UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

DESENVOLVIMENTO DE UM FOTOELASTICÍMETRO E ALGUMAS APLICAÇÕES

RUY BARBOZA

Trabalho apresentado ao Instituto de Física e Química de São Carlos, da USP, para obtenção do Título de Mestre em Física Aplicada e Ciência dos Materiais.

Orientador:

Dr. Milton Ferreira de Souza

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Milton Ferreira de Souza (IFQSC/USP)

Dr. Renê Ayres Carvalho (IFQSC/USP)

Dr. Akimasa Sakamoto (UFSCAR)

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

São Carlos, junho de 1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

DESENVOLVIMENTO DE UM FOTOELAS-
TICÍMETRO E ALGUMAS APLICAÇÕES.

Ruy Barboza

(Trabalho apresentado ao Insti-
tuto de Física e Química de
São Carlos, USP, para a obten-
ção do título de Mestre em Fí-
sica Aplicada e Ciência dos
Materiais).

Orientador:

Dr. Milton Ferreira de Souza.

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Milton Ferreira de Souza (IFQSC/USP)

Dr. René Ayres Carvalho (IFQSC/USP)

Dr. Akimasa Sakamoto (UFSCAR)

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
São Carlos, junho de 1978

AGRADEÇO

ao Prof. Milton Ferreira de Souza, pelo acolhimento em seus laboratórios e pela orientação e apoio;

aos professores Máximo Siu Li, Renê Ayres, Renê Robert e a todos os amigos que direta ou indiretamente me ajudaram na realização deste trabalho;

o apoio e espírito de colaboração dos amigos que compõem o corpo técnico deste departamento.

Dedicado a

Amélia Pecorari Barbosa,
minha querida mãe.

Este trabalho foi realizado com a ajuda financeira do CNPq,
FAPESP e FINEP.

INDICE

INTRODUÇÃO	1
Sistemas de medida	3
Automatização	5
CONCEITOS DE ÓTICA	8
Ondas planas	8
Representação da luz polarizada	10
O vetor de Stokes	11
Matrizes de Mueller	14
Ótica em cristais	17
Classificação ótica dos cristais	20
Fotoelasticidade	21
TEORIA DO FOTOELASTICÍMETRO CONSTRUÍDO	24
Obtenção da expressão da intensidade I	25
Expansão de I em termos de ω	29
Medida do parâmetro Δ	30
Variação da componente DC da luz	32
Medida de K' (constante de calibração)	34
Erro devido ao desalinhamento ótico	35
Medida dos parâmetros da luz elipticamente polarizada	41
APLICAÇÕES DO INSTRUMENTO	47
Considerações sobre as experiências realizadas	47
Teoria do método fotoelástico	49
Discussão dos resultados	55
DETALHES DO EQUIPAMENTO	69
A fonte de luz	69
O monocromador	72
O sistema varifocal	74
Espessura da faixa de luz sobre a amostra	75

(cont. Detalhes do Equipamento)

Suporte da amostra	76
Constante de tempo do "lock-in" versus velocidade da amostra	77
A placa moduladora	78
- Influência dos harmônicos	84
- Abertura angular	85
- Birrefringência residual	87
- Calibração	88
Polarizador de entrada e analizador	92
Alinhamento	93
Alinhamento das amostras	93
A válvula fotomultiplicadora	94
A fonte de alimentação da fotomultiplicadora	96
Atenuação nos cabos	98
Medidas de Δ a baixas temperaturas	100
Análise do sinal e sensibilidade	103
Influência da tensão residual da amostra	114
Sensibilidade e precisão (resumo)	123
 SACARÍMETRO AUTOMÁTICO	 125
Descrição do esquema e teoria de funcionamento	126
Circuito eletrônico do medidor de defasagem	129
Equipamento utilizado	131
Resultados obtidos	132
 APÊNDICES	
1 - Representação matemática do ruído	135
2 - Efeito da contaminação da segunda harmônica das ondas elásticas do modulador	137
 REFERÊNCIAS	 141

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O processo de investigação em que se baseia o presente trabalho é a análise da modificação do estado de polarização da luz, quando esta interage com a matéria. Trata-se de um importante método experimental para o estudo da estrutura dos materiais, sendo também aplicável na indústria.

O estado de polarização genérico é configurado por uma elipse. Os parâmetros dessa elipse estão definidos na pág. 11 e podem ser medidos por vários meios, adequado cada um para cada tipo de experiência. A medida desses parâmetros constitui uma medida indireta dos parâmetros macroscópicos ϵ , μ e σ do material, com os quais relacionam-se teoricamente. Finalmente, procura-se estabelecer a conexão destes parâmetros eletromagnéticos assim medidos com os modelos prováveis da estrutura do material em estudo.

Incidindo um feixe de luz sobre a amostra pode-se ter, após a interação, dois feixes: o transmitido e o refletido. No caso de metais e outros materiais não transparentes tem-se apenas o feixe refletido. Um ou mais ângulos de incidência deverão ser escolhidos criteriosamente de modo a facilitar a detecção e a análise dos dados. Se a amostra for transparente pode-se estudar a luz transmitida. Neste caso o feixe deve incidir normalmente sobre a superfície da amostra.

Tem-se também experiências com materiais em que o estado de polarização da luz é modificado pelo fenômeno de espalhamen-

to¹ .

O termo *elipsometria*, que é inicialmente associado com a medida dos parâmetros da elipse da luz, é mais comumente reservado na literatura às experiências que envolvem processos de reflexão. Uma discussão do termo é feita extensivamente por R.M.A. Azzan^{2a} .

As experiências mais comuns em elipsometria envolvem o estudo de propriedades de condutores e semicondutores. Ao lado do interesse puramente científico a elipsometria encontra grande aplicação industrial na determinação de finas camadas de óxido que se estabelecem sobre as superfícies dos materiais³.

As experiências com a luz transmitida são mais comuns no estudo de dicroísmo⁴ e na determinação de fenômenos elasto-óticos. As experiências elipsométricas relacionadas com propriedades elasto-óticas chamaremos de *fotoelasticimetria* .

A fotoelasticimetria tem também importância industrial, por exemplo no estudo de materiais têxteis e plásticos. Na investigação científica aplica-se na determinação da estrutura de materiais sólidos transparentes, como cristais e alguns materiais biológicos.

O termo *polarimetria* é relacionado com a medida do ângulo dado pelo poder rotatório de uma substância. A medida do ângulo de giro nessas experiências é um caso particular de medida dos parâmetros de uma elipse, no caso degenerado de elipticidade nula.

Dada sua grande importância científica e tecnológica, e o grande número de pesquisadores que dela se utilizam, a técnica experimental de elipsometria tem merecido inúmeros simpósios².

1. Sistemas de medida

Drude, autor dos primeiros trabalhos que levaram ao conceito de elétrons livres nos metais*, concebeu também o elipsômetro elementar, manual, do qual derivam muitos modernos sistemas de medida. O elipsômetro de Drude está esquematizado abaixo:

l: lâmpada
m: monocromador
P: polarizador
C: compensador
A: analisador
O: olho humano
X: amostra

No método de Drude o compensador variável (por exemplo Soleil ou Babinet) introduz a defasagem que restabelece o estado linear da luz polarizada incidente.

Quando nos restringimos apenas à medida de Δ (ângulo de birrefringência - ver página 20), pode-se usar o método de Senarmont:

(*) Drude estabeleceu a relação entre os parâmetros da luz refletida e os parâmetros ϵ , μ e σ do material, supondo como modelo uma interação do campo da luz com um "gás" de elétrons livres de se movimentarem no interior da estrutura. Cada elétron é uma partícula carregada e seus choques caóticos com a rede são levados em conta através do conceito de força viscosa.

A lâmina de quarto de onda Q tem eixo rápido a 45° com os eixos principais da amostra. Incidindo a luz com plano de polarização a 45° com os eixos da amostra a lâmina Q transforma a luz elíptica emergente em luz polarizada linearmente, com plano de polarização a $\Delta/2$ graus com relação à direção do eixo rápido. Mede-se este ângulo com o analisador A, procurando a extinção do sinal luminoso.

O processo manual é demorado e tedioso, razão pela qual é interessante a utilização de sistemas automáticos. Não obstante pela sua simplicidade os métodos manuais têm sido aplicados em muitas experiências, sendo possível atingir sensibilidade da ordem de 10^{-2} grau^{5,6}.

Inicialmente procurava-se a extinção da luz observando-a diretamente com o olho. O uso de fotocélulas simplesmente como substituta do olho não é muito vantajoso para baixos níveis de iluminação por causa da corrente de escuro que tais dispositivos apresentam. Assim a aplicação de meios eletrônicos para sinal contínuo (DC) de luz se restringe para grandes intensidades de fluxo luminoso. Por outro lado se o sinal de luz puder ser modulado a interferência do ruído da fotocélula poderá ser minimizada e a precisão da medida será maior quanto mais sofisticado for o sistema eletrônico. A idéia de se modular a luz é bem antiga e engenhosos elipsômetros manuais têm sido apresentados⁷ utilizando como técnica a comparação síncrona do sinal e de uma referência; a comparação nestes casos é feita por ajuste manual e um osciloscópio é eventualmente utilizado para monitoração do ajuste.

2. Automatização

Uma grande variedade de sistemas automáticos de medida têm sido apresentados, utilizando como moduladores da luz as seguintes opções:

- a) analisador ou compensador girantes;
- b) células eletro-ópticas (Kerr, Faraday, Pockels);
- c) placas fotoelásticas.

A primeira idéia de automatizar o elipsômetro seria simplesmente substituir o trabalho do giro manual do disco do analisador por um servo motor, como nos sistemas de C. Ribeiro⁸ e Takasaki *et al.*⁹. Ribeiro utilizou como modulador um *chopper* mecânico, ou seja, um pedaço de polaroid oscilando na trajetória do feixe; Takasaki usou como modulador uma célula Pockels de ADP (Ammonium dihydrogen phosphate). Todos estes autores usaram motor difásico para acionar o movimento do analisador. Nestes motores um dos enrolamentos é ligado ao amplificador do sinal erro, que é proporcional à intensidade de luz incidente na válvula fotomultiplicadora; o outro enrolamento é ligado ao circuito de referência, que fornece um sinal AC constante¹⁰.

A sensibilidade desses sistemas não é melhor que a obtida com operação manual. São todavia menos lentos.

Sistemas com analisador ou compensador girantes permitem maior rapidez por permitirem análise puramente eletrônica do sinal, evitando a constante de tempo de servosistemas. Existem muitos trabalhos com analisador (ou compensador) girante e análise de Fourier do sinal por eletrônica analógica. Entre estes citamos (11).

Grande sensibilidade e rapidez também podem ser conseguidas pela análise digital dos sinais. Neste caso a tomada de dados é feita discretamente. Para os sistemas em que se utiliza analisador girante uma teoria básica de análise dos dados é descrita em (12). Trata-se essencialmente de um processo de medida de intensidades para várias posições do analisador. O sistema de aquisição dos dados pode ser acoplado a computadores, tal como em (13), (14), (3). Em (15) encontra-se um exemplo de modulação do sinal por meio de compensador girante.

Outros sistemas utilizam análise analógica ou digital das componentes de Fourier do sinal modulado por células de Kerr ou de Faraday^{16, 17}. O tempo de cada medida nestes sistemas é da

ordem de segundos e a precisão pode chegar a milésimos de gran. Sistema analógico muito rápido e geralmente alta relação sinal-ruído é o descrito em (18); nestas sistemas faz-se uso de um modulador piezoelétrico-ótico (a placa fotoelástica, a ser descrita no presente trabalho).

CAPÍTULO II

CONCEITOS DE ÓTICA

Todos os fenômenos óticos clássicos apoiam-se em quatro fenômenos básicos descritos respectivamente pelas leis de Coulomb, de Biot-Savart, de Faraday e de Maxwell. As equações diferenciais de Maxwell expressam convenientemente estas leis e as equações do material estabelecem as propriedades específicas do meio onde a luz se propaga.

Equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Equações do material:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E}\end{aligned}$$

Os parâmetros estruturais macroscópicos ϵ , μ e σ são em geral tensores de segunda ordem. Em materiais não magnéticos consideramos $\mu = 1$. No vácuo ϵ e μ são escalares de valores ϵ_0 e μ_0 respectivamente.

1. Ondas planas

A equação de onda surge da síntese das equações acima .

No caso particular de ondas planas têm-se campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ senoidais, sendo $\vec{E}$ e $\vec{H}$ ortogonais entre si. Num meio dielétrico ($\vec{J} = 0$) a energia é transportada segundo o vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} .$$

No feixe de ondas planas periódicas o valor médio de $|\vec{S}|$ mede a intensidade da onda:

$$I = \frac{1}{T} \int^T |\vec{S}| dt .$$

A manipulação das equações do problema nos leva a

$$|\vec{S}| = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} E^2 .$$

Portanto

$$I = \frac{1}{T} \int^T \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} E^2 dt$$

(Em nosso trabalho utilizamos o conceito de modulação da intensidade I . Devemos entender então que o período de modulação é muito maior que a janela T da média acima).

Polarização da luz

Podemos conceituar uma fonte incandescente (por exemplo lâmpada de tungstênio) como um conjunto de fontes pontuais distribuídas ao acaso em seus graus de liberdade, e irradiando cada qual em suas frequências características. As diferentes intensidades detectadas em cada frequência resultam no gráfico de distribuição espectral (ver figura à página 71).

Dispositivos óticos especiais (por exemplo grade monocromadora) nos permitem selecionar (filtrar) em uma frequência de

interesse. A filtragem nunca é perfeita de modo que temos geralmente uma distribuição de intensidades em torno da frequência que caracteriza o filtro.

As fontes pontuais que irradiam a esta frequência o fazem nas mais diversas direções de polarização e defasagens relativas. Como resultado a luz total emitida por estas fontes é despolarizada e é chamada de *quasi-monocromática*. Pode-se então visualizar a luz completamente despolarizada como a síntese de todos os estados de polarização possíveis, em igual peso.

Um polarizador é um dispositivo ótico que seleciona determinado estado de polarização. Por exemplo um polarizador linear como uma placa de polaroid com direção de passagem no ângulo θ deixa passar apenas a luz correspondente a vetores $\vec{E}$ na direção θ . O feixe emergente, à frequência ω e assim completamente polarizado, é dito *monocromático*. Mesmo após monocromatizado o feixe é incoerente, no sentido de que há uma flutuação aleatória na defasagem entre as emissões que compõem o estado de polarização selecionado. Além disto as emissões são efetuadas de maneira intermitente (as emissões correspondem a transições eletrônicas independentes).

Por outro lado, se as fontes pontuais responsáveis pela composição de determinado estado de polarização emitirem todas em fase, obtém-se luz monocromática coerente (é o caso da luz de um *laser*).

2. Representação da luz polarizada

Em geral tem-se uma defasagem Δ entre as componentes $\vec{E}_x$ e $\vec{E}_y$, onde $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são arbitrariamente escolhidos (normais a $\hat{k}$ para-

lelo a $\hat{z}$):

$$\vec{E}_x = a_1 \exp(kz - \omega t + \Delta_x) \hat{x}$$

$$\vec{E}_y = a_2 \exp(kz - \omega t + \Delta_y) \hat{y} \quad .$$

A composição destes vetores nos dá a trajetória descrita pelo vetor $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$:

$$\left(\frac{E_x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{2} \frac{E_y}{2} \cos \Delta = \sin^2 \Delta ; \Delta = \Delta_y - \Delta_x ,$$

que corresponde a uma elipse conforme figura abaixo. Nesta figura indicamos também os dois ângulos que definem de maneira diversa a mesma elipse: a elipticidade χ e a direção do eixo maior, ψ .

As seguintes relações podem ser estabelecidas entre os parâmetros que definem a elipse de modo alternativo⁵⁷ :

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$(a^2 + b^2) \cos 2\chi \cos 2\psi = a_1^2 - a_2^2$$

$$(a^2 + b^2) \cos 2\chi \sin 2\psi = 2a_1 a_2 \cos \Delta$$

$$(a^2 + b^2) \sin 2\chi = 2a_1 a_2 \sin \Delta$$

3. O vetor de Stokes

Pela forma das relações acima temos a possibilidade de visualizar cada estado de polarização como correspondente a um ponto na superfície de uma esfera imaginária de raio I_0 constante proporcional a $a^2 + b^2$, ou seja, faz-se I_0 igual à intensidade da

da luz. As coordenadas do ponto são:

$$X = I_0 \cos 2\chi \cos 2\psi$$

$$Y = I_0 \cos 2\chi \sin 2\psi$$

$$Z = I_0 \sin 2\chi$$

Esse lugar geométrico dos pontos representativos de todos os estados de polarização é a esfera de Poincaré:

Um ponto P na esfera de Poincaré pode então ser referida pelo vetor de Stokes:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

onde se verifica que $I_0^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. As transformações dos diferentes estados de polarização através de um circuito ótico podem ser visualizados em termos de trajetórias sobre a superfície da esfera de Poincaré¹⁹.

Para luz parcialmente polarizada verifica-se que

$x^2 + y^2 + z^2 < I_0$. Portanto podemos representá-la pela soma de dois vetores: um que representa a fração despolarizada e outro que representa a fração completamente polarizada. Assim:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} ; I_1 + I_2 = I_0 .$$

Damos abaixo uma lista de vetores de Stokes representativos de diversos estados de polarização.

Exemplos de vetores de Stokes

Considerando-se a intensidade normalizada ($I_0 = 1$):

1) luz despolarizada:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) luz polarizada linearmente a 0° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) luz polarizada linearmente a 45° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) luz polarizada circularmente à direita:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As formas ortogonais a 2), 3) e 4) são, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

X, Y e Z podem variar desde -1 até +1, sendo $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. O número X representa a preferência da polarização para a direção horizontal (+1) comparada à vertical (-1). Y representa a preferência entre -45° (-1) e $+45^\circ$ (+1). Analogamente, Z indica a tendência para circular à direita (+1) e circular à esquerda (-1).

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.730 \\ -0.413 \\ 0.543 \end{pmatrix}$$

4. Matrizes de Mueller

Se um estado de polarização é transformado por um dispositivo ótico, observa-se que o vetor de Stokes da luz emergente é uma transformação linear do vetor de Stokes da luz incidente ; ou seja, cada parâmetro do vetor $(I_2/X_2/Y_2/Z_2)$ que representa a

luz emergente é uma combinação linear de todos os parâmetros do vetor da luz incidente ($I_1/X_1/Y_1/Z_1$):

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} I_1 + a_{01} X_1 + a_{02} Y_1 + a_{03} Z_1 \\ a_{10} I_1 + a_{11} X_1 + a_{12} Y_1 + a_{13} Z_1 \\ a_{20} I_1 + a_{21} X_1 + a_{22} Y_1 + a_{23} Z_1 \\ a_{30} I_1 + a_{31} X_1 + a_{32} Y_1 + a_{33} Z_1 \end{pmatrix}$$

Uma consequência disto é que podemos atribuir a cada dispositivo uma matriz 4 x 4 e a transformação do estado de polarização é obtida pela transformação do vetor pela matriz. Essas matrizes, chamadas matrizes de Mueller, podem ser obtidas de maneira puramente fenomenológica. Os elementos desconhecidos da matriz são obtidos de um sistema de equações montado aplicando-se a matriz incôgnita em vetores cujo resultado da aplicação se conhece a priori (19) (20).

Apresentamos abaixo uma lista de matrizes de Mueller para alguns dispositivos óticos.

Exemplos de matrizes de Mueller

- Vácuo ou material isotrópico, não absorvente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- material isotrópico absorvente, de transmitância k .

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

- polarizador ideal linear com azimuth do eixo de passagem igual a 0° .

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- polarizador ideal linear com azimuth do eixo de passagem a θ graus.

$$C_2: \cos 2\theta$$

$$S_2: \sin 2\theta$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & C_2 & S_2 & 0 \\ C_2 & C_2^2 & C_2 S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 S_2 & S_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- lâmina de quarto de onda ($\delta = 90^\circ$) com azimuth do eixo rápido a 0° .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- retardador linear com eixo a ρ graus e ângulo de birrefringência de δ graus.

$$C_2: \cos 2\rho$$

$$S_2: \sin 2\rho$$

$$C\delta: \cos \delta$$

$$S\delta: \sin \delta$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 + S_2^2 C\delta & C_2 S_2 - C_2 S_2 C\delta & -S_2 S\delta \\ 0 & C_2 S_2 - C_2 S_2 C\delta & S_2^2 + C_2^2 C\delta & C_2 S\delta \\ 0 & S_2 S\delta & -C_2 S\delta & C\delta \end{bmatrix}$$

5. Ótica em cristais

Numa onda plana de luz monocromática os vetores $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ e $\vec{B}$ oscilam e propagam-se segundo $\exp j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, onde $\vec{k}$ é o vetor de onda, normal à frente de onda. Genericamente num meio anisotrópico não magnético tem-se que $\vec{B}$ é paralelo a $\vec{H}$ mas $\vec{D}$ não é paralelo a $\vec{E}$. A energia propaga-se na direção do vetor de Pointing, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, mas a frente de onda toma a direção de $\vec{k}$, normal a $\vec{D} \times \vec{B}$. Os vetores $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{k}$ e $\vec{S}$ estão num mesmo plano, ortogonal a $\vec{B}$ e $\vec{H}$.

