"DISCOS SUSTENTADOS POR COLCHÃO
DE AR: UMA NOVA PROPOSTA".

Roberto Hessel

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física e Química de São Carlos, pa
ra a obtenção do título de Mestre em
Física Aplicada

Orientador: Prof.Dr. Dietrich Schiel

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

São Carlos - 1981

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE _____

Roberto Hessel

APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 27 DE novembro DE 1981.

COMISSÃO JULGADORA:

Dr. Dietrich Schiel

- Orientador

Dr. Guilherme Fontes Leal Ferreira

Dr. Ernst W. Hamburger

A meus pais, Elza e Paulino,
e à Ziza, minha esposa.

ÍNDICE

RESUMO	I
ABSTRACT	II
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - OS DISCOS SUSTENTADOS POR COLCHÃO DE AR	4
1.1 - Retrospecto histórico	4
1.2 - O funcionamento de um puck	6
1.3 - Os sistemas utilizados para obter a sustenta- ção e para registrar trajetórias de pucks	7
1.4 - Os pucks no Brasil	11
CAPÍTULO II - TEORIA DOS DISCOS SUSTENTADOS POR COLCHÃO DE AR	15
2.1 - Comportamento hidrodinâmico do colchão de ar..	15
2.2 - Distribuição de pressão na película de ar	18
2.3 - Espessura da película de ar	19
2.4 - A força retardadora	23
CAPÍTULO III - OS CIRCUITOS MAGNÉTICOS	27
3.1 - Os materiais magnéticos	27
3.2 - Histerese - Materiais macios e duros	31
3.3 - Desmagnetização	33
3.4 - Os circuitos magnéticos	36
3.5 - Os circuitos magnéticos com entreferro	42
3.6 - Força sobre a armadura de um eletroímã	44
CAPÍTULO IV - O MODELO M-1: PROJETO E CONSTRUÇÃO	48
4.1 - O modelo M-0	48
4.2 - Como otimizar o modelo M-0	48
4.2.1 - O circuito eletrônico	48
4.2.2 - O circuito magnético	49
4.2.3 - O número de espiras (N)	51
4.2.4 - A área do núcleo	57
4.2.5 - A montagem do eletroímã	60

	4.3 - O modelo M-1	61
	4.4 - Alguns resultados experimentais	64
	4.4.1 - Considerações gerais	64
	4.4.2 - Movimento aleatório do puck sobre uma superfície horizontal	67
	4.4.3 - Descida de um plano inclinado	68
	4.4.4 - Movimento parabólico no plano inclinado	70
CAPÍTULO	V - O MODELO M-2: PROJETO E CONSTRUÇÃO	72
	5.1 - Introdução	72
	5.2 - A bomba de ar	72
	5.3 - Cálculo da força magnetomotriz	75
	5.4 - A excitação da bobina	76
	5.5 - O modelo M-2	79
	5.6 - Resultados experimentais	83
CAPÍTULO	VI - O MODELO M-3	85
	6.1 - Introdução	85
	6.2 - O modelo M-3	86
	6.3 - Resultados experimentais	87
	6.3.1 - Colisões em duas dimensões	87
	6.3.2 - Movimento sob a ação de uma força central do tipo - kx	90
CAPÍTULO	VII - CONCLUSÕES	92
APÊNDICE	I - NÚCLEOS COM FORMA RETANGULAR E LINHAS DE INDUÇÃO	97
APÊNDICE	II - PEÇAS DO MODELO M-1	99
APÊNDICE	III - CONSTRUÇÃO DOS DISCOS	102
APÊNDICE	IV - PEÇAS DO MODELO M-2	103
APÊNDICE	V - CÂMARAS DO MODELO M-3	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107

RESUMO

Os discos sustentados por colchão de ar têm encontrado larga aplicação didática. Sua utilização, contudo, esbarra em algumas dificuldades, pois os sistemas convencionais que permitem registrar as trajetórias dos discos e fornecer o gás para sustentá-los tornam difícil e dispendioso o seu emprego. Neste trabalho mostra-se como essas dificuldades podem ser superadas, utilizando idéias diferentes daquelas que vêm sendo seguidas tradicionalmente.

Três novos discos sustentados por colchão de ar são estudados. Um deles leva um reservatório de ar consigo e dispõe de um circuito eletrônico acoplado a um sistema eletromecânico que permite registrar fácil e economicamente a trajetória do disco. Os outros dois dispõem de uma bomba de ar solidária a eles e de um sistema eletromecânico semelhante ao do primeiro modelo.

Experiências realizadas com as três versões construídas são também apresentadas e analisadas.

ABSTRACT

There are many applications of air-suspended pucks in physics teaching. However, there are some difficulties in their widespread utilization, particularly in their maintenance and handling, because of the high cost of the conventional systems of recording the trajectories and supplying the gas needed to support the pucks. In this paper we present some new ideas to overcome these difficulties.

Three new air-suspended pucks are studied. One of them carries its own supply of air and is equipped with an electronic circuit coupled to an electromechanical system that provides an easy and inexpensive way to record its trajectory. The other two have an air pump fastened to them and use electromechanical system similar to that of the first model.

Experiments performed with the three versions that have been constructed are also presented and analysed.

INTRODUÇÃO

Os equipamentos didáticos que utilizam o princípio da sustentação a ar despertaram grande interesse, principalmente nos Estados Unidos, a partir de um artigo de Marcley¹ publicado em 1960. Isto pode ser constatado observando nas revistas especializadas o número de comunicações, sobre novas invenções e aplicações da idéia, que apareceram depois dessa data e o número de firmas especializadas na confecção de material didático que passaram a comercializar produtos cuja base de funcionamento é o princípio da sustentação a ar.

O desenvolvimento desses equipamentos constitui, segundo Meiners², "um dos avanços mais significativos em direção aos aspectos experimentais da mecânica que resultou, em escala mundial, do renascimento no ensino das ciências físicas". Em particular os discos que deslizam quase sem atrito sobre uma superfície plana (conhecidos como "pucks") e sustentados por um colchão de ar (ou outro gás) começaram a ser largamente utilizados em demonstrações e estudos de movimentos em duas dimensões e tornaram possível a realização de inúmeras experiências que eram impraticáveis até então. Tal afirmação, contudo, não pode ser feita com relação ao Brasil, embora esses discos tenham despertado algum interesse já no início da década de 60. Um relatório³ preparado para a Sociedade Brasileira de Física (SBF) em 1976 revela que, de 45 entidades "selecionadas entre as mais representativas em cada unidade da federação brasileira", somente 12 fazem o estudo de colisões em duas dimensões* (a aplicação mais usual dos pucks) embora 37 estudem movimentos e

* Segundo nos informou o prof. F.D.Saad, do IF da USP e um dos autores do referido relatório, a maioria dessas 12 instituições utiliza esferas nas experiências de colisões, seguindo um roteiro sugerido pelo Physical Science Study Committee (PSSC).

colisões em uma dimensão.

Parece-nos que se várias entidades estudam os movimentos e colisões em uma dimensão com mais razão o fariam em duas se pudessem contar com um equipamento que fosse, quando comparado com os modelos atuais, menos dispendioso, mais fácil de ser operado e tivesse manutenção mais simples; que utilizasse na sua construção e operação material fácil de ser encontrado no mercado local e que permitisse obter resultados experimentais de mesma qualidade, no mínimo, daqueles obtidos com equipamentos similares.

O objetivo deste trabalho é, justamente, descrever e discutir três novas versões de discos sustentados por colchão de ar que procuram atender a essas características.

No capítulo I fazemos um retrospecto histórico e descrevemos alguns dos modelos existentes.

Nos dois capítulos seguintes tratamos das teorias que permitiram desenvolver a nova "família" de pucks.

No capítulo IV descrevemos e discutimos o primeiro modelo da família que será denominado M-1 no decorrer da exposição. Trata-se de um puck com reservatório de ar e sistema eletromecânico de registro de posições.

Os dois outros membros da família, denominados M-2 e M-3, são descritos nos capítulos V e VI, respectivamente. Nestes modelos o ar para a sustentação é obtido a partir de uma pequena bomba solidária ao disco, alimentada por pilhas na versão M-2 e por corrente alternada retificada na versão M-3. Ambos possuem um sistema eletromecânico de registro de posições.

No final dos capítulos IV, V e VI analisamos algumas experiências realizadas com cada uma das versões não só para mostrar a viabilidade de aplicação e versatilidade de cada modelo como também para definir o grau de precisão nos resultados experimentais obtidos.

No último capítulo arrolamos as principais conclusões do trabalho.

CAPÍTULO I

OS DISCOS SUSTENTADOS POR COLCHÃO DE AR

1.1 Retrospecto histórico

Aqueles que já passaram pela experiência de ensinar o Princípio da Inércia num curso secundário devem estar lembrados do quanto isto é difícil e do quanto pode ser embaraçoso quando somos forçados a explicá-lo através de experiências realizadas em pensamento e a lançar mão de frases como: "Se não houvesse atrito" etc. O mesmo acontece quando o professor é obrigado a argumentar com seus alunos que a inconsistência de algum resultado experimental obtido por eles é devida ao atrito.

O problema volta a se apresentar quando pretendemos estudar quantitativamente a conservação da quantidade de movimento. Em uma dimensão conseguem-se resultados satisfatórios se se usam carrinhos com rolamentos de esfera⁴, mas no caso bidimensional os mesmos apresentam limitações óbvias. Alguns^{5,6} resolveram o problema fazendo colidir, no ar, esferas suspensas por longos fios e outros fazendo-as colidir sobre uma superfície plana de vidro liso e ensaboado⁷. O PSSC⁸ propõe a colisão de uma esfera que desce por uma canaleta encurvada com outra apoiada sobre um pino. No Projeto Harvard⁹ a colisão é efetuada entre dois discos que deslizam sobre pequenas esferas esparramadas numa placa de vidro cuidadosamente nivelada.

Uma outra solução bastante engenhosa, que praticamente elimina o atrito associado ao deslizamento dos discos sobre a mesa, é lubrificar as duas superfícies em contato com uma camada de ar (colchão de ar ou outro gás); este é o princípio dos discos sustentados por colchão de ar.

Segundo Whitney¹⁰, os primeiros discos sustentados por

colchão de ar foram construídos por Marcley¹¹ e por ele mesmo, em 1957, para uma experiência de conservação de quantidade de movimento destinada a alunos do primeiro ano do Massachusetts Institute of Technology (MIT). Posteriormente, algumas modificações foram feitas e com elas a versatilidade desses discos aumentou de maneira considerável, tornando possível a realização de muitas outras experiências. Com as várias versões então disponíveis os discos sustentados por colchão de ar passaram a ser largamente utilizados em laboratórios didáticos e em demonstrações em aula.

O aparecimento dos pucks beneficiou também a maioria dos autores que escreveram textos de Física Básica durante e depois dessa época e hoje é difícil um desses livros, principalmente de origem americana, que não os empreguem para ilustrar princípios da cinemática ou da dinâmica. Em particular, o livro dos professores Ingard e Kraushaar¹², editado em 1960 e um dos primeiros textos a se servir da inovação, é uma boa fonte de exemplos de experiências que podem ser realizadas com um tal dispositivo.

Depois do artigo de Marcley¹³ apareceram outras aplicações do princípio da lubrificação a ar. As mais significativas foram as invenções do trilho^{14,15} e da mesa de ar^{16,17}.

É interessante notar que a lubrificação a ar não era uma idéia nova quando os pucks surgiram pela primeira vez. Bruhat¹⁸, por exemplo, já citava na edição de 1934 de seu livro de mecânica aparelhos de laboratório que dispunham de rotores sustentados e movimentados a ar. Além disso, os laboratórios didáticos do MIT, onde os pucks surgiram, também já haviam desenvolvido em 1953 um giroscópio cujo rotor era sustentado por colchão de ar^{19,20}.

Segundo Gross²¹, aparentemente foi o francês G. Hirn quem, em 1854, mencionou pela primeira vez que o ar poderia ser empregado como lubrificante. Depois disso o assunto voltou a ser discutido somente em 1897 quando o americano A. Kingsbury cons-

truiu o primeiro mancal radial lubrificado a ar e publicou alguns resultados experimentais. Contudo, foi somente a partir de 1950, quando a indústria passou a necessitar de lubrificantes com características muito especiais²², que o estudo e a aplicação da lubrificação a ar se aceleraram. A Marcley e a Whytney cabe o mérito, nos parece, por terem imaginado um dispositivo suficientemente interessante para chamar a atenção e mostrar o alcance didático do princípio da lubrificação a ar.

1.2. O funcionamento de um puck

A fig. 1.1 mostra os aspectos essenciais de um puck. Seu corpo é um disco cilíndrico, geralmente de metal, que tem um pequeno orifício ao longo do eixo vertical passando pelo seu centro. Concêntrico com este orifício há um tubo preso à superfície superior do disco que serve para admitir o ar. Forçado através do tubo, o ar sai pelo orifício inferior escapando por entre o disco e a mesa. A estreita camada de ar assim formada é capaz de levantar o disco inteiramente da superfície e mantê-lo suspenso; obviamente, para que isto aconteça uma pressão mínima é necessária (como será visto no Cap. 2). Uma vez flutuando e posto em movimento, o disco pode deslocar-se em qualquer direção num plano horizontal encontrando apenas uma pequena resistência imposta pela camada de ar sobre a qual desliza. Desta maneira, situações imaginadas em que corpos deslizam sobre superfície plana sem atrito, frequentemente citadas nos textos de Física Básica, podem ser efetivamente realizadas, pois os pucks permitem trabalhar sob condições muito próximas das ideais.

Fig. 1.1 Corte longitudinal de um puck.

1.3 Os sistemas utilizados para obter a sustentação e para registrar as trajetórias dos pucks

No modelo original desenvolvido por Marcley e Whitney (fig. 1.2) o ar é fornecido por meio de uma linha de distribuição do laboratório através de uma mangueira leve e flexível encaixada num tubo vertical solidário ao disco (por isso receberam a denominação de pucks "cativos"). Nesse modelo, entretanto, a mangueira através da qual o ar é fornecido pode ser um inconveniente; por isso construíram-se pucks "livres", isto é, pucks que levam o seu próprio reservatório de ar (ou outro gás qualquer). H.E. Anderson, por exemplo, construiu um puck provido de um reservatório que pode ser preenchido com ar comprimido através de uma válvula de pneu de bicicleta^{23,24} (fig. 1.3). Esses pucks flutuam cerca de 20 a 30 segundos.

Fig. 1.2 Um puck cativo

Fig. 1.3 Um puck livre

O Physical Sciences Study Committee (PSSC) projetou um puck que leva pedaços de gelo seco num reservatório ²⁵; a sublimação do CO_2 fornece o gás necessário para a flutuação (fig. 1.4a). Seguindo a mesma idéia, pode-se utilizar nitrogênio líquido ou comprimidos efervescentes. No primeiro caso a evaporação do nitrogênio líquido garante o gás necessário à flutuação e, no segundo, o gás é obtido à medida que o comprimido se dissolve na água. A fig. 1.4b mostra o modelo a nitrogênio líquido utilizado pelo Instituto de Física da USP para realizar uma série de seis filmes sobre o Centro de Massa ²⁶.

Fig. 1.4a Puck de gelo seco

Fig. 1.4b Puck de nitrogênio Liquefeito

A firma inglesa Griffin & George Ltd comercializa um puck cuja sustentação é garantida pelo ar fornecido por uma pequena bomba solidária ao disco e acionada por um motor elétrico alimentado por duas pilhas de 1,5 volts.

A versão mais simples entretanto, utiliza um balão de borracha como reservatório ²⁷ (fig. 1.5). Surpreendentemente, com um desses balões pode-se sustentar um disco de 800g e diâmetro de 16 a 18 cm por cerca de 1 minuto (orifício de saída com diâmetro de aproximadamente 1mm).

Fig. 1.5

O registro das posições de um puck em movimento pode ser feito através da fotografia de múltipla-exposição. Neste caso obtêm-se melhor resultado usando lâmpada estroboscópica de alta intensidade, pois os "flashes" sendo de duração muito curta (da ordem de micro-segundos) garantem imagens bastante nítidas. Uma alternativa é usar iluminação estroboscópica obtida mecanicamente (disco com fendas, motor e lâmpada comum) e uma outra é instalar sobre o puck uma lâmpada intermitente controlada por um circuito eletrônico alimentado por uma pequena bateria. (O PSSC²⁸ e Marousek²⁹ sugerem algumas técnicas e cuidados necessários para obter uma boa fotografia).

A trajetória de um puck pode ainda ser registrada utilizando-se um faiscador eletrônico, que emite pulsos de alta tensão com frequência bem determinada, e uma folha de papel apropriado que é perfurada pelas faíscas. Neste caso o puck deve ser equipa do com uma haste de aço afilada, posicionada ao longo de seu eixo vertical e isolada de seu corpo. Na montagem original de Marcley e Whitney esta ponta é voltada para baixo e separada da folha de papel, sobre a qual o puck desliza, pelo colchão de ar que é muito delgado (fig. 1.6a). A folha de papel, colocada sobre uma placa de vidro, tem uma das faces condutora. Essa face, voltada para baixo, é ligada ao terminal do faiscador; o outro terminal é ligado à haste afilada. As faíscas saltam da ponta metálica, atraves-sam o papel, marcando-no, e voltam para o faiscador através da face condutora (fig. 1.6b). As marcas assim conseguidas indicam a trajetória do puck.

Fig. 1.6a Vista interna do puck

Fig. 1.6b Arranjo para registrar trajetória

Em vez de papel com uma das faces condutora pode-se usar uma folha de papel fino colocada sobre um papel condutor. Se, por outro lado, a superfície sobre a qual o disco desliza for condutora, tal como uma chapa metálica, o registro pode ser feito sobre uma folha de papel encerado.

No modelo utilizado pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IF - USP) a ponta metálica é voltada para cima e sobre os pucks é colocado um telhado de vidro³⁰. Em uma de suas faces fixam-se papel de alumínio e papel celofane, nesta ordem. O papel de alumínio serve de terminal para o qual saltam as faíscas dos pucks (fig. 1.7).

Fig. 1.7 Sistema utilizado no IF-USP

O inconveniente destas últimas montagens é que, nelas, os pucks são cativos. Helen H. Webb^{31,32} propõe uma outra que permite eliminar os vínculos representados pelo fio de ligação e pela mangueira de ar. Neste^u caso a haste metálica solidária ao puck (agora deslizando numa mesa de ar) dispõe de duas extremidades afiladas de modo que a corrente pode saltar da mesa para a ponta na base do puck e da extremidade superior da haste para um teto metálico forrado com papel encerado.

