos com detalhes matemáticos.

I.II - O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

A solução do problema proposto será obtida com o emprego do método das características, usado inicialmente por Many-Rakavy⁵ na resolução de problema de carga espacial.

A utilização de tal método faz surgir o conceito de linha de corrente que expressa a posição dos portadores no espaço como função do tempo.

O movimento dos portadores positivos em tais linhas de corrente e em unidades reduzidas, é dado por

$$\frac{dx^+(t)}{dt} = E[x^+(t), t] \quad (\text{I.12})$$

onde $x^+(t)$ expressa a posição dos portadores positivos que no instante t estão sujeitos ao campo elétrico $E[x^+(t), t]$. Assim, a velocidade dos portadores positivos, em cada instante, é igual ao campo elétrico a que estão submetidos.

Para os portadores negativos, temos:

$$\frac{dx^-(t)}{dt} = -\kappa E[x^-(t), t] \quad (\text{I.13})$$

A aceleração dos portadores positivos ao longo de uma linha de corrente, é obtida de

$$\frac{d^2x^+(t)}{dt^2} = \frac{\partial E}{\partial x^+} \frac{dx^+}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t},$$

que com emprêgo de (I.6), (I.10) e (I.12), resulta:

$$\frac{d^2x^+(t)}{dt^2} = (1 + \kappa) \rho_-(x, t) \frac{dx^+(t)}{dt} \quad (\text{I.14})$$

Analogamente para os portadores negativos:

$$\frac{d^2x^-(t)}{dt^2} = -(1 + \kappa) \rho_+(x, t) \frac{dx^-(t)}{dt} \quad (\text{I.15})$$

A variação da densidade espacial de portadores positivos ao longo da linha de corrente $x^+(t)$, é obtida de:

$$\frac{d\rho^+}{dt} = \frac{\partial \rho^+}{\partial x^+} \frac{dx^+}{dt} + \frac{\partial \rho^+}{\partial t} = E \frac{\partial \rho^+}{\partial x^+} + \frac{\partial \rho^+}{\partial t} ;$$

das equações (I.7), (I.8) e (I.6), temos:

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} = -\rho_+ \frac{\partial E}{\partial x^+} - E \frac{\partial \rho_+}{\partial x^+} - \alpha \rho_+ \rho_- = -\rho_+ (\rho_+ - \rho_-) - E \frac{\partial \rho_+}{\partial x^+} - \alpha \rho_+ \rho_-$$

e portanto,

$$\frac{d\rho^+}{dt} = -\rho_+ (\rho_+ - \rho_-) - \alpha \rho_+ \rho_- \quad . \quad (I.16)$$

A integração da eq. (I.16) fornece a densidade $\rho^+(t)$ na posição $x^+(t)$ que pode ser obtida da integração da eq. (I.14).

De maneira análoga obtemos para os portadores negativos,

$$\frac{d\rho_-}{dt} = \kappa \rho_- (\rho_+ - \rho_-) - \alpha \rho_+ \rho_- \quad (I.17)$$

que integrada fornece a densidade $\rho^-(t)$ na posição $x^-(t)$ obtida da integração de (I.15).

No Capítulo II procuraremos obter a solução explícita do problema proposto.

CAPÍTULO II

EMPREGO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS NA SOLUÇÃO
DO CASO GERAL: RECOMBINAÇÃO ENTRE OS PORTADORES
POSITIVOS E NEGATIVOS

Neste capítulo vamos aplicar o método das características no desenvolvimento da solução geral do problema proposto, isto é, quando há recombinação entre os portadores positivos e negativos. Como suposto anteriormente, esta recombinação entre portadores ocorre, em cada ponto, proporcionalmente ao produto das densidades dos portadores positivos e negativos neste ponto.

Com o objetivo de maior clareza, vamos separar a solução em dois casos relativos ao instante de cruzamento ($t = t_c$) dos planos trazeiros de cargas $s^+(t)$ e $s^-(t)$. Teremos:

II.1 - $0 < t < t_c$: TEMPO MENOR QUE O TEMPO DE CRUZAMENTO, ISTO É, OS PLANOS TRAZEIROS NÃO CRUZARAM

II.2 - $t > t_c$: TEMPO MAIOR QUE O TEMPO DE CRUZAMENTO, ISTO É, OS PLANOS TRAZEIROS JÁ CRUZARAM

Note-se que, se o potencial inicialmente aplicado entre os eletrodos V_0 , para um dado α , for tal que os planos trazeiros nunca cruzam, a solução será dada integralmente pelo desenvolvimento do caso II.1. Se, porém, V_0 tem um valor que ocasiona o cruzamento dos planos trazeiros, para um dado α , então a solução com

pleta será dada pelos desenvolvimentos de II.1 e II.2.

Passemos à solução de cada caso separadamente.

II.1 - SOLUÇÃO PARA UM TEMPO MENOR QUE O TEMPO DE CRUZAMENTO

Para $0 < t < t_c$ o dielétrico apresenta três regiões distintas de carga espacial, a saber (FIG. 2):

- (a) região central de recombinação, $s^+(t) \leq x \leq s^-(t)$;
- (b) região de carga espacial negativa, $0 < x < s^+(t)$;
- (c) região de carga espacial positiva, $s^-(t) < x < 1$.

Analisemos cada uma destas regiões individualmente.

II.1.a - Região central de recombinação

Esta região é limitada no espaço por $s^+(t) \leq x \leq s^-(t)$ e no tempo por $0 \leq t < t_c$. Aqui, ocorre a recombinação de portadores, se $\alpha > 0$. A sua carga total é nula em qualquer instante, e as densidades de portadores positivos e negativos dependem do tempo mas não da posição (distribuição uniforme de portadores em qualquer instante).

Devido à recombinação as densidades de portadores decaem com o tempo desde os valores iniciais ± 1 até os valores $\pm \rho_{\pm}(t) = \pm \rho(t)$ no instante t considerado.

Esta região deixará de existir no instante $t = t_c$, se ocorrer o cruzamento dos planos trazeiros de cargas.

O sistema de equações (I.6) a (I.10), para esta região, escreve-se:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{(Equação de Poisson)} \quad \text{(II.1)}$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha\rho^2(t) \quad (\text{Equação da continuidade}) \quad (\text{II.2})$$

$$J_{c+}(t) = \rho(t)E(x,t) \quad (\text{Densidade de corrente de condução p/portadores positivos}) \quad (\text{II.3})$$

$$J_{c-}(t) = \kappa \rho(t)E(x,t) \quad (\text{Densidade do corrente de cond. p/ portadores negativos}) \quad (\text{II.4})$$

$$0 = (1 + \kappa) \rho(t)E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

(Densidade de corrente total em circ. aberto)

A equação da continuidade (II.2) é obtida fazendo-se o termo $\partial J_{c\pm} / \partial x = 0$ na equação (I.7), já que nesta região as correntes de condução independem da posição. Também com $\rho_{\pm} = \rho$ em (I.16) obtemos (II.2).

A densidade de portadores, positivos ou negativos, é obtida da integração da eq. (II.2):

$$\rho(t) = \frac{1}{1 + \alpha t} \quad (\text{II.6})$$

A eq. (II.1) nos mostra que o campo elétrico depende apenas do tempo; substituindo eq. (II.6) na eq. (II.5) e integrando:

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E} = -(1+\kappa) \int_0^t \frac{dt}{1+\alpha t} ,$$

que resulta

$$E(t) = E_0 (1 + \alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{II.7})$$

onde $E_0 = V_0$ é o campo elétrico aplicado em $t=0$.

O movimento do plano trazeiro de cargas positivas é dado, segundo o método das características, por:

$$\frac{ds^+(t)}{dt} = E[x(t), t] , \quad (\text{II.8})$$

e integrando com o campo elétrico de (II.7),

$$\int_0^{s^+(t)} ds^+(t) = E_0 \int_0^t (1 + \alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} dt ,$$

que resulta

$$s^+(t) = \frac{E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1 + \alpha t)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] . \quad (\text{II.9})$$

Para o plano trazeiro negativo, temos

$$\frac{ds^-(t)}{dt} = -\kappa E[x(t), t] ,$$

e a integração

$$\int_1^{s^-(t)} ds^-(t) = -\kappa E_0 \int_0^t (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} dt ,$$

que resulta

$$s^-(t) = 1 - \frac{\kappa E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1+\alpha t)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] . \quad (\text{II.10})$$

As equações (II.9) e (II.10) nos fornecem as posições instantâneas dos planos trazeiros de cargas para qualquer instante do intervalo $0 \leq t \leq t_c$.

No instante de cruzamento, $t = t_c$, os planos trazeiros de cargas ocupam a mesma posição, ou seja

$$s^+(t_c) = s^-(t_c) ,$$

que com as equações (II.9) e (II.10), fornece:

$$t_c = \frac{1}{\alpha} \left\{ \exp \left[- \frac{\alpha}{1+\kappa-\alpha} \ln \left(1 - \frac{1+\kappa-\alpha}{(1+\kappa)E_0} \right) \right] - 1 \right\} , \quad (\text{II.11})$$

e, impomos a condição de que

$$\exp \left[- \frac{\alpha}{1+\kappa-\alpha} \ln \left(1 - \frac{1+\kappa-\alpha}{(1+\kappa)E_0} \right) \right] > 1 , \quad (\text{II.12})$$

o que assegura a existência do cruzamento, isto é, $t_c > 0$. A condição (II.12) é verificada para:

$$\text{a) } 1+\kappa > \alpha \quad \text{e} \quad \frac{1+\kappa-\alpha}{(1+\kappa)E_0} < 1 , \quad \text{ou}$$

$$\text{b) } 1+\kappa < \alpha$$

A condição (b) verifica de imediato a desigualdade (II.12) para qualquer valor finito de $E_0 > 0$. Das condições (a) temos que

$$E_0 > 1 - \frac{\alpha}{1+\kappa} \quad (II.13)$$

Assim, se o campo elétrico inicialmente aplicado entre os eletrodos $E_0 = V_0$ verificar a relação (II.13), haverá cruzamento dos planos trazeiros no instante $t = t_c > 0$, dado pela equação (II.11).

II.1.b - Região de carga espacial negativa

Esta região constituída de portadores negativos ($\rho_+ = 0$) é limitada no espaço por $0 < x < s^+(t)$ para $0 < t \leq t_c$. Os portadores negativos que a constituem são deslocados para o anodo, por efeito de campo elétrico, onde alguns ou todos serão neutralizados.

O sistema de equações básicas (I.6) a (I.10), escreve-se:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\rho_-(x,t) \quad (\text{Equação de Poisson}) \quad (II.14)$$

$$-\frac{\partial J_{c-}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho_-(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{Eq. da continuidade}) \quad (II.15)$$

$$J_{c+}(x,t) = 0 \quad (\text{Dens. de corrente p/port. positivos}) \quad (II.16)$$

$$J_{c-}(x,t) = \kappa \rho_-(x,t) E(x,t) \quad (\text{Dens. de cor. p/port. negativos}) \quad (II.17)$$

$$0 = \kappa \rho_-(x,t) E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad (\text{Dens. de corrente total}) \quad (II.18)$$

Vamos designar por *tempo de emissão* (t_E) para um conjunto de portadores negativos desta região, ao instante em que a posição desse conjunto de portadores coincide com o plano trazeiro positivo $s^+(t_E)$. Concentremo-nos agora, no movimento do conjunto de portadores negativos, em suas respectivas linhas de corrente, que cruzaram o plano $s^+(t)$ no instante $t = t_E$; tudo se passa como se as linhas de correntes desses portadores *nascessem* em $t = t_E$, sendo $x^-(t_E) = s^+(t_E)$ as suas posições iniciais. Para reforçar a imagem deste quadro imaginemos que no instante $t = t_E$, quando o plano $s^+(t)$ coincide com um determinado plano de portadores negativos, esses portadores negativos são *emitidos* da posição $s^+(t_E)$ e evoluem, com o passar do tempo, em direção ao anodo.

Desta maneira, a cada posição ocupada pelo plano trazeiro positivo $s^+(t)$, teremos um conjunto de portadores negativos sendo *emitidos*, com um tempo característico de emissão $t = t_E$. Variando t_E continuamente no intervalo $0 \leq t_E \leq t$, onde t designa o instante em que o plano trazeiro se encontra na posição $s^+(t)$, obtemos todas as posições iniciais das diferentes linhas de corrente, $x^-(t_E)$. É claro que t_E está limitado no intervalo $0 \leq t_E \leq t_C$.