A velocidade de fase v_F é a velocidade da frente de onda, na direção $\vec{k}$, sendo $v_F = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. O índice de refração é definido como $n = c/v_F$. Apenas em cristais isotrópicos $\vec{E}$ é paralelo a $\vec{D}$, sendo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; assim,

$$n = \frac{c}{v_F} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon |\vec{E}|}{\epsilon_0 |\vec{E}|}} = \sqrt{\frac{|\vec{D}|}{\epsilon_0 |\vec{E}|}}$$

$$n^2 = \frac{D}{\epsilon_0 E}$$

($\mu = \mu_0 \approx 1$ em dielétricos, não magnéticos).

Em materiais não isotrópicos tem-se:

$$n^2 = \frac{\vec{D}^2}{\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{D}}$$

Em cristais em que a excitação elétrica depende da direção de $\vec{E}$, supondo linearidade, temos:

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z$$

$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z$$

Os ϵ_{ij} são componentes do tensor elétrico que caracteriza o meio.

O tensor ϵ é simétrico, podendo ser diagonalizado segundo as direções principais x' , y' e z' dos termos $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\epsilon_{z'}$ da diagonal. Se nos referirmos a um sistema de coordenadas x , y e z segundo essas direções principais podemos escrever:

$$D_x = \epsilon_x E_x$$

$$D_y = \epsilon_y E_y$$

$$D_z = \epsilon_z E_z$$

Da expressão $n^2 = \frac{\vec{D}^2}{\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{D}}$ temos:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\epsilon_0 \left(\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} \right)}{|\vec{D}|^2}$$

Normalizando para $|\vec{D}| = n$, temos o elipsoide (indicatriz ótica):

$$\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} = 1$$

Os eixos do elipsóide são chamados de eixos principais. A distância da origem a um ponto qualquer da superfície dá o índice de refração associado com o vetor $\vec{D}$ que vibra naquela direção. A intersecção, pela origem, do elipsóide com o plano contendo o vetor $\vec{D}$ é uma elipse. O vetor $\vec{D}$ é ortogonal a $\vec{k}$. O índice de refração maior está na direção do eixo maior da elipse e o índice menor está na direção do eixo menor. Resolvendo $\vec{D}$ em duas componentes segundo esses eixos, ambas propagam-se a velocidades diferentes entre si.

Birrefringência: por definição birrefringência é a diferença $n_1 - n_2$ entre o maior e o menor índices de refração. Se o material tem espessura d a diferença de defasagens entre as duas componentes de

$\vec{D}$ referidas acima, ao fim do percurso, é

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 - n_2) ,$$

chamado de "ângulo de birrefringência".

6. Classificação ótica dos cristais

- Cristais uniaxiais: Nestes, $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Tem-se um elipsoide de revolução em torno do eixo z. O plano normal a z pela origem intercepta o elipsoide segundo um círculo. Portanto $D_x = D_y$ e $n_x = n_y$ e não há birrefringência ao longo do eixo z, que é chamado por esta razão de eixo ótico.

São uniaxiais os materiais que cristalizam nos sistemas trigonal, tetragonal e hexagonal. São exemplos a calcita, o quartzo e o nitrato de prata.

- Cristais biaxiais: $n_x \neq n_y \neq n_z \neq n_x$. O elipsoide apresenta duas seções circulares, passando pela origem. Tem-se então dois eixos óticos, ou seja, há duas direções ao longo das quais o material não apresenta birrefringência.

Os sistemas cristalinos necessariamente biaxiais são: monoclinico, triclinico e ortorrômbico. Exemplos: mica, ácido tartárico e nitrato de potássio.

- Cristais isotrópicos: $n_x = n_y = n_z$ e o elipsoide degenera em esfera. Portanto qualquer direção constitui um eixo ótico. Cristais assim não birrefringentes cristalizam-se no sistema isotrópico. Também originalmente não birrefringentes são os materiais amorfos. São exemplos os vidros (crown, flint) e qualquer cristal do sistema cúbico (KCl, NaCl, etc.)

São birrefringentes também materiais biológicos como colâgeno, celulose e fibras musculares, onde a estrutura molecular apresenta uma orientação preferencial.

7. Fotoelasticidade (57)

A birrefringência de um cristal fica perfeitamente determinada pelo elipsoide indicatriz ótica, de equação:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 .$$

Um esforço aplicado, de componentes P_{xx} , P_{xy} , etc., deforma o elipsoide, que fica então modificado para a equação:

$$a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2 + a_{zz} z^2 + a_{yz} yz + a_{xz} xz + a_{xy} xy = 1 .$$

Os coeficientes a_{ij} são, em primeira aproximação, função linear das compoenntes do esforço. Tem-se então relações do tipo:

$$a_{xx} = \frac{1}{n_x^2} + q_{11} P_{xx} + q_{12} P_{yy} + q_{13} P_{zz} + q_{14} P_{yz} + q_{15} P_{zx} + q_{16} P_{xy};$$

$$a_{yz} = q_{41} P_{xx} + q_{42} P_{yy} + q_{43} P_{zz} + q_{44} P_{yz} + q_{45} P_{zx} + q_{46} P_{xy};$$

etc...,

onde os q_{ij} são as constantes elasto-ópticas. Os índices referem-se a pares de eixos. Tem-se: 1 = xx, 2 = yy, 3 = zz, 4 = yz, 5 = xz e 6 = xy .

Em cristais cúbicos os eixos principais dos elipsoides

correspondentes aos tensores dielétrico e de esforços coincidem.

As relações acima simplificam-se para:

$$a_{xx} = \frac{1}{n^2} + q_{11} P_{xx} + q_{12} P_{yy} + q_{12} P_{zz}$$

$$a_{yy} = \frac{1}{n^2} + q_{12} P_{xx} + q_{11} P_{yy} + q_{12} P_{zz}$$

$$a_{zz} = \frac{1}{n^2} + q_{12} P_{xx} + q_{12} P_{yy} + q_{11} P_{zz}$$

$$a_{yz} = a_{zx} = a_{xy} = 0 \quad .$$

Supondo uma frente de onda no plano xy , normal a $\vec{k}$, a elipse que resulta da interseção desse plano com o elipsoide dielétrico, pela origem, é dada por:

$$a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2 = 1 \quad .$$

Portanto os índices de refração ficam dados por:

$$n'_x = \frac{1}{\sqrt{a_{xx}}} \quad ; \quad n'_y = \frac{1}{\sqrt{a_{yy}}} \quad .$$

Então:

$$\frac{1}{n'^2_x} - \frac{1}{n'^2_y} = a_{xx} - a_{yy} = (q_{11} - q_{12}) (P_{xx} - P_{yy}) \quad .$$

Mas:

$$\frac{1}{n'^2_x} - \frac{1}{n'^2_y} = \frac{(n'_z - n'_x)(n'_x + n'_y)}{n'^2_x n'^2_z} = \frac{(n'_y - n'_x) 2n}{n^4} = \frac{2}{n^3} (n'_y - n'_x) \quad ,$$

pois na prática $n \approx n'_x, n'_y$. (n é o índice da refração do cristal cúbico, antes da deformação).

Portanto,

$$\Delta n = n'_y - n'_x = \frac{n^3}{2} (q_{11} - q_{12}) (P_{xx} - P_{yy}) .$$

O ângulo de birrefringência é, para uma amostra de espesura d ,

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \Delta n = \frac{\pi d}{\lambda} n^3 (q_{11} - q_{12}) (P_{xx} - P_{yy}) .$$

Neste trabalho supõe-se conhecida a constante (ótica) $q_{11} - q_{12}$, característica do material. Tem-se abaixo uma tabela extraída de (21):

<u>Cristal</u>		<u>$q_{11} - q_{12}$</u>
Li F	—	- 0.108
NaCl	—	- 0.043
K Cl	—	+ 0.046
K Br	—	+ 0.049
K I	—	+ 0.041
Mg O	—	- 0.24

A medida de δ permite-nos conhecer o esforço aplicado e assim medimos os $\Delta P = P_{xx} - P_{yy}$ em cada ponto, provocados internamente pela introdução de defeitos no corpo do material. A conexão teórica de ΔP com os tipos de defeitos depende do tipo de experiência (ver página 49 e seguintes).

CAPÍTULO III

TEORIA DO FOTOELASTICÍMETRO CONSTRUÍDO

Esquema do instrumento:

Descrição: A luz da lâmpada L é monocromatizada pelo monocromador M e um feixe focalizado pelo telescópio t sobre a amostra X torna-se linearmente polarizado a 45° (referidos à horizontal) pelo polarizador de entrada, P . Após passar pela amostra a luz está elipticamente polarizada devido à defasagem Δ por ela introduzida. A placa fotoelástica M modula a defasagem da luz que a atravessa; o analisador A restabelece o estado de polarização linear do feixe, a -45° . A fotomultiplicadora F converte o sinal luminoso em sinal elétrico, seja componente AC é analisada pelo amplificador *lock-in*, que nos fornece o valor de Δ . O si-

nal de referência de que necessita o *lock-in* é obtido do circuito eletrônico que alimenta o transdutor M.

Por razões a se examinar a corrente DC da fotomultiplicadora é normalizada (feita constante) por meio de um circuito eletrônico acoplado à fonte da fotomultiplicadora.

1. Obtenção da expressão teórica da intensidade I da luz incidente na fotomultiplicadora.

1.1) Matrizes das componentes do circuito

a) A matriz da placa fotoelástica - A ação da placa é modular a diferença de fase entre as componentes do campo elétrico da radiação luminosa. Isto é conseguido da seguinte maneira: conforme in-

dicado na figura um para-

lelepípedo (A) de sílica

fundida é justaposto (co-

locado) a outro paralele-

pípedo (B), este de mate-

rial piezoelétrico (cris-

tal de quartzo). O bloco

piezoelétrico é dimensionado de modo a oscilar mecanica-

mente na direção x. Assim geramos ondas elásticas planas

à frequência f que se propagam também no outro paralelepí-

pedo. Sendo este construído com material amorfo (sílica

fundida = vidro), teremos como resultado a modulação da di-

ferença entre os índices de refração nas direções y e x

respectivamente. Quando o feixe de luz atravessa este ma-

terial a diferença de fases entre as componentes y e x do campo elétrico é proporcional à diferença dos índices de refração, sendo a seguinte a expressão que relaciona as duas quantidades:

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_y - n_x) \quad .$$

Como o índice de refração é modulado temos a seguinte expressão:

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t \quad .$$

A placa constitui então um retardador modulado, sendo a seguinte sua matriz de Mueller (eixos principais nas direções x e y):

$$M_{\delta,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

onde o índice "0" indica o ângulo de 0° dos eixos principais da placa com as direções x e y.

b) A matriz da amostra - Em nossas medidas do perfil fotoelástico utilizamos amostras em que os defeitos nelas introduzidos faziam corresponder um elipsoide indicatriz ótica de eixos principais nas direções x e y. Assim, como a diferença entre os índices de refração acarreta uma defasagem Δ entre as componentes do campo elétrico, a ma-

triz de Mueller da amostra é:

$$X_{\Delta,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\Delta & \sin\Delta \\ 0 & 0 & -\sin\Delta & \cos\Delta \end{bmatrix}$$

c) As matrizes do polarizador e do analisador - A matriz genérica de um polarizador com eixo de passagem na direção θ (relativo a x) é dada por:

$$P_{\theta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos\theta \sin\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2) O vetor de Stokes para o estado final de polarização da luz.

Conhecidas as matrizes dos componentes do circuito ótico, podemos determinar o vetor final:

a) Ação do polarizador de entrada ($\theta = 45^\circ$):

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor que representa a luz totalmente despolarizada de intensidade I_0 .

b) Ação da amostra (C: cosseno; S: seno):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C\Delta & S\Delta \\ 0 & 0 & -S\Delta & C\Delta \end{bmatrix} \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ C\Delta \\ -S\Delta \end{bmatrix}$$

c) Ação da placa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C\delta & S\delta \\ 0 & 0 & -S\delta & C\delta \end{bmatrix} \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ C\Delta \\ -S\Delta \end{bmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ C\delta C\Delta - S\delta S\Delta \\ -S\delta C\Delta - C\delta S\Delta \end{bmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ C(\delta + \Delta) \\ -S(\delta + \Delta) \end{bmatrix}$$

d) Ação do analisador ($\theta = -45^\circ$)

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ C(\delta + \Delta) \\ -S(\delta + \Delta) \end{bmatrix} = \frac{I_0}{4} \begin{bmatrix} 1 - C(\delta + \Delta) \\ 0 \\ -1 + C(\delta + \Delta) \\ 0 \end{bmatrix} .$$

O vetor final é então:

$$\frac{I_0}{4} \begin{bmatrix} 1 - C(\delta + \Delta) \\ 0 \\ -1 + C(\delta + \Delta) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{I_0}{4} (1 - C(\delta + \Delta)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que indica que o estado de polarização incidente na fotomultiplicadora é linear a -45° , sendo a intensidade da luz

$$I = \frac{I_0}{4} (1 - \cos(\delta + \Delta)) .$$

2. Expansão da expressão da intensidade da luz em termos do parâmetro ω (frequência de modulação da defasagem).

Temos:

$$\cos(\delta + \Delta) = \cos\delta \cos\Delta - \sin\delta \sin\Delta$$

mas $\delta = \delta_0 \sin \omega t$, portanto (22):

$$\cos\delta = \cos(\delta_0 \sin \omega t) = J_0(\delta_0) + J_2(\delta_0) \cos 2\omega t + J_4(\delta_0) \cos 4\omega t + \dots$$

$$\sin\delta = J_1(\delta_0) \sin \omega t + J_3(\delta_0) \sin 3\omega t + \dots$$

onde os $J_1(\delta_0)$ são funções de Bessel de primeira espécie calculadas no argumento δ_0 .

Portanto:

$$I = \frac{I_0}{4} [1 - J_0(\delta_0) \cos\Delta + J_1(\delta_0) \sin\Delta \sin \omega t - J_2(\delta_0) \cos\Delta \cos 2\omega t]$$

onde conservamos das séries apenas os termos de interesse nas medidas.

3. Medida do parâmetro Δ

A luz de intensidade I emergente do último componente ótico (o analisador) incide na válvula fotomultiplicadora. Esta válvula traduz o sinal de luz em termos de corrente elétrica (i). A variável dominante que influi na relação entre a intensidade de luz e a corrente elétrica é a tensão V de alimentação da fotomultiplicadora. Essa relação é linear quando conservamos V constante.

Portanto: $i = K(V) I$.

Temos então:

$$i = K(V) \frac{I_0}{4} [1 - J_0(\delta_0) \cos\Delta + J_1(\delta_0) \sin\Delta \sin t - J_2(\delta_0) \cos\Delta \cos 2\omega t]$$

Fazendo passar esta corrente por um circuito RC separa -

mos as componentes AC e DC. A componente DC é enviada a um micro-amperímetro para que a corrente DC (e portanto o nível DC da intensidade de luz) seja monitorada. A componente AC é enviada ao amplificador "lock-in", cuja função é medir as intensidades das correntes

$$i_{\omega} = K(V) \frac{I_0}{4} J_1(\delta_0) \sin\Delta \sin \omega t$$

e

$$i_{2\omega} = -K(V) \frac{I_0}{4} J_2(\delta_0) \cos\Delta \cos 2\omega t$$

A saída S do "lock-in" é uma tensão DC proporcional ao valor de pico da corrente (ver página 106 e seguintes)

$$S_{\omega} \propto \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{4} K(V) J_1(\delta_0) \sin\Delta$$

$$S_{2\omega} \propto \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{4} K(V) J_2(\delta_0) \cos\Delta$$

Portanto:

$$\tan\Delta = - \frac{J_2}{J_1} \frac{S_{\omega}}{S_{2\omega}}$$

Logicamente os valores de J_1 e J_2 dependem do parâmetro δ_0 , que por sua vez depende da amplitude de oscilação mecânica da placa moduladora. Além disto, δ_0 depende da frequência da luz utilizada. Esse parâmetro deve ser determinado independentemente.

Vemos portanto que o sistema acima nos permite conhecer o ângulo Δ sem necessidade de componentes do tipo lâmina de quar

to de onda no circuito ótico. O único componente dependente da frequência ótica, com exceção da amostra, é a placa moduladora. Esta dependência se dá através do parâmetro δ_0 , fixado a priori na calibração do instrumento.

4. Variação da componente DC da luz

Numa medida de Δ a componente DC da intensidade da luz (I_{DC}) pode variar devido a diferentes coeficientes de absorção nas diferentes regiões da amostra. Para evitar o efeito dessa variação de intensidade mantivemos constante a componente i_{DC} da corrente da fotomultiplicadora.

Temos:

$$I = I_{DC} + I_{AC}$$

e

$$i = K(V) I ,$$

portanto

$$i_{AC} + i_{DC} = K(V) I_{DC} + K(V) I_{AC} .$$

De $i_{DC} = K(V) I_{DC}$ tem-se:

$$K(V) = \frac{i_{DC}}{I_{DC}} .$$

Assim,

$$i_{AC} = i_{DC} \frac{I_{AC}}{I_{DC}} .$$

Na relação I_{AC}/I_{DC} cancela-se a dependência com a absorção da amostra.

Tem-se então na saída do "lock-in" (mantendo $i_{DC} = \text{cte}$):

$$S_{\omega} \propto i_{DC} \frac{\frac{1}{\pi} J_1 \sin \Delta}{1 - J_0 \cos \Delta}$$

e

$$S_{2\omega} \propto i_{DC} \frac{\frac{1}{\pi} J_2 \cos \Delta}{1 - J_0 \cos \Delta}$$

(a constante de proporcionalidade é a mesma nas duas expressões acima).

Calibrando a placa moduladora em $\delta_{0CAL.}$ tal que

$J_0(\delta_{0CAL.}) = 0$ temos $\delta_{0CAL.} = 138^\circ$, sendo neste ponto $J_1 = 0.52$ e $J_2 = 0.43$. Assim obtemos finalmente:

$$S_{\omega} = K' J_1 \sin \Delta$$

e

$$S_{2\omega} = K' J_2 \cos \Delta$$

entendendo-se que $J_1 = J_1(138^\circ)$ e $J_2 = J_2(138^\circ)$.

Aqui o valor de K' não depende de Δ e portanto pode ser determinado independentemente da presença da amostra. A vantagem disto ficará clara na próxima secção.

Vemos pela expressão $i_{DC} = K(V) I_{DC}$ que para mantermos

i_{DC} constante quando I_{DC} varia temos que variar $K(V)$; ou seja, temos que variar a tensão V de alimentação da fotomultiplicadora de acordo com a variação de I_{DC} . Em nosso sistema isto é feito automaticamente através de uma modificação no circuito eletrônico da fonte de alimentação.

5. Medida de K'

Como $S_{2\omega} = K' J_2 \cos \Delta$, uma vez fixado i_{DC} podemos medir K' de maneira definitiva lendo o valor $S_{2\omega}$ quando a amostra não está no circuito ótico. Neste caso $\Delta = 0$ ($\cos \Delta = 1$):

$$S_{2\omega} (\Delta = 0) = K' J_2 \cos 0 = K' J_2 ,$$

ou

$$K' = \frac{S_{2\omega} (\Delta = 0)}{J_2} .$$

Assim,

$$S_{\omega} = \left(S_{2\omega} (\Delta = 0) \frac{J_1}{J_2} \right) \sin \Delta .$$

Podemos então, após a calibração em $\Delta = 0$, determinar Δ com apenas uma medida, independentemente da variação da componente DC da intensidade da luz incidente na fotomultiplicadora.

Em nosso trabalho todas as medidas foram feitas com a corrente DC mantida a um valor constante escolhido entre 1 e 10 μA . Nesta escolha é levada em conta a figura de ruído da válvula fotomultiplicadora com relação aos valores usuais da intensidade de

luz incidente no fotocátodo.

Observação - A expressão de K' deduzida acima não leva em conta as tensões residuais (DC) pré-existent na placa moduladora (ver página 87). Estas fazem corresponder uma birrefringência na direção x (ou y) e portanto podemos escrever:

$$\delta = \delta_R + \delta_0 \sin \omega t ,$$

onde

$$\delta_R = \delta_{\text{residual da placa}} .$$

Consequentemente é fácil concluir que

$$K' = \frac{S_{2\omega}(\Delta = 0)}{J_2 \cos \delta_R}$$

e

$$S_{\omega} = K' \sin(\Delta + \delta_R) .$$

Não obstante, o efeito de δ_R pode ser totalmente ignorado se "anularmos" δ_R conforme método sugerido à página 87 .

