UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

**ESTUDO DO DECAIMENTO DO POTENCIAL EM ISOLANTE, COM ESTADOS
SUPERFICIAIS E CENTROS PROFUNDOS DE RETENÇÃO DE CARGA,
CARREGADO POR DESCARGA CORONA RÁPIDA**

José Medeiros Motta

(Dissertação apresentada ao Instituto
de Física e Química de São Carlos,
USP, para obtenção do Título de Mestre
em Física Aplicada.)

ORIENTADOR:

Prof. Dr. G. F. Leal, Ferreira

OK

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
SÃO CARLOS — 1981**

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

José Medeiros Motta

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 05 DE Março DE 1981.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira Orientador

Dr. Luiz Nunes de Oliveira

Dr. Paulo F. da Silva Porto Junior

A Mary Eleni,

Companheira amável...

Í N D I C E

Agradecimentos	I
Resumo	II
Abstract	III
Introdução	1
Formulação do Problema	4
Equações Básicas	5
Equação da densidade espacial de carga retida	6
Densidade espacial de carga e densidade superficial no plano $x' = 0$	7
Configuração Circuito-Aberto	10
Grandezas Adimensionais	10
Equações Básicas reescritas em grandezas adimensionais...	11
Valores de Fronteira	13
Valores Iniciais	13
Equação Diferencial do Campo Elétrico $E(x,t)$	14
O Método das Características	17
Integração das Equações Características	21
Cálculo da densidade espacial de carga livre, ao longo de uma linha de corrente	26
Cálculo da densidade espacial de carga retida.....	35
Cálculo da voltagem $V(t)$ entre as faces do isolante	36
Relação entre t_e e t , no plano $x = 1$	40
Casos Especiais	41
Procedimento para obtenção do gráfico do campo $E(x)$...	47
Referências	52

A G R A D E C I M E N T O S

Quero expressar meus calorosos agradecimentos ao Dr. G. F. Leal Ferreira, meu orientador, pelas estimulantes discussões que comigo manteve durante minha educação na área de física dos isolantes, pelos judiciosos comentários críticos que fez durante a elaboração da presente Dissertação - e sobretudo pela amizade sincera com que me tem tratado, amizade de que muito me orgulho.

Aos meus colegas do Departamento de Físico-Química do Instituto de Química de Araraquara - em particular ao Dr. J. M. Lopes, cuja amizade e estímulo muito me ajudaram - minha indelével gratidão.

Ao Dr. M. Cilense, do Instituto de Química de Araraquara, meus sinceros agradecimentos pelo estímulo que me deu durante a elaboração desta Dissertação, bem como pelas cópias que fez das curvas do Gráfico nº 3 e Gráfico nº 4.

Ao Dr. J. O. Tognolli, do Instituto de Química de Araraquara, meu muito obrigado pela ajuda que me deu na parte de computação para o traçado das curvas constantes dos Gráficos nºs 1 e 2.

R E S U M O

Estuda-se o transporte de portadores de carga no interior de um isolante dotado de centros profundos de retenção de carga. Supõe-se que os portadores tenham sido depositados na superfície livre do isolante por meio de uma descarga corona rápida e que aí a densidade superficial de carga, $\sigma'(x')$, obedeça uma lei do tipo

$$\sigma'(x') = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0 a_n \exp(-k'_n x')$$

Adotando-se a configuração circuito-aberto, é possível, a partir das equações básicas pertinentes ao problema, estabelecer uma equação diferencial quase-linear, a derivadas parciais, para o campo elétrico $E = E(x, t)$ no interior do isolante. Integra-se essa equação pelo método das características e obtêm-se expressões analíticas para as linhas de corrente $x = x(t, t_e)$ e para o campo elétrico $E = E(t, t_e)$ ao longo de cada uma dessas linhas, em função do tempo t e do tempo de emissão t_e de cada linha de corrente que se origina na face $x = 0_+$.

Para o caso especial em que há somente um estado superficial, isto é, $a_1 = 1$, $k'_1 = k$, e $a_n = 0$, $k'_n = 0$, para $n \gg 2$, apresentam-se uma família de curvas $x = x(t)$ e outra de $E = E(t)$, ambas parametrizadas em t_e . Eliminando graficamente o parâmetro t_e entre as duas famílias, obtém-se a família de curvas $E = E(x)$ parametrizada em t . Usa-se planímetro para determinar a área debaixo de cada curva $E = E(x)$, e com isso constroi-se a curva mostrada no Gráfico nº 4.

A B S T R A C T

The transport of charge carriers in the bulk of an insulator in presence of deep trapping is studied. It is assumed that the carriers would have been placed on the insulator's free surface by means of a speedy corona discharge and the surface density on this surface, $\sigma'(t')$, follows a law of the type

$$\sigma'(t') = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0 a_n \exp(-k'_n t')$$

By taking the potential-probe configuration, it is possible from the basic equations of the problem to settle a quasi-linear partial differential equation for the electrical field $E = E(x, t)$ in the bulk of the insulator. This equation is integrated by the method of characteristics, and analytical expressions for the current lines $x = x(t, t_e)$ and electrical field $E = E(t, t_e)$ along each current line, as a function of time t and emission time t_e of each current line which starts from the face $x = 0_+$.

For the special case $a_1 = 1$, $k'_1 = k$, and $a_n = 0$, $k'_n = 0$, for $n \geq 2$, two families of curves are presented, one for $x = x(t)$ and other for $E = E(t)$, by taking t as a parameter in both of them. By graphical elimination of t_e between these two families, a family of curves $E = E(x)$, with t as a parameter, is obtained. By using planimeter to determine the area under of each curve $E = E(x)$, the voltage $V(t)$ is plotted as shown in Graph n° 4.

I N T R O D U Ç Ã O.

A interpretação dos resultados de medidas elétricas realizadas em isolantes é especialmente difícil, devido à variedade de fenômenos a que estão sujeitos os portadores de carga em movimento.

Mesmo se supusermos que um único tipo de portadores (positivo ou negativo) seja o responsável pelos fenômenos observados, o número de parâmetros macroscópicos necessários para a descrição dos diversos processos que os nossos modelos lhe atribuem torna a interpretação dos resultados incerta. Mesmo que se atribua aos portadores em movimento no interior do isolante uma única mobilidade, alguns deles podem ser capturados em centros de retenção de carga, os quais, por seu turno, podem posteriormente libertar os portadores neles aprisionados. Esses centros podem ser de variados tipos, o que aumenta o número de parâmetros necessário à abordagem do problema. A este quadro potencialmente complexo junta-se a dificuldade em se obter a solução matemática do problema, para o necessário confronto com os resultados experimentais. É que se chega a um sistema de equações não lineares, a derivadas parciais, e condições de contorno específicas.

No estudo experimental de transporte de carga em polímeros que vem sendo realizado hoje em dia, tem-se começado a suspeitar¹ que, além dessa variedade de fenômenos que podem acontecer durante a permanência do portador no interior do isolante, devem ser considerados também processos superficiais que limitam o suprimento de carga ao interior do isolante. Uma montagem comumente empregada é a de descarga

corona rápida sobre a superfície do isolante, e a subsequente medida do potencial elétrico dessa superfície, conforme está esboçado na figura abaixo. Toomer e Lewis¹ (anteriormente, Perlman e Sonnonstine² já haviam aventado a possibilidade) procuraram explicar os resulta-

Fig. 1. Isolante carregado por descarga corona rápida na configuração circuito - aberto.

dos em polietileno, através de parcial retenção (mas com posterior emissão térmica) dos portadores na superfície. A resultado similar estão chegando o Prof. B. Gross e J. C. Giacometti, no estudo que ora realizam em teflon, segundo comunicação pessoal.