Mais informações sobre o registro de faíscas podem ser encontradas em Meiners³³.

Quanto aos faiscadores eletrônicos há muitas versões em uso. Um modelo à válvula, por exemplo, é descrito por Kolenkow³⁴ e um outro totalmente transistorizado por Harvey e Wagner³⁵. Referências sobre modelos mais antigos encontram-se em The Taylor Manual³⁶.

1.4 Os pucks no Brasil

É difícil dizer quem utilizou ou construiu o primeiro puck no Brasil mas, entrevistando algumas pessoas responsáveis pela divulgação, no país, de projetos de ensino, pudemos obter algumas informações. O professor Rodolpho Caniato, por exemplo, que fez parte da equipe que cuidou da adaptação do PSSC para o país, construiu e utilizou pucks em aula já em 1962. Em 1965 o autor estudou, como aluno do IF-USP, colisões entre dois pucks, utilizando a montagem já descrita e ainda hoje em uso (que na época havia sido recém construída), e soube, também, que alunos do ano anterior já "brincavam" com um puck feito com disco de vitrola e um balão de borracha.

A versão do IF-USP, desenvolvida pelo professor Plínio U. N. dos Santos, foi comercializada pelo IBEC (atual FUNBEC-Funda-

ção Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências) mas a baixa procura do equipamento desestimulou a continuidade da produção. Segundo o prof. F.D.Saad, do IF-USP, é bem provável que hoje somente o referido instituto utilize pucks, regularmente, nos seus laboratórios didáticos. Entretanto o trilho de ar que é fabricado pela FUNBECC e pela EQUILAB tem tido uma aceitação bastante razoável*.

É difícil dizer por que os pucks têm sido tão pouco empregados nos nossos laboratórios didáticos, como parecem indicar as informações conseguidas. Entretanto, independentemente das razões, um fato é inegável : é muito difícil reunir todo o equipamento necessário para realizar experiências com pucks nas universidades brasileiras pois sempre falta uma coisa ou outra. Por esta razão, acreditamos que um número maior de professores passaria a utilizar pucks se o compressor e o faiscador (ou gelo seco e fotografia estroboscópia) pudessem ser dispensados, isto é, se houvesse um puck que se auto-sustentasse, que levasse consigo um mecanismo para marcar suas posições em função do tempo e necessitasse de poucos ajustes.

Um puck procurando satisfazer a essas condições foi apresentado pelo autor na 29^a Reunião da SBPC³⁷. Nesse protótipo (fig. 1.8) uma caneta hidrográfica montada ao longo do eixo vertical de um disco tem liberdade de oscilar verticalmente sob a ação de um campo magnético criado por uma bobina com núcleo de material ferromagnético. A bobina é excitada por um circuito eletrônico (fig. 1.9), alimentado por quatro pilhas de 1,5 volts, que gera pulsos de tensão na forma de onda quadrada com uma frequência entre 10 e 100 hertz. A cada pulso a armadura (M) do eletroímã, solidária à

* Informação prestada pelo Prof. A.de S.Teixeira Jr.. presidente da FUNBECC.

caneta, é atraída pelo núcleo da bobina permitindo que pontos sejam marcados levemente sobre uma placa de vidro ou sobre uma folha de papel liso depositada sobre ela.

Fig. 1.8 Puck com reservatório de ar e sistema eletromecânico de registro de posições.

O ar fornecido por um balão de borracha permite que o disco e seus acessórios, com massa total de 600 a 800 gramas, flutue por cerca de 40 a 60 segundos. A análise do movimento pode ser feita diretamente sobre a placa de vidro ou sobre o papel ou, ainda, sobre as imagens (obtidas por meio de um retroprojetor) dos pontos marcados na placa.

Fig. 1.9 Circuito gerador de pulsos.

Essa versão, porém, apresentou uma série de problemas e isto nos fez pensar em prosseguir o trabalho no sentido de otimizar o sistema. A motivação, pequena de início, cresceu quando percebemos que, se conseguíssemos aumentar a força atuando na caneta, poderíamos fazê-la movimentar uma pequena bomba de ar, permitindo então dispensar o balão de borracha. Para conseguir isso é preciso i) conhecer a teoria dos discos sustentados por colchão de ar de modo que possamos dimensionar corretamente a bomba e ii) projetar um sistema eletromecânico mais eficiente que o apresentado na fig. 1.8.

O primeiro item será visto no capítulo II e a teoria necessária para desenvolver o segundo, no capítulo III.

CAPÍTULO II

TEORIA DOS DISCOS SUSTENTADOS POR COLCHÃO DE AR*

2.1 Comportamento hidrodinâmico do colchão de ar

A capacidade de um disco permanecer flutuando sobre um colchão de ar de uma maneira estável é uma consequência direta do fato da viscosidade do ar não ser nula. Para entendermos isto consideremos como se comportaria o disco se o fluido debaixo dele fosse ideal, isto é, tivesse viscosidade zero. A conservação da massa requer que a quantidade de fluido entrando no colchão, através do conduto central do disco seja a mesma que a quantidade deixando sua borda. Consequentemente, a velocidade de uma dada porção do fluido deve decrescer enquanto se move para fora, o que implica numa aceleração dirigida radialmente para dentro. Na ausência da viscosidade a única força atuando sobre um elemento do fluido é aquela que surge do gradiente de pressão no fluido e, desde que a aceleração é para dentro, a pressão deve decrescer na mesma sentido. Em todo ponto da película de ar a pressão é, então, menor que aquela na borda da película que está na pressão atmosférica. Há assim uma força resultante para baixo atuando sobre o disco. É evidente, portanto, que uma força externa dirigida verticalmente para cima deve ser aplicada ao disco se quisermos que a espessura da película se mantenha constante. Ora, não é isso que acontece! O escoamento através de um canal só pode ser mantido se a pressão na entrada for maior que na saída. Na película de ar sob o disco flutuante o mesmo se dá e por isso a pressão de ar nela sempre excede a pressão fora dela; a força resultante no disco

* Este capítulo é uma adaptação do artigo de W.M. Whitney (ref.10)

é para cima, portanto.

Se o escoamento é iniciado enquanto o disco está em repouso sobre uma superfície plana, a pressão no tubo de entrada aumenta até que o disco seja levantado e um espaço criado. Quando o ar começa fluir nesse espaço, a pressão no tubo e na película cai até estabilizar-se num certo valor. No equilíbrio a pressão deve ser tal que a força resultante para cima exercida pela película sob o disco seja exatamente igual ao seu peso. Se a velocidade do escoamento se mantiver pequena, esse equilíbrio não será afetado por variações na taxa de escoamento, desde que (como vamos mostrar) a distribuição de pressão na película, e conseqüentemente a força total para cima sob o disco, é independente da quantidade de ar escapando pela borda da película. O equilíbrio conseguido entre esta força para cima e o peso do disco é portanto indiferente (em vez de estável) com respeito às variações na taxa de escoamento.

Para que a descrição dada se aproxime da realidade é necessário que o escoamento de ar na película seja suficientemente lento para que possa ser determinado inteiramente por forças viscosas. Com velocidades e acelerações crescentes do ar os efeitos inerciais (que são completamente dominantes no escoamento de um fluido ideal) também começam a se manifestar; a pressão em qualquer ponto dado da película torna-se uma função da velocidade local do fluido e a força para cima exercida por ele sob o disco não mais será independente da taxa de escoamento.

Para descrever quantitativamente o escoamento sob o disco necessitamos de duas equações da teoria da hidrodinâmica: a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes. A equação da continuidade estabelece que a massa do fluido é conservada :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-1)$$

A equação de Navier-Stokes expressa a relação entre força e aceleração num dado ponto do fluido para um escoamento viscoso e é dada por :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{v} + \frac{4}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2-2)$$

O símbolo $\vec{v}$ representa a velocidade do fluido no ponto (x,y,z), ρ a sua densidade, μ o coeficiente dinâmico da viscosidade e p a diferença entre a pressão do fluido e a pressão atmosférica. A pressão no conduto central, suficiente para fazer flutuar a maioria dos nossos pucks, está entre 0,020 e 0,050 atm; consequentemente o ar da película pode ser considerado como incompressível. Assim, com ρ constante, a equação da continuidade pode ser expressa numa forma mais simples :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2-3)$$

Como a velocidade do ar na película é pequena, o primeiro termo do primeiro membro de 2-2 e o segundo, que é chamado o termo inercial, podem ser feitos iguais a zero. O último termo de 2-2 também é zero pois, de 2-3, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Em lugar de 2-2 podemos escrever então a equação aproximada :

$$\nabla p = -\mu \nabla \times \nabla \times \vec{v} \quad (2-4)$$

Desde que o divergente do lado direito desta equação é identicamente nulo, a expressão para a pressão na película (para baixas velocidades) deve satisfazer à equação de Laplace :

$$\nabla^2 p = 0 \quad (2-5)$$

Levando a solução apropriada desta equação em 2-4, obtemos um conjunto de equações diferenciais não homogêneas que, quando resolvidas, fornecem as componentes de $\vec{v}$. Isto será feito nos dois itens seguintes.

2.2 Distribuição de pressão na película de ar

A fig. 2.1 mostra a geometria do disco para o qual os cálculos serão efetuados. O ponto 0 representa a origem de um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . O eixo de referência $r=0$ coincide com o eixo vertical do disco e o plano de referência $z=0$ com o tampo da mesa de modo que o fundo do disco jaz no plano $z=0$ [supõe-se que a face inferior do disco é sempre paralela à superfície sobre a qual desliza). A direção da referência $\theta=0^\circ$ é dirigida para a direita na figura.

Fig. 2.1

Em termos destas coordenadas a equação 2-5 toma a forma :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (2-6)$$

Para $r > b$, onde o fluido está na pressão atmosférica, a diferença de pressão é zero. Dentro da cavidade ela tem um certo valor constante p_0 . Da simetria das condições de contorno segue que a componente θ do gradiente de pressão deve desaparecer na película. Supõe-se, também, que $\partial p / \partial z \ll \partial p / \partial r$. A pressão da película é portanto reduzida a uma função de uma única variável r e a eq. 2-6 pode ser então facilmente resolvida como segue.

De $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0$ resulta $r \frac{dp}{dr} = C$ ou

$$\int_p^0 dp = C \int_r^b \frac{dr}{r} \quad \text{Disto deduz-se que } p = C \ln (r/b)$$

Lembrando que para $r=a$, p é igual a p_0 , obtêm-se $C = p_0 [\ln(a/b)]^{-1}$

ou finalmente ,

$$p = p_0 \cdot [\ln(b/a)]^{-1} \cdot \ln(b/r). \quad (2-7)$$

A pressão p_0 é avaliada impondo que a força total para cima atuando sob o disco seja igual ao seu peso :

$$Mg = (\pi a^2) p_0 + \int_a^b p \cdot 2\pi r dr \quad (2-8)$$

Substituindo p em 2-8 pela eq. 2-7 resulta

$$p_0 = \frac{2 Mg}{\pi (b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \quad (2-9)$$

A solução final de 2-6 é obtida substituindo p_0 em 2-7 pela expressão 2-9. Daí resulta

$$p = \frac{2 Mg}{\pi (b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{r} \quad (2-10)$$

Embora este resultado tenha sido obtido para um disco pairando sobre um ponto, deve ser válido igualmente para um que se mova lentamente sobre a mesa, pois a forma da solução é governada pelas condições de contorno e estas são essencialmente as mesmas tanto para um disco em movimento quanto para um em repouso, contanto que a velocidade seja pequena quando comparada com a velocidade do ar na película.

2.3 Espessura da película de ar

A massa dm de ar saindo no tempo dt pela área $r d\theta dz$ indicada na fig. 2.2 é dada por

$$dm = \rho v_r(r, \theta, z) r d\theta dz dt$$

Fig. 2.2

A massa por unidade de tempo saindo pela área $rd\theta dz$ é

$$dQ(h) = \rho v_r(r, \theta, z) r d\theta dz.$$

A relação entre a espessura h da película sob o disco e a taxa Q em que o ar flui através dela é dada pela integral

$$Q(h) = \int_0^{2\pi} \int_0^h dQ(h) = \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho v_r(r, \theta, z) r d\theta dz. \quad (2-11)$$

v_r , assim como as componentes v_θ e v_z , podem ser obtidas do sistema de equações representado por 2-4 :

$$\nabla p = -\mu \nabla \times \nabla \times \vec{v} = -\mu (\nabla \nabla \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \nabla \vec{v}) = \mu \nabla^2 \vec{v},$$

pois $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (eq. 2-3) . Assim,

$$\nabla^2 \vec{v} = \mu^{-1} \nabla p. \quad (2-12)$$

Fazendo $v_z=0$, um passo compatível com a aproximação $\partial p / \partial z \ll \partial p / \partial r$ já feita na seção precedente, as três equações representadas por 2-12 podem ser reduzidas a duas :

$$\nabla^2 v_r - \frac{1}{r^2} v_r = \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \mu^{-1} \frac{\partial p}{\partial r} \quad e \quad (2-13)$$

$$\nabla^2 v_\theta - \frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = (\mu r)^{-1} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (2-14)$$

nas quais p deverá ser substituído pela expressão 2-10. A equação da continuidade (2-3) fornece uma relação adicional entre v_r e v_θ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2-15)$$

(Para um disco estacionário as três últimas equações podem ser posteriormente simplificadas invocando considerações de simetria e fazendo $v_\theta = 0$. Esta restrição, entretanto, não será feita aqui desde que será conveniente, na seção seguinte, utilizar uma solução que seja também válida para um disco movendo-se lentamente).

Imaginemos o disco como se estivesse em repouso e com a superfície movendo-se com velocidade V na direção $\theta=180^\circ$ (i.e., para a esquerda na fig. 2.1). Num escoamento viscoso não há movimento relativo na fronteira entre o fluido e qualquer superfície sólida em contato com ela, consequentemente as condições de contorno impostas sobre as soluções para v_r e v_θ , relativas ao disco são :

$$v_r = v_\theta = 0 \quad (\text{para } z = h) \quad \text{e} \quad (2-16)$$

$$v_r = -V \cos \theta, \quad v_\theta = V \sin \theta \quad (\text{para } z = 0)$$

Buscando $\partial v_\theta / \partial \theta$ em 2-15, $\partial p / \partial r$ em 2-10 e desenvolvendo o laplaciano $\nabla^2 v_r$, 2-13 se transforma em

$$\frac{3}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = - \frac{2 Mg}{\mu (b^2 - a^2)} \frac{1}{r} \quad \text{ou}$$

$$3 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial z^2} = - \frac{2 Mg}{\mu (b^2 - a^2)}.$$

Lembrando que

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \quad \text{e} \quad r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r},$$

a última expressão se reduz a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial z^2} = - \frac{2 Mg}{\mu (b^2 - a^2)}$$

ou, ainda, a

$$\nabla^2 (rv_r) = C \quad (2-17)$$

$$\text{onde } C = - \frac{2 Mg}{\mu (b^2 - a^2)}.$$

Se fizermos $rv_r = \xi(r, \theta, z) + Cz^2/2$, 2-17 se transforma na equação

de Laplace

$$\nabla^2 \xi = 0, \quad (2-18)$$

Em função da nova variável as condições de contorno para ξ são (usando 2-16) :

$$\xi(r, \theta, h) = -Ch^2/2 \quad e$$

$$\xi(r, \theta, 0) = -Vr \cos \theta. \quad (2-19)$$

A equação 2-18 pode ser resolvida aplicando o método da separação de variáveis. Fazendo $\xi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, levando em 2-18 e dividindo a equação por $R\Theta Z$, obtemos

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta} + \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Os dois primeiros termos dependem somente de r e/ou de θ e o último é independente de r e de θ . Isto é possível somente se

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k \quad , \text{ donde}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = kZ \quad (k = \text{constante de separação}). \quad (2-20)$$

Esta equação conduzirá à funções exponenciais se $k > 0$, à funções trigonométricas se $k < 0$ e à funções lineares se $k=0$. Considerando $k=0$, podemos determinar uma expressão que satisfaz 2-18 e 2-19

Para $k=0$ a solução de 2-20 é $Z(z) = Az + B$. De 2-19,

$$\xi(r, \theta, 0) = R\Theta B = -Vr \cos \theta$$

$$\xi(r, \theta, h) = R\Theta(Ah + B) = -\frac{Ch^2}{2}$$

Destas duas equações, $A = \left(\frac{Vr \cos \theta}{h} - \frac{Ch}{2} \right) \frac{1}{R\Theta}$ e $B = -\frac{Vr \cos \theta}{R\Theta}$.

Assim, $\xi(r, \theta, z) = R\Theta Z = \left(\frac{Vr \cos \theta}{h} - \frac{Ch}{2} \right) z - Vr \cos \theta$

$$\text{ou } rv_r = \xi + \frac{Cz^2}{2} = - \frac{Czh}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) - Vr \cos \theta \left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

Como $C = - \frac{2 Mg}{\mu (b^2 - a^2)}$, tem-se, finalmente,

$$rv_r = \frac{Mg h}{\mu (b^2 - a^2)} z \left(1 - \frac{z}{h}\right) - Vr \cos \theta \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (2-21)$$

Esta expressão para o produto rv_r satisfaz à 2-17 e às condições de contorno estabelecidas em 2-16.

A solução para a componente v_θ é obtida de 2-15 e 2-21.

De 2-21 $\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = - V \cos \theta \left(1 - \frac{z}{h}\right)$. Combinando este resultado

com 2-15, resulta $\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = V \cos \theta \left(1 - \frac{z}{h}\right)$ cuja solução é

$$v_\theta = V \sin \theta \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (2-22)$$

que também satisfaz às condições de contorno estabelecidas em 2-19.