6. Erro devido a desalinhamento ótico

Embora em nossas experiências usando o fotoelastímetro interessasse-nos apenas resultados qualitativos, cabe fazermos aqui um estudo do erro que o desalinhamento do sistema ótico pode acarretar nas medidas. Supondo que ao alinharmos o polarizador de entrada P , a amostra X , o modulador M e o analisador A in

introduzamos erros angulares de valores p, x, m e a respectivamente, o vetor da luz incidente na fotomultiplicadora é dado pelo produto:

$$A(-45^\circ + a) \ M(0^\circ + m) \ X(0^\circ + x) \ P(45^\circ + p) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o qual vamos realizar abaixo.

Tem-se:

$$P(45^\circ + p) = \begin{bmatrix} 1 & -S_{2p} & C_{2p} & 0 \\ -S_{2p} & S_{2p}^2 & -S_{2p}C_{2p} & 0 \\ C_{2p} & -S_{2p}C_{2p} & C_{2p}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(-45^\circ + a) = \begin{bmatrix} 1 & S_{2a} & -C_{2a} & 0 \\ S_{2a} & S_{2a}^2 & -S_{2a}C_{2a} & 0 \\ -C_{2a} & -S_{2a}C_{2a} & C_{2a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2m}^2 + S_{2m}^2 C\delta & C_{2m}S_{2m} - S_{2m}C_{2m}C\delta & -S_{2m}S\delta \\ 0 & S_{2m}C_{2m} - C_{2m}S_{2m}C\delta & S_{2m}^2 + C_{2m}^2 C\delta & C_{2m}S\delta \\ 0 & S_{2m}S\delta & -C_{2m}S\delta & C\delta \end{bmatrix}$$

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2x}^2 + S_{2x}^2 C\Delta & C_{2x} S_{2x} - S_{2x} C_{2x} C\Delta & -S_{2x} S\Delta \\ 0 & S_{2x} C_{2x} - C_{2x} S_{2x} C\Delta & S_{2x}^2 + C_{2x}^2 C\Delta & C_{2x} S\Delta \\ 0 & S_{2x} S\Delta & -C_{2x} S\Delta & C\Delta \end{bmatrix}$$

assim:

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -S_{2p} \\ C_{2p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -S_{2p} \\ C_{2p} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ [-S_{2p} C_{2x}^2 + C_{2p} S_{2x}] - [S_{2p} S_{2x}^2 + C_{2p} S_{2x} C_{2x}] C\Delta \\ [-S_{2p} C_{2x} S_{2x} + C_{2p} S_{2x}^2] + [S_{2p} C_{2x} S_{2x} + C_{2p} C_{2x}^2] C\Delta \\ [-S_{2p} S_{2x} - C_{2p} C_{2x}] S\Delta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix}$$

$$M \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 (C_{2m}^2 + S_{2m}^2 C) + L_1 (C_{2m} S_{2m} - S_{2m} C_{2m} C\delta) - M_1 S_{2m} S\delta \\ K_1 (C_{2m} S_{2m} - C_{2m} S_{2m} C\delta) + L_1 (S_{2m}^2 + C_{2m}^2 C\delta) + M_1 C_{2m} S\delta \\ K_1 S_{2m} S\delta + L_1 (-C_{2m} S\delta) + M_1 C\delta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ K_2 \\ L_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$$A \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ K_2 \\ L_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + K_2 S_{2a} - L_2 C_{2a} \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

A intensidade final é então:

$$I = \frac{I_0}{4} (1 + K_2 S_{2a} - L_2 C_{2a})$$

ou seja:

$$I_{DC} = \frac{I_0}{4} \left(1 + [S_{2a} (C_{2m}^2 + S_{2m}^2 J_0) - C_{2a} (C_{2m} S_{2m} - C_{2m} S_{2m} J_0)] [(-S_{2p} C_{2x}^2 + C_{2p} S_{2x}) - (S_{2p} S_{2x}^2 + C_{2p} S_{2x} C_{2x}) C\Delta] + [S_{2a} (C_{2m} S_{2m} - S_{2m} C_{2m} J_0) - C_{2a} (S_{2m}^2 + C_{2m} J_0)] [(-S_{2p} C_{2x} S_{2x}^2) + (S_{2p} C_{2x} S_{2x} + C_{2p} C_{2x}) C\Delta] \right)$$

$$I_\omega = \frac{I_0}{4} J_1 (S_{2a} S_{2m} + C_{2a} C_{2m}) (S_{2p} S_{2x} + C_{2p} C_{2x}) S\Delta \sin \omega t$$

$$I_{2\omega} = \frac{I_0}{4} J_2 \left\{ S_{2a} (S_{2m}^2 + C_{2m} S_{2m}) [(-S_{2p} C_{2x}^2 + C_{2p} S_{2x}) - (S_{2p} S_{2x}^2 + C_{2p} S_{2x} C_{2x}) C\Delta] - C_{2a} (S_{2m} C_{2m} + C_{2m}^2) [(-S_{2p} C_{2x} S_{2x} + C_{2p} S_{2x}^2) + (S_{2p} C_{2x} S_{2x} + C_{2p} C_{2x}) C\Delta] \right\} \sin 2\omega t$$

Nas medidas fizemos $J_0 = 0$. Além disto $I_{2\omega}$ é medido com a amostra fora do suporte ($\Delta = 0$). O "lock-in" nos fornece ($i_{DC} = \text{constante}$):

$$S_{\omega} = K' \frac{I_{\omega}(\Delta)}{I_{DC}(\Delta)} \quad \text{e} \quad S_{2\omega} = K' \frac{I_{2\omega}(0)}{I_{DC}(0)}$$

onde os I referem-se aqui às amplitudes.

Tem-se então a relação:

$$\left(\frac{S_{\omega}}{S_{2\omega}} \right)_{\text{DESAL.}} = \frac{I_{DC}(0)}{I_{2\omega}(0)} \frac{I_{\omega}(\Delta)}{I_{DC}(\Delta)} .$$

Num sistema perfeitamente alinhado teríamos:

$$\left(\frac{S_{\omega}}{S_{2\omega}} \right)_{\text{AL.}} = \frac{J_1}{J_2} S\Delta .$$

Portanto o erro cometido é:

$$\epsilon = \frac{\left(\frac{S_{\omega}}{S_{2\omega}} \right)_{\text{DESAL.}} - \left(\frac{S_{\omega}}{S_{2\omega}} \right)_{\text{AL.}}}{\left(\frac{S_{\omega}}{S_{2\omega}} \right)_{\text{AL.}}} = \frac{J_2}{J_1} \frac{I_{DC}(0)}{I_{2\omega}(0)} \frac{1}{I_{DC}(\Delta)} \frac{I_{\omega}(\Delta)}{S\Delta} - 1$$

Da expressão de I_{DC} vemos que para Δ suficientemente pequeno:

$$I_{DC}(\Delta) \approx I_{DC}(0) .$$

Portanto:

$$\epsilon = \frac{J_2}{J_1} \frac{I_w(\Delta)}{I_{2w}(0)} \frac{1}{S\Delta} - 1 \quad .$$

Considerando-se apenas a, m, p e x pequenos, chegamos à seguinte simplificação:

$$I_w(\Delta) = \frac{I_0}{4} J_1 (1 + 4am) (1 + 4px) s$$

e

$$I_{2w}(0) = \frac{I_0}{4} J_2 (1 + 2m) (1 + 4x^2) (1 - 8apm) \quad .$$

Finalmente, o erro é dada por:

$$\epsilon = \frac{(1 + 4am) (1 + 4px)}{(1 + 2m) (1 + 4x^2) (1 - 8apm)} - 1$$

supondo ainda que $a = m = x = p$, tem-se:

$$\epsilon = \frac{(1 + 4p^2)^2}{(1 + 2p) (1 + 4p^2) (1 - 8p^3)} - 1 = \frac{1 + 4p^2}{(1 + 2p) (1 - 8p^3)} - 1$$

$$= (1 + 4p^2) (1 - 2p) (1 - 8p^3) - 1 = 2p \quad .$$

Por exemplo, se $p = 1^\circ$, o erro será:

$$\epsilon = 3 \times 10^{-2} = 3\%$$

Conclusão - se a imprecisão no alinhamento de cada componente é p radianos, o erro percentual na quantidade medida é da ordem de $100 \times 2p \%$ (p em radianos).

Possibilidade adicional do instrumento

7. Medida dos parâmetros da luz elipticamente polarizada*

Consideramos até agora o caso particular em que a amostra é colocada com seus eixos principais orientados na horizontal e vertical respectivamente, isto porque em nossas experiências era sempre possível orientar facilmente as amostras. Neste caso a elipse da luz polarizada também tem seus eixos na horizontal e vertical.

Todavia, esta não é uma limitação do instrumento. Como mostraremos a seguir podemos medir os parâmetros da elipse qualquer que seja sua orientação.

Seja o estado de polarização da luz incidente na placa representado pela elipse desenhada abaixo (ver também pág. 12):

(*) A proposta deste problema partiu do Prof. Renê Ayres.

Já vimos que os ângulos ψ e χ definem a elipse. O ângulo ψ dá a orientação do eixo; a elipticidade é dada por $\tan \chi = \pm b/a$. O sinal indica o sentido de percurso do vetor $\vec{E}$, sendo negativo se o percurso for "à esquerda".

O vetor de Stokes que representa este estado de polarização é (pág. 12):

$$\begin{pmatrix} I \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\psi \\ \cos 2\chi \sin 2\psi \\ \sin 2\chi \end{pmatrix}$$

Medidas de ψ e χ

Para determinar ψ e χ temos que realizar três medidas . Duas delas utilizando o mesmo arranjo do sistema descrito na experiência anterior. Para a terceira medida apenas introduzimos uma lâmina de quarto de onda a -45° após a amostra, mantendo inalterado o resto do circuito.

a) Sem a lâmina de quarto de onda:

O estado em (1) é dado pelo vetor:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\psi \\ \cos 2\chi \sin 2\psi \\ \sin 2\chi \end{pmatrix}$$

Em (2) temos (S: seno; C: cosseno):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C\delta & S\delta \\ 0 & 0 & -S\delta & C\delta \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ C2\chi C2\psi \\ C2\chi S2\psi \\ S2\chi \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ C2\chi C2\psi \\ C\delta C2\chi S2\psi + S\delta S2\chi \\ -S\delta C2\chi S2\psi + C\delta S2\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

Em (3) temos:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_0 - Y_2 \\ 0 \\ -I_0 + Y_2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Portanto a intensidade da luz incidente na fotomultiplicadora é:

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_0}{2} (1 - C\delta C2\chi S2\psi - S\delta S2\chi) \\ &= \frac{I_0}{2} (1 - J_0 C2\chi S2\psi - J_1 S2\chi \sin \omega t - J_2 C2\chi S2\psi \cos 2\omega t + \dots) . \end{aligned}$$

O amplificador "lock-in" nos fornece os valores:

$$S_{\omega}^0 = K J_1 \sin 2\chi$$

$$S_{2\omega}^0 = K J_2 \cos 2\chi \sin 2\psi$$

onde K é mantido constante (i_{DC} = constante) e $J_0(\delta_0) = 0$. A indicação S^0 nos lembrará que se trata de valores medidos antes de introduzir a lâmina de quarto de onda no circuito.

O valor de K pode ser obtido numa calibração preliminar

com luz polarizada circularmente na entrada.

Tem-se:

$$K = \pm \frac{S_{\psi}^0 (\chi = \pm 45^\circ)}{J_1(\delta_0)}$$

b) Medida após introdução da lâmina de quarto de onda em seguida à amostra:

Na região (2) o vetor de Stokes é dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ C2\chi C2\psi \\ C2\chi S2\psi \\ S2\chi \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -S2\chi \\ C2\chi S2\psi \\ C2\chi C2\psi \end{pmatrix}$$

Em (3), após a placa, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C\delta & S\delta \\ 0 & 0 & -S\delta & C\delta \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -S2\chi \\ C2\chi S2\psi \\ C2\chi C2\psi \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -S2\chi \\ C\delta C2\chi S2\psi + C2\chi C2\psi S\delta \\ -S\delta C2\chi S2\psi + C\delta C2\chi C2\psi \end{pmatrix}$$

A intensidade da luz após o analisador é então:

$$I = \frac{I_0}{2} (1 - C\delta C2\chi S2\psi - C2\chi C2\psi S\delta)$$

ou

$$I = \frac{I_0}{2} (1 - J_0 C^2 \chi S^2 \psi - J_1 C^2 \chi C^2 \psi \sin \omega t - J_2 C^2 \chi S^2 \psi \cos 2\omega t + \dots) .$$

Interessa-nos agora apenas o valor do sinal em ω :

$$S^Q = K J_1 \cos 2\chi \cos 2\psi .$$

O símbolo S^Q indica que a lâmina de quarto de onda está no circuito ótico. O valor de K é o mesmo pois conservamos o valor de i_{DC} .

Com estas tres medidas referidas em a) e b) podemos determinar χ e ψ através das relações:

$$1) \sin 2\chi = S_1 ; \quad S_1 = \frac{S^Q_\omega}{KJ_1} \quad (\text{medida em } \omega) ;$$

$$2) \cos 2\chi \sin 2\psi = S_2 ; \quad S_2 = \frac{S^{Q}_{2\omega}}{KJ_2} \quad (\text{medida em } 2\omega)$$

$$3) \cos 2\chi \cos 2\psi = S_3 ; \quad S_3 = \frac{S^Q_\omega}{KJ_1} \quad (\text{medida em } \omega) .$$

Uma utilidade da medida de todos os parâmetros da elipse seria a determinação do valor absoluto da birrefringência Δ quando não houver possibilidade de orientar de modo exato os eixos principais da amostra.

A matriz da amostra com eixo maior da elipse das tensões (mecânicas) a um ângulo β com a horizontal e atraso Δ , agindo sobre o vetor de Stokes da luz linearmente polarizada a 45° nos dá:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 2\rho + S^2 2\rho C\Delta & C2\rho S2\rho - S2\rho C2\rho C\Delta & -S2\rho S2\rho \\ 0 & C2\rho S2\rho - C2\rho S2\rho C\Delta & S^2 2\rho + C^2 2\rho C\Delta & C2\rho S2\rho \\ 0 & S2\rho S\Delta & -C2\rho S\Delta & C\Delta \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ C2\rho S2\rho - S2\rho C2\rho C\Delta \\ S^2 2\rho + C^2 2\rho C\Delta \\ -C2\rho S\Delta \end{pmatrix}$$

que representa genericamente o estado de polarização elíptica. Podemos fazer a seguinte identificação:

$$\cos 2\rho \quad \text{sen } 2\rho \quad - \quad \text{sen } 2\rho \quad \cos 2\rho \quad \cos \Delta = \cos 2\chi \quad \cos 2\psi = S_3$$

$$\text{sen}^2 2\rho + \cos^2 2\rho \cos \Delta = \cos 2\chi \quad \text{sen } 2\psi = S_2$$

$$-\cos 2\rho \quad \text{sen } \Delta = \text{sen } 2\chi = S_1$$

Resolvendo este sistema de equações obtemos os valores de ρ e $|\Delta|$

A impossibilidade de se medir o sinal de Δ deve-se ao fato de que a mesma elipse pode ser obtida com duas orientações diferentes dos eixos da amostra. Isto é mais fácil de visualizar observando as trajetórias sobre a esfera de Poincare. Todavia, se soubermos a priori o quadrante em que se encontra o eixo ótico, Δ fica perfeitamente determinado.

CAPÍTULO IV
APLICAÇÃO DO FOTOELASTICÍMETRO NO ESTUDO
DA ESTRUTURA DE CRISTAIS

1. Considerações sobre as experiências realizadas

Dado um tipo de experiência temos que estudar o relacionamento das tensões ou deformações, determinadas experimentalmente, com os possíveis modelos estruturais para os defeitos introduzidos controladamente na rede.

Procuramos neste trabalho utilizar o fotoelasticímetro construído em alguns métodos interessantes de investigação. As experiências realizadas estão descritas abaixo:

a) Comparação com resultados bem estabelecidos quanto à formação do centro F em fluoreto de lítio (LiF) por dano de radiação. As tensões mecânicas que se desenvolvem devido à formação do centro F foram estudadas numa série de trabalhos do Prof. Smoluchowsky e outros (24) (25) (26).

A técnica fotoelástica aplicada neste estudo depende, conforme explicaremos à página 49, de uma distribuição conhecida de centros de dilatação (defeitos) ao longo da amostra. Em experiências de dano de radiação fazemos incidir raios-X ionizantes em apenas metade da amostra, forçando assim uma variação abrupta na concentração de centros F (ver figura abaixo). A outra metade é protegida por uma máscara de chumbo. A birrefringência associada às tensões internas assim criadas é tratada como essencialmente análoga à birrefringência considerada no problema termoelásti-

co de uma placa fina infinita com um semi-plano à temperatura T_1 e o outro à temperatura T_2 .

Nossas experiências com LiF confirmaram os resultados anteriormente obtidos.

b) Ainda com o intuito de confirmar resultados prévios de Rabin (27), foi medido o padrão fotoelástico gerado em cristais de halogenetos alcalinos dopados com íons divalentes quando metade irradiados (experiência semelhante à anterior). Procurou-se assim contribuir para a compreensão da rápida colorabilidade que a presença do íon divalente dá aos cristais iônicos quando irradiados com raios-X. Os resultados obtidos serão discutidos à página 58 tendo em vista os resultados de experimentos de relaxação dielétrica (28) (29) posteriores ao trabalho original de Rabin (27).

c) Também foi abordado o problema da difusão de íons divalentes em cristais iônicos, a partir de resultados já estabelecidos (30). Interessou-nos o problema da difusão do íon Co^{++} em KCl. Havia

evidências anteriores, baseadas no estudo do espectro ótico, de que o íon Co^{++} , diferentemente de todos os outros divalentes, deveria estar localizado intersticialmente - portanto acompanhado de duas vacâncias de íons positivos. Os resultados obtidos por Robert (31) e por Ayres (32) indicam também que esta hipótese deve ser correta. A presença das duas vacâncias e a intersticialidade do íon Co^{++} deve levar a uma expansão da rede do KCl, em contraposição à ação dos íons Ca^{++} e Sr^{++} que levam a uma diminuição de volume.

2. Teoria do método fotoelástico

Os resultados dos tres tipos de experimentos, realizados principalmente com a intenção de bem testar o funcionamento do fotoelasticímetro construído, podem ser entendidos da seguinte forma: Seja dada uma placa fina de um cristal cúbico com uma distribuição $C(x)$ de centros de dilatação. Suponhamos que a dilatação (ou compressão) gerada por centro seja $\frac{\Delta V/V}{C}$, onde C é a concentração desses centros por cm^3 e $\Delta V/V$ a variação de volume relativa macroscópica causada por esses centros. Suponhamos tamque a placa esteja livre, isto é, não submetida a forças externas. A solução do problema elástico consiste em dadas essas condições de contorno determinar as deformações $e_{xx}(x)$ e $e_{yy}(y)$.

Quando consideramos a distribuição de centros F criados por radiação X em metade da amostra, tem-se uma concentração $C(x)$ de centros de dilatação conforme figura a seguir.

A expressão de $e_{yy} - e_{xx}$ é (8) :

$$e_{yy} - e_{xx} = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3C_{11}} \left(\frac{\Delta V}{V} \right)_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{b} - \frac{C(x)}{C_0} \right)$$

onde $\left(\frac{\Delta V}{V} \right)_0$ é o valor máximo da expansão livre ($x \gg 0$) e b é a distância a partir da origem onde as tensões se anulam (condições de contorno para solução do problema elástico). Para amostras, finitas, b é indeterminado teoricamente.

O gráfico representativo da expressão de $e_{yy} - e_{xx}$, acima é:

No caso de difusão de átomos a partir de uma superfície do cristal, tem-se uma dilatação dada por

$$C(x) = C_0 e^{-x^2/4DY}$$

O aspecto gráfico da função $C(x)/C_0$ é:

Tem-se a expressão (30) :

$$e_{yy} - e_{xx} = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3C_{11}} \left(\frac{\Delta V}{V} \right)_0 \left(1 - \frac{x}{b} - e^{-x^2/4DY} \right)$$

que é representada por

Observação: a dedução da expressão acima baseou-se na condição de contorno de uma camada infinitamente estreita de átomos para

difundir. Na prática isto é conseguido aspergindo-se algumas gotículas de solução aquosa de impureza. Neste trabalho, foi tentada a difusão de Co^{++} também da seguinte maneira: conservou-se o cristal de KCl imerso em um vapor de CoCl_2 no interior do recinto (forno) previamente evacuado. Isto corresponde a uma concentração constante de átomos para difundir e o perfil de difusão (ou seja, a concentração de impurezas ao longo de x , no tempo t) não será mais a exponencial $e^{-x^2/4Dt}$ e sim a função (55):

$$\frac{C(x)}{C_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{Dt}},$$

onde

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\eta^2) d\eta$$

é a função erro de Gauss.