O trabalho que vamos apresentar procura estudar teoricamente esta situação. Mais especificamente, vamos supor que cargas tenham sido deposita-

das na superfície do isolante, e que elas se distribuem em diversos centros de retenção de carga caracterizados por um tempo de emissão ao interior (um processo termicamente ativado). Quando elas penetram o interior do isolante podem ser aprisionadas em centros profundos de retenção de carga (armadilhas profundas, isto é, que retiram o portador do processo de condução definitivamente). O problema da carga superficial, mas sem aprisionamento no volume, foi tratado na referência 2; o aprisionamento no volume, mas sem processo de superfície, por Rudenko³. Nosso trabalho, portanto, procurará reunir os tratamentos usados nestas referências. Ver-se-á que, embora o problema possa ser

razoavelmente desenvolvido, não será possível obter a grandeza de maior relevância, a voltagem $V(t)$, como função do tempo. Indicaremos como proceder graficamente para obtê-la (Cap. IV). O problema é formulado no Cap. I; resolvido, empregando-se o método das características, no Cap. II. No Cap. III estuda-se a determinação da densidade espacial de carga livre por três métodos. No Cap IV mostram-se as dificuldades encontradas no cálculo da voltagem $V(t)$, fazem-se referências a situações particulares; para o caso especial em que há somente um estado superficial, isto é, quando a densidade superficial de carga na face livre varia segundo a lei exponencial $\sigma(t) = \exp(-kt)$, apresentam-se uma família de curvas $x = x(t)$ e outra de $E = E(t)$, ambas parametrizadas em t_e . Elimina-se graficamente o parâmetro t_e entre as duas famílias e obtem-se a família de curvas $E = E(x)$ parametrizada em t . Usando-se planímetro, determina-se a área debaixo de cada curva $E = E(x)$, área essa que, por definição, é o valor da voltagem $V(t)$ correspondente ao instante t . Com os diversos valores $V(t)$, construímos o gráfico nº 4.

CAPÍTULO I.

I.1 - Formulação do Problema.

Consideremos um isolante, de simetria plana, espessura L , permissividade dielétrica ϵ e mobilidade μ , inicialmente descarregado. A face $x' = 0$ do isolante é mantida livre; a face $x' = L$, em contacto com um eletrodo metálico ligado à Terra (Fig. 1).

Suponhamos que na face $x' = 0$ haja uma distribuição discreta de centros de captura de carga e que o centro genérico n tenha a chance a_n de capturar uma fração da densidade superficial σ_0 inicialmente existente sobre essa face. Admitindo que a carga superficial capturada por esse centro genérico decaia exponencialmente a uma taxa k'_n , a densidade superficial a ele devida, $\sigma'_n(t')$, em qualquer instante posterior, obedece uma lei do tipo

$$\sigma'_n(t') = \sigma_0 a_n \exp(-k'_n t')$$

A densidade superficial total na face $x' = 0$ obviamente é a soma de todas essas frações e, portanto, pode ser escrita como

$$\sigma'(t') = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0 a_n \exp(-k'_n t') \quad (1)$$

Note-se que para $t' = 0$, resulta $\sigma'(0) = \sigma_0$, uma vez que a soma de todas as chances tem que ser necessariamente igual a 1, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

I.2 - Equações Básicas.

As equações básicas pertinentes ao problema são a

equação de Poisson,
$$\epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial x'} = \rho'(x', t') + \rho_R'(x', t') \quad (2)$$

a equação da densidade de corrente em meio isolante, $J'(x', t')$, quando não se leva em conta a corrente de difusão,

$$J_c'(x', t') = \mu \rho'(x', t') E'(x', t') \quad (3)$$

e a equação de continuidade,

$$\frac{\partial J_c'(x', t')}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} [\rho'(x', t') + \rho_R'(x', t')] = 0 \quad (4)$$

Usando a equação de Poisson na equação de continuidade, temos

$$\frac{\partial J_c'(x', t')}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \left[\epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial x'} \right] = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[J_c'(x', t') + \epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'} \right] = 0$$

de onde se conclue que a soma entre colchetes é uma função $J'(t')$ que depende só de t' , isto é,

$$J'(t') = J_c'(x', t') + \epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'} \quad (5)$$

que é a densidade de corrente total, uma vez que é a soma das duas correntes aqui consideradas no problema, a corrente de condução $J_c'(x', t')$ e a de deslocamento, $\epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'}$.

Na equação de Poisson, $E'(x',t')$ é o campo elétrico no interior do isolante; $\rho'(x',t')$, a densidade espacial de carga livre no isolante, $\rho'_R(x',t')$, a densidade espacial de carga retida.

-o-o-o-o-

I.3 - Equação da densidade espacial de carga retida,

Supondo que o isolante contenha em seu interior centros de retenção de carga de um único tipo, caracterizados pela seção de captura S_c e pela concentração N_R , suposta uniforme, a probabilidade por unidade de tempo, P , que um portador de carga seja capturado por um desses centros pode ser escrita como

$$P = v_T S_c \left[N_R - n'(x',t') \right]$$

em que v_T é a velocidade térmica do portador e $n'(x',t')$, a concentração dos portadores já retidos.

Se a concentração de portadores retidos for muito menor do que a de centros de retenção disponíveis - hipótese factível -, a probabilidade P fica praticamente constante:

$$P = v_T S_c N_R = \frac{1}{T_R} \quad (6)$$

em que T_R é o tempo médio para que um portador seja capturado.

Para centros de retenção suficientemente profundos, o portador, uma vez capturado, demora bastante para escapar, isto é, para

passar à banda de condução. Supomos que, uma vez capturado, o portador não mais volte à banda de condução. Noutras palavras, admitimos que não haja recaptura de portadores. Com esta hipótese, a relação mais plausível entre a densidade de carga retida e a de carga livre é

$$\frac{\partial \rho'_R(x', t')}{\partial t'} = P \rho'(x', t')$$

ou, usando a Eq. (6),

$$\frac{\partial \rho'_R(x', t')}{\partial t'} = \frac{\rho'(x', t')}{T_R} \quad (7)$$

-o-o-o-o-o-

I.4 - Densidade espacial de carga e densidade superficial no plano $x' = 0_+$

A densidade superficial de carga $\sigma'(t')$ pode ser considerada como o caso limite de uma carga espacial retida $\rho'_{RS}(x', t')$, confinada numa camada delgada, de espessura $\Delta x'$, situada nas proximidades do plano $x' = 0$, isto é,

$$\sigma'(t') = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \int_{\Delta x'} \rho'_{RS}(x', t') dx' \quad (8)$$

Usaremos essa relação para estabelecermos os valores de fronteira para o campo elétrico e para a densidade de corrente de condução. Conhecidos esses dois valores, pela Eq. (3) conheceremos o de $\rho'(0_+, t')$.

Suponhamos que no interior da camada a carga livre seja desprezível; então a equação de Poisson e a de continuidade permitem-nos escrever

$$\epsilon \frac{\partial \bar{E}'(x', t')}{\partial x'} = \rho'_{RS}(x', t') \quad (9)$$

$$-\frac{\partial J'_c(x', t')}{\partial x'} = \frac{\partial \rho'_{RS}(x', t')}{\partial t'} \quad (10)$$

Substituindo a Eq. (10) na Eq. (9), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma'(t') &= \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \int_{\Delta x'} \epsilon \frac{\partial \bar{E}'(x', t')}{\partial x'} dx' = \\ &= \epsilon [\bar{E}'(0_+, t') - \bar{E}'(0_-, t')] \end{aligned}$$

O plano correspondente à abscissa $x' = 0_-$ está fora do isolante, onde não há carga; conseqüentemente, pela lei de Gauss, o campo aí é nulo. A expressão anterior reduz-se, portanto, a

$$\sigma'(t') = \epsilon \bar{E}'(0_+, t') \quad (11)$$

Por outro lado, integrando a Eq. (10) no interior da mesma camada, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \int_{\Delta x'} -\frac{\partial J'_c(x', t')}{\partial x'} dx' &= -\{J'_c(0_+, t') - J'_c(0_-, t')\} = \\ &= \frac{d\sigma'(t')}{dt'}, \text{ de acordo com a Eq. (8).} \end{aligned}$$

Mas a densidade de corrente de condução no plano $x' = 0$ é nula, pois aí não há carga; então, a última expressão se escreve

como

$$J'_c(q_+, t') = - \frac{d\sigma'(t')}{dt'} \quad (12)$$

A Eq. (3) é válida no interior do isolante. No plano $x' = 0$ ela fornece

$$\rho'(q_+, t') = \frac{1}{\mu} \frac{J'_c(q_+, t')}{E'(q_+, t')}$$

o que, usando as Eqs. (11) e (12), permite-nos escrever

$$\rho'(q_+, t') = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{-\frac{d\sigma'(t')}{dt'}}{\sigma'(t')} \quad (13)$$

Note-se que a existência de carga espacial livre no plano $x' = 0$ não contradiz a hipótese de termos considerado desprezível a carga espacial livre no interior da camada, pois o resultado expresso na Eq. (13) foi obtido passando-se ao limite $\Delta x' \rightarrow 0$

As Eqs. (11), (12) e (13) estabelecem os valores de fronteira de campo elétrico, densidade de corrente de condução e densidade espacial de carga livre no plano $x' = 0$, em termos da densidade superficial de carga na face livre do isolante. Os valores iniciais para a densidade espacial de carga e a corrente de condução já estão implicitamente dados, quando supomos na formulação do problema que o isolante está inicialmente descarregado. Coerentemente com essa hipótese, devemos ter $\rho'(x', 0) = 0$ e $\rho'_R(x', 0) = 0$, e $J'_c(x', 0) = 0$.