Segundo o método das características, a equação para o movimento dos portadores negativos ao longo das linhas de corrente, é de (I.13),

$$\frac{dx^-(t, t_E)}{dt} = -\kappa E[x^-(t_E), t_E] \quad (\text{II.19})$$

onde $x^-(t, t_E)$ é a posição instantânea dos portadores nas linhas de corrente caracterizadas pela posição inicial $x^-(t_E)$, κ a mobi-

lidade relativa dos portadores e $E[x^-(t_E), t_E]$ o campo elétrico sobre os portadores no instante de emissão $t = t_E$.

Justifica-se que os portadores evoluam na posição e no tempo, em suas respectivas linhas de corrente, sob a ação de um campo constante e igual ao campo no respectivo instante de emissão, analisando-se as variações do campo elétrico numa particular linha de corrente caracterizada por sua posição inicial $x^-(t_E)$, num instante genérico $t > t_E$. Usando-se (II.14), (II.18) e (II.19) tem-se:

variação total com o tempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x^-} \frac{dx^-}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = \kappa \rho^- E - \kappa \rho^- E = 0$$

variação total com a posição

$$\frac{dE}{dx^-} = \frac{\partial E}{\partial x^-} + \frac{\partial E}{\partial t} \frac{dt}{dx^-} = -\rho^- + \rho^- = 0 \quad ,$$

mostrando assim, que o campo elétrico permanece constante sobre o conjunto de portadores emitidos no mesmo instante. Este campo é obtido, fazendo-se $t = t_E$ na eq. (II.7):

$$E[x^-(t_E), t_E] = E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad . \quad (II.20)$$

Levando (II.20) em (II.19) e integrando:

$$\int_{s^+(t_E)}^{x^-(t, t_E)} dx^-(t) = -\kappa E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} \int_{t_E}^t dt \quad ,$$

onde $x^-(t_E) = s^+(t_E)$ é a posição inicial das linhas de corrente e dada por (II.10) com $t = t_E$; assim, a integração resulta:

$$x^-(t, t_E) = \frac{E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1+\alpha t_E)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] - \kappa E_0 (1+\alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t-t_E) \quad (\text{II.21})$$

que é a equação das linhas de corrente para os portadores emitidos no instante $t = t_E$.

A densidade espacial de portadores na linha de corrente caracterizada pela posição inicial $x^-(t_E)$, obtém da integração da equação (I.17) com $\rho_+ = 0$, ou seja

$$\int_{\rho_-(t_E)}^{\rho_-(t)} \frac{d\rho_-}{\rho_-^2} = -\kappa \int_{t_E}^t dt, \quad ,$$

que resulta:

$$\rho_-(t, t_E) = \frac{\rho_-(t_E)}{1 + \kappa \rho_-(t_E) (t-t_E)} \quad (\text{II.22})$$

onde $\rho_-(t_E)$ é a densidade de portadores na posição inicial da linha de corrente considerada, e obtida da eq. (II.6) com $t = t_E$:

$$\rho_-(t_E) = \frac{1}{1 + \alpha t_E} \quad (\text{II.23})$$

Procuremos agora, para um dado instante T , $0 < T < t_c$, a configuração de portadores negativos como função da posição, nesta região de carga espacial negativa. Como vimos, a eq. (II.22),

com o auxílio da (II.23), nos dá a densidade de portadores no instante t . ao longo da linha de corrente caracterizada pela posição inicial $x^-(t_E)$; podemos assim, fixando $t = T$ e t_E , resolvermos simultaneamente (II.22) e (II.21) para encontrar a densidade de portadores $\rho^-(T, t_E)$ na posição $x^-(T, t_E)$; percorrendo todos os valores de t_E dentro dos limites permitidos para o instante T , obteremos a configuração espacial de portadores neste instante. Vejamos estes limites:

- o limite superior de t_E será dado por $t_E = T$, que caracteriza o instante de emissão do último conjunto de portadores emitidos no intervalo $0 < t \leq T$;
- o limite inferior de t_E , t_E' , corresponderá ao tempo de emissão do conjunto de portadores que no instante T estão se neutralizando no anodo, ou seja, a solução da equação

$$x^-(t, t_E') = 0, \quad \text{com } t = T, \quad (II.24)$$

ou, de (II.21):

$$\frac{1}{1+\kappa-\alpha} = \frac{1}{1+\kappa-\alpha} (1+t_E')^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} + \kappa(1+t_E')^{-(1+\kappa)/\alpha} (t-t_E') ;$$

para resolvermos t_E' como função de t , consideremos $t_E' = t_E'(t)$ e derivemos a equação anterior relativamente a t , para obter:

$$\frac{dt_E'}{dt} = \frac{\kappa}{(1+\kappa) \left[1 + \kappa \left(\frac{t-t_E'}{1+\alpha t_E'} \right) \right]} \quad (II.25)$$

A integração numérica desta equação, com t_E' variando de 0 a t_E' e

t variando de 0 a T, nos dará o valor $t_E = t'_E$ da eq. (II.24)

II.1.c - Região de carga espacial positiva

Esta região é limitada no espaço por $s^-(t) < x < 1$ para $0 < t \leq t_c$; aqui a densidade de portadores negativos é nula e os portadores positivos são deslocados para o catodo por efeito de campo elétrico, onde, alguns ou todos serão neutralizados.

O sistema de equações (I.6) a (I.10) para essa região, escreve-se:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \rho_+(x,t) \quad (\text{Eq. de Poisson}) \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial J_{c+}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho_+(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{Eq. da continuidade}) \quad (\text{II.27})$$

$$J_{c+}(x,t) = \rho_+(x,t)E(x,t) \quad (\text{dens. corrente de cond. p/portadores positivos}) \quad (\text{II.28})$$

$$J_{c-}(x,t) = 0 \quad (\text{dens. corrente de cond. p/port. negativos}) \quad (\text{II.29})$$

$$0 = \rho^+(x,t)E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad (\text{corrente total em circ. aberto}) \quad (\text{II.30})$$

O procedimento a ser usado para esta região será análogo ao já empregado para a região negativa; assim, o movimento de portadores positivos numa linha de corrente nesta região é dado por:

$$\frac{dx^+(t, t_E)}{dt} = E[x^+(t_E), t_E] \quad (\text{II.31})$$

onde $x^+(t, t_E)$ é a posição instantanea dos portadores nas linhas de corrente caracterizadas pelas posições iniciais $x^+(t_E) = s^-(t_E)$; $E[x^+(t_E), t_E]$ é o campo elétrico sobre os portadores no instante de emissão $t = t_E$ e dado por (II.7) com $t = t_E$:

$$E[x^+(t_E), t_E] = E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{II.32})$$

Integrando (II.31) com o emprego de (II.32):

$$\int_{s^-(t_E)}^{x^+(t, t_E)} dx^+(t) = E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} \int_{t_E}^t dt \quad ,$$

ou

$$x^+(t, t_E) = s^-(t_E) + E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t - t_E) \quad ,$$

onde $s^-(t_E)$ é obtida de (II.10) com $t = t_E$:

$$s^-(t_E) = 1 - \frac{\kappa E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] \quad , \quad (\text{II.33})$$

que substituído na equação anterior resulta:

$$x^+(t, t_E) = 1 - \frac{\kappa E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] + E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t - t_E) \quad (\text{II.34})$$

que é a equação das linhas de corrente para os portadores caraterizados pelos

tempos de emissão $t = t_E$.

A densidade espacial de portadores negativos nestas linhas de corrente, é dada pela integração da eq.(I.16) com $\rho_- = 0$, que resulta:

$$\rho_+(t, t_E) = \frac{\rho_+(t_E)}{1 + \rho_+(t_E)(t - t_E)} \quad , \quad (II.35)$$

onde $\rho_+(t_E)$ é a densidade de portadores na posição inicial $x^-(t_E)$ da linha de corrente considerada, e no instante de emissão $t = t_E$; assim, de (II.6), com $t = t_E$:

$$\rho_+(t_E) = \frac{1}{1 + \alpha t_E} \quad . \quad (II.36)$$

A configuração espacial de portadores positivos para um dado instante $t = T$, $0 \leq T \leq t_c$, é obtida da resolução simultanea das eqs. (II.34) e (II.35) para um particular conjunto de linhas de corrente caracterizadas pela posição inicial $x^+(t_E) = s^-(t_E)$. Variando-se t_E dentro dos limites permitidos no instante T , encontraremos a configuração espacial de portadores nesta região para $t = T$. Estes limites são:

- o limite superior de t_E é dado por $t_E = T$, que caracteriza o instante de emissão do último conjunto de portadores emitidos no instante $t = T$;
- o limite inferior de t_E , t_E'' , corresponderá ao tempo de emissão do conjunto de portadores que no instante T está se neutralizando no anodo, ou seja, a solução da equação

$$x^+(t, t_E'') = 1 \quad , \quad \text{com } t = T \quad , \quad (II.37)$$

e, substituindo (II.33)

$$1 = 1 - \frac{\kappa E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1+\alpha t_E'')^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} + E_0 (1+\alpha t_E'')^{-(1+\kappa)/\alpha} (t-t_E'') \right],$$

ou

$$\frac{\kappa}{1+\kappa-\alpha} = \frac{\kappa}{1+\kappa-\alpha} (1+\alpha t_E'')^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} + (1+\alpha t_E'')^{-(1+\kappa)/\alpha} (t-t_E'') ;$$

para resolvermos t_E'' como função de t consideremos $t_E'' = t_E''(t)$ e derivemos a equação anterior relativamente a t , para obter:

$$\frac{dt_E''}{dt} = \frac{1}{(1+\kappa) \left(1 + \frac{t-t_E''}{1+\alpha t_E''} \right)} \quad . \quad (II.38)$$

A integração numérica desta equação, com t_E'' variando de 0 a t_E'' e t variando de 0 a T nos dará o valor $t_E = t_E''$ requerido pela equação (II.37).

II.2 - SOLUÇÃO PARA UM TEMPO MAIOR QUE O TEMPO DE CRUZAMENTO

Pela análise da equação (II.11) concluímos que, se o potencial inicialmente aplicado entre os eletrodos $V_0 = E_0$, verificar a relação (II.13),

$$E_0 > 1 - \frac{\alpha}{1+\kappa} \quad , \quad (II.13)$$

ocorrerá o cruzamento dos planos trazeiros de cargas.

Desta forma, se (II.13) for verificada, para $t > t_c$ teremos, novamente, três regiões distintas no dielétrico (veja Fig. 3):

- (a) região central sem carga espacial, $s^-(t) < x < s^+(t)$;
- (b) região de carga espacial negativa, $0 < x \leq s^-(t)$;
- (c) região de carga espacial positiva, $s^+(t) \leq x < 1$.

A principal mudança na configuração das cargas espaciais em relação ao caso em que $t < t_c$, é a substituição da região central de recombinação por uma região sem carga espacial livre, mas também limitada pelos planos trazeiros.

Esta região aumenta a sua extensão com a evolução do tempo e compreenderá todo o dielétrico ($0 < x < 1$) após os dois planos trazeiros atingirem os respectivos eletrodos. A partir deste instante, em que não há mais portadores livres no dielétrico, haverá uma diferença de potencial estacionária entre os eletrodos, cujo valor dependerá da carga residual que permanecer nos eletrodos sem neutralização, ou seja $(\sigma_0 - 1)$.

Analisemos cada uma das regiões do dielétrico separadamente.

II.2.a - Região central sem carga espacial

As equações para esta região, são:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{Eq. de Poisson}) \quad (\text{II.39})$$

$$J_{C_{\pm}}(x,t) = 0 \quad (\text{Dens. de corrente de condução}) \quad (\text{II.40})$$

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{corrente de deslocamento}) \quad (\text{II.41})$$

O campo elétrico é constante nesta região, como mostraram as equações (II.39) e (II.41), ele é, justamente, o campo que

aparece no instante de cruzamento dos planos trazeiros e, portanto, dado pela equação (II.7) com $t = t_c$:

$$E(t_c) = E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad , \quad (II.42)$$

com t_c dado pela equação (II.11).