Assim, obtém-se finalmente:

$$e_{yy} - e_{xx} = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3C_{11}} \left(\frac{\Delta V}{V} \right)_0 \left(\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{Dt}} - \frac{x}{b} \right).$$

O gradiente de tensões internas, causado pela distribuição de impurezas ao longo do comprimento x , torna o cristal birrefringente, com eixos principais nas direções x e y . A rela-

ção entre as componentes do tensor das deformações e o ângulo de birrefringência Δ (para luz com vetor de propagação na direção z) é

$$\Delta = C_{\lambda} \frac{e_{yy} - e_{xx}}{S_{11} - S_{12}} d$$

onde C_{λ} é uma constante do material, conhecida como constante fotoelástica (33); d é a espessura da amostra e S_{11} e S_{12} são constantes elásticas. (A expressão acima pode ser obtida por uma transformação de variáveis da expressão à página 23).

Convém observar que esta solução do problema elástico não é completa uma vez que não considera o cristal como finito. A solução para e_{yy} é essencialmente a diferença entre a função $C(x)$ e uma reta. Da família de retas paralelas que satisfazem ao problema da forma como foi resolvido, apenas uma pode ser aceita. Essa reta é escolhida experimentalmente observando-se os pontos de nulo da birrefringência (30).

Sabendo-se a concentração de defeitos e as demais constantes do cristal determina-se $\frac{\Delta V/V}{C}$. A tabela abaixo lista alguns desses valores de $\frac{\Delta V/V}{C}$ causados por diferentes defeitos (30).

SISTEMA	$\frac{\Delta V/V}{C}$
Sr ⁺⁺ em KCl	0.17
Be ⁺⁺ em KCl	0.16

Considerações adicionais

As seguintes observações com relação à técnica fotoelástica devem ser relembradas. A dificuldade em se obter cristais com baixo padrão de tensões de fundo (residuais) limita bastante o uso desta técnica no caso de medidas de valores absolutos: o nível de tensões residuais está muito acima do limite de sensibilidade do equipamento ($\Delta_{\text{residual}} > 0.05^\circ$ e $\Delta_{\text{mínimo}} = (10^{-3} \text{ a } 10^{-4})^\circ$ respectivamente).

A observação de fenômenos ocorrendo localmente pode ser feita fixando-se a posição da amostra a ser analisada. Neste caso pode-se realizar medidas numa escala de máxima sensibilidade do aparelho. Entretanto, cuidado deve ser tomado devido a uma componente Δ_0 que surge, de valor imprevisível em cada amostra, e para a qual não se tem uma explicação clara (34) (26). (Observação: à página 114 sugerimos uma possível interpretação para este fenômeno). Para entender melhor considerem-se as figuras abaixo, onde as birrefringências são devidas a:

fig. a - tensão residual na amostra;

fig. b - tensão residual mais tensão induzida pela presença dos defeitos, de acordo com equação citada à página 50, e mais uma componente que deslocou o zero da birrefringência medida por um fator Δ_0 ;

fig. c - tensão residual mais a tensão induzida, sem o termo Δ_0 .

Fig. a

Fig. b

Fig. c

O aparecimento de Δ_0 não cria inconvenientes caso se meça $\Delta(x)$ sucessivamente em vários pontos do cristal (pois assim podemos identificar Δ_0); todavia impede que se façam medidas tão somente em determinado ponto fixo da amostra, em função do tempo ou de outras variáveis que afetem reações de defeitos em sólidos. Com o equipamento que desenvolvemos a observação dessas reações de "acomodamento" elástico do defeito poderá ser seguida. Entretanto, há a necessidade de preparação muito cuidadosa das amostras, o que muitas vezes é impossível.

3. Discussão dos resultados

- a) Formação do centro F no LiF - A figura a seguir mostra o padrão de tensões, medidas pelo ângulo Δ , de uma amostra de cristal de LiF metade irradiado, preparada em condições análogas às da referência (26). Na figura seguinte mostram-se os centros de cor criados neste cristal. Os resultados obtidos são idênticos aos da referência citada.

LiF

- (1) birrefringência residual, medida antes de irradiar;
- (2) birrefringência total (a residual mais a induzida pelos centros F)
- (3) curva diferença

b) Dano de radiação em cristais impuros - Os resultados obtidos com irradiação de cristais de KCl dopados com íons divalentes (Ca^{++} e Eu^{++}) são idênticos aos resultados obtidos com KCl puro. Nossas medidas em cristais metade irradiados confirmam os resultados de Rabin (27) obtidos com técnica diferente em cristais de NaCl puros e dopados com íons divalentes.

O comportamento com relação à expansão de volume dos cristais puros e dopados frente a irradiação com raios-X não nos foi possível compreender totalmente. Sabe-se que os cristais dopados apresentam um crescimento rápido da concentração de centros F à medida que aumentamos o tempo de irradiação (figuras abaixo).

A formação de centros F é mais rápida em cristais dopados

... mas a variação de volume aparentemente é a mesma, independente de o cristal estar ou não dopado.

A expansão da rede desses cristais quando irradiados tem sido atribuída por diversos autores como devida aos centros F. No caso de cristais dopados, portanto, a variação de volume deveria ser maior do que nos cristais puros. Isto porém não foi encontrado em nossos experimentos.

No caso de se atribuir a expansão aos centros F devemos encontrar um mecanismo que gerasse uma contração da rede durante o processo de irradiação dos cristais dopados com íons divalentes. Vejamos qual o mecanismo aceito por diversos autores como aquele responsável pelo processo de formação do centro F em cristais impuros:

1. Cristal antes de ser irradiado. Defeitos presentes: vacância positiva e íon divalente.

2. Ação do raio-X: um elétron é retirado do íon Cl⁻ passando-o Cl⁰ (em outras palavras, o íon Cl⁻ captura um buraco). Defeitos presentes: elétron livre, vacância positiva, íon divalente e um átomo de cloro, substitucional.

3. O átomo Cl⁰ migra para a vacância positiva. Defeitos presentes: vacância de íon negativo, vacância de íon positivo preenchida com átomo de Cl⁰, elétron livre e íon divalente.

4. Reação subsequente: molécula de Cl₂⁻ ocupa a posição de um íon positivo e outro negativo.

5. O íon Cl₂⁻ é instável acima de -40°C; a partir desta temperatura transforma-se em Cl₂⁰.

Como o processo de formação de centro F através da conversão da vacância de íon positivo em vacância de íon ne-

gativo é o predominante durante o início da coloração pelos raios-X, o processo acima descrito também deverá levar à explicação dos nossos resultados fotoelásticos. (Convém notar que o mecanismo acima proposto explica a diminuição das curvas de relaxação dielétrica encontradas por Beltrami em cristais de $KCl : Sr^{++}$ irradiados com raios-X.) A única explicação seria a seguinte: o íon divalente, devido ao excesso de carga, tende a contrair a rede. Essa contração só se dá caso haja possibilidades - de forma mais clara, diríamos que as forças de repulsão Born-Mayer entre os íons impede uma compressão substancial da rede quando o íon divalente acha-se isolado. Por outro lado, a vacância positiva ao lado do íon divalente possibilita a compressão (figura abaixo)

com compressão, permitida pela presença da vacância.

sem compressão

Assim, a formação de moléculas Cl_2^0 por irradiação dos cristais à temperatura ambiente propiciaria ao íon divalente o equivalente a quase duas vacâncias para que pudesse exercer a compressão da rede. Ou seja, devido ao pequeno tamanho da molé

cula de Cl_2^0 ao redor do íon divalente passaríamos da configuração normal abaixo

-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+
+	-	++	-	+	-
-	+	-	+	-	+

para a seguinte:

-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-
-	+	-	+		+
+	-	++	-	+	-
-	+	-	+	-	+

o que possibilitaria uma maior compressão da rede. Essa compressão seria compensada pela expansão devida ao centro F.

Evidentemente o experimento que aclararia o problema seria seguir a transformação fotoelástica da rede ocasionada pela reação $\text{Cl}_2^- \rightarrow \text{Cl}_2^0$, que ocorre à temperatura de aproximadamente -40°C . A presença de uma carga negativa a mais deve diminuir profundamente a compressibilidade ao redor do íon divalente.

- c) Difusão do íon Co^{++} em KCl - Dos íons divalentes que podem ser dissolvidos em KCl o íon de Co^{++} tem comportamento anômalo. Os resultados até agora publicados indicam que o íon Co^{++} ocupa uma

posição intersticial - portanto deverá estar acompanhado de duas vacâncias.

O efeito do campo cristalino sobre as propriedades óticas do íon Co^{++} foi estudado por Washimiya (33) e recentemente por Ayres (32). Esses estudos indicam decididamente que o íon Co^{++} é intersticial. No estudo de relaxação dielétrica feito por R. Robert (31), mostra-se uma curva de I.T.C. com vários picos que só poderia ser explicada supondo-se uma configuração de vacâncias diferentes da que ocorre com íons divalentes alcalino-terrosos, tais como Sr^{++} , Ca^{++} , etc.

A presença de duas vacâncias e do íon intersticial poderia levar a uma expansão da rede cristalina no caso dos cristais de $\text{KCl} : \text{Co}^{++}$. Essa expansão, ao contrário da contração causada pelos íons de Sr^{++} ou Ca^{++} , produziria um padrão fotoelástico com sinal oposto, portanto facilmente mensurável. Medidas preliminares neste sentido foram feitas por Casarini (36). Seus resultados estão de acordo com a hipótese do íon Co^{++} ser intersticial; entretanto, dificuldades com a difusão desse íon em KCl impediram que se tirassem conclusões definitivas, na época.

As dificuldades na difusão do íon Co^{++} em KCl são devidas aos seguintes problemas:

- a) alta volatilidade do composto CoCl_2 ;
- b) formação de compostos que se misturam com o CoCl_2 na superfície do cristal de KCl, de pontos de fusão muito mais baixos que o do KCl.

A única solução encontrada foi a de difundir Co^{++} a partir do vapor de CoCl_2 . Partindo-se de $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ efetuava-se a retirada da água a vácuo e com o auxílio de ligeiro aquecimento (excesso de aquecimento na presença de água pode levar à formação de óxido de cobalto). Depois de total desidratação (o CoCl_2) é de cor azul, enquanto a forma hidratada é violácea) o tudo de vidro onde se colocou previamente o cristal e o CoCl_2 era fechado e aquecido até provocar a evaporação de CoCl_2 e a consequente difusão de Co^{++} no KCl. Com esta técnica conseguimos eliminar os inconvenientes de oxidação do cobalto. Todavia os cristais obtidos após este tratamento ainda não eram adequados. Foi necessário selecionar pedaços de cristal onde havia ocorrido melhor difusão e onde as tensões residuais eram baixas. Conseguimos obter cristais com alta concentração de Co^{++} sem a formação de agregados. A geração de grandes gradientes térmicos durante o tratamento de difusão provocaram também a formação de trincas no corpo do cristal. Na verdade, notou-se que a difusão deu-se mais fortemente pelas paredes internas, após penetração do sal pelas trincas. Com tais amostras pudemos obter espectros de absorção ótica (figura abaixo) apresentando bandas de absorção já previstas porém numa medidas anteriormente.

O efeito fotoelástico do íon Co^{++} na rede de KCl: conforme o exposto acima, em nossas experiências com a difusão do cobalto defrontamos com grandes dificuldades. Na verdade, não foi possível realizar o método fotoelástico segundo o tratamento dado em (30), onde foram desenvolvidas as previsões descritas aqui à página 51. A obtenção de um resultado aceitável deveu-se mais a algo imprevisto, que foi a forte difusão sobre uma região limitada da superfi-

Espectro de absorção do KCl : Co⁺⁺ (vide texto)

cie do cristal, formando uma mancha de cor azul, de aproximadamente $5 \times 5 \text{ mm}$, onde o cobalto penetrou uma distância extremamente curta abaixo da superfície, impossibilitando o exame do perfil de tensões ao longo da direção de difusão. Todavia, foi possível examinar a variação de volume na periferia da "mancha" de cobalto referida acima. A figura ilustra o que acabamos de dizer:

(A solução do problema para a função $C(x)$ acima já foi considerada à página 50).

Como resultado obtivemos o seguinte padrão fotoelástico (indicamos também, para comparação, o padrão do KCl metade irradiado - ver também (30), página 24):

A comparação com o padrão medido em amostra de KCl metade irradiada nos leva à conclusão de que o cobalto contrai a rede, da mesma maneira que o faz o íon Sr^{++} (30) que tem aproximadamente o mesmo raio. Tem-se portanto um resultado que não confirma a previsão feita à página 48 . Todavia, não podemos considerar esta nossa experiência como definitiva, uma vez que não pode ser amplamente confirmada, devido às grandes dificuldades de preparação de amostras. Vale entretanto como um resultado parcial a quem possa continuar o trabalho, e principalmente como uma ilustração do processo experimental sui-generis que a difusão superficial (formação de "manchas") do cobalto possibilita.

Como comentário àqueles que possam interessar-se no estudo do íon Co^{++} em halogenetos alcalinos queremos insistir em que as maiores dificuldades residem na preparação das amostras. Cristais de KCl dopados com cobalto durante o crescimento normalmente contêm precipitados (visíveis ao microscópio e apresentando-se como pequenas esferas de cor azul). Em cristais não contendo precipitados a concentração de Co^{++} isolado é muito baixa.

Uma vez solucionado o problema de se obter cristais adequados, com concentração de Co^{++} da ordem de 10^{-4} (fração molar) uma série de experimentos em dano de radiação, condutividade elétrica etc., poderão tornar-se bastante interessantes, devido à presença das duas vacâncias.

CAPÍTULO V

DETALHES DO EQUIPAMENTO

1. A fonte de luz: lâmpada e caixa ("housing")

Utilizamos como fonte de luz uma lâmpada de tungstênio-halogênio de 9 ampéres (sylvania 6.6A/T 2½ Q/CL). A resposta espectral dessa lâmpada é como na figura à página 71. O tungstênio funde-se a 3600°C; nos valores nominais da temperatura de funcionamento da lâmpada o metal volatiliza. Na lâmpada utilizada fazíamos passar 5 ampéres (1700°C) pelo filamento, numa dissipação de 45 watts, correspondente a aproximadamente 1000 horas de vida e fluxo de cerca de 400 lumens. Devemos considerar esses valores no dimensionamento do "housing", principalmente no que se refere ao dreno de calor.

O halogênio (iodo) misturado com o gás inerte da lâmpada aumenta o período de vida do filamento por causa do seguinte ciclo: sublimação do tungstênio; reação dos átomos sublimados com o iodo formando iodeto de tungstênio; difusão do iodeto para o filamento e recuperação do átomo de tungstênio, evaporando o iodo da molécula IW.

Não há nenhum motivo muito especial para se usar esta lâmpada específica. Todavia, evitamos utilizar lâmpada de arco devido ao alto nível de ruídos e flutuações súbitas constatado. Não obstante a lâmpada de tungstênio apresenta também nível de ruído sobre a intensidade de luz irradiada. Por ser esta luz gerada no movimento caótico dos elétrons de condução do metal a

densidade espectral de energia é do tipo Johnson-Nyquist ($kT \Delta f$) - ver (42, pág. 176).

O "housing" é uma caixa metálica com uma única saída (pupa) para a luz. Uma lente de quartzo colima o feixe na direção do monocromador Baush & Lomb utilizado. Estes fabricantes fornecem caixas próprias para o acoplamento com o monocromador. Todavia o "housing" aqui utilizado foi construído na oficina do DFCM a partir de um tubo de latão.

Convém observar que se não providenciarmos condições de fuga para o calor, o tempo de vida da lâmpada decai muito.

2. O monocromador

Utilizamos um monocromador Baush & Lomb (catálogo nº 33-86-25). Para este monocromador a rede pode ser substituída quando desejarmos selecionar faixas espectrais diferentes.

A Bausch & Lomb dispõe das seguintes redes:

Catálogo nº 33-86-25-01 - 200 a 400 nm

Catálogo nº 33-86-25-02 - 350 a 800 nm

Catálogo nº 33-86-25-03/1 -

Catálogo nº 33-86-25-04/2 - 1400 a 3200 nm

Esquema básico de um monocromador do tipo usado:

A lente 1 da fonte de luz situa a imagem do filamento na posição indicada, anterior à fenda (variável) de entrada do monocromador, de modo que sobre a fenda situa-se a pupila de saída da fonte (a pupila é a região de maior densidade de energia). Esta fenda é então a pupila de entrada do monocromador. A imagem desta fenda, produzida pela lente 2 deve, após refletir-se na rede de difração (plana) projeta-se telecentricamente sobre o espelho concavo. Este, por sua vez, conjuga a pupila sobre a fenda (variável) da saída do monocromador. Esta fenda será a pupila de entrada do sistema varifocal, que a projeta sobre a amostra. Note-se, portanto, que não é a imagem do objeto (filamento) que se localiza sobre a amostra. (Satisfeitas estas considerações, no monocromador utilizado tem-se que a largura da fenda de saída do monocromador é 56% da largura da fenda de entrada).

Observação - o feixe incidente sobre a amostra não é perfeitamente monocromático. A meia largura $\Delta\lambda$ da distribuição espectral em torno do comprimento de onda selecionado no dial do monocromador é dependente da largura da fenda de saída (d_s) e da dispersão da grade utilizada. Em nosso trabalho usamos a grade correspondente ao catálogo 33-86-25-02, de 1350 estrias por milímetro e $\delta = 6.4 \text{ nm/mm}$.

A resolução é calculada da relação:

$$\delta = \frac{\Delta\lambda}{d_s} .$$

Em nosso trabalho interessava-nos que d_s fosse o menor possível de modo a corresponder uma faixa luminosa razoavelmente

estreita sobre a amostra. Devido ao baixo fluxo luminoso da lâmpada utilizada o menor d_s obtido por ajuste era de 0.05 mm (ver pág. 75). Assim, a resolução mínima era de

$$\Delta\lambda = \delta d_s \approx 0.3 \text{ nm.}$$

O "slit" de entrada é dado por:

$$d_e = \frac{d_s}{0.56} \approx 0.1 \text{ mm.}$$

3. O sistema varifocal

O sistema que utilizamos foi a unidade comercial Bausch & Lomb catálogo nº 33-86-26-07, acessório destinado à iluminação para microscópio. Entretanto seria possível construir um sistema "zoon", para nossas experiências, em um laboratório simples (ver figura). Exemplo de cálculo para projeto podem ser encontrados na referência (38).

Ajuste dos planos de iluminação

A iluminação da amostra pode ser ajustada posicionando-se as lentes e demais componentes segundo o método de Köhler, descrito na referência (37).

IV - ESPESSURA DA FAIXA DE LUZ SOBRE A AMOSTRA

A relação entre os tamanhos do objeto e da imagem estabelecida por uma lente é dada por:

$$\frac{I}{O} = \frac{Y}{X}$$

Para obter a largura da faixa de luz sobre a amostra, estabelecida usando-se o método Köhler, basta aplicar a equação acima sucessivamente às várias lentes do sistema de foco, lembrando que a referida faixa é a imagem do "slit" (pupila) de saída do monocromador. A falta dos dados da unidade comercial (focos e distâncias entre as lentes) nos força à medida experimental, apenas. Isto pode ser feito intercalando-se uma fenda variável na região da amostra e monitorando-se a corrente da fotomultiplicadora. Em nossas pesquisas utilizamos, com "slit" de saída aberto 0.05 mm, largura da faixa = $l \approx 0.1$ mm.

(observou-se que, em geral, " l " era praticamente o dobro da largura da fenda de saída).

Convém observar que a largura da faixa deve ser a menor possível (para uma dada corrente da fotomultiplicadora) pois assim aumenta-se a resolução das medidas ao longo da amostra.

V - SUPORTE DA AMOSTRA

A placa metálica onde fixamos a amostra é colocada numa plataforma móvel como indicada na figura abaixo. O avanço dessa

plataforma é feito por um parafuso rosqueado no suporte fixo. Este parafuso transmite o movimento através de uma outra rosca usada na parte inferior da plataforma móvel.

Sendo o avanço do parafuso igual a 1 mm/volta, o motor utilizado - um Bristol 444 de 4 watts, com redutor de velocidades (1 rpm), e polias na relação 2:11 (ver figura), tem-se uma velocidade da amostra de 0.18 mm/minuto.

VI - CONSTANTE DE TEMPO DO "LOCK-IN" X VELOCIDADE DA AMOSTRA

A constante de tempo τ caracteriza os filtros atenuadores do ruído que acompanha o nível DC na saída, selecionáveis num dial acessível no painel do "lock-in". Um maior valor de τ melhora a relação sinal-ruído, mas implica um maior tempo de resposta.