No instante $t' = 0$, quando é iniciada a descarga corona, entre os planos $x' = 0$ e $x' = L$ está sendo aplicada a voltagem constante V_0 ; como o isolante estava inicialmente descarregado, o único campo externo aplicado ao isolante é o campo uniforme $E'(x', 0) = V_0/L = \sigma_0/\epsilon$.

-o-o-o-o-

I.5 - Configuração Circuito-Aberto.

Na configuração circuito-aberto, a densidade de corrente total, $J'(t')$, obviamente é nula, em qualquer seção reta do isolante e em qualquer instante. As Eqs. (3) e (5) permitem-nos escrever, então,

$$\mu \rho'(x', t') E'(x', t') + \epsilon \frac{\partial E'(x', t')}{\partial t'} = 0 \quad (14)$$

-o-o-o-o-o-

I.6 - Grandezas Adimensionais.

A fim de facilitar a manipulação das equações, é conveniente reescrevê-las em termos de grandezas adimensionais. Uma grandeza óbvia para unidade de comprimento é a espessura L do isolante. Para unidade de tempo tomamos o tempo t'_0 que um portador livre, tendo mobilidade μ , necessitaria para travessar a espessura L do isolante, sob a ação do campo inicial V_0/L , com velocidade uniforme, isto é,

$$t'_0 = \frac{L}{\mu V_0/L} = \frac{L^2}{\mu V_0} = \frac{L}{\mu \sigma_0/\epsilon}$$

Para a densidade espacial de carga, podemos tomar a grandeza

$$\rho'_0 = \frac{\sigma_0}{L} = \frac{\epsilon V_0}{L^2}$$

Para unidade de densidade superficial de carga tomamos σ_0 ; para unidade de densidade de corrente, σ_0/t'_0 . Noutras palavras, vamos reescrever as equações interessantes ao problema em termos das grandezas adimensionais

$$\text{comprimento} \dots\dots\dots, \quad x = \frac{x'}{L}$$

$$\text{tempo} \dots\dots\dots, \quad t = \frac{t'}{t'_0}; \quad \tau = \frac{T_R}{t'_0}$$

$$\text{densidade superficial de carga, } \sigma = \sigma'/\sigma_0$$

$$\text{densidade espacial de carga} \dots, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'_0} = \frac{\rho'}{\sigma_0/L}; \quad \rho'_R = \frac{\rho'_R}{\rho'_0}$$

$$\text{campo elétrico} \dots\dots\dots, \quad E = \frac{E'}{V_0/L} = \frac{E'}{\sigma_0/\epsilon}$$

$$\text{densidade de corrente} \dots\dots\dots, \quad J_c = \frac{J'_c}{\sigma_0/t'_0} = \frac{L}{\epsilon \mu V_0^2} J'_c$$

-o-o-o-o-

I.8 - Equações Básicas reescritas em grandezas adimensionais.

Em termos das quantidades adimensionais, as equações básicas

(2) - (5) e a Eq. (7) ficam reescritas como

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \rho(x,t) + \rho_R(x,t) \quad (15)$$

$$J_c(x,t) = \rho(x,t) E(x,t) \quad (16)$$

$$\frac{\partial J_c(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(x,t) + \rho_R(x,t) \right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho_R(x,t)}{\partial t} = \frac{\rho(x,t)}{\tau} \quad (18)$$

$$J(t) = J_c(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \quad (19)$$

A expressão adimensional $\tilde{\sigma}(t)$ correspondente à densidade superficial de carga $\sigma'(t')$ se escreve como

$$\tilde{\sigma}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k'_n t')$$

Usando aí a grandeza adimensional t correspondente ao tempo t' e definindo a grandeza adimensional k_n como

$$k_n = k'_n t'_0,$$

resulta $k'_n t' = k_n t$, em consequência do que a expressão anterior fica reescrita como

$$\tilde{\sigma}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k_n t) \quad (20)$$

I.9 - Valores de Fronteira.

No plano $x = 0_+$, as Eqs. (11)-(13) ficam reescritas como

$$E(0_+, t) = \sigma(t) \quad (21)$$

$$J_c(0_+, t) = - \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (22)$$

$$\rho(0_+, t) = - \frac{1}{\sigma(t)} \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (23)$$

O valor inicial $E(x, 0)$ do campo elétrico em face da esco-
lha que se fez para a unidade de medida do campo é claramente 1;
então,

$$E(x, 0) = 1, \quad 0_+ \leq x \leq 1 \quad (24)$$

$$\rho(x, 0) = 0, \quad 0_+ \leq x \leq 1 \quad (25)$$

$$\rho_R(x, 0) = 0, \quad 0_+ \leq x \leq 1 \quad (26)$$

$$J_c(x, 0) = 0, \quad 0_+ \leq x \leq 1 \quad (27)$$

1.10 - Equação Diferencial do Campo Elétrico $E(x,t)$.

A Eq. (14), decorrente da configuração circuito-aberto, reescrita em termos de grandezas adimensionais, fica sendo

$$\rho(x,t)E(x,t) + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0,$$

que também pode ser escrita como

$$\rho(x,t) = - \frac{1}{E(x,t)} \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} [\ln E(x,t)] \quad (28)$$

Substituindo esse valor de $\rho(x,t)$ na equação que descreve a dinâmica banda de condução - centros de retenção de carga, Eq. (18), obtemos uma relação entre a carga espacial retida nesses centros e o campo elétrico:

$$\frac{\partial \rho_R(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left[- \frac{\partial}{\partial t} \ln E(x,t) \right],$$

que se pode por conveniência reescrever como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\tau \rho_R(x,t) + \ln E(x,t) \right] = 0,$$

o que nos permite concluir que a expressão entre colchetes é uma função só de x

$$\tau \rho_R(x,t) + \ln E(x,t) = f(x) \quad (29)$$

A Eq. (28) é válida para qualquer valor do tempo t posterior ao instante inicial, certamente. Para $t = 0$, de acordo com os valores iniciais dados pelas Eqs. (24) e (26), concluímos que $f(x) = 0$. Consequentemente, podemos explicitar a relação entre a carga espacial retida e uma função do campo elétrico:

$$\rho_R(x,t) = -\frac{1}{\epsilon} \ln E(x,t) \quad (30)$$

Obtivemos, assim, como uma decorrência da configuração circuito-aberto e do tipo de relação previamente estabelecido para a dinâmica banda de condução - centros de retenção de carga, as expressões dadas pelas Eqs. (28) e (30). Substituindo essas expressões na equação de Poisson, Eq. (15), obtemos a equação diferencial buscada para o campo elétrico $E(x,t)$ no interior do isolante:

$$E(x,t) \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = -\frac{\ln E(x,t)}{\epsilon} E(x,t) \quad (31)$$

Essa é uma equação linear nas derivadas parciais relativas a x e a t , mas não é linear na função desconhecida $E(x,t)$. Uma equação desse tipo é chamada de quase-linear. A primeira teoria sistemática de equação não-linear foi estabelecida por Lagrange (Cf. SNEDDON, "Elements of Partial Differential Equations", McGraw-Hill Books, New York, 1957, p. 50). Em razão disso, esse tipo de equação frequentemente também é chamado de equação de Lagrange.

Kanazawa e Batra⁸ deduzem a Eq. (31), sem apresentar, porém, o método através do qual se pode chegar à sua integral completa. O método proposto por Cauchy e conhecido por método das características permite, pelo menos em princípio, determinar a integral completa de uma equação diferencial do tipo da Eq. (31). Rudenko³ certamente usou esse método para determinar a integral completa da Eq. (31) sujeita a valores de fronteira e valores iniciais diferentes dos aqui apresentados. Não apresentou, porém, os detalhes dos cálculos que produziram os resultados que ele apresentou. Nunes de Oliveira⁴ e Giacometti⁵ apresentaram os cálculos omitidos por Rudenko, sem apresentar detalhadamente a teoria do método das características. No capítulo seguinte apresentamos os detalhes omitidos e aplicaremos o método na determinação de uma integral completa da Eq. (31).

CAPÍTULO II

II.1 - O Método das Características.

O método das características proposto por Cauchy consiste em transformar a equação quase-linear dada numa equação linear. A nova função desconhecida, em termos da qual a originária equação quase-linear é transformada numa equação linear, representa uma superfície cujas linhas características constituem uma família de curvas que fornece a função desconhecida satisfeita pela originária equação quase-linear. O procedimento é o seguinte:

- 1) Seja a função arbitrária

$$F(x, t, E) = \text{constante} \quad (32)$$

que define implicitamente a função desconhecida $E(x, t)$ que satisfaz a equação diferencial (31).