II.2.b - Região de carga espacial negativa

Chamemos de t^- o tempo de transito do plano $s^-(t)$ que corresponde ao instante em que $s^-(t) = 0$. Assim, para $t_c < t < t^-$ esta região está limitada por $0 < x \leq s^-(t)$, e para $t \geq t^-$ ela desaparece.

As equações básicas para esta região são as mesmas que compõem o sistema de equações (II.14) a (II.18).

A equação para as linhas de corrente é dada por (II.21).

O movimento do plano trazeiro $s^-(t)$, como função do tempo de cruzamento t_c , e para $t_c \leq t \leq t^-$, é obtido de

$$\frac{ds^-(t)}{dt} = -\kappa E(t_c) \quad ,$$

onde $E(t_c)$ é o campo constante que atua sobre o plano trazeiro ao longo de seu movimento, e dado por (II.42); integrando esta equação com o emprego de (II.42),

$$\int_{s^-(t_c)}^{s^-(t)} ds^-(t) = -\kappa E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \int_{t_c}^t dt \quad ,$$

ou

$$s^-(t) = s^-(t_c) - \kappa E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t - t_c) ,$$

onde a posição de cruzamento $s^-(t_c)$ é obtida de (II.10) com $t=t_c$, que resulta para a equação anterior,

$$s^-(t) = 1 - \frac{\kappa E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] - \kappa E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t - t_c)$$

Podemos, com o auxílio da equação (II.11), mostrar que

$$(1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} = 1 - \frac{1+\kappa-\alpha}{(1+\kappa)E_0} , \quad (II.43)$$

o que permite escrever que:

$$s^-(t) = \frac{1}{1+\kappa} - \kappa E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t - t_c) . \quad (II.44)$$

Para $t=t^-$ os portadores do plano $s^-(t)$ estão sendo neutralizados no anodo, o que corresponde à condição

$$s^-(t^-) = 0 ;$$

que com a substituição da equação (II.44), forma:

$$t^- = t_c + \frac{1}{\kappa(1+\kappa)E_0} (1 + \alpha t_c)^{(1+\kappa)/\alpha} . \quad (II.45)$$

Assim, equação (II.45) nos dá o instante em que plano trazeiro negativo $s^-(t)$ alcança o catodo, isto é, o instante em que desaparece a região de portadores negativos no dielétrico.

A densidade espacial de portadores nas linhas de corrente caracterizados pela posição inicial $x^-(t_E) = s^+(t_E)$, no instan-

te t , é dada pela equação (II.22) com o auxílio de (II.23).

A configuração espacial de portadores para o instante T , $t_c < T < t^-$, é encontrado de modo idêntico ao empregado para o caso em que $t < t_c$, na seção (II.1.b), ou seja, a resolução conjunta das equações (II.21), (II.22) e (II.23), para cada valor de t_E modifica-se, apenas, o intervalo de variação de t_E , $t_c \geq t_E \geq t_E'$, onde $t_E = t_c$ é o instante em que o último conjunto de portadores negativos é emitido (o conjunto de portadores que formam o plano $s^-(t)$). t_E' é dado pela integração numérica de (II.25).

II.2.c - Região de carga espacial positiva

Chamemos t^+ o tempo de transito do plano $s^+(t)$ que corresponde ao instante em que $s^+(t^+) = 1$. Assim, para $t < t^+$ esta região está limitada por $s^+(t) \leq x \leq 1$; para $t \geq t^+$ ela desaparece.

As equações básicas para esta região, são as mesmas que compõem o sistema (II.26) a (II.30).

A equação para as linhas de corrente dos portadores caracterizadas pelo tempo de emissão t_E , é dada por (II.34).

O movimento do plano trazeiro de portadores positivos, como função do tempo de cruzamento t_c , para $t_c < t \leq t^+$, é obtido de

$$\frac{ds^+(t)}{dt} = E(t_c) \quad . \quad (II.46)$$

com $E(t_c)$ dado pela equação (II.42). Integrando (II.46) com o emprego de (II.42), temos

$$s^+(t) = s^+(t_c) + (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t - t_c)$$

e usando a equação (II.9) com $t = t_c$ para obtermos $s^+(t_c)$, e o emprego de (II.43):

$$s^+(t) = \frac{1}{1+\kappa} + E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \cdot (t - t_c) \quad . \quad (\text{II.47})$$

Para $t = t^+$ os portadores que compõem o plano $s^+(t)$ estão sendo neutralizados no catodo o que corresponde à condição

$$s^+(t^+) = 1 \quad ,$$

que com a substituição de (II.47), fornece:

$$t^+ = t_c + \frac{\kappa}{E_0(1+\kappa)} (1 + \alpha t_c)^{(1+\kappa)/\alpha} \quad . \quad (\text{II.48})$$

Esta equação nos dá, portanto, o instante em que o plano trazeiro positivo $s^+(t)$ alcança o catodo ou seja, o instante em que desaparece a região de carga espacial positiva.

Observe-se que, para mobilidades iguais dos portadores positivos e negativos ($\kappa=1$), as equações (II.45) e (II.48) coincidem, como esperado.

A densidade espacial de portadores nas linhas de corrente caracterizadas pelo instante de emissão t_E , no instante t , é dada pela equação (II.35) com o auxílio de (II.36).

A configuração espacial de portadores, nesta região, para o instante T , $t_c \leq T < t^+$, é encontrada de modo análogo ao empregado para $t < t_c$ na seção (II.1.c), ou seja, a resolução conjunta das equações (II.34), (II.35) e (II.36) para cada valor de t_E . A única modificação está no intervalo de variação de t_E , que passa a ser $t_c \geq t_E \geq t_E''$, já que o último conjunto de portadores emitidos

ocorre para $t = t_c$; t_E'' é dado pela integração mínima da equação (II.38).

No Capítulo III procuraremos calcular o decaimento do potencial como função do tempo, $V(t)$, para os diferentes casos aqui discutidos, $t < t_c$ e $t > t_c$.

CAPÍTULO III

CÁLCULOS DA DIFERENÇA DE POTENCIAL INSTANTÂNEA $V(t)$
ENTRE OS ELETRODOS E DA CARGA RESIDUAL NOS ELETRODOS

Neste capítulo vamos realizar os cálculos para determinar a diferença de potencial instantânea $V(t)$ entre os eletrodos bem como a carga residual nos eletrodos.

De início calcularemos $V(t)$ para um instante $0 \leq t < t_c$, isto é, numa situação em que o cruzamento dos planos trazeiros de cargas não ocorreu.

Em seguida, faremos o cálculo para $V(t)$ com $t > t_c$ ou seja, num instante após o cruzamento dos planos trazeiros. Esta situação só ocorrerá se a condição dada por (II.13) for satisfeita, conforme discutido na seção (II.1.a).

III.1 - CÁLCULO DA DIFERENÇA DE POTENCIAL INSTANTÂNEA $V(t)$, ENTRE OS ELETRODOS PARA UM TEMPO MENOR QUE O TEMPO DE CRUZAMENTO.

A diferença de potencial instantânea entre os eletrodos é dada pela equação (I.11),

$$V(t) = \int_0^1 E(x,t) dx \quad . \quad (I.11)$$

Como vimos anteriormente, para $t < t_c$ há três regiões distintas de carga espacial no dielétrico, a saber: região de carga espacial negativa, região central de recombinação e região de car

ga espacial positiva; a equação (I.11) escrita para estas diferentes regiões, torna-se:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \int_0^{s^+(t)} E[x^-(t, t_E), t] dx^- + \int_{s^+(t)}^{s^-(t)} E(x, t) dx + \\
 & + \int_{s^-(t)}^1 E[x^+(t, t_E), t] dx^+ \quad (III.1)
 \end{aligned}$$

onde $E[x^-(t, t_E), t]$ e $E[x^+(t, t_E), t]$ representam os campos elétricos nas várias linhas de corrente nas regiões de carga espacial negativa e positiva, respectivamente, e $E(x, t) = E(t)$ o campo elétrico na região central de recombinação. Assim, ao realizarmos as integrais do primeiro e terceiro termos do segundo membro de (III.1) devemos ter o cuidado de levar em conta todas as linhas de corrente da região a que a integral se refere. A individualização das linhas de corrente numa região pode ser conseguida se considerarmos que, de um modo geral, estas linhas de corrente são funções do tempo t e do parâmetro t_E :

$$x = x(t, t_E) \quad , \quad (III.2)$$

e a variação total de x :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial t_E} dt_E \quad ,$$

e, se considerarmos o tempo fixo:

$$dx = \frac{dx}{dt_E} dt_E \quad . \quad (\text{III.3})$$

Tendo em conta (III.3), vamos calcular cada uma das integrais de (III.1) separadamente.

Região de carga espacial negativa

O potencial nesta região é dado pelo primeiro termo de (III.1), que com o emprego da equação (III.3), torna-se:

$$\int_0^{s^+(t)} E dx^- = \int_{t'_E}^t E \frac{dx^-}{dt_E} dt_E \quad , \quad (\text{III.4})$$

onde a mudança na variável de integração permite-nos considerar todas as linhas de corrente existentes na região negativa para o instante t ; t'_E , como já discutido na seção (II.1.b), é dado pela integração numérica da equação (II.25). O termo dx^-/dt_E é obtido da derivação parcial em relação a t_E da equação (II.21), ou seja:

$$\frac{dx^-}{dt_E} = (1+\kappa)E_0 \left[(1+\alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} + \kappa(t-t_E)(1+\alpha t_E)^{-(1+\kappa+\alpha)/\alpha} \right], \quad (\text{III.5})$$

com o campo elétrico, para cada conjunto de linhas de corrente caracterizadas por t_E , dado por (II.20). Substituindo (III.5) e (II.20) em (III.4):

$$\int_0^{s^+(t)} E dx^- = (1+\kappa) E_0^2 \int_{t'_E}^t (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} dt_E +$$

$$\begin{aligned}
& + (1+\kappa)\kappa E_O^2 \cdot t \int_{t'_E}^t (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)+\alpha]/\alpha} dt_E - \\
& - (1+\kappa)\kappa E_O^2 \int_{t'_E}^t (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)+\alpha]/\alpha} t_E \cdot dt_E \quad . \quad (\text{III.6})
\end{aligned}$$

A primeira e segunda integrais do segundo membro são imediatas e resultam:

$$\int_{t'_E}^t (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} dt_E = - \frac{(1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha}}{2(1+\kappa)-\alpha} \Bigg|_{t'_E}^t ,$$

e

$$\int_{t'_E}^t (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)+\alpha]/\alpha} dt_E = - \frac{(1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha}}{2(1+\kappa)} \Bigg|_{t'_E}^t ;$$

a terceira integral é calculada considerando-se a fórmula de integração:

$$\int x(1+x)^{-a} dx = \frac{(1-x)^{1-a}}{1-a} \left(x - \frac{1+x}{2-a} \right) , \quad (\text{III.7})$$

e pondo-se $x = \alpha t_E$ e $a = [2(1+\kappa) + \alpha]/\alpha$, para se obter

$$\begin{aligned}
\int_{t'_E}^t (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)+\alpha]/\alpha} t_E dt_E &= - \frac{(1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \cdot \alpha}{2(1+\kappa)} \cdot \\
&\cdot \left[t_E + \frac{1+\alpha t_E}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] \Bigg|_{t'_E}^t ,
\end{aligned}$$

e, a equação (III.6) pode ser escrita,

$$\int_{t'_E}^t E \frac{dx^-}{dt} dt_E = - \frac{(1+\kappa)E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \Big|_{t'_E}^t - \\ - \frac{\kappa E_0^2 t}{2} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \Big|_{t'_E}^t + \\ + \frac{\kappa E_0^2}{2} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \left[t_E + \frac{1+\alpha t'_E}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] \Big|_{t'_E}^t ;$$

substituindo os limites de integração e rearranjando os termos ,
tem-se:

$$\int_0^{s^+(t)} E dx^- = \frac{(1+\kappa)E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \left[(1+\alpha t'_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} - (1+\alpha t)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right] + \\ + \frac{\kappa E_0^2}{2[2(1+\kappa)-\alpha]} (1+\alpha t)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} + \frac{\kappa E_0^2}{2} \left[t - t'_E - \right. \\ \left. - \frac{1+\alpha t'_E}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t'_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \quad (III.8)$$

Assim, a equação (III.8) é a contribuição ao potencial entre os eletrodos devida à região com carga espacial negativa.