Em nossas experiências observamos uma boa relação sinal-ruído com uma constante de tempo mínima de 0.3 segundos. Verificou-se também que o tempo de observação de cada medida (em cada posição fixa da amostra) deve ser da ordem de 30 segundos no mínimo. Neste caso a birrefringência medida é a média ao longo da

largura da faixa luminosa sobre a amostra. Quando a amostra é movimentada à velocidade de 0.18 mm/min., teremos que acrescentar à largura da faixa o espaço $\Delta l = v \times \Delta t$ percorrido durante os $100 \tau = 30$ segundos mencionados acima. A largura efetiva da faixa é então:

$$\ell + \Delta \ell = 0.1 + 0.09 \text{ mm} \approx 0.2 \text{ mm}$$

Ou seja, a birrefringência medida representa a birrefringência de valor intermediário entre os pontos situados dentro da largura efetiva da faixa. Se em determinada experiência esta imprecisão constituir problema, devemos girar manualmente o eixo de avanço.

Sinal da posição da amostra

A posição da amostra é monitorada por meio de um sinal DC proporcional ao avanço do contato de um helipot de 10 voltas, acoplado ao eixo de avanço por meio de corrente e rodas dentadas.

VII - A PLACA MODULADORA

A idéia básica é aproveitar a oscilação elástica imposta em um material que exiba o efeito piezoelétrico inverso. Essas ondas elásticas, feitas planas, podem ser transmitidas por acoplamento a um material sólido amorfo, por exemplo vidro ou sílica fundida. Desta forma geramos tensões internas periódicas no corpo do material transparente e portanto uma variação periódica da diferença entre os índices de refração em duas direções perpendiculares entre si (x e y).

Entre as várias versões do invento básico a descrita por Kempt (39) e Jaspersen & Schnatterly (18), e fabricada pela Morvue Electr. Syst.^{*}, é a de maior rendimento (alto Q). Trata-se de dois

(*) Morvue Electronic Systems - USA

paralelepípedos, colados entre si com silicone, de dimensões cuidadosamente estabelecidas (condições de ressonância à frequência desejada). O acoplamento se dá ao longo das maiores dimensões, conforme figura abaixo.

A unidade comercial por nós utilizada, modelo Morvue PEM-3, oscila a 50 KHz. O bloco piezoelétrico é uma barra de quartzo de corte X, dimensões $\approx 1 \times 3 \times 5$ cm nas direções X, Z e Y respectivamente, de modo que um campo elétrico alternado aplicado entre as faces maiores (direção z ($\equiv$ X)) do bloco de quartzo provoca uma vibração elástica na direção x, que se propaga também no bloco de sílica devido à baixa impedância do acoplamento. Em condições de ressonância na frequência característica do sistema a vibração será de máxima amplitude.

A tensão elástica P_x (na direção x) no bloco de sílica fundida causa uma birrefringência δ dada por:

$$\delta = \frac{\pi d}{\lambda} q n^3 P_x .$$

P_x é causado pela tensão elétrica $V = V_0 \sin \omega t$ por efeito piezo-

elétrico inverso, ou seja (40):

$$P_x = -e E_z ,$$

E - campo elétrico aplicado; e - constante piezoelétrica.

Tem-se então que

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t ,$$

onde

$$\delta_0 = \delta_0(V_0, \lambda) .$$

Assim, para um dado λ , δ_0 é controlado por V_0 , selecionado num dial no painel do oscilador da placa.

Observações

Embora tenhamos utilizado nos experimentos uma unidade comercial, podemos dar aqui uma esquemática geral das considerações de projeto do sistema.

No que concerne ao transdutor piezoelétrico pode-se utilizar uma barra de quartzo como a descrita. O corte, como já dissemos, deve ser na direção polar (X), sendo as dimensões do bloco calculadas a partir da frequência de ressonância estabelecida a priori. As dimensões serão mais robustas quanto mais baixa for a frequência fundamental desejada. Pelas dimensões usuais dos cristais naturais de quartzo, a frequência mínima para um projeto deste tipo é da ordem de 50 KHz (dimensão ao longo de x(Y) aproximadamente 5 cm).

O uso do quartzo cristalino como transdutor é o mais indicado por proporcionar maior rendimento. O acoplamento acústico entre este transdutor de quartzo e a placa de sílica fundida é

muito eficiente já que há um ótimo casamento de impedâncias.

Uma outra opção para o transdutor seria o material sintético PZT, que tem a vantagem de maior facilidade de corte. Todavia, o fator de qualidade Q de um sistema com PZT é uma ou duas ordens de grandeza abaixo do Q de um sistema equivalente com quartzo. A importância do valor de Q , em nossas experiências, ficará clara mais adiante.

A placa Morvue PEM-3 tem o transdutor colado ao bloco de sílica com silicone. O sistema assim formado é disposto com o lado de menor dimensão na direção vertical, y , sendo z a direção de percurso para o feixe de luz. A direção da onda de tensões mecânicas planas é a direção x . Os eletrodos do transdutor de quartzo são feitos com a deposição de ouro nas faces polares (normais a x). A excitação elétrica do transdutor é feita por um gerador sintonizado na frequência fundamental de ressonância do sistema. Trata-se basicamente de um oscilador a coletor sintonizado, onde o próprio transdutor entra na rede de realimentação do circuito. Para facilitar o entendimento desenhamos abaixo seu esquema básico. Indicamos também o circuito elétrico equivalente do bloco de quartzo, em vazio (desacoplado do elemento ótico). Para maior precisão num projeto deve-se adicionar o efeito dessa carga no circuito equivalente. Geralmente, devido a desequilíbrio de impedâncias ocasionado pelos outros componentes do circuito, além do cristal, a frequência de ressonância do sistema é ligeiramente diferente da frequência natural do cristal. Isto é importante de considerar no dimensionamento dos blocos de quartzo e

sílica fundida.

circuito equivalente do transdutor de quartzo, em vácuo (56)

circuito excitador da placa (versão simplificada do diagrama original da unidade Morvue PEM-3).

(*) valores críticos de calibração

O bloco transparente: no modelo Morvue PEM-3 tem-se acoplado ao transdutor um paralelepípedo de sílica fundida. Este material é ótimo para ser acoplado ao bloco de quartzo piezoelétrico por ter propriedades acústicas semelhantes do ponto de vista de casamento de impedâncias. Uma limitação ao seu uso seria o intervalo espectral. A sílica fundida transmite bem desde 2600 até cerca de 180 μ . Outros materiais apropriados são o CaF_2 e o LiF que transmitem até 120 μ . Própria para o infravermelho é o NaCl .

Dimensões: a onda elástica ressonante em cada bloco corresponde ao comprimento de onda $\lambda = 2l$, onde l é o comprimento do bloco na direção de propagação do feixe sonoro. Se o transdutor transmite

ondas à frequência fundamental do bloco de sílica $\left(f = \frac{v_{SOM}}{\lambda} = \frac{v_{SOM}}{2\ell} \right)$

o sistema estará em ressonância. Isto significa uma frequência em que o agente externo que força a oscilação dos átomos do bloco transparente gasta menos energia.

Fixação do sistema: Os apoios que mantêm o eixo y na vertical si-

tuam-se nos planos dos nós da onda de deslocamentos. Obtém-se assim um mínimo de perdas. No modelo Morvue PEM-3 usam-se apoios de teflon.

A resposta em frequência do sistema é da forma:

A relação $f_0/\Delta f$ é uma medida do fator de qualidade Q do elemento. A frequência de ressonância a energia por período necessário para manter a oscilação é Q vezes menor que a energia potencial W armazenada em cada ciclo:

$$\text{Potência aplicada } P = 2\pi f \frac{W}{Q}.$$

W pode ser calculado em termos do esforço volumétrico necessário para provocar a birrefringência desejada (valores de pico). Tem-se que W é proporcional a δ_0^2 (39).

Modulação da birrefringência: influência de componentes harmônicas

Genericamente a birrefringência é dada por um desenvolvimento de Fourier segundo a forma da resposta em frequência mostrada acima. É suficiente considerarmos apenas o efeito da segunda harmônica. Neste caso teremos:

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t + \delta_1 \sin(2\omega t + \phi)$$

No apêndice (2) mostramos que este efeito da segunda harmônica pode ser descartado apenas em casos em que o fator de qualidade Q é muito grande. Podemos desprezá-lo no caso da placa

Morvue PEM-3 ($Q \approx 20000$).

A presença da segunda harmônica anula completamente a utilidade de um dispositivo deste tipo. Portanto a maximização do fator de qualidade é ponto central em um projeto. Mesmo no caso de utilizarmos quartzo (maior Q) tudo depende, além de bom dimensionamento, do acoplamento e da tecnologia de execução. Numa versão com PZT o Q seria forçosamente bem menor.

Abertura angular

A placa fotoelástica apresenta como mais importante vantagem a sua grande abertura angular, comparada com outros moduladores óticos. Essa abertura é entendida da seguinte maneira: o feixe que incide na placa não é perfeitamente colimado, ou seja, tem a forma de um cone de luz. Um raio genérico desse feixe incide sob ângulos θ .

Ao atravessar o material o raio se subdivide em dois (o ordinário e o extraordinário), e a diferença de caminhos no interior do bloco faz com que os raios emergentes, praticamente paralelos e coincidentes, apresentam uma certa defasagem $\Delta\delta$ adicional.

A variação percentual da defasagem vai depender do ângulo de incidência (39) ,

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} \approx (\sec \theta - 1) \approx \frac{\theta^2}{2}$$

Para termos uma visualização da vantagem suponhamos uma tolerância de 10% ($\Delta\delta/\delta = 10\%$). Isto nos possibilita um cone de 50° ; por outro lado uma célula Pockels de KDP ou ADP apresenta , nas mesmas condições, apenas 1° e 2° de abertura.

Este comentário é interessante uma vez que o feixe ao passar pela placa é ligeiramente divergente.

Comentários adicionais

A grande dificuldade de construção de modo a conseguir-se um alto Q e a operação em frequências únicas, geralmente relativamente altas (50 KHz) parecem ser algumas desvantagem da placa moduladora piezo-elasto-ótica. Mas a possibilidade de fácil análise eletrônica dos sinais é compensadora. A precisão e a sensibilidade conseguida em instrumentos que fazem uso da placa são extremamente maiores que em outros sistemas semelhantes que se poderiam construir com células de Kerr ou de Faraday (Pockels por exemplo). Além disto, a energia de excitação para a placa é, devido a seu alto Q, desprezível face à energia de excitação necessária para as células eletro ou magneto-óticas (a potência consumida pelo circuito da placa é da ordem de 1W). Outra vantagem é que o material do bloco transparente (sílica) não apresenta efeitos de luminescência ou fosforescência, isto por não conter impurezas como terras raras. Já o modulador de KDP, por exemplo, é eletrolumines

cente por volta de 327 mμ (41).

Birrefringência residual na placa

Na unidade comercial utilizada verificamos a presença de uma birrefringência residual, própria do bloco de sílica (provavelmente devida à cola usada no acoplamento com o transdutor), que persiste mesmo na ausência de excitação. O valor dessa birrefringência pode ser medida no mesmo sistema descrito até agora, com a amostra fora do suporte. Pelo fato de corresponder a tensões na sílica na direção x (direção de um dos eixos principais das amostras), quando recolocarmos amostra no circuito ótico basta subtrair do ângulo medido o ângulo correspondente às tensões residuais da placa:

$$\Delta_{\text{AMOSTRA}} = \Delta_{\text{MEDIDO}} - \Delta_{\text{RESIDUAL DA PLACA}}$$

A placa Morvue PEM-3 F53-A 3130 por nós utilizada apresentava $\Delta_{\text{RESIDUAL}} = 2.46^{\circ}$.

Outra maneira de transpor o problema é colocar em série com a placa e a amostra um bloco de sílica montado em um dispositivo mecânico que permita aplicar, no bloco, e controladamente, tensões planas axiais. Podemos assim ajustar o aperto do bloco até anular o sinal introduzido pela birrefringência residual da placa.

Calibração (Determinação dos δ_{OCAL} - pag. 33)

O circuito eletrônico da unidade Morvue PEM-3 foi projetado para que a amplitude V da senoide de tensão aplicada nos eletrodos da placa piezoelétrica varie linearmente com os números do dial de controle da placa, sendo assim possível a variação simultânea de V e λ de modo a se ter $VQ/\lambda = \text{constante}$ na expressão abaixo - ver (56):

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t \propto \frac{VQ}{\lambda} \sin \omega t,$$

onde Q é o fator de qualidade da placa. Ou seja, poderíamos fazer o "scanning" automático de λ , conservando $J_0 = 0$.

O dial está calibrado com números de 0 a 1000. Se o número selecionado corresponder ao valor de λ , então δ_0 vale π (meia onda). Assim, para manter $V/\lambda = \text{constante}$ enquanto variarmos o comprimento de onda, o dial deverá girar segundo a expressão:

$$D = \text{número do dial} = \frac{2.4 \lambda}{\pi}.$$

Exemplo: $\lambda = 589 \text{ nm}$, $D = 450$.

Uma maneira experimental de determinar o ponto do dial correspondente a δ_{OCAL} é procurar o número que acarreta $S_\omega = 0^*$ (ver figuras a seguir)

(*) Devido à variação de defasagem (pag. 90) que o sinal de referência sofre devido à mudança dos valores do dial, a busca de S_ω deve ser feita cautelosamente, ajustando-se iterativamente a fase (no dial de fase da referência no painel do "lock-in") à medida que percorremos ponto por ponto os valores do dial do controle da placa.

$$\frac{OD}{OA} = \frac{O'C}{O'B} \Rightarrow OD = \frac{OA \times O'C}{O'B}$$

onde: OD corresponde a D , $O'C = 2.40$, $O'B = 3.83$ e OA é o valor medido quando $S_\omega = 0$.

Exemplo: $\lambda = 589 \text{ nm}$, $D = 420$.

Um método experimental que permite obter diretamente a sintonia do dial em $J_0 = 0$ é descrito a seguir. Seguindo analogamente a dedução da intensidade I (pág. 27 e seguintes), tem-se que:

$$I = \frac{I_0}{4} [1 \mp J_0(\delta_0) \cos \Delta \pm J_1(\delta_0) \sin \Delta \sin \omega t \mp J_2(\delta_0) \cos \Delta \cos 2\omega t \dots]$$

onde a sequência - + - corresponde a "analisador cruzado" com

relação ao polarizador de entrada, e a sequência + - + corresponde a analisador com direção de passagem paralela à do polarizador de entrada.

Mantendo i_{DC} = constante, tem-se com a amostra fora do feixe:

$$S_{2\omega} \propto \frac{J_2(\delta_0) \cos \delta_R}{1 + J_0(\delta_0) \cos \delta_R}$$

onde δ_R é a birrefringência residual da placa (pag. 34). Portanto, com $S_2(\delta_0) \neq 0$ e ajustando-se a direção de passagem do analisador alternadamente para cada posição do dial, o valor correspondente a $J_0(\delta_{OCAL}) = 0$ é obtido quando os dois valores respectivos do sinal do "lock-in" ($S_{2\omega}$) forem simétricos com relação a $S_{2\omega} = 0$.

Vale o mesmo raciocínio para S_ω , caso sua utilização seja mais interessante que $S_{2\omega}$.

Exemplo: $\lambda = 589$, $D = 381$

A discrepância entre os tres processos não entendemos, mas este último descrito apresentou-se mais confiável, tendo-se observado que com o dial assim diretamente sintonizado o valor da corrente DC (proporcional a $1 - J_0 \cos \Delta$) não variava quando introduziamos variação de Δ , mantendo constante a tensão de alimentação da fotomultiplicadora.

A variação dos pontos do dial correspondentes a $J_0 = 0$ simultaneamente com a variação de λ é dificultada pelo fato de que a defasagem entre o sinal (correspondente à luz transmitida

no circuito ótico) e a referência (f ou $2f$, fornecida pelo circuito oscilador através de uma rede bastante reativa (59)) varia conforme percorremos as posições do dial, devendo-se portanto ajustá-la em cada comprimento de onda. Assim, em experiências onde seja interessante medir a birrefringência em função de λ a automatização só será possível se adicionarmos circuitos externos de correção. Dependendo dos objetivos, talvez seja mais interessante projetar um novo circuito oscilador, aproveitando da unidade comercial apenas o conjunto piezoelétrico (pois este é de difícil execução). Neste caso, podemos basear-nos em artigo recente de Schnatterly et al (56), onde é apresentado um circuito oscilador mais aperfeiçoado (correção quanto à variação de Q).

Não obstante, uma maneira simples de contornar o problema da defasagem seria obter a referência a partir do próprio feixe de luz, utilizando-se para isto um "beam-splitter" não birrefringente (figura abaixo).

VIII - POLARIZADOR DE ENTRADA E ANALISADOR

Os polarizadores do sistema ótico podem ser de qualquer tipo desde que o nível de despolarização seja baixo. Assim, poderíamos utilizar placas de polaroid (transmitem cerca de 30% e o nível de despolarização é da ordem de 100 ppm). Apesar da relativamente baixa eficiência as placas de polaroid não exigem grande colimação do feixe. Muito mais eficientes ($\approx 50\%$) são os polarizadores cuja construção é baseada na propriedade de dupla refração de cristais uniaxiais, como a calcita (CaCO_3). Em nossas experiências utilizamos prismas de Nicol. Um nicol é construído a partir de um romboedro de calcita preparado por clivagem. Ver esquema (42) abaixo, onde indicamos também o plano segundo o qual é feito um corte transversal no romboedro e inserido bálamo do Canadá. Nesta interface o raio ordinário é eliminado por dissipação. A direção de polarização do raio extraordinário, emergente é variada linearmente ao girarmos a montagem em torno de um eixo paralelo ao feixe. O nicol é montado em um suporte que permite este giro.

Polarizadores de Nicol

IX - ALINHAMENTO

Para alinhar cada componente do sistema fazemos uso de um polarizador de teste. Em nosso trabalho utilizamos uma placa de polaroid montado em um suporte graduado. Assim, primeiro fixamos uma posição de referência neste polaroid de teste e em seguida, com a ajuda de um outro polarizador (que pode ser o nicol de entrada) alinhamos cada componente do circuito ótico. Por exemplo, se queremos alinhar a placa moduladora fixamos a direção de passagem do polaroid teste em 0° (aproximadamente horizontal). Em seguida, olhando através deste polaroid (ou, para maior precisão, monitorando a corrente da fotomultiplicadora), procuramos a posição o nicol até obter extinção da luz, quando então estará com o eixo de passagem na vertical (90°). Colocando agora a placa entre os dois polarizadores teremos através dela um feixe de luz polarizada verticalmente. Estando a placa em pleno funcionamento teremos ondas elásticas planas vibrando na direção x da placa. Como queremos fazer este eixo x coincidir com a horizontal do polaroid este basta girar a placa em torno de seu eixo paralelo ao feixe, até obtermos extinção da luz incidente no olho (ou na fotomultiplicadora). Isto ocorre porque o feixe que incide na placa está polarizado verticalmente, e a placa só modula quando há componentes do campo elétrico nas duas direções x e y da placa. No caso analisado, ao alinhar a placa o campo incidente terá apenas a componente y .

X - ALINHAMENTO DAS AMOSTRAS

Como dissemos anteriormente, cada amostra é fixada em

uma chapa metálica na qual é feito um rasgo retangular (8 x 5 mm) para passagem da luz. Esta chapa pode ser retirada e recolocada de maneira repetitiva nos encaixes do suporte. Para o alinhamento substituímos a amostra por uma lâmina de quarto de onda cuidadosamente fixada na chapa metálica. Na chapa fazemos marcas (riscos) de referência. Sobre estas marcas orientamos na vertical e horizontal os eixos principais da lâmina de quarto de onda. As amostras serão também orientadas segundo essas marcas, ou seja, basta fazer coincidir suas arestas com paralelas aos riscos feitos na placa (pois nos cristais cúbicos, utilizados, os eixos principais do elipsoide dielétrico estão nas direções $[100]$, $[010]$ e $[001]$, normais aos planos de clivagem). Feito isto, pode-se alinhar o suporte da chapa num procedimento análogo ao descrito no alinhamento da placa moduladora. O suporte estará alinhado de uma vez por todas, desde que as amostras sejam sempre orientadas sobre as referidas marcas.

XI - A VÁLVULA FOTOMULTIPLICADORA

O funcionamento da fotomultiplicadora baseia-se em dois fenômenos de emissão eletrônica: a emissão fotoeletrônica, que ocorre no fotocatodo, e a emissão secundária, que ocorre nos di nodos. O esquema de uma fotomultiplicadora de apenas dois dinodos está indicado na figura a seguir.