- 2) Derivemos a função $F(x, t, E)$ em relação a x e a t . Obtemos o sistema

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (34)$$

- 3) Multipliquemos a Eq. (33) por $E(x, t)$ e somemos o resultado

à Eq. (34). Obtemos a seguinte equação diferencial linear e homogênea na nova função desconhecida $F(x, t, E)$

$$E \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \left(E \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial E} = 0 \quad (35)$$

Se conseguirmos resolver esta equação, poderemos determinar a originária função $E(x, t)$ definida implicitamente na Eq. (32).

Para o caso aqui interessante, podemos substituir o coeficiente entre parênteses da Eq. (35) pelo lado direito da Eq. (31):

$$E \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \left(-\frac{E}{\epsilon} \ln E \right) \frac{\partial F}{\partial E} = 0 \quad (35a)$$

Interpretemos geometricamente a Eq. (35a). Consideremos o vetor $\vec{A}$, de componentes cartesianas $(E, 1, -\frac{E}{\epsilon} \ln E)$,

$$\vec{A} = E \vec{i} + \vec{j} + \left(-\frac{E}{\epsilon} \ln E \right) \vec{k}$$

e o gradiente da função $F(x, t, E)$,

$$\vec{\nabla}_{x,t,E} F(x, t, E) = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial E} \vec{k}$$

Façamos, agora, o produto escalar desses dois vetores:

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} F = E \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \left(-\frac{E}{\epsilon} \ln E \right) \frac{\partial F}{\partial E}$$

que é igual a zero, pela Eq. (35a)

É sabido que o gradiente de uma função é um vetor normal à superfície descrita pela função. Da relação

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} F = 0$$

segue-se, portanto, que o vetor $\vec{A}$ está contido no plano tangente à superfície descrita pela Eq. (32) e que sua direção coincide com a direção da linha característica pertencente a essa superfície, em cada ponto de tangência (x, t, E) . A família de linhas características descreve a superfície dada pela Eq. (32). Em princípio, podemos achar a superfície, isto é, a função $F(x, t, E)$, mediante a determinação de suas linhas características.

Se $E(x, t)$ for uma função contínua, uma variação infinitesimal no ponto (x, t) implicará uma variação finita no valor de E , qualquer que seja o ponto (x, t) pertencente ao domínio de $E(x, t)$.

Consideremos uma linha característica genérica da superfície $F(x, t, E)$. A direção desta linha, em cada ponto P , é dada pelo correspondente vetor $\vec{A}$. O vetor-posição do ponto P é $\vec{r} = x\vec{i} + t\vec{j} + E\vec{k}$ (Fig. 2)

Para um acréscimo finito, $\Delta x, \Delta t, \Delta E$,

$$x \rightarrow x + \Delta x$$

$$t \rightarrow t + \Delta t$$

$$E \rightarrow E + \Delta E$$

passamos do ponto P ao ponto P' , isto é,

do vetor-posição $\vec{r}$ ao vetor-posição $\vec{r}'$.

tal que o vetor-posição $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$. O vetor $\Delta\vec{r}$ não é necessariamente

paralelo ao vetor $\vec{A}$. Mas para uma variação infinitesimal $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$, a direção do vetor $d\vec{r}$ coincidirá com a do vetor $\vec{A}$, necessariamente. Em consequência, teremos que o produto vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $d\vec{r}$ é sempre nulo:

$$\vec{A} \times d\vec{r} = 0 \quad (36)$$

Esta é a relação básica que permite estabelecer as equações que irão fornecer as curvas características. Explicitando para o nosso caso a Eq. (36), temos

$$\left[dE + \left(\frac{E}{z} \ln E \right) dt \right] \vec{i} - \left[\left(\frac{E}{z} \ln E \right) dx + E dE \right] \vec{j} + [E dt - dx] \vec{k} = 0 \quad (36a)$$

o que só é possível se cada componente for nula, isto é, se as seguintes relações forem satisfeitas:

$$\frac{dE}{E \ln E} = - \frac{dt}{z} \quad (37a)$$

$$\frac{dE}{\ln E} = - \frac{dx}{z} \quad (37b)$$

$$\frac{dx}{dt} = E \quad (37c)$$

As relações (37) são chamadas de equações características da superfície dada pela Eq. (32), em virtude de a integração delas permitir a determinação das curvas características que descrevem essa superfície.

A Eq. (37c) descreve linhas de corrente⁶. Cada uma dessas linhas se inicia no plano $x = 0$ a uma dado instante $t = t_e$, ou seja, $x(t, t_e = t) = 0$. Cada valor do parâmetro t_e individualiza uma linha de corrente. A Eq. (37c) relaciona o campo elétrico ao longo de qualquer uma dessas linhas, vale dizer: ao longo de qualquer linha individualizada por um valor particular de t_e . Portanto, a Eq. (37c) pode também ser escrita como

$$E(x(t, t_e), t) = \left[\frac{\partial x(t, t_e)}{\partial t} \right]_{t_e = \text{constante}} \quad (37c)'$$

II.2. - Integração das Equações Características.

a) Integração da Equação (37a):

$$\int_{E(o_+, t_e)}^{E(x, t)} \frac{dE/E}{\ln E} = \int_{\ln|E(o_+, t_e)|}^{\ln|E(x, t)|} \frac{d(\ln E)}{\ln E} = \ln \left\{ \frac{|\ln E(x, t)|}{|\ln E(o_+, t_e)|} \right\} = - \int_{t_e}^t \frac{dt''}{\tau},$$

de onde se segue que

$$\frac{|\ln E(x, t)|}{|\ln E(o_+, t_e)|} = \exp\left(-\frac{t - t_e}{\tau}\right),$$

ou

$$|\ln E(x, t)| = |\ln E(o_+, t_e)| \exp\left(-\frac{t - t_e}{\tau}\right).$$

Lembrando que $0 < E(x, t) < 1$, então, $|\ln E(x, t)| = -\ln E(x, t)$; portanto,

$$E(x, t) = \exp\left[-|\ln E(o_+, t_e)| \exp\left(-\frac{t - t_e}{\tau}\right)\right] \quad (38)$$

Usando a Eq. (21), temos

$$\ln E(o_+, t_e) = \ln \sigma(t_e)$$

que pode ser reescrita, de acordo com a Eq. (20), como

$$\ln E(o_+, t_e) = \ln \sigma(t_e) = \ln \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k_n t_e) \right]$$

Lembrando que

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k_n t_e) \leq 1,$$

concluimos que

$$|\ln E(o_+, t_e)| = -\ln \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k_n t_e) \right]$$

Para abreviar a escrita das equações, façamos

$$f(t_e) \equiv -\ln \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k_n t_e) \right] \quad (39)$$

com o que se reescreve a Eq. (38) como

$$E(x, t) = \exp \left[-f(t_e) \exp \left(-\frac{t - t_e}{\tau} \right) \right] \quad (39a)$$

Para um único nível de retenção de carga na superfície do isolante, $a_n = 0$ e $k_n = 0$, para $n > 2$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 = 1$, resulta $f(t_e) = k_1 t_e$ e, conseqüentemente, a expressão mais simples para o campo,

$$E(x, t) = \exp \left[-k_1 t_e \exp \left(-\frac{t - t_e}{\tau} \right) \right] \quad (40)$$

b) Integração da Eq. (37b).

$$\int_{E(0_+, t_e)}^{F(x, t)} \frac{dE}{\ln E} = - \int_{0_+}^x \frac{dx''}{\tau} = - \frac{x}{\tau}$$

Com a substituição $\ln E = -u$, essa integral fica sendo

$$\int_{-\ln E(0_+, t_e)}^{-\ln E(x, t)} \frac{\exp(-u)}{u} du = - \frac{x}{\tau} \quad (41)$$

que também pode ser escrita como

$$\frac{x}{\tau} = \int_{-\ln E(x, t)}^{\infty} \frac{\exp(u)}{u} du - \int_{-\ln E(0_+, t_e)}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$$

De acordo com notação adotada pela American Mathematical Society (AMS-55), a função EXPONENCIAL INTEGRAL é definida como

$$E_1(X) = \int_X^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du, \quad X > 0$$

Assim, em termos dessa notação, a linha de corrente iniciada no plano $x = 0_+$, no instante $t = t_e$, fica escrita como

$$\frac{x}{\tau} = E_1(-\ln E(x, t)) - E_1(-\ln E(0_+, t_e))$$

Usando as Eqs. (38a) e (39), obtemos, finalmente

$$\frac{x}{\tau} = E_1\left(f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right) - E_1(f(t_e)) \quad (42)$$