Região central de recombinação

O potencial nesta região é dado pela segunda integral do segundo membro da equação (III.1), com o campo elétrico constante na posição dado por (II.7). Portanto:

$$\int_{s^+(t)}^{s^-(t)} E(x,t) dx = E_0 (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} [s^-(t) - s^+(t)] ,$$

com $s^-(t)$ e $s^+(t)$ dados por (II.10) e (II.9), o que resulta

$$\int_{s^+(t)}^{s^-(t)} E(x,t) dx = \left\{ 1 - \frac{(1+\kappa)E_0}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - (1+\alpha t)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] \right\} \cdot E_0 (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} . \quad (\text{III.9})$$

Região de carga espacial positiva

O cálculo para esta região é análogo ao da região negativa devido à similaridade das duas regiões. Tendo em conta a equação (III.3), a terceira integral do segundo membro de (III.1), torna-se:

$$\int_{s^-(t)}^1 E dx^+ = \int_t^{t_E''} E \frac{dx^+}{dt_E} dt_E \quad (\text{III.10})$$

onde o limite superior t_E'' é obtido da integração numérica da equação (II.38), conforme discutido na seção (II.1.c). O termo dx^+/dt_E é dado pela derivação parcial relativamente a t_E da equação (II.34),

$$\frac{dx^+}{dt_E} = -(1+\kappa)E_0 \left[(1+\alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} + (t-t_E)(1+\alpha t_E)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] , \quad (\text{III.11})$$

e o campo elétrico, para cada conjunto de linhas de corrente caracterizadas por t_E , dado por (II.32). Substituindo (II.32) e (III.11) em (III.10), temos:

$$\begin{aligned} \int_{s^-(t)}^1 E \, dx^+ &= -(1+\kappa)E_0^2 \int_t^{t_E''} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} dt_E - \\ &- (1+\kappa)E_0^2 t \int_t^{t_E''} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} dt_E + \\ &+ (1+\kappa)E_0^2 \int_t^{t_E''} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} t_E dt_E . \quad (\text{III.12}) \end{aligned}$$

De modo análogo ao cálculo do potencial para a região negativa, as duas primeiras integrais do segundo membro de (III.12) são imediatas e a terceira pode ser integrada com o emprego de (III.7), o que resulta:

$$\begin{aligned} \int_{s^-(t)}^1 E \, dx^+ &= \frac{(1+\kappa)E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \Big|_t^{t_E''} + \\ &+ \frac{tE_0^2}{2} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \Big|_t^{t_E''} - \\ &- \frac{E_0^2}{2(1+\kappa)} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \left[t_E - \frac{1+\alpha t_E}{1-2(1+\kappa)} \right] \Big|_t^{t_E''} , \quad (\text{III.13}) \end{aligned}$$

substituindo os limites de integração e rearranjando os termos ,
tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{s^-(t)}^1 E \, dx^+ &= \frac{(1+\kappa)E_O^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \left[(1+\alpha t_E'')^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} - (1+\alpha t)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right] \\ &+ \frac{E_O^2}{2[2(1+\kappa)-\alpha]} (1+\alpha t)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} + \frac{E_O^2}{2} \left[t - t_E - \right. \\ &\left. - \frac{1+\alpha t_E''}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_E'')^{-2(1+\kappa)/\alpha} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

que é, portanto, a contribuição ao potencial entre os eletrodos devida à região de carga espacial positiva.

Assim, a diferença de potencial entre os eletrodos para o instante $0 \leq t < t_c$ é obtido pela substituição das equações (III.8), (III.9) e (III.14) na equação (III.1), que resulta:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{(1+\kappa)E_O^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \left[(1+\alpha t_E')^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} + (1+\alpha t_E'')^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} (1+\alpha t)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right] + \left\{ 1 - \frac{(1+\kappa)E_O}{1+\kappa-\alpha} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+\alpha t)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} \right] \right\} E_O (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} + \frac{\kappa E_O^2}{2} \left[t - t_E' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\alpha t_E'}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_E')^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \frac{E_O^2}{2} \left[t - t_E'' - \frac{1+\alpha t_E''}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] \\ &\quad \cdot (1+\alpha t_E'')^{-2(1+\kappa)/\alpha} , \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

$$t_c > t \geq 0$$

com t_E' e t_E'' dados pelas integrações numéricas de (II.25) e (II.38), respectivamente.

III.2 - CÁLCULO DA DIFERENÇA DE POTENCIAL INSTANTÂNEA $V(t)$ ENTRE OS ELETRODOS PARA UM TEMPO MAIOR QUE O TEMPO DE CRUZAMENTO.

A diferença de potencial instantânea, dada pela equação (I.11), pode ser escrita para este caso, de modo similar à equação (III.1):

$$V(t) = \int_0^{s^-(t)} E[x^-(t, t_E), t] dx^- + E(t_c) [s^+(t) - s^-(t)] + \int_{s^+(t)}^1 E[x^+(t, t_E), t] dx^+ , \quad (III.16)$$

onde $E[x^-(t, t_E), t]$ e $E[x^+(t, t_E), t]$ são os campos elétricos nas diferentes linhas de corrente nas regiões negativa e positiva, respectivamente, e $E(t_c)$ o campo elétrico constante, dado pela equação (II.42), existente na região central sem carga espacial.

Os três termos do segundo membro de (II.65) são as contribuições ao potencial devidas às três diferentes regiões existentes no dielétrico, para $t_c < t \leq t^+$.

Novamente, observemos que ao realizarmos as duas integrais de (III.16), deveremos ter o cuidado de incluir as diferentes linhas de corrente existentes em cada região. Isto pode ser

conseguido, pela troca da variável de integração x^- por t_E , através da equação (III.3).

Calculemos cada uma das contribuições de (III.36), separadamente.

Região de carga espacial negativa

Usando (III.3), podemos escrever a primeira integral de (III.16), como:

$$\int_0^{s^-(t)} E \, dx^- = \int_{t'_E}^{t_c} E \frac{dx^-}{dt_E} dt_E, \quad (III.17)$$

onde

$t_E = t_c$, é o instante de emissão para o plano trazeiro de cargas negativas $s^-(t)$;

$t_E = t'_E$, é o tempo de emissão para o conjunto de portadores que no instante t estão sendo neutralizados no anodo, isto é, a solução da equação (II.24) é dada pela integração numérica de (II.25).

O campo elétrico ao longo da linha de corrente caracterizada pela posição inicial $x^-(t_E)$ é dado pela equação (II.20).

O termo dx^-/dt_E é dado pela equação (III.5).

Substituindo as equações (II.20) e (III.5) na (III.17),

temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{s^-(t)} E \, dx^- &= (1+\kappa) E_0^2 \int_{t_E'}^{t_c} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} dt_E + \\
&+ (1+\kappa) \kappa E_0^2 t \int_{t_E'}^{t_c} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)+\alpha]/\alpha} \cdot dt_E - \\
&- (1+\kappa) \kappa E_0^2 \int_{t_E'}^{t_c} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)+\alpha]/\alpha} \cdot t_E dt_E \quad (\text{III.18})
\end{aligned}$$

Comparando (III.18) com a equação (III.6), notamos apenas a mudança do limite superior de integração; usando os cálculos já realizados para a obtenção da equação (III.8), concluímos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{s^-(t)} E \, dx^- &= \frac{(1+\kappa) E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \left[(1+\alpha t_E')^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} - (1+\alpha t_c)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right] \\
&+ \frac{\kappa E_0^2}{2} \left[t_c - t + \frac{1+\alpha t_c}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_c)^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \\
&+ \frac{\kappa E_0^2}{2} \left[t - t_E' - \frac{1+\alpha t_E'}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_E')^{-2(1+\kappa)/\alpha}, \quad (\text{III.19})
\end{aligned}$$

que é a contribuição para o potencial devida à distribuição de portadores negativos, válida no intervalo $t^- > t > t_c$.

Região central sem carga espacial

Nesta região, a contribuição ao potencial é dada pelo segundo termo do segundo membro da equação (III.16),

$$E(t_c) [s^+(t) - s^-(t)] ,$$

com o campo constante $E(t_c)$ dado por (II.42); $s^+(t)$ e $s^-(t)$ são dados por (II.47) e (II.44), substituindo estas equações na equação anterior temos:

$$E(t_c) [s^+(t) - s^-(t)] = (1+\kappa)E_0^2(t-t_c)(1+\alpha t_c)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{III.20})$$

para $t^+ > t > t_c$.

Para $t^- > t \geq t^+$, pondo $s^+(t) = 1$ e $s^-(t)$ dado pela equação (II.44):

$$E(t_c) [1 - s^-(t)] = \frac{\kappa E_0}{(1+\kappa)} (1+\alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \left[1 + (1+\kappa)E_0(1+\alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} (t-t_c) \right] \quad (\text{III.21})$$

Para $t^+ > t > t^-$, com $s^+(t)$ dado por (II.47) e pondo $s^-(t) = 0$, temos:

$$E(t_c) s^+(t) = \frac{E_0}{1+\kappa} (1+\alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \left[1 + (1+\kappa)E_0(1+\alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \cdot (t-t_c) \right] \quad (\text{III.22})$$

Região de carga espacial positiva

O potencial para esta região, empregando a equação (III.3), torna-se:

$$\int_{s^+(t)}^1 E dx^+ = \int_{t_C}^{t_E''} E \frac{dx^+}{dt_E} dt_E, \quad (\text{III.23})$$

onde

$t_E = t_C$ é o instante de emissão para os portadores que compõem o plano $s^+(t)$, e

$t_E = t_E''$ é o instante de emissão para os portadores positivos que no instante t estão sendo neutralizados no catodo, isto é, a solução da equação (II.37) dada pela integração numérica de (II.38).

O campo elétrico ao longo da linha de corrente caracterizada pela posição inicial $x^+(t_E) = s^-(t_E)$ é dado pela equação (II.32).

O termo dx^+/dt_E é dado pela equação (III.11).

Substituindo as equações (II.32) e (III.11) na (III.23),

temos:

$$\begin{aligned} \int_{s^+(t)}^1 E dx^+ &= -(1+\kappa)E_0^2 \int_{t_C}^{t_E''} (1+\alpha t_E)^{-2(1+\kappa)/\alpha} dt_E - \\ &\quad - (1+\kappa)E_0^2 t \int_{t_C}^{t_E''} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} dt_E + \end{aligned}$$

$$+ (1+\kappa)E_0^2 \int_{t_c}^{t_E''} (1+\alpha t_E)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} t_E \cdot dt_E \quad (\text{III.24})$$

A comparação de (III.24) com (III.12) mostra que apenas os limites inferiores das integrais são diferentes, repetindo os cálculos que conduziram à (III.14), temos:

$$\begin{aligned} \int_{s^+(t)}^1 E \, dx^+ &= \frac{(1+\kappa)E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \left[(1+\alpha t_E'')^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} - (1+\alpha t_c)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right] \\ &+ \frac{E_0^2}{2} \left[t - t_E'' - \frac{1 + \alpha t_E''}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_E'')^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \\ &+ \frac{E_0^2}{2} \left[t_c - t + \frac{1 + \alpha t_c}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_c)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{III.25}) \end{aligned}$$

que é a contribuição ao potencial devida à região com distribuição de portadores positivos.

O potencial instantâneo $V(t)$ será obtido pela substituição das contribuições ao potencial dadas pelas equações (III.19), (III.20) e (III.25) na (III.16), que resulta:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{(1+\kappa)E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \left[(1+\alpha t_E')^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} - (1+\alpha t_c)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} \right] + \\ &+ \frac{\kappa E_0^2}{2} \left[t_c - t + \frac{1 + \alpha t_c}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_c)^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \\ &+ \frac{\kappa E_0^2}{2} \left[t - t_E' - \frac{1 + \alpha t_E'}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_E')^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1+\kappa)E_0^2 (t-t_c) (1+\alpha t_c)^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \frac{(1+\kappa)E_0^2}{2(1+\kappa)-\alpha} \cdot \\
& \cdot \left[(1+\alpha t_E^n)^{-[2(1+\kappa)-\alpha]/\alpha} - (1+\alpha t_c)^{-|2(1+\kappa)-\alpha|/\alpha} \right] + \\
& + \frac{E_0^2}{2} \left[t - t_E^n - \frac{1+\alpha t_E}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_E^n)^{-2(1+\kappa)/\alpha} + \\
& + \frac{E_0^2}{2} \left[t_c - t + \frac{1+\alpha t_c}{2(1+\kappa)-\alpha} \right] (1+\alpha t_c)^{-2(1+\kappa)/\alpha} \quad (t^\pm > t > t_c)
\end{aligned}
\tag{III.26}$$

Note-se que a equação (III.26) fornece o potencial para cada instante $t^\pm > t > t_c$, sendo $t^\pm$ os tempos de trânsito dos planos tra-zeiros.