Cada foton, ao incidir no material que constitui o fotocatodo K libera por efeito fotoeletrônico n eletrons, onde n é a eficiência quântica do material do fotocatodo (o valor de

η depende do comprimento de onda). Os elétrons liberados do fotocátodo formam uma nuvem eletrônica (carga espacial) em torno da superfície do material. O primeiro dinodo, disposto numa posição geometricamente conveniente e estando num potencial elétrico mais elevado, atrai parte dessa carga espacial. Os elétrons, ao serem desacelerados no choque com a superfície do dinodo, cedem energia aos elétrons do material que o constitui. Ocorre então emissão secundária de elétrons. O número de elétrons secundários por elétron primário incidente é o que chamamos de eficiência do dinodo (σ). Se n elétrons incidem, $n\sigma$ elétrons emergem. Estes elétrons secundários são agora acelerados para o segundo dinodo, onde ocorre o mesmo processo. Finalmente os elétrons são recolhidos pelo anodo, fechando o circuito.

As válvulas fotomultiplicadoras comerciais são constituídas de mais de dois dinodos, geralmente da ordem de dez. A multiplicação de elétrons é de tal ordem que se a corrente elétrica entre K e D_1 for da ordem de micro ampères, então entre o último dinodo e o anodo poderá ser da ordem de centenas de milo-ampères. Uma limitação na obtenção de correntes mais altas é a danificação do material do anodo e dos últimos dinodos.

O tubo utilizado neste trabalho é fabricado pela EMI ELECTRONICS LIMITED.

Tem-se os seguintes dados técnicos para o tubo EMI 9558 B:

- catodo semi-transparente de $(C_s) N_a K S_b$, resposta espectral S-20.
- dinodos de superfície de $C_s S_b$. Quantidade: 11.
- máxima corrente de anodo: 1 mA.

- temperatura de trabalho: entre -180°C a 60°C ;
- sensibilidade do fotocatodo: 140 A/Lumen;
- tensão máxima de anodo a 200 A/Lumen: 1250 V ;
- diâmetro do fotocatodo 44 mm .

XII - A FONTE DE ALIMENTAÇÃO DA FOTOMULTIPLICADORA

Uma fotomultiplicadora funciona geralmente com tensão constante entre os terminais do divisor de tensão. Esta tensão deverá ter o mínimo possível de ondulação. Em nossas experiências alimentamos a válvula EMI com uma fonte regulada fabricada pela BRANDENBURG LIMITED (LONDON), modelo 472 R, que apre-

senta "ripple" de 1 mV p-p, com tensão de saída variável continuamente desde zero a 2100 volts.

O diagrama básico da fonte de alimentação é o seguinte:

CIRCUITO BÁSICO ORIGINAL

Como em nosso trabalho interessava-nos manter o nível DC da corrente num valor constante, foi preciso efetuar uma modificação no circuito da fonte, de modo a haver variação automática do nível de tensão aplicado no divisor, compensando assim quaisquer variações da corrente de anodo (43).

MODIFICAÇÃO DO CIRCUITO

XIII - ATENUAÇÃO NOS CABOS

Em muitas de nossas experiências, qualitativas, o circuito de transmissão do sinal era como o esquematizado abaixo:

O comprimento de onda das correntes e tensões eram da ordem de centenas de metros (50 KHz e 100 KHz) e os cabos tinham comprimento máximo de dois metros. Neste caso podemos desprezar a dissipação e considerar o circuito equivalente do cabo como apenas reativo. A impedância característica z_0 e a constante de propagação γ são então dadas por (54):

$$z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{e} \quad \gamma^2 = -\omega^2 LC$$

Os valores medidos foram:

$$z_0 = 50 \, \Omega$$

$$C = 103 \, \text{pF/m}$$

$$L = 260 \, \text{nH/m}$$

$$\gamma = j\omega 5 \times 10^{-9} \, \text{m}^{-1}$$

A impedância de entrada do cabo terminado em Z_L é (54):

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan |\gamma l|}{Z_0 + j Z_L \tan |\gamma l|}$$

Tem-se então, à entrada do "lock-in":

$$v_L = v_F \frac{1}{1 + \frac{R_S}{Z_{IN}}} \frac{1}{\cos |\gamma l| + j \frac{Z_0}{Z_L} \sin |\gamma l|}$$

onde v_F é o valor medido com apenas R_S no circuito de anodo.

Observa-se assim que há uma atenuação do sinal devido ao comprimento l do cabo e uma sensível dependência da amplitude e da fase com a frequência de trabalho. A atenuação pode ser minimizada intercalando-se um transformador de impedância para reduzir o efeito de R_S .

Para evitar o efeito de atenuação do cabo que leva o nível DC do sinal para a fonte da fotomultiplicadora o amplificador operacional (seguidor de tensão) do circuito de realimentação (ver pág. 97) deve preceder o cabo, isto é, localizar-se logo à saída da fotomultiplicadora.

Uma alternativa mais interessante por nós verificada, foi a implementação do circuito a seguir, onde a resistência de 50Ω colocada à entrada do "lock-in" faz com que não haja ondas refletidas. De fato, vemos da equação de Z_{IN} que

$$Z_{IN} = 50 \Omega \equiv Z_0 \text{ (nº real)}$$

ou seja, Z_{IN} é resistivo e independente da frequência.

Assim,

$$|v_L| = |v_F| \frac{1}{1 + \frac{R'_s}{Z_0}}$$

onde R'_s é a resistência de saída do seguidor de emissor. No circuito acima $R'_s = 3K$ e $|v_L| = |v_F|/60$. Se utilizássemos um par "darlington" e uma resistência de 50Ω no emissor teríamos:

$$|v_L| = \frac{|v_F|}{2}$$

A redução do sinal é igual para ambas as frequências (f e $2f$), não havendo portanto nenhum fator de correção nas medidas.

XIV - MEDIDAS DE Δ A BAIXAS TEMPERATURAS

A utilização de criostatos implica a inserção de dois novos elementos no circuito ótico: as janelas, geralmente feitas de sílica fundida. A não ser que se utilizem janelas especiais não birrefringentes teremos que levar em conta seu efeito no resultado da medida. Devemos lembrar que a utilização de janelas especiais exige uma certa técnica na construção da cabeça do criostato, tal como a descrita em (55). Por outro lado janelas não birrefringentes são geralmente importadas do exterior, o que dificulta sua utilização.

O circuito ótico do fotoelasticímetro, levando em conta as janelas de entrada (J_1) e saída (J_2) de um criostato é:

A intensidade da luz incidente na fotomultiplicadora é:

$$I = \frac{I_0}{4} \left[1 + \cos \delta (B_2 D_1 + E_2 E_1 \cos \Delta - E_2 F_1 \sin \Delta) + \right. \\ \left. + \sin \delta (-B_2 B_1 + E_2 F_1 \cos \Delta - E_2 G_1 \sin \Delta) \right]$$

onde as quantidades D, E, F, B e G são dadas pelos parâmetros de birrefringência das janelas do criostato.

Conservando o ajuste do sistema em $J_0(\delta_{OCAL}) = 0$, tem-se na saída do "lock-in" (ver pág. 33):

$$S_\omega = K' J_1 (-B_2 B_1 + E_2 F_1 \cos \Delta - E_2 G_1 \sin \Delta),$$

sendo:

$$B_2 = \cos 2 \rho_2 \sin 2 \rho_2 (1 - \cos \Delta_2)$$

$$B_1 = \cos 2 \rho_1 \sin 2 \rho_1 (1 - \cos \Delta_1)$$

$$E_2 = \sin^2 2 \rho_2 + \cos^2 2 \rho_2 \cos \Delta_2$$

$$F_1 = \cos 2 \rho_1 \sin \Delta_1$$

$$G_1 = \cos \Delta_1$$

onde ρ_i representa o azimute da indicatriz ótica da janela i e Δ_i a birrefringência.

Assim, fica praticamente impossível a determinação dire

ta de Δ . Todavia as quantidades $-B_2B_1$, E_2F_1 e $-E_2G_1$ podem ser determinadas medindo-se previamente para tres valores conhecidos de Δ . No caso de Δ suficientemente pequeno temos:

$$S_w \approx K'J_1(-B_2B_1 + E_2F_1 - E_2G_1\Delta).$$

Com amostra ausente medimos

$$S_{w_0} = K'J_1(-B_2B_1 + E_2F_1).$$

Portanto,

$$S_w = S_{w_0} + K'(E_2G_1)\Delta$$

a quantidade E_2G_1 deve ser determinada dando-se mais um valor a Δ .

Como outra alternativa, podemos inserir um polarizador de entrada no interior da cabeça do criostato, precedendo a amostra. O circuito ótico fica:

A intensidade na fotomultiplicadora é:

$$I = \frac{I_0}{4} \left[1 + (E_2C\Delta - F_2S\Delta)C\delta - (F_2C\Delta + G_2S\Delta)S\delta \right]$$

Com $J_0(\delta_{0CAL}) = 0$, temos:

$$S_w = -K'J_1(F_2C\Delta + G_2S\Delta).$$

Para determinar F_2 e G_2 fazemos:

a) $\Delta = 0$ (amostra ausente):

$$S_{\omega_0} = -K' J_1 F_2$$

b) $\Delta = 90^\circ$ (lâmina de $\lambda/4$ no lugar da amostra):

$$S_{\omega_{90^\circ}} = -K' J_1 G_2 .$$

Assim:

$$S_\omega = S_{\omega_0} \cos \Delta + S_{\omega_{90^\circ}} \sin \Delta .$$

Se Δ é pequeno, tem-se:

$$S_\omega \approx S_{\omega_0} + S_{\omega_{90^\circ}} \Delta .$$

XV - ANÁLISE DO SINAL E SENSIBILIDADE DO INSTRUMENTO

A sensibilidade do instrumento, ou seja, o menor sinal (informações) detectável pelo sistema de medida, é limitada pelo nível de ruído inerente ao sistema (ruídos térmicos, ruídos "shot" e "flicker", microfonia, etc.) e também interferência de sinais espúrios e perturbações no ambiente (universo). Tem-se então interferência da rede de distribuição de eletricidade (60Hz) sinais de rádio, motores de combustão, vibrações da terra, oscilações da temperatura, raios cósmicos, etc.).

A distribuição dessas flutuações na saída de um sistema pode ser visualizada no gráfico a seguir.

DISTRIBUIÇÃO DE RUÍDO NUM LABORATÓRIO

O caráter $1/f$ desde baixíssimas frequências na região de flutuações do ambiente não é ainda bem entendida. Este caráter é observado até a região de uns 100Hz. Nesta extremidade esta característica é interpretada em termos do ruído "flicker", cuja origem não é perfeitamente entendida, mas têm-se bons estudos fenomenológicos. É possível que o ruído "flicker" seja manifestação, em escala menor, de processos análogos às flutuações do ambiente. Em frequências acima de 100Hz o espectro apresenta-se constante (branco) a menor dos picos de 60 Hz (rede) e seus harmônicos e sinais de rádio e TV. Em dispositivos eletrônicos podemos considerar que o ruído branco desaparece em frequências muito altas (ópticas). Assim, a potência total do espectro, disponível num intervalo de tempo de observação $\tau = \frac{1}{\Delta f}$ não vai além de uma mínima fração de watt.

O ruído branco é composto dos ruídos de:

- a) Johnson-Nyquist, de origem térmica, que aparece nos conduto-

res, onde há movimento caótico de cargas (gás de elétrons). A potência captada dos terminais de um resistor por um sistema de medida de banda Δf é dada por

$$P = K T \Delta f_n = \frac{\overline{e_N^2}}{4R} = \frac{R \overline{i_N^2}}{4}$$

onde $\overline{e_N^2}$ e $\overline{i_N^2}$ representam pontos de tensão ou corrente associadas a R; a largura efetiva de banda Δf_n é obtida de uma transformação de Δf (51), K é a constante de Boltzman.

b) Ruído "shot", que aparece em dispositivos cujas propriedades eletrônicas dependem de fenômenos de emissão (contra uma barreira de potencial) de cargas discretas (elétrons). Aqui o ruído ocorre devido ao processo randômico da emissão. Este processo é descrito estatisticamente por uma distribuição de Poisson. A contribuição do "shot noise" ao ruído branco se dá pela corrente de ruído $\overline{i_N^2} = 2 e I \Delta f_n$, onde I é a corrente média da emissão aleatória de elétrons. Numa válvula fotomultiplicadora a emissão de elétrons pelo fotocatodo tem a componente de corrente média I_{DC} devida ao fluxo de ftons incidente e que libera elétrons segundo a eficiência quântica do material; outra componente é a corrente térmica devida à agitação dos elétrons do material à temperatura ambiente. É a principal componente da "dark current" da fotomultiplicadora, podendo ser reduzida por um sistema de refrigeração (por exemplo à temperatura do nitrogênio líquido (44)), mas não é a principal componente de ruído, conforme veremos à página 111.

Frequência de trabalho - Observando o espectro da figura vemos que a melhor região de trabalho é onde ocorre apenas o ruído branco. Em nosso sistema de medida trabalhamos em 50 KHz e 100 KHz. Podemos considerar em nosso tratamento da sensibilidade do instrumento que todo o sistema é estável com relação a influências do ambiente (bom aterramento do equipamento elétrico; bom isolamento mecânico; sistema elétrico de alimentação estável(ripple,etc.)). Vamos também considerar o feixe da luz monocromático e isento do ruído térmico da lâmpada incandescente utilizada. Deste modo, consideraremos, como é usual (45), apenas o ruído eletrônico da fotomultiplicadora e do restante eletrônico.

Análise eletrônica: o amplificador "lock-in"

O diagrama básico de um "lock-in" está mostrado abaixo:

O sinal e a referência devem estar exatamente na mesma frequência. A melhor maneira de conseguir isto é tirar a referência do mesmo dispositivo modulador do sinal. Como já vimos, na placa moduladora por nós utilizada o sinal de referência é uma amostra da tensão de 50 KHz aplicada no transdutor

de quartzo piezoelétrico. Com o "phase-shifter" mostrado no diagrama fazemos com que a referência e o sinal fiquem exatamente em fase. O "schmidt-trigger" transforma a senoide de referência em onda quadrada. Os circuitos dos canais do sinal e da referência podem atingir grandes graus de complexidade dada sua importância crítica no desempenho do instrumento (46). O detector síncrono pode ser visualizado como um multiplicador de quatro quadrantes. Mostramos abaixo uma configuração elementar do detector síncrono, para substanciar o entendimento (47):

O filtro RC (passa-baixas) na saída nos dará a parte DC da forma de onda na saída do multiplicador, mais as componentes AC de ruído dentro da banda Δf_n efetiva do filtro. Na prática a banda Δf_n pode ser ampliada ou reduzida através de um dial no painel do instrumento, que permite selecionar entre vários filtros disponíveis $\left(\Delta f_n = \frac{1}{4RC} \right)$.

A expressão da relação sinal-ruído na saída do "lock-in" pode ser obtida teoricamente equacionando o processamento do sinal, ruído e referência no detector síncrono:

sinal: $V_S = V \cos \omega t$

referência: V_R = onda quadrada de amplitude 1 e freq. ω

ruído: $V_N = r(t) \cos(\omega t + \phi(t))$,

onde a expressão de V_N é justificada no apêndice 1. Observamos que $r(t)$ e $\phi(t)$ são variáveis aleatórias.

A referência pode ser descrita como:

$$V_R = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega t + \dots \right)$$

Tem-se:

$$V_O = (V_S + V_N) V_R = V_N V_R + V_S V_R$$

$$V_N V_R = r \cos(\omega t + \phi) \times \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega t \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} r(t) \left[\cos \phi(t) + \frac{2}{3} \cos(2 \omega t + \phi(t)) - \frac{2}{15} \cos(4 \omega t + \phi(t)) + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 V_S V_R &= V \cos \omega t \times \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega t \right) \\
 &= \frac{4V}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2 \omega t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega t + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 V_O &= \frac{4}{\pi} V + \frac{4}{\pi} r(t) \cos \omega(t) + \frac{2}{3} (\cos \omega t + \cos(\omega t + \phi)) \\
 &\quad - \frac{2}{15} (\cos 4 \omega t + \cos(4 \omega t + \phi)) + \dots
 \end{aligned}$$

Como a banda de passagem do filtro RC é feita bem menor que ω , teremos à saída o sinal DC $\frac{4}{\pi} V$ somado às componentes de ruído dentro da faixa $\Delta f_n = \frac{1}{4RC}$. A expressão do ruído então pode ser escrita como

$$r'(t) \cos \phi'(t).$$

A relação sinal-ruído é portanto:

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{V}{\pi}}{\left[\frac{r'^2(t)}{\pi^2} \overline{\cos^2 \phi'(t)} \right]^{1/2} \sqrt{r'^2(t)}} = \frac{\sqrt{2} V}{\sqrt{r'^2(t)}},$$

$$\text{pois } \overline{\cos^2 \phi'(t)} = \frac{1}{2}.$$

O sinal e o ruído enviados ao "lock-in" são obtidos dos terminais do resistor de anodo da fotomultiplicadora. Temos então que considerar em adição à corrente de ruído originados no interior da foto a corrente térmica do resistor de $100 \text{ K}\Omega$. Além disto devemos acrescentar o ruído próprio do amplificador, facil

mente obtido da figura de ruído dada no manual do instrumento (48). O ruído da fotomultiplicadora é predominantemente causado pela baixa eficiência do fotocatodo e pela emissão termiônica do fotocatodo e dinodos. Várias outras fontes de ruído no interior do tubo, como ionização do gás, realimentação de luz, radioatividade de partículas contidas no recinto evacuado, etc.. (49) podem ser desprezadas.

Tem-se então:

$$\overline{r'^2(t)} = R^2 \overline{i_N^2}$$

$$\overline{i_N^2} = 2 e \Delta f_n (i_{DC} + i_{TÉRMI\text{CO}}) + \frac{4KT\Delta f}{R} \left(1 + 10^{\frac{NF}{10}} \right)$$

onde i_{DC} é a componente DC da corrente fotoeletrônica; $i_{TÉRMI\text{CO}}$ é a corrente térmica de escuro obtida no anodo; R a resistência de cargas da fotomultiplicadora e NF é o valor em decibéis da figura de ruído do "lock-in".

Na unidade PAR-128 tem-se que NF = 0.15 dB para $f = 50 \text{ KHz}$ e $R = 100 \text{ K}\Omega$.

Tem-se ($k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$; $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $T = 300^\circ\text{K}$):

$$\frac{4kT\Delta f}{R} \left(1 + 10^{\frac{NF}{10}} \right) \approx \frac{4.5 \times 10^{-26}}{\tau} \text{ amperes}^2$$

$$2 e \Delta f (i_{DC} + i_{TÉRMI\text{CO}}) \approx \frac{8 \times 10^{-18}}{\tau} (i_{DC} + i_{TÉRMI\text{CO}}) \text{ amperes}^2$$

onde τ é a constante de tempo do filtro RC.

Pelo gráfico da página 96 vemos que $i_{\text{TÉRM.}} = 10^{-16}$ A. Em nossas experiências mantivemos i_{DC} da ordem de microampere. Nestas condições podemos desprezar $i_{\text{TÉRM.}}$, ou seja:

$$2 e \Delta f (i_{\text{DC}} + i_{\text{TÉRM.}}) \approx \frac{8 \times 10^{-18}}{\tau} i_{\text{DC}} .$$

Em face dos valores calculados podemos considerar, finalmente:

$$\overline{i_N^2} = \frac{8 \times 10^{-18}}{\tau} i_{\text{DC}} \text{ amperes}^2$$

(Observação: Nota-se no desenvolvimento acima que a recomendação de "refrigerar o fotocatodo" não se aplica neste trabalho, onde as correntes i_{DC} são da ordem de microamperes. Esta recomendação é válida somente em experiências com baixíssimo fluxo luminoso, correspondente a correntes na escala de femtoamperes (10^{-15} A). Por outro lado, a corrente de ruído térmico no resistor de $100 \text{ K}\Omega$ deverá ser levada em conta quando trabalharmos com correntes i_{DC} da ordem de décimos ou centésimos de microampere).