Expandindo a função exponencial do integrando da Eq. (41), obtemos

$$\frac{\exp(-u)}{u} = \frac{1}{u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u)^m}{m!}, \text{ para qualquer } u \neq 0$$

Independentemente do valor de u , temos que

$$\frac{\exp(-u)}{u} - \frac{1}{u} \sum_{m=0}^n \frac{(-u)^m}{m!} > 0$$

Se a soma for estendida até um $m = N$ suficientemente grande, é claro que essa desigualdade continuará válida, mas suficientemente próxima de zero, a fortiori para $m \gg N$. Portanto, a série

$$S_n(u) = \frac{1}{u} \sum_{m=0}^n \frac{(-u)^m}{m!} = \frac{1}{u} - \sum_{m=1}^n \frac{(-u)^m}{m!}, \quad u \neq 0,$$

converge uniformemente. Podemos, em consequência, integrá-la termo a termo. Procedendo dessa maneira, a integral (41) fornece o resultado

$$\frac{x}{b} = \frac{t-t_e}{\tau} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-f(t_e) \exp(-\frac{t-t_e}{\tau})]^m}{m \cdot m!} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[f(t_e)]^m}{m \cdot m!} \quad (43)$$

Qualquer linha de corrente se inicia no plano $x = 0$, no instante $t = t_e$, o que é fácil de ver por inspeção da Eq. (42) ou da Eq. (43).

Lembrando que a derivada da FUNÇÃO EXPONENCIAL INTEGRAL é

$$\frac{d}{d\lambda} \left[E_1(X(\lambda)) \right] = - \frac{\exp[-X(\lambda)]}{X(\lambda)} \frac{dX(\lambda)}{d\lambda}$$

podemos facilmente calcular a derivada em relação a t da Eq. (42), para obter uma confirmação da Eq. (37c). De fato, calculando a derivada, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] = \left[\frac{\partial \chi(t, t_e)}{\partial t}\right]_{t_e = \text{const.}}$$

o que, coincide com a expressão já achada para $E(x, t)$ dada pela Eq. (38a).

Conforme já foi explicado, no caso de haver um único nível de retenção de carga na superfície, a função $f(t_e)$ simplifica-se para $k_1 t_e$, em consequência do que a função que dá as linhas de corrente reduz-se a

$$\frac{x}{\tau} = E_1\left(k_1 t_e \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right) - E_1(k_1 t_e) \quad (44)$$

— x — x — x —

CAPÍTULO III.

III.1 - Cálculo da densidade espacial de carga livre, ao longo de uma linha de corrente.

O cálculo da densidade espacial de carga livre ρ ao longo de uma linha de corrente pode ser feito de várias maneiras, como veremos a seguir.

Ao longo de uma linha de corrente, $\rho = \rho(x(t, t_e, t))$. Sua derivada total em relação a t é

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{t_e} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t_e} = \frac{\partial \rho}{\partial x} E + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t_e} \quad (45)$$

usando-se a Eq. (37c)'. .

Isolando-se na equação de continuidade (17) o valor de $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t_e}$,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t_e} = - \frac{\partial J_c}{\partial x} - \left(\frac{\partial \rho_R}{\partial t} \right)_{t_e},$$

e usando aí a Eq. (16), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t_e} &= - \frac{\partial}{\partial x} (\rho E) - \left(\frac{\partial \rho_R}{\partial t} \right)_{t_e} = \\ &= - \frac{\partial \rho}{\partial x} E - \rho \frac{\partial E}{\partial x} - \left(\frac{\partial \rho_R}{\partial t} \right)_{t_e} \end{aligned}$$

Usando na última relação a equação da dinâmica banda de condução - centros de retenção de carga, Eq. (18), ficamos com o seguinte resultado

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t_e} = -E \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\rho}{\tau}$$

o qual, uma vez inserido na Eq. (45) fornece a seguinte equação

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = -\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{\tau} \quad (46)$$

A fim de podermos integrar esta equação, necessitamos determinar antes o termo $\frac{\partial E}{\partial x}$ que nela comparece. Como o cálculo desse termo é feito para a variável t mantida fixa, segue-se que a variação de x se deve à variação de t_e . Então, podemos escrever que

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial t_e} \frac{\partial t_e}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial t_e} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial t_e}} = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial t_e} \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t_e} \right)} \quad (47)$$

Usando aí as Eqs. (38a) e (42) para calcular o numerador e denominador, respectivamente, da razão dada pela Eq. (47), obtemos a seguinte expressão para

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial t_e} \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t_e} \right)} = \frac{-\left(\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right) \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)}{-\frac{\tau}{f(t_e)} \left\{ \left(\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right) \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp\left[-f(t_e)\right] \right\}} \quad (47a)$$

Introduzindo este resultado na Eq. (46), estabelecemos, finalmente a equação diferencial ordinária a ser satisfeita por ρ :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] \cdot \left[f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \frac{dt}{\tau} \right]}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]} +$$

$$- \frac{dt}{\tau}$$

A integração da equação acima é feita na variável t , com t_e mantido fixo. Notemos que a segunda parcela do denominador não contém a variável t e que o numerador pode ser considerado como a diferencial, em relação a t , do denominador, isto é, a primeira parcela do lado direito pode ser escrita sob a forma dY/Y , com

$$Y = \left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]$$

e facilmente integrada. O resultado da integração é

$$\ln \left\{ \frac{\rho(x(t, t_e), t)}{\rho(0_+, t_e)} \right\} = - \ln \left\{ \frac{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]}{\frac{f(t_e)}{\tau} \exp[-f(t_e)]} \right\}$$

$$- \frac{t-t_e}{\tau} =$$

$$+ \ln \left\{ \frac{\frac{f(t_e)}{\tau} \exp[-f(t_e)] \cdot \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]} \right\},$$

de onde obtemos facilmente a expressão explícita para $\rho(x(t, t_e), t)$:

$$\rho(x(t, t_e), t) = \rho(0, t_e) \cdot \frac{\frac{f(t_e)}{\tau} \exp\left[-\frac{t-t_e}{\tau}\right] \cdot \exp[-f(t_e)]}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e}\right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]} \quad (48)$$

Consideremos, agora, a expressão de $\rho(x, t)$ dada pela Eq. (28) escrita sob a forma

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{f(t)} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t}$$

O fato de que a derivação parcial em relação a t é feita mantendo-se x fixo permite-nos concluir que, neste caso, a diferencial total de $x(t, t_e)$ é zero:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial t_e} dt_e = 0$$

de onde se segue que

$$\left(\frac{dt_e}{dt}\right)_x = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t_e}\right)} \quad (49)$$

Por outro lado, podemos calcular $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_x$ a partir da Eq. (38a):

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial E(t, t_e)}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial E(t, t_e)}{\partial t_e}\right) \left(\frac{dt_e}{dt}\right)_x \quad (50)$$

Calculando as derivadas indicadas na Eq. (49), obtemos

$$\left(\frac{dt_e}{dt}\right)_x = \frac{f(t_e)}{\tau} \cdot \frac{\exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right]}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e}\right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]} \quad (51)$$

Calculando as derivadas indicadas na Eq. (50) e inserindo a Eq. (51) no resultado, obtemos

$$\rho(x(t, t_e), t) = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial E}{\partial t} \right]_x \frac{df(t_e)}{dt_e} \frac{\frac{f(t_e)}{\tau} \exp\left[-\frac{t-t_e}{\tau}\right] \exp[-f(t_e)]}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e}\right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]}$$

Usando a Eq. (23) e a definição da função $f(t_e)$ dada pela Eq. (39), concluímos que

$$\rho(o_+, t_e) = \frac{d}{dt_e} [-\ln \sigma(t_e)] = \frac{d}{dt_e} \left\{ -\ln \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k_n t_e) \right] \right\} = \frac{df(t_e)}{dt_e}$$

Portanto,

$$\rho(x(t, t_e), t) = \rho(o_+, t_e) \frac{\frac{f(t_e)}{\tau} \exp\left[-\frac{t-t_e}{\tau}\right] \exp[-f(t_e)]}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e}\right] \exp\left[-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]}$$

que coincide com a expressão já achada para $\rho(x(t, t_e), t)$ dada na Eq. (48).