Para $t^+ > t > t^-$ as equações (III.19) e (III.20) serão re-tiradas da equação (III.26) com a inclusão da equação (III.22); pa-ra $t^- > t > t^+$ serão retiradas as equações (III.25) e (III.20) com a inclusão de (III.21) na equação (III.26).

III.3 - CÁLCULO DA CARGA RESIDUAL NOS ELETRODOS

Procuraremos agora, determinar a quantidade de carga que permanecerá nos eletrodos ao final do processo sem neutraliza-ção, isto é, a carga residual nos eletrodos.

Para efeito do cálculo, raciocinemos em termos da quan-tidade de carga negativa que, durante o decorrer do processo, al-cança o anodo aí se neutralizando. A carga residual neste eletro-do será dada pela diferença entre a sua carga inicial $E_0 = \sigma_0$ e a carga espacial negativa do dielétrico que o alcança. A carga resi

dual do cátodo será simétrica à do anodo.

A carga negativa total que alcançará o anodo será a mesma que, no decorrer do processo, atravessará o plano $s^+(t)$, em seu movimento para a direita com velocidade ds^+/dt . (veja Figura 2). Calculemos essa quantidade de carga.

A corrente devida aos portadores negativos que atravessam o plano $s^+(t)$ como função do tempo é:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\rho(t)v(t) \quad , \quad (\text{III.27})$$

onde $\rho(t)$ é a densidade de portadores na posição $s^+(t)$ e dada por

$$\rho(t) = \frac{1}{1+\alpha t} \quad , \quad (\text{III.28})$$

e $v(t)$ a velocidade dos portadores negativos relativamente ao plano $s^+(t)$

$$v(t) = \frac{ds^+}{dt} + \kappa E(t) = (1+\kappa) E(t) \quad ,$$

sendo $E(t)$ o campo elétrico na região central,

$$E(t) = E_0 (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad , \quad (\text{II.7})$$

assim,

$$v(t) = (1+\kappa) E_0 (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad . \quad (\text{III.29})$$

Substituindo as equações (III.28) e (III.29) na (III.27) e integrando,

$$q(t) = -E_0(1+\kappa) \int_0^t (1+\alpha t)^{-(1+\kappa-\alpha)/\alpha} dt ,$$

que resulta

$$q(t) = -E_0 \left[1 - (1+\alpha t)^{-(1+\kappa)/\alpha} \right] \quad (\text{III.30})$$

que fornece a quantidade de carga $q(t)$ que atravessou o plano $s^+(t)$ até o instante t , e será posteriormente neutralizada no anodo.

Como vimos no Capítulo II, a condição para que ocorra o cruzamento dos planos trazeiros é que

$$E_0 > 1 - \frac{\alpha}{1+\kappa} \quad (\text{II.13})$$

Se esta condição não se verificar, os planos trazeiros tenderão a posições limites para $t \rightarrow \infty$; nesta situação, a carga negativa total que cruzará o plano $s^+(t)$ e, posteriormente, será neutralizada no anodo é, da equação (III.30), fazendo $t \rightarrow \infty$

$$q(\infty) = -E_0 ,$$

que é igual à quantidade de carga positiva $\sigma_0 = E_0$ depositada inicialmente no anodo. Assim, para $t \rightarrow \infty$ a carga residual nos eletrodos será

$$q_r = E_0 + q(\infty) = 0 , \quad (\text{III.31})$$

e, conseqüentemente, uma diferença de potencial residual $V(\infty) = 0$ permanecerá entre os eletrodos.

Note-se, também, que não restará carga espacial na re-

gião central pois, da equação (II.6),

$$\rho(\infty) = 0 \quad .$$

Passemos agora ao caso em que a desigualdade (II.13) é verificada, isto é, os planos trazeiros cruzam. A equação (III.30) escreve-se:

$$q(t_c) = -E_0 \left[1 - (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \right] \quad , \quad (\text{III.32})$$

já que no instante $t = t_c$ cessa o fluxo de portadores negativos através do plano $s^+(t)$; assim, para $t > t_c$ a carga residual no anodo é,

$$q_r = E_0 + q(t_c) = E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{III.33})$$

que é também a expressão para a diferença de potencial residual entre os eletrodos. Notamos assim, que o potencial residual pode ser obtido, de imediato, pelo produto do campo constante que existirá no dielétrico após os planos trazeiros terem sido neutralizados nos eletrodos e dado pela equação

$$E(t_c) = E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{II.42})$$

e o comprimento $d = 1$ do dielétrico, o que resulta a própria equação anterior (ou, a equação (III.33)). Ainda, o valor $t = t_c$ é dado pela equação

$$t_c = \frac{1}{\alpha} \left\{ \exp \left[- \frac{\alpha}{1+\kappa-\alpha} \ln \left(1 - \frac{1+\kappa-\alpha}{(1+\kappa)E_0} \right) \right] - 1 \right\} \quad . \quad (\text{II.11})$$

No Capítulo IV, que segue, empregaremos os resultados ge

rais já obtidos, na resolução de dois casos particulares do problema proposto.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES PARA DOIS CASOS PARTICULARES DO PROBLEMA
 PROPOSTO: RELAÇÃO DE LANGEVIN E AUSÊNCIA DE RECOM-
 BINAÇÃO ENTRE OS PORTADORES.

Neste capítulo vamos obter as soluções para dois casos particulares do problema proposto tendo em conta os resultados gerais dos Capítulos II e III.

IV.1 - SOLUÇÃO PARA UM CASO PARTICULAR: RELAÇÃO DE LANGEVIN

A dependência entre as mobilidades dos portadores positivos e negativos e o coeficiente de recombinação α' , escreve-se

$$\alpha' = \frac{\mu^+ + \mu^-}{\epsilon} \quad , \quad (IV.1)$$

conhecida como Relação de Langevin (apêndice). Em unidades reduzidas ela torna-se

$$\alpha = 1 + \kappa \quad . \quad (IV.2)$$

Desta forma, as equações para a solução do problema, serão obtidas pela substituição da relação (IV.2) nas equações gerais desenvolvidas nos Capítulos II e III.

Podemos, de imediato, analisar as possibilidades de cruzamento dos planos trazeiros de cargas através da condição requerida pela equação (II.13),

$$E_0 > 1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \quad , \quad (II.13)$$

que com a substituição de (III.2), resulta:

$$E_0 > 0 \quad .$$

ou seja o cruzamento sempre ocorrerá desde que o potencial inicial entre os eletrodos $V_0 = E_0 > 0$.

Ao longo dos cálculos usaremos com frequência a relação a ser desenvolvida em seguida; consideremos a igualdade

$$a^\epsilon = e^{\epsilon \ln a} \quad ,$$

e se ϵ é um número pequeno, podemos escrevê-la com boa aproximação, em primeira ordem:

$$a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a \quad . \quad (IV.3)$$

Como nos Capítulos II e III, separamos a solução em dois casos relativos ao instante de cruzamento $t = t_c$. Assim, temos:

IV.1.1 - $t < t_c$: Tempo menor que o tempo de cruzamento

IV.1.2 - $t > t_c$: Tempo maior que o tempo de cruzamento

IV.1.1 - Tempo menor que o tempo de cruzamento

Separando a solução para cada região de carga espacial (veja Fig. 2), temos:

a) Região central de recombinação

A densidade de portadores positivos ou negativos para o instante t , $0 \leq t < t_c$, é

$$\rho(t) = \frac{1}{1 + \alpha t} \quad (IV.4)$$

Substituindo a equação (IV.2) na equação geral (II.7) , temos o campo elétrico:

$$E(t) = E_0 (1 + \alpha t)^{-1} \quad . \quad (IV.5)$$

As expressões para as posições instantâneas dos planos trazeiros é obtida tomando-se o limite $(1 + \kappa) \rightarrow \alpha$ nas equações (II.9) e (II.10) e o emprego de (IV.3):

$$s^+(t) = \frac{E_0}{\alpha} \ln(1 + \alpha t) \quad , \quad (IV.6)$$

e

$$s^-(t) = 1 - \frac{(\alpha-1)E_0}{\alpha} \ln(1 + \alpha t) \quad . \quad (IV.7)$$

Igualando as duas últimas expressões, com $t = t_c$, obtemos o instante de cruzamento dos planos trazeiros,

$$t_c = \frac{1}{\alpha} (e^{1/E_0} - 1) \quad (IV.8)$$

com $E_0 > 0$.

b) Região de carga espacial negativa

O campo elétrico ao longo da linha de corrente com posição inicial $x^-(t_E) = s^+(t_E)$, é dado por (IV.5) com $t = t_E$:

$$E[x^-(t_E), t_E] = E_0 (1 + \alpha t_E)^{-1} \quad (IV.9)$$

O limite $(1 + \kappa) \rightarrow \alpha$ e a equação (IV.3) aplicados à equação (II.21), fornece-nos a equação das linhas de corrente para os portadores negativos:

$$x^-(t, t_E) = \frac{E_0}{\alpha} \ln(1 + \alpha t_E) - (\alpha - 1) E_0 (t - t_E) (1 + \alpha t_E)^{-1} \quad (\text{IV.10})$$

A densidade de portadores numa destas linhas de corrente, é obtida pela substituição da equação (IV.2) na (II.22),

$$\rho_-(t, t_E) = \frac{\rho_-(t_E)}{1 + (\alpha - 1) \rho_-(t_E) (t - t_E)}, \quad (\text{IV.11})$$

onde $\rho_-(t_E)$ é a densidade de portadores na posição inicial da linha considerada e no instante de emissão t_E , dada por (II.23),

$$\rho_-(t_E) = \frac{1}{1 + \alpha t_E}. \quad (\text{IV.12})$$

A configuração espacial de portadores no instante $t = T$, é obtida da resolução simultânea das equações (IV.11), com o emprego de (IV.12), e (IV.10) com t_E variando no intervalo $T \geq t_E \geq t_E^i$. O valor limite t_E^i é dado pela integração numérica da equação

$$\frac{dt_E^i}{dt} = \frac{\alpha - 1}{\alpha \left[1 + (\alpha - 1) \left(\frac{t - t_E^i}{1 + \alpha t_E^i} \right) \right]}, \quad (\text{IV.13})$$

como descrito na seção (II.1.b). A equação (IV.13) é a equivalente à equação (II,25) com $\alpha = \kappa + 1$.

c) Região de carga espacial positiva

Substituindo a relação de Langevin equação (IV.2) na equação (II.32), temos o campo elétrico ao longo das linhas de corrente de portadores positivos:

$$E[x^+(t_E), t_E] = E_0 (1 + \alpha t_E)^{-(1+\kappa)/\alpha} \quad (\text{IV.14})$$

O emprego das equações (IV.2) e (IV.3) na (II.34), formamos a equação para as linhas de corrente com posição inicial $x^+(t_E) = s^-(t_E)$, ou seja:

$$x^+(t, t_E) = 1 - \frac{(\alpha-1)E_0}{\alpha} \ln(1 + \alpha t_E) + E_0(t - t_E)(1 + \alpha t_E)^{-1} \quad (IV.15)$$

A densidade de portadores sobre uma destas linhas, é dada pela equação (III.33),

$$\rho_+(t, t_E) = \frac{\rho_+(t_E)}{1 + \rho_+(t_E)(t - t_E)} \quad , \quad (IV.16)$$

onde,

$$\rho_+(t_E) = \frac{1}{1 + \alpha t_E} \quad . \quad (IV.17)$$

A configuração espacial de portadores no instante $t = T$ é obtida da resolução simultânea das equações (IV.15) e (IV.16), com (IV.17), com t_E variando no intervalo $T \geq t_E \geq t_E''$, onde t_E'' é obtido da integração numérica da equação

$$\frac{dt_E''}{dt} = \frac{1}{\alpha \left[1 + \left(\frac{t - t_E''}{1 + \alpha t_E''} \right) \right]} \quad , \quad (IV.18)$$

conforme descrito na seção II.1.c.