Substituindo rv_r da integral 2-11 pela expressão 2-21, obtemos uma relação entre a taxa de escoamento Q e a espessura da película :

$$Q = \frac{Mg \rho h^3}{3\mu (b^2 - a^2)}. \quad (2-23)$$

2.4 A força retardadora

Um puck em movimento encontra resistência somente da película de gás abaixo dele e do ar circunvizinho. A intensidade da força viscosa em cada ponto é proporcional à derivada da componente tangencial da velocidade do escoamento tomada na direção perpendicular à superfície. Cada elemento dA da superfície inferior do

disco experimenta uma força cuja componente na direção do movimento é ³⁸

$$dF_x = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} dA \quad (2-24)$$

onde v_x representa a componente da velocidade do escoamento na direção do movimento. A derivada deverá ser avaliada em $z=h$. Não é necessário considerar a componente perpendicular à linha do movimento, desde que é evidente da simetria do escoamento de ar, que a força resultante naquela direção é nula. v_x pode ser ainda expressa em termos das componentes v_r e v_θ introduzidas na seção 2.3:

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$$

A força total é obtida levando esta expressão em 2-24, substituindo v_r e v_θ por 2-21 e 2-22, respectivamente, e integrando sobre a área da película :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=h} &= \frac{Mg h \cos \theta}{\mu \pi (b^2 - a^2) r} (1 - 2h) + \frac{V}{h} \quad (dA = \frac{b^2 - a^2}{2} d\theta) \\ F_x &= -\mu \frac{Mg h}{\pi \pi (b^2 - a^2) r} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - \mu \frac{V}{h} \frac{b^2 - a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

A primeira integral é zero e a segunda é 2π , portanto

$$F_x = -\mu \frac{V}{h} \pi (b^2 - a^2). \quad (2-25)$$

(A força resultante é a mesma que a experimentada por um puck simplesmente mantido a uma altura constante h acima da mesa num ar parado e movendo-se com uma velocidade V).

De 2-23 e 2-25 obtém-se uma expressão para F_x que é função do fluxo Q :

$$F_x = -V \left[\frac{\pi^3 Mg \rho \mu^2}{3 Q} (b^2 - a^2)^2 \right]^{1/3}. \quad (2-26)$$

Uma consequência interessante da relação de proporcionalidade entre força e velocidade é que o coeficiente de atrito es tático para o puck é estritamente zero. A menos que a superfície sobre a qual ele desliza seja exatamente horizontal (uma condição difícil de se conseguir na prática) um puck livre, colocado sobre ela e abandonado, imediatamente começa a deslizar para a parte in clinada.

Uma outra consequência do fato da velocidade depender da força retardadora é que os efeitos do atrito sobre o movimento do puck não podem ser caracterizados de algum modo simples como, por exemplo, introduzindo um coeficiente de atrito de escorregamento. Desde que a resistência do ar varia com a velocidade de puck, e portanto com o tempo, o erro total introduzido depende, entre ou tras coisas, da duração da experiência e da velocidade inicial do puck. Há, entretanto, uma quantidade com dimensão de tempo, caracterizando a taxa em que a velocidade do puck decresce, que pode ser utilizada para avaliar a conveniência de um puck para uma ex periência particular. Esta constante de tempo aparece naturalmente na equação 2-26. Lembrando que $F_x = Mdv/dt$, 2-26 pode ser es crita como

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{v}{\tau} \quad (2-27)$$

onde $\tau = \left[\frac{3QM^2}{\pi^3 g \rho \mu^2 (b^2 - a^2)} \right]^{1/3} \quad (2-28)$

ou (em termos da espessura da película-eq. 2-23)

$$\tau = \frac{Mh}{\mu \pi (b^2 - a^2)} \quad (2-29)$$

Se τ for constante ou variar muito lentamente, a velocidade V e o deslocamento s do puck podem ser representados ex plicitamente como função do tempo. De 2-27 $dv/v = -dt/\tau$ e portanto $v = v_0 e^{-t/\tau}$. Como $v = ds/dt$, $ds = v_0 e^{-t/\tau} dt$ e $s = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$

onde V_0 é a velocidade inicial. Quando $t/\tau \ll 1$, $s \approx V_0 t$ e $V \approx V_0$. Consequentemente, o puck parece deslizar sem sofrer a influência do atrito toda vez que uma determinada experiência for realizada num tempo pequeno quando comparado com o tempo característico τ .

É evidente da equação 2-28 que podemos aumentar a constante de tempo de um puck i) aumentando o fluxo de ar ou ii) aumentando a massa ou diminuindo a área da película. No segundo caso é preciso aumentar a pressão p_0 na cavidade e a correspondente pressão de ar fornecido pela linha ou pela bomba de ar para manter constante o fluxo ou, então, escolher um valor conveniente para a relação b/a de modo que não seja preciso variar a pressão na cavidade (ver eq. 2-9). Entretanto, estas medidas não podem ir além de um certo limite, pois, quando a área da película é feita muito pequena ou o fluxo muito grande, a flutuação do disco torna-se instável ³⁹.

CAPÍTULO III

OS CIRCUITOS MAGNÉTICOS

3.1. Os materiais magnéticos

Observações experimentais têm mostrado que certos materiais quando colocados num campo magnético reagem ao campo modificando-no. Este fenômeno é chamado magnetização e os materiais que exibem esta propriedade são conhecidos como materiais magnéticos.

O grupo dos materiais magnéticos denominado ferromagnético, que inclui o ferro, o níquel, o cobalto e um número cada vez maior de ligas desses elementos mais impurezas como silício e carbono, por exemplo, é o que tem, entre outros, maior interesse para a engenharia elétrica, uma vez que a maioria dos dispositivos eletromagnéticos práticos utilizam materiais desse grupo na sua construção. Tais materiais são caracterizados por uma possível magnetização permanente e pelo fato de sua presença ter, frequentemente, um profundo efeito sobre a indução magnética $\vec{B}$.

Considere-se o toroide da fig. 3.1. envolvido por N espiras uniformemente distribuídas.

Fig. 3.1

Por simetria as linhas de $\vec{B}$ formam círculos concêntricos dentro do toroide, como mostra a fig. 3.1. Se o núcleo for de ar ou de

material não magnético e se $r_m \gg d$ o módulo de $\vec{B}$ em qualquer ponto no interior do núcleo será dado por

$$B_0 = \mu_0 H \text{ onde } H = \frac{NI}{2\pi r_m} \quad (3-1)$$

B_0 = indução magnética (ou densidade de fluxo magnético) em wb/m^2

H = campo magnetizante (ou campo magnético) em A/m

μ_0 = permeabilidade magnética do vácuo. Seu valor é $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}/\text{m}$.

(Este também é, aproximadamente, o valor adotado para a permeabilidade magnética do ar ou outro material não magnético).

A indução magnética, neste caso, é proporcional à intensidade do campo magnetizante H . Se se substitui o núcleo de material não magnético por um outro de material ferromagnético, mantendo inalterada a corrente I , as medidas indicam que a indução magnética será muito maior que B_0 e dada pela expressão $B = \mu H$ (3-2) onde μ é denominado a permeabilidade do material. Para os materiais ferromagnéticos μ é uma quantidade variável e, normalmente, muito maior que μ_0 (da ordem de 10^2 a 10^6 vezes maior).

É costume definir, ainda, a quantidade adimensional μ_r , chamada permeabilidade relativa, dada pela expressão $\mu_r = \mu/\mu_0$. Com esta definição, 3-2 pode ser escrita como $B = \mu_r \mu_0 H = \mu_r B_0$. Esta equação diz que, se se substitui o núcleo de material não magnético do toroide por um outro de material ferromagnético enquanto se mantém inalterado o campo magnetizante H , a indução magnética B fica multiplicada por um fator μ_r que é da ordem de 10^2 a 10^6 . Isto acontece porque o material ferromagnético é dividido em pequenas regiões (com dimensões da ordem de 10^{-2} a 10^{-5} cm), chamadas domínios ou domínios magnéticos^{40,41}, em cada uma das quais todos os momentos magnéticos atômicos estão alinhados em rígido paralelismo às custas de uma forma especial de interação entre átomos vizinhos, denominada acoplamento de troca (um fenômeno

puramente quântico). Dentro de cada domínio todos os momentos de dipolos magnéticos são paralelos, mas a direção do alinhamento varia de domínio para domínio, de modo que o material, como um todo, pode ter momento magnético resultante nulo. Quando se submete uma amostra desse material à ação de um campo magnético as fronteiras dos domínios deslocam-se e a direção do conjunto de dipolos magnéticos dentro deles tende a alinhar-se com a direção do campo externo; aparece assim um momento magnético resultante na direção do campo aplicado e diz-se que a amostra está magnetizada. Uma vez que o grau de alinhamento é grande, mesmo quando, em alguns casos, o campo externo é pequeno, o campo magnético induzido será muitas vezes maior que o campo aplicado.

Mas o que acontece quando o campo magnetizante H cresce? O momento magnético adquirido por uma amostra quando submetida a um campo externo é responsável pelo aparecimento de um grande número de novas linhas de indução que são adicionadas àquelas do campo aplicado. Isso pode ser expresso pela equação

$$\vec{B} = \vec{B}_O + \vec{B}_M \quad (3-3)$$

onde $\vec{B}_O = \mu_0 \vec{H}$ representa a indução devida ao campo magnetizante $\vec{H}$ e $\vec{B}_M$ a indução devida à magnetização da amostra. A experiência revela que, iniciando com $H = 0$ e com uma amostra desmagnetizada, o aumento de H causa um aumento de B_M de uma forma visivelmente não linear; devagar a princípio, depois mais rapidamente e então muito vagarosamente, até nivelar-se de vez, quando se diz que se atingiu o estado de saturação (fig. 3.2).

Fig. 3.2

A fase inicial (correspondente às regiões I e II da fig. 3.2) é governada pelo movimento das fronteiras dos domínios, i.e., pelo crescimento dos domínios que já estavam favoravelmente orientados (com relação ao campo aplicado) às custas dos demais. Na fase correspondente à região III a direção de magnetização dos domínios que ainda não estão paralelos ao campo aplicado é girada gradualmente para a direção do campo; esta é a fase mais difícil e podem ser necessários campos muito fortes para se atingir a saturação. Quando a saturação é iniciada, μ começa a cair tendendo rapidamente para o valor limite μ_0 , quando então o material passa a comportar-se como se fosse não magnético. Isto pode ser entendido de modo mais claro pela análise da equação 3-3

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_M = \mu \vec{H}.$$

Para materiais ferromagnéticos e para H moderado, $B_M \gg B_0$ (normalmente) de modo que $B \approx B_M$. Quando H cresce, a parcela B_M contribui para aumentar a soma B até atingir o seu valor máximo; a partir daí, B crescerá com H mas agora às custas da contribuição da parcela B_0 . Assim, para H muito grande, $B \rightarrow B_0$ ou $\mu H \rightarrow \mu_0 H$, o que significa dizer que $\mu \rightarrow \mu_0$.

Uma vez cessado o campo magnetizante $\vec{H}$, os domínios no interior da amostra permanecem orientados em maior ou menor grau,

ou seja, subsiste ainda uma indução magnética (indução residual ou remanente). A indução remanente depende do valor máximo de H aplicado e da natureza do material e para eliminá-la é preciso aplicar um campo (campo coercitivo ou coercivo) no sentido contrário aquele do campo inicial. A explicação para este fenômeno é que o processo de movimentação das paredes dos domínios não é, em geral, um processo reversível. A fig. 3.3 mostra a natureza das transformações, quanto ao aspecto da reversibilidade, correspondentes às três regiões de uma curva de magnetização inicial.

Fig. 3.3

3.2. Histerese - Materiais macios e duros

Considere-se o toroide da seção anterior com núcleo de material ferromagnético. Se o campo aplicado for aumentado e em seguida diminuído, a indução magnética $\vec{B}$ diminui também, mas não tão acentuadamente quanto havia aumentado ao longo da curva de magnetização inicial. Este fenômeno, conhecido como histerese, acontece porque, como foi dito, o deslocamento das paredes dos domínios não é um processo reversível. Se o campo H variar entre os valores extremos $+H_0$ e $-H_0$, o ponto de coordenadas (B, H) descreverá no diagrama $B - H$ uma curva fechada e simétrica, conhecida como ciclo de histerese (fig. 3.4). Se H_0 for suficiente para saturar o núcleo, o ciclo é chamado ciclo principal. A indução remanente B_r no ciclo principal é denominada retentividade e o campo

coercitivo H_c necessário para eliminá-la, coercitividade.

Fig. 3.4

Assim a retentividade e a coercitividade de uma substância ferromagnética são, respectivamente, os valores máximos que a indução remanente e o campo coercitivo podem atingir num ciclo de histerese.

Os materiais ferromagnéticos se diferenciam muito pela facilidade com que podem ser magnetizados e desmagnetizados e por isso costumam ser classificados em dois grandes grupos: materiais macios e duros. O material magneticamente macio é aquele que pode ser magnetizado facilmente, isto é, tem uma alta permeabilidade, uma pequena coercitividade e um ciclo de histerese estreito. O material magneticamente duro requer campo magnético intenso para ser magnetizado e retém bastante sua magnetização; apresenta uma grande retentividade e coercitividade e, conseqüentemente, um ciclo de histerese largo. A grande diferença, contudo, entre materiais macios e duros jaz na coercitividade que num material duro pode ser da ordem de 10^4 vezes maior que num macio, ao passo que as retentividades dos dois tipos de materiais são, em geral, da mesma ordem de grandeza.

Os aços temperados, o aço-cromo e certas ligas de ferro, alumínio, níquel, cobalto e cobre, conhecidas genericamente como ALNICOS, são exemplos de materiais magneticamente duros; todos

eles são apropriados para a confecção de ímãs permanentes. Os materiais magneticamente macios incluem, entre outros, o ferro e aço doces, o aço-silício e ligas ferro-níquel do tipo PERMALLOY; são usados em circuitos magnéticos de uma grande variedade de equipamentos elétricos (motores elétricos, geradores, transformadores, eletroímãs etc.) onde é essencial uma indução magnética grande às custas de um campo magnetizante pequeno.

3.3 Desmagnetização

A intensidade da indução magnética associada a magnetização remanente não é, de forma alguma, desprezível na maioria dos materiais ferromagnéticos. Mesmo usando um material comum como o aço SAE 1020 (0,2% de carbono), considerado macio do ponto de vista magnético, pode-se conseguir uma indução remanente da ordem de 10^3 vezes maior que a indução associada ao campo que deu origem à magnetização da amostra. A experiência revela, contudo, que, dependendo da forma da amostra, a magnetização remanente pode desaparecer mesmo que não se tenha aplicado campo coercitivo; é como se tivesse havido uma desmagnetização espontânea. Por que isso acontece ?

Na equação $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M$, que dá a indução no interior do núcleo de material ferromagnético (fig. 3.1), $\vec{B}_0$ está associado ao campo magnetizante $\vec{H}$ que é gerado às custas de uma corrente de condução. $\vec{B}_M$ está associado ao momento magnético adquirido pelo núcleo, quando submetido ao campo $\vec{H}$, e também pode ser relacionado às correntes, mas agora a anéis de correntes elementares (associados a movimentos de elétrons). Como em geral, nos materiais ferromagnéticos longe do estado de saturação $\vec{B}_M \gg \vec{B}_0$, pode-se dizer que a indução associada a essas correntes elementares é χ_m vezes maior que a indução associada à corrente que gerou $\vec{H}$ (χ_m é

denominado susceptibilidade do material). Ou seja:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \vec{B}_0 + \chi_m \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 (\chi_m \vec{H}).$$

O vetor $\chi_m \vec{H} = \vec{M}$ é denominado vetor momento magnético por unidade de volume e seu módulo é dado por A/m. Usando esta definição, a última equação transforma-se em:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (3-4)$$

Cessado $\vec{H}$, resta uma indução remanente $\vec{B}_r$ e uma magnetização remanente $\vec{M}_r$ relacionadas pela equação

$$\vec{B}_r = \mu_0 \vec{M}_r. \quad (3-5)$$

No caso em que o circuito de material ferromagnético é fechado, como no exemplo que vem sendo tratado, a indução remanente é mantida ao longo do tempo, quer o material do núcleo seja macio ou duro. Como será visto a seguir, isto é devido à inexistência de cargas magnéticas que têm um efeito desmagnetizante sobre a amostra*.

A equação 3-4, ainda que desenvolvida para o caso especial do toroide, é uma relação de aplicação mais geral e é, na realidade, adotada como definição de $\vec{H}$. Nas discussões anteriores o campo $\vec{H}$ foi gerado às custas de uma corrente de condução mas em outros casos pode originar-se de cargas magnéticas (fictícias). Tomando a divergência de 3-4 e considerando que $\text{div} \vec{B} = 0$, resulta

$$\text{div} \vec{H} = - \text{div} \vec{M}. \quad (3-6)$$

* É para evitar o efeito desmagnetizante que se prefere usar amostras em forma de anel, quando se pretende levantar curvas de histerese.

Se a divergência de um campo vetorial não é nula, o campo tem uma fonte. A equação 3-6 revela que o campo $\vec{H}$, se tiver uma fonte, começa onde a magnetização $\vec{M}$ termina e que $\vec{H}$ termina onde $\vec{M}$ começa. Há alguma configuração para a amostra em que isso acontece? A resposta é sim: basta, por exemplo, retirar uma pequena fatia do toroide como mostra a fig. 3-5b.

Fig. 3.5a

Fig. 3.5b

Se, por exemplo, o núcleo tiver uma magnetização remanente, aparecerão cargas magnéticas nas vizinhanças do entreferro que se comportarão como fontes de $\vec{H}$. $\vec{B}_r$, por sua vez, continuará existindo, a menos que os domínios tenham perdido totalmente sua orientação original ao se retirar a fatia do material. Seja $\vec{H}_p$ o campo associado às cargas magnéticas. Como $\vec{H}_p$ começa onde $\vec{M}_r$ termina e $\vec{M}_r$ tem o mesmo sentido de $\vec{H}$, que deu origem à magnetização da amostra, $\vec{H}_p$ e $\vec{H}$ têm sentidos opostos; por isso $\vec{H}_p$ é denominado campo desmagnetizante e é responsável por uma indução $\mu_0 \vec{H}_p$ oposta à indução $\vec{B}_r = \mu_0 \vec{M}_r$. A indução resultante será dada então por

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_p + \vec{B}_r. \quad (3-7)$$

Se a corrente na bobina que envolve o núcleo for diferente de zero, o resultado será essencialmente o mesmo; $\vec{B}_r$, apenas, na eq. 3-7 será substituído por $\vec{B}_M$ (indução associada à magnetização da amostra) e a $\vec{H}_p$ será adicionado $\vec{H}$, dado por 3-1.