Finalmente, uma terceira maneira de se obter a densidade espacial de carga ao longo de uma linha de corrente é usar a equação de Poisson na Eq. (46), usando aí a Eq. (30) para eliminar ρ_R :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \left\{ \rho - \frac{1}{\tau} \ln E + \frac{1}{\tau} \right\} = \\ &= -\rho^2 - \frac{1}{\tau} \{1 - \ln E\} \rho \end{aligned} \quad (52)$$

Usando a Eq. (38a) na Eq. (52), obtemos

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho^2 - \frac{1}{\tau} \left\{ 1 + f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \right\} \rho$$

que é uma equação de Riccati.

Uma solução particular - óbvia, aliás, para essa equação é

$$\rho_0 = 0.$$

Mediante a substituição

$$\rho = \frac{1}{y},$$

a equação de Riccati transforma-se numa equação linear na função des-

conhecida y e na sua derivada:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\tau} \left\{ 1 + f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \right\} y + 1$$

Agora, fazendo a substituição

$$y = u \cdot v,$$

resulta

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt},$$

de modo que a equação diferencial em y passa a ser

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} - 1 - \frac{1}{\tau} \left\{ 1 + f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \right\} u v = 0$$

Dividindo ambos os lados por u , vem

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{u} \frac{du}{dt} v - \frac{1}{u} - \frac{1}{\tau} \left\{ 1 + f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \right\} v = 0$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \left\{ \frac{1}{u} \frac{du}{dt} - \frac{1}{\tau} \left[1 + f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \right] \right\} v - \frac{1}{u} = 0 \quad (53)$$

Podemos escolher a função μ de modo tal que o coeficiente de $\dot{V}$ seja sempre nulo. Isto fornece um meio para se determinar a função μ :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{\tau} \left[1 + f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right) \right] dt,$$

cuja integral fornece o resultado

$$\mu(t) = \mu(t_e) \exp\{+f(t_e)\} \cdot \exp\left\{-\frac{t-t_e}{\tau}\right\} \cdot \exp\left\{-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right\}$$

ou, usando a relação

$$\mu \cdot \dot{V} = \frac{1}{\rho},$$

$$\mu(t) = \frac{1}{\rho(o, t_e) \dot{V}(t_e)} \exp\left\{-\frac{t-t_e}{\tau}\right\} \exp\{f(t_e)\} \exp\left\{-f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right\}$$

Substituindo esse resultado na Eq. (53), ficamos com

$$\dot{V}(t) - \dot{V}(t_e) = \rho(o, t_e) \dot{V}(t_e) \int_{t_e}^t \exp\{-f(t_e)\} \cdot e^{-\frac{t-t_e}{\tau}} \cdot e^{f(t_e) e^{-\frac{t-t_e}{\tau}}} dt''$$

Com a substituição

$$W = f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 V(t) &= V(t_e) - V(t_e) \rho(o_+, t_e) \frac{\exp[-f(t_e)]}{\frac{f(t_e)}{\tau}} \int_{f(t_e)}^{f(t_e) \exp(-\frac{t-t_e}{\tau})} \exp(w) dw \\
 &= V(t_e) \left\{ 1 - \rho(o_+, t_e) \frac{\exp[-f(t_e)]}{\frac{f(t_e)}{\tau}} \left[\exp\left(f(t_e) e^{-\frac{t-t_e}{\tau}}\right) - e^{f(t_e)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Notando que

$$\rho = \frac{1}{y} = \frac{1}{u v}$$

e que

$$\rho(o_+, t_e) = \frac{df(t_e)}{dt_e},$$

resulta, finalmente,

$$\rho(x(t, t_e), t) = \rho(o_+, t_e) \frac{\frac{f(t_e)}{\tau} \exp[-\frac{t-t_e}{\tau}] \exp[-f(t_e)]}{\left[\frac{f(t_e)}{\tau} + \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp[-f(t_e) \exp(-\frac{t-t_e}{\tau})] - \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp[-f(t_e)]}$$

que coincide com a expressão já determinada, Eq. (48).

Na primeira maneira de se calcular ρ , usou-se a equação diferencial da linha de corrente, Eq. (37c), e a equação da dinâmica banda de condução - centros de retenção de carga, Eq. (18), para se estabelecer a Eq. (46). A fim de eliminar $\frac{\partial E}{\partial x}$ nesta equação, foram usadas, combinadamente as expressões do campo elétrico, $E = E(t, t_e)$, ao longo de uma linha de corrente e a expressão que fornece a posição da linha

de corrente, $x = x(t, t_e)$. Note-se que o estabelecimento da Eq. (46) foi feito sem o uso da Eq. (28), a qual decorrente essencialmente da configuração circuito-aberto. É de se esperar, portanto, que essa primeira maneira de se calcular ρ seja aplicável a qualquer configuração.

A segunda maneira, claramente, é mais complicada de se usar, quando a configuração não for a de circuito-aberto, pois neste caso a Eq. (28) será mais complicada.

A terceira maneira usa a Eq. (30), que foi estabelecida com base na Eq. (28) - configuração circuito-aberto - e nas condições iniciais dadas pelas Eqs. (25) e (26). Certamente, para o caso em que há carga pre-existente retida¹⁰ a terceira maneira não é a melhor indicada. Em qualquer situação, portanto, a primeira maneira é a melhor, pois é a menos complicada.

III. 2 - Cálculo da densidade espacial de carga retida.

Isolando o valor de ρ_R na Eq. (15), substituindo aí o valor de $\frac{\partial E}{\partial x}$ explicitado na Eq. (47a) e o de ρ na Eq. (48), obtemos

$$\rho_R(x(t, t_e), t) = \frac{f(t_e)}{\tau} \exp\left(-\frac{t - t_e}{\tau}\right) \quad (54)$$

Mais facilmente, porém, o valor da densidade espacial de carga retida pode ser obtido, ao longo de uma linha de corrente, usando-se o valor do campo explicitado pela Eq. (38a) diretamente na Eq. (30). O resultado, como se comprova prontamente, coincide com o dado pela Eq. (54).

Note-se que para $t = t_e = 0$, os resultados obtidos para ρ e para ρ_R estão compatíveis com as condições iniciais estabelecidas, $\rho(x, 0) = 0$ e $\rho_R(x, 0) = 0$.

CAPÍTULO IV

IV.1 - Cálculo da voltagem $V(t)$ entre as faces do isolante.

O estabelecimento de uma expressão matemática descrevendo a evolução temporal da voltagem entre as faces do isolante é o objetivo mais interessante do presente estudo.

A medida que os portadores de carga penetram no isolante, alguns deles são capturados pelos centros de retenção de carga e aí permanecem enquanto durarem os fenômenos de transporte no interior do isolante; outros atingem a face oposta, que está em contacto com o eletrodo aterrado. Ambos os fenômenos implicam variação da voltagem entre a face livre e a aterrada no decorrer do tempo. Batra et al.⁷ mostraram experimentalmente que essa voltagem e a sua derivada temporal são fisicamente observáveis.

O cálculo da voltagem $V(t)$ terá que ser necessariamente feito a partir da definição de $V(t)$,

$$V(t) = \int_{0_+}^1 E(x,t) dx \quad (55)$$

Como não se conhece o campo elétrico como uma função explícita de x e de t , devemos transformar convenientemente a integral, de modo que ela possa ser equivalentemente feita na variável t_e :

$$V(t) = \int_{0_+}^1 E(x,t) dx = \int_t^{t_e'(t)} E \frac{\partial x}{\partial t_e} dt_e \quad (55a)$$

Para tempo t inferior ao tempo de trânsito da primeira linha de corrente, t_T , o campo elétrico no interior do isolante é uniforme no trecho compreendido entre a frente da linha de corrente, dada por $x = x(t, t_e)$, e o plano $x = 1$. A voltagem $V(t)$ fica então dada por duas parcelas,

$$V(t) = \int_0^{x(t, t_e)} E dx + \int_{x(t, t_e)}^1 1 dx, \quad t < t_T$$

ou

$$\begin{aligned} V(t) &= 1 - x(t, t_e) + \int_0^{x(t, t_e)} E dx = \\ &= 1 - x(t, t_e) + \int_t^{t_e} E \frac{\partial x}{\partial t_e} dt_e'' \end{aligned}$$

Usando aí as expressões para o campo elétrico E e a derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial t_e''}$, dadas, respectivamente, pelas Eqs. (38a) e (42), obtemos

$$\begin{aligned} V(t) &= 1 - x(t, t_e) - \int_t^{t_e} \left[1 + \frac{z}{f(t_e'')} \frac{df(t_e'')}{dt_e''} \right] \exp \left[-2f(t_e'') e^{-\frac{t-t_e''}{z}} \right] dt_e'' \\ &\quad + \int_t^{t_e} \frac{z}{f(t_e'')} \frac{df(t_e'')}{dt_e''} \exp \left[-f(t_e'') \left(1 + e^{-\frac{t-t_e''}{z}} \right) \right] dt_e'', \quad (56) \end{aligned}$$

para $t < t_T$.