IV.1.2 - Tempo maior que o tempo de cruzamento

Na introdução deste capítulo concluímos que para qualquer potencial $V_0 = E_0 > 0$ aplicado inicialmente entre os eletrodos ocorrerá o cruzamento.

Passemos então à análise das três diferentes regiões do dielétrico (veja Fig. 3) para $t > t_c$, tendo em conta os resultados gerais do Capítulo II.

a) Região central sem carga espacial

O campo elétrico constante nesta região sem portadores livres é, das equações (II.42) e (IV.2):

$$E(t_c) = E_0 (1 + \alpha t_c)^{-1} ,$$

e como,

$$1 + \alpha t_c = e^{1/E_0} , \quad (IV.19)$$

$$E(t_c) = E_0 e^{-1/E_0} . \quad (IV.20)$$

b) Região de carga espacial negativa

O movimento do plano trazeiro negativo dado pela equação (II.44), e com (IV.2) e (IV.19), torna-se:

$$s^-(t) = \frac{1}{\alpha} - (\alpha-1) E_0 e^{-1/E_0} (t - t_c) , \quad (IV.21)$$

e o tempo de trânsito para este plano, de (II.45),

$$t^- = t_c + \frac{e^{1/E_0}}{\alpha(\alpha-1)E_0} , \quad (IV.22)$$

que forma no instante em que desaparece a região de portadores negativos do dielétrico.

A densidade de portadores na linha de corrente caracte-

rizada pelo instante de emissão $t = t_E$, no instante t , é dada pelas equações (IV.11) e (IV.12).

A configuração espacial de portadores para o instante $t = T$, $t^- > T > t_c$, é análoga à descrita na seção II.2.b, com a integração numérica da equação (IV.13)

c) Região de carga espacial positiva

Substituindo a equação (IV.2) na equação geral (II.47), obtemos

$$s^+(t) = \frac{1}{\alpha} + E_0 e^{-1/E_0 (t - t_c)} \quad , \quad (IV.23)$$

que fornece a posição instantânea do plano trazeiro positivo.

O tempo de trânsito para este plano é, da equação (II.48):

$$t^+ = t_c + \frac{\alpha - 1}{\alpha E_0} e^{1/E_0} \quad . \quad (IV.24)$$

A densidade de portadores positivos na linha de corrente caracterizada pelo instante de emissão $t = t_E$ e no instante t , é dada pelas equações (IV.11) e (IV.12).

A configuração espacial de portadores para o instante $t = T$, $t^+ > t > t_c$, é análoga à descrita na seção II.2.c, com a integração numérica da equação (IV.18).

O potencial instantâneo entre os eletrodos é conseguido através dos resultados gerais obtidos no Capítulo III.

Assim, o potencial $V(t)$ para um instante $t_c > t \geq 0$, anterior ao instante de cruzamento, é obtido tomando-se o limite $(1+\kappa) \rightarrow \alpha$ e o emprego da relação (IV.3) na equação geral (III.15), que for-

nece após rearranjar os termos:

$$\begin{aligned}
 V(t) = \frac{E_0}{2} [2 - 3E_0 - 2E_0 \ln(1 + \alpha t)] \cdot (1 + \alpha t)^{-1} + \frac{(\alpha + 1)E_0^2}{2\alpha} \frac{1}{1 + \alpha t_E^I} + \\
 + \frac{(2\alpha - 1)E_0^2}{2\alpha} \frac{1}{1 + \alpha t_E^{II}} + \frac{(\alpha - 1)E_0^2}{2} \frac{t - t_E^I}{(1 + \alpha t_E^I)^2} + \frac{E_0^2}{2} \frac{t - t_E^I}{(1 + \alpha t_E^{II})^2} , \\
 (t^\pm > t > t_c)
 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

com t_E^I e t_E^{II} obtidos das integrações numéricas das equações (IV.13) e (IV.18).

Para um instante $t > t_c$, posterior ao cruzamento dos planos trazeiros, consideremos cada uma das três regiões de carga espacial (veja Fig. 3) no dielétrico.

Assim, tomando o limite $(1 + \kappa) \rightarrow \alpha$ e o emprego da relação (IV.3) nas equações gerais (III.19), (III.20), (III.21), (III.22) e (III.25), obtemos:

- Região Negativa

$$\begin{aligned}
 s^-(t) \\
 \int_0 E dx^- = \frac{(\alpha + 1)E_0^2}{2\alpha} \frac{1}{1 + \alpha t_E^I} - \frac{1}{1 + t_c} - \frac{(\alpha - 1)E_0^2}{2} \left[\frac{t - t_c}{(1 + \alpha t_c)^2} - \right. \\
 \left. - \frac{t - t_E^I}{(1 + \alpha t_E^I)^2} \right] \quad (t^- > t > t_c)
 \end{aligned} \tag{IV.26}$$

- Região central sem carga elétrica

$$\begin{aligned}
 s^+(t) \\
 \int_{s^-(t)} E dx = \alpha E_0^2 e^{-2/E_0} (t - t_c), \quad t^\pm > t > t_c .
 \end{aligned} \tag{IV.27}$$

$$\int_{s^-(t)}^1 E \, dx = \frac{(\alpha-1)E_0}{\alpha} \left[1 + \alpha E_0 e^{-1/E_0} (t-t_c) \right] e^{-1/E_0}, \quad t^- > t > t^+ \quad (\text{IV.28})$$

$$\int_0^{s^+(t)} E \, dx = \frac{E_0}{\alpha} \left[1 + \alpha E_0 e^{-1/E_0} (t-t_c) \right] e^{-1/E_0}, \quad t^+ > t > t^- \quad (\text{IV.29})$$

- Região Positiva

$$\int_{s^+(t)}^1 E \, dx = \frac{(2\alpha-1)E_0^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{1+\alpha t_E''} - \frac{1}{1+\alpha t_c} \right) - \frac{E_0^2}{2} \left[\frac{t-t_c}{(1+\alpha t_c)^2} - \frac{t-t_E''}{(1+\alpha t_E'')^2} \right] \quad (t^+ > t \geq t_c) \quad (\text{IV.30})$$

O potencial $V(t)$, para um instante $t^\pm > t > t_c$, será dado pela soma das contribuições (IV.269, (IV.27) e (IV.30), ou seja:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{(\alpha+1)E_0^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{1+\alpha t_E'} - \frac{1}{1+\alpha t_c} \right) - \frac{(\alpha-1)E_0^2}{2} \left[\frac{t-t_c}{(1+\alpha t_c)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{t-t_E'}{(1+\alpha t_E')^2} \right] + E_0^2 e^{-2/E_0} (t-t_c) + \frac{(2\alpha-1)E_0^2}{2} \left(\frac{1}{1+\alpha t_E''} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{1+\alpha t_c} \right) - \frac{E_0^2}{2} \left[\frac{t-t_c}{(1+\alpha t_c)^2} - \frac{t-t_E''}{(1+\alpha t_E'')^2} \right] \quad (t^\pm > t > t_c) \quad (\text{IV.31}) \end{aligned}$$

Para $t^+ > t > t^-$, temos:

$$V(t) = \frac{E_0}{\alpha} \left[1 + \alpha E_0 e^{-1/E_0} (t - t_c) \right] e^{-1/E_0} + \frac{(2\alpha - 1)E_0^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{1 + \alpha t_E''} - \frac{1}{1 + \alpha t_c} \right) - \frac{E_0^2}{2} \left[\frac{t - t_c}{(1 + \alpha t_c)^2} - \frac{t - t_E''}{(1 + \alpha t_E'')^2} \right], \quad (t^+ > t > t^-)$$

(IV.32)

e, para $t^- > t > t^+$:

$$V(t) = \frac{(\alpha - 1)E_0}{\alpha} \left[1 + \alpha E_0 e^{-1/E_0} (t - t_c) \right] e^{-1/E_0} + \frac{(\alpha + 1)E_0^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{1 + \alpha t_E'} - \frac{1}{1 + \alpha t_c} \right) - \frac{(\alpha - 1)E_0^2}{2} \left[\frac{t - t_c}{(1 + \alpha t_c)^2} - \frac{t - t_E'}{(1 + \alpha t_E')^2} \right] \quad (t^- > t > t^+)$$

(IV.33)

IV.1.3 - Carga residual nos eletrodos

A fim de obter a carga residual nos eletrodos vamos reportar-nos aos resultados da seção III.3.

Como, para $E_0 > 0$ os planos trazeiros sempre cruzam, nesse caso as equações (III.33), (IV.2) e (IV.19) fornecem:

$$q_r = E_0 e^{-1/E_0} \quad (IV.34)$$

Assi, esta equação nos diz a quantidade de carga residual no anodo ($-q_r$ para o catodo) bem como a diferença de potencial residual entre eles.

IV.2 - SOLUÇÃO PARA UM CASO PARTICULAR: AUSÊNCIA DE RECOMBINAÇÃO ENTRE OS PORTADORES POSITIVOS E NEGATIVOS

Nesta seção vamos analisar o caso particular em que os portadores positivos e negativos não sofrem recombinação.

Desta forma, a solução pode ser obtida das equações gerais dos Capítulos II e III, fazendo-se $\gamma = 0$ em cada uma delas.

Em particular, a condição para que ocorra o cruzamento dos planos trazeiros é dada pela equação (II.13) com $\gamma = 0$, que resulta

$$E_0 > 1.$$

Assim, a condição de cruzamento é que o potencial inicial entre os eletrodos $V_0 = E_0 = \sigma_0 > 1$, o que confirma nossa previsão feita na seção I.1 à respeito do cruzamento dos planos trazeiros de cargas.

Segundo a sistemática adotada anteriormente, vamos dividir nossa solução em dois casos:

IV.2.1 - $t < t_c$: tempo menor que o tempo de cruzamento

IV.2.2 - $t > t_c$: tempo maior que o tempo de cruzamento.

IV.2.1 - Tempo menor que o tempo de cruzamento

Para cada região de carga espacial no dielétrico (veja Fig. 2), temos:

a) Região central eletricamente neutra

Para cada ponto desta região limitada pelos planos trazeiros, as densidades espaciais de portadores permanecem constan-

tes e com seus valores em $t = 0$, o permite escrever:

$$\rho_{\pm}(x, t) = \pm 1, \quad (\text{IV.35})$$

equivalente à equação geral (II.6), com $\alpha = 0$.

Consideremos o limite,

$$\lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{1/n} = e, \quad (\text{IV.36})$$

onde e é base dos logarítmos

Tomando limite $\alpha \rightarrow 0$ na equação (II.7) e o emprego da (IV.36), obtemos o campo elétrico nesta região,

$$E(t) = E_0 e^{-(1+\kappa)t}. \quad (\text{IV.37})$$

Com o mesmo procedimento nas equações (II.9) e (II.10), obtemos,

$$s^+(t) = \frac{E_0}{1+\kappa} \left(1 - e^{-(1+\kappa)t} \right), \quad (\text{IV.38})$$

e

$$s^-(t) = 1 - \frac{E_0}{1+\kappa} \left(1 - e^{-(1+\kappa)t} \right), \quad (\text{IV.39})$$

que nos dão as posições instantâneas dos planos trazeiros.