Resumindo: a introdução do entreferro exerce uma ação de desmagnetização sobre o núcleo, porque permite o aparecimento de um campo

que atua no sentido de desorientar os domínios que estavam parcialmente orientados, e acarreta uma diminuição do fluxo de $\vec{B}$ atravessando o núcleo.

O efeito desmagnetizante depende do entreferro e, na ausência deste, da forma da amostra. Numa vareta magnetizada no sentido longitudinal o efeito é muito mais pronunciado que no toroide com entreferro e, entre duas varetas de comprimentos diferentes, é mais pronunciado na vareta curta; num disco plano com cargas magnéticas nas faces o efeito é ainda mais pronunciado.

Cessado $\vec{H}$, o campo desmagnetizante que atua numa certa amostra pode ser mais que suficiente para desmagnetizá-la quase que totalmente, se o material for macio; neste caso diz-se que houve uma desmagnetização espontânea*.

Do exposto conclui-se que uma maneira de evitar o efeito desmagnetizante é oferecer para as linhas de indução um caminho fechado de material ferromagnético.

3.4 Os circuitos magnéticos

Numa bobina toroidal uniformemente enrolada o fluxo de $\vec{B}$ permanece quase que inteiramente dentro da bobina, quer o núcleo seja de ar quer seja de material ferromagnético. Se as espiras não forem uniformemente distribuídas mas a permeabilidade do material for elevada, o fluxo ainda permanecerá substancialmente inalterado ao longo do núcleo ⁴². Portanto, toda vez que μ for suficientemente grande, é possível substituir um núcleo uniformemente enrolado (fig. 3.6a) por um outro com enrolamento concen -

* Mesmo os melhores materiais magneticamente duros podem perder gradualmente sua magnetização remanente se não se procurar evitar o aparecimento de cargas magnéticas ou minimizar os seus efeitos.

trado (fig. 3.6b) pois, neste caso, as duas configurações são praticamente equivalentes.

Fig. 3.6a

Fig. 3.6b

O que acontecerá, entretanto, se a geometria do núcleo for retangular ? (fig. 3.7)

Fig. 3.7

Ainda neste caso pode-se admitir que todas as linhas de indução permanecem dentro do núcleo, ou seja, que não há fugas magnéticas* (ver Apêndice I). Esta aproximação é quase sempre possível toda vez que se trabalha com material de alta permeabilidade e longe do estado de saturação (quando então $\mu \rightarrow \mu_0$).

O caminho seguido pelo fluxo dentro do ferro (ou outro material ferromagnético) costuma ser chamado de circuito magnético. O conceito de circuito magnético está fundamentado na idéia de que a maior parte do fluxo de $\vec{B}$ num sistema magnético tende a confinar-se nos caminhos de alta permeabilidade do sistema, da mesma maneira que a corrente elétrica tende a confinar-se nos caminhos de alta condutividade de um circuito elétrico. O concei

* A designação de permeabilidade ao coeficiente μ está justamente ligada ao fato do material ferromagnético ser mais permeável ao fluxo de indução que o ar.

to de circuito não é, contudo, tão preciso nos sistemas magnéticos quanto o é nos sistemas elétricos equivalentes, porque os "isolantes" magnéticos não são, nem de longe, tão eficientes quanto os isolantes elétricos.

A explicação para isso é que a razão da condutividade de um isolante elétrico típico para a condutividade elétrica de um bom condutor é da ordem de 10^{-22} , enquanto que num sistema magnético a razão da permeabilidade do ar (o "isolante" magnético mais comum) para a permeabilidade de um material ferromagnético típico é, nos casos usuais, da ordem de 10^{-3} . Desta maneira, num circuito elétrico a corrente está praticamente toda confinada em caminhos condutores pré-estabelecidos, enquanto que num sistema magnético há uma considerável tendência do fluxo dispersar-se em todas as direções. O sistema magnético é então mais precisamente tratado antes como um problema de campo que um de circuito. Entretanto, sob circunstâncias apropriadas, a dispersão do fluxo magnético ou fuga magnética, como é frequentemente chamada, pode ser mantida a níveis razoáveis e a situação pode ser tratada como um problema de circuito. Desde que as técnicas de análise de circuito são relativamente simples e frequentemente bem conhecidas, há uma grande vantagem em tratar problemas magnéticos em termos de conceitos de circuitos.

Para demonstrar a analogia entre circuitos elétricos e magnéticos, consideremos um anel de material ferromagnético de alta permeabilidade (fig.3.8).

Fig. 3.8

Vamos admitir que as linhas de indução se encontrem inteiramente dentro do anel e que as dimensões do anel sejam tais que o módulo de $\vec{B}$ possa ser considerado constante em cada ponto de uma dada

seção de área S^* . Aplicando o teorema de Ampère à linha de indução ℓ , resulta:

$$\oint H d\ell = NI \text{ onde } d\ell \text{ é um elemento de comprimento da linha.}$$

O fluxo de indução, constante ao longo de todo o tubo, é dado por $\phi = B.S = \mu H.S$ e o campo magnetizante por $H = \phi / \mu S$. Combinando estes resultados e tendo em vista que o fluxo é constante ao longo de todo o tubo tem-se:

$$\phi = \frac{NI}{\oint d\ell / \mu S} \quad (3-8)$$

O numerador dessa expressão (fórmula de Hopkinson) pode ser considerado como caracterizando a causa que produz o fluxo: é a força magnetomotriz F . Ela se exprime em ampère no sistema prático. O denominador caracteriza o tubo de indução considerado; é denominado sua relutância (R). No sistema prático R se exprime em H^{-1} . Com estas definições 3-8 pode ser escrita como

$$\phi = F / R \quad (3-9)$$

que lhe dá uma forma que relembra a expressão da lei de Ohm $I = \epsilon / R$. A força magnetomotriz faz o papel da força eletromotriz, a relutância o da resistência e o fluxo o da corrente elétrica. Em outras palavras: a força magnetomotriz F causa a circulação de um fluxo ϕ através de um circuito de relutância R da mesma maneira que a força eletromotriz ϵ causa a circulação de uma corrente I através de uma certa resistência R .

Para um tubo de indução homogêneo ($\mu = \text{constante}$) e de seção constante a relutância $R = \ell / \mu S$ tem uma expressão análoga àquela da resistência de um condutor linear homogêneo ($R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\sigma S}$)

* Para uma situação mais geral ver Durand⁴³.

o que mostra que a permeabilidade μ representa para o fluxo magnético o mesmo que a condutividade σ para a corrente elétrica.

Estas noções podem ser estendidas para casos mais gerais. Considere um circuito magnético formado por vários pedaços de material ferromagnético de comprimentos $\ell_1, \ell_2, \dots$, seções $S_1, S_2, \dots$ e permeabilidades $\mu_1, \mu_2, \dots$ (fig. 3.9). Apesar da forma, vamos admitir que o fluxo de indução é constante ao longo de todo o circuito, o que significa dizer que não há fugas magnéticas.

Fig. 3.9

Nos diversos pedaços o campo H tem, respectivamente, os valores

$$H_1 = \phi / \mu_1 S_1, \quad H_2 = \phi / \mu_2 S_2, \quad \dots$$

e sua circulação ao longo do circuito magnético é

$$H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + \dots = \phi \left(\frac{\ell_1}{\mu_1 S_1} + \frac{\ell_2}{\mu_2 S_2} + \dots \right) = NI \quad (3-10)$$

ou $\phi = F/R$ se fizermos $R = R_1 + R_2 + \dots$ (fórmula análoga àquela para se determinar a resistência equivalente de um conjunto de resistores em série).

De uma maneira mais geral, a relutância de um tubo de indução limitado por duas superfícies S_1 e S_2 (fig. 3.10) é definida por :

$$R_k \equiv \frac{V_k}{\phi_k} \quad (3-11)$$

Nesta expressão,

$$V_k \equiv \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (3-12)$$

Fig.3.10

é definido como a diferença de potencial magnético entre as faces do tubo de indução : ϕ_k é o fluxo atravessando o tubo. Usando esta linguagem, a equação 3-10 nos diz que " a soma das diferenças de potenciais magnéticos em um circuito fechado é igual à força magnetomotriz", situação análoga a uma das leis de Kirchhoff para circuitos elétricos. (Com o auxílio do conceito de diferença de potencial magnético é possível mostrar, ainda, que a relutância equivalente de duas ou mais relutâncias em paralelo segue a mesma lei que permite calcular a resistência equivalente de resistores em paralelo).

As fugas magnéticas também podem ser tratadas em termos de elementos de circuitos. Na fig. 3.11 o fluxo gerado pela bobina excitadora pode seguir o caminho 1 no ferro ou o caminho 2 em paralelo no ar. Como a relutância de um tubo de indução no ferro é muito menor que a relutância de um tubo de indução (de mesmas dimensões) no ar, o fluxo prefere seguir antes o caminho 1 que o 2. Entretanto, como a relutância de um tubo no ar é grande mas não infinita, sempre haverá algum fluxo atravessando o ar, o que acarreta imprecisões nos cálculos de circuitos magnéticos.

Fig. 3.11

3.5 Circuitos magnéticos com entreferro

Seja um anel de ferro, de seção constante S e comprimento l , com um entreferro de espessura x , como mostra a fig. 3.12.

Fig. 3.12

Se o entreferro for estreito, as linhas de indução sofrem muito pouca dispersão ao atravessá-lo; esta é uma hipótese satisfatória quando $x^2 \ll S$ (fig. 3.13a). Quando esta condição é satisfeita, pode-se admitir que a seção do tubo no entreferro também é S ; em caso contrário (fig. 3.13b) a seção a se admitir deve ser maior que S e é calculada mediante regras práticas⁴⁵.

Fig. 3.13a

Fig. 3.13b

Quando $x^2 \ll S$, a relutância do entreferro, onde a permeabilidade é μ_0 , é $R_e = x/\mu_0 S$ e do ferro, cujo comprimento é

ℓ , é $R_{fe} = \ell / \mu_s$. A relutância total do circuito magnético é $R = x / \mu_0 S + \ell / \mu_s$, pois estão em série. O fluxo, dado pela equação 3-9, é:

$$\phi = \frac{NI}{R_e + R_{fe}}$$

Imaginando que a lâmina de ar no entreferro é substituída por outra de ferro e de dimensões idênticas, o fluxo será dado por

$$\phi' = \frac{NI}{R' + R_{fe}}$$

onde R' simboliza a relutância da lâmina de ferro de espessura x e seção S . Das duas relações anteriores e do fato de $R_e = x / \mu_0 S$ ser maior que $R' = x / \mu_s$ conclui-se que ϕ é menor que ϕ' , o que mostra que a introdução de um entreferro num circuito alimentado por uma força magnetomotriz NI sempre reduz o fluxo, resultado já encontrado na seção 3.3.

Segundo a equação 3-11, as diferenças de potencial magnético no entreferro e no ferro são respectivamente $v_e = R_e \phi$ e $v_{fe} = R_{fe} \phi$. Daí,

$$v_e = \frac{R_e}{R_{fe}} v_{fe} \quad (3-13)$$

Se $R_e / R_{fe} \gg 1$, praticamente toda a força magnetomotriz (NI) estará aplicada no entreferro pois, neste caso, $v_e + v_{fe} = NI \approx v_e$. Esta condição é, em geral, satisfeita na construção de eletroímãs onde se tem entreferros da ordem do milímetro. (Por exemplo, para $x/\ell \approx 1/50$ e $\mu_r \approx 5000$, $R_e / R_{fe} = \mu_r x / \ell \approx 100$, ou seja, $v_e \approx$

100v_{fe}*). Mesmo entreferros da ordem de décimos de milímetros podem absorver frações apreciáveis da força magnetomotriz, por isso os encaixes de peças na construção de circuitos magnéticos devem ser feitos com extremo cuidado para evitar o aparecimento de entreferros desnecessários.

Se o entreferro for um pouco largo e se o ferro estiver longe do estado de saturação, de modo que a permeabilidade magnética seja elevada, a relutância total (R) do circuito magnético será praticamente igual à relutância do entreferro. Neste caso o fluxo de indução, dado por $\phi = NI/R \approx (1/R_e).NI$, será basicamente governado pela relutância do entreferro que é constante (pois a permeabilidade do ar é constante). Ou seja: o fluxo é quase proporcional à força magnetomotriz ou à corrente. Nestas condições pode-se atribuir um coeficiente de auto-indução (L) às espiras envolvendo o ferro (definido pela relação $L = N\phi/I$), sem que se esteja fazendo com isso uma aproximação muito grosseira.

3.6. Força sobre a armadura de um eletroímã

A fig. 3.14 é um corte longitudinal de um eletroímã de corpo colíndrico; a peça móvel M é a sua armadura. Este sistema constitui um circuito com pouca fuga magnética.

Fig. 3.14

Admitindo-se que a relutância do ferro é desprezível, quando com-

* Da eq. $R_e/R_{fe} = \mu_r x/l$, vê-se que, quando há interesse em se manter $R_e/R_{fe} \gg 1$, é preciso ter μ_r elevado, ou seja, deve-se trabalhar longe do estado de saturação do material.

parada com a do entreferro, pode-se atribuir às espiras envolvendo o ferro um coeficiente de auto-indução (L), pois o fluxo de indução é, neste caso, quase proporcional à corrente I . Então $N\phi = LI$. Por outro lado, de 3-9, $NI = R\phi$ onde R é a relutância do circuito magnético. Combinando estas relações, resulta

$$L = \frac{N^2}{R} \quad (3-14)$$

Expressa em função de L , a energia armazenada no campo magnético ã dada por $0,5Li^2$ e está concentrada praticamente no entreferro*.

As cargas magnéticas que aparecem nas vizinhanças das faces do entreferro exercem forças umas sobre as outras. Qual é a força exercida pelo núcleo sobre a armadura? A energia fornecida pela bateria de força eletromotriz ϵ é dissipada na bobina de resistência R , na forma de calor (Ri^2dt), armazenada no campo magnético (dW) e convertida em trabalho mecânico (Fdx). A equação do balanço de energia do sistema dado, cobrindo o intervalo de tempo dt em que a armadura sofre um deslocamento dx , é:

$$\epsilon idt = Ri^2dt + dW + Fdx. \quad (3-15)$$

A força eletromotriz ϵ é igual à queda de potencial Ri na resistência R mais a queda de potencial $d(Li)/dt$ na bobina:

* Se o campo não sofre dispersão no entreferro a indução $\vec{B}$ é a mesma no ferro e no entreferro e a densidade de energia em ambos é respectivamente $B^2/2\mu$ e $B^2/2\mu_0$. Como μ é da ordem de $10^3\mu_0$, em geral, a maior parte da energia associada ao campo magnético estará armazenada no entreferro mesmo que o ferro venha a ocupar muito maior volume. Portanto é possível, em muitos casos, desprezar a energia armazenada no ferro, preocupando-se apenas com aquela no entreferro onde todas as relações são estritamente lineares.

$$e = Ri + d(Li)/dt \quad (3-16)$$

(o operador d/dt deve atuar no produto Li pois tanto L quanto i são variáveis, neste caso). A energia fornecida pela bateria é :

$$e idt = \left[Ri + \frac{d(Li)}{dt} \right] idt = Ri^2 dt + Lidi + i^2 dL.$$

A variação no tempo dt da energia armazenada é, por sua vez,

$$dW = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Li^2) dt = Lidi + \frac{1}{2} i^2 dL.$$

Substituindo $e idt$ e dW da equação 3-15 pelos dois últimos resultados tem-se :

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (3-17)$$

Desde que i^2 é sempre positivo, o sinal da força deve depender do fato da indutância crescer ou decrescer enquanto x está aumentando. Em outras palavras, a força que atua na armadura age no sentido em que a indutância é aumentada. No caso da fig. 3.14 a indutância aumenta quando x diminui*, por isso a força é de atração.

Há uma outra fórmula que relaciona F com o fluxo, que será de interesse. Derivando-se 3-14 em relação a x tem-se:

$$\frac{dL}{dx} = - \frac{N^2}{R^2} \frac{dR}{dx} \quad (3-18)$$

* Fechando-se o entreferro diminui-se a relutância do circuito, pois o fluxo aumenta; conseqüentemente aumenta-se L , desde que, por 3-14, $L = N^2/R$.

Combinando este resultado com 3-17, resulta:

$$F = - \frac{(Ni)^2}{2R^2} \cdot \frac{dR}{dx} = \frac{-(R\phi)^2}{2R^2} \cdot \frac{dR}{dx}, \quad \text{ou seja}$$

$$F = - \frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR}{dx}. \quad (3-19)$$

Admitindo que a relutância do circuito magnético é somente aquela associada ao entreferro, pode-se deduzir uma outra fórmula útil relacionando F com x . $R \approx R_e = x/\mu_0 S$. De 3-18 obtém-se $dL/dx = -\mu_0 SN^2/x^2$. Levando este resultado para a equação 3-17, obtém-se

$$F = - \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2 i^2 S}{x^2} \quad (3-20)$$

O sinal negativo indica que a força atua no sentido oposto ao do eixo x na fig. 3-14.

As equações deduzidas nesta seção devem ser utilizadas com uma certa cautela, pois muitas aproximações foram realizadas. Contudo, para a maioria das situações práticas, elas são suficientes; quando não é assim, elas podem, pelo menos, ajudar a quem se decide construir ou otimizar um certo dispositivo a perceber quais os parâmetros relevantes. Quando as fugas magnéticas, por exemplo, não puderem ser desprezadas, como é o caso no cálculo de um relê de precisão, outros métodos ou outras fórmulas deverão ser empregadas⁴⁶. Situações em que não se pode obter uma solução pelo cálculo direto, equações mais gerais e outros dispositivos (que não eletroímãs) são discutidos em textos de eletromecânica^{47,48}.

CAPÍTULO IV

O MODELO M-1 : PROJETO E CONSTRUÇÃO

4.1 O modelo M-0

O primeiro puck construído pelo autor (modelo M-0) e descrito no primeiro capítulo não era totalmente satisfatório do ponto de vista do funcionamento.

- i) O circuito eletrônico apresentou problemas; às vezes funcionava outras não.
- ii) A corrente média exigida para um bom funcionamento do sistema oscilante mostrou-se muito elevada (cerca de 400 a 500mA) para pilhas de lanterna (4 pilhas de tamanho médio de 1,5 volts) o que provocava um desgaste prematuro das mesmas e um aquecimento elevado do transistor de potência BD139 do sistema de amplificação do circuito eletrônico esquematizado na fig.1.9.
- iii) O ajuste que permitia à caneta oscilar de uma maneira adequada mostrou-se crítico; o sistema oscilante não se mantinha ajustado nem de uma experiência para outra e nem mesmo durante uma única experiência.