Na Eq. (55a) o extremo superior de integração, $t_e'(t)$, válido no plano $x = 1$, é determinado da maneira explanada na seção IV.2, a seguir.

Usando as expressões para o campo elétrico E e a derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial t_e}$, dadas, respectivamente, pelas Eqs. (38a) e (42), a Eq. (55a) assume a forma

$$V(t) = - \int_t^{t_e'(t)} \left[1 + \frac{\tau}{f(t_e)} \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp \left[-2f(t_e) \exp \left(-\frac{t-t_e}{\tau} \right) \right] dt_e \\ + \int_t^{t_e'(t)} \frac{\tau}{f(t_e)} \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp \left[-f(t_e) \left(1 + \exp \left(-\frac{t-t_e}{\tau} \right) \right) \right] dt_e \quad (57)$$

Lembrando que a função $f(t_e)$ é definida pela Eq. (39), vemos que o cálculo dessas integrais é bastante laborioso. A integral constante da primeira parcela pode ser determinada exatamente. Com efeito, fazendo a substituição

$$2f(t_e) \exp \left(-\frac{t-t_e}{\tau} \right) = u,$$

resulta

$$\left[1 + \frac{\tau}{f(t_e)} \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] dt_e = \tau \frac{du}{u}.$$

Por outro lado, para $t_e = t$, resulta $\mu = 2f(t)$;

e para $t_e = t'_e(t)$, $\mu = 2f(t'_e(t)) \exp\left(-\frac{t-t'_e(t)}{\tau}\right)$

Portanto, a primeira parcela da Eq. (56) fica reescrita como

$$-\int_t^{t'_e(t)} \left[1 + \frac{\tau}{f(t_e)} \frac{df(t_e)}{dt_e} \right] \exp\left[-2f(t_e) \exp\left(-\frac{t-t_e}{\tau}\right)\right] dt_e =$$

$$= -\tau \int_{2f(t)}^{2f(t'_e(t)) \exp\left(-\frac{t-t'_e(t)}{\tau}\right)} \exp(-u) \frac{du}{u} =$$

$$= \tau \left\{ E_1\left(2f(t'_e(t)) \exp\left(-\frac{t-t'_e(t)}{\tau}\right)\right) - E_1(2f(t)) \right\} \quad (58)$$

Inserindo este resultado na Eq. (57), a voltagem $V(t)$ fica escrita como

$$V(t) = \tau \left\{ E_1 \left(2 f(t'_e(t)) \exp \left(-\frac{t - t'_e(t)}{\tau} \right) \right) - E_1 (2 f(t)) \right\} + \\ + \int_{t'_e(t)}^{\frac{t}{\tau}} \frac{df(t_e)}{dt_e} \exp \left[-f(t_e) \left(1 + \exp \left(-\frac{t - t_e}{\tau} \right) \right) \right] dt_e, \quad (57a)$$

para $t > t_T$.

IV.2 - Relação entre t_e e t , no plano $x = 1$.

O parâmetro t_e foi introduzido para tornar possível a integração das Eqs. (37a) e (37b), como valor particular de $\underline{t}$. Fixando um particular valor de x , podemos estabelecer para essa posição fixada, a correspondente relação entre t_e e t . No caso interessante, vamos estabelecer a relação para a posição $x = 1$. Assim, fazendo $x = 1$ na Eq. (42), temos

$$E_1 \left(f(t'_e(t)) \exp \left(-\frac{t - t'_e(t)}{\tau} \right) \right) - E_1 (f(t'_e(t))) = \frac{1}{\tau} \quad (42)'$$

Calculando a derivada em relação a $\underline{t}$, obtemos a relação

$$\frac{dt'_e(t)}{dt} = \frac{\frac{f(t'_e)}{\tau}}{\left[\frac{\partial f(t'_e)}{\partial t'_e} + \frac{f(t'_e)}{\tau} \right] - \frac{\partial f(t'_e)}{\partial t'_e} \exp \left[-f \left(1 - \exp \left(-\frac{t - t'_e}{\tau} \right) \right) \right]} \quad (59)$$

IV.3 - Casos Especiais.

O problema que estamos estudando tem três tempos naturais: o tempo de injeção das cargas superficiais (que, no caso de um só nível, reduz-se a $\bar{k}_1^{-1} = \bar{k}^{-1}$, se tomarmos, para facilitar a escrita, $k_1 = k$), o tempo de retenção τ e o tempo de trânsito t_T . Como este último foi tomado como referência na definição das grandezas adimensionais (seção I.8), temos dois tempos naturais independentes, k^{-1} e τ , além do próprio tempo t .

Dependendo da magnitude relativa desses tempos, teremos situações particulares, algumas das quais discutiremos a seguir:

$$a) \tau \rightarrow \infty, \quad k^{-1} \ll 1.$$

Esta situação gera a solução conhecida de carga livre⁹ em que toda a carga é instantaneamente emitida para o interior do isolante.

$$b) \tau \text{ finito, qualquer; } k^{-1} \ll 1.$$

Esta situação gera a solução estudada por Rudenko³, no caso em que toda a carga é emitida para o interior do isolante.

$$c) \tau \rightarrow \infty, \quad k^{-1} \gg 1.$$

Aqui, as cargas superficiais comandam o processo. Como não há retenção, o potencial decai, no caso de um só nível superficial presente, como $\exp(-kt)$.

a) τ finito, qualquer; $k \gg 1$.

Aqui, outra vez, as cargas livres em trânsito devem ser poucas, comparadas com a soma das cargas superficiais e retidas. No interior do isolante, teremos, combinando a equação de Poisson, (15), com a Eq. (30),

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho_R = -\frac{\ln E}{\tau} \quad (60)$$

ou, para o tempo t fixado,

$$dx = \tau \frac{dE}{-\ln E}$$

o que, integrando, fornece

$$x = \tau \left\{ E_1(-\ln E(x, t)) - E_1(-\ln E(0_+, t)) \right\} \quad (61)$$

A voltagem $V(t)$, que se obtém integrando a equação

$$V(t) = \int_{0_+}^1 E \, dx$$

pode ser obtida mediante uso conveniente da Eq. (60). Com efeito, multiplicando ambos os lados dessa equação por E , obtemos

$$E \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [E^2] = -\frac{\ln E}{\tau} E,$$

de onde estabelecemos a equação diferencial seguinte

$$-\tau \frac{d[E^2]}{\ln E^2} = E \, dx$$

cujá integral entre $x = 0_+$ e $x = 1$ fornece

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \int_{0_+}^1 E dx = -\tau \int_{E^2(0_+,t)}^{E^2(1,t)} \frac{d[E^2]}{[\ln E^2]} = \\
 &= \tau \left\{ E_1(-\ln E^2(1,t)) - E_1(-\ln E^2(0_+,t)) \right\} \quad (62)
 \end{aligned}$$

Note-se que aqui, por ser a densidade de carga livre bastante pequena, não é necessário distinguir os intervalos de tempo, $t < t_T$ e $t > t_T$, ou, uma vez que o tempo de trânsito foi tomado como o tempo de referência, $t < 1$ e $t > 1$.

Na Eq. (62) há que se conhecer o valor do campo no plano $x = 1$, em qualquer instante. Como - pelo menos em princípio - conhecemos o valor do campo no plano $x = 0_+$, em qualquer instante, podemos estabelecer uma relação entre $E(1,t)$ e $E(0_+,t)$. De fato, fazendo $x = 1$ na Eq. (61) e calculando a seguir a derivada em relação ao tempo t , obtemos

$$\frac{1}{\ln E(1,t)} \frac{dE(1,t)}{dt} = \frac{1}{\ln E(0_+,t)} \frac{dE(0_+,t)}{dt} \quad (63)$$

e) Outra situação especial nos é sugerida pela análise da

Eq. (57), para o caso em que $\tau \ll 1$, isto é, retenção muito rápida. Neste caso, podemos determinar uma expressão matemática para a segunda parcela da Eq. (57), uma vez que a primeira parcela já foi integrada exatamente, conforme consta da Eq. (57a). Para $\tau \ll 1$, temos que $\exp(-\frac{t-t_e}{\tau}) \ll 1$; então, podemos considerar

$$\exp\left[-f(t_e)\left(1 + e^{-\frac{t-t_e}{\tau}}\right)\right] \simeq \exp[-f(t_e)]$$