Para $\alpha \rightarrow 0$, a equação (II.11) pode ser escrita em primeira ordem,

$$t_c = - \frac{1}{1+\kappa} \ln \left(1 - \frac{1}{E_0} \right), \quad (\text{IV.40})$$

esta equação nos dá o instante de cruzamento dos planos trazeiros, se a condição $V_0 = E_0 > 1$ for satisfeita.

b) Região de carga espacial negativa

O campo elétrico ao longo de uma linha de corrente é ,
de (II.20) e (IV.36),

$$E[x^-(t_E), t_E] = E_0 e^{-(1+\kappa)t_E} , \quad (IV.41)$$

e a equação para as linhas de corrente,

$$x^-(t, t_E) = \frac{E_0}{1+\kappa} \left(1 - e^{-(1+\kappa)t_E} \right) - E_0(t - t_E) e^{-(1+\kappa)t_E} . \quad (IV.42)$$

A densidade de portadores sobre uma destas linhas, é dada pelas equações (II.22) e (II.23),

$$\rho_-(t, t_E) = \frac{1}{1 + \kappa(t - t_E)} . \quad (IV.43)$$

A configuração espacial de portadores para um dado instante T é obtida da resolução simultânea das equações (IV.42) e (IV.43), com t_E variando no intervalo $T \geq t_E \geq t_E^i$, sendo t_E^i dado pela integração numérica de

$$\frac{dt_E^i}{dt} = \frac{\kappa}{(1 + \kappa) [1 + \kappa(t - t_E^i)]} , \quad (IV.44)$$

como descrito na seção II.1.b.

c) Região de carga espacial positiva

O campo elétrico de (II.32) e (IV.36), é

$$E[x^+(t_E), t_E] = E_0 e^{-(1+\kappa)t_E} , \quad (IV.45)$$

e, a equação para as linhas de corrente para portadores positivos,

da equação (II.34),

$$x^+(t, t_E) = 1 - \frac{\kappa E_0}{1+\kappa} \left(1 - e^{-(1+\kappa)t_E} \right) + E_0(t - t_E) e^{-(1+\kappa)t_E} \quad (IV.46)$$

A densidade de portadores sobre uma destas linhas de (II.35) e (II.36),

$$\rho_+(t, t_E) = \frac{1}{1 + t - t_E} \quad (IV.47)$$

A configuração espacial de portadores para um particular instante T , é obtida da resolução simultânea das equações (IV.46) e (IV.47) conforme descrito em II.1.c, com t_E dado pela integração numérica de

$$\frac{dt_E''}{dt} = \frac{1}{(1+\kappa)(1-t-t_E'')} \quad (IV.48)$$

que é a equação (II.38) com $\alpha = 0$.

Para um potencial inicial entre os eletrodos $V_0 = E_0 > 1$ teremos o cruzamento dos planos trazeiros de cargas. Analisemos esta situação.

IV.2.2 - Tempo maior que o tempo de cruzamento

Vejamos cada uma das regiões de carga espacial no dielétrico (Fig. 3), separadamente:

a) Região central sem carga espacial

Tomando o limite $\alpha \rightarrow 0$ na equação geral (II.42) obtemos o campo elétrico constante para esta região,

$$E(t_c) = E_0 (1 + \alpha t_c)^{-(1+\kappa)/\alpha} ,$$

e substituindo a equação (IV.41), resulta:

$$E(t_c) = E_0 - 1 , \quad (IV.49)$$

consistente, portanto, com a condição inicial $E_0 > 1$.

A densidade de portadores, para qualquer instante $t > t_c$ é,

$$\rho_{\pm}(x, t) = 0 .$$

b) Região de carga espacial negativa

Tomando-se o limite $\alpha \rightarrow 0$ na equação (II.44) temos

$$s^-(t) = \frac{1}{1+\kappa} - \kappa(E_0 - 1)(t - t_c) , \quad (IV.50)$$

que fornece a posição instantânea do plano trazeiro negativo.

O tempo de trânsito deste plano trazeiro é, da (II.45)

$$t^- = t_c + \frac{1}{\kappa(1+\kappa)(E_0 - 1)} \quad (IV.51)$$

A densidade espacial de portadores nas respectivas linhas de corrente é dada pela equação (IV.43), enquanto a equação para as linhas de corrente é fornecida pela equação (IV.42). A configuração espacial de portadores para o instante $t = T$ é obtido da resolução simultânea destas duas equações e variando t_E no intervalo $t_c \leq t < t_E'$. O valor $t_E = t_E'$ é obtido da integração numérica da equação (IV.44), como descrito na seção II.1.b.

c) Região de carga espacial positiva

A posição instantânea do plano trazeiro positivo é tomando-se o limite $\alpha \rightarrow 0$ na equação (II.47),

$$s^+(t) = \frac{1}{1+\kappa} + (E_0 - 1)(t - t_c) \quad , \quad (IV.52)$$

e o mesmo procedimento na equação (II.48) forma

$$t^+ = t_c + \frac{\kappa}{(1+\kappa)(E_0 - 1)} \quad , \quad (IV.53)$$

que é o tempo de trãs-to para o plano trazeiro positivo.

A equação para as linhas de corrente para os portadores positivos é dada pela equação (IV.46), enquanto a densidade espacial ao longo destas linhas é dada pela equação (IV.43). A configuração espacial de portadores no instante $t = T$ é obtida da resolução simultânea destas duas equações e variando t_E no intervalo $t_c - t - t_E''$. O valor $t_E = t_E''$ é dado pela integração numérica da equação (IV.48), conforme descrito na seção II.1.c.

O potencial instantâneo entre os eletrodos $V(t)$, é obtido tomando-se o limite $\alpha \rightarrow 0$ e o emprego da relação (IV.36) nas expressões gerais para o potencial do Capítulo III.

Assim, para um instante $t_c > t \geq 0$ da equação geral (III.15) obtemos:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{E_0^2}{2} \left[1 + \kappa \left(t - t_E' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_E'} - \frac{3E_0^2}{4} e^{-2(1+\kappa)t} + \\ & + \left[1 - E_0 \left(1 - e^{-(1+\kappa)t} \right) \right] E_0 e^{-(1+\kappa)t} + \frac{E_0^2}{2} \left(1 + t - t_E'' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \cdot \\ & \cdot e^{-2(1+\kappa)t_E''} \quad (t_c > t \geq 0) \end{aligned} \quad (IV.54)$$

com t_E' e t_E'' obtidos das integrações numéricas das equações (IV.44) e (IV.48), respectivamente.

Para um instante $t > t_c$, consideremos separadamente cada uma das três regiões de carga espacial do dielétrico (Fig. 3). Assim, das equações gerais (III.19), (III.20), (III.21), (III.22) e (III.25), temos:

- Região Negativa

$$\begin{aligned} \int_0^{s^-(t)} E \, dx^- &= \frac{E_0^2}{2} \left[1 + \kappa \left(t - t_E' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_E'} - \\ &\quad - \frac{E_0^2}{2} \left[1 - \kappa \left(t_c - t + \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_c} \end{aligned} \quad (t^- > t \geq t_c) \quad (IV.55)$$

- Região central sem carga espacial

$$\int_{s^-(t)}^{s^+(t)} E \, dx = (1+\kappa)(E_0 - 1)^2(t - t_c) \quad (t^+ > t \geq t_c) \quad (IV.56)$$

$$\int_{s^-(t)}^1 E \, dx = \frac{\kappa(E_0 - 1)}{1+\kappa} \left[1 + (1+\kappa)(E_0 - 1)(t - t_c) \right] \quad , \quad (t^- > t > t^+) \quad (IV.57)$$

$$\int_0^{s^+(t)} E \, dx = \left(\frac{E_0 - 1}{1+\kappa} \right) \left[1 + (1+\kappa)(E_0 - 1)(t - t_c) \right] \quad (t^+ > t > t^-) \quad (IV.58)$$

- Região Positiva

$$\begin{aligned}
 \int_{s^+(t)}^1 E \, dx^+ &= \frac{E_0^2}{2} \left[1 + t - t_E'' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right] e^{-2(1+\kappa)t_E''} - \\
 &- \frac{E_0^2}{2} \left[1 - t_c + t - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right] e^{-2(1+\kappa)t_c} \\
 &\quad (t^+ > t \geq t_c) \quad (IV.59)
 \end{aligned}$$

O potencial torna-se:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{E_0^2}{2} \left[1 + \kappa \left(t - t_E' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_E'} - \\
 &- \frac{E_0^2}{2} \left[1 - \kappa \left(t_c - t + \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_c} + \\
 &+ (1+\kappa)(E_0 - 1)^2(t - t_c) + \frac{E_0^2}{2} \left[1 + t - t_E'' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right] \\
 &\quad e^{-2(1+\kappa)t_E''} - \frac{E_0^2}{2} \left[1 - t_c + t - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right] e^{-2(1+\kappa)t_c} \\
 &\quad (t^\pm > t \geq t_c) \quad (IV.60)
 \end{aligned}$$

Para $t^+ > t > t^-$, temos:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \left(\frac{E_0 - 1}{1 + \kappa} \right) \left[1 + (1 + \kappa)(E_0 - 1)(t - t_c) \right] + \\
 &+ \frac{E_0^2}{2} \left[1 + t - t_E'' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right] e^{-2(1+\kappa)t_E''} - \\
 &- \frac{E_0^2}{2} \left[1 - t_c + t - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right] e^{-2(1+\kappa)t_c}, \quad (t^+ > t > t_c) \\
 &\quad (IV.61)
 \end{aligned}$$

e, para $t^- > t > t^+$

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \frac{E_0^2}{2} \left[1 + \kappa \left(t - t_E' - \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_E'} - \\
 & - \frac{E_0^2}{2} \left[1 - \kappa \left(t_c - t + \frac{1}{2(1+\kappa)} \right) \right] e^{-2(1+\kappa)t_c} \quad (t^- > t \geq t_c)
 \end{aligned}
 \tag{IV.62}$$

IV.2.3 - Carga residual nos eletrodos

Das equações (III.30) e (IV.36), temos

$$q(t) = -E_0 \left[1 - e^{-(1+\kappa)t} \right] \tag{IV.63}$$

que forma a carga que atravessou o plano $s^+(t)$ até o instante t e será neutralizada no anodo.

Para $0 < E_0 < 1$, os planos trazeiros tendem a posições limites para $t \rightarrow \infty$, e

$$q(\infty) = -E_0.$$

Assim, a carga residual

$$q_r = E_0 + q(\infty) = 0$$

é nula nos eletrodos e, também, o potencial residual entre eles.

A carga espacial, positiva e negativa, na região central será $\pm(1-E_0)$,

e eletricamente neutra (veja fig. 2-a)

Para $E_0 > 1$, os planos trazeiros cruzam, e a carga residual no anodo, das equações (III.33), (IV.36) e (IV.40), será

$$q_r = E_o - 1, \quad (\text{IV.64})$$

ou seja, igual à carga inicialmente depositada no anodo $E_o = \sigma_o$, mais a carga negativa uniformemente distribuída no dielétrico em $t = 0$, $\rho_o = -1$ (no catodo teremos $-q_r$).

A expressão (IV.64) nos dá, igualmente, o valor da diferença de potencial residual que permanecerá entre os eletrodos ao final do processo.

No Capítulo V procuraremos analisar graficamente os principais resultados até aqui obtidos.

CAPÍTULO V

ANÁLISE GRÁFICA DAS SOLUÇÕES OBTIDAS

Neste capítulo vamos analisar graficamente os principais resultados obtidos nos capítulos anteriores, com especial atenção ao decaimento do potencial $V(t)$ com o tempo; apresentaremos também um gráfico ilustrativo da distribuição de portadores com a posição para vários instantes, no caso de ausência de recombinação ($\alpha = 0$) e mobilidades iguais ($K = 1$).

As Figuras 1, 2 e 3 ilustram a disposição dos portadores positivos e negativos no dielétrico, para diferentes instantes.

Na Figura 1 temos os portadores positivos e negativos uniformemente distribuídos no dielétrico ($\rho_0 = \pm 1$ para qualquer ponto $0 < x < d$) num instante em que, ainda, não se depositou carga nos eletrodos ($V_0 = 0$).

A Figura 2 mostra as três regiões distintas de cargas para um instante $t_c > t > 0$, isto é, após a aplicação de uma voltagem entre os eletrodos, mas para um instante em que não ocorreu o cruzamento dos planos $s^+(t)$ e $s^-(t)$. Nota-se que, sendo $K > 1$, a maior mobilidade para os portadores negativos implica numa maior distância percorrida pelo plano $s^-(t)$ do que a correspondente distância percorrida pelo plano $s^+(t)$, no dado instante.

A Figura 3 mostra as regiões distintas de carga espacial no dielétrico para $t > t_c$, isto é, após o cruzamento dos planos trazeiros, quando isto for possível ($E_0 > 1$, no caso em que $\alpha = 0$, por exemplo). Notamos a região central, limitada pelos planos trazei-

ros, sem carga espacial. Aqui, também, supuzemos mobilidades iguais para os portadores positivos e negativos ($K=1$), de forma que quantidades iguais dos dois tipos de portadores ainda permanecem no dielétrico para o instante considerado.

Nas Figuras 4 à 12 passamos a ilustrar graficamente o decaimento do potencial $V(t)$ com o tempo, para diferentes valores dos parâmetros E_0 , α e K .