A primeira fase de nosso trabalho consistiu então em identificar as causas e tentar solucionar cada um desses problemas.

4.2. Como otimizar o modelo M-0

4.2.1 O circuito eletrônico

O componente fundamental do circuito eletrônico esquema

tizado na fig. 1.9 é o CI7400 que exige uma tensão de alimentação relativamente constante. Todavia, quando o sistema solicita corrente média alta, em pouco tempo de uso as pilhas deixam de fornecer a tensão necessária para alimentar o circuito, impedindo-o de funcionar adequadamente. Embora esta dificuldade possa ser minorada, reduzindo a corrente média de trabalho, optou-se por um outro circuito (fig. 4.1) que tem como componente fundamental um CI555, membro de uma família mais avançada de circuitos integrados.

Esse circuito gera pulsos de tensão na forma de onda quadrada com uma frequência entre 15 e 100 hertz e sua principal vantagem, em relação ao anterior, é a tensão de alimentação que pode variar entre 4 e 9 volts sem criar problemas para o seu funcionamento e sem alterar sensivelmente a estabilidade da frequência do sinal de saída. Vários desses circuitos têm trabalhado meses sem apresentar qualquer problema.

Fig. 4.1 Circuito gerador de pulsos.

4.2.2 O circuito magnético

Resolvida a questão do circuito, restava reduzir a corrente que continuava aquecendo, desnecessariamente, o transistor

de potência. Aumentar o número de espiras e consequentemente a resistência da bobina foi a primeira solução tentada, mas os resultados não foram satisfatórios. Na verdade o problema residia, do ponto de vista da força sobre a armadura M (fig. 4.2), na baixa eficiência do circuito magnético associado ao sistema eletromecânico do projeto inicial.

A força F de atração sobre a armadura pode ser dada pela equação 3-19,

$$F = - \frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR}{dx}$$

ou, lembrando que $\phi = Ni/R$, por

$$F = - \frac{1}{2} \frac{(Ni)^2}{R^2} \frac{dR}{dx}.$$

Fig. 4.2

A relutância total (R) do circuito magnético é a soma da relutância do núcleo (R_n), do entreferro (R_e) e do ar (R_{ar}) na região exterior ao entreferro. A relutância do núcleo é desprezível (quando comparada com as outras) e a relutância do ar pode ser considerada constante, pois permanece praticamente inalterada à medida que a espessura do entreferro varia. Destas considerações podemos escrever $R \approx R_{ar} + R_e$ e $dR/dx = dR_e/dx$. A força na posição $x = x_0$ será dada então por

$$F = - \frac{1}{2} \frac{(Ni)^2}{(R_{ar} + R_e)^2} \cdot \frac{dR_e}{dx} \Big|_{x = x_0}. \quad (4-1)$$

Se acrescentarmos uma carcaça de material ferromagnético (fig. 4.3) ao eletroímã da fig. 4.2, a força F' será dada por

$$F' = \frac{1}{2} \frac{(Ni)^2}{R_e^2} \frac{dR_e}{dx} \Big|_{x=x_0} \quad (4-2)$$

pois, neste caso, $R \approx R_e$ (seção 3.5).

De 4-1 e 4-2 resulta:

$$F/F' = \left[R_e / (R_{ar} + R_e) \right]^2 < 1 \quad \text{ou}$$

$$F < F'.$$

Desta forma, a introdução da carcaça no sistema representado pela fig. 4.2 faz aumentar a força sobre a armadura e, como a experiência nos tem mostrado, de uma maneira bastante acentuada.

A construção de um circuito magnético semelhante ao da fig. 4.3 retira, evidentemente, um pouco da simplicidade do projeto original mas, por outro lado, permite trabalhar com correntes médias entre 150 e 200 mA; isto elimina o aquecimento desnecessário do transistor de potência. Além disso, uma corrente média dessa ordem é perfeitamente suportável por pilhas médias de lanternas, pois elas são feitas para alimentar pequenas lâmpadas que solicitam entre 200 mA (lâmpada de 1,5v) e 350 mA (lâmpada de 4,5v).

A força magnetomotriz necessária dependerá da amplitude desejada para a oscilação da caneta e da constante elástica da mola que garante a força restauradora ao sistema oscilante.

4.2.3 O número de espiras (N)

Quando escolhemos o número de espiras da bobina da versão M-0, apenas a experiência e a intuição nos guiaram. Na verda-

Fig. 4.3

de não há uma regra bem definida para fazer essa escolha, mas, no nosso caso, é possível sugerir um roteiro que permite estabelecer N de maneira aproximada.

- i) Escolhem-se as dimensões do circuito magnético tendo em vista o tamanho da caneta, o espaço e os materiais disponíveis para a construção das diversas partes, a ordem de grandeza da força desejada, a massa total do sistema etc.
- ii) A força magnetomotriz pode ser determinada, por tentativa, como segue. Enrola-se uma bobina com um número arbitrário de espiras (N') = 400 espiras de fio nº 28, por exemplo. Ligando-se o circuito gerador de pulsos na bobina e variando-se a tensão de alimentação determina-se a corrente média que dá uma amplitude de oscilação suficiente para a caneta marcar pontos bem definidos sobre uma folha de papel.

A força magnetomotriz é dada por $N' \cdot i_{\text{máx}}$. A corrente máxima pode ser adotada como sendo igual ao dobro da corrente média, pois observando-se os pulsos de tensão num osciloscópio nota-se que os intervalos de tempo durante os quais o circuito permanece ligado ou desligado são grosseiramente iguais (para frequência de 25 hertz). Com esta aproximação tem-se

$$F = N' \cdot i_{\text{máx}} = N' \cdot (2i_m)$$

(Para um dos nossos protótipos a força magnetomotriz que se mostrou adequada foi cerca de 200 ampères).

- iii) Conhecida a força magnetomotriz e fixada a corrente média a ser usada, determina-se o número de espiras (N). Estabelecendo, por exemplo, uma corrente média de trabalho de 180mA, tem-se, da relação $F = N \cdot (2i_m)$, $N = 555$ espiras.

- iv) A resistência dessa bobina é calculada a partir da corrente

média e da tensão de alimentação. Assim, se a tensão de alimentação for fornecida por 3 pilhas de 1,5V e se admitirmos que ela é igual a própria força eletromotriz do conjunto de pilhas resulta:

$$R = \frac{V}{i_{\max}} = \frac{4,5}{0,36} = 12,5 \text{ ohms.}$$

v) Escolhendo-se um fio compatível com a corrente fixada determina-se o comprimento correspondente a 12,5 ohms. Nós adotamos o fio nº 30 que pode ser enrolado à base de 35 esp/cm e que suporta, para um uso não muito prolongado, correntes de 200 mA. Este fio tem uma resistência de 340,7 ohms/km; são precisos, portanto, 36,7 metros para dar uma resistência R igual a 12,5 ohms.

vi) A partir do comprimento do fio e do número N, calcula-se o diâmetro médio (d_m) das espiras:

$$d_m = \text{comprimento do fio} / N = 36,7m / 555 = 21 \text{ mm.}$$

Esses números (N e d_m) servem apenas de ponto de partida.

As dimensões do carretel, obviamente, serão determinadas levando em conta d_m , N, a espessura do fio utilizado e o espaço disponível. Para o modelo M-1, que será descrito logo mais, adotamos $N = 600$ e $d_m = 22 \text{ mm}$. As espiras foram enroladas num carretel de 20 mm de diâmetro e 25 mm de altura.

A resistência e a corrente média medidas com um multímetro resultaram, respectivamente, iguais a 13 ohms e 170 mA (usando-se 3 pilhas novas).

A corrente, na verdade, não é crítica, desde que se tenha um entreferro com espessura regulável. O modelo M-1, por exemplo, funciona tanto com 150 mA quanto com 250 mA.

Não podemos aumentar N de modo a reduzir ainda mais a corrente ? Do ponto de vista da força não há problema : ela permanece praticamente inalterada (quando aumentamos somente N), pois $i \propto R^{-1} \propto N^{-1}$ (aproximadamente) e $F \propto (Ni)^2$ (eq. 3-20). A chave da questão está na constante de tempo indutiva do circuito RL que é definida pela relação $\tau_L = L/R$ (onde R é a resistência da bobina e L sua indutância). Se não existisse a indutância na bobina, a corrente atingiria instantaneamente o seu valor máximo mas, como esse não é o caso, ocorre um certo atraso no seu crescimento.

Da equação da corrente para o circuito RL, $i = (1 - e^{-t/\tau_L}) i_{\text{máx}}$, verifica-se que ela atingirá, respectivamente, 63%, 86%, 95%, ... de seu valor máximo para $t = \tau_L, 2\tau_L, 3\tau_L, \dots$. Considerando esse comportamento e admitindo que a armadura seja atraída efetivamente só para valores próximos da corrente máxima, conclui-se que o sistema oscilante somente trabalhará de modo apropriado quando a duração de um pulso de tensão (δt), i.e., o intervalo de tempo durante o qual o circuito fica ligado for, no mínimo, algumas vezes igual (4 a 5 vezes, no nosso caso) à constante de tempo indutiva do circuito. Isto foi verificado através do osciloscópio: as bobinas que não apresentaram problemas para o funcionamento do sistema oscilante foram aquelas nas quais a corrente crescia da forma mostrada na fig. 4.4a; os problemas apareciam quando a corrente se comportava como mostra a fig. 4.4b.*

* Choque ou "colagem" da armadura com o núcleo, dificuldade de ajuste etc. Quando a corrente cresce segundo a fig. 4.4b o entreferro precisa ser reduzido e isto provoca o choque ou colagem da armadura com o núcleo e dificuldades de ajustes.

Fig. 4.4a

Fig. 4.4b

Por definição $\tau_L = L/R$ (4-3) e pela equação 3-14

$L = N^2/R$. Se $R \approx R_e$ (relutância do entreferro) podemos reescrever 3-14 sob a forma

$$L = \frac{N^2}{R_e} \quad (4-4)$$

onde R_e é constante para um dado entreferro.

De 4-3 e 4-4 obtemos $\tau_L \propto N^2/R$ (para R_e constante). Mas, como $R \propto N$ (aproximadamente), τ_L é essencialmente proporcional a N . Em outras palavras: à medida que aumentamos o número de espiras, a constante de tempo indutiva aumenta na mesma proporção. A corrente, como consequência, cresce mais lentamente e mais tempo é decorrido para que ela atinja seu valor máximo. Se o aumento de N for significativo, uma corrente que se comportava como mostra a fig. 4.4a passa a se comportar segundo 4.4b e os problemas começam a aparecer.

A última questão a ser analisada com relação a N é verificar se o número de espiras escolhido (555) é apropriado à luz do que acabamos de discutir. Para isto é preciso estimar a constante de tempo indutiva, determinando L pela equação 4-4. R_e é dado por $l/\mu_0 S$ onde S é a área da seção reta do núcleo. Quando se aplica essa fórmula costuma-se, entretanto, corrigir S de modo a levar em conta a dispersão das linhas de indução no entreferro.

A correção que se faz é adicionar a espessura (ℓ) do entreferro às dimensões lineares da seção reta do núcleo o que significa admitir que as linhas de indução seguem caminhos circulares nas bordas do entreferro (fig. 4.5)⁴⁹. Desta forma, se a área da seção reta for circular, R_e será dado por:

$$R_e = \frac{\ell}{\mu_0 (d+\ell)^2 \pi/4}$$

No modelo M-1 o núcleo é furado, de modo que se deve levar em conta as dispersões das linhas de indução tanto na borda externa quanto na interna. As dimensões estão indicadas na figura 4.6*.

A área da seção será igual a $(\pi/4) \cdot (17,5^2 - 6,5^2) \approx 207 \text{ mm}^2$. Fazendo na eq. 4-4, $S = 207 \text{ mm}^2$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $\ell = 2 \text{ mm}$ e $N = 555$ resulta $L \approx 40 \text{ mH}$. Lembrando que o valor calculado para a resistência dessa bobina foi de 12,5 ohms, obtém-se 3,2 ms para a constante de tempo indutiva ($= L/R$). Se utilizarmos uma frequência de trabalho igual a 25 hertz, a duração de um pulso (δt) será aproximadamente igual a $1/(2 \times 25) = 20 \text{ ms}$ (admitindo que os tempos de operação e desoperação do circuito gerador de pulsos sejam aproximadamente iguais). Comparando δt com τ_L resulta $\delta t \approx 6\tau_L$ o que mostra que, segundo os critérios estabelecidos anteriormente,

Fig. 4.5

Fig. 4.6

* Na realidade as dimensões indicadas são armadura; o núcleo tem um diâmetro externo ligeiramente maior (16mm).

essa bobina trabalhará de maneira satisfatória.

Uma vez que a bobina tenha sido enrolada pode-se verificar por meio de um osciloscópio a forma como a corrente cresce durante um pulso de tensão ou medir a indutância por algum processo disponível e checar os resultados com o que foi calculado; em geral o valor calculado aproxima-se razoavelmente daquele obtido por medida direta*.

4.2.4 A área do núcleo

Uma outra alternativa para reduzir a corrente é aumentar a área (S) do núcleo e manter constantes a tensão aplicada à bobina, o número de espiras, a altura do carretel e a espessura do fio utilizado. De fato, isto é possível, mas é preciso cautela pois, como veremos, a constante de tempo indutiva cresce com a área.

Quando enrolamos um carretel o diâmetro médio das espiras (fig.4.7) é dado por $d_m = d + C$ onde d é o diâmetro do núcleo e C é duas vezes a espessura da parede do carretel mais a espessura do total de camadas.

Fig. 4.7

Quando variamos o diâmetro do núcleo, C permanece constante, se mantivermos inalterados o número de espiras, a espessura da parede do carretel e a sua altura. Por outro lado, se N é constante, a resistência do fio é proporcional a $d + C$ e a indutância da bobina à área do núcleo (eq. 4-4) ou a d^2 . Como $\tau_L = L/R$

* Para uma bobina de 600 espiras utilizada no M-1, obtivemos para L os valores 47 mH (calculado) e 55 mH (experimental), com entreferro de ≈ 2 mm.

resulta $\tau_L \propto d^2/(d + C)$.

Assim, se variarmos o diâmetro de d_1 para d_2 , a relação entre as constantes de tempo será dada por:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \frac{d_1 + C}{d_2 + C} \quad (4-5)$$

Da eq. 4-5 e considerando que

$$\frac{d_1 + C}{d_2 + C} > \frac{d_1}{d_2}, \text{ se } d_1 < d_2, \text{ tem-se } \tau_2 > \tau_1 \text{ o que prova que}$$

a constante de tempo indutiva aumenta com a área, se as condições fixadas inicialmente forem obedecidas.

Ainda da eq. 4-5 e lembrando que o quadrado da razão dos diâmetros é igual à razão das áreas obtêm-se, se $d_1 < d_2$,

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{d_1 + C}{d_2 + C} < \frac{S_2}{S_1}$$

o que prova que a constante de tempo indutiva cresce numa razão menor que a das áreas.

A corrente cai à medida que a área aumenta mas ainda assim a força cresce. Sendo $i \propto R^{-1} \propto (d+C)^{-1}$ e $F \propto i^2 S \propto (id)^2$ (eq. 3-20) resulta

$$F \propto \left(\frac{d}{d+C}\right)^2.$$

Isto posto, se aumentarmos o diâmetro de d_1 para d_2 , a relação entre as forças será dada por:

$$\frac{F_2}{F_1} = \left[\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_1 + C}{d_2 + C} \right]^2 > \left[\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \right]^2 = 1, \text{ ou seja, } F_2 > F_1.$$

A força, portanto, aumenta com a área se observarmos as condições

fixadas inicialmente.

Como $(d_2/d_1)^2 = S_2/S_1$ a mesma relação pode ser dada por :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1} \left(\frac{d_1 + C}{d_2 + C} \right)^2 < \frac{S_2}{S_1}$$

isto é, a força cresce numa razão menor que a das áreas.

Concluindo: é interessante aumentar a área do núcleo pois, dentro das condições estabelecidas, isto reduz a corrente e aumenta a força sobre a armadura. Entretanto é preciso verificar, usando a eq. 4-5, se a nova constante de tempo indutiva do circuito é compatível com o bom funcionamento do sistema oscilante (considerando o que foi exposto na seção 4.2.3).

O fato da força crescer com a área abre possibilidades de reduzir o número de espiras (o que é bom pois $\tau_L \propto N$) e diminuir o diâmetro do fio utilizado a fim de compensar uma possível queda da resistência da bobina. Ou, simplesmente, diminuir o diâmetro do fio para aumentar a resistência; estas são alternativas que devem ser tentadas, se possível, pois qualquer uma delas pode reduzir a corrente média, sem afetar o rendimento do sistema.

Para completar, resta dizer que avaliar a constante de tempo indutiva para escolher o diâmetro do núcleo não é, evidentemente, o único critério a ser seguido; às vezes há outras condições que acabam impondo um diâmetro menor que o desejado. Por exemplo, no modelo M-1, os cálculos mostram que o sistema responderá bem tanto com um núcleo de 16 mm quanto com um de 20mm, mas a escolha de núcleo de 20 mm implica em aumentar a massa da armadura, o que não é compatível com a mola que usamos (pequenas almofadas de espuma de latex de 4 mm de espessura) para sustentar a caneta com a armadura.

4.2.5. A montagem do eletroimã

No modelo M-0 o núcleo do eletroimã é ancaixado sem folga dentro de um cano de PVC (de 5/8 de polegada) previamente alargado, que serve também de guia para o movimento oscilatório da armadura - (fig. 4.8). Esta montagem traz alguns problemas.

Fig. 4.8

i) Dificulta o ajuste da espessura do entreferro necessário para encontrar o ponto ideal de funcionamento do sistema oscilante.

ii) A parede do cano de PVC cria um entreferro desnecessário (fig. 4.9), quando se tenta estabelecer um caminho fechado de material ferromagnético para as linhas de indução.

Fig. 4.9

iii) O ajuste do entreferro feito antes que o ar comece a fluir não se mantém depois que o fluxo é estabelecido. Aparentemente, velocidades de ar diferentes nas regiões I e II (fig. 4.8) criam uma diferença de pressão que empurra a armadura para baixo, fechando, parcialmente, o entreferro e fazendo com que o sistema oscilante saia do ponto.