Da expressão da intensidade da corrente do sinal, à página 30, vemos que, com $i_{\text{DC}} = \text{constante}$, tem-se:

$$i = i_{\text{DC}} + i_{\text{DC}} \frac{J_1 \sin \Delta}{1 - J_0 \cos \Delta} \sin \omega t - i_{\text{DC}} \frac{J_2 \cos \Delta}{1 - J_0 \cos \Delta} \cos 2\omega t \dots .$$

Considerando apenas a componente em ω , tem-se, com

$$J_0(\delta_{\text{CAL}}) = 0 ,$$

$$V = R i_{\text{DC}} J_1 \text{ sen } \Delta .$$

Tem-se também que:

$$\sqrt{r^2} = R \sqrt{i_N^2} = R 2 \sqrt{2} 10^{-9} \frac{\sqrt{i_{\text{DC}}}}{\sqrt{\tau}} .$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \sqrt{2} \frac{V}{\sqrt{r^2}} = \sqrt{2} \frac{R i_{\text{DC}} J_1 \text{ sen } \Delta}{R 2 \sqrt{2} 10^{-9} \frac{\sqrt{i_{\text{DC}}}}{\sqrt{\tau}}} \\ &= \sqrt{i_{\text{DC}}} \sqrt{\tau} \frac{J_1}{2} 10^9 \text{ sen } \Delta \end{aligned}$$

Assim, o menor valor de possível de ser medido será dado por:

$$\begin{aligned} (\text{sen } \Delta)_{\text{MÍNIMO}} &\approx \Delta_{\text{MÍN}} = 2 \frac{S}{N} \frac{10^{-9}}{J_1 \sqrt{i_{\text{DC}}} \sqrt{\tau}} \text{ radiano} \\ &= 120 \frac{S}{N} \frac{10^{-9}}{J_1 \sqrt{i_{\text{DC}}} \sqrt{\tau}} \text{ grau} \end{aligned}$$

Como $J_1(\delta_{oCAL}) = 0.52$ e com uma relação sinal-ruído igual a 5, obtemos os seguintes valores de Δ_{MIN} , medidos em grau:

$\tau \backslash i_{DC}$	0.1 μA	1 μA	5 μA	10 μA	20 μA
0.3 s	7×10^{-3}	2×10^{-3}	1×10^{-3}	7×10^{-4}	5×10^{-4}
1 s	4×10^{-3}	1×10^{-3}	5×10^{-4}	4×10^{-4}	3×10^{-4}
3 s	2×10^{-3}	7×10^{-4}	4×10^{-4}	2×10^{-4}	2×10^{-4}
10 s	1×10^{-3}	4×10^{-4}	2×10^{-4}	1×10^{-4}	1×10^{-4}
30 s	7×10^{-4}	2×10^{-4}	1×10^{-4}	7×10^{-5}	5×10^{-5}

Em nossa montagem a constante de tempo razoável para o funcionamento automático era de $\tau = 0.3 \text{ s}$. O nível de corrente adequado era no intervalo de 1 a 10 μA . A sensibilidade era portanto de 10^{-3} grau. Se o avanço da amostra era controlado manualmente a sensibilidade podia chegar a 10^{-4} grau. Uma resolução maior exigiria uma fonte de luz mais potente.

Convém observar que a escala de sensibilidade do "lock-in" pode ser determinada, ou prevista, calculando-se o valor de $R \sqrt{i_N^2}$. Por exemplo, para $i_{DC} = 5 \mu A$ e $\tau = 0.3 \text{ s}$ ($\Delta_{MIN} \approx 10^{-3}$ grau) tem-se:

$$R \sqrt{i_N^2} = R \, 2\sqrt{2} \, 10^{-9} \sqrt{\frac{i_{DC}}{\tau}} \approx 1.5 \mu V \quad .$$

Ou seja, a escala de sensibilidade que possibilita visualizar um sinal algumas vezes maior que este ruído de $1.5 \mu V$ deverá ser de 10 a $30 \mu V$.

XVI - INFLUÊNCIA DA TENSÃO RESIDUAL DA AMOSTRA NA MEDIDA DE Δ .

Uma dificuldade experimental que envolve a técnica fotoelástica (medida de Δ) é a birrefringência residual das amostras, devido às tensões internas do cristal. Essas tensões são geralmente formadas durante o crescimento do monocristal, podendo ser minimizadas com cuidados especiais e conforme a sofisticação do equipamento (fornos, controle de temperatura, etc...). Um cuidadoso tratamento térmico de recosimento das amostras também diminui a birrefringência residual, mas na maioria dos casos temos que trabalhar com amostras razoavelmente tensionadas.

São várias as implicações dessa birrefringência residual. Assim, se as tensões internas estiverem perto do limite elástico, a experiência torna-se impossível de realizar devido às fortes não-linearidades. Também foi mencionado à página que a alta sensibilidade do fotoelasticímetro construído (variações de Δ da ordem de 10^{-3} a 10^{-4} grau) torna-se pouco aproveitável face à birrefringência residual várias ordens de grandeza acima ($\Delta > 5 \times 10^{-2}$ grau), a não ser que se trabalhe em um ponto fixo da amostra.

Tentaremos aqui dar um tratamento matemático aos efeitos desse residual, dando assim algum critério para seleção das amostras e subsídios para uma melhor interpretação dos resultados. Como consequência imediata deste estudo teremos uma possí-

vel interpretação para a componente extra que aparece nas medidas, citadas aqui à página 54 e na referência (26). Mostraremos também que os padrões fotoelásticos não são perfeitamente aditivos, como considerado em (8).

A birrefringência da amostra fica determinada pelo elipsoide indicatriz ótica (pág. 22). Vamos supor que um dos eixos está sempre alinhado na direção z de propagação do feixe de luz. As direções x e y serão aqui considerados como as direções de alinhamento das amostras no fotoelasticímetro, conforme descrito na página 93. A intersecção do elipsoide com o plano xy nos dá a elipse genérica.

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 1 \quad ,$$

onde

$$A = \frac{1}{n^2} + q_{11}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{13}P_{zz} + q_{14}P_{yz} + q_{15}P_{zx} + q_{16}P_{xy}$$

$$B = \frac{1}{n^2} + q_{21}P_{xx} + q_{22}P_{yy} + q_{23}P_{zz} + q_{24}P_{yz} + q_{25}P_{zx} + q_{26}P_{xy}$$

$$C = q_{61}P_{xx} + q_{62}P_{yy} + q_{63}P_{zz} + q_{64}P_{yz} + q_{65}P_{zx} + q_{66}P_{xy}$$

sendo n o índice de refração isotrópica e os P_{ij} as componentes de esforços no cristal tensionado.

a) amostra sem tensões residuais: os P_{ij} correspondem, numa experiência ideal, apenas aos P_{ij} criados pelos defeitos introduzidos na rede. Neste caso os eixos da indicatriz ótica corresponde

dem às direções de alinhamento e a elipse é

$$A_D x^2 + B_D y^2 = 1 ,$$

sendo

$$A_D = \frac{1}{n^2} + q_{11} P_{xx} + q_{12} P_{Dyy} + \dots$$

$$B_D = \frac{1}{n^2} + q_{21} P_{Dxx} + q_{22} P_{Dyy} + \dots$$

$$C_D = 0$$

O ângulo de birrefringência é

$$\Delta_D = \frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{B_D}} - \frac{1}{\sqrt{A_D}} \right) \approx \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{n}{2} (A_D - B_D)$$

b) Birrefringência residual: se antes da introdução de defeitos a amostra já está tensionada, a indicatriz ótica do residual (apenas) será dada por:

$$A_R x^2 + B_R y^2 + C_R xy = 1 ,$$

sendo:

$$A_R = \frac{1}{n^2} + q_{11} P_{Rxx} + q_{12} P_{Ryy} + \dots$$

$$B_R = \frac{1}{n^2} + q_{21} P_{Rxx} + q_{22} P_{Ryy} + \dots$$

$$C_R = q_{61} P_{Rxx} + q_{62} P_{Ryy} + \dots$$

Os eixos principais da elipse estará a um ângulo ψ_R com relação a x. Fazendo uma rotação de coordenadas teremos:

$$A'_R x'^2 + B'_R y'^2 = 1$$

onde

$$A'_R = \cos^2 \psi_R (A_R + B_R \tan^2 \psi_R + C_R \tan \psi_R)$$

$$B'_R = \cos^2 \psi_R (A_R \tan^2 \psi_R + B_R - C_R \tan \psi_R)$$

$$\text{e } \psi_R = \arctan \frac{C_R}{A_R - B_R} .$$

Vê-se também que

$$A'_R - B'_R = A_R - B_R .$$

Portanto:

$$\Delta_R = \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{n^3}{2} (A_R - B_R)$$

c) A introdução de defeitos causando gradientes de tensão numa direção qualquer (dano de radiação ou difusão de impurezas) deforma a elipse indicatriz ótica, girando o azimute para

$$\psi_{RD} = \arctan \frac{C_{RD}}{A_{RD} - B_{RD}} ,$$

onde

$$A_{RD} = \frac{1}{n^2} + q_{11} (P_{Rxx} + P_{Dxx}) + q_{12} (P_{Ryy} + P_{Dyy}) + \dots$$

$$B_{RD} = \frac{1}{n^2} + q_{12} (P_{Rxx} + P_{Dxx}) + q_{22} (P_{Ryy} + P_{Dyy}) + \dots$$

$$C_{RD} = q_{61}(P_{Rxx} + P_{Dxx}) + q_{62}(P_{Ryy} + P_{Dyy}) + \dots$$

ou sejam:

$$A_{RD} = A_D + A_R - \frac{1}{n^2}$$

$$B_{RD} = B_D + B_R - \frac{1}{n^2}$$

$$C_{RD} = C_R + C_D$$

Portanto,

$$\tan \psi_{RD} = \frac{C_{RD}}{A_{RD} - B_{RD}} = \tan \psi_R \frac{\Delta_R}{\Delta_R + \Delta_D} + \tan \psi_D \frac{\Delta_D}{\Delta_D + \Delta_R}$$

A birrefringência é

$$\Delta_{RD} = \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{n^3}{2} (A_{RD} - B_{RD}) = \Delta_D + \Delta_R$$

Medidas de Δ

1) Método de Senarmont (ver pág. 3)

$$1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 + S_2^2 C\Delta & C_2 S_2 (1 - C\Delta) & -S_2 S\Delta \\ 0 & C_2 S_2 (1 - C\Delta) & S_2^2 + C_2^2 C\Delta & C_2 S\Delta \\ 0 & S_2 S\Delta & -C_2 S & C\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 S_2 (1 - C\Delta) \\ S_2^2 + C_2^2 C\Delta \\ -C_2 S\Delta \end{pmatrix}$$

$$3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 S_2 (1-C) \\ S_2 + C_2 C \\ -C_2 S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 S \\ S_2 + C_2 C \\ C_2 S_2 (1-C) \end{pmatrix}$$

$$4 : \begin{pmatrix} 1 & C_2 \theta & S_2 \theta & 0 \\ C_2 \theta & C_2^2 \theta & C_2 \theta S_2 \theta & 0 \\ S_2 \theta & C_2 S_L & S_L^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 \psi S \Delta \\ S_2^2 \psi + C_2^2 \psi C \Delta \\ C_2 \psi S_2 \psi (1-C \Delta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + C_2 \theta C_2 \psi S \Delta + S_2 \theta (S_2^2 \psi + C_2^2 \psi C \Delta) \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

A intensidade emergente do analisador é

$$I = \frac{I_0}{4} (1 + C_2 \theta C_2 \psi S \Delta + S_2 \theta (S_2^2 \psi + C_2^2 \psi C \Delta)) .$$

A posição do analisador para mínima passagem de luz é

$$\theta = 45^\circ - \frac{1}{2} \arctan \frac{C_2 \psi S \Delta}{S_2^2 \psi + C_2^2 \psi C \Delta} .$$

Supondo ψ e Δ suficientemente pequenos, podemos escrever:

$$\theta \approx 45^\circ - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{4\psi^2 + 1} \approx 45^\circ - \frac{1}{2} (1 - 8\psi^2) \Delta .$$

Os valores medidos serão:

$$\theta_R \approx 45^\circ - \frac{1}{2} (1 - 8\psi_R^2) \Delta_R$$

$$\theta_{RD} \approx 45^\circ - \frac{1}{2} (1 - 8\psi_{RD}^2) \Delta_D - \frac{1}{2} (1 - 8\psi_{RD}^2) \Delta_R .$$

Nas medidas faz-se $\psi_D = 0$. Neste caso o valor de $2(\theta_{RD} - \theta_R)$, considerado geralmente como o valor de $-\Delta_D$, na verdade é

$$\begin{aligned} 2(\theta_{RD} - \theta_R) &= -(1 - 8\psi_{RD}^2) \Delta_D + 8(\psi_R^2 - \psi_{RD}^2) \Delta_R \\ &= -\left(1 - 8\psi_R^2 \left[\frac{\Delta_R}{\Delta_R + \Delta_D}\right]^2\right) \Delta_D + 8\psi_R^2 \left[1 - \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_R + \Delta_D}\right)^2\right] \Delta_R \\ &= -\Delta_D + 8\psi_R^2 \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_R + \Delta_D}\right)^2 \Delta_D + 8\psi_R^2 \left[1 - \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_R + \Delta_D}\right)^2\right] \Delta_R . \end{aligned}$$

Esta expressão nos dá a idéia do erro cometido neste tipo de experiência. A influência dos termos adicionais a Δ_D dependerá do tipo de experiência. Por exemplo, quando causamos um mesmo Δ_D em diferentes amostras (diferentes Δ_R), teremos uma componente adicional a Δ_D que variará de amostra para amostra. Por outro lado, se Δ_D for da mesma ordem de grandeza de Δ_R , o termo adicional vale

$$2\psi_R \Delta_D + 6\psi_R^2 \Delta_R \approx 8\psi_R^2 \Delta_R .$$

E no caso de ser $\Delta_D \ll \Delta_R$ teremos uma flutuação em Δ_D igual a, aproximadamente,

$$24\psi_R^2 \Delta_D .$$

Observe-se que medidas à priori de Δ_R e ψ_R permitem-nos corrigir os resultados.

Lembramos aqui que o método de Senarmont, considerado acima, foi o método utilizado nas experiências citadas em (8) e (26), onde é mencionada a medida experimental de uma componente extra de birrefringência, cuja interpretação propusemos acima. O estudo quantitativo experimental para confronto com a teoria acima é aqui dado como sugestão para trabalho futuro.

2) Para o sistema utilizado neste trabalho (fotoelasticímetro automático) a intensidade de luz incidente na fotomultiplicadora será:

$$I = \frac{I_0}{4} \left[1 + \cos 2\psi \sin \Delta \sin \delta - (\sin^2 2\psi + \cos^2 2\psi \cos \Delta) \cos \delta \right] .$$

Conservando o ajuste do instrumento em $J_0(\delta_{OCAL}) = 0$, temos, à saída do "lock-in" (ver pág. 33):

$$S_{\omega} = K' J_1 \cos 2\psi \sin \Delta .$$

A medida da birrefringência residual nos dá:

$$S_{\omega_R} = K' J_1 \cos 2\psi_R \sin \Delta_R .$$

Introduzindo Δ_D , temos:

$$S_{\omega_{RD}} = K' J_1 \cos 2\psi_{RD} \sin(\Delta_R + \Delta_D) .$$

Portanto:

$$S_{\omega_{RD}} - S_{\omega_R} = K' J_1 \cos 2\psi_{RD} \sin(\Delta_R + \Delta_D) - K' J_1 \cos 2\psi_R \sin \Delta_R .$$

Se ψ_{RD} e ψ_R forem suficientemente pequenos podemos es-
crever:

$$\cos 2 \psi_{RD} \approx 1 - 2\psi_{RD}^2$$

$$\cos 2 \psi_R \approx 1 - 2\psi_R^2 \quad .$$

Assim,

$$S_{\omega_{RD}} - S_{\omega_R} \approx K' J_1 \left[\sin(\Delta_D + \Delta_R) - \sin \Delta_R \right] - K' J_1^2 \left[\psi_{RD}^2 \sin(\Delta_D + \Delta_R) - \psi_R^2 \sin \Delta_R \right] \quad .$$

A quantidade de interesse nas medidas é a representada
entre os primeiros colchetes na expressão acima.

Lembramos que (pág. 118):

$$\psi_{RD} \approx \psi_R \frac{\Delta_R}{\Delta_D + \Delta_R} + \psi_D \frac{\Delta_D}{\Delta_D + \Delta_R}$$

e supondo $\psi_D = 0$ e amostra alinhada (pág. 93), temos:

$$\psi_{RD}^2 \approx \psi_R^2 \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_D + \Delta_R} \right)^2 \quad .$$

Assim:

$$S_{\omega_{RD}} - S_{\omega_R} \approx K' J_1 \left[\sin(\Delta_D + \Delta_R) - \sin \Delta_R \right] - K' J_1^2 \psi_R^2 \left[\left(\frac{\Delta_R}{\Delta_D + \Delta_R} \right)^2 \sin(\Delta_D + \Delta_R) - \sin \Delta_R \right]$$

termo adicional

1) Com $\Delta_D \ll \Delta_R$, tem-se:

$$\text{termo adicional} \approx K' J_1 4 \psi_R^2 \Delta_D \frac{\text{sen } \Delta_R}{\Delta_R}$$

2) Com $\Delta_D \gg \Delta_R$:

$$\text{termo adicional} \approx -K' J_1 2 \psi_R^2 \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_D} \right)^2 \text{sen } \Delta_D$$

3) Com $\Delta_D \approx \Delta_R$:

$$\text{termo adicional} \approx K' J_1 \frac{\psi_R^2}{2} \left[\text{sen}(\Delta_D + \Delta_R) - \text{sen} \Delta_R \right] - K' J_1 \psi_R^2 \frac{3}{2} \text{sen} \Delta_R$$

4) Com $\Delta_D \approx \Delta_R$ e pequenos ($\approx 1^\circ$) podemos confundir o seno com o arco e fica:

$$\text{termo adicional} \approx K' J_1 \frac{1}{2} \psi_R^2 (\Delta_D - 3\Delta_R) .$$

Observação: O estudo quantitativo experimental destas expressões é uma sugestão para trabalho futuro.

XVII - SENSIBILIDADE E PRECISÃO - Resumo

Sensibilidade - de acordo com o exposto a partir da página 103 , o menor ângulo que o fotoelasticímetro é capaz de medir, é da ordem de 10^{-3} a 10^{-4} grau.

Precisão - as componentes de erro são:

a) desalinhamento: vimos à página 40 que um erro de $\Delta\theta$ radianos no alinhamento dos componentes óticos causa uma imprecisão nas medidas da ordem de $2\Delta\theta \times 100\%$;

b) tensões residuais da amostra: à página 123 concluímos que uma tensão residual (pré-existente) na amostra causa o aparecimento de um termo adicional a Δ , de valor aproximadamente dado por

$$2\psi_R \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_D} \right)^2 \sin \Delta_D ,$$

onde ψ_R mede o azimute do eixo maior da elipse indicatriz ótica do residual e $\Delta_D \gg \Delta_R$;

c) num tratamento mais rigoroso teríamos que considerar os efeitos da distribuição espectral da luz do feixe, a imperfeição dos polarizadores e efeitos de espalhamento. Também o erro introduzido pelo não colimamento do feixe pode ser considerado a exemplo do que foi feito à página 85 (placa).

CAPÍTULO VI

SACARÍMETRO AUTOMÁTICO

Introdução - O sistema que apresentaremos a seguir leva o nome genérico de "polarímetro automático", pois é destinado à medida do poder rotatório de uma solução qualquer que exiba este fenômeno. Damos o nome de "sacarímetro" para ressaltar seu possível valor tecnológico.

Ao fazermos atravessar um feixe de luz polarizada em uma solução aquosa de açúcar (sacarose), a direção do plano de polarização da luz transmitida apresenta um desvio angular (50)

$$\theta \propto \frac{1}{\lambda} C d$$

C : concentração da solução;

d : distância de percurso dentro da
solução

com relação à direção de polarização da luz incidente. Se desejamos conhecer a concentração de açúcar na solução amostrada basta medir θ , após calibração do instrumento para um mesmo recipiente e mesmo λ . O sacarímetro em questão é projetado para registrar continuamente os ângulos θ_1 de variadas amostras de soluções.

Esquema do instrumento

1. Descrição do esquema e teoria de funcionamento

O feixe de luz, ao passar pelo polarizador P, de entrada, sai polarizada a 0° :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A amostra gira o plano de polarização até um ângulo . Trata-se então de um girador ("rotator"), cuja matriz de Mueller é (19) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 \theta & -S_2 \theta & 0 \\ 0 & S_2 \theta & C_2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto após a amostra tem-se

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 \theta \\ S_2 \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sendo o analisador um pedaço de polaroid girando à frequência ω sua matriz de Mueller é:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & C_2 t & S_2 t & 0 \\ C_2 t & C_2 t & C_2 t S_2 t & 0 \\ S_2 t & C_2 t S_2 t & S_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O vetor da luz incidente na fotomultiplicadora F é então dado por:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + C_2 C_2 t & + S_2 S_2 t \\ C_2 t + C_2 C_2 t & + S_2 C_2 t S_2 t \\ S_2 t + C_2 C_2 t S_2 t & + S_2 S_2 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

de onde identificamos:

$$I = \frac{1}{4} (1 + \cos(2 t - 2)).$$

Pela expressão acima vemos que uma limitação do instrumento é a restrição de θ ao intervalo:

$$-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ .$$

(A informação que nos interessa obter é o valor de θ , que é dado pela fase do sinal senoidal com relação à fase da referência, aqui considerada zero para simplificação).