Na Figura 4, é considerado o decaimento de $V(t)$ para o caso geral desenvolvido nos Capítulos II e III; notamos que na primeira curva constituída com $E_0 = 2$, $\alpha = 0,75$ e $K = 0,5$, os planos trazeiros cruzam num tempo finito, $t_c = 0,4$, já que a condição de cruzamento dada pela relação (II.13) é satisfeita para estes parâmetros. Observamos também, um rápido decaimento no potencial até o instante $t^+ = 0,8$, indicando que uma quantidade apreciável da carga espacial é neutralizada nos eletrodos até este instante.

O instante $t^+ = 0,8$ caracteriza o tempo de trânsito para o plano $s^+(t)$ e $t^- > t^+$, já que o valor da mobilidade dos portadores positivos é duas vezes maior que o correspondente para os portadores negativos. Nota-se ainda que, no intervalo $1,6 > t > 0,8$ há um decaimento lento no potencial já que, neste intervalo, somente parte quantidade inicial da carga negativa permanece no dielétrico sendo, continuamente, neutralizado no anodo. Para $t = t^- = 1,6$ o plano $s^-(t)$ atinge o anodo e o potencial alcança o seu valor final (potencial residual).

Ainda na Figura 4 o decaimento de $V(t)$ para um campo inicial aplicado $E_0 = 0,5$, para os mesmos parâmetros α e K , é mostrado. Com estes valores, a condição de cruzamento dada pela rela

ção (II.13) não é satisfeita e, em consequência, os planos trazeiros aproximam-se assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$. Também, neste caso, a carga residual tenderá a um valor nulo e, igualmente, o potencial residual.

Na Figura 5 apresentamos o decaimento para $V(t)$, ainda no caso geral, para $\alpha = K = 1$. Notamos, para $E_0 = 2$, o mesmo tempo de trânsito para os dois planos trazeiros devido às suas mobilidades iguais. Para $t \geq 0,7$ não há mais carga espacial no dielétrico que permanece submetido ao potencial residual $V(0,7)$. Na segunda curva da Figura 4, com $E_0 = 0,5$, observamos que $V(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, como esperado.

Na Figura 6, ainda no caso geral, o decaimento de $V(t)$ com $\alpha = 5.5$ e a mobilidade para os portadores negativos dez vezes maior que a dos positivos, é mostrada. Atentemos para o rápido decaimento de $V(t)$ até o instante $t = t^- = 0,07$ quando o plano $s^-(t)$ alcança o anodo. Para $0,6 > t > 0,07$ apenas os portadores negativos movem-se no interior do dielétrico em direção ao catodo, onde serão neutralizados. No tempo de trânsito de $s^+(t)$, $t^+ = 0,6$, $V(t)$ atinge o valor do potencial residual para este caso, $V_r(0,6)$.

Nas Figuras 7, 8 e 9 são mostradas as variações do potencial com o tempo, para o caso particular do problema proposto em que os parâmetros α e K estão ligados pela relação de Langevin dada pela equação (IV.2).

Neste caso, desde que $E_0 > 0$, os planos trazeiros sempre cruzam para um instante $t = t_c$, finito, conforme discussão apresentada no Capítulo IV; da mesma forma, uma carga residual maior que zero sempre ocorrerá nos eletrodos ao final do processo e dado pe

la equação (IV.34) que é, também, o valor do potencial residual . Em particular, o valor da carga residual poderá ser determinado de imediato, através da equação (V.1) e da Figura 13, como veremos adiante.

As Figuras 10, 11 e 12 apresentam o comportamento de $V(t)$ com o tempo, para o caso particular em que não há recombinação entre os portadores ($\alpha = 0$), discutido em detalhes no Capítulo IV.

Como foi observado naquela oportunidade, a condição de cruzamento dos planos trazeiros é que $E_0 > 1$. Note-se que, como $\alpha = 0$, a diminuição dos portadores positivos e negativos, que compõem a carga espacial inicialmente distribuída no dielétrico, se dá, apenas, por neutralização nos respectivos eletrodos. Assim, a carga residual nos eletrodos será, sempre, $\pm(E_0 - 1)$ conforme mostra a equação (IV.64).

Para um melhor entendimento da Figura 13 façamos algumas considerações preliminares. Chamaremos de *carga separada* positiva à quantidade de carga positiva que, sem sofrer recombinação, atravessou o plano $s^-(t)$ em direção ao catodo durante o decorrer do processo. À igual quantidade de carga negativa que fluiu através de $s^+(t)$ durante o processo, em direção ao anodo, chamaremos *carga separada* negativa.

O gráfico da Figura 13 mostra a variação da carga separada positiva para o caso em que $\alpha = K + 1$ (relação de Langevin).

Considerando que a carga residual no catodo (q_r) é igual à sua carga inicial $-E_0$, mais a carga separada positiva $q_s(t_c)$, temos:

$$q_r = -E_0 + q_s(t_c) \quad , \quad (V.1)$$

e, com o emprego da equação (IV.34) para o catodo, temos

$$q_s(t_c) = E_0 (1 - e^{-1/E_0}) \quad . \quad (V.2)$$

Para pequenos valores E_0 temos, aproximadamente,

$$q_s(t_c) = E_0 \quad ,$$

que é o comportamento mostrado pela curva da Figura 13 para valores de E_0 até, aproximadamente, 0,5.

Para grandes valores de E_0 , a expansão da equação (V.1) nos conduz a,

$$q_s(t_c) = 1 \quad (V.3)$$

ou seja, à medida que E_0 cresce a carga espacial inicialmente distribuída dielétrico ($\rho_0 = 1$), tende a ser completamente separada, o que é também visto na figura.

Na Figura 14 ilustra-se a distribuição espacial de portadores positivos e negativos para diferentes instantes, no caso em que $E_0 = \kappa = 1$ e $\alpha = 0$, isto é, ausência de recombinação. Como a condição de cruzamento para este caso ($E_0 > 1$) não é verificada, os planos trazeiros aproximam-se assintoticamente, quando $t \rightarrow \infty$, tendendo ao encontro na posição central do dielétrico $x = 0,5$.

É importante tecer algum comentário à respeito da derivada primeira do potencial dV/dt , em particular no ponto em que o potencial torna-se constante como é o caso de $V(0,6)$ na Figura 6, por exemplo.

Consideremos esta primeira curva da Figura 6 para efeito de raciocínio. Quando o tempo aproxima-se do valor $t^+ = 0,6$, somente cargas positivas ainda permanecem no interior do dielétrico e dirigindo-se para o catodo onde estão sendo, continuamente, neutralizadas. A corrente total, nestas condições, pode ser escrita

$$0 = \rho^+ E + \frac{E}{t}$$

que integrada em x fornece,

$$\frac{dV}{dt} = - \int_{s^+(t)}^1 \rho^+ E dx \quad . \quad (V.4)$$

Como, também, o campo elétrico decai continuamente com o tempo podemos concluir que, também dV/dt tende a zero (para $V = \text{cte.}$) de maneira contínua e a curva $V(t)$ tende ao valor residual V_r de maneira suave, sem irregularidades.

FIGURA 1 - Portadores uniformemente distribuídos no dielétrico com $V = 0$ entre os eletrodos

FIGURA 2 - Configuração de portadores no dielétrico após a aplicação de uma voltagem entre os eletrodos ($\kappa > 1$)

FIGURA 2-a - Configuração final a que tendem os portadores no dielétrico para $\sigma_0 < 1$ e $\alpha = 0$ ($\kappa > 1$)

FIGURA 3 - Configuração de portadores no dielétrico num instante posterior ao cruzamento ($t > t_c$)

FIGURA 4 - Decaimento do potencial $V(t)$ (caso geral)

FIGURA 5 - Decaimento do potencial $V(t)$ (caso geral)

FIGURA 6 - Decaimento do potencial $V(t)$ (caso geral)

FIGURA 7 - Decaimento do potencial $V(t)$ (relação de Langevin)

FIGURA 8 - Decaimento do potencial $V(t)$ (relação de Langevin)

FIGURA 9 - Decaimento do potencial $V(t)$ (relação de Langevin)

FIGURE 10 - Derivative of $V(t)$ ($\alpha=0$)

FIGURA 11 - Decaimento do potencial $V(t)$ ($\alpha = 0$)

FIGURA 12 - Decaimento do potencial $V(t)$ ($\alpha = 0$)

FIGURA 13 - Carga separada positiva para $\alpha = \kappa + 1$

FIGURA 14 - Distribuição espacial de carga total no dielétrico
 para vários instantes ($\alpha = 0$)

APÊNDICE

RELAÇÃO DE LANGEVIN

A demonstração original para a relação de Langevin, dada pela equação (IV.1), é apresentada na referência 6. Optamos aqui, no entanto, por uma dedução menos formal e mais intuitiva análoga apresentada na referência 7.

Consideremos que portadores positivos e negativos movam-se num meio de constante dielétrica ϵ com velocidades proporcionais aos campos elétricos que agem sobre eles; tais campos são admitidos serem criados pelos portadores situados em suas vizinhanças.

Assim, se um portador positivo está na posição A e um negativo na posição B, e não existirem outros portadores numa distância comparável a $AB = r$, estes portadores mover-se-ão um em direção ao outro com velocidades dadas por

$$v_+ = \mu_+ E \quad , \quad (1)$$

$$v_- = \mu_- E \quad (2)$$

onde μ_+ e μ_- são as mobilidades dos portadores, e o campo elétrico dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{r^2} \quad , \quad (3)$$

com e a carga elementar.

A velocidade relativa dos portadores será, das equações anteriores,

$$v = v_+ + v_- = \frac{(\mu_+ + \mu_-) e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \quad (4)$$

Se estes portadores, em seus movimentos de mútua aproximação, atingem uma distância em torno da que designaremos por $r = r_0$ constituindo uma nova entidade eletricamente neutra, chamaremos a este fenômeno de recombinação entre os portadores. O cálculo subsequente mostrará que o resultado obtido independe da distância r_0 .

Seja n a densidade de portadores em B; o número de portadores negativos, por segundo, que atravessa a superfície esférica centrada em A (portador positivo) e raio r_0 , será

$$nvs = nv(4\pi r_0^2) ,$$

e usando a expressão para a velocidade relativa, equação (4)

$$n \frac{(\mu_+ + \mu_-)e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0^2} (4\pi r_0^2) = \frac{(\mu_+ + \mu_-)e}{\epsilon} n$$

portadores/segundo; destes, apenas um recombinará com a carga positiva localizada em A.

Se, no entanto, houver uma densidade m de portadores positivos em A, o número de portadores recombinados na unidade de tempo será

$$\frac{(\mu_+ + \mu_-)e}{\epsilon} mn ,$$

ou, em termos de densidades de cargas

$$= \frac{(\mu_+ + \mu_-)}{\epsilon} \rho_+ \rho_- ,$$

onde designamos por *coeficientes de recombinação* a expressão

$$\alpha = \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon} , \quad (5)$$

que é a relação de Langevin.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) FERREIRA, G.F.L. - Alguns casos integráveis em cinética de carga espacial - Tese de Livre-Docência, IFQSC, USP, 1973
- (2) von Hippel, A.; GROSS, E.P.; GELATIS, J.G. and GELLER, M. - Photocurrent, Space - Charge Buildup, and Field Emission in Alkali Halide Crystals, Phys. Rev., vol. 91, nº 4, 568-379, 1953.
- (3) HUGHES, R.C. - Germinate Recombination of X-Ray Excited Electron-Hole Pairs in Anthracene, J. Chem. and Phys., vol. 55, nº 12, 5442-5447, 1971.
- (4) FAUGHNAN, Brian W.; CRANDALL, Richard S. and LAMPERT, Murray A. - Model for the bleaching of WO_3 electrochromic films by an electric field, Apl. Phys. Phys. Letters, vol. 27, nº 5, 275-277, 1975.
- (5) MANY, A. and RAKAVY, G. - Theory of transient Space-Charge-Limited Currents in solids on the Presence of Trapping, Phys. Rev., vol. 126, nº 6, 1980-1988, 1962.
- (6) LANGEVIN, P. - Ann. de Chim. et de Phys., 28, p. 287, 1903.
- (7) THOMSON, J.J. and THOMSON, G.P. - "Conduction of Electricity through gases", 3a. ed., Dover Publications, 1969, vol. II, p. 47-48.