Na versão M-1 todos estes problemas foram superados mudando a forma de montar o eletroímã.

4.3 O modelo M-1

Uma vez tendo compreendido os problemas surgidos com o M-0, pudemos construir uma versão melhorada (o modelo M-1), cujo corte longitudinal está representado pela fig. 4.10. A seção transversal do aparelho tem simetria cilíndrica. Um desenho mais detalhado encontra-se no apêndice II. O seu funcionamento segue a descrição feita no cap. I (seção 1.4), quando tratamos do M-0.

Girando-se a peça nº 3 com uma ferramenta apropriada pode-se regular o entreferro. A altura da ponta da caneta em relação à mesa, e conseqüentemente a intensidade das marcas de tinta, é controlada segurando o disco e girando o corpo do aparelho.

Fig. 4.10 1 - Tampa. 2 - almofadas de espuma de latex. 3 - anel com rosca. 4. armadura. 5 - anel de material não magnético. 6 - carretel. 7 - carcaça. 8 - núcleo. 9 - corpo do aparelho. 10 - luva. 11 - disco. 12 - anel de material não magnético.

Contrariamente ao que se passava com o M-0, o ajuste mantém-se depois que o ar começa a fluir, pois a maior parte do escoamento é feita através do caminho indicado pelas setas (fig. 4.10) e não pelo interior do núcleo.

A excitação da bobina, enrolada com 600 espiras de fio nº 30, é feita através do circuito eletrônico da fig. 4.1, alimentado por 3 ou 4 pilhas médias e a força restauradora é dada por pequenas almofadas de espuma de latex de 4 mm de espessura. Como o circuito magnético associado à parte eletromecânica desta versão é bem mais eficiente que o do M-0, consegue-se uma amplitude de oscilação da caneta suficiente para marcar pontos bem definidos sobre uma superfície lisa, tanto com 3 quanto com 4 pilhas; basta, evidentemente, adequar a espessura do entreferro a cada situação.

O eletroímã (núcleo, carcaça e armadura) é construído em material macio, pois deve se desmagnetizar espontaneamente toda vez que a tensão aplicada for nula. Para evitar o efeito da "colagem" da armadura com o núcleo, usa-se uma arruela de material não magnético interposta entre os dois (com espessura de 0,4mm na versão M-1) que garante um entreferro permanente. Como vimos no cap. 3 (seção 3.3), a existência de um entreferro é responsável pelo aparecimento de cargas magnéticas que exercem um efeito desmagnetizante sobre o material. Com este artifício o material se desmagnetiza espontaneamente toda vez que o eletroímã estiver desoperado.

Os critérios adotados para a escolha do material foram o da sua disponibilidade no mercado, de seu custo e da facilidade de trabalhá-lo. Seguindo esses critérios a escolha recaiu sobre o aço SAE 1020 que é facilmente encontrado na forma de barras cilíndricas de diversos diâmetros. Embora sua permeabilidade relativa não seja muito

alta* (cerca de 200 a 300 na faixa de trabalho do M-1) é um aço facilmente torneável, o que já não acontece com alguns outros materiais de permeabilidade mais alta. Esta é uma característica que não pode ser ignorada por quem pretende construir um aparelho de baixo custo.

As outras partes são feitas de PVC que é encontrado em forma de tubos, barras cilíndricas ou chapas; sua principal vantagem é poder ser trabalhado com facilidade no torno. Além disso, seu uso favorece a vedação (se for preciso) nas partes rosqueadas, pois basta envolver as roscas com fita de teflon, que é apropriada para vedação hidráulica em tubulação de PVC (a vedação já não seria tão fácil se as peças fossem de metal, por exemplo).

As dimensões do disco usado estão indicadas na fig. 4.11. A massa (M) do conjunto é de aproximadamente 800 gramas.

Fig. 4.11

A pressão p_0 na cavidade central do disco necessária para sustentar o conjunto é calculada a partir da eq. 2-9:

$$p_0 = \frac{2Mg}{\pi (b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \approx 1,6 \times 10^4 \text{ dinas/cm}^2 \quad (g = 980 \text{ cm/s}^2).$$

Lembrando que, $1 \text{ atm} \approx 1 \times 10^6 \text{ dinas/cm}^2$ resulta $p_0 \approx 0,016 \text{ atm}$.

* Segundo o que foi visto no cap. 3 (seção 3.5), quando a permeabilidade relativa não é muito alta, a f.m.m. (NI) não está aplicada totalmente no entreferro e parte da energia acaba se perdendo no material. Isto significa que a energia consumida para realizar um determinado trabalho aumenta, quando optamos por material de baixa permeabilidade relativa.

que corresponde à pressão exercida por uma coluna de 16 cm de água.

Esta pressão pode ser conseguida deixando sair o ar contido em duas bexigas colocadas uma dentro da outra* (deverão ser enchidas com uma bomba de bicicleta ou com uma de papelão à venda, juntamente com as bexigas, em alguns supermercados). O fluxo de ar, determinado a partir do tempo total de escoamento (20 a 30 s) e do volume da bexiga avaliado grosseiramente a partir de suas dimensões ou com o auxílio de uma máquina para medir capacidade pulmonar, é cerca de $70 \text{ cm}^3/\text{s}$. Com um fluxo dessa ordem, o disco desliza sobre uma camada de ar com um pouco menos de 0,1 mm de espessura o que garante movimentos sobre uma placa plana de vidro quase sem a interferência de atrito (vide resultados na seção 4.4). É claro que, com uma camada com espessura dessa ordem, só se conseguem bons resultados experimentais se as superfícies do disco e da mesa forem bastante planas e se ambas estiverem limpas (ver mais detalhes no apêndice III).

4.4. Alguns resultados experimentais

A finalidade desta seção é registrar alguns resultados experimentais obtidos com o M-1, para dar uma idéia da qualidade dos dados conseguidos ou do que se pode fazer com tal equipamento.

4.4.1. Considerações gerais

* Uma objeção quanto ao emprego de duas bexigas é que não se consegue enchê-las com a boca. Na realidade isto é até bom pois, se assim procedermos, a saliva que se acumula no ar enferruja o núcleo.

As experiências que serão mostradas a seguir foram realizadas sobre uma placa quadrada de vidro de 60 cm de lado e 6 mm de espessura apoiada sobre outra, de madeira aglomerada, dotada de três parafusos com os quais se pode nivelar o sistema. O nivelamento é feito primeiramente com um nível de bolha e, em seguida, com o próprio puck (nivelamento fino).

Os pontos foram marcados suave e diretamente sobre o vidro e depois transferidos para uma folha de papel (papel sulfite ou tipo cópia) que havia sido pressionada contra as marcas de tinta (esta operação pode ser feita com tranquilidade pois no vidro a tinta de caneta hidrográfica tem uma secagem lenta).

Tentativas de realizar experiências diretamente sobre folhas de papel (de 3 tipos) depositadas no vidro não conduziram a bons resultados, embora pudessem ser aproveitados. (Aparentemente o toque da caneta no papel, mesmo sendo suave, interfere no movimento do disco; o mesmo não acontece se o toque for feito diretamente sobre o vidro). Como as experiências são realizadas, em média, em cerca de dois segundos que é um intervalo de tempo pequeno quando comparado com a constante de tempo do M-1 (aproximadamente 200 s)* a influência da resistência oferecida pela película de ar ao movimento do disco será imperceptível. A frequência utilizada, medida com um osciloscópio, foi de 25 hertz** e a alimen-

* A constante de tempo é calculada pela eq. 2-29:

$$\tau = \frac{Mh}{\mu \pi (b^2 - a^2)}$$

No modelo M-1, $m \approx 800$ g, $b = 8,2$ cm, $a = 1,0$ cm, $h \approx 0,01$ cm (usando-se 2 bexigas), $\mu \approx 183$ micropoise = $1,83 \times 10^8$ g/s.cm (a 189 C). A partir destes valores e da eq. 2-29 obtêm-se, para a constante de tempo, o valor aproximado de 200 segundos.

** A maioria das experiências com pucks são feitas utilizando uma unidade de tempo arbitrária. Não há necessidade, portanto, na maioria das vezes, de conhecer a frequência.

tação do circuito eletrônico foi feita com 4 pilhas médias (50 g cada uma).

A limpeza das superfícies do vidro e da base do puck , realizadas ao fim de cada experiência, foram feitas com toalha de papel lavável (que não solta fio) e álcool.

4.4.2 Movimento aleatório do puck sobre uma superfície horizontal.

Objetivos: Verificar a constância da velocidade nos trechos retilíneos e o Princípio da Inércia.

A figura 4.12 representa o registro das posições do puck enquanto se movimenta aleatoriamente sobre uma placa de vidro horizontal; as mudanças de direção foram conseguidas tocando o puck com os dedos.

Fig. 4.12 Movimento aleatório de um puck sobre uma superfície horizontal.

4.4.3 Descida de um plano inclinado

Objetivo : Verificar que o movimento de descida do plano é uniformemente acelerado.

A fig. 4.13b mostra uma corrida do puck sobre um plano levemente inclinado. Nos gráficos da fig. 4.13a as linhas tracejadas representam a variação da velocidade média em função do tempo e a linha cheia a velocidade instantânea. A unidade de tempo (u.t.) arbitrária adotada corresponde ao tempo que a caneta leva para marcar cinco pontos consecutivos.

Fig. 4.13a

Fig. 4.13b Movimento de um puck des-
cendo um plano levemente
inclinado.

4.4.4 Movimento parabólico no plano inclinado

Objetivos: Estudar um movimento em duas dimensões. Verificar as leis de lançamento de projéteis num campo gravitacional.

Inicialmente o puck desce, em "queda livre", um plano levemente inclinado para que a direção de maior inclinação ("vertical") fique registrada sobre o plano. Em seguida é lançado para cima, numa direção distinta da "vertical", com uma velocidade v_0 .

A fig. 4.14 mostra o movimento obtido para um lançamento. Pode-se verificar que: i) o movimento na "vertical" é uniformemente variado* e na horizontal uniforme; ii) o tempo gasto para subir até a altura máxima é o mesmo que para descer e iii) o alcance do projétil é o dobro da distância percorrida, na direção horizontal, até que a altura máxima seja alcançada.

* É interessante (didático) medir a aceleração de "queda livre" e compará-la com a aceleração na direção vertical no movimento parabólico.

Fig. 4.14 Movimento parabólico num plano inclinado. Os pontos 1 e 2, assinalados na figura, correspondem, respectivamente, às 18^a e 37^a marcas.

CAPÍTULO V

O MODELO M-2 : PROJETO E CONSTRUÇÃO

5.1 Introdução

A idéia de construir o modelo M-2 surgiu quando percebemos que poderíamos aproveitar o movimento oscilatório da caneta (na versão M-1) não só para registrar as posições do disco como também para acionar uma pequena bomba de ar, tornando então dis pensável a bexiga.

Experiências com pequenas bombas empregadas para renovar o ar da água de aquários nos convenceram de que a idéia era bas tante viável. Num desses testes, por exemplo, sustentamos um dis co de 1,5 kg e diâmetro de 16 cm e, em outros, discos de 11 cm de diâmetro e massa de 1 a 1,5 kg. Resultados satisfatórios, entretan to, só foram conseguidos com mesas e discos bastante planos*, po lidos e limpos, pois a espessura da película de ar que sustenta o disco é menor que 0,1 mm.

Esses testes nos permitiram fixar os parâmetros iniciais do M-2, a partir dos quais dimensionamos a bomba de ar e o siste-
ma eletromecânico.

5.2 A bomba de ar

Para dimensionar a bomba é preciso fixar, inicialmente , os seguintes parâmetros : a massa a ser sustentada, o fluxo de ar

* Isto é obtido mais facilmente com discos pequenos. Seu diâmetro, porém, é limitado por três fatores:

- a) o espaço para dispor as pilhas e acessórios sobre o disco ,
- b) a espessura da película de ar que diminui (embora mais lentamente que a área do disco) com a área do disco (ver eq. 2-23) e
- c) a pressão mínima na cavidade central do disco, que aumenta à medida que a área diminui (ver eq. 2-29).

e o diâmetro do disco.

A massa do conjunto (pilhas, sistema eletromecânico e disco) varia entre 0,7 a 1,0 kg. Os testes utilizando as bombas de aquário nos mostraram que, com um fluxo da ordem de $25 \text{ cm}^3/\text{s}$, os resultados são satisfatórios. O diâmetro do disco necessário para que todos os elementos possam ser montados confortavelmente sobre ele é cerca de 14 cm. Escolhamos, pois, os seguintes parâmetros iniciais :

- massa do conjunto : 1,0 kg
- fluxo mínimo : $25 \text{ cm}^3/\text{s}$
- diâmetro do disco : 14 cm
- diâmetro da cavidade central do disco : 2,0 cm

A massa e os diâmetros dados definem a pressão mínima que deve haver na cavidade central do disco para que o conjunto seja sustentado pelo colchão de ar. Fazendo, na fig. 2.1 , $b = 7,0 \text{ cm}$, $a = 1,0 \text{ cm}$, $m = 1000 \text{ g}$ e $g = 980 \text{ cm/s}^2$ e utilizando a eq. 2-9, resulta $p_0 \approx 0,025 \text{ atm}$. Entretanto, a pressão do ar na saída da bomba deverá ser maior que esse valor, pois haverá perdas de pressão no percurso, perdas para abrir as válvulas etc. Para compensar esses efeitos adotemos $p_0 = 0,030 \text{ atm}$. A bomba, por outro lado, deve ser capaz de fornecer ar a uma pressão máxima maior que essa para que não fique trabalhando sobrecarregada.

Fixados estes parâmetros, passemos para as dimensões da câmara da bomba. Se ela for cilíndrica, como deverá ser o seu diâmetro (d) ? Grande ou pequeno ? E a sua altura (h) ?

A pressão da câmara da fig.

5.1 aumenta à medida que o pistão desce e a válvula de saída se abre quando a pressão no seu interior for no mínimo igual a p_0 (0,030 atm no caso). Se a válvula se abrir só no fim do curso do pistão, nem todo o ar que foi compri-

Fig. 5.1

mido sairá da câmara, pois a pressão no seu interior cairá rapidamente com a abertura da válvula e ela se fechará. Por esta razão, é interessante que a válvula se abra logo no início do curso do pistão. Feitas estas considerações, podemos responder qualitativamente às questões propostas apoiando-nos na equação $pV = K$ (constante) que relaciona a pressão (p) e o volume (V) de um gás (ideal) quando a temperatura é mantida constante. Para pequenas variações de pressão temos :

$$\Delta p \approx - \frac{K}{V^2} \Delta V$$

Esta equação mostra que a variação de pressão é diretamente proporcional à variação do volume e inversamente proporcional ao quadrado do volume inicial. Assim, se a diferença de pressão desejada deve ser conseguida para pequenos deslocamentos do pistão é preciso escolher d e h convenientemente de modo a ter o volume da câmara tão pequeno quanto possível. No nosso caso, se considerarmos um curso de 2 mm e uma frequência de oscilação de 25 hz, o diâmetro mínimo necessário para obter um fluxo de $25 \text{ cm}^3/\text{s}$ será de 2,6 cm. A altura da câmara compatível com o curso do pistão e com a colocação das válvulas é cerca de 4 mm.

A força magnetomotriz necessária para acionar o sistema também depende do volume da câmara ou, mais especificamente, do seu diâmetro. Para que a válvula de saída se abra e se mantenha aberta é preciso que a pressão no interior da câmara seja sempre um pouco maior que a pressão externa p_0 . A força F mínima atuando no pistão deverá ser então sempre um pouco maior que a força dada por $p_0 \cdot (\text{área do pistão})$. Considerando um diâmetro de 2,6 cm e uma pressão de $0,030 \text{ atm} = 3 \times 10^4 \text{ dinas/cm}^2$, a força correspondente será $1,6 \times 10^5 \text{ dinas} = 1,6 \text{ newtons}$.

5.3 Cálculo da força magnetomotriz

A força magnetomotriz calculada a partir da equação 3-20 é dada, a menos do sinal, por :

$$F = Ni = x \sqrt{\frac{2F}{\mu_0 S}}$$

onde x é a espessura do entreferro, F a força atuando na armadura, S a área do entreferro e μ_0 a permeabilidade relativa do ar. No modelo M-2 a área do entreferro é de 3 cm^2 . Ela foi estabelecida tendo em vista as considerações feitas na seção 4.2.4, o espaço disponível e o material existente para a confecção do carretel. A armadura, em repouso, está a 3 mm do núcleo e portanto $x = 3 \text{ mm}$. A força F , segundo cálculos feitos na seção anterior, é de 1,6 newtons. Levando esse conjunto de valores para a equação 5-1 resulta $Ni \approx 276$ ampêres.

Se adotarmos $Ni \approx 300$ ampêres e $i = i_{\text{máx}} = 0,5 \text{ A}$, o número de espiras será igual a 600. A corrente média, aproximadamente igual à metade da corrente máxima, pode ser fornecida razoavelmente bem por pilhas de lanterna. No modelo M-2 estas especificações foram atendidas enrolando uma bobina com 600 espiras de fio nº 23 e alimentando-a com 4 pilhas de 1,5 volts *. Os cálculos seguiram as indicações feitas na seção 4.2.3.

É interessante notar que a força sobre a armadura aumenta à medida que ela desce (eq. 3-20). Por esta razão, depois que o movimento descendente da armadura começar a força atuando no pistão será sempre maior que 1,6 newtons, o que nos garante que

* 600 espiras, de fio nº 23 (214,44 ohms/km), com diâmetro médio de 2,75mm têm uma resistência de pouco mais de 11 ohms. A tensão de 4 pilhas (novas) de 1,5 volts e em série, quando fornecendo 250 mA, é de aproximadamente 5,5 volts. Com estes dados obtemos para a corrente máxima o valor 0,5 A.

300 ampères são mais do que suficientes para acionar a bomba. Se, entretanto, for preciso aumentar a pressão p_0 , basta reduzir a es pessura do entreferro.