O sinal luminoso (ou a corrente da fotomultiplicadora) é então composto de uma parte DC e outra senoidal. Para medirmos a defasagem utilizamos o seguinte processo:

A tensão elétrica senoidal correspondente é amplificada e transformada em onda quadrada. O mesmo tratamento é dado à tensão senoidal do sinal de referência. Ambos são enviados respectivamente ao coletor e à base de um transistor, conforme esquema mostrado mais abaixo. A tensão de saída (queda no resistor R_C do coletor) é uma onda quadrada cuja largura de pulso (Δt) é proporcional à defasagem θ . O valor médio desse trem de pulsos é dado por:

$$V_{DC} = \frac{V}{2\pi} \Delta t$$

(Isto é fácil de ver através da expansão da função $f(t)$ do trem de pulsos em componentes de Fourier (22):

$$f(t) = \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2t + \dots \right)$$

Este valor médio V_{DC} é a saída do sistema e é obtida por um integrador conforme esquema.

O sinal de referência é obtido do analisador girante através de um sistema LED-Fototransistor acoplado à periferia do disco de polaroid:

2. Circuito eletrônico do medidor de defasagem

O circuito eletrônico detetor de defasagem que aqui apresentamos é um circuito provisório, construído para uma primeira verificação do sistema. Sua principal falha é a baixa res-
posta em altas frequências, introduzindo assim um aumento do tempo de subida das ondas quadradas (ver pág.131).

Descrição: O subcircuito em que se configura o amplificador operacional 1 é um seguidor de tensão, cujo objetivo é simplesmente apresentar uma alta impedância de entrada para o sinal de referência; analogamente o operacional 5 oferece, na configuração de seguidor, alta impedância para o sinal proveniente da fotomultiplicadora. O resistor de $100\text{ k}\Omega$ na entrada é a resistência em série com o anodo da fotomultiplicadora. Os amplificadores 2 e 6 possibilitam as ampliações dos sinais de referência e da fotomultiplicadora no intervalo de dez a vinte vezes. Os condensadores de 660 nF eliminam numa primeira etapa as componentes DC, atenuando pouco na frequência de trabalho (48 Hz). A configuração com o operacional 3 é a de um defasador variável: com o potenciômetro de $100\text{ k}\Omega$ podemos ajustar continuamente a fase de referência, com relação ao sinal, desde 0 a -180° ou desde -180° a -360° dependendo da posição da chave k. A utilidade do defasador é apenas fixar o nível zero na saída, numa operação de calibração (amostra ausente).

Após eliminar com os capacitores de 66 nF novamente as partes DC, agora introduzidas pela deriva dos operacionais anteriores, os sinais senoidais são transformados em ondas quadradas pela configuração de alto ganho dos operacionais 4 e 7. A onda quadrada na saída do operacional 4 é injetada no coletor do transistor T, via resistência de $1.5\text{ k}\Omega$, e a saída do operacional 7 é injetada na base do mesmo transistor. Este apenas conduzirá enquanto ambos os sinais, vindos de 4 e 7, forem diferentes de zero. A largura dos pulsos na saída (coletor) é uma medida da defasagem, conforme se ilustra na figura a seguir:

O integrador (operacional 8) fornece na saída um nível DC igual a

$$V_o = - \frac{R_2}{R_1} \frac{V}{2\pi} \left(\frac{T}{2} - \Delta t \right)$$

que é recolhido por um registrador através do contato móvel do potenciômetro de 10 kΩ

3. Equipamento utilizado

Fonte de Luz-Laser ou a mesma descrita à pág. 69 .

Polarizadores - Placas de polaroid (H-32)

Movimento do analisador - o disco de polaroid é acoplado diretamente ao eixo (ver pág. 133).

Fotomultiplicadora - RCA IP28

Fonte de alimentação da fotomultiplicadora - Bradenburg 472R

Registrador

Recipiente da amostra - caixa metálica com janelas de sílica fundida, não birrefringentes.

4. Resultados obtidos e crítica

Nossa montagem do sacarímetro visava tão somente examinar a viabilidade de construção de um prototipo industrial. Interessava-nos verificar sobretudo a linearidade da resposta. Assim, o circuito eletrônico detetor de fase introduz erros devidos à sua pobre resposta em frequência, ou seja, alto tempo de subida e de descida nas bordas das ondas retangulares da saída; mas é perfeitamente possível otimizar tal circuito. O trabalho de aperfeiçoamento do detetor seria efetuado portanto numa segunda etapa, talvez utilizando multivibradores para transformar as senoides em ondas quadradas e assim reduzir o tempo de subida.

A sensibilidade do sistema montado era pequena devido principalmente a ruídos de baixa frequência (10^{-1} a 10^{-2} Hz), talvez associados à montagem (figura abaixo) utilizada como modulador (analisador girante). De fato, verificamos:

que em nosso sistema a velocidade angular do polaroid não era perfeitamente estável, oscilando levemente em torno da frequência central de ≈ 50 Hz. Isto obviamente causava uma flutuação na tensão v_o de saída (ver equação à página 131). Para minimizar este ruído seria necessário utilizar motor perfeitamente síncrono, como por exemplo motor de histerese (52).

Outra limitação da sensibilidade é o ruído shot da fotomultiplicadora utilizada.

A tabela abaixo ilustra nossas medidas com soluções aquosas de sacarose, cuidadosamente pesadas.

Concentração medida por pesagem	Concentração medida no sacarímetro construído
16.70% de sacarose	16.7% de sacarose
9.15%	9.0%
28.75%	31.9%
23.12%	24.8%

Esta tabela apenas mostra a validade do processo de medida. A imprecisão é devida a algumas deformações da forma de onda.

Acreditamos que na realização de um prtótipo industrial a montagem poderia ser mais compacta; a precisão das medidas poderá ser máxima por uma otimização do sistema eletrônico. A sensibilidade poderá atingir até 10^{-2} a 10^{-3} grau, mesmo se substituirmos a fotomultiplicadora por um fototransístor polarizado em máxima estabilidade em temperatura.

APÊNDICE I

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO RUÍDO (52)

Considerando-se uma amostra temporal do ruído, podemos supor uma periodicidade (T) e escrever:

$$V_N(t) = \sum_1^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Se o sistema de medida (lock-in) tem uma banda passante centrada em ω_c podemos escrever:

$$V_N(t) = x(t) \cos \omega_c t + y(t) \sin \omega_c t$$

onde

$$x(t) = \sum_1^{\infty} c_n \cos [(\omega_n - \omega_c) t + \theta_n]$$

e

$$y(t) = \sum_1^{\infty} c_n \sin [(\omega_n - \omega_c) t + \theta_n]$$

$$\theta_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} ; \quad c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

Em forma polar temos:

$$V_N(t) = r(t) \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

onde

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

$$e \quad \phi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$

Ou seja, o ruído é "visto" pelo sistema como uma onda portadora à frequência ω_c , cuja amplitude $r(t)$ e fase $\phi(t)$ variam caoticamente.

Interpretado assim, o ruído apresenta uma distribuição gaussiana. Supuzemos no trabalho que este resultado não tenha muita influência no fato de ruído em nossas medidas serem predominantemente do tipo "shot", que apresenta distribuição de Poisson (ver também (51), pág. 82).

APÊNDICE II

EFEITO DE CONTAMINAÇÃO DA 2a. HARMÔNICA DAS ONDAS
ELÁSTICAS NO MODULADOR

Quando a única componente presente é a de 5 kHz, o atraso induzido pelas tensões é

$$\delta = A \sin \omega t .$$

Se houver contaminação da 2a. harmônica, podemos escrever genericamente:

$$\delta = A \sin \omega t + B \sin(2\omega t + \phi) .$$

A intensidade da luz é dada em termos de $\sin \delta$ e $\cos \delta$, portanto para estudar o efeito da 2a. harmônica basta examinar estes termos.

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin(A \sin \omega t + B \sin 2\omega t + \phi) \\ &= \sin(A \sin \omega t) \cos[B \sin(2\omega t + \phi)] + \sin[B \sin(2\omega t + \phi)] \cos(A \sin \omega t) \end{aligned}$$

Temos:

$$\sin(A \sin \omega t) = 2 J_1(A) \sin \omega t + 2 J_3(A) \sin 3\omega t + \dots$$

$$\sin(B \sin(2\omega t + \phi)) = 2 J_1(B) \sin(2\omega t + \phi) + 2 J_3(B) \sin(6\omega t + 2\phi) + \dots$$

$$\cos(A \sin \omega t) = J_0(A) + 2 J_2(A) \cos 2\omega t + \dots$$

$$\cos(B \sin(2\omega t + \phi)) = J_0(B) + 2 J_2(B) \cos(4\omega t + 2\phi) + \dots$$

Portanto, considerando apenas termos em J_0 , J_1 , J_2 e J_3 :

$$\begin{aligned}
\text{sen } \delta &= \left[2 J_1(A) \text{sen } \omega t + 2 J_3(A) \text{sen } 3\omega t \right] \left[J_0(B) + 2 J_2(B) \cos(4\omega t + 2\phi) \right] \\
&+ \left[2 J_1(B) \text{sen}(2\omega t + \phi) + 2 J_3(B) \text{sen}(6\omega t + 3\phi) \right] \left[J_0(A) + 2 J_2(A) \cos 2\omega t \right] \\
&= 2 J_0(B) J_1(A) \text{sen } \omega t + 2 J_0(B) J_3(A) \text{sen } 3\omega t \\
&+ 4 J_2(B) J_1(A) \text{sen } \omega t \cos(4\omega t + 2\phi) + 4 J_2(B) J_3(A) \text{sen } 3\omega t \cos(4\omega t + 2\phi) \\
&+ 2 J_0(A) J_1(B) \text{sen}(2\omega t + \phi) + 2 J_0(A) J_3(B) \text{sen}(6\omega t + 3\phi) \\
&+ 4 J_2(A) J_1(B) \cos 2\omega t \text{sen}(2\omega t + \phi) + 4 J_2(A) J_3(B) \cos 2\omega t \text{sen}(6\omega t + 3\phi)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\text{sen } \delta &= \left[2 J_0(B) J_1(A) + 2 J_2(B) J_3(A) \cos 2\phi \right] \text{sen } \omega t \\
&- \left[2 J_2(B) J_3(A) \text{sen } 2\phi \right] \text{sen}(\omega t + 90^\circ) \\
&+ (2 J_0(A) J_1(B) \text{sen } \phi) \cos 2\omega t + (2 J_0(A) J_1(B) \cos \phi) \cos(2\omega t + 90^\circ) \\
&+ \text{termos em harmônicos superiores.}
\end{aligned}$$

$$\cos \delta = \cos(A \text{sen } \omega t) + B \text{sen}(2\omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(A \text{sen } \omega t) \cos[B \text{sen}(2\omega t + \phi)] - \text{sen}(A \text{sen } \omega t) \text{sen}[B \text{sen}(2\omega t + \phi)] \\
&= \left[J_0(A) + 2 J_2(A) \cos 2\omega t \right] \left[J_0(B) + 2 J_2(B) \cos(4\omega t + 2\phi) \right] \\
&- \left[2 J_1(A) \text{sen } \omega t + 2 J_3(A) \text{sen } 3\omega t \right] \left[2 J_1(B) \text{sen}(2\omega t + \phi) + 2 J_3(B) \text{sen}(6\omega t + 3\phi) \right] \\
&= J_0(A) J_0(B) + 2 J_0(B) J_2(A) \cos 2\omega t + 2 J_0(A) J_2(B) \cos(4\omega t + 2\phi) \\
&+ 4 J_2(A) J_2(B) \cos 2\omega t \cos(4\omega t + 2\phi)
\end{aligned}$$

$$- 4 J_1(A) J_1(B) \sin \omega t \sin(2\omega t + \phi) - 4 J_1(A) J_3(B) \sin \omega t \sin(6\omega t + 3\phi)$$

$$- 4 J_3(A) J_1(B) \sin 3\omega t \sin(2\omega t + \phi) - 4 J_3(A) J_3(B) \sin 3\omega t \sin(6\omega t + 3\phi)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \cos \delta = & J_0(A) J_1(B) + \left[2 J_0(B) J_2(A) + 2 J_2(A) J_2(B) \cos 2\phi \right] \cos 2\omega t \\ & - \left[2 J_1(A) J_1(B) \cos \phi + 2 J_3(A) J_1(B) \cos \phi \right] \sin \omega t \\ & - \left[2 J_1(A) J_1(B) \sin \phi + 2 J_3(A) J_1(B) \sin \phi \right] \sin(\omega t + 90^\circ) \\ & + \text{termos em harmônicos superiores.} \end{aligned}$$

A luz a ser analisada tem intensidade dada por (ver pág.

29):

$$I = \frac{I_0}{4} \left(1 + \cos \Delta \cos \delta - \sin \Delta \sin \delta \right).$$

De acordo com as expressões deduzidas acima, os termos em ω e 2ω detectados pelo "lock-in" devidamente ajustado em fase são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sinal em } \omega \propto \sin \Delta \left[J_0(B) J_1(A) + J_2(B) J_3(A) \cos \phi \right] \\ \quad - \cos \Delta \cos \phi \left[J_1(A) J_1(B) + J_3(A) J_1(B) \right] \\ \text{sinal em } 2\omega \propto \cos \Delta \left[J_0(B) J_2(A) + J_2(A) J_2(B) \cos 2\phi \right] \\ \quad + \sin \Delta \left[J_0(A) J_1(B) \sin \phi \right] \end{array} \right.$$

$$\text{Se } B = 0, \text{ temos } \begin{cases} \text{sinal em } \omega & J_1(A) \sin \Delta \\ \text{sinal em } 2\omega & J_2(A) \cos \Delta \end{cases}$$

Vemos então que a presença da 2a. harmônica realmente afeta o sinal. Quando desprezamos este efeito estamos contando com o alto Q do sistema ($Q \approx 20.000$ - ver (56)).

De fato, a seletividade do circuito oscilador (coletor sintonizado) é tal que (58):

$$\frac{B}{A} < \frac{1}{Q},$$

sendo menor ainda a influência de outros harmônicos. Por outro lado, se o circuito utilizado for em configuração de par "long-tail", a oscilação em 2ω é impossível (58).

Conclusão: Mostrou-se que a presença da componente 2a. harmônica (ou enésima harmônica) dificulta a análise do sinal medido. Todavia no sistema considerado neste trabalho tinha-se alto Q; portanto a amplitude da harmônica é desprezível e podemos considerar, na expressão do sinal (pág. anterior).

$$J_0(B) = 1$$

$$J_1(B) = J_2(B) = J_3(B) = 0$$

REFERÊNCIAS

- (1) A.J. Hunt e D.R. Huffman - Rev. Sci. Instr. 44, 1753 (1973)
(ver também (2.c));
- (2.a) N.M. Bashara e R.M.A. Azzan, Edit. - "Ellipsometry-Proceedings of the Third International Conference on Ellipsometry" - North-Holland Publ. (1976);
- (2.b) E.Parsaglia, R.R. Stromberg e J.Kruger, Edit. - "Proceedings of the Symposium on Ellipsometry in the Measurement of Surface and Thin Films" - Natl. Bur. Stand, publ. nº 256 (U.S.) (1964);
- (2.c) J. Kostens, Editor. - "The photoelastic effects and its applications - Springer-Verlag (1975);
- (3) Y.J. van der Meulen e N.C. Hien - J. Opt.Soc. Am. 64, 804 (1974);
- (4) H. Harms e E. Feldtkeller - Rev. Sci. Instrum. 44, 742 (1973);
- (5) R.J. Archer - J. Opt. Soc. Amer. 52, 1539 (1962);
- (6) G.K.T. Conn e G.K. Eaton - J. Opt. Soc. Am. 44, 546 (1954);
- (7) J.F. Archard, P.L. Clegg e A.M. Taylor - Proc. Phys. Soc. (London) 65B, 758 (1952);
- (8) S. Costa Ribeiro - Tese de Doutorado - USP (1964)
- (9) H. Takasaki; Mitsuo Isabe; Toshinobu Masaki; Atsuo Konda; Tadao Agatsuma e Yasushi Watanabe - Appl. Opt. 3, 345 (1964)

- (10) A.E. Fitzgerald; C.Kingsley Jr; A. Kusko - "Electric Machinery" - McGraw-Hill (1961) ;
- (11) J.C. Suits - Rev. Sci. Instr. 42, 19 (1971);
- (12) W. Budde - Appl. Opt. 1, 201 (1962);
- (13) J.L. Ord e B.L. Wills - Appl. Opt. 6, 1673 (1967);
- (14) D.E. Aspnes e A.A. Studna - Appl. Opt. 14, 220 (1975);
- (15) P.S. Hauge e F.H. Dill - Opt. Comm. 14, 431 (1975);
- (16) J. Mort, F. Lüty, F.C. Brown - Phys. Rev. 137, A566 (1965);
- (17) R.M.A. Azzam - Rev. Sci Instrum. 47, 624(1976);
- (18) S.N. Jaspersen e S.E. Schnatterly - Rev. Sci. Instrum. 40, 761(1969);
- (19) W.A. Shurcliff - "Polarized light - Production and Use" - Harvard University Press (1962);
- (20) A. Gerrard e J.M. Burch - "Introduction to Matrix Methods in Optics" - J. Wiley & Sons (1975);
- (21) E. Burnstein e P.L. Smith - Phys. Rev. 74, 229(1948);
- (22) M.R. Spiegel - "Análise de Fourier", (1976) Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda ;
- (24) D.A. Wiegand, R. Smoluchowsky - Phys. Rev. 110, 991 (1958);
- (25) D.A. Wiegand e R. Smoluchowsky - Phys. Rev. 116, 1069 (1959);

- (25) S. Mascarenhas, D.A. Wiegand e R. Smoluchowsky - Phys. Rev. 134, A481 (1964);
- (27) Herbert Rabin - Phys. Rev. 116, 1381 (1959);
- (28) M. Beltrami, R. Capelletti e R. Frieschi - Phys. Rev. Letters 10, 279 (1964);
- (29) S. Unger e M.M. Perlman - Phys. Rev. B6, 3973 (1972);
- (30) M.F. de Souza - Tese de Doutorado - USP - São Carlos (1966);
- (31) R. Robert - Tese de Mestrado - USP - São Carlos (1969);
- (32) R. Ayres - Tese de Doutorado, USP - São Carlos (1977);
- (33) Nye, J.F. - "Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices" (1964)
- (34) F. Lüty, S. Costa Ribeiro, S. Mascarenhas e V.Sverzut - Phys. Rev. 168, 108 (1968);
- (35) S. Washimiya - J. Phys. Soc. Japan 12, 1719 (1963);
- (36) R. Casarini - Relatório de Bolsa à FAPESP (1969);
- (37) J. R. Meyer-Arendt - "Introduction to Classical and Modern Optics" - Prentice-Hall (1972);
- (38) L. Bergstein e L. Motz - J. Opt. Soc. Am. 52, 363 (1975);
- (39) J.C. Kempt - J. Opt. Soc. Am. 59, 950 (1969);
- (40) V.E. Botton - "The Theory and Design of Quartz Crystals

Units" - McMurry Press - USA (1968);

(41) F. Mollenauer, D. Downie, H. Engstrom e W.B. Grant. Appl. Opt. 8, 661 (1969);

(42) L. Levi - "Applied Optics" - vol, 1 - J. Wiley and sons - U.S.A (1968);

(43) V.O. Roda - Comunicações Internas, Lab. de Eletrônica - DPCM, IFQSC - USP - São Carlos (1977);

(44) R.J. Smith - Sville e S. Ness - Rev. Sci. Instr. 44, 631 (1967);

(45) D.M. Goodall e M.T. Cross - Rev. Sci. Instr. 46, 391 (1975);

(46) Technical Notes T-198A - Princeton Applied Research;

(47) G.B. Clayton - "Experiments with Operational Amplifiers" - The Mc Millan Press, London (1975);

(48) Manual de Instruções - Amplificador "lock-in" da Princeton Applied Research Corp. - Modelo 128, serie 5161 (1972).

(49) Photomultiplier Manual - Technical Series. PT-61 - R.C.A. Corp. (1970);

(50) E.V. Condon e H. Odishaw - "Handbook of Physics" - McGraw-Hill (1958);

(51) F.N.H. Robinson - "noise and Fluctuations in Electronic Devices and circuits" - Clarendon Press-Oxford (1974);

(52) A.G. Bailey - Notas de aula do Curso "Ruído em Sistemas de Comunicação" - Depto. de Eletricidade, EESC-USP, São Carlos, (1977);

- (53) L.P. Mollenauer, C.D. Grandt, W.B. Grant e H. Panepucci;
- (54) J. Spergel - "Handbook of Wiring, Cabling and Interconnecting for Electronic". C.A. Harper. Edit - McGraw Hill (1972);
- (55) J. Hladik, Editor - "Physics of Electrolytes" vol. 1 - Academic Press (1972);
- (56) J.I. Treu, A.B. Callender e S.E. Schnatterly - Rev. Sci. Instrum. 44, 793 (1973);
- (57) M. Born e E. Wolf - "Principles of Optics" - The MacMillan Co., N. York (1964);
- (58) S.S. Hakim, "Junction Transistor Analysis" - Iliffe Books Ltd. - London (1962);
- (59) Esquema 288-1135-53 da unidade de controle do modulador fotoelastico Morvue PEM-3, Morvue electronic System, USA (1971)