Com isso, a segunda parcela (57) simplifica-se para

$$\begin{aligned} \int_{t_e^1(t)}^{t_e^1(t)} \frac{\tau}{f(t_e)} \frac{df(t_e)}{dt_e} e^{-f(t_e)} dt_e &= \tau \int_{f(t)}^{f(t_e^1(t))} \frac{\exp[-f(t_e)]}{f(t_e)} df(t_e) \\ &= -\tau \left\{ E_1(f(t_e^1(t))) - E_1(f(t)) \right\} \quad (64) \end{aligned}$$

Para a aproximação aqui considerada, vamos escrever a expressão aproximada da Eq. (58). Como o argumento da função exponencial integral que contém o parâmetro τ torna-se pequeno, é conveniente tomar a expansão em série de potência para essa função, isto é, a expansão em série de potências da função

$$E_1\left(2f(t_e^1(t))\exp\left(-\frac{t-t_e^1(t)}{\tau}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
 & E_1 \left(2 f(t'_e(t)) \exp \left(- \frac{t - t'_e(t)}{\tau} \right) \right) = \\
 & - \gamma - \ln \left[2 f(t'_e(t)) \exp \left(- \frac{t - t'_e(t)}{\tau} \right) \right] + \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n!)} \left[2 f(t'_e(t)) \exp \left(- \frac{t - t'_e(t)}{\tau} \right) \right]^n \approx
 \end{aligned}$$

$\approx -\gamma - \ln[2 f(t'_e(t))] + \frac{t - t'_e(t)}{\tau}$, onde γ é a constante de Euler-Mascheroni; seu valor é

$$\gamma = 0,577215\dots$$

Com essa aproximação, a integral da Eq. (58) fica escrita como

$$- \int_t^{t'_e(t)} \left[1 + \frac{\tau}{f(t_e)} \frac{df}{dt_e} \right] \exp \left[- 2 f(t_e) \exp \left(- \frac{t - t_e}{\tau} \right) \right] dt_e =$$

$$t - t'_e(t) - \tau \left[\gamma + \ln 2 + \ln f(t'_e(t)) + E_1(2 f(t)) \right] \quad (65)$$

Somando os resultados dados pelas Eqs. (64) e (65), obtemos a voltagem $V(t)$

$$V(t) = t - t'_e(t) - \epsilon [\gamma + \ln 2 + \ln f(t'_e(t))] + \\ - \epsilon [E_1(2f(t)) + E_1(f(t'_e(t))) - E_1(f(t))]$$
 (66)

Para a aproximação aqui considerada, a Eq. (42) -- página 40 -- fornece

$$-\gamma - \ln f(t'_e(t)) + \frac{t - t'_e(t)}{\epsilon} - E_1(f(t'_e(t))) = \frac{1}{\epsilon}$$

Isolando o valor de $t - t'_e(t)$, obtemos

$$t - t'_e(t) = 1 + \epsilon \gamma + \epsilon \ln f(t'_e(t)) + \epsilon E_1(f(t'_e(t)))$$

Inserindo este valor na Eq. (66), resulta, finalmente,

$$V(t) = 1 - \epsilon \ln 2 + \epsilon [E_1(f(t)) - E_1(2f(t))]$$

f) Por fim, devemos assinalar que, como demonstrado por Kanazawa e Batra⁸, a distribuição final de cargas no isolante não depende da forma como ela foi injetada. Aliás, a maneira de obtê-la seguiria a análise do item d), pondo-se para $E(0_+, t)$ o valor nulo apropriado ao caso em que toda a carga superficial já se esgotou. De fato, para $E(0_+, \infty)$, a Eq. (62) reduz-se a

$$V(\infty) = \epsilon E_1(-\ln E^2(1, \infty))$$

que não depende da forma como a carga foi injetada no isolante.

IV.4 - Procedimento para obtenção do gráfico do campo $E(x)$.

Conforme vimos, não foi possível explicitar a expressão matemática do campo elétrico E como uma função de x e de t . Obtivemos a expressão matemática de E ao longo de uma linha de corrente, portanto, em função de t e do instante de emissão da linha, t_e . Obtivemos também a expressão matemática para cada linha de corrente, isto é, $x = x(t, t_e)$.

Os gráficos correspondentes a $x = x(t, t_e)$ e $E = E(t, t_e)$, para os mesmos valores do parâmetro t_e -- Gráfico nº 1 e Gráfico nº 2, respectivamente -- permitem, por eliminação do parâmetro t_e , obter o gráfico do campo $E = E(x)$, parametrizado em t .

Para simplificar os cálculos de computação, consideramos o caso em que há um único nível superficial de captura da carga depositada sobre o plano $x = 0$, de modo que, ao invés da embaraçosa Eq. (38a), possamos usar a expressão simplificada dada pela Eq. (40). Ainda para simplificar a computação, consideramos o caso $k = 1$ e $\epsilon = 1$. A Eq. (40) fica simplificada para

$$E = \exp[-\tau_e \exp(-t + \tau_e)]$$

Atribuindo valores ao parâmetro t_e , obtemos as curvas do Gráfico nº 2. Integrando a equação diferencial de definição de uma linha de corrente, Eq. (37c), obtemos o Gráfico nº 1.

Escolhemos a mesma escala de tempo nos Gráficos nºs 1 e 2 simplesmente para podermos usar o mesmo programa no traçado das escalas em ambos os eixos. Parametrizamos as curvas $x = x(t)$ e

$E = E(t)$ com os mesmos valores do parâmetro t_e , a fim de podermos, graficamente, eliminar t_e entre os dois gráficos e obter o Gráfico nº 3.

Tomemos um ponto qualquer pertencente a uma curva do Gráfico nº 3. A curva aí está parametrizada em t . A obtenção desse ponto é feita da seguinte maneira: Traça-se uma reta $t = \text{const.} = C_1$, nos Gráficos nºs 1 e 2. A ordenada do ponto de interseção dessa reta, no Gráfico nº 1, com uma curva parametrizada em t_e (para o valor escolhido de t_e) fornece o correspondente valor de x , o qual é registrado como abscissa no Gráfico nº 3. A ordenada de interseção da reta $t = C_1$, no Gráfico nº 2, com a curva de $E(t)$ parametrizada com o mesmo valor de t_e fornece o valor de E correspondente ao valor da abscissa x , valor esse de E que é registrado em ordenada no Gráfico nº 3.

No Gráfico nº 3, temos as curvas de $E = E(x)$ parametrizadas para os valores do tempo t iguais a 0,1; 0,2; 0,3; 0,5 e 1,0.

Observemos que a medida que o tempo aumenta, o valor de E no plano $x = 0$ diminui, enquanto que no interior do isolante o valor do campo aumenta, indicando, assim, a migração dos portadores de carga para o interior do isolante. Devido ao dreno de carga no plano $x = 1$, pois este plano está ligado à Terra, o campo aí diminui, porém menos do que no plano oposto, $x = 0$, em consequência da retenção de carga nos centros profundos de retenção. Resulta desse desnível do valor do campo entre as faces do isolante uma voltagem residual, o que é evidenciado na Ref. 8.

Finalmente, determinando-se a área debaixo de cada curva $E = E(x)$ com um planímetro, obtemos, para cada valor de t fixado em cada curva, a correspondente voltagem $V(t)$. Com os diversos valores $V(t)$ assim achados, construimos a curva do Gráfico nº 4.

GRAFICO Nº 4

R E F E R Ê N C I A S.

1. - TOOMER, R. e LEWIS, T. J. -
J. Phys. D; Appl. Phys., 13, 1343 (1980)
2. - SONNONSTINE, T. J. e PERLMAN, M. M. -
J. Appl Phys., 46, 3975 (1972)
3. - RUDEENKO, A. I. -
Sov. Phys.-Semiconductors, 5, 2097 (1972);
Sov. Phys.-Solid State, 14, 2706 (1973)
4. - NUNES de OLIVEIRA, L. -
Circulação Interna. Departamento de Física e Ciência
dos Materiais, USP - São Carlos.
5. - GIACOMETTI, J. A. -
Dissertação de Mestrado. Departamento de Física e Ciên-
cia dos Materiais, USP - São Carlos.
6. - MANY, A. e RAKAVY, G. -
Phys. Rev., 126, 1980 (1962)
7. - BATRA, I. P.; KANAZAWA, K. Keiji; e SEKI, H. -
J. Appl. Phys., 41, 3416 (1970)
8. - KANAZAWA, K. Keiji e BATRA, I. P. -
J. Appl. Phys., 43, 1845 (1972)
9. - WINTLE, H. J. -
J. Appl. Phys., 41, 4004 (1970)
10. - SONNONSTINE, T. J. e PERLMAN, M. M. -
Phys. Rev., B 12, 4434 (1975)