5.4 A excitação da bobina

Para provocar o movimento oscilatório da caneta a bobina deverá ser excitada de modo intermitente por meio de um chaveamento eletrônico ou mecânico. Seguindo o que nos pareceu ser o caminho natural tentamos antes fazer o chaveamento eletrônico (empregando o circuito da fig. 4.1), como já havia sido feito na versão M-1. Só problemas apareceram e, apesar do esforço e do tempo in vestido, não conseguimos superá-los. Com um dos protótipos, por exemplo,

- i) o fluxo de ar fornecido pela bomba nunca foi suficiente para gerar um colchão com espessura adequada para que o atrito não interferisse nos resultados experimentais ;
- ii) a armadura "colava" no núcleo toda vez que tentávamos reduzir o entreferro para obter maior fluxo ou maior pressão ;
- iii) um bom ajuste do sistema oscilante dificilmente podia ser reproduzido depois que saia do ponto ;
- iv) havia uma redução sensível no fluxo (mesmo ajustando-se cui dadosamente a frequência de excitação e a espessura do entreferro) sempre que a bomba deixava de trabalhar livremente pa ra trabalhar contra uma resistência oferecida, e
- v) a pressão máxima mal chegou a 0,020 atm, de modo que somente discos de grande diâmetro ou pequena massa podiam ser sustentados.

Um ou outro desses problemas pôde ser corrigido em outros protótipos, mas em momento algum conseguimos eliminar todos eles, enquanto insistimos no chavemanento eletrônico. O mesmo já não aconte -

ceu num protótipo (que será descrito na seção 5.5) com bobina chaveada mecanicamente. Neste, conseguimos um fluxo de $30 \text{ cm}^3/\text{s}$ enquanto a bomba trabalhava livremente e na frequência de 33 hz; trabalhando para vencer uma pressão de 0,022 atm, a frequência caiu para 25 hz e o fluxo para $23 \text{ cm}^3/\text{s}$. A pressão máxima, por sua vez, chegou a 0,041 atm. O ganho na eficiência do funcionamento da bomba permitiu realizar experiências em que o atrito praticamente não é percebido. Os bons resultados conseguidos com este protótipo e a facilidade para ajustar o sistema nos fizeram optar pelo chaveamento mecânico, apesar de alguma possível dificuldade de construção dos contatos mecânicos.

A fig. 5.2 mostra, sem detalhes, como fazer um chaveamento a partir de contatos mecânicos (C). A lâmina de aço L é mantida sob tensão, de modo que pode acompanhar o movimento do pistão até um certo ponto da descida. Quando a chave K é acionada o circuito se fecha, a armadura é atraída pelo núcleo e os dois contatos em C se separam quase no fim do curso do pistão (que pode ser fixado regulando a tensão da lâmina L e a espessura do entreferro).

Fig. 5.2

A mola M deve garantir o retorno rápido do pistão (depois que os contatos forem abertos) para que alcance sua posição inicial antes que a corrente tenha atingido seu valor máximo. Se isto não acontecer, o movimento ascendente do pistão pode ser prejudicado, pois a armadura será atraída fortemente já enquanto está subindo, impedindo que o pistão volte para sua posição original e, consequentemente, que a câmara se encha completamente. Possivelmente, a montagem ideal deveria permitir que as diversas etapas do movi-

mento da armadura acontecessem dentro dos intervalos de tempo indicados na fig. 5.3.

Fig. 5.3

- I: Intervalo de tempo durante o qual os contatos em $\bar{C}$ estão separados (fim da descida e início da subida da armadura).
- II: Intervalo de tempo durante o qual o pistão deve retornar a sua posição original.
- III: Intervalo de tempo durante o qual a armadura é atraída fortemente durante o movimento descendente.

Algumas considerações sobre o funcionamento desse sistema podem nos levar a compreender porque o chaveamento mecânico é mais eficiente que o eletrônico, no caso. Em primeiro lugar, um ajuste adequado da lâmina L evita que a armadura cole no núcleo. Em segundo lugar, com um chaveamento mecânico a frequência de funcionamento da bomba ajusta-se automaticamente à resistência que está sendo oferecida ao fluxo, enquanto que o curso do pistão permanece praticamente inalterado, pois a lâmina L acompanha o movimento da caneta. Entretanto, quando a resistência ao fluxo aumentar e, como consequência, a frequência diminuir, a queda poderá ser minorada reduzindo-se o entreferro pois a colagem agora poderá ser evitada. Por isto e pelo fato do curso do pistão poder ser mantido praticamente inalterado, a bomba trabalha contra a resistência oferecida por uma pressão equivalente à metade da pressão máxima que pode vencer sem sofrer uma redução sensível do fluxo (isto explica porque o fluxo diminuiu somente de 30 para 23 cm³/s quando a resistência aumentou de 0 para 0,022 atm, como citamos na p. 77). Finalmen

te, chaveando a bobina ora eletrônica, ora mecanicamente e observando num osciloscópio a largura dos pulsos de tensão nos dois casos, notamos que (fixando uma frequência e regulando a tensão na lâmina L) se podem obter com o chaveamento mecânico pulsos mais largos do que aqueles obtidos com o chaveamento eletrônico. Trabalhando a 20 hz, por exemplo, conseguimos uma relação entre o tempo de operação e desoperação do circuito de 4 para 1 com chaveamento mecânico, enquanto que essa relação com um chaveamento eletrônico foi de 3 para 2 (e essas razões não são muito diferentes para outras frequências). Isto significa que, para uma frequência e um entreferro dados, o curso do pistão é maior quando se emprega o chaveamento mecânico do que quando se emprega o chaveamento eletrônico (usando o circuito da versão M-1); conseqüentemente o fluxo num caso é maior que no outro.

5:5 O Modelo M-2

A fig. 5.4 é um corte longitudinal do modelo M-2; seu projeto seguiu as recomendações feitas nas seções anteriores - deste capítulo. A seção reta é cilíndrica. O desenho detalhado em contra-se no apêndice IV. O circuito elétrico está esquematizado na fig. 5.5.

Fig. 5.4 Um corte longitudinal do M-2.

1-Anel de PVC flexível. 2-Câmara de borracha. 3-Mola de aço. 4-base. 5-corpo do aparelho. 6-retentor sanfonado de bor-
racha. 7-anel de material não magnético. 8-carretel de PVC. 9-pedaços de fita isolante. 10-armadura. 11-carcaça. 12-nú-
cleo. 13-luva. 14-disco. 15-caneta. 16-anel de apoio para re-
tentor. 17-bobina. L-lâmina de aço. C-contatos.

Fig. 5.5 Circuito elétrico que aciona o sistema eletromecânico do M-2. A finalidade da associação capacitor-resistor em pa-
ralelo com a chave é eliminar as faíscas que encur-
tam a vida dos contatos.

Particularidades, finalidade e/ou funcionamento de algumas das peças numeradas na fig. 5-4 são descritos a seguir.

1. Anel flexível de PVC feito com tubo de 1,5 polegada do qual retiramos 2 a 3 mm de material (fig. 5.6). Este anel encaixa-se sob pressão na parte externa da câmara e pode ser deslocado para cima ou para baixo, de modo a permitir a regulação da tensão da lâmina L e consequentemente, do curso da membrana de borracha.

Fig. 5.6

2. Câmara de borracha flexível construída numa peça única. As válvulas de entrada, representadas por linguetas na figura, são feitas de lâmina de latex de 0,4 mm (utilizadas por dentistas em tratamento de canal) e são coladas diretamente na câmara.
3. Mola de aço feita com fio de 0,7 mm de diâmetro; tem altura e diâmetro de 13 e 8 mm, respectivamente.
4. Base da câmara em PVC provida de rosca e de duas válvulas de saída, também construídas com lâminas de latex de 0,4 mm. Girando-se esta peça pode-se variar a espessura do entreferro e, com isso, regular o fluxo e a pressão de ar necessárias para sustentar o disco.
5. Cilindro de PVC (tubo de 1,5 pol.) no qual é rosqueada a câmara e montado todo o sistema eletromecânico. Ele pode girar sobre o disco permitindo regular a altura da ponta da caneta em relação à mesa e, portanto, a intensidade das marcas de tinta.
6. Retentor sanfonado (pescoço de uma bexiga de borracha). A sua função é impedir que o ar no interior da peça nº 5 seja aspira-

do pelo movimento ascendente da membrana.

7. Anel de material não magnético (latão ou PVC, por exemplo) que serve de guia para o movimento da armadura e que a impede de tocar na carcaça. Deve conter ranhuras na borda interior para permitir a passagem de ar e deve se ajustar tanto quanto possível à carcaça (sem prejudicar seu movimento), de modo a impedir deslocamentos laterais da caneta. Se isto não for observado, as forças radiais que surgem entre a carcaça e a armadura comprometem o movimento vertical da caneta.
8. Carretel de PVC enrolado com 600 espiras de fio de cobre esmaltado nº 28.
9. Pedacos de fita isolante, colados uns sobre os outros, formando um conjunto de 0,6 mm de espessura; sua finalidade é impedir que a armadura, acidentalmente, cole no núcleo.

O conjunto pesa 833 gramas e seu funcionamento é, com exceção da bomba, o mesmo da versão M-1. Quando a chave K é ligada, a armadura é atraída pelo núcleo; as válvulas de entrada se fecham e as de saída se abrem; o ar do interior da câmara é expulso, seguindo através do espaço existente entre carcaça e armadura, armadura e carretel e caneta e furo central, saindo, finalmente, na base do disco.

Com um curso de 2,5 mm, aproximadamente, a membrana expulsa ar a razão de 1 cm^3 a cada movimento descendente, o que resulta num fluxo de $25 \text{ cm}^3/\text{s}$, pois a frequência de trabalho, para uma massa sustentada de 833 gramas, é cerca de 25 hz (evidentemente estes números dependem dos ajustes do entreferro e da tensão da lâmina L).

A bomba trabalha com folga, pois a pressão necessária para sustentar o conjunto é de aproximadamente 0,020 atm, enquanto que a pressão máxima garantida por ela é 0,041 atm. Isto significa que a massa do conjunto pode superar 833 gramas (num dos testes, por

exemplo, a massa do conjunto sustentado foi de 1,7 kg).

5.6 Resultados experimentais

Todas as experiências realizadas com o M-1 podem ser repetidas, com mais comodidade, com o M-2; os dados obtidos são igualmente bons. A maneira de registrar os pontos e os cuidados experimentais devem seguir as recomendações da seção 4.4.1. A título de exemplo repetimos com o puck M-2 a experiência descrita no item 4.4.4. A qualidade dos dados obtidos pode ser percebida comparando, na fig. 5.7, os espaçamentos entre os pontos na direção horizontal, o tempo para subir com o tempo para descer e o alcance máximo com a distância percorrida até que o disco tenha atingido a altura máxima.

Fig. 5.7 Movimento parabólico num plano inclinado. Os pontos 1 e 2, assinalados na figura, correspondem, respectivamente, às 33^a e 66^a marcas.

CAPÍTULO VI

O MODELO M-3

6.1 Introdução

Quando se quer estudar a conservação da quantidade de movimento numa colisão entre dois pucks é conveniente que suas canetas vibrem numa mesma frequência a fim de eliminar uma possível fonte de erro. Se, além disso, pretendermos estudar o movimento do centro de massa, antes e após a colisão, do sistema constituído pelos dois pucks, elas deverão vibrar não só numa mesma frequência mas também em fase. Os modelos M-1 e M-2 não se prestam para esse tipo de experimento. Embora no primeiro modelo as frequências possam ser feitas iguais (ou aproximadamente) se pudermos medi-las com um frequencímetro ou com um osciloscópio, o mesmo não ocorre com o segundo. Mesmo que possamos contornar essa dificuldade determinando experimentalmente a relação entre elas * (o que é suficiente para se estudar, quantitativamente, a conservação da quantidade de movimento), é impossível resolver o problema da fase se as duas canetas vibrarem de modo completamente independente.

Esses e alguns outros inconvenientes associados ao manuseio dos dois modelos anteriores, quando utilizados em experimentos de colisão, nos levaram a construir a versão M-3.

* Se esta relação não puder ser determinada medindo diretamente a frequência, basta forçar os pucks se deslocarem juntos, um ao lado do outro. Se ao percorrerem a mesma distância o puck nº 1 marcou n_1 pontos e o nº 2 n_2 pontos, a relação entre as frequências será dada por $f_2/f_1 = n_1/n_2$.

6.2 O modelo M-3

O modelo M-3 é praticamente idêntico ao M-2. A diferença está nas dimensões da câmara da bomba de ar e na forma como a bobina é excitada. Se as canetas de dois ou mais pucks devem vibrar numa mesma frequência e em fase a fonte que envia pulsos para as bobinas deve ser uma só, o que significa que os pucks deverão ser cativos. À primeira vista isto pode parecer uma limitação, mas como as massas dos pucks variam de 0,5 a 1,3 kg e como suas ligações com a fonte de alimentação são feitas com fios leves e flexíveis, os resultados experimentais obtidos são, apesar dos vínculos, bastante satisfatórios. Por exemplo, num conjunto de experiências realizadas com um puck de aproximadamente 0,5 kg e outro de 1,2 kg verificamos a conservação da quantidade de movimento total numa colisão entre os dois com um erro menor que 5% no que diz respeito ao módulo e menor que $0,5^\circ$ no que diz respeito à direção.

A fonte comum aos dois pucks pode ser uma fonte de corrente alternada. Para o modelo M-3, em particular, podemos usar um transformador de 12 ou 15 volts (ou um VARIAC) ligado diretamente na rede (60 hz). A tensão adequada é escolhida em função das massas dos pucks. Como a armadura sofrerá atração tanto no semiciclo positivo de tensão quanto no negativo, é conveniente colocar, em série com a bobina, um diodo a fim de reduzir a frequência para 60 hz e aumentar a amplitude de oscilação.

Uma vantagem em usar (no M-3) uma fonte ligada à rede é a possibilidade de obter, para praticamente a mesma corrente média, uma corrente máxima maior que a obtida com as pilhas (no M-2). Alimentado com 12 volts, um puck M-3 puxa uma corrente média de 0,24 A e máxima de 0,76 A* ao passo que um M-2, alimentado com 6

* No caso de uma meia onda senoidal a relação entre a corrente média (i_m) lida num amperímetro para corrente contínua e a corrente de pico (i_p) é dada por $i_m = i_p / \pi$.

volts, puxa uma corrente média de 0,26 A e máxima de 0,5 A. Por esta razão, a câmara no M-3 pode ter um diâmetro maior (3 cm)* que no M-2 (2,6 mm); isto, associado a uma frequência de trabalho também maior (60 hz em vez de 25 hz), permite à bomba do primeiro fornecer um fluxo de ar ($54 \text{ cm}^3/\text{s}$) maior que a do segundo ($30 \text{ cm}^3/\text{s}$), quando ambas trabalham sem encontrar resistência. No apêndice V são apresentados detalhes sobre a construção de duas bombas possíveis.

6.3 Resultados experimentais

Para testar a versatilidade e a qualidade dos dados obtidos com o M-3 e compará-lo com os dois outros modelos, repetimos todas as experiências que haviam sido feitas com os outros dois. Os resultados obtidos são, em média, melhores do que os conseguidos com o M-1 e com o M-2, apesar do vínculo representado pelos fios de ligação entre o disco e a fonte externa de alimentação. Além disso, as experiências e os ajustes necessários são feitos com mais comodidade e rapidez neste modelo que nos demais.

6.3.1 Colisão em duas dimensões

Objetivo : Verificar em duas dimensões o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

Cerca de 30 experiências foram realizadas variando ora a massa dos pucks, ora as direções das velocidades antes do choque, ora a superfície sobre a qual os pucks se movimentavam etc. Os resultados obtidos com os pucks movimentando-se diretamente sobre papel (três tipos) não foram satisfatórios, mas aqueles obtidos

* Uma outra bomba com diâmetro de 5 cm não se mostrou tão eficiente quanto a de 3 cm.

quando se movimentavam diretamente sobre uma superfície de vidro permitiram verificar, usando pucks com base de PVC, a conservação da quantidade de movimento total de um sistema constituído por dois pucks, durante uma colisão, com um erro menor que 5%, no que diz respeito ao módulo (12% quando se movimentavam sobre uma folha de papel liso). Quando as colisões foram feitas entre discos mais pesados (de metal) o erro caiu para menos de 3%. Isto já era previsto pois para se conseguir bons resultados nesse tipo de experimento é preciso que o centro de massa de cada puck esteja o mais próximo possível da mesa ⁵⁰.

A fig. 6.1 representa uma colisão típica. Os dados foram tomados seguindo as recomendações da seção 4.4.1. O puck nº 1 (base de metal com borda arredondada) tem massa de 1,229 kg e diâmetro de 13 cm; o nº 2 (base de PVC com borda reta) massa de 0,484 kg e diâmetro de 14,8 cm. Como pode ser visto, a direção do vetor quantidade de movimento do sistema constituído pelos dois pucks antes e após o choque é praticamente a mesma e a diferença percentual entre os módulos dos dois vetores é menor que 2,5%.

Fig. 6.1 Uma colisão entre dois pucks. Os módulos dos vetores quantidades de movimento do sistema constituído pelos dois pucks são, antes e após a colisão, respectivamente, 87 kg.cm/s e 85 kg.cm/s.
Tensão aplicada: 15 volts.
Frequência : 60 hz.

6.3.2 Movimento sob a ação de uma força central do tipo $-kx$

Objetivo : Verificar a lei das áreas.

A fig. 6.2 é o registro das posições de um puck quando se movimenta num plano horizontal preso a um elástico fino (conhecido nos bazares como LASTEX). As áreas dos três setores hachurados, varridos pelo raio vetor com origem no centro de força e extremidade no centro do disco, são praticamente iguais. A diferença porcentual entre os dois valores extremos é cerca de 3%.

Fig. 6.2 Movimento de um puck de 1026 gramas e 12 cm de diâmetro, sujeito a uma força central. As áreas dos triângulos hachurados, varridos pelo raio vetor em intervalos de $1/12$ segundos, são da esquerda para a direita, respectivamente 14,1, 14,5 e 14,1 cm^2 .

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Como vimos, o despertar para a aplicação didática da lubrificação a ar (que era uma idéia antiga) começou a partir de um artigo de R.G.Marcley em 1960, no American Journal of Physics, que refletia, de certo modo, parte do trabalho desenvolvido por um grupo de MIT (responsável pelos laboratórios didáticos para principiantes) dirigido pelo professor W.M.Whitney. A análise da literatura especializada revelou que, pelo menos nos Estados Unidos, a idéia se espalhou rapidamente e que os equipamentos que utilizam o princípio da lubrificação a ar (ou sustentação a ar) passaram a ser largamente utilizados. Para isto os encontros de professores em que novas idéias são apresentadas e estimuladas (e até premiadas), promovidos pelo American Association of Physics Teachers (AAPT) periodicamente, e a oportunidade de divulgá-las através de veículos especializados desempenharam um papel preponderante, em nossa opinião. (É claro que o clima favorável à renovação do ensino existente na época, principalmente na área de Ciências⁵¹, também foi importante).

No Brasil, contudo, apesar do esforço de diversas pessoas, grupos ou instituições universitárias interessadas em renovar o ensino de Ciências, não se pode dizer que a aplicação do princípio tenha se generalizado. A razão para isto, talvez, é que os equipamentos que foram desenvolvidos empregam acessórios que não se coadunam com a realidade de nossas escolas, de nossa infraestrutura ou mesmo com a formação de nossos professores. (Parece-nos que ninguém havia tentado desenvolver aqui um equipamento que não fosse uma cópia daqueles já existentes). Por pensar assim é que imaginamos criar uma família de pucks que fosse mais apropriada as nossas

condições. Não pretendíamos, evidentemente, resolver de vez o problema, pois acreditamos que, se as pessoas também não mudarem, de nada adianta alterar as condições de ensino ou de trabalho. Esperávamos, apenas, desenvolver um equipamento com perspectiva razoável de ser utilizado.

Com relação a isso acreditamos ter atingido o objetivo , pois criamos uma família de pucks (o M-1, o M-2 e o M-3) que dispensa os sistemas tradicionais para obter a sustentação (gelo seco , compressor, ...) e o registro de trajetórias (fotografia de múltipla exposição, faiscador, ...) e que, a nosso ver, têm sido o grande obstáculo à utilização desse equipamento entre nós. Os três modelos projetados podem ser construídos e operados com material facilmente encontrado e a um custo relativamente baixo*. Num deles utilizamos uma bexiga de borracha como reservatório de ar e nos outros dois uma pequena bomba, solidária ao puck e alimentada a pilhas ou a corrente alternada retificada. Em todos eles o registro da trajetória é feito a partir do toque suave de uma caneta hidrográfica oscilante sobre uma mesa de vidro. As marcas de tinta na mesa são transferidas para um papel comum que é pressionado contra elas. Com este sistema de registro a realização de cada experiência torna-se bem mais econômica que os sistemas convencionais, pois não há necessidade de usar chapas fotográficas ou papel especial para registro de faíscas, como é costume; além disso o tempo dispendido para a obtenção de dados é menor e os pontos são mais bem de

* Para se ter uma idéia um conjunto completo da firma americana Dae-dalon Corporation custava em maio de 80 cerca de 775,00 dólares ao passo que um conjunto equivalente com nossos pucks pode sair, considerando apenas a matéria prima, por menos de Cr\$5000,00 a preços de outubro de 81 e pode ser construído por qualquer oficina que disponha de torno. Não contando a mão de obra, o M-3, que é o modelo mais simples, sai por cerca de Cr\$ 1000,00 a unidade.

finidos.

Havia, inicialmente, duas preocupações ou objeções quanto ao emprego de caneta. Uma delas era a possível interferência do atrito da ponta da caneta com a mesa que poderia prejudicar a tomada de dados e a outra era o temor de que houvesse um afundamento da ponta, devido aos toques sucessivos na mesa, com o correr do tempo ou com o uso inadequado. No primeiro caso observamos que a interferência do atrito não é perceptível nas experiências de curta duração, desde que o sistema seja devidamente ajustado, e no segundo descobrimos que a fixação da ponta na caneta pode ser reforçada com cola Super Bonder. Assim as duas preocupações que poderiam invalidar o projeto inicial, se fossem concretizadas, deixaram de existir.

Cada um dos modelos idealizados se presta melhor para uma ou outra finalidade. O M-1, por exemplo, cuja versão preliminar já foi testada com bons resultados por nosso orientador, com jovens tanto do segundo quanto do terceiro grau, pode ser utilizado mesmo em escolas secundárias *. O M-2 é mais difícil de ser construído, quando comparado com o M-1, porém mais fácil de ser manuseado. Como foi descrito, não conseguimos utilizar, nesse modelo, o chaveamento eletrônico para acionar o sistema eletromecânico (o que evitaria a construção de contatos mecânicos como foi feito) mas isto não quer dizer que não se possa fazê-lo. Se se puder projetar um circuito gerador de pulsos (simples, compacto e pouco dispendioso) que permita variar a frequência e aumentar a largura dos pulsos, talvez os problemas encontrados venham a desaparecer (isto será tentado no futuro).

O M-1 e o M-2, entretanto, se prestam melhor para experi-

* Algumas das melhorias no M-1 foram feitas em função das experiências realizadas com esses alunos.

ências em que um único puck é envolvido. O M-3, por sua vez, embora possa ser empregado em quase todas as situações em que são utilizados os dois outros modelos, foi criado especialmente para estudar colisões entre dois ou mais pucks. Tem nítidas vantagens sobre os demais, tanto no aspecto de construção, manutenção e custo, quanto no de manuseio, pois não utiliza circuitos eletrônicos, contatos mecânicos ou pilhas. O vínculo representado pelos fios de ligação (leves e flexíveis) que poderia preocupar, revelou-se não constituir problema. Isto, por sinal, era de esperar, pois existem equipamentos similares funcionando satisfatoriamente com vínculo bem mais pesado (fios mais mangueira de ar) do que o do M-3.

O custo e o tempo investido no projeto e construção de cada protótipo nos fizeram estabelecer um limite para o desenvolvimento dos modelos, de modo que cada um deles foi considerado acabado a partir do momento em que pudemos realizar com uma unidade algumas das experiências descritas no texto. Isto significa que um outro puck redimensionado talvez possa ser mais eficiente ou ainda mais econômico que os nossos.

À medida que o trabalho se desenrolava percebemos que os sistemas que estavam sendo adotados para garantir a sustentação e para registrar as trajetórias dos pucks poderiam ser empregados de maneira independente em outras aplicações ou para outras finalidades. Com isto surge a possibilidade de continuar o trabalho no sentido de desenvolver alguns subprodutos desta pesquisa, tais como :

- i) um marcador de tempo equivalente ao utilizado pelo PSSC⁵², mas trabalhando com corrente alternada retificada,
- ii) um gerador de ondas para cuba de onda, também equivalente a aquele usado pelo PSSC⁵³, e
- iii) uma bomba de ar capaz de manter um fluxo no mínimo duas vezes maior que o fornecido pelas bombas para aquário existentes no

mercado.

Ao lado disso pode-se pensar, também, em projetar pucks para fins específicos.

O próximo passo deste trabalho, entretanto, é testar o equipamento com alunos universitários de algumas instituições. Somente depois disso é que saberemos se nossos pucks permitirão ou não incentivar o seu uso entre nós. De qualquer forma já é uma satisfação poder mostrar que é possível, pelo menos em alguns casos, encontrar uma solução própria para os nossos problemas; uma solu-ção que leve em conta nossa realidade. Às vezes, nem sempre a melhor alternativa é copiar simplesmente aquilo que se faz em outros países, pois isto, ao invés de permitir a divulgação e aplicação de uma idéia pode acabar bloqueando o seu uso.

APÊNDICE I

NÚCLEOS COM FORMA RETANGULAR E LINHAS DE INDUÇÃO

Para entender porque as linhas de indução permanecem dentro do núcleo mesmo quando sua forma é retangular, considere uma barra de ferro envolvida com algumas espiras, conforme mostra a fig. I.1.

Fig. I.1

Se não houvesse deformação das linhas de $\vec{B}$ ao passar de um meio para outro, a linha (1) seguiria dentro do ferro o segmento de curva tracejado. Como as linhas de $\vec{B}$ sofrem uma refração, segundo a lei $\text{tg}\alpha_2/\text{tg}\alpha_1 = \mu_2/\mu_1$, quando passam de um meio para outro, a linha (1) seguirá, dentro do ferro, o segmento de curva cheio, visto que $\alpha_2 \gg \alpha_1$ se $\mu_2 \gg \mu_1$. O fluxo de $\vec{B}$ tem, pois, uma tendência de correr paralelamente aos lados da barra, de deixá-la perto de uma de suas extremidades e entrar pela outra. Nas extremidades da barra aparecerão, como consequência, cargas magnéticas que exercerão um efeito desmagnetizante sobre ela.

Formemos agora um caminho fechado de ferro, anexando à barra uma peça em forma de U, também de ferro. (fig. I.2).

Fig. I.2

A barra magnetizada induzirá cargas magnéticas nas extremidades da peça em forma de U que, por sua vez, reduzirão o campo desmagnetizante na barra, permitindo que as linhas de $\vec{B}$ sigam mais paralelamente ao seu eixo mesmo perto de suas extremidades. Nas laterais e na base da peça em U a tendência do fluxo também é fluir paralelamente aos seus eixos longitudinais, pois a magnetização se dá em maior intensidade no sentido longitudinal⁵⁴. Nos cantos a direção de magnetização se altera de modo a permitir que as linhas de $\vec{B}$, fechando-se sobre si mesma, satisfaçam à condição geral, $\text{div} \vec{B} = 0$. É razoável supor que, devido às concentrações de cargas magnéticas nos cantos, o número de linhas de indução que se fecham por fora do núcleo é pequeno. Como consequência pode-se dizer que o fluxo magnético está contido quase que inteiramente dentro do ferro, da mesma maneira que uma corrente está contida num condutor elétrico.

APÊNDICE II

PEÇAS DO MODELO M-1

Nota: A numeração das peças é a mesma da fig. 4.10

Sequência da montagem da caneta Sylvapen (corte longitudinal)

APÊNDICE III

CONSTRUÇÃO DOS DISCOS

Os melhores discos, do ponto de vista da planicidade, são feitos de latão (se massa grande não for um inconveniente). É um material relativamente caro, porém facilmente torneável (e admite um bom acabamento). Nesses discos, contudo, a rosca central não é feita diretamente no metal mas sim num anel de PVC encaixado no centro pois, nos três pucks descritos, a extremidade inferior do núcleo do eletroímã, que rosqueia no centro do disco, leva uma luva também de PVC. Isto permite vedar as roscas, eficientemente, com fita de teflon.

A construção de um disco de PVC (em chapa) exige mais cuidado; é preciso usiná-lo suavemente e não prendê-lo com muita pressão no torno, se quisermos evitar a deformação do material. Para dar o acabamento final, o disco (seguro por uma luva rosqueada no centro) deve descrever um oito, ora num sentido ora no outro, sobre uma lixa para metal colocada numa superfície rígida e plana ; começa-se a operação com uma lixa nº 360 (por exemplo) e termina-se com uma nº 600. O controle da planicidade é feito com uma régua de aço.

A borda do disco pode ser reta ou arredondada. Quando dois pucks são usados em colisões, é preferível que um deles tenha borda reta e o outro borda arredondada⁵⁵.

APÊNDICE IV

PEÇAS DO MODELO M-2

Nota: A numeração das peças é a mesma da fig. 5.4

16

— PLASTICO PVC

— AÇO 1020

— LATÃO

Carretel

Câmara de borracha

Sequência da montagem da câmara (corte longitudinal)

Nota: As arruelas têm diâmetro de 16mm e espessura de 0,6mm.

APÊNDICE V

Duas câmaras foram utilizadas na versão M-3. Numa delas , fig. V.1, a membrana de borracha (0,6 mm de espessura) é presa à base através de um anel com rosca e fixada na caneta da mesma forma que no M-2 (apêndice IV). As arruelas de PVC, entretanto, contrariamente ao que foi feito naquele caso, não precisam ser coladas.

Fig. V.1

Na outra, fig. V.2, a membrana é colada com Super Bonder sobre um anel de borracha de 34 mm de diâmetro (retirado de uma câmara de ar para pneu de bicicleta). As arruelas de PVC que prendem a membrana na tampa superior da caneta são agora coladas na membrana. Esta câmara pode ser montada numa base semelhante à peça nº 4 do apêndice IV. (Vê-se com esta proposta que é possível construir uma câmara de borracha mesmo sem dispor de uma matriz para fundi-la numa única peça como foi feito com a câmara do M-2).

Fig. V.2

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. MARCLEY, R.G. - Air suspended pucks for momentum experiments Am. J. Phys., 28:670-4, 1960.
2. MEINERS, H.F. (ed.) - Physics demonstration experiments. New York, The Ronald Press, 1970. v.1, cap.10, p.221.
3. SAAD, F.D. & NASCIMENTO, I.C. - Levantamento de dados sobre la boratórios de ensino do ciclo básico de física. Rev. Bras. Fís., vol. esp.nº2:423-49, 1976.
4. MARCLEY, R.G. - Acceleration carts and track. Am. J. Phys ., 29:294-7. 1961.
5. HECHT, K. - Collision experiments in shadow projection. Am. J. Phys., 29:636-9, 1961.
6. DAW, H.A. & MITCHELL, J.P. - Conservation of momentum experi- ment. Am. J. Phys., 30:530-1, 1962.
7. BAYES, J.H. & SCOTT, W.T. - Billiard-ball collision experiments. Am. J. Phys., 31:197-200, 1963.
8. PSSC (Physical Science Study Committee). - Física. São Paulo, EDART, 1967. Parte 3, p.178 (experiência III-10: Uma colisão em duas dimensões).
9. HOLTON, G. et alii. - Harvard Projects Physics. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1971. Unidade 3, text and handbook , cap.9, p.150-1.
10. WHITNEY, W.M. - Theory of air-supported puck. Am. J. Phys., 32: 306-12, 1964.
11. REF. 1.
12. INGARD, U. & KRAUSHAAR, W.L. - Introduction to mechanics, mat- ter, and waves. Massachusetts, Addison Wesley, 1960. cap . 4.
13. REF. 1
14. NEHER, H.V. & LEIGHTON, R.B. - Linear air trough. Am. J. Phys., 31:255-62, 1963.

15. STULL, J.L. - Linear air trough: a modification. Am. J. Phys.,
30:839-40, 1962.
16. DAW, H.A. - A two-dimensional air table. Am. J. Phys., 31:
867-9, 1963.
17. WEBB, H.H. - Quantitative study of linear momentum in two di-
mensions by means of pucks operated on a rectangular air
table. Am. J. Phys., 33:1027-32, 1965.
18. BRUHAT, G. - Mécanique. Paris, Masson, 1934. cap.10, p.222.
19. DUANE, B.H. - Air suspension gyroscope. Am. J. Phys., 23:
147-50, 1955.
20. MARCLEY, R.G. - Air suspension gyroscope. Am. J. Phys., 28:
150-5, 1960.
21. GROSS, W.A. - Gas film lubrication. New York, John Wiley
Sons, 1962. p.3.
22. REF. 21, p.3.
23. REF. 1, p.673.
24. REF. 12, p.89.
25. REF. 10, p. 306.
26. MURAMATSU, M. - Produção, utilização e avaliação de filmes di-
dáticos de física. São Paulo, USP, 1976. p.20-2 (Disserta-
ção de Mestrado em Ensino de Ciências apresentada no IF-
-USP).
27. PSSC (Physical Science Study Committee).-Physics: teacher's re
source book and guide. 2 ed. Boston, D.C. Heath and Com-
pany, 1967. Parte 3, p.19-6.
28. REF. 27, p.III-4(3) a III-4(5).
29. MAROUSEK, G. & WILLIAMS III, T.W. - Experiments on air table.
Massachusetts, Ealing, 1969.
30. GOLDEMBERG, J. - Física Geral e Experimental. 2 ed. São Paulo,
Ed. Nacional, 1970. v.1, p.467 e p.473-5.
31. REF. 17.
32. REF. 2, p.243 e p.581-2.

33. REF. 2, p.222-3 e p.228-9.
34. KOLENKOW, R.J. - Electronic Spark Timer. Am. J. Phys., 34 : 536-7, 1966.
35. HARVEY, P.M. & WAGNER, R.R. - Transistorized Spark Timer. Am. J. Phys., 36:60-1, 1968.
36. ADVANCED Undergraduate Laboratory Experiments in Physics, Lloyd W. Taylor, Manual. Massachusetts, Addison-Wesley, 1961 . p.33-4.
37. HESSEL. R. - Um novo dispositivo para marcação de posições de um disco suspenso por colchão de ar. In: Reunião Anual , 29, Fortaleza, 1977. RESUMOS: suplemento de Ciência e Cultura 29(7), Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, 1977. p.334.
38. VENNARD, J.K. & STREET, R.L. - Elementos de mecânica dos fluidos. 5 ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1978. p.16. Traduzido por Adir M. Luiz.
39. REF. 10.
40. DILLON, J.F.Jr. & EARL, H.E. - Demonstration of magnetic domains. Am. J. Phys., 21:201-8, 1959.
41. NESBITT, E.A. - Ferromagnetic domains. Bell Telephone Laboratories, 1962.
42. BOHN, E.V. - Introduction to electromagnetic fields and waves. Massachusetts, Addison-Wesley, 1968. p.234.
43. DURAND, E. - Magnétostatique. Paris, Masson, 1968. p.516-8.
44. HARNWEL, G.P. - Principles of electricity and electromagnetism. 2 ed. New York, MacGraw-Hill, 1949. p.408.
45. MIT Staff. - Magnetic circuits & transformers. New York, John Wiley & Sons, 1943. cap.3.
46. ROTERS, H.C. - Electromagnetic devices. New York, John Wiley & Sons, 1941.
47. SKILLING, H.H. - Electromechanics. New York, John Wiley & Sons, 1962.

48. GOURISHANKAR, V. - Eletromechanical energy conversion. Pennsylvania, International Textbook Company, 1965.
49. REF. 42, p.235.
50. REF. 1, p.671.
51. BITTENCOURT, D.R.S. - Uma análise do projeto de ensino de física (Mecânica). São Paulo, USP, 1977. p.3-5 (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências, apresentada no IF-USP).
52. PSSC (Physical Science Study Committee). - Física. 3 ed. São Paulo, EDART, 1968. Parte 1, p.217-9.
53. PSSC (Physical Science Study Committee). - Física. Ed. prel. Rio de Janeiro, Centro de Publicações Técnicas da Aliança, 1964. Parte 2, p.384-92.
54. BRUHAT, G. - Électricité. 7 ed. Paris, Masson, 1959. p.380.
55. REF. 1, p.672.